Review　可降阶的ODE

1)方程不显含未知函数x：$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0$

令$y=x^{(k)}$.

2)方程不显含自变量t：$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

令$y=x'$, 视y为新未知函数, 视x为新自变量.

3)m次齐次方程(m为正整数)：$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

令$u=u(t)=\dfrac{1}{x}x'$

4)已知齐次线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0$$

的非零解$x=\varphi(t)$. 令$x=\varphi(t)y(t)$.(常数变易法)

§4. 线性常微分方程解的结构

1.线性ODE解的性质

Thm1.(叠加原理) 若$x_1(t)$和$x_2(t)$是

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的解, 则$\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}, c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是(1)的解. 若$x_1(t)$和$x_2(t)$是

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的解, 则$x_1(t)-x_2(t)$是(1)的解.□

Remark: 类比线性代数中线性方程组的理论.

Remark: 由解的叠加原理, 齐次线性ODE(1)的解集合对线性运算封闭,是一个线性空间. 另外, 若已知非齐次线性ODE(2)的一个特解$\varphi_0(t)$,则(2)的通解为

$$x(t)=\varphi(t)+\varphi_0(t),$$

其中$\varphi(t)$是(2)所对应的齐次方程(1)的通解.

换言之, 要求解(2), 只要找出它的一个特解,并求出对应的齐次常微分方程(1)的通解.

Question: 如何求n次齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的通解? (1)的解集合是一个线性空间,这个线性空间的维数是多少? 如何求出空间的一组基?

Question: 如何求n次非齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的一个特解?

先解决第一个问题, 为此, 需要引入函数组线性相关与线性无关的概念.

2.函数组的线性相关与线性无关

Def. 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$是定义在区间$I$上的函数, 若存在不全为0的常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$, 使得

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0,\ \forall t\in I,$$

则称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关, 否则称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性无关.

例: 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}$两两互不相等, 则$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_m t}$在任意区间上线性无关.(常用结论!)

证明:任取区间I,设有常数$c_1, c_2, \cdots, c_m$, $s.t.$

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \qquad \forall t \in I.$$

上式两边对t求导, 则$c_1, c_2, \cdots, c_m$满足方程组

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \lambda_m c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \\ \quad \vdots \\ \lambda_1^{m-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^{m-1} c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \lambda_m^{m-1} c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0. \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵行列式为

$$\det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_m t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{m-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k t\right) \prod_{1 \le i < j \le m} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \qquad \forall t \in I.$$

因此方程组只有零解,即$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

故$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_m t}$线性无关.□.

Remark: $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则

1) $1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n$ 线性无关;

2) $1, e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \cdots, x^n e^{\lambda x}$ 线性无关;

3) $1, \sin \alpha x, \cos \alpha x, \cdots, \sin n\alpha x, \cos n\alpha x$ 线性无关;

4) $1, e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x,$
$\cdots, x^n e^{\alpha x} \sin \beta x, x^n e^{\alpha x} \cos \beta x$ 线性无关.

如何证明?

Def. 定义函数组$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in C^{m-1}(I)$在区间$I$上的Wronsky行列式为

$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m](t)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_m' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_2^{(m-1)} & \cdots & \varphi_m^{(m-1)} \end{pmatrix}(t).$$

Thm2.函数组$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in C^{m-1}(I)$在区间$I$上线性相关的必要条件是$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m](t) \equiv 0$.

Proof: $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关,则存在不全为0的常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$,使得

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0,\quad \forall t\in I.$$

$$\text{故}\begin{cases} c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0,\\ c_1\varphi_1'(t)+c_2\varphi_2'(t)+\cdots+c_m\varphi_m'(t)\equiv 0,\\ \qquad\qquad\vdots \\ c_1\varphi_1^{(m-1)}(t)+c_2\varphi_2^{(m-1)}(t)+\cdots+c_m\varphi_m^{(m-1)}(t)\equiv 0 \end{cases}$$

有非零解$c_1,c_2,\cdots,c_m$,因此系数矩阵行列式

$$\mathrm{W}(t)=\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m](t)\equiv 0.\square$$

Remark.一般情况下,Thm2的逆命题不成立.原因在于,非零解 $c_1,c_2,\cdots,c_m$是t的函数,不一定是一组不依赖于t的不全为零的常数.例如

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ t^2, & t>0,\end{cases}\quad \psi(t)=\begin{cases}t^2, & t\le 0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

在$\mathbb{R}$上线性无关,但$W[\varphi,\psi](t)\equiv 0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Remark: 当$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\in C^n(I)$为$n$次齐次线性 ODE 的$n$个解时,Thm2的逆命题也成立. 这时,ODE解的存在唯一性定理起了重要作用.

3.线性常微分方程解的结构

Thm3.设函数$a_k(t)\in C(I)\,(k=1,2,\cdots,n),\varphi_1,\varphi_2,\cdots,$

$\varphi_n\in C^n(I)$为n次齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \qquad (*)$$

的n个解,则以下命题等价:

(1) $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在区间$I$上线性相关.

(2) $\mathrm{W}(t)=\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\equiv 0,\forall t\in I.$

(3) 存在$t_0\in I$,使得$\mathrm{W}(t_0)=0.$

Proof:$(1)\Rightarrow(2)$即Thm2,$(2)\Rightarrow(3)$显然.下证$(3)\Rightarrow(1)$.

因$W(t_0)=0$,存在不全为0的常数$c_1,c_2,\cdots,c_n,s.t.$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \cdots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

则ODE$(*)$的解 $x(t) \triangleq c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$

满足 $x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0$.由解的存在唯一性定理, $x(t)\equiv 0$. 故$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 线性相关.□

Remark. $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\in C^n(I)$ 为 n 阶齐次线性 ODE 的 n 个解, $t_0\in I$. 则

(1) $\quad \mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t_0)=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)=0, \forall t\in I.$

$\Leftrightarrow \varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 在 I 上线性相关.

(2) $\quad \mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t_0)\neq 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\neq 0, \forall t\in I.$

$\Leftrightarrow \varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 在 I 上线性无关. □

Thm4. n次齐次线性常微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0\ (t\in I),\qquad (1)$$

的所有解构成的集合是连续函数空间$C(I)$的一个n维线性子空间.即存在(1)的n个线性无关的解φ_1, $\varphi_2,\cdots,\varphi_n$, 使得$x(t)$为(1)的解当且仅当

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为常数.

Proof:取$\mathbb{R}^n$中自然基$e_1, e_2, \cdots, e_n$.记$\varphi_k\,(k=1,2,\cdots,n)$为(1)的满足以下初值条件的解:

$$(\varphi_k(t_0), \varphi_k'(t_0), \cdots, \varphi_k^{(n-1)}(t_0)) = e_k.$$

于是$W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0) = \det I_n = 1 \neq 0$,由Thm3知$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$为(1)在区间$I$上的$n$个线性无关的解.

一方面, 由解的叠加原理,

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

则是(1)的解.

另一方面,任取(1)的一个解$\varphi(t)$,设

$$(\varphi(t_0),\varphi'(t_0),\cdots,\varphi^{(n-1)}(t_0))=(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

则$y(t)\triangleq d_1\varphi_1(t)+d_2\varphi_2(t)+\cdots+d_n\varphi_n(t)$是方程(1)

的满足(相同)初值条件

$$(y(t_0),y'(t_0),\cdots,y^{(n-1)}(t_0))=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$$

的解. 由解的存在唯一性定理得

$$\varphi(t)=y(t)=d_1\varphi_1(t)+d_2\varphi_2(t)+\cdots+d_n\varphi_n(t).\square$$

Corollary. 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$为

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的n个线性无关的解, $\varphi_0(t)$为

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的一个特解, 则(2)的通解为

$$x(t)=\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(t),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数.

Remark: 推论中(2)的特解$\varphi_0(t)$可取为

$$\varphi_0(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{W}_k(s)}{\mathrm{W}(s)}f(s)\mathrm{d}s\right],$$

其中, $\mathrm{W}(s)=\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](s)$为$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的Wronsky行列式, 而$\mathrm{W}_k(s)$是$\mathrm{W}(s)$的第$n$行第$k$列元素的代数余子式 (这一结论将在后面"线性常微分方程组"中给出证明).

由此,非齐次线性 ODE (2) 的通解形如

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\varphi_k(t),$$

其中

$$c_k(t)=\int\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)\mathrm{d}s,(k=1,2,\cdots n).$$

这为用常数变易法求非齐次方程 (2) 的通解提供了理论依据. 同时也可以看出,求解线性 ODE 的关键是找出齐次方程的解.

Remark: n阶非齐次线性ODE(2)的解集合不再是一个线性空间. 这是因为$x(t)\equiv 0$不是解. 由上面的推论知,(2)有$n+1$个线性无关的解:

$$\varphi_0(t)\text{及}\varphi_0(t)+\varphi_k(t)(k=1,2,\cdots,n).$$

反之,任给(2)的$n+1$个线性无关的解$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$, 则(2)的通解为

$$x(t)=\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k(\varphi_k(t)-\varphi_0(t)),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数.□

例: 求非齐次方程 $x''+\omega^2 x = a$ 的通解及满足初值条件 $x(0)=1, x'(0)=0$ 的特解.

解:不难验证方程有特解 $x = a/\omega^2$, 而对应的齐次方程 $x''+\omega^2 x = 0$ 有线性无关的解 $\sin\omega t, \cos\omega t$.

于是,非齐次方程的通解为:

$$x(t) = a/\omega^2 + c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t.$$

由$x(0)=1, x'(0)=0$得, $a/\omega^2 + c_2 = 1, c_1\omega = 0$.因此,

$c_2 = 1 - a/\omega^2, c_1 = 0$, 满足初值条件 $x(0)=1, x'(0)=0$ 的特解为 $x(t) = a/\omega^2 + (1 - a/\omega^2)\cos\omega t$.□

4.二阶线性ODE的常数变易法

若n阶齐次线性ODE(1)的线性无关解$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$, 则(1)一定有解形如 $x(t)=\sum_{k=1}^{m}c_k\varphi_k(t)$, 其中 c_k $(k=1,2,\cdots,m)$为任意常数. 将常数c_k变易为函数$c_k(t)$,并设对应的非齐次线性ODE(2)的通解形如

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)\varphi_k(t),$$

然后确定$c_k(t)(k=1,2,\cdots,m)$, 以求得(2)的通解. 这种方法称为常数变易法.

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (3)$$

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \quad (4)$$

Case1.已知齐次线性ODE的两个线性无关解

已知 $x_1(t), x_2(t)$ 是 (3) 的两个线性无关解. 设 (4) 的通解为: $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$. 则

$$x' = c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1x_1' + c_2x_2'.$$

为避免 x'' 中出现 c_1'' 和 c_2'', 假设

(稍后解释合理性) $c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0.$ (5)

无解?

少解?

于是 $$x' = c_1 x_1' + c_2 x_2'.$$

$$x'' = c_1' x_1' + c_2' x_2' + c_1 x_1'' + c_2 x_2''.$$

将 x, x', x'' 代入方程(4),注意到 x_1, x_2 为(3)的解,则

$$c_1' x_1' + c_2' x_2' = f(t). \qquad (6)$$

联立(5),(6),得 $c_1'(t) = -\dfrac{x_2(t) f(t)}{\mathrm{W}(t)}, c_2'(t) = \dfrac{x_1(t) f(t)}{\mathrm{W}(t)},$

其中$\mathrm{W}(t) = \mathrm{W}[x_1, x_2](t)$为Wronsky行列式. 积分得

$c_1(t), c_2(t)$,进而得(4)的通解.

Remark: (条件(5)的合理性) 添加假设条件(5)后, $c_1'(t)$, $c_2'(t)$仍有解. 积分得

$$c_1(t) = u(t) + \lambda_1, c_2(t) = v(t) + \lambda_2,$$

其中λ_1, λ_2为任意常数, 则

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \\ &= [u(t)x_1(t) + v(t)x_2(t)] + [\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] \end{aligned}$$

依然是 (4) 的通解. 因此条件 (5) 是合理的. 事实上, 条件(5)是必要的. 这一点在后面的章节将给出解释.□

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \qquad (3)$$

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \qquad (4)$$

Case2.已知齐次方程的一个非零解

已知(3)的一个非零解$x_0(t)$. 设(4)的通解为

$$x(t) = c(t)x_0(t).$$

将x及$x' = c'x_0 + cx_0', x'' = c''x_0 + 2c'x_0' + cx_0''$代入(4)得

$$x_0c'' + [2x_0' + px_0]c' + [x_0'' + px_0' + qx_0]c = f(t).$$

$$x_0c'' + [2x_0' + p(t)x_0]c' = f(t). \qquad (7)$$

(7)可降阶为一阶线性ODE, 进而解出$c(t)$.

Remark.尽管只知道(3)的一个非零解$x_0(t)$, 常数变易法求出的解 $x(t)=c(t)x_0(t)$ 仍然是(4)的通解. 为此,只要验证这样求出来的解可以表示成如下形式

$$x(t)=\psi(t)+\lambda x_0(t)+\mu x_1(t),$$

其中,λ,μ 为任意常数,而$x_0(t)$, $x_1(t)$ 为(3)的两个线性无关解.

事实上, 这里的两个任意常数λ,μ 来源于方程(8)求解$u(t)=c'(t)$,再积分求解$c(t)$. 具体证明略.□

Remark. 已知齐次线性ODE的(3)的一个非零解,也可以用常数变易法求(3)的通解.

Question. 要求二阶非齐次线性ODE的通解, 是已知对应齐次线性ODE的一个非零解来得简单,还是已知对应齐次线性ODE的两个线性无关解简单?

例: 已知$x_0(t)=e^t$为方程$x''-2x'+x=0$的解. 求$x''-2x'+x=e^t/t$的通解.

解: 设通解为$x(t)=c(t)e^t$,则

$$x'=(c+c')e^t,\quad x''=(c''+2c'+c)e^t.$$

将x,x',x''代入非齐次方程得$c''=1/t$. 于是

$$c(t)=t\ln|t|+\lambda_1 t+\lambda_2.$$

通解为 $$x(t)=\lambda_1 te^t+\lambda_2 e^t+te^t\ln|t|.\square$$

例:已知t和e^t为$(t-1)x''-tx'+x=0$的线性无关解,

求 $(t-1)x''-tx'+x=(t-1)^2$ 的通解.

解:设非齐次线性ODE的通解为$x(t)=u(t)t+v(t)e^t$,

且满足 $$u'(t)t+v'(t)e^t=0. \qquad (*)$$

代入,得 $$u'(t)+v'(t)e^t=t-1. \qquad (**)$$

联立(*)(**)得 $$u'=-1, v'=te^{-t}.$$

积分得 $$u=-t+c_1, v=-e^{-t}-te^{-t}+c_2.$$

所求通解为 $$x(t)=(-t+c_1)t+(-e^{-t}-te^{-t}+c_2)e^t.\square$$

Remark.若只知道 $(t-1)x''-tx'+x=0$的一个解t,
用常数变易法求 $(t-1)x''-tx'+x=(t-1)^2$的通解.

设通解为 $x(t)=c(t)t$,则 $x'=c+tc', x''=tc''+2c'$.

代入非齐次方程,得

$$(t^2-t)c''+(2t-2-t^2)c'=(t-1)^2.$$

令$u(t)=c'(t)$,则

$$(t^2-t)u'+(2t-2-t^2)u=(t-1)^2.$$

这个一阶线性ODE的求解计算量并不小! …

作业： 习题7.4

No. 2, 5(2)(4), 8

No. 8, 能否写出微分方程？