回顾上次课内容：

1. 可逆线性变换对应可逆矩阵

2. 可逆矩阵的定义：

A为n阶方阵，如果存在n阶方阵B满足$AB = BA = I_n$

3. 矩阵可逆的判定定理

例：$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$A$可逆当且仅当$ad-bc\neq 0$, 且

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(b) 矩阵可逆的等价条件（理论性较强）

定理：对n阶方阵A，下列叙述等价：

(1)A可逆；

(2)$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$;

(3)齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解；

(4)A对应的阶梯形矩阵有n个主元；

(5)$rref(A) = I_n$;

(6)A是有限个初等矩阵的乘积。

(1)
(4)
(5)
(6)
矩阵

(2)
(3)
方程

我们采用(1)⇒(2) ⇒(3) ⇒(4) ⇒(5) ⇒(6) ⇒(1)的轮换证明。

推论:

给定n阶方阵A，以下叙述等价：

(1) A可逆

(2) $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

(3) $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解

(4) 存在$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解

(3)等价于线性变换$\mathcal{A}$是满射

(4)等价于线性变换$\mathcal{A}$是单射

$\mathcal{A}$是单射$\Longrightarrow$ (4)：取$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

(4)$\Longrightarrow$ $\mathcal{A}$是单射：否则有$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ 使得$A\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_2$。那么$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$也是方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解。与(4)矛盾。

定义：给定n阶方阵A，如果存在n阶方阵B，满足$BA = I_n$，则称A有左逆；如果存在n阶方阵B,满足$AB = I_n$，则称A有右逆。

推论：

给定n阶方阵A，以下叙述等价：

(1)A可逆，即存在n阶方阵B，满足$AB = BA = I_n$

(2)存在n阶方阵B，满足$BA = I_n$

(3)存在n阶方阵B, 满足$AB = I_n$

证明：

(1)自然得到(2)(3)

<u>(2)⇒ (1)</u>：使用“方阵A可逆当且仅当$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解”

由(2), $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$得到$\boldsymbol{x} = I_n\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。因此，$A$可逆。

<u>(3)⇒ (1)</u>：使用“方阵A可逆当且仅当对任意$\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解”

由(3), $\boldsymbol{b} = I_n\boldsymbol{b} = (AB)\boldsymbol{b} = A(B\boldsymbol{b})$. 因此，$A$可逆。

小结:

对于**方阵**A, 以下3条等价

A可逆

A有左逆

A有右逆

假设A有左逆B，那么根据上面的等价条件A有右逆C，则$B = C$

由$B(AC) = (BA)C$ 得到$B = C$

同样的理由，如果A可逆，A的逆唯一

(c) 高斯-若尔当(Gauss-Jordan)消元求矩阵的逆问题:

(1) 如何判断方阵是否可逆?

使用“可逆当且仅当主元个数为n”

利用阶梯形矩阵

(2) 如何求矩阵的逆?

利用行简化阶梯形

求逆的几种可能方式:

（1）右逆的角度$AB = I_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$ 解出x, y, z, w

也可以看成求解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$，即

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$两个线性方程组

一般的，求解n个线性方程组

$A\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{e}_n$

（2）左逆的角度$BA = I_n$

看成矩阵B对A做一系列初等行变换！

根据“A可逆当且仅当$rref(A) = I_n$”

有初等矩阵$E_1, \dots, E_t$使得 $E_t \cdots E_1 A = rref(A) = I_n$.

令$E = E_t \cdots E_1$，我们有$EA = I_n$ E是A的左逆，因此也是A的逆

因此，$\boxed{A^{-1} = E = E_t \cdots E_1.}$

如果我们能记录下消元的过程$E_1, \dots, E_t$，那么我们就求出了A^{-1}！

高斯-若尔当(Gauss-Jordan)消元求矩阵的逆

为了记住初等行变换的乘积E，考虑$n \times 2n$矩阵

$$[A \mid I_n]$$

对$[A \mid I_n]$依次进行初等行变换$E_1, \ldots, E_t$， $E = E_t \cdots E_1$

$$E[A \mid I_n] = [EA \mid EI_n] = [I_n \mid E]$$

因此，I_n变成A^{-1}！

例:

判断$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&9&7\end{bmatrix}$是否可逆，在可逆时求$A$的逆。

对$[A|I_n]$进行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&&\\4&5&6&&1&\\8&9&7&&&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{21}(-4)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&&\\&-3&-6&-4&1&\\8&9&7&&&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-8)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&&\\&-3&-\ 6&-4&1&\\&-7&-17&-8&&1\end{array}\right]$$

行阶梯形矩阵
说明A可逆

$$\xrightarrow{E_{32}(-7/3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&&\\&-3&-6&-4&1&\\&&-3&4/3&-7/3&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{33}(-1/3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&&\\&-3&-6&-4&1&\\&&1&-4/9&7/9&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{23}(6)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&&\\&-3&0&-20/3&17/3&2\\&&1&-4/9&7/9&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&7/3&-7/3&-1\\&-3&0&-20/3&17/3&2\\&&1&-4/9&7/9&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{22}(-1/3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&7/3&-7/3&-1\\&1&0&20/9&-17/9&-2/3\\&&1&-4/9&7/9&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-2)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-19/9&13/3&1/3\\&1&0&20/9&-17/9&-2/3\\&&1&-4/9&7/9&1/3\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-19/9&13/9&-1/3\\20/9&-17/9&2/3\\-4/9&7/9&-1/3\end{bmatrix}$$

$rref(A)$ $\quad A^{-1}$

例：

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&9&7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$，求$A^{-1}B$

方法一：

先求A^{-1}，再求$A^{-1}B$

方法二：

考虑分块矩阵 $[A \mid B]$

用高斯-若尔当消元对分块矩阵 $[A \mid B]$ 进行初等行变换

将A化为单位阵，则B变化为$A^{-1}B$

第二种方法避免了求矩阵乘法$A^{-1}B$的步骤

(d) 一些特殊的可逆矩阵

如果方阵A满足$\forall i$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

则称A为**对角占优矩阵**.

例:

$$\begin{bmatrix} -34 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 43 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 55 & 10 \\ 5 & 3 & 4 & 31 \end{bmatrix}$$

命题：对角占优矩阵可逆.

证明：由矩阵可逆的等价定理，我们证明$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$有唯一解$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

设$\boldsymbol{x}=[x_1,\dots,x_n]^T$为解, 取$x_i$为$x_1,\dots,x_n$中**绝对值最大**的一项

考虑$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的第$i$行:

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n=0.$$

若$x_i\neq 0$，根据对角占优性质，

$$\boxed{|a_{ii}||x_i|}=\left|\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j\right|\leq\sum_{j\neq i}|a_{ij}||x_j|\leq\sum_{j\neq i}|a_{ij}||x_i|<\boxed{|a_{ii}||x_i|}.$$

矛盾说明$x_i=0$，因此$x_1=\cdots=x_n=0$.

对角占优

“对角占优矩阵可逆”的应用请见教材例1.5.15

置换矩阵

定义：

单位矩阵I_n经一系列对换行变换得到的矩阵称为**置换矩阵**

$$P = P_{i_k,j_k}P_{i_{k-1},j_{k-1}} \dots P_{i_2,j_2}P_{i_1,j_1}.$$

例：$n = 2$置换矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

例：$n=3$置换矩阵

$$I=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},P_{21}=\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix},P_{32}=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix},P_{31}=\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix},$$

$$P_{21}P_{32}=\begin{bmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{bmatrix},P_{32}P_{21}=\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}$$

记S_3为3阶置换矩阵构成的集合，容易验证

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ I_3\in S_3;\\(2)\text{如果}P,Q\in S_3,\text{则}PQ\in S_3;\\(3)\ P\in S_3,\text{则}P^{-1}\in S_3.\end{array}\right\}\quad S_3\text{ 构成一个群 (group)}$$

n阶置换矩阵：

S_n为n阶置换矩阵构成的集合，

(1)$I_n \in S_n, I_nP = PI_n = P, \forall P \in S_n$;

(2)$P, Q \in S_n$,则$PQ \in S_n$.

(3)$P \in S_n$,则P可逆, $P^{-1} \in S_n$且$P^{-1} = P^T$.

S_n 构成一个群
(group)

证明：

（2）P, Q均为一系列对换矩阵的乘积，因此PQ也是一系列对换矩阵的乘积，$PQ \in S_n$.

(3)

$P = P_{i_k,j_k} P_{i_{k-1},j_{k-1}} \dots P_{i_2,j_2} P_{i_1,j_1}$为可逆矩阵的乘积，因此$P$可逆.

由于对换矩阵的逆也是对换矩阵， P^{-1}也是置换矩阵

$P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n]$的每行每列只能有一个元素为1，其余元素为0. 因此，

$$\boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{p}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

于是$P^T P = \left[\boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{p}_j\right]_{ij} = I_n$,即$P^T = P^{-1}$.

S_n共有$n!$个元素.

正交矩阵：

定义：n阶方阵Q满足$Q^T = Q^{-1}$，则称Q为**正交矩阵**.

$$\boxed{Q^TQ = QQ^T = I_n}$$

例：

置换矩阵是正交矩阵

如果Q是正交矩阵，则Q^T也是正交矩阵

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$是正交矩阵

n阶正交矩阵构成一个群

命题：

正交矩阵的列向量相互正交且长度为1；

同样的，正交矩阵的行向量相互正交且长度为1.

证明：

$Q=[\boldsymbol{q}_1,\dots,\boldsymbol{q}_n], Q^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}_n^T\end{bmatrix}$，由于$Q^TQ=I_n$，

$$\left(Q^TQ\right)_{ij}=\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j;\\0, i\neq j.\end{cases}$$

π

正交矩阵给出的线性变换称为**正交变换**，它保持向量的内积.

特别的，正交变换保持向量的长度和夹角.

证明：

$$(Q\boldsymbol{x})^T(Q\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x}^T \underbrace{Q^T\right)(Q}_{I_n}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}.$$

本节小结：

1. 可逆线性变换 ⟺ 表出矩阵可逆
2. 矩阵可逆的等价判定定理
3. 高斯-若尔当消元法求矩阵的逆
4. 一些可逆矩阵的例子：

   初等矩阵，对角占优矩阵，置换矩阵，正交矩阵等

1.7 矩阵的相抵标准型

主要内容：

（a）等价关系简介

（b）矩阵的相抵标准型

（a）等价关系简介：

如果非空集合S的元素之间定义了一种二元关系“~”，满足：

1. 反身性：对任意$a \in S$，$a \sim a$；

2. 对称性：如果$a \sim b$，那么 $b \sim a$；

3. 传递性：如果$a \sim b$，$b \sim c$, 那么$a \sim c$，

则称此关系为S上的**等价关系**

$a \in S$, 与a等价的元素的集合称为a的**等价类**, 用$[a]$记这个S的子集

同一等价类中形式最简单的元素称为这一等价关系中的**标准形。**