Review

- n阶线性ODE解的结构

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的解集合是一个n维线性空间.

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的通解为 $x(t)=\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(t),$

其中$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$为(1)的$n$个线性无关的解, $\varphi_0(t)$为(2)的一个特解.

- 2阶线性ODE的常数变易法

§5. 高阶常系数线性常微分方程

对一般的线性常微分方程, 要想得到它们的通解表达式是非常困难的. 但对常系数线性方程, 已有成熟的解法.

求解非齐次方程的关键是求解对应的齐次方程. 这样一来, 再求出非齐次方程的一个特解或直接用常数变易法就可以求出非齐次方程的通解.

先看常系数齐次线性常微分方程的解法.

1.常系数齐次线性ODE的特征法

通常我们只要求微分方程的实解, 但某些情况下, 求出方程的复解对求解方程很有帮助.

设实值函数$u(t), v(t)$在I上可导,

$$z(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t),\ z'(t)\triangleq u'(t)+\mathrm{i}v'(t).$$

例:$a_1(t),\cdots,a_n(t),u(t),v(t)$为实函数. 则$x(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$是齐次方程

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$$

的复解$\Leftrightarrow u(t)$和$v(t)$是(1)的实解.□

例:$a_1(t),\cdots,a_n(t),u(t),v(t),f(t),g(t)$为实函数. 则 $x(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$是方程

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f+\mathrm{i}g$$

的复解$\Leftrightarrow$ $u(t)$和$v(t)$分别是

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f$$

和

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=g$$

的实解.□

例:$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\ e^{\lambda t}\triangleq e^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)$.则

$$(e^{\lambda t})'=(e^{\alpha t}\cos\beta t)'+\mathrm{i}(e^{\alpha t}\sin\beta t)'$$

$$=e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)+\mathrm{i}e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t+\beta\cos\beta t)$$

$$=(\alpha+\mathrm{i}\beta)e^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)=\lambda e^{\lambda t}.\square$$

复指数函数具有很好的性质: $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$. 方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0 \qquad (1)$$

是否具有形如 $e^{\lambda t}$ 的解? 设 $x(t) = e^{\lambda t}$ 为 (1) 的解, 则

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} = 0.$$

而 $|e^{\lambda t}| = e^{Re(\lambda)t} > 0$, 于是

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (2)$$

反之, 若 λ 满足方程(2), 则 $e^{\lambda t}$ 为 (1) 的解. 称(2)为方程(1)的特征方程, 特征方程的解称为特征根.

综上, 欲求方程(1)的解, 应先求解其特征方程(2).

Thm.a)设λ是(2)的单重实根, 则$e^{\lambda t}$是(1)的实解.

b)设$\alpha \pm \mathrm{i}\beta$是(2)的一对单重复根,则$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$

是方程(1)的两个线性无关的实解.

c)设λ是(2)的$k(1 < k \le n)$重实根,则$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$是

方程(1)的k个线性无关的实解.

d)设$\alpha \pm \mathrm{i}\beta$是(2)的一对$k(1 < k \le n/2)$重复根, 则

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad te^{\alpha t}\cos\beta t, \quad \cdots \quad t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad te^{\alpha t}\sin\beta t, \quad \cdots \quad t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

是方程(1)的$2k$个线性无关的实解.□

例: $\omega \in \mathbb{R}$, 求 $x'' + \omega^2 x = 0$ 的通解.

解: 方程对应的特征方程

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

有两个互异的特征根 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega$. 于是, 方程有两个线性无关的解

$$x_1(t) = \cos \omega t, \quad x_2(t) = \sin \omega t,$$

方程的通解为:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \square$$

例: $x^{(5)}-3x^{(4)}+4x'''-4x''+3x'-x=0.$

解: 方程对应的特征方程为

$$\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=0.$$

即$(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)=0.$ 于是特征根为

$$\lambda=1(3重) \quad 和 \quad \lambda=\pm \mathrm{i}.$$

方程的通解为

$$x(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t+c_4\cos t+c_5\sin t.\square$$

2.常系数非齐次线性ODE的待定系数法.

我们已经可以求解常系数齐次方程

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0. \qquad (1)$$

理论上, 利用常数变易法可以求出非齐次方程

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \qquad (2)$$

的通解. 当 n 较大时, 这种方法计算量很大. 当方程(2)右端的函数 $f(t)$为某些简单类型时, 可以用待定系数法求出(2)的一个特解.

类型I. $f(t)=p(t)e^{\lambda t}$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$, $p(t)$为m次实多项式.

若λ为(1)的$k(\geq 1)$重特征根, 则(1)有形如$ct^{k-1}e^{\lambda t}$的解. 而(2)有解形如$c(t)t^{k-1}e^{\lambda t}$(常数变易法).

Thm. 设$f(t)=p(t)e^{\lambda t}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $p(t)$为 m 次实多项式. 则(2)有形如 $x(t)=q(t)t^{k}e^{\lambda t}$ 的解. 其中, k 为 λ 作为特征根的重数(λ为单根时$k=1$, λ不是特征根时$k=0$), $q(t)$为m阶实系数多项式(系数待定). □

例: 求方程$x''-2x'-3x=3t+1$的通解.

解: 特征方程$\lambda^2-2\lambda-3=0$有两个根$\lambda_1=3, \lambda_2=-1.$

对应的齐次方程的通解为 $x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}.$

$f(t)=3t+1, \lambda=0$不是特征根, 故取非齐次方程的特解为$x(t)=at+b.$ 代入方程, 得 $-2a-3at-3b=3t+1.$

比较系数, 得$a=-1, b=1/3.$于是方程的通解为

$$x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}.\square$$

例: 求方程$x''-2x'+x=4te^t$ 的通解.

解: $\lambda=1$为特征方程$\lambda^2-2\lambda+1=0$的2重根,

齐次方程的通解为$x(t)=(c_1+c_2t)e^t$, $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$.

设非齐次方程有特解 $x(t)=t^2(at+b)e^t$.

代入方程, 整理得 $(6at+2b)e^t=4te^t$.

比较系数, 得 $a=2/3, b=0.$

于是方程有一个特解 $x(t)=2t^3e^t/3$,

通解为 $x(t)=2t^3e^t/3+(c_1+c_2t)e^t$, $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$. □

Remark:当 $f(t)=p(t)e^{\lambda t}, \lambda\in\mathbb{C}$, $p(t)$为 m 次(复)多项式时,非齐次方程 (2) 仍有形如 $x(t)=q(t)t^k e^{\lambda t}$ 的解.
其中, k 为 λ 作为特征根的重数,而 $q(t)$ 为 m 阶复系数多项式(系数待定).这样一来, 对于下面第二种类型的 $f(t)$,我们也可以求出 (2) 的一个特解.

类型II. $$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=A(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $A(t)$为 m 次实多项式.

若$\alpha,\beta\in\mathbb{R},\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta,A(t)$为 m 次实多项式,则方程

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=A(t)e^{\lambda t}=A(t)e^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)$$

有解形如 $x(t)=q(t)t^ke^{\lambda t}=q(t)t^ke^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)$

$$\triangleq u(t)+\mathrm{i}v(t),\quad (u(t),v(t)\text{为实值函数})$$

其中$q(t)$为不高于m阶的复多项式, 而k为$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$作为特征根的重数. 于是

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=A(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

分别有特解 $u(t)$和$v(t)$.

Thm. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A(t)$为 m 次实多项式,则以下两方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = A(t) e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = A(t) e^{\alpha t} \sin \beta t$$

均为特解形如

$$t^k [P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t] e^{\alpha t},$$

其中 $P(t), Q(t)$ 均为次数不高于 m 的实系数多项式,

k 为 $\lambda = \alpha + i\beta$ 作为特征根的重数.

例:求方程$x'' - x = 4\cos t$的通解.

解法一:$\lambda = \mathrm{i}$ 不是特征方程为$\lambda^2 - 1 = 0$的根.

非齐次方程有特解形如 $x(t) = a\cos t + b\sin t$.

代入得 $-2a\cos t - 2b\sin t = 4\cos t$,

$$a = -2, b = 0.$$

又特征方程为$\lambda^2 - 1 = 0$有根$\lambda = \pm 1$, 非齐次方程的通解为 $x(t) = -2\cos t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. □

例:求方程$x''-x=4\cos t$的通解.

解法二:考虑方程

$$x''-x=4e^{\mathrm{i}t}=4(\cos t+\mathrm{i}\sin t). \qquad (*)$$

特征方程为$\lambda^2-1=0$有根$\lambda=\pm 1$. i不是特征根,

因而(*)有特解 $x(t)=(a+ib)e^{\mathrm{i}t}$, 代入(*)得:

$$-2(a+\mathrm{i}b)e^{\mathrm{i}t}=4e^{\mathrm{i}t}, a=-2, b=0.$$

(*)有特解$x(t)=-2e^{\mathrm{i}t}$, 原方程有特解$x(t)=-2\cos t$.

原方程的通解为 $x(t)=-2\cos t+c_1e^t+c_2e^{-t}$.□

其它类型

当$f(t)$是以上类型的线性组合时，可以利用解的叠加原理求出方程(2)的一个特解. 例如，若

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},$$

其中$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $A(t),B(t)$是t的实系数多项式, $A(t)$, $B(t)$的最高次数为m，则方程(2)有解形如

$$x(t)=t^k[p(t)\cos\beta t+q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},$$

其中k为λ作为特征根的重数，而$p(t)$和$q(t)$为次数不高于m阶的实系数多项式（系数待定）.

例：求$x''-x=t^2+1+te^{2t}$的一个特解.

解：用待定系数法可以求得以下两方程

$$x''-x=t^2+1, \quad x''-x=te^{2t}$$

的特解

$$x_1(t)=-t^2-3,\ x_2(t)=(t/3-4/9)e^{2t}.$$

则方程$x''-x=t^2+1+te^{2t}$有特解：

$$x(t)=-t^2-3+(t/3-4/9)e^{2t}.\square$$

3.Euler方程

$$t^n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1 t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=f(t),$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是(实)常数.

$t>0$时,令$t=e^s$;$t<0$时,令$t=-e^s$.则$s=\ln|t|$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=-\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$=-\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right),$$

令$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}, D^2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2},\cdots,$可以归纳证明:

$$t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Dx,\ \ t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=D^2x-Dx\triangleq D(D-1)x,\cdots,$$

$$t^n\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}=D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)x.$$

代入Euler方程,得到常系数线性常微分方程.

例: $t^2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0.$

解: 令$s=\ln|t|$,则 $t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $t^2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, 代

入原方程得$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+2x=0.$该方程的特征方程为

$\lambda^2+\lambda+2=0$, 特征根为$\lambda=(-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7})/2$, 通解为

$$x=e^{-s/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}s}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{7}s}{2}\right).$$

原方程通解为

$$x=|t|^{-1/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}\ln|t|}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{7}\ln|t|}{2}\right).\square$$

作业：习题7.5

No. 3(3)(6),4(4),6,7