习题课题目（统计部分二）

1. 设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，若σ已知，则μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间中，$\left(\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$是最短的。

2. 设总体X服从均匀分布$U[0,\theta]$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的一组样本，要检验假设$H_0:\theta=c,\quad H_1:\theta>c$，其中$c>0$为常数。设统计量$M=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$，原假设的拒绝域为$\{M>m_\alpha\}$，如果$\alpha$ (0<α<1)是犯第一类错误的概率，试证：拒绝域的临界值为$m_\alpha=c(1-\alpha)^{1/n}$。

3. 若总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，它们相互独立，而$X_1,X_2,\cdots,X_n$及$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$分别是它们的简单随机样本，$\bar{X},\bar{Y}$分别为它们的样本均值。如果知道$\sigma_1^2=\frac{1}{4}\sigma_2^2$，但$\sigma_1^2$和$\sigma_2^2$得具体数据未知，

（1） 证明$S_w^2=\dfrac{1}{n+m-2}[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2]$是$\sigma_1^2$的无偏估计。

（2） 给出假设检验$H_0:\mu_1=\mu_2,\quad H_1:\mu_1\ne\mu_2$的检验法。

4. 设样本$X_1,X_2,...,X_n$是来自$U[\theta_1,\theta_2]$，求$\theta_2-\theta_1$的置信度为$1-\alpha$的等尾置信区间。

5. 在做某电视节目收视率调查时，甲市抽取了 **2000** 户，其中有 **541** 户收看了，乙市抽取了 **1000** 户，其中有 **285** 户收看了。若记p_1,p_2分别为甲乙两市对该电视节目的收视率，试在水平$\alpha=0.05$下，检验$H_0:p_1=p_2,\quad H_1:p_1\ne p_2$，并求其检验的$p$值。

6. 设$X_1,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，X的密度函数为

$$f(x;\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\sigma>0\text{为未知参数}$$

（1）试证明：$\dfrac{X}{\sigma}$与$|Z|$同分布，这里$Z \sim N(0,1)$；

（2）试给出假设$H_0: \sigma = 1 \leftrightarrow H_1: \sigma = 2$的似然比检验的拒绝域（水平为$\alpha$）。