

第 10 周讲稿

§ 4 Brown 运动的简单特性

性质 1: 定理: 设随机过程 $\{B_t : t \geq 0\}$ 满足 $B_0 = 0$. 那么 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Brown 运动当且仅当它是 Gauss 过程, 而且满足 $EB_t \equiv 0, E(B_s B_t) = \min(s, t)$.

证明: 必要性: 若 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Brown 运动 ($B_0 = 0$), 则 $B_t \sim N(0, t)$, 故 $EB_t = 0$.
当 $s \leq t$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_s, B_t) &= \text{Cov}(B_s, B_s + B_t - B_s) \\ &= \text{Cov}(B_s, B_s) + \text{Cov}(B_s, B_t - B_s) = s. \end{aligned}$$

可见一般地我们有

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = E(B_s B_t) = s \wedge t \quad (\text{即 } \min(s, t)).$$

充分性: 若 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Gauss 过程, 而且满足 $EB_t \equiv 0, E(B_s B_t) = \min(s, t)$,

则 $\forall s, t > 0$, 有 $E(B_t - B_s) = 0$

$$E(B_t - B_s)^2 = EB_t^2 + EB_s^2 - 2E(B_t B_s) = t + s - 2(s \wedge t) = |t - s|,$$

而 $\forall 0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$, 有

$$\begin{aligned} E[(B_{t_1} - B_{s_1})(B_{t_2} - B_{s_2})] &= E(B_{t_1} B_{t_2}) - E(B_{t_1} B_{s_2}) - E(B_{s_1} B_{t_2}) + E(B_{s_1} B_{s_2}) \\ &= t_1 - t_1 - s_1 + s_1 = 0 \end{aligned}$$

即它们的协方差为 0. 由于 Gauss 分布中分量相互独立等价于协方差为对角阵, 故可知 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为独立增量过程, 且 $B_t - B_s \sim N(0, |t - s|)$, 故 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为 Brown 运动。

性质 2: 设 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为 Brown 运动, 则

(1) (平移不变性) $\{B_{t+a} - B_a, t \geq 0\}$ ($a \geq 0$ 为常数) 为 Brown 运动;

(2) (尺度不变性) $\{\frac{B_{ct}}{\sqrt{c}}, t \geq 0\}$ ($c > 0$ 为常数) 也是 Brown 运动;

(3) $\{tB_{\frac{1}{t}}, t \geq 0\}$ (定义 $\{tB_{\frac{1}{t}}\}|_{t=0} = 0$) 为 Brown 运动。

证明: 利用性质 1 证明. $\{B_t : t \geq 0\}$ 为 Brown 运动, 从而为 Gauss 过程, 因此 $\{B_{t+a} - B_a, t \geq 0\}$

仍为 Gauss 过程, 且 $B_{0+a} - B_a = 0$; $E(B_{t+a} - B_a) = 0 \quad \forall t > 0$. 而

$$\begin{aligned}
E[(B_{t+a} - B_a)(B_{s+a} - B_a)] &= E(B_{t+a} B_{s+a}) - a - a + a \\
&= [(t+a) \wedge (s+a)] - a \\
&= s \wedge t + a - a = s \wedge t
\end{aligned}$$

故 $\{B_{t+a} - B_a, t \geq 0\}$ ($a \geq 0$ 为常数) 为 Brown 运动。

Brown 运动的轨道性质:

性质 3: Brown 运动 $\{B_t, t \geq 0\}$ 的轨道处处连续处处不可导。(不要求严格证明)

性质 4: (Brown 运动的镜面对称性)

$$P(\text{Brown 运动在 } [0, t] \text{ 到达过 } x, B_t \leq x) = P(\text{Brown 运动在 } [0, t] \text{ 到达过 } x, B_t \geq x)$$

性质 5: Brown 运动 $\{B_t, t \geq 0\}$ 的首达 a 的首达时 $T_a = \min\{t > 0: B_t = a\}$ 的分布为

$$P(T_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2(1 - \Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}}))$$

从而, T_a 几乎处处有限 (即 $P(T_a < \infty) = 1$) 且 $ET_a = +\infty$ 。

性质 6: $\max_{0 \leq s \leq t} B_s$ 的密度函数为 $f_{\max}(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, a \geq 0$ 。

性质 7*: 设 $\{B_t^x, t \geq 0\} = \{B_t + x, t \geq 0\}$ 为始于 x 的 Brown, 则 B_t^x 在 $(0, t)$ 中至少有一个零点

的概率为 $\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2u}} du$ 。(有兴趣的同学自己证明一下)

(注意到 $P(B_t^x \text{ 在 } (0, t) \text{ 中至少有一个零点}) = P(\max_{0 \leq s \leq t} B_s^x \geq 0)$ 即可)

性质 8*: (反正弦律) $P(B_t^x \text{ 在 } (a, b) \text{ 中没有零点}) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。(有兴趣的同学自己证一下)

第六章 极限定理

§ 1 大数定律与依概率收敛

1. 依概率收敛

定义 若随机变量序列 $\{X_n\}$ 及随机变量 X 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

则称 X_n 依概率收敛于 X , 并记为 $X_n \xrightarrow{P} X$

例 设独立同分布的随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 均服从 $[0, a]$ 上的均匀分布. 则

$$\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \xrightarrow{P} a.$$

2. 性质

性质 1 (比较微积分的结论): 若 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $g(x)$ 是连续函数, 则 $g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(\xi)$.

又若 $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, a, b 为常数, 则

$$\xi_n + a \xrightarrow{P} \xi + a, \quad a\xi_n \pm b\eta_n \xrightarrow{P} a\xi \pm b\eta, \quad \xi_n\eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta.$$

进一步, 如果还有 $\eta_n, \eta > 0$, 则 $\frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{P} \frac{\xi}{\eta}$.

性质 2: 如果 $X_n \xrightarrow{P} X$, 那么它也是依分布收敛的, 即 $X_n \xrightarrow{D} X$ (证明不做要求)

性质 3: $X_n \xrightarrow{P} a$ (常数) 当且仅当 $X_n \xrightarrow{D} a$ (或 F_a);

所以也当且仅当特征函数 $\varphi_{X_n}(\theta) \rightarrow e^{ia\theta}$.

➤ Slutsky 定理:

依分布收敛 $X_n \xrightarrow{D} X$ (茆诗松教材中记号 $X_n \xrightarrow{L} X$)

例 (Slutsky 定理): $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} a$, 则 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + a$. (从而有 $X_n Y_n \xrightarrow{D} aX$;

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{X}{a} (a \neq 0))$$

证明: 只需证明 $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} 0$, 则 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

法一 (定义) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
F_{X_n+Y_n}(x) &= P(X_n+Y_n \leq x) = P(X_n+Y_n \leq x, |Y_n| \leq \varepsilon) + P(X_n+Y_n \leq x, |Y_n| > \varepsilon) \\
&\leq P(X_n+Y_n \leq x, |Y_n| \leq \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon) \\
&\leq P(X_n \leq x+\varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)
\end{aligned} \tag{1}$$

同理

$$\begin{aligned}
P(X_n \leq x-\varepsilon) &= P(X_n \leq x-\varepsilon, |Y_n| \leq \varepsilon) + P(X_n \leq x-\varepsilon, |Y_n| > \varepsilon) \\
&\leq P(X_n+Y_n \leq x) + P(|Y_n| > \varepsilon)
\end{aligned} \tag{2}$$

由 (1) 式得, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n+Y_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon)$,

由 (2) 式得, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{X_n+Y_n}(x) \geq F_X(x-\varepsilon)$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 则对 F_X 的连续点 x , 有 $F_{X_n+Y_n}(x) \rightarrow F_X(x)$, 即 $X_n+Y_n \xrightarrow{D} X$ 。

法二 (特征函数) 由于 $Y_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow{D} 0$, 故 $Ee^{i\theta Y_n} \rightarrow 1$, 从而

$$|E[e^{i\theta X_n}(e^{i\theta Y_n}-1)]| \leq E[|e^{i\theta Y_n}-1|] \rightarrow 0$$

$$\text{故 } \varphi_{X_n+Y_n}(\theta) = Ee^{i\theta(X_n+Y_n)} = Ee^{i\theta X_n} + E[e^{i\theta X_n}(e^{i\theta Y_n}-1)] \rightarrow Ee^{i\theta X} = \varphi_X(\theta)$$

即 $X_n+Y_n \xrightarrow{D} X$ 。

作为 Slutsky 定理的应用, 下面的 Delta 方法是统计中求渐近分布的一种重要的方法。

定理 (Delta 方法): 随机变量序列 X_n 满足 $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$ θ, σ^2 均为有限

常数, 若 $g'(\theta)$ 存在且取值不为零, 则 $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2)$ 。

证明: Taylor 展开

$$g(X_n) = g(\theta) + g'(\theta)(X_n - \theta) + o_p(X_n - \theta)$$

这里 $X_n - \theta \xrightarrow{P} 0$, 故有 Slutsky 定理知,

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2)$$

★ 注: 记号: $Y_n = o_p(X_n) \Leftrightarrow \frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{P} 0$; $Y_n = O_p(X_n) \Leftrightarrow \frac{Y_n}{X_n}$ 依概率有界。

结论 (上课略): $Y_n = o_p(X_n)$, 且 X_n 依概率有界, 则 $Y_n \xrightarrow{P} 0$ 。

证明: $\forall 1 > \varepsilon > 0$, 由于 X_n 依概率有界, 故存在常数 $N_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N_\varepsilon$ 时,

有 $P(|X_n| > B_\varepsilon) < \varepsilon$ 。因为 $Y_n = o_p(X_n)$, 故

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) = P(|Y_n| \geq \varepsilon, |X_n| > B_\varepsilon) + P(|Y_n| \geq \varepsilon, |X_n| \leq B_\varepsilon) \\ \leq P(|X_n| > B_\varepsilon) + P\left(\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{B_\varepsilon}\right)$$

$\rightarrow 0$

3. 大数定律 (LLN: Law of Large Number)

何谓大数定律?

$\{X_n\}$ 满足大数定律: $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon\right) = 1$

$$\text{i.e. } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i \xrightarrow{P} 0$$

上课即为 $\{X_n\} \sim LLN$ 。

(A) Chebyshev 大数定律与 Chebyshev 不等式:

定理: (Chebyshev 大数定律) 若 $\{X_n\}$ 满足两两不相关, 且方差一致有界 (i.e.

$D(X_i) \leq C < +\infty, \forall i$), 则 $\{X_n\}$ 满足大数定律。

引理: (Chebyshev 不等式) 对具有有限方差的随机变量 X , 及任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Chebyshev 不等式证明与应用

例. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2 , 方差分别为 1 和 4 , 而相关系数为 -0.5 , 则根据切比雪夫 (Chebyshev) 不等式 $P(|X + Y| \geq 6) \leq \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【解】 因为 $E(X + Y) = -2 + 2 = 0$, 故由切比雪夫不等式知,

$$P(|X + Y| \geq 6) = P(|(X + Y) - E(X + Y)| \geq 6) \leq \frac{D(X + Y)}{6^2} = \frac{D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)}{6^2} \\ = \frac{D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}}{36} = \frac{1 + 4 + 2 \times (-0.5)\sqrt{4}}{36} = \frac{1}{12}.$$

(B) Khintchine 大数定律及其应用

定理 (Khintchine 大数定律) 设 $\{X_n\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列, 且其数学期望

为 μ , 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律, 即 $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$ 。

证明 利用独立同分布性质, 对于特征函数我们有

$$\varphi_{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}}(\theta) = \varphi_{X_1 + \cdots + X_n}\left(\frac{\theta}{n}\right) = [\varphi_{X_1}\left(\frac{\theta}{n}\right)]^n$$

$$= [1 + i\mu \frac{\theta}{n} + o(\frac{\theta}{n})]^n \rightarrow e^{i\mu\theta}.$$

应用举例（在统计中）。

（B）Bernoulli 大数定律

推论（Bernoulli 大数定律） 在事件 A 发生的概率为 p 的 n 次重复独立试验的 Bernoulli 概

型中，令 μ_n 为 n 次重复中试验 A 发生的次数。我们有：
$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

§ 2 中心极限定理（CLT）

何谓中心极限定理？

$$\{X_n\} \text{ 满足中心极限定理: } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n EX_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}} < x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in R$$

$$i.e. \quad S_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n EX_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$\sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布。

（A）Levy- Lindeberg 中心极限定理

定理（Levy- Lindeberg 中心极限定理） 设独立同分布随机变量序列 $\{X_n\}$ 具有有限的数

学期望 $EX_i = \mu$ 和方差 $DX_i = \sigma^2 \neq 0$ ，则 $\{X_n\}$ 满足中心极限定理，即当 $n \rightarrow \infty$ 时有 S_n^*

$\xrightarrow{D} N(0,1)$ 。

（应用于独立和的近似计算）

注：1（Polya 定理） 设随机变量 X 分布函数 $F_X(x)$ 是连续函数，又随机变量序列

$X_n \xrightarrow{D} F_X$ 。那么分布函数 $F_{X_n}(x)$ 一致收敛到 $F_X(x)$ 。（不需要证明）

2. 若随机变量序列 X_n 为独立同分布， $EX_n = \mu$ 且 $DX_n = \sigma^2 (n=1,2,\dots)$ ，则

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |P(X_1 + \dots + X_n \leq x) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi \cdot n}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-n\mu)^2}{2n\sigma^2}} du| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(B) De Moivre-Laplace 定理

推论 (De Moivre-Laplace) 设 n 次独立的重复试验中, 事件 A 在每次试验中出现的概率 p ($0 < p < 1$), 随机变量 μ_A 为此 n 次试验中事件 A 出现的次数 (即 $\mu_A \sim B(n, p)$). 那么, 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\mu_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

而且对于 x 是一致收敛.

应用于二项分布的近似计算 (注意与 Poisson 定理的区别)。

例: 已知 n 重贝努利试验中参数 $p = 0.75$, 问至少应该做多少次试验, 才能使试验成功的频率在 0.74 和 0.76 之间的概率不低于 0.95?

【解】 由题设, 求 n 使

$$P(0.74 < \frac{\mu_n}{n} < 0.76) = P(|\frac{\mu_n}{n} - 0.75| < 0.01) \geq 0.95$$

注意 $\mu_n \sim B(n, p)$, 故由 De Moivre-Laplace 定理得

$$P(|\frac{\mu_n}{n} - 0.75| < 0.01) \approx 2\Phi(0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}}) - 1 \geq 0.95$$

即求 n 使

$$2\Phi(0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}}) \geq 0.975$$

即至少应该取 n 使

$$0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}} \approx 1.96$$

解得 $n = 1.96^2 \times 0.1875 \approx 7203$.

(C) Liapunov 定理

定理 (Liapunov 定理) 设独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 的数学期望和方差分别为 $EX_i = \mu_i$ 和

$DX_i = \sigma_i^2$ ($i = 1, 2, \dots$), 记 $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, 如果满足以下的 Liapunov 条件: 存在 $\delta > 0$,

使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E(|X_i - \mu_i|)^{2+\delta} = 0,$$

则对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

注：实际上有更一般的结果

定理（**Lindeberg 中心极限定理**）设独立随机变量序列 $\{X_n\}$, $X_n \sim f_{X_n}(x)$ 的数学期望

和方差分别为 $EX_i = \mu_i$ 和 $DX_i = \sigma_i^2$ ($i = 1, 2, \dots$), 记 $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, 如果 $\{X_n\}$ 满足以

下的 Lindeberg 条件: $\forall \tau > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x - \mu_i| > \tau B_n} (x - \mu_i)^2 f_{X_i}(x) dx = 0,$$

则对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

（应用说明正态分布的广泛存在性）

例 （随机模拟算法（Monte Carlo 方法）见教材。