回顾上节课内容：

1. 建立了“只因”和维数的基本理论
2. 矩阵A的列空间的维数称为矩阵A的**秩**，$rank(A) = dim\mathcal{R}(A)$
3. A的主元列构成列空间$\mathcal{R}(A)$的一组基

   $EA = rref(A) = R,\ [\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n] = E[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$

   如果$\boldsymbol{r}_i$为R的主元列，则$\boldsymbol{a}_i$称为A的主元列

   实际上，将A化为行阶梯形矩阵就可以判断主元列

   注意：一般地，$\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{R}(R)$, 但二者维数相同

问题：

求四个基本子空间的维数和一组基?

列空间 (√)

行空间

零空间

左零空间(最不重要)

(b) 行空间的维数与一组基

命题：

令$R = rref(A)$，则$\mathcal{R}\left(A^T\right) = \mathcal{R}\left(R^T\right)$. 实际上，对$R = ref(A)$有同样结论。

证明：$A = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix}$，$R = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_m^T \end{bmatrix}$

A通过初等行变换化为R说明$\tilde{\boldsymbol{r}}_i \in Span(\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_m)$,特别地，$\mathcal{R}\left(R^T\right) \subseteq \mathcal{R}\left(A^T\right)$

由于初等行变换是可逆的，R通过初等行变换也可化为A

于是$\tilde{\boldsymbol{a}}_i \in Span(\tilde{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{r}}_m)$，$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}\left(R^T\right)$

因此, $\mathcal{R}\left(A^T\right) = \mathcal{R}\left(R^T\right)$

例：行简化阶梯形矩阵

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & a & 0 & c\\ 0 & 1 & b & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

非零行$\widetilde{\boldsymbol{r}_1},\widetilde{\boldsymbol{r}_2},\widetilde{\boldsymbol{r}_3}$线性无关

它们构成行空间$\mathcal{R}(R^T)$的一组基

$dim\mathcal{R}\left(R^T\right)=$非零行个数$=$主元个数

$=rank(A)=dim\mathcal{R}(R)$

例：行简化阶梯形矩阵

$$R=\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

非零行(作为列向量)线性无关

非零行(作为列向量)构成行简化阶梯形矩阵行空间的一组基

行空间的维数 = 非零行的个数 = 主元个数 = 秩

行空间的维数和一组基：

A的行空间的维数 $= rank(A) =$ 列空间维数

因此，矩阵列向量组极大线性无关组数目等于行向量组极大线性无关组数目

$rref(A)$(或$ref(A)$)的非零行转置后得到的列向量构成A的行空间$\mathcal{R}\left(A^T\right)$的一组基。

命题:

$rank(A) = rank(A^T)$

证明:

由于$rank(A) = A$的列空间维数 $= A$的行空间维数

$rank(A^T) = A^T$的列空间维数 $= A$的行空间维数 $= rank(A)$

A^T的列空间 $= A$的行空间

例：

求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$的行空间的一组基

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此，$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$构成行空间的一组基；$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$也构成行空间的一组基

例：

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix}$$线性相关或线性无关?

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\\pi\end{bmatrix}$$线性相关或线性无关?

小结:

(1) $rank(A)$ = A的列空间维数= A的行空间维数 = 主元个数

= $ref(A)$的非零行个数 $\le \min(m,n)$

(2) A的主元列构成列空间的一组基

(3) $ref(A)$(或$rref(A)$)的非零行转置后构成A的行空间的一组基

改写方程组解的判定定理

判定定理：

(1)方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解当且仅当

$ref(A)$ 的阶梯数等于 $ref([A\mid\boldsymbol{b}])$的阶梯数

(2)假设 $ref(A)$ 的阶梯数等于 $ref([A\mid\boldsymbol{b}])$的阶梯数.

如果阶梯数和未知数个数相等，则方程组有唯一解.

如果阶梯数小于未知数个数，则方程组有无穷多组解.

判定定理改写为：

(1)方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解当且仅当 $rank(A)=rank([A\mid\boldsymbol{b}])$

(2) 有唯一解当且仅当$rank(A)=rank([A\mid\boldsymbol{b}])=n=A$的列数

(3) 有无穷多组解当且仅当$rank(A)=rank([A\mid\boldsymbol{b}])<n$

四个基本子空间的维数和一组基：

列空间(√)

行空间(√)

零空间 (2.4节)

左零空间 (2.5节)

(c) 矩阵秩的性质

命题：

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), rank(AB) \leq rank(A),\ rank(AB) \leq rank(B)$

证明：$rank(AB) \leq rank(A)$:

$\mathcal{R}(AB) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\big) \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{R}(A)$

因此, $rank(AB) = dim\mathcal{R}(AB) \leq dim\mathcal{R}(A) = rank(A)$.

$rank(AB) \leq rank(B)$:

$rank(AB) = rank\big((AB)^T\big) = rank\big(B^T A^T\big) \leq rank\big(B^T\big) = rank(B)$.

命题：

如果A可逆，那么$rank(AB)=rank(B)$；如果B可逆，那么$rank(AB)=rank(A)$.

证明：

如果A可逆，

$$rank(AB)\le rank(B)\ =rank\left(A^{-1}(AB)\right)\ \le rank(AB)$$

因此，$rank(AB)=rank(B)$

推论：

设A为$m\times n$阶矩阵，P,Q分别是m阶和n阶可逆矩阵，则

$rank(PAQ)=rank(A)$.

回顾矩阵的相抵标准形:

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,存在可逆矩阵$P$，$Q$使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix},\qquad r=rank(A)$$

A,B为同阶矩阵, A,B相抵(或相抵等价), 当且仅当

$rank(A)=rank(B)$

(d) 矩阵的分解：

$A=$ 秩为1的$m\times n$阶矩阵=非零列向量乘以非零行向量

我们看另一种得到的方式：

$R=rref(A)$只有第一行非零，于是$R=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_1^T\\ \mathbf{0}^T\\ \vdots\\ \mathbf{0}^T\end{bmatrix}$

由$EA=R$得到$A=E^{-1}R$.

令$E^{-1}=[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m]$, 那么

$$A=[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m]\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{r}}_1^T\\ \mathbf{0}^T\\ \vdots\\ \mathbf{0}^T\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_1^T$$

π

矩阵的分解： A秩为r的$m \times n$阶矩阵

$R = rref(A)$前r行非零，于是$R = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_r^T \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}$ $\quad EA = R$ 得到$A = E^{-1}R$.

令$E^{-1} = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m]$,那么$A = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m]\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_r^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_1^T + \cdots + \boldsymbol{u}_r\tilde{\boldsymbol{r}}_r^T$

秩为r的矩阵可以分解为r个秩1矩阵之和.

本节小结：

(1) $rank(A)$ = A的列空间维数= A的行空间维数 = 主元个数

= A的行阶梯形矩阵非零行个数 $\leq \min(m,n)$

(2) A的主元列构成列空间的一组基

(3) $ref(A)$(或$rref(A)$)的非零行转置后构成A的行空间的一组基

(4) $rank(A) = rank(A^T)$

(5) $rank(AB) \leq rank(A),\ rank(B)$. 如果$A, B$中有可逆方阵, 则取等号

(6) 秩为r的矩阵可以分解为r个秩1矩阵之和.

2.4 线性方程组的解集

本节目标:

完成线性方程组求解问题

主要内容:

(a) 齐次方程组求解: 解空间 = 系数矩阵的零空间

(b) 一般方程组求解: 解集的结构

(a) 齐次方程组求解

方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解集 $=$ A的零空间$\mathcal{N}(A)$, 是$\mathbb{R}^n$的子空间

称为**解空间**

描述齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解空间只需要求$\mathcal{N}(A)$的一组基

称为一个**基础解系**

例:

$$\boldsymbol{k}_1=\begin{bmatrix}*\\1\\*\\0\\0\\ \\*\end{bmatrix},\boldsymbol{k}_2=\begin{bmatrix}*\\0\\*\\1\\0\\ \\*\end{bmatrix},\boldsymbol{k}_3=\begin{bmatrix}*\\0\\*\\0\\1\\ \\*\end{bmatrix}$$ 线性无关

$$c_1\boldsymbol{k}_1+c_2\boldsymbol{k}_2+c_3\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{0}\Longrightarrow\begin{bmatrix}*\\c_1\\*\\c_2\\c_3\\*\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

于是$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$线性无关

例

$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 12 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}$求解方程$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

$$[\,A\mid\mathbf{0}\,]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 0\\ 3 & 12 & 8 & 6 & 16 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{E_{21}(-3)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{22}(1/2)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{E_{12}(-2)}\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\\ \begin{array}{ccccc}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{array}\end{array}$$

x_2，x_4，x_5为自由变元。如果想使得到的解线性无关，我们可以分别取

$x_2=1,x_4=x_5=0;x_4=1,x_2=x_5=0;x_5=1,x_2=x_4=0$，解出相应的主变元，于是得到一组**线性无关**的解：

$\boldsymbol{k}_1=[-4,1,0,0,0]^T,\boldsymbol{k}_2=[-2,0,0,1,0]^T,\boldsymbol{k}_3=[0,0,-2,0,1]^T$

断言：$\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$ 线性生成$\mathcal{N}(A)$

如果$\boldsymbol{x}_0 = [c_1, \dots, c_5]^T$是齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的一个解

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - (c_2\boldsymbol{k}_1 + c_4\boldsymbol{k}_2 + c_5\boldsymbol{k}_3)$也满足$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{x}_1$的第2,4,5分量是0，得到$\boldsymbol{x}_1$的第1,3分量是0,于是

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$

因此$\boldsymbol{x}_0 = c_2\boldsymbol{k}_1 + c_4\boldsymbol{k}_2 + c_5\boldsymbol{k}_3 \in Span(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3)$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

$\boxed{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3 \text{ 构成} \mathcal{N}(A) \text{的一组基}}$

定理：

设A是$m \times n$阶矩阵，$rank(A) = r$. 对齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

设$\boldsymbol{k}_i$是第i个自由变量取1，其余自由变量都取0时得到的解，共有$n - r$个。

则A的零空间$\mathcal{N}(A)$的维数是$n - r$，一组基由$\boldsymbol{k}_1, \dots, \boldsymbol{k}_{n-r}$给出。

规范基础解系

$$\boxed{n = dim\mathcal{R}(A^T) + dim\mathcal{N}(A) = dim\mathcal{R}(A) + dim\mathcal{N}(A)}$$

(b) 方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$求解：

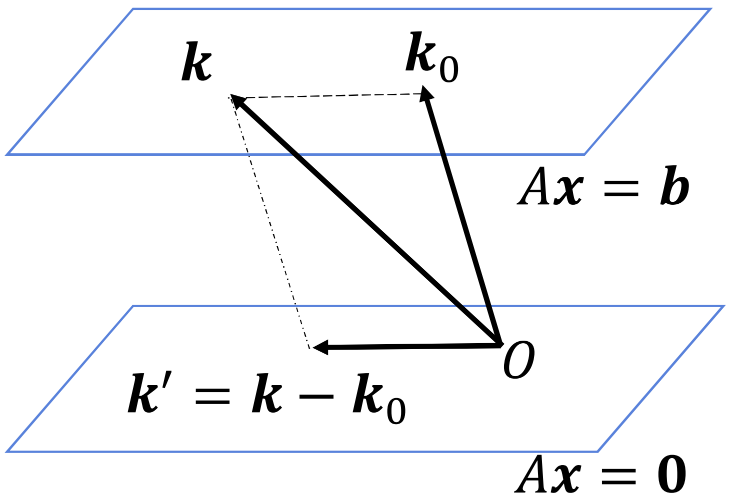
零空间$\mathcal{N}(A)$沿$\boldsymbol{k}_0$方向平移

定理：

设方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的一个解为$\boldsymbol{k}_0$（称为**特解**），则方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解集为

$$\boldsymbol{k}_0+\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{k}_0+c_1\boldsymbol{k}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{k}_{n-r}|c_i\in\mathbb{R}\}.$$

其中，$\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_{n-r}$是齐次方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的规范基础解系。



证明：

设$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}_0+c_1\boldsymbol{k}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{k}_{n-r}$,

$A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{k}_0+c_1A\boldsymbol{k}_1+\cdots+c_{n-r}A\boldsymbol{k}_{n-r}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$

反之，如果$\boldsymbol{x}$满足$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，那么

$A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}_0)=A\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

因此，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}_0\in\mathcal{N}(A)$，是$\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_{n-r}$的线性组合。

求解方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的步骤：

1. 判断是否有解　(判定定理)

2. 对$[A \mid \boldsymbol{b}]$做高斯消元：

求出一个特解

令$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，求出规范基础解系

3. 写出方程组的解集

回顾方程组有解的判定定理：$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

(1)方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当 $rank(A) = rank([A \mid \boldsymbol{b}])$

(2) 有唯一解当且仅当$rank(A) = rank([A \mid \boldsymbol{b}]) = n$

(3) 有无穷多组解当且仅当$rank(A) = rank([A \mid \boldsymbol{b}]) < n$

例：方程数少于变元数$(m<n)$

$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 12 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}$求解方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

$$[\,A \mid \boldsymbol{b}\,]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 2 & 2 & 4 & b_1\\ 3 & 12 & 8 & 6 & 16 & b_2\end{array}\right]\xrightarrow{E_{21}(-3)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 2 & 2 & 4 & b_1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_2-3b_1\end{array}\right]$$

(1) 判断：$rank(A)=rank([A \mid \boldsymbol{b}])=2<5$，方程组有无穷多组解

$$\xrightarrow{E_{22}(1/2)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 2 & 2 & 4 & b_1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{b_2-3b_1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{E_{12}(-2)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4b_1-b_2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{b_2-3b_1}{2}\end{array}\right]$$

例:

$$\xrightarrow{E_{22}(1/2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{b_2-3b_1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{b_2-3b_1}{2} \end{array}\right]$$

(2) 求解A的零空间:

令$b_1 = b_2 = 0$，分别取一个自由变元为1，其余自由变元为0，得到

$\boldsymbol{k}_1 = [-4,1,0,0,0]^T, \boldsymbol{k}_2 = [-2,0,0,1,0]^T, \boldsymbol{k}_3 = [0,0,-2,0,1]^T$

(3) 求一个特解$\boldsymbol{k}_0$:

自由变元取$x_2 = x_4 = x_5 = 0$得到$\boldsymbol{k}_0 = \left[4b_1 - b_2, 0, \frac{b_2-3b_1}{2}, 0,0\right]^T$

(4) 方程组的解集为$\{\boldsymbol{k}_0 + c_1\boldsymbol{k}_1 + c_2\boldsymbol{k}_2 + c_3\boldsymbol{k}_3, c_i \in \mathbb{R}\}$

例：方程数多于变元数$(m > n)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$求解方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 8 & b_2 \\ 2 & 4 & b_3 \\ 6 & 16 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-3)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - 3b_1 \\ 2 & 4 & b_3 \\ 6 & 16 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{31}(-2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \\ 6 & 16 & b_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{41}(-6)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 4 & b_4 - 6b_1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{42}(-2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 2b_2 \end{array}\right]$$

(1)方程组有解当且仅当$b_3 - 2b_1 = b_4 - 2b_2 = 0$

例：

$$\xrightarrow{E_{22}(1/2)}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & \dfrac{b_2-3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3-2b_1 \\ 0 & 0 & b_4-2b_2\end{array}\right]\xrightarrow{E_{12}(-2)}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 4b_1-b_2 \\ 0 & 1 & \dfrac{b_2-3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3-2b_1 \\ 0 & 0 & b_4-2b_2\end{array}\right]$$

(2)满足有解条件（1）后，$rank(A) = rank([A \mid b]) = 2$, 方程组有唯一解

(3)满足有解条件（1）后的特解为$\boldsymbol{k}_0 = \left[4b_1 - b_2, \frac{b_2-3b_1}{2}\right]^T$

(4)方程组的解集为$\{\boldsymbol{k}_0\}$

练习：

设A为4×5矩阵，$R = rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

经高斯-若尔当消元，方程$Ax = \boldsymbol{b}$化为$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$，请讨论方程解的情况。

(1) 方程有解当且仅当$d_4 = 0$。

(2) 假设$d_4 = 0$。规范基础解系$\boldsymbol{k}_1 = [-a, -b, 1,0,0]^T, \boldsymbol{k}_2 = [-c, -d, 0, -e, 1]^T$

(3) 特解$\boldsymbol{k}_0 = [d_1, d_2, 0, d_3, 0]^T$

(4) 解集$= [d_1, d_2, 0, d_3, 0]^T + \mathbb{R}[-a, -b, 1,0,0]^T + \mathbb{R}[-c, -d, 0, -e, 1]^T$

本节小结：

(1) 齐次方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的**解空间**：规范基础解系构成一组基

(2) 一般方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的**解集**：（任意）一个特解+齐次方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解空间