2022年秋微积分A(1)期末考试样卷

系别________ 班级________ 姓名________ 学号________

一、填空题 (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{6}$, 以及直线 $x=0$, $y=0$ 围成的有界平面图形的面积为 __________.

2. 极限
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{\sin t}-\cos t)dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. 曲线段 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(0\le x\le 15)$ 的弧长为 __________.

4. 极限
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5. 记 $y=y(x)$ 是常微分方程 $y'+y=e^{-x}$ 满足 $y(0)=0$ 的解, 则函数 $y=y(x)$ 拐点的横坐标为 $x=$ __________.

6. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$, 则 $F'(1)=$ __________.

7. 积分 $\int_0^2 |(x-1)(x-2)|dx=$ __________.

8. 设 $f(x)$ 为连续可微函数, 满足方程 $2\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2$, 则 $f'(1)=$ __________.

9. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 满足初值条件 $y(0)=0$ 的解, 则 $\arctan y(1)=$ __________.

10. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y''-2y'+y=2$ 满足初值条件 $y(0)=2$, $y'(0)=0$ 的解, 则 $y(1)=$ __________.

二、选择题 (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 积分 $\int_{-1}^{1}\left[x^2\sin(x^5)+\sqrt{1-x^2}\right]dx =$

   $A.$ 0;

   $B.$ $\frac{\pi}{2}$;

   $C.$ π;

   $D.$ 1.

2. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$ 收敛, 当且仅当

   $A.$ $p>1$;

   $B.$ $p<3$;

   $C.$ $1<p<3$;

   $D.$ $1\le p\le 3$.

3. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt =$

   $A.$ $3\sin(x^3)-2\sin(x^2)$;

   $B.$ $\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x}$;

   $C.$ $\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x^2}$;

   $D.$ $\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x^3}$.

4. 函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x^2})$ 的斜渐近线为

   $A.$ $y=x$;

   $B.$ $y=x+1$;

   $C.$ $y=2x$;

   $D.$ $y=2x+1$.

5. 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x} =$

$A.$ 1;

$B.$ $\ln 2$;

$C.$ 2;

$D.$ $2\ln 2$.

6. 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx =$

$A.$ $\frac{1}{2}$;

$B.$ $\frac{1}{2}\ln 2$;

$C.$ $\ln 2$;

$D.$ $\frac{1}{2}\Big(1-\ln 2\Big)$.

7. 由曲线段 $y=\sqrt{x-1}$ $(1\le x\le 3)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$A.$ π;

$B.$ 3π;

$C.$ 2π;

$D.$ 4π.

8. 抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}$ $(0\le x\le 1)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的侧面积为

$A.$ $2\sqrt{3}\pi$;

$B.$ $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$;

$C.$ 2π;

$D.$ π.

9. 旋轮线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 一拱与 x 轴所围平面有界图形的面积为

$A.$ π;

$B.$ 2π;

$C.$ 3π;

$D.$ 4π.

10. 极限 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1+x^n}{1+x}dx$ 等于

$A.$ 0;

$B.$ 1;

$C.$ 2;

$D.$ $\ln 2$.

三. 解答题 (5道题, 共计40分)

1. (10分)设

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间, 极值点与极值, 凸性区间, 拐点和渐近线.

2. (10分) 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty}\Big(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\Big)dx$$

的收敛性. 若收敛, 请求出积分值; 若发散, 请说明理由.

3. (10分) 求解 Euler 方程 $x^2y''+2xy'-2y=2\ln x-3$ $(x>0)$ 的通解.

4. (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且满足 $[f(x)]^2\leq 1+2\int_0^x f(t)dt, \forall x\in[0,1]$. 证明 $f(x)\leq 1+x, \forall x\in[0,1]$.

5. (5 分) 设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为实系数多项式. 若 $p(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 证明 $p(x)+p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, 其中 $p'(x)$, $p''(x)$, $\cdots$, $p^{(n)}(x)$ 分别表示 $p(x)$ 的一阶, 二阶, $\cdots$, 以及 n 阶导数.