回顾上节课内容:

1. $\mathbb{R}^n$的子空间的定义

设$\mathcal{M}$为$\mathbb{R}^n$的非空子集，如果对任意$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{M}$都满足

(1) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \mathcal{M}$

(2) $c\boldsymbol{v} \in \mathcal{M}$, $\forall c \in \mathbb{R}$

则称$\mathcal{M}$为$\mathbb{R}^n$的一个**子空间**.

2. 构造子空间的方法

(1) 通过线性生成构造: S: $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$为$\mathbb{R}^n$中的一向量组

$Span(S) = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r | c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}\}$为$\mathbb{R}^n$的子空间

(2) 通过线性映射构造

问题： 子空间是否都可以通过 $Span$ 得到?

是否都可以通过线性映射（象空间、零空间）得到?

矩阵的四个基本子空间

$$A=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\end{bmatrix}=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

A的列空间$\mathcal{R}(A)=Span(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)=\{Ax\mid x\in\mathbb{R}^n\}$. 列空间为$\mathbb{R}^m$的子空间

A的行空间$\mathcal{R}(A^T)=Span(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_m)$. 行空间为$\mathbb{R}^n$ 的子空间

A的零空间$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$. 零空间为$\mathbb{R}^n$的子空间

A的左零空间$\mathcal{N}(A^T)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m\mid A^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\}$. 左零空间为$\mathbb{R}^m$的子空间

子空间与映射的性质:

$\mathcal{A}$为满射当且仅当$\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^m$

$\mathcal{A}$为单射当且仅当$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{0}\}$

本章的一个重要内容是求四个基本子空间的**基**和**维数**

2.2节：基和维数的基本理论，2.3，2.4节求四个基本子空间的基和维数

例:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{v}^T$的列空间$\mathcal{R}(\boldsymbol{v}^T) = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{v}^T$的行空间$\mathcal{R}(\boldsymbol{v}) = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{v}^T$的零空间$\mathcal{N}(\boldsymbol{v}^T) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$

应用：

对线性映射$\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$，以下叙述等价：

（1）$\mathcal{A}$为双射；

（2）$\mathcal{A}$为单射；

（3）$\mathcal{A}$为满射。

证明：设A是$\mathcal{A}$的表示矩阵，A为m阶方阵。回顾A可逆的等价条件：

方阵A可逆$\Leftrightarrow$齐次方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解$\Leftrightarrow$对任意$\boldsymbol{b}$，方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解.

$\mathcal{A}$为单射$\Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解 $\Leftrightarrow A$可逆

$\mathcal{A}$为满射$\Leftrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$对任意$\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解 $\Leftrightarrow A$可逆

命题：

$\mathcal{M},\mathcal{N}$为$\mathbb{R}^m$的子空间，则

(1) $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{v}\in\mathcal{M},\boldsymbol{v}\in\mathcal{N}\}$为$\mathbb{R}^m$的子空间。

(2) $\mathcal{M}+\mathcal{N}=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}\in\mathcal{M}，\ \boldsymbol{w}\in\mathcal{N}\}$为$\mathbb{R}^m$的子空间。

证明：直接验证，留为习题。

注意：$\mathcal{M}\cup\mathcal{N}$一般不是$\mathbb{R}^m$的子空间

例如，x轴与y轴分别是$\mathbb{R}^2$的子空间，但是它们的并不是子空间。

3. 基的定义

我们看到用线性生成（$Span$）能够得到子空间，我们想用**最少**的向量生成子空间，这便得到**基(basis)**的想法.

本节和下节的主要内容：

1. 子空间都由线性生成得到　　←　基本命题1
2. 定义$\mathbb{R}^m$及其子空间的基
3. 基的概念蕴含的若干问题：存在性、数目和基扩充

基本命题2

基的概念涉及两个方面：

1. 线性生成（√）
2. 线性无关

线性相关与线性无关：

回顾定义：

$\mathbb{R}^m$中n个向量$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$称为线性相关,如果有不全为零的一组数$c_1,\dots,c_n$使得

$$c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}。$$

否则，称它们线性无关。

线性相关、线性无关与齐次方程组是否有非零解的关系：

令$A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$$

向量组$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$线性相关当且仅当方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解

向量组$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$线性无关当且仅当方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解

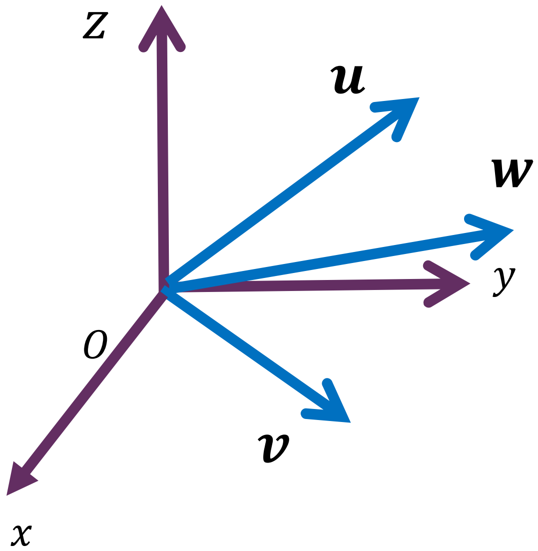
回顾命题：

设$n > m$. 线性空间$\mathbb{R}^m$中任意n个向量线性相关.

这是因为$n > m$时，主元个数小于列数n。根据方程组有解的判定定理，齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$一定有非零解

因此, $\mathbb{R}^m$以及它的子空间中**最多有$\boldsymbol{m}$个线性无关的向量**.

例:



$\mathbb{R}^3$中三个非零向量$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$

若已知$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$线性无关

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$线性相关当且仅当$\boldsymbol{u} \in Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$线性无关当且仅当$\boldsymbol{u} \notin Span(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

基本命题1：

设$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$为$\mathbb{R}^m$中一组线性无关向量, $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m$.

$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}$线性相关当且仅当$\boldsymbol{v}\in Span(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$.

若等价条件成立，表示方式唯一。

理解：对于一组线性无关的向量$S:\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$，添加一个向量$\boldsymbol{v}$后新得到的向量组线性相关或无关可以通过$\boldsymbol{v}$是否落在$S$生成得子空间决定。

证明：若$\boldsymbol{v}\in Span(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$，则$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k$。

于是，$\boldsymbol{v}-c_1\boldsymbol{v}_1-\cdots-c_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}$。$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$,$\boldsymbol{v}$线性相关。

反之，假设$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$,$\boldsymbol{v}$线性相关，则存在$c_1,\ldots,c_{k+1}$不全为零使得

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k+c_{k+1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

若$c_{k+1}=0$，则$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$线性相关，与假设条件矛盾。

于是$c_{k+1}\neq 0$，因此$\boldsymbol{v}=-c_1/c_{k+1}\boldsymbol{v}_1+\cdots-c_k/c_{k+1}\boldsymbol{v}_k\in Span(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$.

表示方式唯一：如果$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_k\boldsymbol{v}_k$

相减得到$(c_1 - d_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots (c_k - d_k)\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$

由$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$线性无关，$c_1 - d_1 = \cdots = c_k - d_k = 0$

定理: (子空间都由线性生成得到)

对$\mathbb{R}^m$的任一子空间$\mathcal{M}$，存在$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^m$使得$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$。

我们采用**筛选法**证明:

不妨设$\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$，否则$\mathcal{M} = Span(\mathbf{0})$。

取$\mathcal{M}$中任一非零向量$\boldsymbol{v}_1$。如果$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1)$，则证毕。

否则，取$\boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{M}$满足$\boldsymbol{v}_2 \notin Span(\boldsymbol{v}_1)$。

由基本命题1，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$线性无关。如果$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$，则证毕。

否则，取$\boldsymbol{v}_3 \in \mathcal{M}$满足$\boldsymbol{v}_3 \notin Span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

由基本命题1，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$线性无关。以此步骤进行下去，断言筛选过程有限步结束。

这是因为，$\mathbb{R}^m$中最多有m 个线性无关的向量。

注意：1. 证明过程说明我们实际上可以取**线性无关**的向量组生成子空间
2. 令$A = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k] \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$，则$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \mathcal{R}(A)$

基的定义：

给定$\mathbb{R}^m$的子空间$\mathcal{M}$，若$\mathcal{M}$中存在有限个向量$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$满足：

（1）$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$；

（2）$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$线性无关；

则称向量组$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$是子空间$\mathcal{M}$的一组**基**.

取$\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$. 如果$n > m, \mathbb{R}^m$中任意$n$个向量线性相关

$\Downarrow$

$\mathbb{R}^m$以及任意子空间$\mathcal{M}$的一组基的个数小于等于m

命题：

m阶方阵$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \dots \boldsymbol{a}_m]$可逆当且仅当$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$构成$\mathbb{R}^m$的一组基。

证明：

如果A可逆，则$\mathcal{A}$为双射。

满射说明：$Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m) = \mathbb{R}^m$

单射说明： $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解，

即$[\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \dots \boldsymbol{a}_m]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$线性无关

于是$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$构成$\mathbb{R}^m$的一组基。

如果$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$构成$\mathbb{R}^m$的一组基，

$A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \dots \boldsymbol{a}_m]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解

根据矩阵可逆的判定定理， $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \dots \boldsymbol{a}_m]$可逆。

(a) 基的存在性问题：

$\mathbb{R}^m$的任何非零子空间$\mathcal{M}$都存在一组基。

在定理“子空间都由线性生成得到”的证明过程中看到，我们可以取线性无关的向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$使得$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$

例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$, 求$\mathcal{R}(A)$的一组基

在$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$中找到线性无关的向量组张成$\mathcal{R}(A)$

$$\mathcal{R}(A) = Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = Span(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$$

这样逐一添加比较的方法非常繁琐，我们在2.3节会利用高斯消元求$\mathcal{R}(A)$的一组基

(b) 基的数目问题:

任意两组基是否具有相同数目的向量个数? 我们在下一小节中说明。

本节小结：

(a) 子空间的构造：

1. 线性生成 2. 线性映射

(b) 基的定义

一组线性无关向量能够张成子空间

(c) 基的存在性问题：

$\mathbb{R}^m$的任何非零子空间$\mathcal{M}$都存在一组基。(数目$\leq m$)

如果$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, 能否在$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$中挑出$\mathcal{M}$的一组基?

(d) 基的数目问题 (下节)

(e) 基扩充问题 (下节)

2.2 基和维数

回顾:

基本命题1 ➡ $\mathbb{R}^m$的子空间$\mathcal{M}$都可写成$Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$

本节目标:

1. 在$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$中找线性无关向量组张成$\mathcal{M}$, 即找$\mathcal{M}$的一组**基**
   (在第3章，用Gram-Schmidt正交化将这组基化为标准正交基)
2. 基数目问题：基的数目与基的选取无关，从而定义**维数**
3. 基的扩充问题: 子空间的一组基扩充为$\mathbb{R}^m$的一组基

主要内容:

1. 向量组的基本概念

(a) 向量组的线性表示与线性等价

(b) 线性无关组和极大线性无关部分组

2. 向量组的3个基本性质

目的：通过向量组的基本性质研究子空间中基的问题

3. 基的数目问题

4. 基的扩充问题

1. 向量组基本概念：向量组的线性表示

定义：设S,T为$\mathbb{R}^m$中两组向量，如果对任意$\boldsymbol{v} \in S, \boldsymbol{v} \in Span(T)$, 则称$\boldsymbol{S}$**可被**$\boldsymbol{T}$**线性表示。**

$S: \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$与$T: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$为$\mathbb{R}^m$中的两组向量，以下叙述等价

（1）S可以被T线性表示；

（2）存在$k \times n$矩阵A满足$[\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k]A$;

（3）$Span(S) \subseteq Span(T)$.

向量组线性表示的传递性:

设$S: \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n, T: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, R: \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$为$\mathbb{R}^m$的三组向量。

如果S可以被T线性表示，T可以R被线性表示，则S可以被R线性表示。

证明:

$$Span(S) \subseteq Span(T), Span(T) \subseteq Span(R) \ \Rightarrow Span(S) \subseteq Span(R)$$

注意：向量组的线性表示**不是**等价关系

向量组的基本概念：线性等价

定义：$\mathbb{R}^m$中两组向量$S: \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$，$T: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ **线性等价**，如果它们可以相互表示。

等价地，$Span(S) = Span(T)$,

即S与T生成相同的子空间。

线性等价是个等价关系。

向量组的基本概念：线性无关组与极大线性无关部分组

定义：设$S: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$为$\mathbb{R}^m$中的一组向量。如果$S$中向量线性无关，则$S$称为**（线性）无关组。**

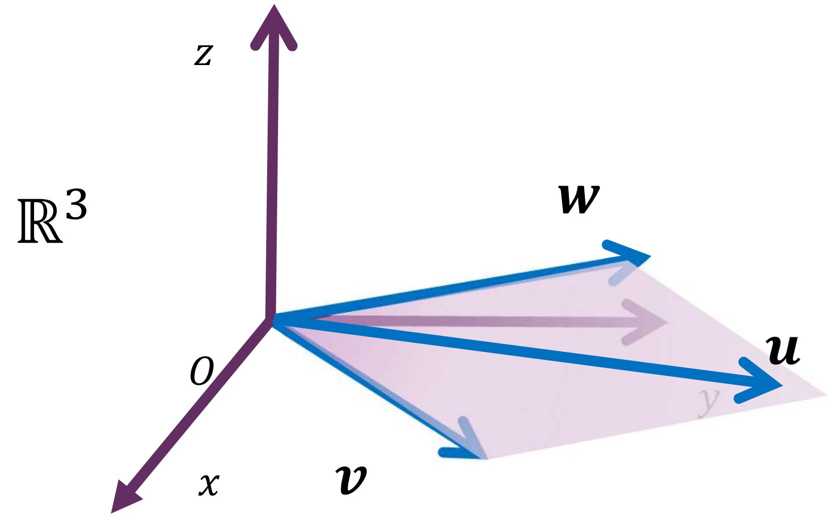
定义：$S: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$为$\mathbb{R}^m$中一组向量。设$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$为$S$的一个部分组，如果：

（1）$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性无关；

（2）S可以被$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性表示；

则称$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$是$S$的一个**极大线性无关部分组。**

例：极大线性无关部分组



向量组$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$，向量组$\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$，向量组$\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$都是向量组$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$的极大线性无关部分组

例：极大线性无关部分组

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$, 求向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$中的极大线性无关部分组

$\mathcal{R}(A) = Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = Span(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$

$= Span(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$线性无关；$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$线性无关；$\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$线性无关

因此，它们都是极大线性无关部分组

2. 向量组的基本性质

关于向量组我们逐条建立下面3条性质

(a) 任意向量组存在极大线性无关部分组

(b) 线性无关组可以扩充为一个极大线性无关部分组

(c) 向量组的任意两个极大线性无关部分组的向量个数相同

向量组		子空间
向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$	⟷	子空间$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$
极大线性无关部分组	⟷	子空间的基
极大线性无关部分组向量数相同	⟷	基的个数相同
线性无关组扩充为极大线性无关部分组	⟷	基的扩充

命题: (极大线性无关部分组的存在性)

任意向量组$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$都存在极大线性无关部分组。

证明：采用逐一筛选的方法。

如果$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$，则去掉$\boldsymbol{v}_1$，否则保留。

不妨设$\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$。如果$\boldsymbol{v}_2$与$\boldsymbol{v}_1$线性相关，则去掉$\boldsymbol{v}_2$；否则保留$\boldsymbol{v}_2$。

接着考察$\boldsymbol{v}_3$。如果$\boldsymbol{v}_3$与$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$线性相关，则去掉$\boldsymbol{v}_3$；否则保留$\boldsymbol{v}_3$。

类似地逐个考察每个向量，如果某个向量与前一步得到的向量组线性相关，则去掉；否则保留。

考查完所有向量后得到原向量组的极大线性无关部分组。

命题: (无关组扩充为极大无关部分组)

设$T: \boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$为向量组$S: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$的一组线性无关向量，则$T$可以扩充为$S$的一个极大线性无关部分组。

证明：使用筛选法，将S中的向量逐个添加到T中查看线性相关性。