回顾上节课内容:

m维线性空间V与$\mathbb{F}^m$的关系: 取V的一组基$\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$,

$V \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^m$

$v \longmapsto \hat{v} \leftarrow$ 坐标

(1) V中任意向量$\boldsymbol{v}$可表示成

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathcal{B}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathcal{B}\hat{\boldsymbol{v}}, \qquad \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

(2) 向量组$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$可表示成

$$(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = \underbrace{(\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_m)}_{\mathcal{B}}A, \qquad A \in \mathbb{F}^{m\times n}.$$

$w_i = \mathcal{B}\,\hat{w}_i$ $\qquad A = [\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_n]$

7.5 线性映射的矩阵表示

内容：

(a) 线性映射与表示矩阵

$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$

$B_{\mathcal{U}}$　　$B_{\mathcal{V}}$

给定$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$的基，线性映射对应表示矩阵

(b) 基变换与矩阵变化

$\mathcal{U}$到$\mathcal{V}$的线性映射，换基对应矩阵相抵

$\mathcal{U}$到$\mathcal{U}$的线性变换，换基对应矩阵相似

(a) 线性映射与表示矩阵

回顾：$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$为数域$\mathbb{F}$上两个有限维线性空间，$Hom(\mathcal{U},\mathcal{V})$为$\mathcal{U}$到$\mathcal{V}$的线性映射全体。

$f \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{V})$，$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$满足对任意$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a} \in \mathcal{U}, c \in \mathbb{F}$

(1) $f(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_1) + f(\boldsymbol{a}_2)$,

(2) $f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a}), c \in \mathbb{F}$

$Hom(\mathcal{U},\mathcal{V})$定义加法与数乘，构成$\mathbb{F}$上的线性空间

(1) 加法：$f, g \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{V})$，定义$(f+g)(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{a})$;

(2) 数乘：$f \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{V}), c \in \mathbb{F}$，定义$(cf)(\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$.

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$线性映射。令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$

任取(并固定)$\mathcal{U}$的一组基$\mathcal{B}_{in} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$，$\mathcal{V}$的一组基$\mathcal{B}_{out} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$

命题：线性映射f由它在基$\mathcal{B}_{in}$上的作用决定。

由 $f(u_1), \dots, f(u_n)$ 决定

$\forall u \in \mathcal{U}$, $u = (u_1, \dots, u_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, $\hat{u} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m$

$= \mathcal{B}_{in}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$

f是线性映射

$f(u) = f(c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) \overset{\swarrow}{=} c_1 f(u_1) + \dots + c_n f(u_n)$

$= (f(u_1), \dots, f(u_n))\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = f(\mathcal{B}_{in})\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$f\left((u_1, \dots, u_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = (f(u_1), \dots f(u_n))\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$线性映射。令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$

任取(并固定)$\mathcal{U}$的一组基$\mathcal{B}_{in} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$，$\mathcal{V}$的一组基$\mathcal{B}_{out} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$

命题：有矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$使得$(f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A$。

A称为线性映射f在基$\mathcal{B}_{in}$，$\mathcal{B}_{out}$下的**表示矩阵。**

$f(u_i) \in \mathcal{V}$, $f(u_i) = \mathcal{B}_{out}\, \widehat{f(u_i)}$ ← 坐标, $\widehat{f(u_i)} \in \mathbb{F}^m$

$$\underbrace{(f(u_1), \dots, f(u_n))}_{= f(\mathcal{B}_{in})} = \underbrace{(v_1, \dots, v_m)}_{\mathcal{B}_{out}} \underbrace{\left[\widehat{f(u_1)}, \dots, \widehat{f(u_n)}\right]}_{\in \mathbb{F}^{m\times n}}$$

f 在 $\mathcal{B}_{in}$, $\mathcal{B}_{out}$ 下的表示矩阵

$$\boxed{f(\mathcal{B}_{in}) = \mathcal{B}_{out} A}$$

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$线性映射。令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$

任取(并固定)$\mathcal{U}$的一组基$\mathcal{B}_{in} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$，$\mathcal{V}$的一组基$\mathcal{B}_{out} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$

命题：对$\mathcal{U}$中任意向量$\boldsymbol{u} = \mathcal{B}_{in}\hat{\boldsymbol{u}}$，$f(\boldsymbol{u}) = \mathcal{B}_{out}(A\hat{\boldsymbol{u}})$，即$A\hat{\boldsymbol{u}}$是$f(\boldsymbol{u})$的坐标

$\mathbb{F}^n$

$f(B_{in}) \overset{定义}{=} (f(u_1), \dots, f(u_n))$

$u = B_{in}\hat{u}$,

$f(u) = f(B_{in}\hat{u}) = f(B_{in})\hat{u}$ $\quad \boxed{f(B_{in}) = B_{out}A}$

$= (B_{out}A)\hat{u} = B_{out}(A\hat{u})$

是$f(u)$在B_{out}下的坐标

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$线性映射。令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$

任取(并固定)$\mathcal{U}$的一组基$\mathcal{B}_{in} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$，$\mathcal{V}$的一组基$\mathcal{B}_{out} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$

命题：对$\mathcal{U}$中任意向量$\boldsymbol{u} = \mathcal{B}_{in}\hat{\boldsymbol{u}}$ ，$f(\boldsymbol{u}) = \boxed{\mathcal{B}_{out}(A\hat{\boldsymbol{u}})}$，即$A\hat{\boldsymbol{u}}$是$f(\boldsymbol{u})$的坐标

换一种说法：

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto, "B_{in}"'] & & f(u) \arrow[dd, mapsto, "B_{out}"] \\
 & \mathcal{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{V} \arrow[d, "\wr"] \\
 & \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{F}^m \\
\hat{u} \arrow[rr, mapsto] & & A\hat{u}
\end{tikzcd}
$$

A是f在B_{in}, B_{out}下的表示矩阵

令$n=\dim\mathcal{U}$，$m=\dim\mathcal{V}$。任取(并固定)$\mathcal{U}$的一组基$\mathcal{B}_{in}=(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n)$，$\mathcal{V}$的一组基$\mathcal{B}_{out}=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m)$。$f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$线性映射。

命题：线性映射对应表示矩阵给出线性空间的同构$Hom(\mathcal{U},\mathcal{V})\rightleftharpoons\mathbb{F}^{m\times n}$。

$f \mapsto A$

$f_A \leftarrow\!\shortmid A$

逆映射为$A\mapsto f_A:\boldsymbol{u}\mapsto\mathcal{B}_{out}(A\hat{\boldsymbol{u}})$。 $\in\mathcal{U}$

保持加法：

$f,g\in Hom(\mathcal{U},\mathcal{V})$ $\quad f(\mathcal{B}_{in})=\mathcal{B}_{out}A,\quad g(\mathcal{B}_{in})=\mathcal{B}_{out}B$

$(f+g)(\mathcal{B}_{in})=f(\mathcal{B}_{in})+g(\mathcal{B}_{in})=\mathcal{B}_{out}A+\mathcal{B}_{out}B$

$=\mathcal{B}_{out}(A+B)$

保持数乘：

$(cf)(\mathcal{B}_{in})=\mathcal{B}_{out}(cA)$

线性映射的复合：

令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$，$p = \dim \mathcal{W}$。基分别为$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$

线性映射$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$，$\boxed{f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{V}} A}$，$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

线性映射$g: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$，$g(\mathcal{B}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{W}} B$，$B \in \mathbb{F}^{p\times m}$

命题：$g\circ f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$满足$g\circ f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{W}}(BA)$

$\mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{V} \xrightarrow{g} \mathcal{W}$

$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}}$

$g\circ f$ 的表 在$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$下的表示矩阵，

A

$(g\circ f)(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{W}} \boxed{}$

$= g(\underline{f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}})})$

$= g(\mathcal{B}_{\mathcal{V}} A) = g(\mathcal{B}_{\mathcal{V}})A = (\mathcal{B}_{\mathcal{W}} B)A$

$= \mathcal{B}_{\mathcal{W}}(BA)$

空间之间的对应：

令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$。基分别为$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}_{\mathcal{V}}$

线性映射$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$，$f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{V}} A$，$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

维数定理

$\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{N}(f) + \dim \mathcal{R}(f)$

回顾：$\mathcal{N}(f) := \left\{ \boldsymbol{a} \in \mathcal{U} \,\middle|\, f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}_{\mathcal{V}} \right\}$，称为$f$的核(kernel);

$\mathcal{R}(f) := \left\{ f(\boldsymbol{a}) \,\middle|\, \boldsymbol{a} \in \mathcal{U} \right\}$，称为$f$的像集(image).

命题： 在同构$\mathcal{U} \rightleftharpoons \mathbb{F}^n, \mathcal{V} \rightleftharpoons \mathbb{F}^m$下，$\mathcal{N}(f)$同构于$\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(f)$同构于$\mathcal{R}(A)$。

$$\mathcal{N}(f) \rightleftharpoons \mathcal{N}(A) \qquad \mathcal{R}(f) \rightleftharpoons \mathcal{R}(A)$$

$$\begin{tikzcd} u \in \mathcal{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{B}_{\mathcal{U}}"'] & \mathcal{V} \arrow[d, "\mathcal{B}_{\mathcal{V}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$u = \mathcal{B}_{\mathcal{U}} \hat{u} \in \mathcal{N}(f)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{0}_{\mathcal{V}} = f(u) = f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \hat{u}) = f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) \hat{u} = \mathcal{B}_{\mathcal{V}} (A \hat{u})$$

$\Updownarrow$ $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$是基

$$A \hat{u} = 0 \in \mathbb{F}^m$$

$$\Updownarrow \quad \hat{u} \in \mathcal{N}(A)$$

特征值，特征子空间：

令$n = \dim \mathcal{U}$，基为$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$

线性变换$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$，$f(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{U}} A$，$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$

容易得到：

命题：f的特征值对应到A的特征值；特征子空间也有相应的对应。

例：

$\mathcal{U} = \mathbb{R}[x]_4$，$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{1, x, x^2, x^3\}$，$\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]_3$ ，$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{1, x, x^2\}$

求微分$D = \frac{d}{dx} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$的表示矩阵，求积分$I = \int_0^x dt : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$的表示矩阵。

$D(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{V}} A_{3\times 4}$ $\qquad$ $I(\mathcal{B}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{U}} B_{4\times 3}$

$$D(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$2x$ $\quad$ $\boxed{3x^2}$

$$I(1, x, x^2) = (1, x, x^2, x^3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

互为广义逆

$I = \int_0^x dt : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_4$

ℝ上[illegible]

$1 \longmapsto (x \longmapsto \int_0^x 1\, dt) = x = I(1)$

$x \longmapsto (x \longmapsto \int_0^x t\, dt) = \frac{x^2}{2} = I(x)$

$x^2 \longmapsto (x \longmapsto \int_0^x t^2\, dt) = \frac{x^3}{3} = I(x^2)$

因此： $I = D^+$，微分积分互为广义逆。

(b) 基变换与矩阵变化

令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$。基分别为$\mathcal{B}_{in}, \mathcal{B}_{out}$

线性映射$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$，$f(\mathcal{B}_{in}) = \mathcal{B}_{out}A$，$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

问题：将$\mathcal{B}_{in}, \mathcal{B}_{out}$换为新基时，表示矩阵$A$发生什么变化?

如果考虑线性变换$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$，我们一般要求定义域与陪域取同一组基，即$\mathcal{B}_{in} = \mathcal{B}_{out}$

令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$。基分别为$\mathcal{B}_{in}, \mathcal{B}_{out}$

线性映射$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$，$f(\mathcal{B}_{in}) = \mathcal{B}_{out} A$，$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

$\mathcal{B}_{in}^{new}$为$\mathcal{U}$的新基,$\mathcal{B}_{out}^{new}$为$\mathcal{V}$ 的新基，求$B \in \mathbb{F}^{m\times n}$使得$f(\mathcal{B}_{in}^{new}) = \mathcal{B}_{out}^{new} B$。

新、旧基之间的过渡矩阵：

$\mathcal{B}_{in}^{new} = \mathcal{B}_{in} P_{in}$，$P_{in} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆；$\mathcal{B}_{out}^{new} = \mathcal{B}_{out} P_{out}$，$P_{out} \in \mathbb{F}^{m\times m}$ 可逆

定理：$B = P_{out}^{-1} A P_{in}$ （相抵！）

$B_{out} = B_{out}^{new} P_{out}^{-1}$

$$f(B_{in}^{new}) = f(B_{in} P_{in}) = f(B_{in}) P_{in}$$

$$= B_{out} A P_{in} = B_{out}^{new} \underbrace{P_{out}^{-1} A P_{in}}_{B}$$

令$n = \dim \mathcal{U}$，$m = \dim \mathcal{V}$

π

定理：存在$\mathcal{U}$的基$\mathcal{B}_{in}$, $\mathcal{V}$的基$\mathcal{B}_{out}$使得f的表示矩阵A为

$$A = \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$ ← 相抵标准形!

$r = \dim \mathcal{R}(f)$

取 $B_{\mathcal{U}}$, ~~B_{out}~~ $B_{\mathcal{V}}$, $f(B_u) = B_v A_{m\times n}$

$\exists$ P_{out}, P_{in} 可逆,

$$P_{out}^{-1} A P_{in} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取 $B_{in} = B_u P_{in}$, $B_{out} = B_v \cdot P_{out}$

$$f(B_{in}) = B_{out}\left(P_{out}^{-1} A P_{in}\right) = B_{out}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令$n = \dim \mathcal{U}$。取一组基$\mathcal{B}_\mathcal{U}$

线性变换$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$，$f(\mathcal{B}_\mathcal{U}) = \mathcal{B}_\mathcal{U} A$，$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$\mathcal{B}_\mathcal{U}^{new}$为$\mathcal{U}$的新基, 求$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$使得$f(\mathcal{B}_\mathcal{U}^{new}) = \mathcal{B}_\mathcal{U}^{new} B$。

新、旧基之间的过渡矩阵：$\mathcal{B}_\mathcal{U}^{new} = \mathcal{B}_\mathcal{U} P$，$P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆

定理： $B = P^{-1}AP$ （相似！）

$\mathcal{B}_{in} = \mathcal{B}_{out} = \mathcal{B}_\mathcal{U}$

$P_{in} = P_{out} = P$

$B = P_{out}^{-1} A P_{in}$

$= \boxed{P^{-1} A P}$

定理：如果$\mathbb{F}=\mathbb{C}$。存在$\mathcal{U}$的基$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$，线性变换$f:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$的表示矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$J_k(\lambda)$为Jordan块$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$

本节小结：

1. 给定$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$的基，$Hom(\mathcal{U},\mathcal{V}) \rightleftharpoons \mathbb{F}^{m\times n}$

   核对应零空间，象对应列空间，特征值、特征子空间对应

2. 变换基，表示矩阵的变化

   $\mathcal{U}$到$\mathcal{V}$的线性映射，换基对应矩阵相抵

   $\mathcal{U}$到$\mathcal{U}$的线性变换，换基对应矩阵相似

总复习II: 矩阵分解, 会求每个矩阵分解

1. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), r = rank(A)$:

a. 高斯消元：$\boxed{EA = R = rref(A),}$

E为有限个初等矩阵的乘积，R有r个主元，r个非零行。

所有复矩阵，甚至$\mathbb{F}^{m\times n}$中的矩阵都可以进行高斯消元

b. 奇异值分解：$\boxed{A = U\Sigma V^T}$

U, V为正交矩阵，Σ记录A的奇异值，$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$

U, V的列向量记录A的四个子空间的一组标准正交基。

所有实矩阵可以进行奇异值分解。

c. QR分解 $\boxed{A = QR}$

$m \geq n, Q$是列正交矩阵$\left(Q^T Q = I\right), R$非负对角元的上三角阵

A：实矩阵， $m \geq n$ 。

如果A是列满秩矩阵，那么R对角元> 0.

QR 分解将 A 的列向量组化为正交单位向量组,方法是Gram-Schmidt正交化。

Q的列向量为A的列空间的一组标准正交基。

2. A为方阵,$r = rank(A)$:

a. LU分解 $\boxed{A = LU = LDU_1}$

L为单位下三角阵， U为上三角阵, U_1单位上三角， D为对角阵, 记录A的主元。

条件：高斯消元无需行对换

A可逆， A有LU分解等价于A的n个顺序主子式非零（或n个顺序主子阵可逆）

一般可逆方阵：$A = PLU, P$为置换矩阵。

b. 可对角化的复矩阵：$\boxed{A = X\Lambda X^{-1}}$, Λ对角阵。

X的列向量记录A的特征向量，Λ记录A的特征值。非零特征值个数 $= r$

A可对角化当且仅当A有n个线性无关的特征向量。

可对角化也等价于对每个特征值λ，$GM(\lambda) = AM(\lambda)$.

从属于不同特征值的特征向量线性无关。

c. 实对称矩阵谱分解：$\boxed{S = Q\Lambda Q^T.}$

Q为正交矩阵，Λ实对角阵记录S的特征值。

Q的列向量给出S四个子空间的一组标准正交基。

适用于所有实对称矩阵S。从属于不同特征值的特征子空间正交。

S正定如果Λ对角元均> 0，正定矩阵可写成为A^TA，A列满秩实矩阵。