一：**Gamma** 分布：记 $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$（称参数为 α,β 的 Γ 分布），若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

显然，我们有

- $\Gamma(1,\lambda)=E(\lambda)$；指数分布是 **Gamma** 分布的特例；另外当 $\alpha=n\in N$，也称 **Gamma** 分布为 **Erlang** 分布；
- 若 $Z\sim N(0,1)$，$f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$，则 $Y\triangleq Z^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\chi^2(1)$

（称后者为自由度为 **1** 的 χ^2 分布），

事实上，我们有 $\forall y>0$，

$$f_Y(y)=f_Z(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_Z(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

- 矩母函数：X 的矩母函数 $M_X(u)$，并由此可求出 EX,DX。

$$M_X(u)=E(e^{uX})=\int_0^{\infty}e^{ux}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=(\frac{\lambda}{\lambda-u})^{\alpha},\forall u<\lambda$$

$$EX=M'_X(0)=\frac{\alpha}{\lambda},$$

$$EX^2=M''_X(0)=\frac{\alpha+\alpha^2}{\lambda^2}\Rightarrow DX=\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

（直接计算如下：

$$EX^n=\int_0^{\infty}x^n\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{n+\alpha-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^{n+\alpha}}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\lambda^n}$$

）

● 可加性：若$X_1,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i\sim\Gamma(\alpha_i,\lambda)$，求$\sum_{i=1}^{n}X_i$的分布。

证明：

$$M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(u)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(u)=\prod_{i=1}^{n}(\frac{\lambda}{\lambda-u})^{\alpha_i}=(\frac{\lambda}{\lambda-u})^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i},u<\lambda$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\lambda)$$

★ 推论：

（1）$X_i\overset{i.i.d.}{\sim}E(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$，则$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n,\lambda)$；

（2）$X_i\overset{i.i.d.}{\sim}N(0,1)$，则$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})\triangleq\chi^2(n)$（即自由度为 **n** 的$\chi^2$分布）。

Pf:（2）的证明：$X_i\sim N(0,1)\Rightarrow X_i^2\sim\chi^2(1)=\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

从而$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$。

（3）$X_i\overset{i.i.d.}{\sim}U(0,1)$，则$Y=-2\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$是否为$\Gamma$分布，为什么？

Pf:（3）的证明：

$$Y_i=-2\ln X_i\Rightarrow x=e^{-\frac{y}{2}}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_{Y_i}(y)=f_{X_i}(e^{-\frac{y}{2}})|\frac{dx}{dy}|=1\times\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}},y>0$$

$$Y_i=-2\ln X_i\sim E(\frac{1}{2})=\Gamma(1,\frac{1}{2})$$

从而，$Y=-2\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=\sum_{i=1}^{n}Y_i\sim\Gamma(n,\frac{1}{2})=\chi^2(2n)$

- $X_i \sim \Gamma(\alpha_i,\lambda)$相互独立，证明$U=X_1+X_2$与$V=\frac{X_1}{X_1+X_2}$相互独立。

证明：$\begin{cases} U=\dfrac{X}{X+Y} \\ V=X+Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=uv \\ y=v(1-u) \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix}=v$$

故

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(uv,v(1-u)) \quad [uv>0,v-uv>0 \Leftrightarrow 0<u<1,v>0]$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}(uv)^{\alpha_1-1}e^{-\lambda uv}\frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(v(1-u))^{\alpha_2-1}e^{-\lambda v(1-u)}|v|$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1}v^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda v}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1}\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}v^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda v}$$

$$f_U(u)=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1},0<u<1 \quad (Beta)$$

$$f_V(v)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}v^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda v},v>0$$

即$U\sim \mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)$，$V\sim G(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$且相互独立。

二：Beta 分布：

记$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\ \alpha>0,\beta>0$，称$X\sim Beta(\alpha,\beta)$服从参数为$\alpha,\beta$的$Beta$分布，如果它的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

显然：$Beta(\alpha,\beta)=U(0,1)$，

- **Beta 分布的期望与方差**

$$EX=\int_0^1 x\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$EX^2=\int_0^1 x^2\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$=\frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

$$DX=\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}-(\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

- 设$Y_i\sim\Gamma(\alpha_i,\beta)$相互独立，试证$V=\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}\sim \mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)$。

- **Beta 分布与 F 分布（统计相关）：**

*：$X\sim F(m,n)$，则

$$EX=\frac{n}{n-2},n>2;$$
$$DX=2(\frac{n}{n-2})^2\frac{m+n-2}{m(n-4)},n>4$$

*：$X\sim F(m,n)\Rightarrow \dfrac{\frac{m}{n}X}{1+\frac{m}{n}X}\sim Beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2}).$

*：$X\sim Beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})\Rightarrow \dfrac{nX}{m(1-X)}\sim F(m,n).$

三：**Cauchy 分布**：

记 $X\sim C(\lambda,\mu)$（称参数为 λ,μ 的 **Cauchy** 分布），若

$f(x)=\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+(x-\mu)^2},x\in R$ （数学期望不存在）

特征函数$\varphi(\theta)=e^{i\mu\theta-\lambda|\theta|}$

*（可加性）$X\sim C(\lambda_1,\mu_1)$，$Y\sim C(\lambda_2,\mu_2)$独立，则

$X+Y\sim C(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2)$

- $X\sim C(1,0)$（标准 **Cauchy** 分布）$\Leftrightarrow \frac{1}{X}\sim C(1,0)$

证明：记$Y=\frac{1}{X}$ ，反函数$x^{-1}(y)=\frac{1}{y}$

$$f_Y(y)=f_X(x^{-1}(y))\left|\frac{dx^{-1}(y)}{dy}\right|=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(\frac{1}{y})^2}\left|-\frac{1}{y^2}\right|=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2},y\in R$$

- $X,Y\sim N(0,\sigma^2)$独立，则$\frac{X}{Y}\sim C(1,0)$

证明：设$\begin{cases}U=\frac{X}{Y}\\V=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=uv\\y=v\end{cases}\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}v & u\\0 & 1\end{vmatrix}=v$

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(uv,v)|v|=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(uv)^2+v^2}{2\sigma^2}}|v|=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2\sigma^2}}|v|,u,v\in R$$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{U,V}(u,v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2\sigma^2}}|v|dv=2\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2\sigma^2}}vdv=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2},u\in R$$

- $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$独立，则 $\tan X \sim C(1,0)$

证明：记$Y = \tan X$ ，反函数$x^{-1}(y) = \arctan y$

$$f_Y(y) = f_X(x^{-1}(y)) \left| \frac{dx^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}, y \in R$$