Brown 运动的变形（补充讲稿）

1. **Brown 桥**

设$\{B_t: t\ge 0\}$为（标准）Brown 运动，令

$$B_t^* = B_t - tB_1,\ 0\le t\le 1$$

则称过程$\{B_t^*: t\ge 0\}$为 Brown 桥。（最简单形式）

显然，Brown 桥也是 Gauss 过程，且

$$EB_t^* = E(B_t - tB_1) = 0,$$

$$Cov(B_s^*, B_t^*) = E(B_s^* B_t^*) = E[(B_s - sB_1)(B_t - tB_1)]$$

$$= s - st - st + st = s(1-t), \forall 0\le s<t\le 1$$

故 Brown 桥不是 Brown 运动。

Brown 桥的条件分布：设$0\le a<b<c$，由于

$$\begin{pmatrix} B_b \\ B_a \\ B_c \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & a & a \\ b & a & c \end{pmatrix})$$ ，则 $B_b \mid B_a = x, B_c = z \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$

其中，

$$\tilde{\mu} = E[B_b \mid B_a = x, B_c = z] = 0 + (a,b)\begin{pmatrix} a & a \\ a & c \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \frac{c-b}{c-a}x + \frac{b-a}{c-a}z,$$

$$\tilde{\Sigma} = D[B_b \mid B_a = x, B_c = z] = b - (a,b)\begin{pmatrix} a & a \\ a & c \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b(a+c-b)-ac}{c-a}。$$

比如，当$a=0, c=1, b=t\in(0,1)$时，

$$B_t \mid B_0 = x, B_1 = z \sim N((1-t)x + tz, t(1-t))$$

用 Brown 桥可以生成区间$[0,1]$上的 Brown 运动的轨道。

（2）Brown 运动的积分（对时间）：$\int_0^t B_s ds, t\ge 0$

定义有意义，理由：Brown 运动的轨道连续，故$\int_0^t B_s ds$为通常的 Riemann 积分，由 Riemann 积分的定义，我们可以从逼近和$\sum_{i=1}^n B_{t_i}\Delta t_i$的极限得到，这里

$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 是区间$[0,t]$的分点，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ 。由于逼近和是 Gauss 分布的线性组合，故逼近和仍为 Gauss 分布，其均值为 0，方差为

$$D(\sum_{i=1}^n B_{t_i}\Delta t_i)=Cov(\sum_{i=1}^n B_{t_i}\Delta t_i,\sum_{i=1}^n B_{t_i}\Delta t_i)$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n Cov(B_{t_i},B_{t_j})\Delta t_i\Delta t_j$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \min(t_i,t_j)\Delta t_i\Delta t_j\to\int_0^t\int_0^t\min(u,v)dudv=\frac{1}{3}t^3$$

故$\int_0^t B_s ds\sim N(0,\frac{t^3}{3})$（严格地说，要用到以下定理）

定理：设$X_n\sim N(\mu_n,\sigma_n^2),\quad X_n\xrightarrow{D}X$，则极限$\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu,\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2=\sigma^2$存在，且$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 。（思考）

进一步，我们有

定理：**设**$\{B_t:t\geq 0\}$为 Brown 运动，

（1） 若$g(\cdot)$为连续函数，对$0\leq s<t$，$\int_s^t E(|g(B_u)|)du<\infty$ ，则 $\int_s^t g(B_u)du$存在，且$E[\int_s^t g(B_u)du]=\int_s^t E[g(B_u)]du$；

（2） 若$h(\cdot,\cdot)$为二元连续函数，对$0\leq s_1<t_1,0\leq s_2<t_2$，有 $\int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2}E(|h(B_u,B_v)|)dudv<\infty$，则 $\int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2}h(B_u,B_v)dudv$ 存 在， 且

$$E[\int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2}h(B_u,B_v)dudv]=\int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2}E[h(B_u,B_v)]dudv$$

（思考。严格证明需要用到积分交换的 Fubini 定理）

（3） 在原点反射的 Brown 运动：$|B_t|,t\geq 0$

只给出一维分布：$\forall x>0$，

$$P(|B_t| \le x) = P(-x \le B_t \le x) = P(-\frac{x}{\sqrt{t}} \le \frac{B_t}{\sqrt{t}} \le \frac{x}{\sqrt{t}})$$

$$= 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1$$

（4） 几何 Brown 运动：$\{e^{B_t}, t \ge 0\} \triangleq \{X_t, t \ge 0\}$

由于 $B_t \sim N(0,t)$，故其矩母函数为 $M_{B_t}(u) = E[e^{uB_t}] = e^{\frac{t}{2}u^2}$ ，从而

$$EX_t = E[e^{B_t}] = e^{\frac{t}{2}};$$

$$DX_t = EX_t^2 - (EX_t)^2 = E[e^{2B_t}] - [Ee^{B_t}]^2 = e^{2t} - e^t。$$