教学安排：

答疑：周五15:30-16:30，近春园西楼257

作业：网络学堂**提交电子版**，**不用抄写题目，写清题号。**交作业时间每周一。

期中考试：第九周周六（11月12日）上午，时间地点另行通知

习题课时间：第四周开始，每周一次。助教负责，分班进行，时间周五第6大节，周日第4大节。习题课不用选。

课程微信群：关联**企业微信**

第0章预备知识

1. 平面上的向量

回顾：

记$\mathbb{R}^2 = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \middle| \ v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$为（平面上）所有代数向量的全体

加法运算：$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, 定义 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$

数乘运算：$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$, 定义 $c\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{bmatrix}$

给定$\mathbb{R}^2$ 中两向量 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$，形如$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}, c, d \in \mathbb{R}$ 的向量称为$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$的一个**线性组合**。

记$Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \{c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} \mid c, d \in \mathbb{R}\}$ 为$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$的所有线性组合构成的集合。

1.4 向量的线性组合

（a）向量组的线性组合的定义

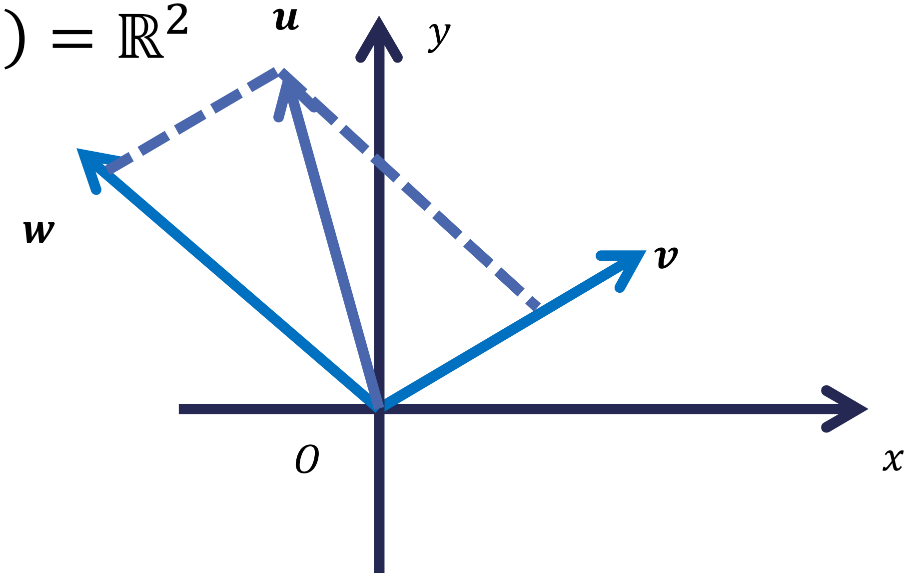
（b）线性相关与线性无关（★）

注意代数定义与对应的几何解释

$\mathbb{R}^2$ 中两非零向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}$,

如果$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$共线，即$\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{v}$, c为某个实数，则$Span(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\{c\boldsymbol{v}\mid c\in\mathbb{R}\}$

如果$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$不共线，则$Span(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\mathbb{R}^2$



存在$c,d\in\mathbb{R}$使得

$\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$

（b）线性相关与线性无关 （★）：

设$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$。如果有不全为零的两个数$c, d \in \mathbb{R}$使得

$$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \text{ ,}$$

则称$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$**线性相关。**否则，称$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$**线性无关。**

因此， $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$线性无关可以表述为

$$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \Rightarrow c = d = 0$$

线性相关与线性无关的几何意义：

设$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$线性相关，则有不全为零的两个数$c,d\in\mathbb{R}$使得

$$c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}\text{。}$$

不妨设$c\neq 0$，

$$c\boldsymbol{v}=-d\boldsymbol{w}$$

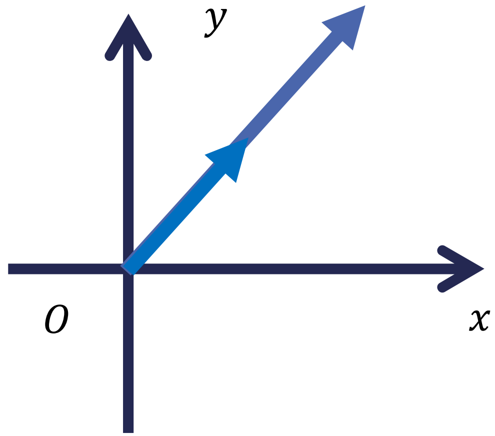
$$\boxed{\boldsymbol{v}=-\frac{d}{c}\boldsymbol{w}.}$$

$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$**共线**

命题：

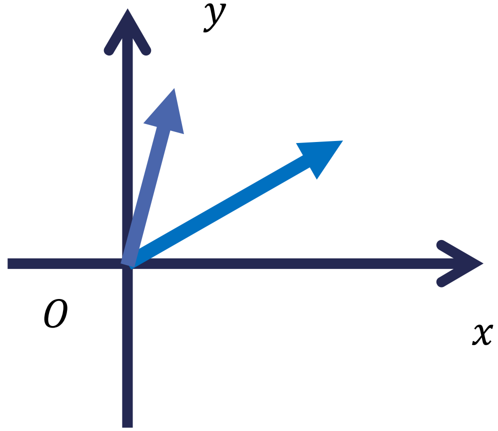
代数　　几何

（1）$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$线性相关当且仅当$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$共线。



（2）$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$线性无关当且仅当$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$不共线。

代数　　几何



单选题 1分

设置

判断两向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$线性相关或线性无关。

A 线性相关

B 线性无关

提交

有限个向量的线性相关与线性无关：

设$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^2$, 如果有不全为零数$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$使得

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}\ ,$$

则称这k个向量**线性相关。**否则，称它们**线性无关。**

单选题 1分

设置

已知$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^2$线性相关，则$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$中

A 两两共线

B 只有两个向量共线

C 存在两个向量共线

D 以上都不正确

提交

例:

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$**线性无关**，且$Span(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \mathbb{R}^2$。

我们称$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$构成$\mathbb{R}^2$的一组**基**。

由于$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$为单位向量且相互正交，称它们构成$\mathbb{R}^2$的一组**标准正交基**

2. 高维空间中的向量

2.1 向量空间$\mathbb{R}^n$

（a）n维向量空间$\mathbb{R}^n$

（b）$\mathbb{R}^n$中的加法与数乘运算

（a）n维向量空间$\mathbb{R}^n$：

设$n \geq 1$为自然数，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$, 称为**一个$\boldsymbol{n}$维向量**。

n维向量的全体记为$\mathbb{R}^n$, 即

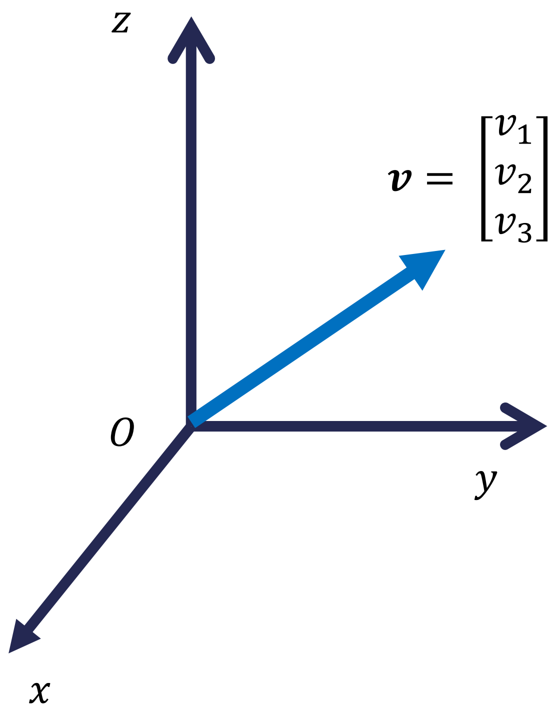
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \middle| v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 称为**零向量**。

代数思维帮助人们突破几何思维的限制

例: $n = 3$

$\mathbb{R}^3$



投票 最多可选1项

设置

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ 与$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$是否为同一向量?

A 相同

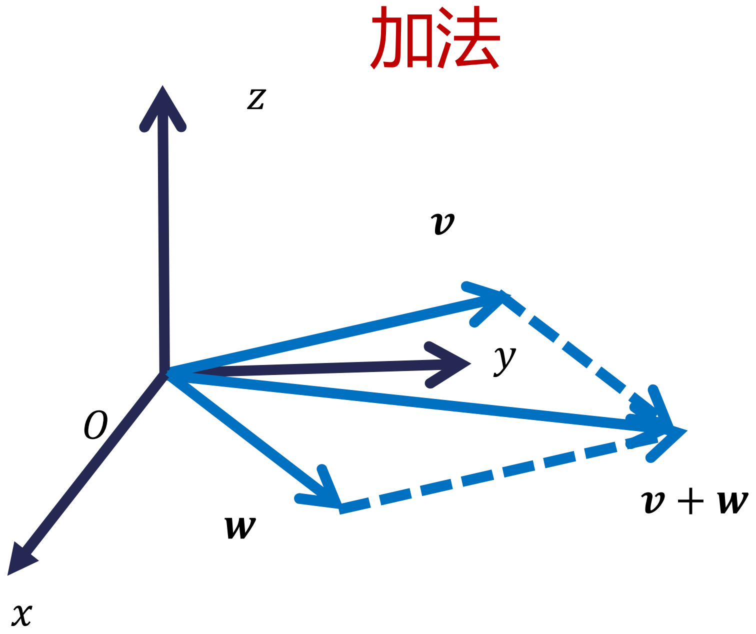
B 不同

提交

(b) $\mathbb{R}^n$中的加法与数乘运算

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

定义 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ \vdots \\ v_n+w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$



$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}$$

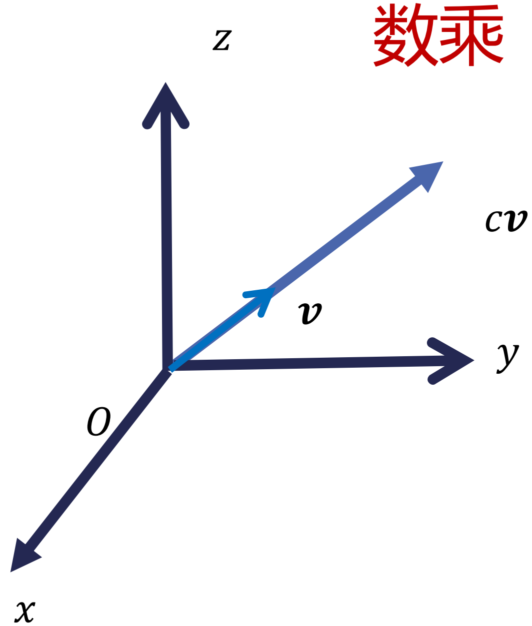
定义 $c\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}cv_1\\ \vdots\\ cv_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$

有时我们也把$c\boldsymbol{v}$写作$\boldsymbol{v}c$

向量空间中的数乘

矩阵的乘法，$\boldsymbol{v}$视为$n\times 1$矩阵

数乘



向量加法、数乘运算总结：

$\mathbb{R}^n$中的向量的运算满足如下**8条**容易验证的重要性质：

(1) 加法结合律：$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(2) 加法交换律：$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$

(3) 零向量：存在向量$\mathbf{0}$满足$\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$

(4) 负向量：对任意向量$\boldsymbol{v}$有向量$-\boldsymbol{v}=(-1)\boldsymbol{v}$满足$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$

(5) 单位数：$1\in\mathbb{R}, 1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(6) 数乘结合律：$(c_1c_2)\boldsymbol{v}=c_1(c_2\boldsymbol{v})$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

(7) 数乘对数的分配律：$(c_1+c_2)\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}+c_2\boldsymbol{v}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

(8) 数乘对向量的分配律：$c(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=c\boldsymbol{v}_1+c\boldsymbol{v}_2$

2.2 n维向量的内积，长度与夹角

（a） $\mathbb{R}^n$中向量的内积

（b） $\mathbb{R}^n$中向量的长度

（c） $\mathbb{R}^n$中两向量的夹角

(a) $\mathbb{R}^n$中向量的内积

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{定义 } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

内积满足如下4条性质：

(1) 对称性：$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$

(2) 分配律：$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2$

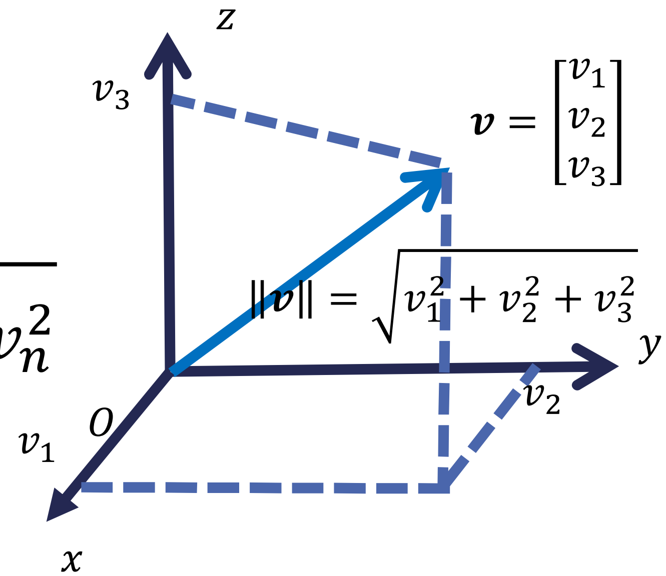
(3) 数乘交换：$\boldsymbol{v} \cdot (c\boldsymbol{w}) = c\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w},\ c \in \mathbb{R}$

(4) 正定性：$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$ 且$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$当且仅当$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

（b）向量的长度：

定义向量$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$的长度为

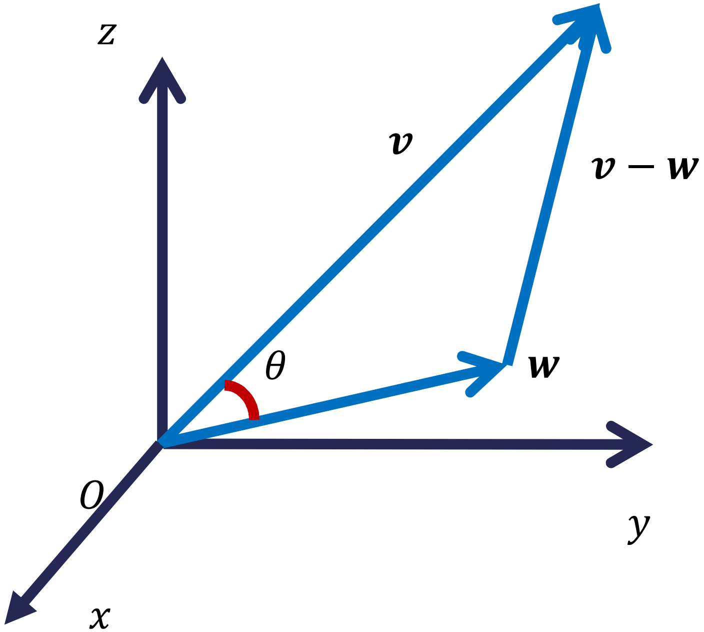
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$



长度为1的向量称为**单位向量**。

对任意非零向量$\boldsymbol{v}$，可做单位化$\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$得到单位向量。

(c) $\mathbb{R}^n$中向量的长度与夹角



根据余弦定理,

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 - 2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\cos(\theta)$$

于是,

$$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} - 2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\cos(\theta)$$

展开左侧项，消去两侧相同项得到

$$2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\cos(\theta)$$

于是 $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$

$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$的夹角$\theta$满足$0 \le \theta \le \pi$且

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}}$$

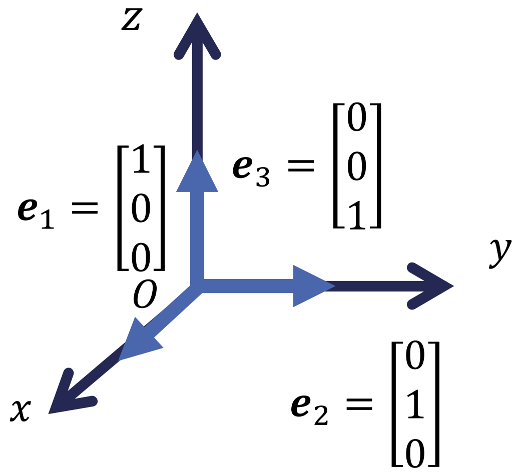
几何　　代数

$\mathbb{R}^n$中两向量正交：

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$正交，如果$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$. 记为$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$.

根据定义，零向量$\mathbf{0}$与$\mathbb{R}^n$中所有向量正交。

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$为单位向量



且两两正交。

代数学的研究方法：

(1) 研究重要的例子

(2) 从例子中抽象出本质的性质

例如: 向量空间的8条性质，内积的4条性质

(3) 研究抽象出来的性质

(4) 研究结果应用到具有这些性质的其他对象上

例如: 抽象向量空间也称为线性空间，见第七章

内积空间，见第八章

2.3 $\mathbb{R}^n$中向量的线性组合

（a）向量的线性组合

（b）线性相关与线性无关

（c）线性相关与线性无关的几何解释

向量的线性组合

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n,\ c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$

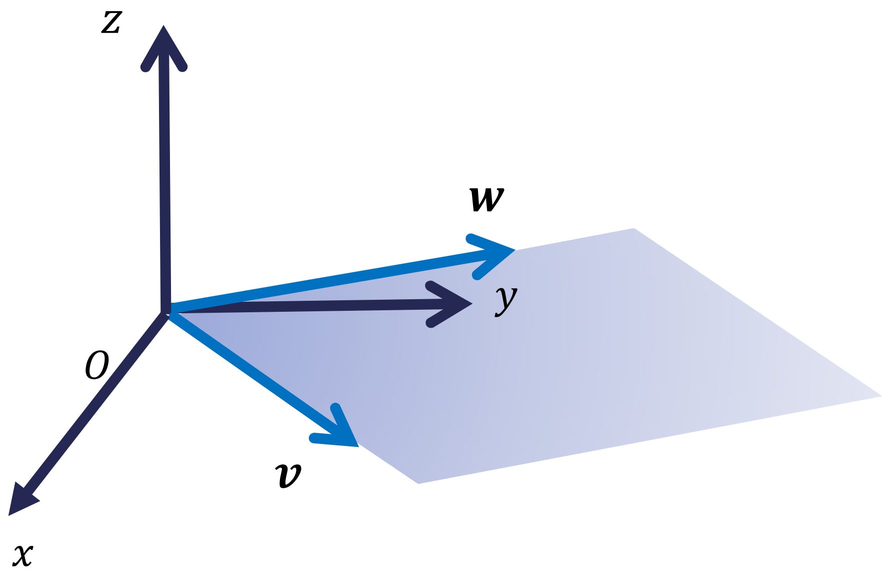
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

称为$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$的一个**线性组合**.

记$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$的所有线性组合构成的集合为

$Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k | c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}.$

例: $Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$?



$Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$是$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$决定的过原点的平面

例:

$$\mathbb{R}^n = Span(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n.$$

(b) 线性相关与线性无关：

$\mathbb{R}^n$中的k个向量$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$称为**线性相关**, 如果存在不全为零的实数$c_1, \dots, c_k$使得

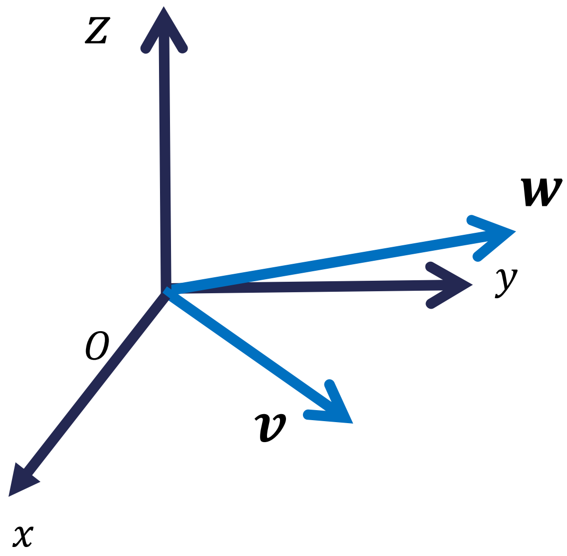
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

否则，称它们**线性无关**。

例:

如果$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$中有零向量，那么它们线性相关。

例:



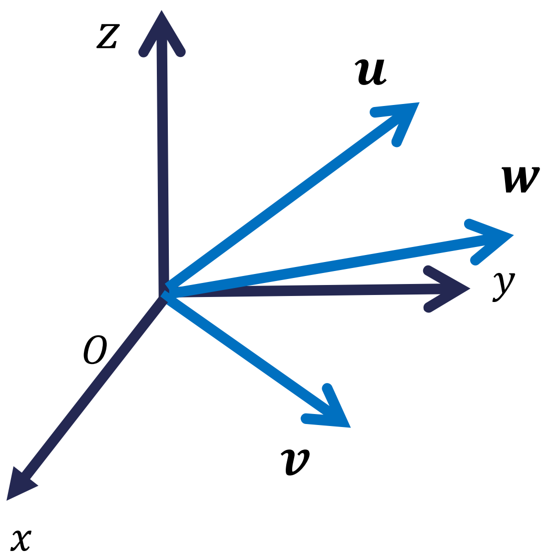
$\mathbb{R}^3$中两非零向量$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$

$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$线性相关当且仅当共线。

$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$线性无关当且仅当不共线，

此时，$Span(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$为一平面。

例:



$\mathbb{R}^3$中三个非零向量$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$

代数 几何

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$线性相关当且仅当共面

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$线性无关当且仅当$Span(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \mathbb{R}^3$。

代数 几何

线性相关(线性无关)是共线、共面(不共线、不共面)等几何概念的代数化

基：

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$满足两条重要性质：

1. $Span(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \mathbb{R}^n$.

2. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$线性无关

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$构成$\mathbb{R}^n$的一组**基**

由于$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$为单位向量且正交，称它们构成$\mathbb{R}^n$的一组**标准正交基**

单选题 1分

设置

设$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$为$\mathbb{R}^n$中两两正交的**非零**向量，下列陈述正确的是

A 它们一定线性相关

B 它们可能线性无关也可能线性相关

C 它们一定线性无关

提交

投票 最多可选1项

设置

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^3$下列陈述正确的是

A 它们一定线性相关

B 它们可能线性相关可能线性无关

C 它们一定线性无关

提交

问题：

$\mathbb{R}^2$中能否找到3个两两正交（或线性无关）的非零向量?

$\mathbb{R}^3$中能否找到4个两两正交（或线性无关）的非零向量?

$\mathbb{R}^n$中能否找到$(n+1)$个两两正交（或线性无关）的非零向量?

第二章引入**维数**回答这个问题

3.1 含参直线方程

3.2 $\mathbb{R}^3$中的平面方程

3.3 $\mathbb{R}^3$中向量的叉积

3. 三维空间中几何

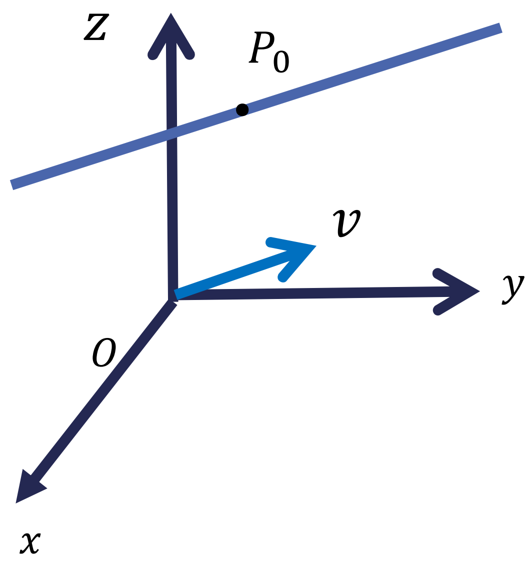
目标

研究3维空间中**直线**与**平面**的方程

关注“自由度” ⟷ 维数的概念

3.1 含参直线方程

给定点$P_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

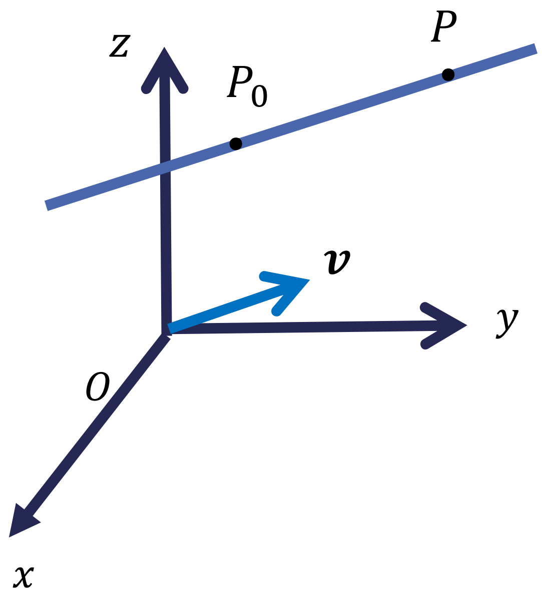


过P_0点，求与$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$方向平行的直线方程

设$P=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$为直线上任意一点

存在$t\in\mathbb{R}$使得

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$$



于是直线方程为

自由度=1

$$\begin{cases}x-a=tv_1\\y-b=tv_2\\z-c=tv_3\end{cases}$$

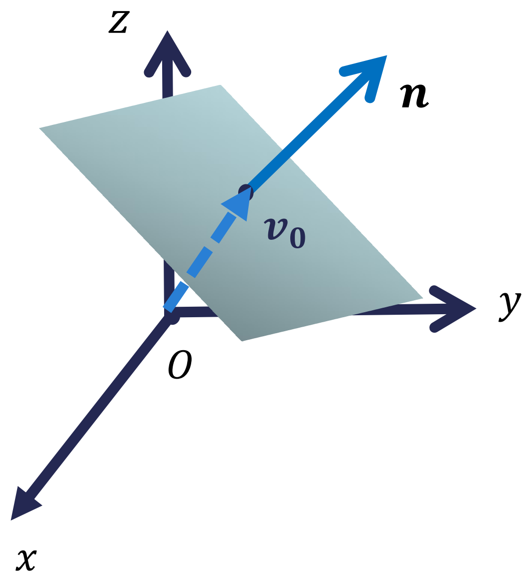
3.2 平面方程

法向量

给定空间中一点$\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$。求过$\boldsymbol{v}_0$且与方向

$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$垂直的平面方程

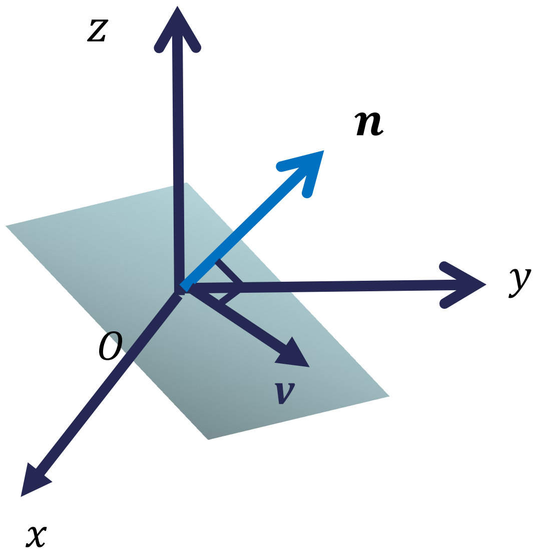
$\boldsymbol{n}$称为平面的**法向量**



3.2 平面方程

假设平面过原点，

那么平面上任一向量$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$与方向$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$正交



因此，$\boldsymbol{v}$满足方程

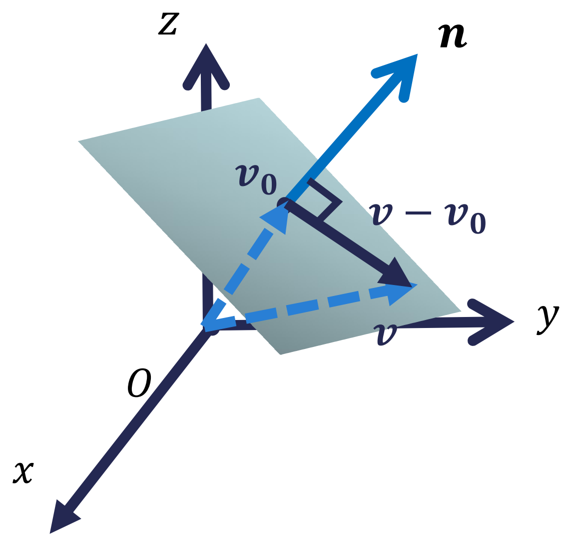
$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=ax+by+cz=0$

于是，平面方程为$ax+by+cz=0$

假设平面过点$\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

那么平面上任一向量$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$满足

$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$与法向量$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$正交。



因此，

$$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) \cdot \boldsymbol{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

于是，平面方程为$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$

展开得到$ax + by + cz = \underbrace{\boxed{ax_0 + by_0 + cz_0}}_{\text{常数}}.$ **自由度=2**

$\mathbb{R}^n$ 中的超平面：

一般的，方程

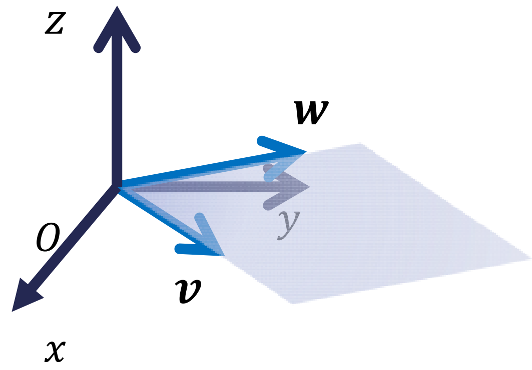
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

表示$\mathbb{R}^n$中的一个**超平面**。

自由度$= n - 1$

例:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$ 描述$Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

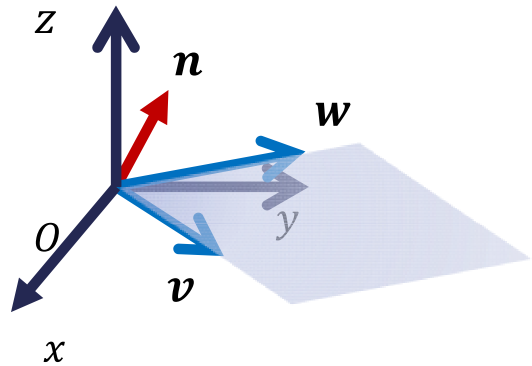


(1) 参数描述$Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \{t_1\boldsymbol{v} + t_2\boldsymbol{w} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.

自由度=2

例：

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$ 描述$Span(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$.



(2)平面方程描述

设$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$为平面的法向量。由于$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$正交，

$$\begin{cases}2x+2y+0z=\boxed{0}\\ x\ \ +3y+\ z\ \ =\boxed{0}\end{cases}$$

齐次方程组

容易得到

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\y\\-2y\end{bmatrix}$$

取$y=1$

因此，$Span(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$方程为

$$-x+y-2z=0$$

平面过原点；
自由度=2

3.3 $\mathbb{R}^3$中向量的叉积

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3,\text{定义}$$

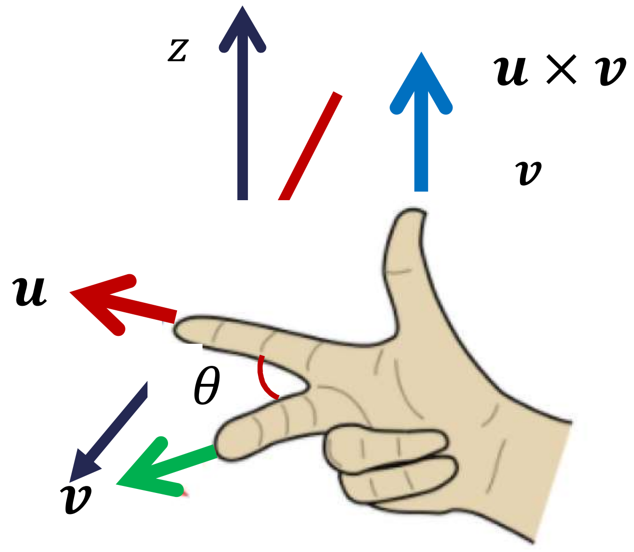
$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

容易验证

1. 如果$\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

2. $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=0$

3. $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\||\sin\theta|$



叉积方向由右手定则给出

第四章行列式再见

叉积 v.s. 点积:

叉积

只对$\mathbb{R}^3$中两个向量有定义

$\mathbb{R}^3$中两个向量取叉积得到$\mathbb{R}^3$中一个**向量**

点积

对$\mathbb{R}^n$中任意两个向量有定义

$\mathbb{R}^n$中两个向量取点积得到一个**数**