回顾上次课内容：

1. 矩阵的运算：加法、数乘、乘法和转置
2. 通过线性映射的加法与数乘定义矩阵的加法与数乘
3. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$在加法与数乘下满足向量空间的8条性质
4. 线性映射的复合给出矩阵的乘法
5. 几种运算之间的关系
6. 特殊的矩阵：初等矩阵，对称矩阵等

1.6 可逆矩阵

线性映射
$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

标准基

n阶方阵A

如果$\mathcal{A}$是双射, 那么$\mathcal{A}$的逆映射$\mathcal{A}^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$也是线性映射.

线性映射$\mathcal{A}^{-1}$

哪个n阶方阵?
如何求解?

对应的矩阵A^{-1}称为A的逆矩阵
两个重要学习内容:
1. 矩阵可逆的等价条件
2. 高斯-若尔当消元法求A^{-1}

主要内容:

(a) 可逆矩阵的定义与例子

(b) 矩阵可逆的等价判定条件

(c) 高斯-若尔当(Gauss-Jordan)消元求矩阵的逆

(d) 一些特殊的可逆矩阵：对角占优矩阵，置换矩阵与正交矩阵

可逆线性变换

线性变换$\mathcal{A}$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

称为单射, 如果$\mathcal{A}$满足若$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$，则$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$.

称为满射, 如果$\mathcal{A}$满足$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

称为双射, 如果$\mathcal{A}$即单且满。

如果$\mathcal{A}$为双射，定义$\mathcal{A}$的**逆映射**

$$\mathcal{A}^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \mapsto \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}),$$

其中$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y})$为唯一的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$满足$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

命题:

$\mathcal{A}^{-1}$是线性映射，且$\mathcal{A}^{-1}$满足

$\mathcal{A}^{-1}\circ\mathcal{A} = \mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$,

其中$\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$为$\mathbb{R}^n$上的恒同映射，即$\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

证明:

验证$\mathcal{A}^{-1}$满足线性映射的定义

$$\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{-1}(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y})\right) = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}$$

$$\mathcal{A}\left(c\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) + d\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y})\right) = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}$$

由于$\mathcal{A}$为双射，$\mathcal{A}^{-1}(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}) = c\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) + d\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y})$.

可逆矩阵的定义：

设A为n阶方阵，如果存在n阶方阵B满足

$$AB = BA = I_n$$

则称A是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**.

方阵B称为A的逆（矩阵），记为A^{-1}.

A为n阶可逆矩阵，$k \geq 1$为自然数，定义$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k, A^0 = I_n$.

若A可逆,那么A^{-1}也可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

小结: 可逆线性映射与可逆矩阵

1. 从可逆线性映射到可逆矩阵：

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是双射，表出矩阵是$A$.

$\mathcal{A}^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是$\mathcal{A}$的逆映射，表出矩阵是$B$.

$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$ $\Rightarrow$ $AB = BA = I_n$，于是A可逆

2. 从可逆矩阵到可逆线性映射：

A可逆，存在n 阶方阵B满足 $AB = BA = I_n$

n阶方阵B给出线性映射$\mathcal{B}$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 满足$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$,

特别的，线性映射$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是双射， $\mathcal{B}$是它的逆映射

例：n阶零矩阵不可逆.

否则，如果有B使得$OB = I_n$，那么得到$O = I_n$，矛盾.

例：可逆矩阵不含零行也不含零列.

证明:

如果n阶方阵A的第i行为零行，

则对任意$B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), AB$的第$i$行$\tilde{\boldsymbol{a}}_i^T B$为零行

因此，不存在n阶方阵B满足$AB = I_n, A$不可逆。

如果n阶方阵A的第i列为零列，

则对任意$B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), BA$的第$i$列为零列

因此，不存在n阶方阵B满足$BA = I_n, A$不可逆。

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$不可逆

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}$不是单射，因此，不是双射。

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^2) = Span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}$不是满射，因此，不是双射。

例：$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$A$可逆当且仅当$ad-bc\neq 0$, 且

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & \\ & ad-bc \end{bmatrix} \qquad (*)$$

如果$ad-bc\neq 0$, $(*)$同时乘以常数$\frac{1}{ad-bc}$得到

$$A\Bigg(\underbrace{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{A^{-1}}\Bigg)=\Bigg(\underbrace{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{A^{-1}}\Bigg)A=I_2.$$

反之，如果A可逆，那么线性映射$\mathcal{A}$即单且满

假设$ad-bc=0$,那么

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & \\ & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\right) = \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

由于$\mathcal{A}$是单射，$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

于是A是零矩阵，与A可逆矛盾.

A的行列式

因此，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$可逆当且仅当$ad-bc\neq 0$.

例：

$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\mathcal{R}_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$为平面上逆时针旋转$\theta$角。

$\mathcal{R}_\theta$可逆，逆映射为逆时针旋转-θ角。

因此，$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$.

例：对角矩阵

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

D可逆当且仅当$d_i \neq 0, \forall i$.

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

例:

A为可逆方阵, $c \neq 0$, cA是否可逆?

cA可逆.

$(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

例：

A为可逆方阵, $A(B-C)=O \Longrightarrow B=C$

$$A(B-C)=O \Longrightarrow A^{-1}A(B-C)=O \Longrightarrow B-C=O$$

例:

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ 为一d次实系数多项式

A为n阶方阵

定义: $f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$

若$a_0 \neq 0$且$f(A) = O$, 则A可逆。

$$I_n = \left(-\frac{a_1}{a_0} I_n - \cdots - \frac{a_d}{a_0} A^{d-1}\right) A = A \left(-\frac{a_1}{a_0} I_n - \cdots - \frac{a_d}{a_0} A^{d-1}\right)$$

回顾：初等矩阵

定义：对单位矩阵I_n做一次<u>初等行变换</u>得到的矩阵称为**初等矩阵**

1. 对换矩阵：互换I_n的i,j行，得到对换矩阵P_{ij}

$$P_{ij}=\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{ccccccccc}\ddots &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 0 &&&& 1 && \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ && 1 &&&& 0 && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array} & \end{array}$$

2.倍乘矩阵：

I_n的第i行乘以非零常数k，得到倍乘矩阵$E_{ii}(k)$

$$E_{ii}(k)=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \ddots &&&& \\ & 1 &&& \\ && k && \\ &&& 1 & \\ &&&& \ddots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & i & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

3.倍加矩阵：把I_n的第i行的k倍加到第j行上，得到倍加矩阵$E_{ji}(k)$

$$E_{ji}(k)=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & k & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} (j>i) & \begin{array}{l} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & i & \quad\quad & j & \quad \end{array} & \end{array}$$

$$E_{ji}(k)=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & k & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} (j<i) & \begin{array}{l} \\ j \\ \\ i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & j & \quad\quad & i & \quad \end{array} & \end{array}$$

命题:

初等矩阵都可逆.

对换矩阵：

$$
\begin{array}{cc}
P_{ij} = \begin{bmatrix}
\ddots &&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&& \\
&& 0 &&&& 1 && \\
&&& 1 &&&&& \\
&&&& \ddots &&&& \\
&&&&& 1 &&& \\
&& 1 &&&& 0 && \\
&&&&&&& 1 & \\
&&&&&&&& \ddots
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} \qquad\qquad\qquad i & \qquad\qquad\qquad\qquad j \end{matrix} &
\end{array}
$$

$$P_{ij}P_{ij} = I_n$$

因此，$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

对换矩阵的逆是对换矩阵

倍乘矩阵：

$$E_{ii}(k) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & k & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \end{array}$$

$E_{ii}(k)E_{ii}(1/k) = E_{ii}(1/k)E_{ii}(k) = I_n$

因此，$E_{ii}(k)^{-1} = E_{ii}(1/k)$

倍乘矩阵的逆是倍乘矩阵

倍加矩阵：

$$E_{ji}(k)=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}\ddots&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&k&&1&\\&&&&\ddots\end{bmatrix}&\begin{array}{c}\\i\\\\j\\\\\end{array}\\\begin{array}{ccccc}\quad&i&\quad&j&\quad\end{array}&\end{array}\qquad (j>i)$$

$$E_{ji}(-k)E_{ji}(k)=E_{ji}(k)E_{ji}(-k)=I_n$$

因此，$E_{ji}(k)^{-1}=E_{ji}(-k)$.

倍加矩阵的逆是倍加矩阵

π

转置的逆等于逆的转置：

A为n阶可逆方阵,则A^T可逆，且$(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

证明:

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I_n^T = I_n.$$

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I_n.$$

因此$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

可逆对称矩阵与可逆反对称矩阵：

一个可逆对称矩阵S $(S^T = S)$的逆S^{-1}也是对称矩阵

一个可逆反对称矩阵A $(A^T = -A)$的逆A^{-1}也是反对称矩阵

证明：

$$\left(S^{-1}\right)^T = \left(S^T\right)^{-1} = S^{-1}.$$

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}.$$

AB的逆:

A,B都是n阶方阵,如果A,B可逆,那么AB可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明:

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}I_nB=I_n.$$

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AI_nA^{-1}=I_n.$$

线性变换复合的角度理解:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\circ\mathcal{B}: \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[l, bend left, "\mathcal{B}^{-1}"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, bend left, "\mathcal{A}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

逆为$\mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{A}^{-1}$

若$A,B,C\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$可逆,

那么ABC可逆,且

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

(b) 矩阵可逆的等价条件（理论性较强）

定理：对n阶方阵A，下列叙述等价：

(1)A可逆；

(2)$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$;

(3)齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解；

(4)A对应的阶梯形矩阵有n个主元；

(5)$rref(A) = I_n$;

(6)A是有限个初等矩阵的乘积。

之后的课程还会看到更多的等价条件

证明:我们采用(1)⇒(2) ⇒(3) ⇒(4) ⇒(5) ⇒(6) ⇒(1)。

(1)
(4)
(5)
(6)
矩阵

(2)
(3)
方程

(1)A可逆 $\Longrightarrow$ (2)$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$:

有解：代入$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x} = A\left(A^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \boldsymbol{b}$,知$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$是解

唯一解：若有$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$满足$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$,则

$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

等式两边同时左乘A^{-1}得到

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = A^{-1}\left(A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right) = A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

因此$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(2) $\forall \boldsymbol{b}$, 方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow$ (3)方程组$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$只有零解：

(3)是(2)的特殊情况

(3)方程组$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$只有零解⇒(4) A对应的阶梯形矩阵有n个主元：

$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$有唯一解，说明$rref(A)$ 无自由列，所有列都是主列. 于是主列有n个，主元个数有n个

(4)A对应的阶梯形矩阵有n个主元⇒ (5)$rref(A)=I_n$：

由(4)行简化阶梯形矩阵$rref(A)$也有n个主元，因此$rref(A)=I_n$.

(5)$rref(A) = I_n \Rightarrow (6)A$是有限个初等矩阵的乘积：

$rref(A) = I_n$表明，我们可以通过一系列初等行变换将A化为I_n.

于是有初等矩阵$E_1, \ldots, E_t$使得$E_t \ldots E_1 A = rref(A) = I_n$.

因此$A = E_1^{-1} \ldots E_t^{-1}$.

由于初等矩阵的逆也是初等矩阵，A为有限个初等矩阵的乘积。

(6)A是有限个初等矩阵的乘积 $\Rightarrow (1)A$可逆：

有限个初等矩阵的乘积是可逆矩阵。

定理：对n阶方阵A，下列叙述等价：

(1)A可逆；

(2)$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$;

(3)齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$只有零解；

(4)A对应的阶梯形矩阵有n个主元；

(5)$rref(A) = I_n$;

(6)A是有限个初等矩阵的乘积。

根据(6)， 如果A可逆，则AB是对B做有限步初等行变换

推论:

给定n阶方阵A，以下叙述等价：

(1) A可逆

(2) $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

(3) $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解

(4) 存在$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解

证明：

若A 满足(3), 使用：A可逆等价于$EA = rref(A) = I_n$，E为有限个初等矩阵的乘积。

此时$rref(A)$一定无零行，否则$EA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$无解，即$A\boldsymbol{x} = E^{-1}\boldsymbol{e}_n$无解。于是$rref(A) = I_n$

若A 满足(4), 使用： A可逆等价于$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$有唯一解。

反设$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$有一非零解$\boldsymbol{x}_0$，则对$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的任一解$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$也是解。与假设矛盾。

推论:

给定n阶方阵A，以下叙述等价：

(1)A可逆，即存在n阶方阵B，满足$AB = BA = I_n$

(2)存在n阶方阵B，满足$BA = I_n$（称A有左逆）

(3)存在n阶方阵B,满足$AB = I_n$（称A有右逆）

证明：

(1)自然得到(2)(3)

<u>(2)⇒ (1)</u>：使用“方阵A可逆当且仅当$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解”

由(2), $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$得到$\boldsymbol{x} = I_n\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。因此，$A$可逆。

<u>(3)⇒ (1)</u>：使用“方阵A可逆当且仅当对任意$\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解”

由(3), $\boldsymbol{b} = I_n\boldsymbol{b} = (AB)\boldsymbol{b} = A(B\boldsymbol{b})$. 因此，$A$可逆。

小结:

对于**方阵**A, 以下3条等价

A可逆

A有左逆

A有右逆

假设A有左逆B，那么根据上面的等价条件A有右逆C，则$B = C$

由$B(AC) = (BA)C$ 得到$B = C$

同样的理由，如果A可逆，A的逆唯一