回顾上节课内容:

从正交投影出发，得到

(1) Gram-Schmidt正交化:

线性无关向量组 $\Rightarrow$ 正交单位向量组

(2) 列满秩矩阵的QR分解:

列满秩矩阵 $\Rightarrow$ 列正交矩阵×上三角矩阵(对角线元素>0)

QR分解可以简化正交投影的计算

A列满秩矩阵, $P_A = P_Q = Q\left(Q^T Q\right)^{-1} Q^T = QQ^T$

QR分解可以简化方程组求解

假设A为可逆方阵且有QR分解

方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$转化为方程$QR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

于是，$R\boldsymbol{x} = Q^{-1}\boldsymbol{b} = Q^T\boldsymbol{b}$.

由于Q可逆，方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$与方程$R\boldsymbol{x} = Q^{-1}\boldsymbol{b} = Q^T\boldsymbol{b}$同解

优势：

$Q^{-1} = Q^T$, 容易计算正交矩阵的逆

R为上三角矩阵，方程容易求解

QR分解在解方程上的应用：

假设A为列满秩矩阵, $A = QR$，Q为列正交矩阵，R为对角元> 0上三角矩阵。

方程组转化为$QR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，左乘$Q^T$，得到$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$ ⟸ 容易求解

问题：方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是否与方程$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$同解呢?

1. 在方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解时，方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$与$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$同解!

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$解是$QR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解，$Q^TQ = I$得到$R\boldsymbol{x} = Q^TQR\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$

反过来，假设方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解，则$\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q)$，因此，$P_A\boldsymbol{b} = P_Q\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$

如果$\boldsymbol{x}$满足$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$,

则$QR\boldsymbol{x} = \underbrace{QQ^T}_{P_Q}\boldsymbol{b} = P_Q\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$

即$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

2. 方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解时，

(A为列满秩矩阵, $A=QR$，Q为列正交矩阵，R为对角元>0上三角矩阵)

因为R可逆，方程$R\boldsymbol{x}=Q^T\boldsymbol{b}$一定有解。

$R\boldsymbol{x}=Q^T\boldsymbol{b} \Longrightarrow QR\boldsymbol{x}=QQ^T\boldsymbol{b}$,

即$A\boldsymbol{x}=QQ^T\boldsymbol{b}=P_Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$

于是，方程$R\boldsymbol{x}=Q^T\boldsymbol{b}$的解是方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$的解，其中$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{b}$在$\mathcal{R}(A)$上的正交投影

综合以上两点，方程$R\boldsymbol{x}=Q^T\boldsymbol{b}$与方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$同解

3.3 最小二乘问题(least square)

主要内容：

（a）最小二乘问题的引入

（b）最小二乘问题的理论背景

（c）最小二乘问题示例

（a）问题的引入—曲线拟合:

曲线拟合是指选择适当的曲线类型来拟合观测数据

有一组观测数据$(t_1, b_1), \ldots, (t_m, b_m)$，即时间$t = t_i$时观测值为$b = b_i$.

假设我们选用直线拟合数据:

设直线方程为$b = C + Dt$，此时C, D**为待定量**

测量数据给出m个方程$\begin{cases} C + t_1 D = b_1 \\ C + t_2 D = b_2 \\ \quad\vdots \\ C + t_m D = b_m \end{cases}$

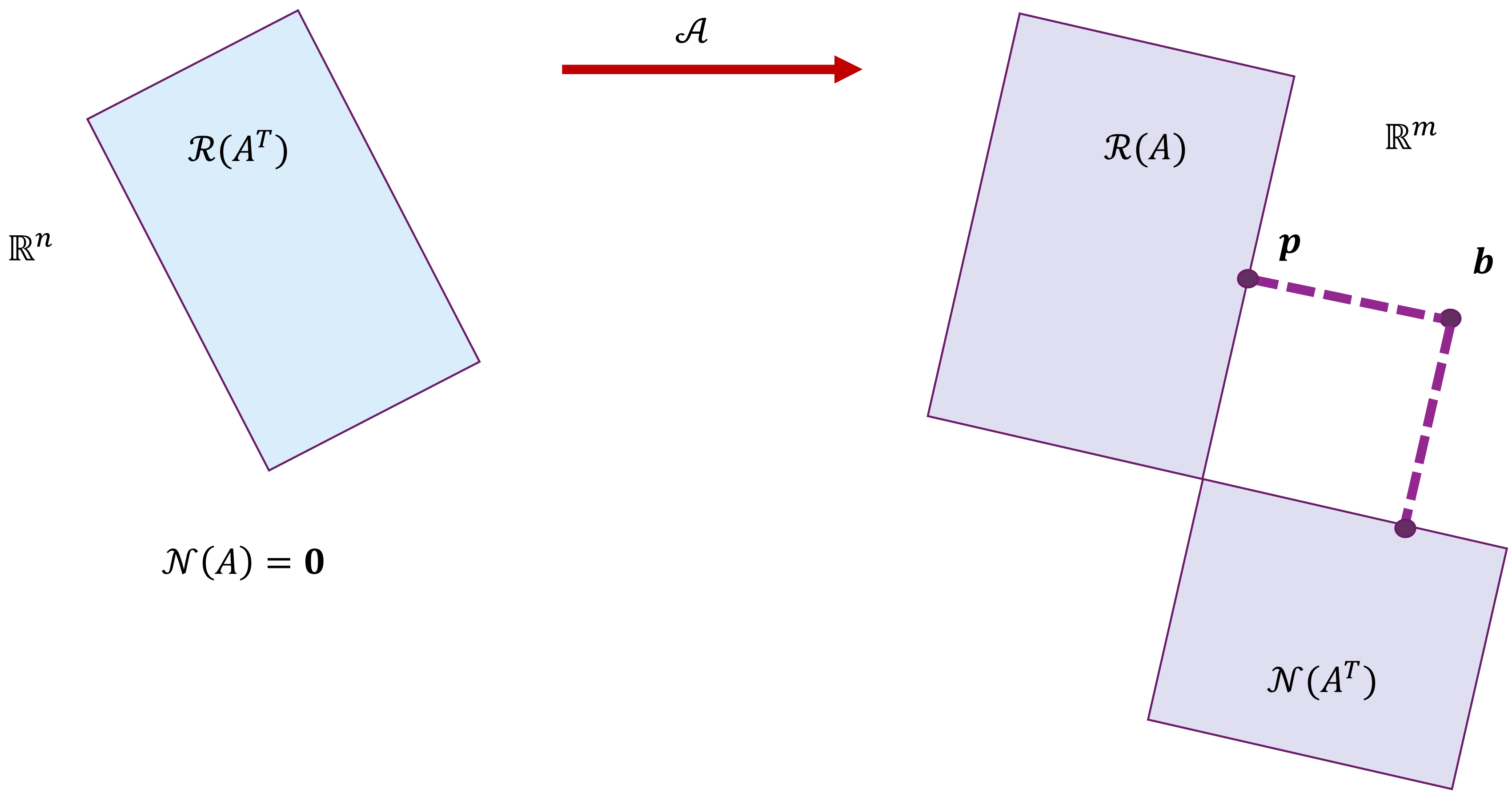
写成矩阵形式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中$A=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 1 & t_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & t_m\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$

由于$t_i \neq t_j$（测量时间不同），A列满秩，方程**最多有一个解**，且常常无解

问题：什么是最佳近似的（C, D）呢？怎么求？

注意：$\boldsymbol{b}$是固定的；当C, D变化时，$A\boldsymbol{x}$跑遍了A的列空间$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.



$\mathcal{A}$
$\mathcal{R}(A^T)$
$\mathbb{R}^n$
$\mathcal{N}(A) = \mathbf{0}$
$\mathcal{R}(A)$
$\mathbb{R}^m$
$\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{b}$
$\mathcal{N}(A^T)$

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}，\text{其中}A=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 1 & t_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & t_m\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

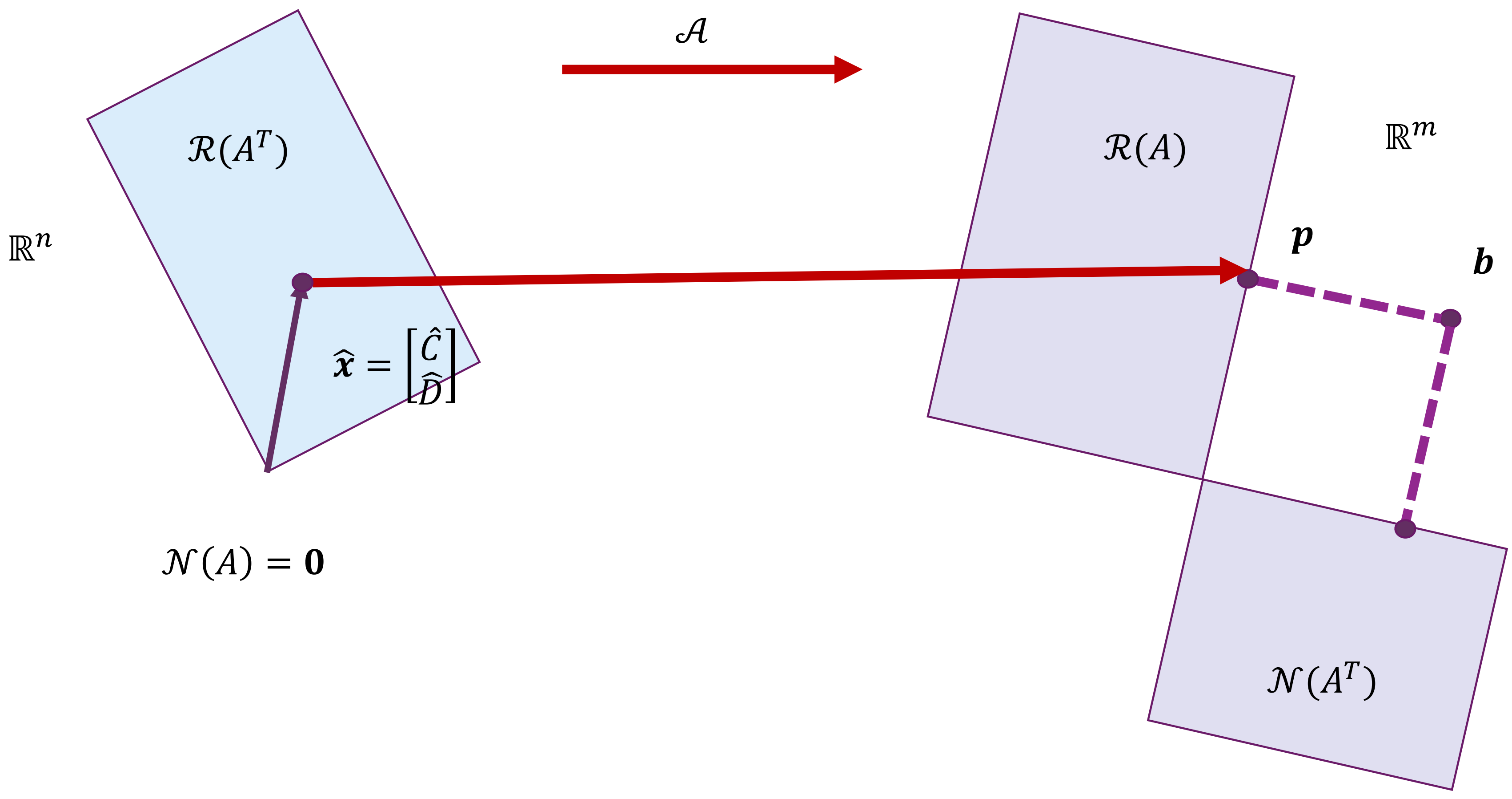
由于$t_i \neq t_j$（测量时间不同），A列满秩，方程**最多有一个解**，且常常无解

问题：什么是最佳近似的（C, D）呢？怎么求？

注意：$\boldsymbol{b}$是固定的；当C, D变化时，$A\boldsymbol{x}$跑遍了A的列空间$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.

求最佳近似的一组（C, D）（记为$(\hat{C}, \widehat{D})$），实际上是在$\mathcal{R}(A)$上找到距离$\boldsymbol{b}$最近的点

这等价于$\boldsymbol{p} = A\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \widehat{D}\end{bmatrix}$为$\boldsymbol{b}$在子空间$\mathcal{R}(A)$上的正交投影！


$\mathcal{A}$
$\mathcal{R}(A^T)$
$\mathbb{R}^n$
$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$
$\mathcal{N}(A) = \mathbf{0}$
$\mathcal{R}(A)$
$\mathbb{R}^m$
$\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{b}$
$\mathcal{N}(A^T)$

（b）最小二乘问题的理论背景

问题：当方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 无解时，如何找近似解?

不假设列满秩

定义：令$e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$.

$E(\boldsymbol{x}) = \|e(\boldsymbol{x})\|^2 = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|^2$为$\mathbb{R}^n$上的函数

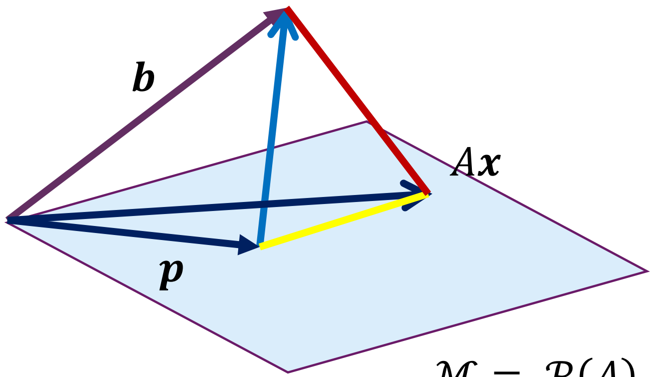
(1) 满足$E(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|^2$最小的解$\hat{\boldsymbol{x}}$称为**最小二乘解**(least square solution).

(2) 最小二乘解中长度最短的解称为**最优最小二乘解**(best solution)，记为$\boldsymbol{x}^+$.

命题:

(1) $\hat{\boldsymbol{x}}$为方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解当且仅当$A\hat{\boldsymbol{x}}$为向量$\boldsymbol{b}$在$\mathcal{R}(A)$上的正交投影。

(2) $\hat{\boldsymbol{x}}$为最小二乘解当且仅当 $A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$.



证明:

（1）令$\boldsymbol{p} \in \mathcal{R}(A)$为$\boldsymbol{b}$在$\mathcal{R}(A)$上的正交投影。由勾股定理

$E(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|^2 = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}\|^2$

因此，$E(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|^2 \geq \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}\|^2$.

取等号当且仅当$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$.

（2）由于正交投影的知识，$A\hat{\boldsymbol{x}}$为$\boldsymbol{b}$在$\mathcal{R}(A)$上的正交投影当且仅当$\hat{\boldsymbol{x}}$满足正规方程$A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$.

因此，正规方程$A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$的一个解就是最小二乘解

命题:

设$\hat{\boldsymbol{x}}$为一个最小二乘解，方程的所有最小二乘解为$\hat{\boldsymbol{x}}+\mathcal{N}(A)$.

证明:

回顾方程解集=特解+零空间;

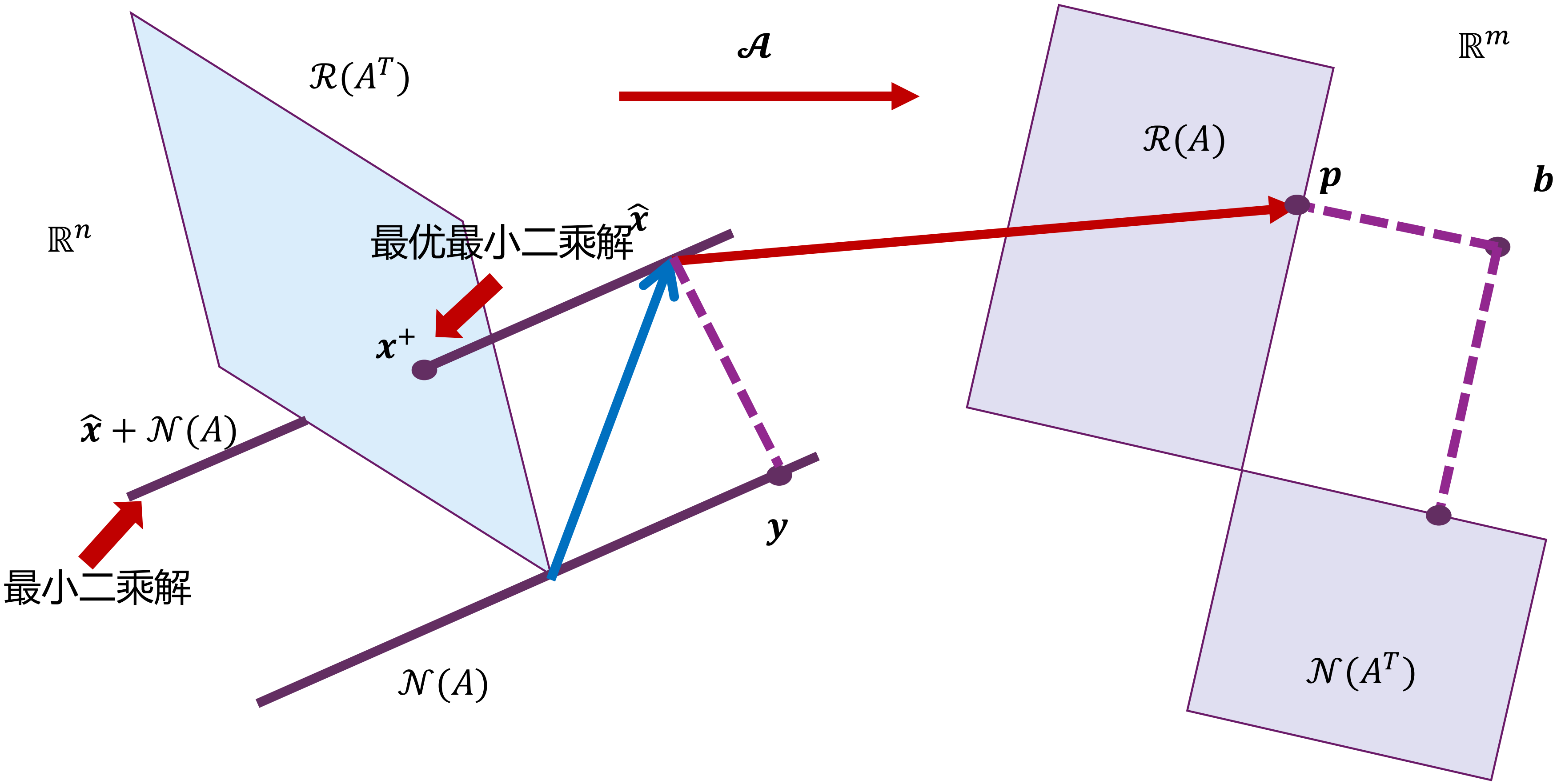
$\mathcal{N}\left(A^TA\right)=\mathcal{N}(A)$. 于是,

最小二乘解=$\hat{\boldsymbol{x}}+\mathcal{N}\left(A^TA\right)=\hat{\boldsymbol{x}}+\mathcal{N}(A)$.

如果A为列满秩矩阵，方程$A^TA\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$有唯一解$\hat{\boldsymbol{x}}=\left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$.

此时最小二乘解唯一，也是最优最小二乘解.

小结:



问题：$\hat{\boldsymbol{x}}$在$\mathcal{R}(A^T)$上的正交投影是哪个向量?

命题:

设$\hat{\boldsymbol{x}}$为一个最小二乘解。令$\boldsymbol{x}^+$为$\hat{\boldsymbol{x}}$在$\mathcal{R}(A^T)$上的正交投影，则

（1） $\boldsymbol{x}^+$为最小二乘解且不依赖$\hat{\boldsymbol{x}}$的选取

（2） $\boldsymbol{x}^+$为最小二乘解中长度最短的解，即它是最优最小二乘解。

证明:

两个最小二乘解相差一个$\mathcal{N}(A)$中的向量$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}$在$\mathcal{R}(A^T)$上的正交投影为零向量

于是任意两个最小二乘解在$\mathcal{R}(A^T)$上的正交投影相同，记为$\boldsymbol{x}^+$.

令$\boldsymbol{y}$为$\hat{\boldsymbol{x}}$在$\mathcal{N}(A)$上的正交投影。由勾股定理，$||\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}^+||^2=||\hat{\boldsymbol{x}}||^2$.

因此，$\boldsymbol{x}^+$为最小二乘解中长度最短的解，它是最优最小二乘解。

在第六章我们将介绍用奇异值分解，广义逆求最优最小二乘解。

回顾：QR分解在解方程上的应用

假设A列满秩$A = QR$，Q为列正交矩阵，R为上三角矩阵对角元> 0。

方程组转化为$QR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，左乘$Q^T$，得到$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$

1. 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解时，方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$与$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$同解

2. 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$无解时， 方程$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$的解是方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$的解，其中$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{b}$在$\mathcal{R}(A)$上的正交投影

因此，方程$R\boldsymbol{x} = Q^T\boldsymbol{b}$的解是方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解

QR分解计算最小二乘解:

设A为列满秩矩阵，$A = QR$为A的QR分解。设$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，则方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解为$\hat{\boldsymbol{x}} = R^{-1}Q^T\boldsymbol{b}$.

证明:

$\hat{\boldsymbol{x}}$满足正规方程$A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$。于是$R^TQ^TQR\hat{\boldsymbol{x}} = R^TQ^T\boldsymbol{b}$。

由于Q满足$Q^TQ = I$，$R^TR\hat{\boldsymbol{x}} = R^TQ^T\boldsymbol{b}$

由于R可逆，R^T也可逆，因此$R\hat{\boldsymbol{x}} = Q^T\boldsymbol{b}$，

于是 $\hat{\boldsymbol{x}} = R^{-1}Q^T\boldsymbol{b}$.

（c）最小二乘问题示例: 直线拟合

有一组数据$(t_1, b_1) = (0,6), (t_2, b_2) = (1,0), (t_3, b_3) = (2,0)$,

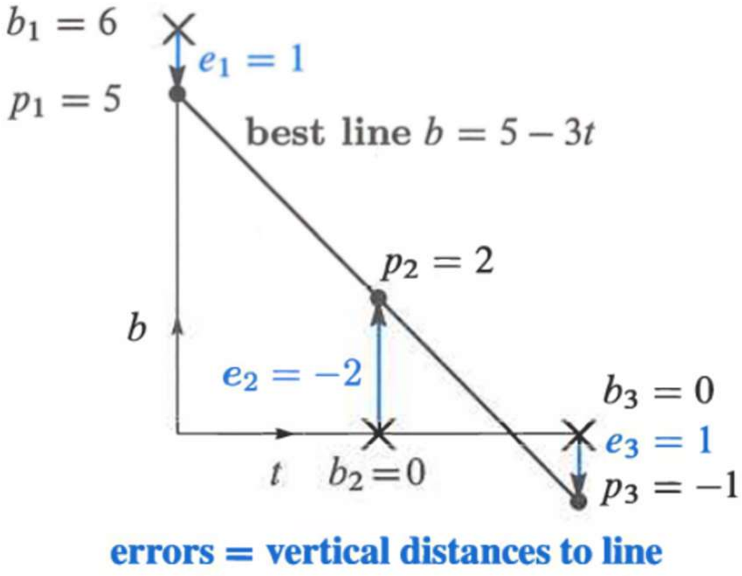
求最小二乘意义下的最佳拟合直线。

设直线方程为$b = C + Dt$

测量数据给出方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中,$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

最佳拟合直线的系数满足$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \widehat{D} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

向量$\boldsymbol{b}$在$\mathcal{R}(A)$上的正交投影为 $\boldsymbol{p} = A\widehat{\boldsymbol{x}} = 5\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2$.



从误差的角度看，令$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C + t_1 D \\ C + t_2 D \\ C + t_3 D \end{bmatrix}$为误差项，即

最小二乘解（或最佳近似解）$(\hat{C}, \widehat{D})$满足$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$最小。

最小二乘问题示例: 二次曲线拟合

有一组数据（(t_1, b_1),…,(t_m, b_m),求最小二乘意义下的最佳抛物拟合曲线。

假设这条抛物线为$b = C + Dt + Et^2$

测量数据给出m个方程$\begin{cases} C + t_1 D + t_1^2 E = b_1 \\ \vdots \\ C + t_m D + t_m^2 E = b_m \end{cases}$

写成矩阵形式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

由于测量时间t_i不同，A列满秩。最小二乘解 $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \widehat{D} \\ \hat{E} \end{bmatrix} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$

从误差上看，令$e_i = e_i(\boldsymbol{x}) = b_i - \left(C + t_i D + t_i^2 E\right)$.

最佳二次拟合曲线$\hat{C} + \widehat{D} t + \hat{E} t^2$满足 $e_1^2 + \cdots + e_m^2$ 最小。

第3章回顾

1. 正交投影：解正规方程$A^TA\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$;

A 列满秩时，$\boldsymbol{p}=A\left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$

2. Gram-Schmidt正交化与QR分解

(1) Gram-Schmidt正交化:

线性无关向量组 ➡ 正交单位向量组

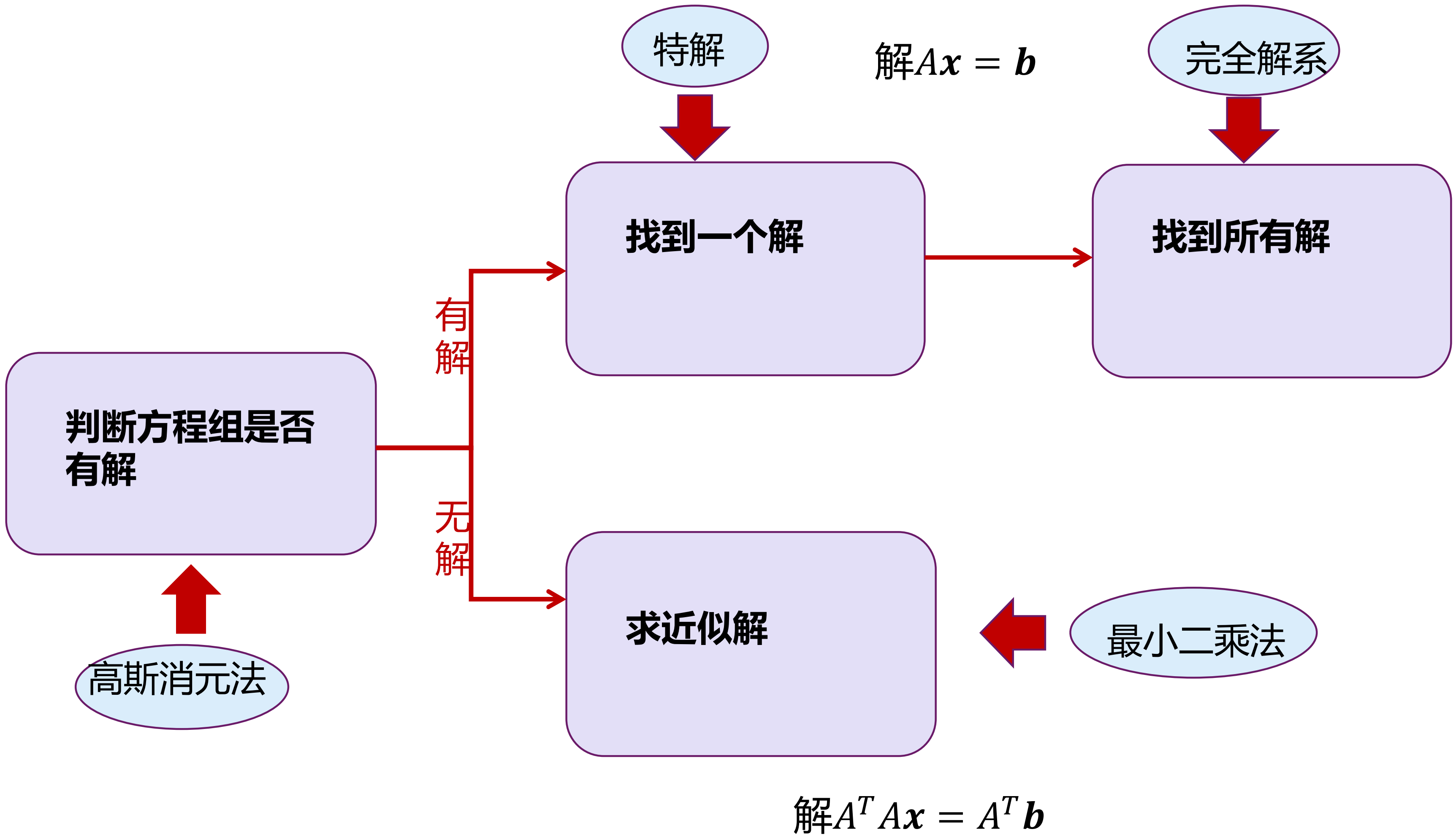
(2) 列满秩矩阵的QR分解:

列满秩矩阵 ➡ 列正交矩阵×上三角矩阵(对角线元素>0)

3. 最小二乘法：求解正规方程$A^TA\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$；$R\boldsymbol{x}=Q^T\boldsymbol{b}$

4. QR分解简化正交投影计算、简化最小二乘解、简化方程求解；计算（高维）平行多面体体积

前3章课程内容总结（方程组问题角度）



课程主线

后6周

高斯消元
高斯-若尔当消元

线性方程组

完全解系
解空间
向量的运算
向量的线性组合

矩阵的运算
矩阵的四个子空间
维数，矩阵的秩

矩阵的
LU分解
QR分解

线性映射与矩阵

正交性, 正交投影,
Gram-Schmidt正交化
最小二乘法

行列式
特征值与特征向量
矩阵的对角化

矩阵的性质

对称矩阵与正定性
奇异值分解
广义逆

剩余章节内容简介

第四章 行列式

第五章 特征值和特征向量 （核心内容）

第六章 实对称矩阵（核心内容）

第七章 线性空间和线性映射

第四章 行列式

主要内容

4.1 行列式函数

4.2 行列式的展开式

注意：行列式只对方阵有定义

目的:

给出方阵可逆的等价条件

第五章用来计算方阵的特征值

多元微积分: 雅可比行列式

行列式(determinant)的历史

历史上最早出现的**行列式**(determinant)是关于线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的行列式, 其中$A$是方阵.

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的行列式是一个数, 它**决定 (determines)**了方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$是否有唯一解. 有唯一解当且仅当行列式非零.

在矩阵出现后我们称其为矩阵A的行列式, 记为$|A|$或$\det(A)$. 因此, $\det(A)\neq 0$ 当且仅当A可逆.

4.1 行列式函数

（a）行列式函数的定义

（b）行列式函数的性质

（a）行列式函数的定义

例：$n=2$时的行列式函数

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$,方程组$\begin{cases} ax+by=b_1 \\ cx+dy=b_2 \end{cases}$有唯一解当且仅当$ad-bc\neq 0$. 这里$ad-bc$即为$A$的行列式。

$|ad-bc|$也是$\mathbb{R}^2$中两个向量$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$构成的平行四边形的面积

因此, $n=2$, 行列式函数 = 有向面积

高维情形, 行列式函数是有向面积、有向体积的推广

$n=2$时行列式函数的性质

令$S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$为$\mathbb{R}^2$中两向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$构成的平行四边形的有向面积，

$S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$满足下面3条：

(1) 双线性性：$S(\boldsymbol{a}_1,\ell\boldsymbol{a}_2)=\ell S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$，$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_1)+S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_2)$,

$S(\ell\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\ell S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, $S(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a})=S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a})+S(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a})$.

(2) 共线为零：$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$,

(3) 归一化条件：$S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=1$,

实际上，行列式由上述三条刻画。

命题:

如果$\delta: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$满足:

(1) 双线性线性：$\delta([\boldsymbol{a}, \ell_1\boldsymbol{a}_1 + \ell_2\boldsymbol{a}_2]) = \ell_1\delta([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1]) + \ell_2\delta([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_2])$,

$\delta([\ell_1\boldsymbol{a}_1 + \ell_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}]) = \ell_1\delta([\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}]) + \ell_2\delta\big([\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}]\big)$.

(2) 共线为零 $\delta([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]) = 0, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$,

(3) 归一化 $\delta(I_2) = 1$,

则对$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \delta(A) = ad - bc$.

证明:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_{2,} b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2].$$

$$\delta(A) = \delta([a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_{2,} b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2])$$

$$= ab\delta([\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1]) + ad\delta([\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]) + cb\delta([\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1]) + cd\delta([\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2])$$

$$= ad - bc.$$

只需说明$\delta([\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1]) = -\delta([\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]) = -1$

对于实矩阵，在双线性性条件下，以下两条等价

(2) $\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])=0,\forall\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2$

(2’) $\delta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=-\delta(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1),\forall\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$

假设（2）成立，考虑$\delta([\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2])=0$。由双线性性展开得到

$\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1])+\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2])+\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1])+\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2])=0$

由于$\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1])=\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2])=0$，得到(2’).

(2’)中取$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}$得到$\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])=-\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])$，于是$2\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])=0$，得到(2)

教材定义行列式函数时采用(2’).

$n = 2$时行列式函数的性质

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\det A^T = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = \det A$$

于是行列式函数对矩阵的行有双线性性和反对称性

行列式函数的定义:

令$n \geq 1$. 如果函数δ：$M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$满足如下3条，则$\delta$称为**行列式函数**

(1) $\delta(I_n) = 1$

(2) $\delta\left(\left[\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots\right]\right) = -\delta\left(\left[\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots\right]\right)$

(3) δ对于矩阵的一列是线性的，

即$\delta\left(\left[\dots, \ell_1 \boldsymbol{a}_i + \ell_2 \boldsymbol{a}_i', \dots\right]\right) = \ell_1 \delta([\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots]) + \ell_2 \delta\left(\left[\dots, \boldsymbol{a}_i', \dots\right]\right)$

利用初等列变换的矩阵表达，我们有

$\delta\left(AP_{ij}\right) = -\delta(A)$

$\delta\left(AE_{ii}(k)\right) = k\delta(A)$

定理:

对每个自然数n, 行列式函数存在且唯一.

4.1节: 行列式函数的唯一性

$\Longrightarrow$ 行列式的性质

4.2节: 行列式函数的存在性

$\Longrightarrow$ 行列式的计算公式