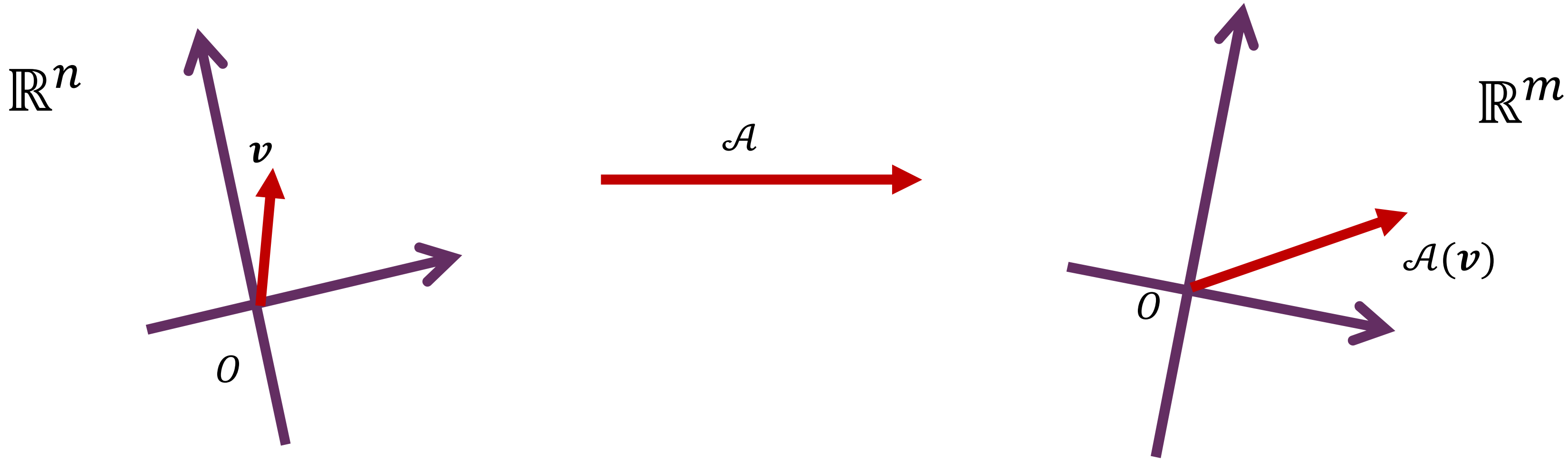
2.5 线性代数基本定理v.1.0

令$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 对应线性映射$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$



线性代数基本定理是通过矩阵及其4个基本子空间来描述$\mathcal{A}$

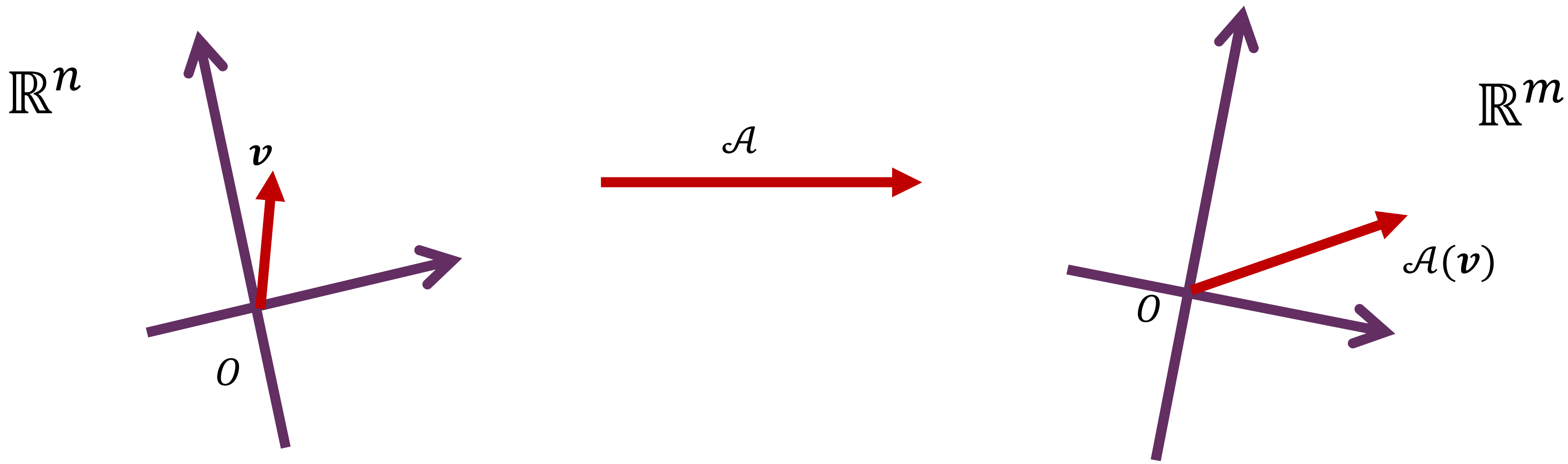
本节内容:

(a) 空间分解

(b) 线性代数基本定理v.1.0

(c) 行满秩与列满秩矩阵的等价条件

(a) 空间分解



$\mathcal{A}$ 的定义域 $\mathbb{R}^n$有两个子空间:

零空间$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$为$\mathbb{R}^n$的子空间

行空间$\mathcal{R}(A^T)$为$\mathbb{R}^n$子空间

$$dim\mathcal{N}(A) = n - rank(A), \qquad dim\mathcal{R}(A^T) = rank(A)$$

命题

$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{\mathbf{0}\}$且$\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^n$。

证明：$\underline{\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{\mathbf{0}\}}$：

令$A = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix}$. $A^T = [\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_m]$.

设$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T)$.

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(A) \Longrightarrow \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \boldsymbol{x} = \cdots = \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \boldsymbol{x} = 0$

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(A^T) \Longrightarrow \boldsymbol{x} = c_1 \tilde{\boldsymbol{a}}_1 + \cdots + c_m \tilde{\boldsymbol{a}}_m$

于是$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = (c_1 \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T + \cdots + c_m \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T)\boldsymbol{x}$

$= c_1 \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \boldsymbol{x} + \cdots + c_m \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \boldsymbol{x} = 0$

实向量$\boldsymbol{x}$的长度为0，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$\underline{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^n}$：

计算$\mathbb{R}^n$的子空间$\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A^T)$的维数

$dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A^T)) = dim\mathcal{N}(A) +$

$dim\mathcal{R}(A^T) - dim\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T)$

$= n - rank(A) + rank(A) - 0 = n$

因此，$\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^n$

1. 在分解$\mathcal{N}(A)+\mathcal{R}(A^T)=\mathbb{R}^n$中，对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，存在唯一的$\boldsymbol{y}\in\mathcal{N}(A),\boldsymbol{z}\in\mathcal{R}(A^T)$使得$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$.

如果$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{z}',\boldsymbol{y}'\in\mathcal{N}(A),\boldsymbol{z}'\in\mathcal{R}(A^T)$, 则

$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}\in\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{R}(A^T)=\{\boldsymbol{0}\}$

2. $\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}(A)$，$\forall\boldsymbol{y}\in\mathcal{R}(A^T)$,

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=0$$

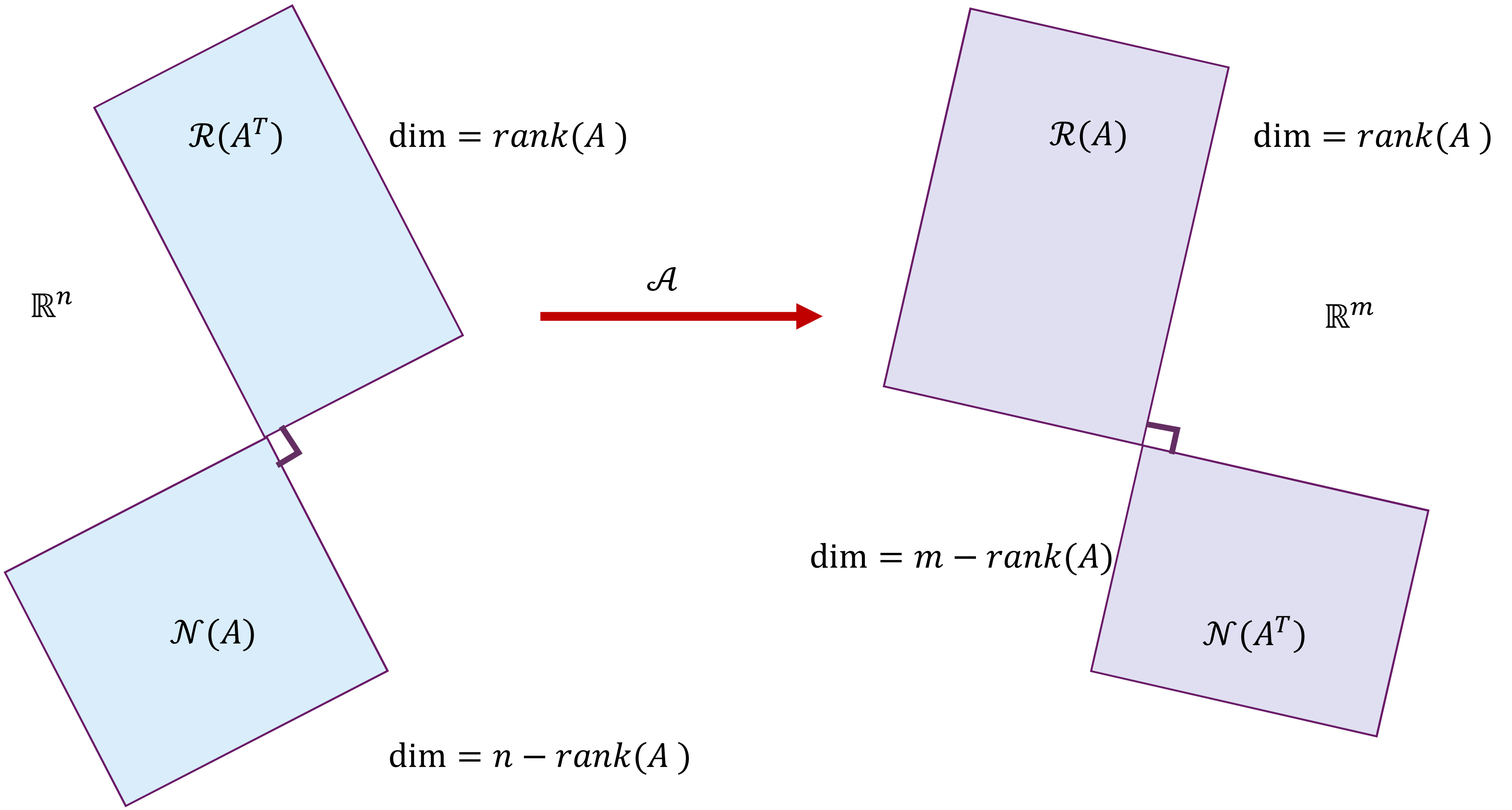
我们可记为$\mathcal{N}(A)\perp\mathcal{R}(A^T)$

3. 对$A^T\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$应用上述命题，得到$\mathbb{R}^m$的分解：

$\mathcal{N}(A^T)\cap\mathcal{R}(A)=\{\boldsymbol{0}\}$，$\mathcal{N}(A^T)\perp\mathcal{R}(A)$且$\mathcal{N}(A^T)+\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^m$

左零空间　　列空间

空间分解:



$\mathcal{R}(A^T)$
dim $= rank(A)$
$\mathbb{R}^n$
$\mathcal{N}(A)$
dim $= n - rank(A)$
$\mathcal{A}$
$\mathcal{R}(A)$
dim $= rank(A)$
$\mathbb{R}^m$
dim $= m - rank(A)$
$\mathcal{N}(A^T)$

左零空间(left null space):

$$\boldsymbol{y} \in \mathcal{N}\left(A^T\right) \Leftrightarrow A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^T A = \boldsymbol{0}^T$$

左零空间的一组基:

设$E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m^T \end{bmatrix}$为可逆方阵, 使得$EA = rref(A)$.

则$\{\boldsymbol{r}_{rank(A)+1}, \dots, \boldsymbol{r}_m\}$构成$\mathcal{N}(A^T)$的一组基。

由于E可逆， $\{\boldsymbol{r}_{rank(A)+1},\dots,\boldsymbol{r}_m\}$线性无关

$$dimSpan(\boldsymbol{r}_{rank(A)+1},\dots,\boldsymbol{r}_m) = m - rank(A) = dim\mathcal{N}(A^T)$$

$$rref(A) = EA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^T A \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m^T A \end{bmatrix}$$

由于$rref(A)$的后$m - rank(A)$行为零行$\boldsymbol{r}_{rank(A)+1}^{\boldsymbol{T}} A = \cdots = \boldsymbol{r}_m^T A = \boldsymbol{0}^T$

于是，$\boldsymbol{r}_{rank(A)+1},\dots,\boldsymbol{r}_m \in \mathcal{N}(A^T)$.

综合以上两点，$\{\boldsymbol{r}_{rank(A)+1},\dots,\boldsymbol{r}_m\}$构成$\mathcal{N}(A^T)$的一组基

(b) 线性代数基本定理v.1.0:

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

(1) $rank(A) \leq \min(m,n)$.

(2) 四个基本子空间的维数

行空间$\mathcal{R}(A^T)$： $dim\mathcal{R}\left(A^T\right) = rank(A)$

零空间$\mathcal{N}(A)$： $dim\mathcal{N}(A) = n - rank(A)$

列空间$\mathcal{R}(A)$： $dim\mathcal{R}(A) = rank(A)$

左零空间$\mathcal{N}(A^T)$:$dim\mathcal{N}\left(A^T\right) = m - rank(A)$

(3)四个基本子空间的一组基

由$rref(A)$的非零行给出

由规范基础解系给出

由A的主元列给出

由$EA = rref(A)$中E的后$m - rank(A)$行给出

(4)空间分解： $\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) + \mathcal{R}\left(A^T\right), \mathbb{R}^m = \mathcal{N}\left(A^T\right) + \mathcal{R}(A)$

(c) 行满秩矩阵与列满秩矩阵的等价条件:

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 如果$rank(A) = m$,则称$A$为**行满秩矩阵。**

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 如果$rank(A) = n$,则称$A$为**列满秩矩阵。**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 12 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

行满秩矩阵　　　　　　列满秩矩阵

A行满秩当且仅当A^T列满秩

从以下几个方面讨论**列满秩矩阵**的等价条件:

(1) 方程组

(2) 向量

(3) 矩阵

(4) 子空间

(5) 线性映射

引理:

对任意$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$\mathcal{N}(A^T A)$=$\mathcal{N}(A)$.

证明:

如果$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，则$A^T A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。因此$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}\left(A^T A\right)$.

如果$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(A^T A\right)$，$A^T A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

由于$A\boldsymbol{x}$为实向量，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

从以下几个方面讨论**列满秩矩阵**的等价条件:

(1) 方程组

(1a)齐次方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解;

(1b)对任意$\boldsymbol{b}$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$最多有一个解。

从以下几个方面讨论**列满秩矩阵**的等价条件:

(2) 向量

(2a) A的列向量线性无关;

(2b) A的行向量张成$\mathbb{R}^n$; (因为$dim\mathcal{R}(A^T) = rank(A) = n$)

从以下几个方面讨论**列满秩矩阵**的等价条件:

(3) 矩阵

(3a)$rank(A)=n$;

(3b)A的所有列是主元列;

(3c)$R=rref(A)=\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$;

(3d)A^T为行满秩矩阵;(因为$rank\left(A^T\right)=rank(A)=n.$)

(3e)方阵A^TA为可逆矩阵; (因为$\mathcal{N}\left(A^TA\right)=\mathcal{N}(A)=\mathbf{0}$) (第三章有应用)

(3f)A有左逆$B=\left(A^TA\right)^{-1}A^T$,即$BA=I_n$.

注意:如果A不是方阵,左逆不唯一,例如$\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$的左逆可以是$[I_n \quad F]$,$\forall F$

从以下几个方面讨论**列满秩矩阵**的等价条件:

(4) 子空间

(4a) $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$;

(4b) $\mathcal{R}\left(A^T\right) = \mathbb{R}^n$

(4c) A的列向量构成$\mathcal{R}(A)$的一组基;

从以下几个方面讨论**列满秩矩阵**的等价条件:

(5) 线性映射

(5a) $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\}$;

(5b) $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$为单射。

第三章 内积和正交性

主要内容

3.1 内积与正交投影

3.2 Gram-Schmidt正交化和矩阵的QR分解

3.3 最小二乘法

与教材顺序有所不同

3.1 内积与正交投影

本节主要内容：

(a) 回顾内积的基本性质

—Cauchy-Schwarz不等式，三角不等式，勾股定理

(b) 子空间正交与正交补

(c) 正交投影（重要）

(a) 回顾内积的基本性质

向量空间$\mathbb{R}^n$上的内积是一个二元函数$\langle -,- \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，
$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w}$,

满足

(1) 对称性：$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$

(2) 分配律：$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2$

(3) 数乘交换：$\boldsymbol{v} \cdot (c\boldsymbol{w}) = c\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w},\ c \in \mathbb{R}$

(4) 正定性：$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$ 且$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$当且仅当$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Cauchy-Schwarz不等式:

$|\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}| \le \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$,等号成立当且仅当$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$共线。

证明:

$|\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}| = |v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n|$

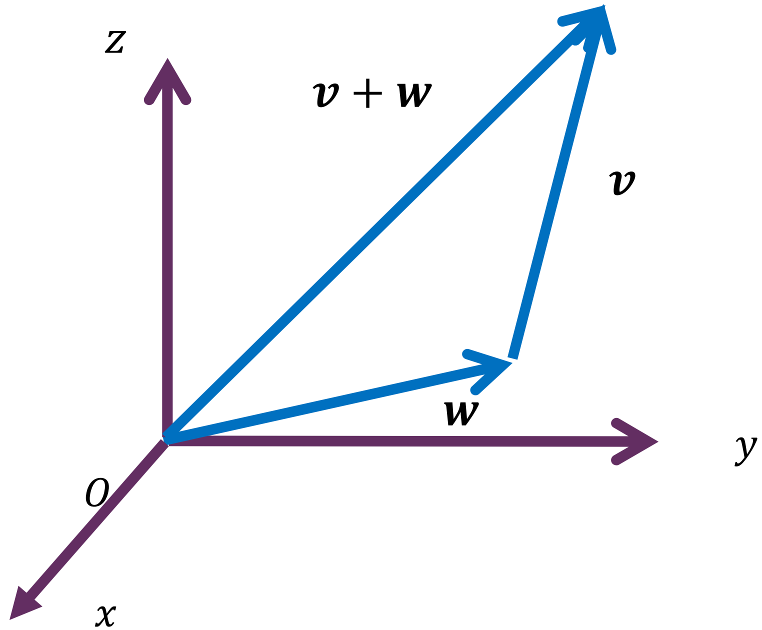
$\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}\sqrt{w_1^2 + \cdots + w_n^2}$

$(\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|)^2 - |\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}|^2 = \sum_{1\le i<j\le n}(v_i w_j - v_j w_i)^2 \ge 0$

三角不等式：

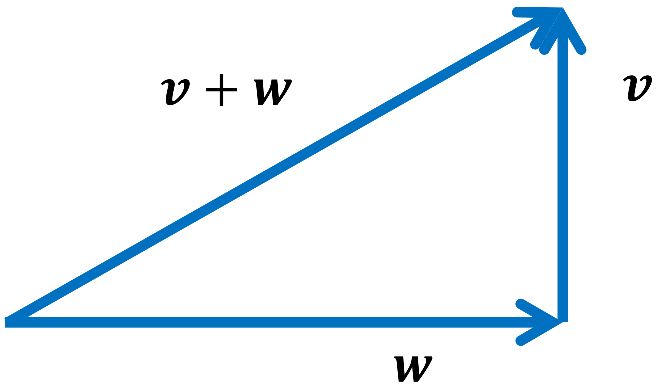
$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \le \|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$,

等号成立当且仅当$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$共线。



勾股定理：

向量$\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$正交（即$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}=0$），则$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2=\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{w}\|^2$



(b) 子空间正交与正交补

定义：

$\mathcal{M},\mathcal{N}$为$\mathbb{R}^m$的两个子集，如果

$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}=0,\forall\boldsymbol{v}\in\mathcal{M},\forall\boldsymbol{w}\in\mathcal{N}$

$\mathcal{M}$中任意向量与$\mathcal{N}$中任意向量正交

称$\mathcal{M}$与$\mathcal{N}$正交，记为$\mathcal{M}\perp\mathcal{N}$

特别的，我们常会用到$\mathcal{M},\mathcal{N}$为$\mathbb{R}^m$的子空间的情形

例：

$\mathbb{R}^3$中x轴=$Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$与$yz$平面=$Span\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$正交

例：

$\mathbb{R}^3$中xy平面 $= Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$与$xz$平面 $= Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$是否正交?

不正交

向量$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$属于两平面的交集，但是$\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_1 = 1 \neq 0.$

这与日常生活中讲的两平面垂直不同

日常生活中讲的两平面垂直是指：xy平面的法向量$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$与$xy$平面法向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$正交