Review

- $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$
- $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$
- Taylor多项式的唯一性
- 间接展开法求Taylor公式.
- Taylor公式的应用.
- $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^\alpha,(1\pm x)^{-1}$的Taylor公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), \quad x\to 0.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n), \quad x\to 0.$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n), \quad x\to 0.$$

§4.函数的增减与极值问题

设f在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导.

(1)若f在$[a,b]$上单调递增, 则$\forall x\in(a,b)$,有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ge 0.$$

(2)若$\forall x\in(a,b)$,有$f'(x)\ge 0$,则由Lagrange中值定理,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)\ge 0,\quad \forall x_1,x_2\in[a,b],x_1\ne x_2.$$

即$f(x)$在$[a,b]$上单调递增.

Question.光滑的严格单调函数,其导函数有什么特点?

是否必有 $f'(x)>0$? *No*!例如$f(x)=x^3$.

Thm. f在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,则

(1) f在$[a,b]$上单调递增(减) $\Leftrightarrow$ 在(a,b)上$f'(x)\ge(\le)0$;

(2) f在$[a,b]$上严格单调递增(减) $\Leftrightarrow$ 在(a,b)上$f'(x)\ge(\le)0$,且在(a,b)的任意子区间(c,d)上$f'(x)$不恒为0.

Proof. (1)略. (2) $\Rightarrow$:设f在$[a,b]$上严格单增, 由(1)知,在(a,b)上$f'(x)\ge 0$.若在(a,b)的某个子区间(c,d)上$f'(x)\equiv 0$,则$f(x)$在(c,d)上 为常数, 与f严格单增矛盾.

$\Leftarrow$: $f'(x)\ge 0(x\in(a,b))$, 由(1)知, f在$[a,b]$上单增. 若存在$a\le c<d\le b, s.t. f(c)=f(d)$, 则 $f(x)=f(c)(\forall x\in[c,d])$,从而在$(c,d)$上 $f'(x)\equiv 0$,矛盾.□

Ex.(1) $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}\quad (x>0)$, (2) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\uparrow\ (x>0)$

Proof. (1) $\ln(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{(1+x)-x}=\dfrac{1/\xi}{1},\xi\in(x,x+1).$

故 $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x},\quad \forall x>0.$

$$(2)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)'=\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right)'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln(1+\frac{1}{x})+x(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x})\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right)>0,\forall x>0.\ 故\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\uparrow.$$

Ex. 已知$e^x(\frac{1}{x}-\ln x+a)\geq 2e, \forall x\in(0,1]$.求$a$的范围.

Proof. $\forall x\in(0,1]$, 有$a\geq 2e^{1-x}+\ln x-\frac{1}{x}\triangleq g(x)$.

$$g'(x)=-2e^{1-x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2},\quad g''(x)=2e^{1-x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3},$$

$$g'''(x)=-2e^{1-x}+\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}\geq -2e+2+6>0, \forall x\in(0,1].$$

因此$x\in(0,1]$时, $g''(x)$严格$\uparrow$, $g''(x)<g''(1)=-1<0$.

因此$x\in(0,1]$时, $g'(x)$严格$\downarrow$, $g'(x)>g'(1)=0$.

因此$x\in(0,1]$时, $g(x)$严格$\uparrow$, $g(x)<g(1)=1$. 故$a\geq 1$.□

Ex. 求$f(x)=|x|^{2/3}(x-1)$的极值点.

解:($x=0$处f不可导, $f(0)=0$, $f(x)<0, \forall x\in U(0,1/2)$,

因此$x=0$是f的极大值点.)

$x>0$时, $f(x)=x^{5/3}-x^{2/3}$, $f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{5x-2}{3x^{1/3}}$.

$x<0$时, $f(x)=(-x)^{2/3}(x-1)$,

$$f'(x)=(-x)^{2/3}-\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}(x-1)=\frac{2-5x}{3(-x)^{1/3}},$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/5)$	$2/5$	$(2/5,+\infty)$
$f'(x)$	>0	不存在	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

Question. $f \in C[a,b]$, 在(a,b)上可导, 如何求f在$[a,b]$上的最值?

Case1. f在端点a或b取得最值.

Case2. f在$x_0 \in (a,b)$取得最值,则$f'(x_0)=0$.

结论:

Step1. 求 f在(a,b)上的所有驻点$x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Step2. 比较 $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m)$求最值.

Question. f在$\mathbb{R}$上可导, 如何求 f 的极值和最值?

Ex. 讨论$2x^3-3x^2-12x+1$在$\mathbb{R}$上和$[-3,3]$上的极值与最值.

解: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1,\ f'(x)=6(x-2)(x+1).$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	8, 极大	$\downarrow$	-19, 极小	$\uparrow$

1)$\mathbb{R}$上, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, 无最值, $f(-1)=8$极大, $f(2)=-19$极小.

2) $[-3,3]$上, $f(-1)=8,\ f(2)=-19,\ f(-3)=-44,\ f(3)=-8.$

$f(-1)=8$极大, $f(2)=-19$极小.

$\max\limits_{x\in[-3,3]} f(x)=f(-1)=8,\ \min\limits_{x\in[-3,3]} f(x)=f(-3)=-44.$□

Ex. $f(x)=xe^{-2x^2}$在$\mathbb{R}$上的极值与最值.

解: $f'(x)=(1-4x^2)e^{-2x^2}$. $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.

x	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1/2)$	$1/2$	$(1/2,+\infty)$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0
$f(x)$	$\downarrow$	$\dfrac{-1}{2\sqrt{e}}$ 极小	$\uparrow$	$\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ 极大	$\downarrow$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0,\ \exists M>1,\text{使得}\forall|x|\ge M\text{有}|f(x)|<\frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(1/2)=\frac{1}{2\sqrt{e}},\ \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(-1/2)=\frac{-1}{2\sqrt{e}}.\square$$

Ex. $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \quad x \in [0,1], p > 1.$

解: 令$f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f(0) = f(1) = 1.$

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}.$$

若$f'(x_0) = 0$, 则$x_0 = 1/2$. $p > 1$, 则$f(1/2) = \dfrac{1}{2^{p-1}} \in (0,1).$

$f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$上可导, 因此f在$[0,1]$上的最值必在$f(0)$, $f(1)$, $f(1/2)$中取得, 于是

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = f(1) = 1, \min_{x\in[0,1]} f(x) = f(1/2) = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

即 $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \quad \forall x \in [0,1], p > 1.$ □

Thm. $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$,则

$$f^{(2n)}(x_0)>(<)\,0\Rightarrow x_0\text{为}\,f\,\text{的严格极小(大)值点.}$$

Proof. $f(x)=f(x_0)+\dfrac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n}+o((x-x_0)^{2n})$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(2n)!(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^{2n}}=f^{(2n)}(x_0)>(<)\,0.$$

由函数极限的保序性,$\exists\delta>0,\ s.t.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n}}>(<)\,0,\qquad \forall x\in U(x_0,\delta).$$

因此 $f(x_0)$ 严格极小(大).□

Thm. $f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$则$x_0$不是极值点.

Proof. 不妨设 $f^{(2n+1)}(x_0)>0.$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}+o((x-x_0)^{2n+1})$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{(2n+1)!(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^{2n+1}}=f^{(2n+1)}(x_0)>0.$$

由函数极限的保序性,$\exists\delta>0,\ s.t.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n+1}}>0,\qquad \forall x\in U(x_0,\delta).$$

因此 $f(x_0)$不是极值.□

Thm. $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$, $f^{(2n)}(x)$在x_0连续, $f^{(2n+1)}(x)$在x_0的两侧异号($f^{(2n)}(x)$在x_0不一定可导),则

$$f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\le(<)0, & x<x_0\\ \ge(>)0, & x>x_0\end{cases}\Rightarrow x_0\text{是}f\text{的(严格)极小值点;}$$

$$f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\ge(>)0, & x<x_0\\ \le(<)0, & x>x_0\end{cases}\Rightarrow x_0\text{是}f\text{的(严格)极大值点.}$$

Proof. 由带Lagrange余项的Taylor公式,∃介于x_0与x之间的ξ, $s.t.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n+1}}=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}.\square$$

Question. $n=0$时,如何理解上面定理?

作业：习题4.4

No.4(8),5(5),6(3),9