#### 回顾上节内容:

- 1. 如何判断矩阵可逆
- 2. 高斯-若尔当消元求矩阵的逆

例: A,B为n阶方阵,  $AB = I_n$ ,则A,B均可逆

# 1.7 矩阵的相抵标准型

#### 主要内容:

- (a) 等价关系简介
- (b) 矩阵的相抵标准型

#### (a) 等价关系简介:

如果非空集合S的元素之间定义了一种二元关系"~",满足:

1. 反身性: 对任意a ∈ S,  $a \sim a$ ;

2. 对称性: 如果 $a \sim b$ , 那么  $b \sim a$ ;

3. 传递性:如果 $a \sim b$ ,  $b \sim c$ ,那么 $a \sim c$ ,

则称此关系为S上的**等价关系** 

 $a \in S$ , 与a等价的元素的集合称为a的**等价类**, 用[a]记这个S的子集同一等价类中形式最简单的元素称为这一等价关系中的**标准形**。

例:

 $S = M_{m \times n}(\mathbb{R}), A, B \in S,$  如果有可逆矩阵P使得 PA = B

则A,B称为**左相抵** 



有限个初等矩阵的乘积

等价地说, A可以经过一系列初等行变换化成矩阵B.

左相抵是S上的一个等价关系

矩阵A在左相抵下最简单的形式是什么呢? 等价地问, A在有限步初等行变换下最简单的形式是什么?

因此, rref(A)是A的 (等价类的) 左相抵标准形.

#### 矩阵相抵:

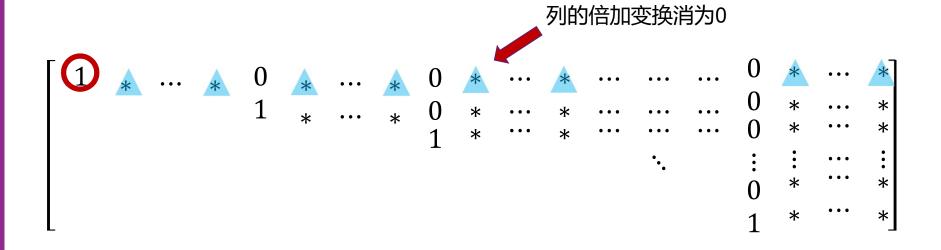
 $S = M_{m \times n}(\mathbb{R}), A, B \in S$ 称为**相抵**, 如果有可逆矩阵P, Q使得PAQ = B.

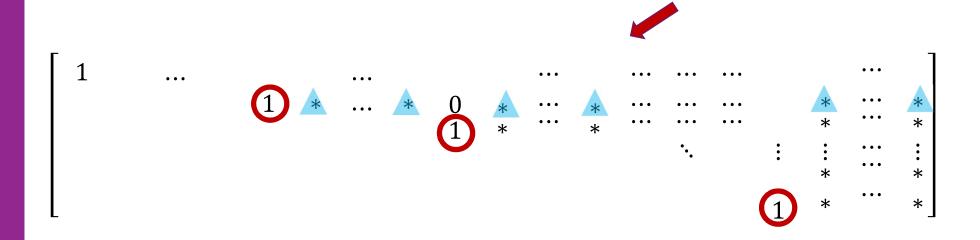


等价地说, A可以经过一系列初等行、列变换化成矩阵B。

两矩阵相抵是S上的一个等价关系。

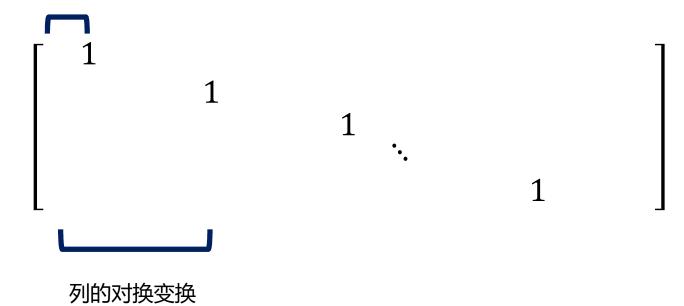
### 从左相抵标准形出发

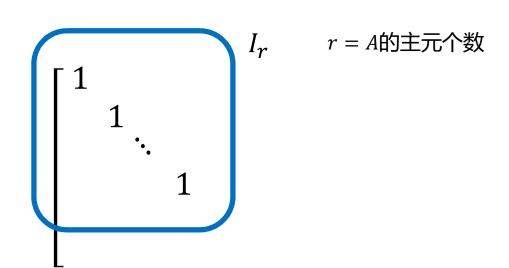




列的倍加变换消为0

列的对换变换





#### 定理:

 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 存在可逆矩阵P, Q使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$$

r = A的主元个数

$$\begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$$
称为 $A$ 的(等价类的)**相抵标准形**

## 1.8 分块矩阵

处理有特点的大矩阵运算时可以对矩阵进行分块运算

#### 什么是矩阵分块运算:

将矩阵用纵线和横线分成若干小矩阵,每个小矩阵称为原矩阵的**子块**,分为子块的矩阵叫**分块矩阵** 

#### 注意:

分块矩阵运算**不是**一种新的矩阵运算,而是用于简化原有的矩阵运算

#### 主要内容:

- (a) 矩阵分块运算的三个原则
- (b)矩阵分块运算示例
- (c) Schur补与2×2分块矩阵求逆

#### (a) 矩阵分块的三个原则:

例:

根据问题需要分块

矩阵分块的三个原则:

- (1) 根据问题需要分块;
- (2) 体现原矩阵的特点;
- (3) 能够将子块看作元素进行运算.

注意事项: 合理分块, 使得分块后的矩阵满足运算的规则.

**特别注意**矩阵乘法的顺序,矩阵乘法**没有**交换律.

#### (b) 矩阵分块运算示例

例:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0}^T & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = ?$$

$$A^{T} = \begin{bmatrix} D^{T} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}^{T} & 2^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}^{T} & 2 \end{bmatrix}$$

#### 例:

设A, B均为2×2分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

且 $A_{ij}B_{jk}$ 在矩阵乘法下有意义,则

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\pi$$
 例:  $M = \begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix}$ ,  $M^{-1} = ?$   $M^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix}$ 

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

 $\mathcal{T}$ 

例: 
$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$
,  $A$ ,  $B$ 可逆。  $M^{-1} = ?$ 

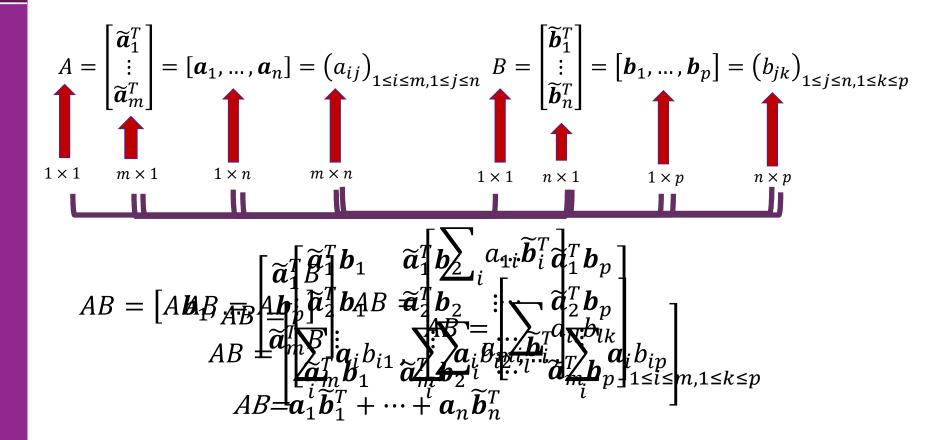
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

 $\mathcal{T}$ 

例: 
$$M = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$$
,  $A, B$ 可逆。  $M^{-1} = ?$ 

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

#### 例: AB的分块乘法



$$\begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$= E_{12}(B) \begin{bmatrix} Row_1 \\ Row_2 \\ Row_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Row_1 + BRow_2 \\ Row_2 \\ Row_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 2BA \\ 2A \\ C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$= [Col_1, Col_2, Col_3] \begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$= [Col_1A, Col_2(2A), Col_3C] = \begin{bmatrix} A & 2BA \\ & 2A \\ & C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Row_1 \\ Row_2 \\ Row_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ARow_1 \\ 2ARow_2 \\ CRow_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB \\ 2A \\ C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$= [Col_1, Col_2, Col_3]E_{12}(B)$$

$$= [Col_1, Col_1B + Col_2, Col_3] = \begin{bmatrix} A & AB \\ & 2A \\ & & C \end{bmatrix}$$

#### 命题:

对角线元素均非零的上三角矩阵可逆,且它的逆是上三角矩阵;对角线元素均非零的下三角矩阵可逆,且它的逆是下三角矩阵。

证明: 以下三角矩阵L为例: 将分块为

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & \\ \mathbf{a} & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

 $a_{11} \neq 0$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $L_{n-1}$ 为n-1阶对角线均非零的下三角矩阵。

利用高斯 – 若尔当消元求L的逆:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \\ \boldsymbol{a} & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & I_{n-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21} \left( -\frac{\boldsymbol{a}}{a_{11}} \right)} \begin{bmatrix} a_{11} & \\ \boldsymbol{0} & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ -\frac{\boldsymbol{a}}{a_{11}} & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

由归纳假设 $L_{n-1}$ 可逆,且 $L_{n-1}^{-1}$ 为对角线均非零的下三角矩阵

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ \mathbf{0} & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}_{11}} & I_{n-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ & L_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ & & L_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ -\frac{L_{n-1}^{-1}\mathbf{a}}{a_{11}} & L_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

因此, 
$$L^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} \\ -\frac{L_{n-1}^{-1}a}{a_{11}} & L_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}$$
  
为下三角矩阵且对角元素均非零。

(c) Schur补与2×2分块矩阵求逆

问题: 分块2×2的矩阵何时可逆?

命题:

考虑分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ , 其中 $A_{11}$ 与 $A_{22}$ 为方阵。

若
$$A_{11}$$
与 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆,则矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 可逆。且
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & & \\ & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

注意: 这不是可逆的等价条件

证明: 
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

由于A<sub>11</sub>可逆,

$$\begin{bmatrix} I \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

因此,

$$\begin{bmatrix} I \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & I \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & \\ & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

类似的推理,对于上述分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,

若 $A_{22}$ 与 $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 可逆,则矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 可逆,且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{12})^{-1} \\ & & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ & I \end{bmatrix}$$

#### 本节小结:

1. 矩阵分块运算的三个原则

根据问题需要分块;体现原矩阵的特点;能够将子块看作元素进行运算.

注意事项: 合理分块, 使得分块后的矩阵满足运算的规则.

注意矩阵乘法没有交换律.

2. 矩阵分块运算技巧性比较强

Schur补与2×2分块矩阵求逆

# 1.9 方阵的LU分解

#### 主要内容:

- (a) 什么是LU分解?
- (b) LU分解的作用
- (c) 什么矩阵有LU分解?

两个版本的判定定理:实操版和理论版

#### (a) LU分解的定义:

A为n阶方阵。将A写成 A = LU 其中,

L为对角线元素均为1的n阶下三角矩阵, ← 单位下三角矩阵

U为n阶上三角矩阵。

#### (b) LU分解的作用:

# n阶上三角方阵 $egin{bmatrix} a_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_n \end{bmatrix}$ 单位下三角矩阵 $egin{bmatrix} 1 \\ * & \ddots \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$

可快速求解方程

$$Ax = b \longrightarrow LUx = b \longrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

假设我们求解系数矩阵为A的一系列方程, $Ax = \mathbf{b}_1, ..., Ax = \mathbf{b}_k$ ,我们只需对A做一次LU分解,利用L型和U型方程求解,而不需要对每个方程进行高斯消元求解。计算量大为降低(大致从 $n^3$ 级降为 $n^2$ 级)