微积分A(2)期末考试样题

一、填空题(共8小题, 每小题3分, 共24分)

1. 三重积分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(x^2y^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛, 记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n$ 的收敛半径为 R, 则 R 的最小值是 $\underline{\qquad\qquad}$.

3. 设定向曲线 $L^+ : x=t, y=t^2, z=t^4,\ 0\le t\le 1$, 参数 t 增加方向与曲线正向一致, 则

$$\int_{L^+} 9y\mathrm{d}x - 3x\mathrm{d}y + 4z\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}.$$

4. 已知曲线积分 $\int_{L^+}(2x^2+axy)\,\mathrm{d}x + (x^2+3y^2)\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关(只与曲线的起点和终点有关), 则实数 $a = \underline{\qquad\qquad}$.

5. 设 $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)=(yz,zx,x^2)$, 则 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)) = \underline{\qquad\qquad}$.

6. 双纽线 $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ 右侧部分的封闭曲线 (即 $x\ge 0$) 所围图形的面积为 $\underline{\qquad\qquad}$.

7. 圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 夹在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=0$ 之间部分的面积为 $\underline{\qquad\qquad}$.

8. 空间曲线 L^+ 为柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 其正向为围绕 z 轴的正方向逆时针旋转, 则

$$\oint_{L^+}(z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (y-x)\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

二. 单选题（共7小题, 每小题3分, 共21分）

1. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上 __________.

   A. 绝对收敛, 且一致收敛;

   B. 绝对收敛, 但不一致收敛;

   C. 条件收敛, 且一致收敛;

   D. 条件收敛, 但不一致收敛.

2. 设 $f(x)$ 为 2π 周期函数, 且在区间 $(-\pi, \pi]$ 上如下定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pi \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

   利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 可得级数

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

   的和为 __________.

   A. $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$;

   B. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

   C. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

   D. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3. 设 a 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(na)}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ __________.

   A. 绝对收敛;

   B. 条件收敛;

   C. 发散;

   D. 收敛性与 a 的取值有关.

4. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$, 记

$$I_1=\iint_D\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}+100(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2=\iint_D\left(\cos(x^2+y^2)+10(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_3=\iint_D\left(\cos\left((x^2+y^2)^2\right)+x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以下结论正确的是 __________.

A. $I_1<I_2<I_3$;

B. $I_2<I_1<I_3$;

C. $I_3<I_2<I_1$;

D. $I_3<I_1<I_2$.

5. 记 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$, 则 $S'(\frac{1}{2})=$ __________.

A. $\ln 2-\ln 3$

B. $\ln 3-\ln 2$

C. $-\ln 2$

D. $\ln 2$

6. 积分 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=$ __________.

A. 2π

B. 4π

C. 6π

D. 8π

7. 设 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\leq 1$, 则流速场 $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)=(x+yz,y+zx,z+xy)$ 在单位时间中流出 Ω 的流量

$$\iint_{\partial\Omega^+}\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}S=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. π;

B. 2π;

C. 4π;

D. 0.

三、解答题（共5题, 每题11分, 共55分）

1. 设 $D=\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, 0\leq x+y\leq 2\}$, 计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 计算曲面积分
$$I=\iint_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$
其中 S^+ 为曲面 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\,(z\geq 0)$ 的上侧.

3. 求如下幂级数的收敛半径及其和函数
$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}.$$

4. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 由以下等式确定
$$b_n=\ln\left(\mathrm{e}^{a_n}-a_n\right),\quad \forall n\geq 1.$$
证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$ 收敛.

5. 记 S 为单位球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3$, $A=[a_{ij}]$ 为三阶实对称矩阵. 证明
$$\iint_S x^TAx\,dS=\frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A),$$
其中 $\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹, 即 $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}$.