Review

- (Cauchy收敛原理) $\forall b > a, f \in R[a,b]$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, s.t. \forall A_2 > A_1 > M, \text{有} \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

- (Cauchy收敛原理)$\forall c \in (a,b), f \in R[a,c]$, 则瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (b为唯一瑕点)收敛的充分必要条件是:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, b-a), s.t.$

$$\left|\int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \forall 0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta.$$

- 广义积分的绝对收敛与条件收敛

- (比较判敛法) $f,g\in R[a,b],\forall b>a.$ 若$\exists K>a, s.t.$
$|f(x)|\le g(x),\forall x>K,$则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛;

(2) $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散.

Remark. 比较判敛法只能用于判断广义积分的绝对收敛性, 不能用于判断广义积分的条件收敛性.

• (比较判敛法-极限形式) f, g非负; $f, g \in R[a,b], \forall b > a$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

(1)若$C \in (0,+\infty)$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛散;

(2)若$C = 0$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(3)若$C = +\infty$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

Remark. 极限形式的比较判敛法也只能用于判断广义积分的绝对收敛性, 不能用于判断广义积分的条件收敛性.

• (比较判敛法) b为 f 的瑕点,且 $f \in R[a,c], \forall c \in (a,b)$.

若$|f(x)| \le g(x), \forall x \in (b-\delta, b)$,则

(1) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛;

(2) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散.

• (比较判敛法-极限形式) 设 f, g 在 $(b-\delta, b)$ 中非负;

$$f, g \in R[a,d], \forall d \in (a,b); \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

(1)若 $C \in (0,+\infty)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2)若 $C = 0$, 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3)若 $C = +\infty$, 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

- 比较判别法中“标尺”

    常用“标尺”：$\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$.

- (积分第二中值定理) 设$f \in R[a,b]$, g在$[a,b]$上单调,

则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- 设b为瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的唯一瑕点.

(1)(Dirichlet判别法)若$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$在$[a,b)$上有界,

$g(x)$在$[a,b)$上单调且$\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$,则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

(2)(Abel判别法) 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛,$g(x)$在$[a,b)$上单调有界,则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

• (Dirichlet判别法) 设

(1) $F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界,

(2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

• (Abel判别法) 设

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, (2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

Chap7.线性常微分方程

（Linear ordinary differential equations）

常微分方程已有悠久的历史，而且继续保持着进一步发展的活力，其主要原因是它的根源深扎在各种实际问题之中.

牛顿最早采用数学方法研究二体问题，其中需要求解的运动方程是常微分方程. 他以非凡的积分技巧解决了它，从而在理论上证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆，澄清了当时关于地球将坠毁于太阳的一种

悲观论点. 另外, 莱布尼兹也经常与牛顿在通信中互相提出求解微分方程的挑战.

嗣后, 许多著名数学家, 例如伯努里(家族), 欧拉, 高斯, 拉格朗日和拉普拉斯等, 都遵循历史传统, 把数学研究结合于当时许多重大的实际力学问题, 在这些问题中通常离不开常微分方程的求解法. 海王星的发现是通过对微分方程的近似计算得到的, 这曾是

历史上的一段佳话. 十九世纪在天体力学上的主要成就应归功于拉格朗日对线性常微分方程的工作.

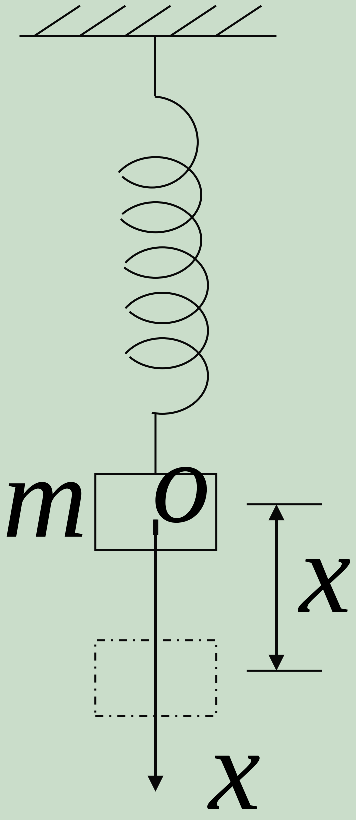
在十九世纪早期, 柯西给微积分学注入了严格性的要素, 同时他也为微分方程的理论奠定了一个基石 — 解的存在性和唯一性定理.到十九世纪末期, 庞卡莱和李雅普诺夫分别创立了常微分方程的定性理论, 这些工

作代表了当时非线性力学的最新方法. 二十世纪初, 伯克霍夫继承并发展了庞加莱在天体力学中的分析方法, 创立了拓扑动力系统和各态历经的理论, 把常微分方程的研究提高到新的水平.

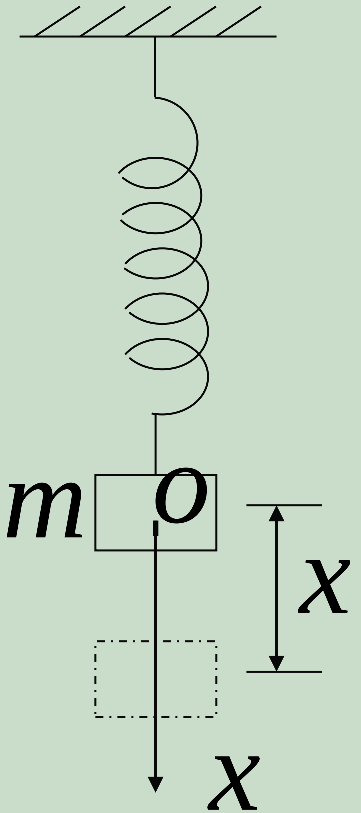
——摘自《常微分方程教程》(丁同仁, 李承治,高等教育出版社)序言.

§1. 常微分方程的定义 及解的存在唯一性定理

1.引例（弹簧振动问题）



取物体静止状态时的质心位置为原点,竖直向下的方向为x轴的正向.使物体偏离平衡位置,它将在平衡位置附近上下振动.求物体所处位置x随时间t如何变化.



分析物体的受力情况.它受到弹簧的拉力$f_1=-kx$及空气阻力$f_2=-\mu x'(t)$.故

$$mx''(t)=-kx-\mu x'(t).$$

这就是一个常微分方程.若物体还受到竖直外力$f(t)$的作用,则

$$mx''(t)=-kx-\mu x'(t)+f(t).$$

2.常微分方程的基本概念

Def 1. 设$x(t)$是在某区间上有定义的未知函数,则称含有$x = x(t)$及其导数$x', x'', \cdots, x^{(n)}$的等式

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0$$

为常微分方程(ODE).若方程中未知函数导数的最高阶数为n,则称为 n阶ODE.

Def 2. 若微分方程中未知函数x及其各阶导数都是以一次方幂的形式出现,则称之为线性ODE.否则,统称为非线性ODE.线性ODE的一般形式为

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t),$$

其中f称为自由项. 当$f(t)\equiv 0$时,称之为n阶齐次线性ODE,否则称为n阶非齐次线性ODE.

Question. 形如$a_0(t)x^{(n)}+\cdots+a_n(t)x=f(t)$的方程为何可以首1化?

例: 判断以下关于$y=y(x)$的微分方程的类型

(1) $xy''+yy'=0$

(2) $y'''+y''+x(y')^2=0$

(3) $xy''+\frac{1}{x}y'=\sin x$

(4) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(xy-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$

例: 求解$y''+x=0.$

解: $y'=-\frac{1}{2}x^2+c_1,\ \ y=-\frac{1}{6}x^3+c_1x+c_2,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

例: $y'-y=0$ 的解为 $y=ce^x, c\in\mathbb{R}.$

例: 可以验证$y''+y=0$有解

$y=\sin x, y=\cos x$及$y=c_1\cos x+c_2\sin x, c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

Def 3. 若在某区间I上存在$x = x(t)$,代入微分方程后使之成为恒等式, 则称$x = x(t)$为微分方程的一个解(一条积分曲线).n阶微分方程的含有n个独立常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$的解称为该方程的一般解, 或通解.不含任意常数的解称为特解. 若$x \equiv 0$为解,则称之为平凡解,非零解又称为非平凡解. 当方程的解可以用初等函数表示出来时,称该方程为可积的,否否则称为不可积的.

3.存在唯一性定理

Thm. (Cauchy-Picard)设$f(x,y)$在矩形

$$D=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$$

中连续,并且关于变元y满足Lipschitz条件,即存在正数L,使得对任意$(x,y_1)\in D$,及$(x,y_2)\in D$,都有

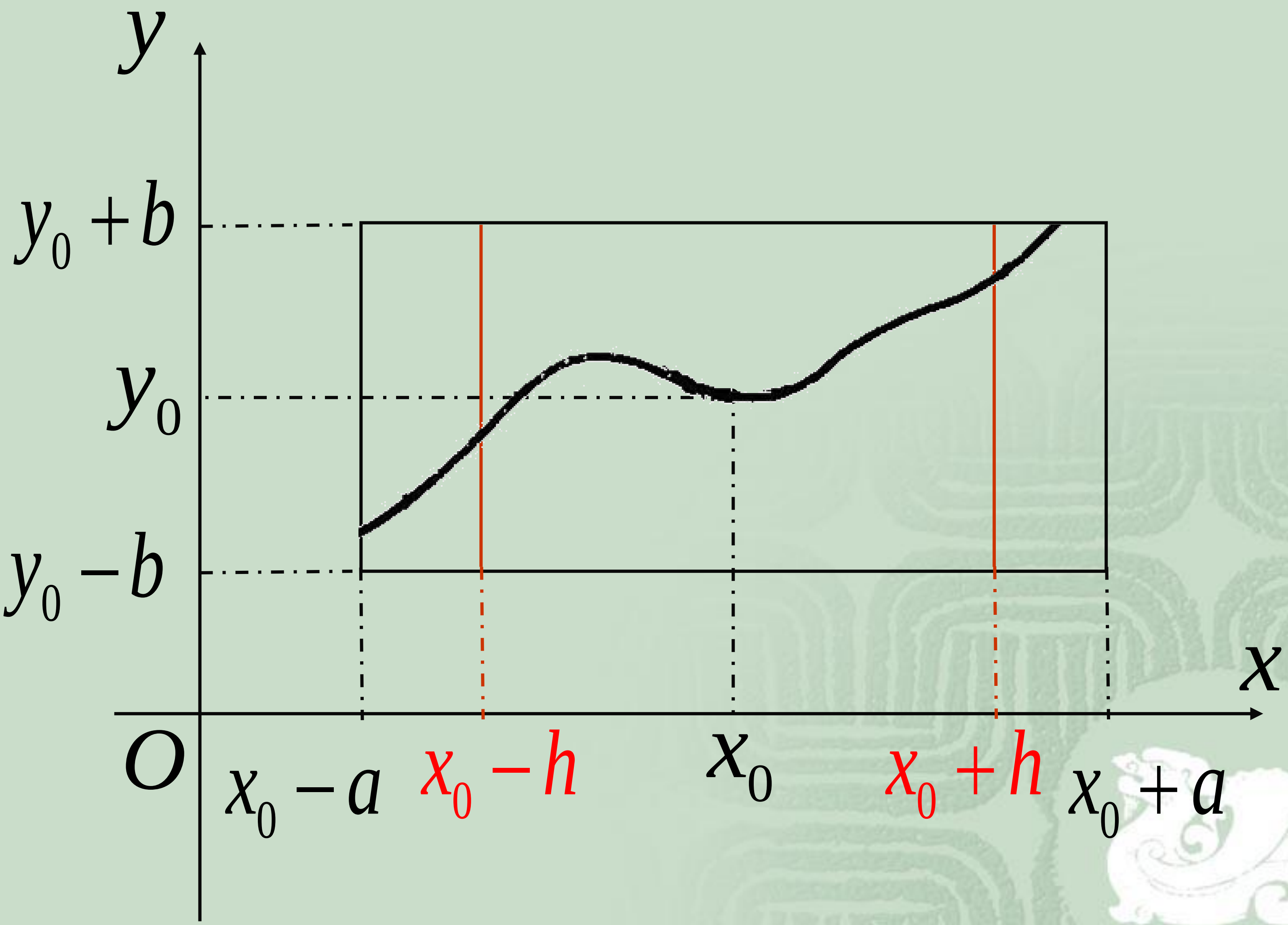
$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

则存在正数h,使得一阶常微分方程的初值问题

$$y'(x)=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \qquad (1)$$

在$[x_0-h,x_0+h]$上存在唯一的解. 其中,

$$h=\min\{a,b/M\},|f(x,y)|\le M,\forall(x,y)\in D.$$



y
$y_0 + b$
y_0
$y_0 - b$
x
O
$x_0 - a$
$x_0 - h$
x_0
$x_0 + h$
$x_0 + a$

Proof: (证明思路)

Step1.初值问题(1)等价于积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\mathrm{d}x,(x\in I) \qquad (2)$$

Step2.构造Picard序列: $y_0(x)\equiv y_0$,

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))\mathrm{d}x, \qquad (3)$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

用归纳法可证,Picard序列$y=y_n(x)$在区间I上连续,且满足

$$\left|y_n(x)-y_0\right|\le M\left|x-x_0\right|,\ n=1,2,3,\cdots.$$

Step3. Picard序列$y_n(x)$一致收敛于积分方程(2)的解.

序列$y_n(x)$的收敛性等价于级数

$$y_0+\sum_{n=0}^{+\infty}[y_{n+1}(x)-y_n(x)]$$

的收敛性. 可以证明后者一致收敛, 因此其极限函数$\varphi(x)=\lim_{n\to+\infty}y_n(x)$在区间$I$上连续.利用$f$的连续性和序列$y_n(x)$的一致收敛性,在(3)中令$n\to+\infty$,则

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\ x\in I,$$

即$y=\varphi(x)$为积分方程(2)的一个解.

Step4.最后证明唯一性.

设积分方程(2)有两个解$u(x)$和$v(x)$.记它们共同的存在区间为$J=[x_0-d, x_0+d]$,其中$0<d\le h$. 则

$$u(x)-v(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,u(x))-f(x,v(x))]\mathrm{d}x, \forall x\in J.$$

由*Lipschitz*条件

$$\left|u(x)-v(x)\right|\le L\int_{x_0}^{x}\left|u(x)-v(x)\right|\mathrm{d}x. \qquad (4)$$

设连续函数$|u(x)-v(x)|$在区间J上的上界为K,则

$$|u(x)-v(x)| \le LK\,|x-x_0|,$$

代入(4)式右端, 归纳可得, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u(x)-v(x)| \le K\,\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!},\ x \in J.$$

令$n \to +\infty$得$u(x) \equiv v(x), x \in J$.□

Remark. 若$f_y'(x,y)$在D上连续,则$f(x,y)$在D上关于 y 满足Lipschitz条件. 这是因为在有界闭集D上的连续函数$\left|f_y'(x,y)\right|$有上界, 设为L,则

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|f_y'(x,\xi)(y_1-y_2)\right|$$

$$\le L\left|(y_1-y_2)\right|.$$

Remark.解的存在唯一性定理的几何解释:

若$f(x,y)$连续,并且关于变元 y 满足Lipschitz 条件,则$y'=f(x,y)$的解曲线不相交.

Thm. 设$p(x),q(x)$在区间I上连续, $x_0\in I$, 则对任意 $y_0\in\mathbb{R}$, 一阶线性常微分方程的初值问题

$$y'(x)=p(x)y+q(x),y(x_0)=y_0$$

在整个区间I上存在唯一解.

Proof. 存在性. $y'(s)-p(s)y(s)=q(s)$两边乘$e^{\int_{x_0}^{s}-p(t)\mathrm{d}t}$, 得

$$\left(y(s)e^{\int_{x_0}^{s}-p(t)\mathrm{d}t}\right)'=q(s)e^{\int_{x_0}^{s}-p(t)\mathrm{d}t}.$$

任意给定 $x\in I$, 两边(对s)从 x_0 到 x 积分, 得

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t}-y(x_0)=\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,$$

于是

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\left(y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\right)$$

$$=y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{s}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,\quad \forall x\in I.$$

唯一性. 设$\varphi(x)$和$\psi(x)$都是初值问题的解,即

$$\varphi'(x)=p(x)\varphi(x)+q(x),\varphi(x_0)=y_0,$$

$$\psi'(x)=p(x)\psi(x)+q(x),\psi(x_0)=y_0,$$

则有

$$\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)' = p(x)\big(\varphi(x)-\psi(x)\big),$$

$$\varphi(x_0)-\psi(x_0)=0.$$

于是

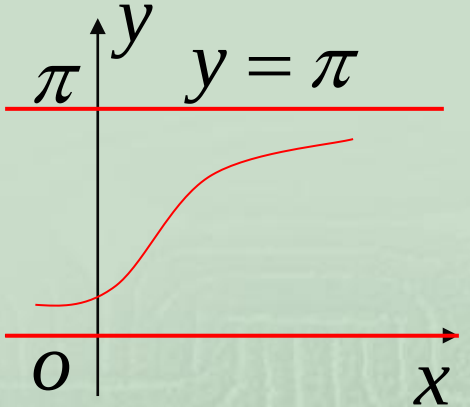
$$\left(\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t}\right)' \equiv 0,$$

$$\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t} \equiv \big(\varphi(x_0)-\psi(x_0)\big)e^{\int_{x_0}^{x_0}-p(t)\mathrm{d}t} = 0.$$

$$\varphi(x)-\psi(x)\equiv 0.\square$$

例:证明初值问题$y' = \sin y, y(0) = 1/2$的解$y(x)$在其存在区间I上满足

$$0 < y(x) < \pi, \forall x \in I.$$



解:令$\sin y = 0$, 知$y' = \sin y$有常数解

$$y = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

特别地, $y = 0$和$y = \pi$为解.

由解的存在唯一性定理, 方程$y' = \sin y$ 的解曲线两两不相交. 当$y(0) = 1/2 \in (0, \pi)$时, 解曲线 $y(x)$ 也介于$y = 0$和$y = \pi$之间, 得证.□

Thm. 设函数$a_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$和$f(t)$都在区间I上连续,$t_0\in I$,则对任意实数$\xi_k(k=0,1,\cdots,n-1)$,定解问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\xi_0, x'(t_0)=\xi_1,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1} \end{cases}$$

在区间I上存在唯一解$x(t)$.

Remark:解的存在唯一性定理是针对初值问题而言的.

例如, $y'' + k^2\pi^2 y = 0, k \in \mathbb{Z}$,的通解为

$$y = c_1 \cos k\pi x + c_2 \sin k\pi x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

它在Dirichlet边值条件$y(0) = y(1) = 0$下的解为

$$y = c_2 \sin k\pi x, \quad c_2 \in \mathbb{R};$$

不唯一. 它在Neumann边值条件$y'(0) = y'(1) = 0$下的解为

$$y = c_1 \cos k\pi x, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

也不唯一.

作业:习题7.1 No.2,5