微积分A(1)

教师：晏平
email: yanping@mail.tsinghua.edu.cn
office: 数学系荷二办公室219
Tel: 62798584

◆ 教材:

《高等微积分教程》（上册），章纪民、闫浩、刘智新编，清华大学数学科学系。

◆考核方式:

平时(作业、习题课、答疑)20%

期中30%

期末50%

- ◆答疑

  线下: 周三15:40-17:40 ,荷二219

  线上: 网络学堂、微信群

- ◆关于作业（网络学堂提交电子版）
- ◆习题课（二级选课，第4周开始上课）
- ◆期中考试

  第8周周末

◆几点学习建议：

1. 趁热打铁、及时复习
2. 先复习再作业、把每次作业当考试
3. 勤思考、举一反三
4. 适量训练、不必刷题

- 17世纪后半叶

  直观微积分 Newton & Leibniz

  "无穷小" （冥王星的预测）

- 19世纪上半叶

  极限理论 Cauchy & Weierstrass

- 19世纪下半叶

  实数的连续性 Cantor & Dedekind

  （确界原理）

第一章 实数与极限

§ 1. 实数系

自然数集$\mathbb{N}$

整数集$\mathbb{Z}$

实数集$\mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{有理数集}\mathbb{Q} \\ \text{无理数集}\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

$\forall$: 对任意(Any)

$\exists$: 存在(Exist)

s.t. 使得(subject to)

Thm. (有理数在$\mathbb{R}$中的稠密性)

$$\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b, \exists r\in\mathbb{Q}, \text{s.t. } a<r<b.$$

Def. (上界、下界、有界、无界)

设A为$\mathbb{R}$的非空子集. 若$\exists M \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall x \in A$, 有$x \le M$, 则称M为A的一个上界. 若$\exists m \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall x \in A$, 有$x \ge m$, 则称m为A的一个下界. 若A既有上界又有下界, 则称A有界, 否则称A无界.

Def. (最大值、最小值)

设A为$\mathbb{R}$的非空子集. 若$\lambda \in A$且λ是A的一个上界, 则称λ为A的最大值, 记作$\lambda = \max A = \max\limits_{x \in A} x$. 若$\mu \in A$且$\mu$是A的一个下界, 则称$\mu$为A的最小值, 记作$\mu = \min A = \min\limits_{x \in A} x$.

Def. (上确界 $\sup A$、下确界 $\inf A$)

设A为$\mathbb{R}$的非空子集. 称A的最小上界ξ为A的上确界,记作$\xi = \sup A = \sup\limits_{x\in A} x$. 称A的最大下界$\eta$为A的下确界,记作$\eta = \inf A = \inf\limits_{x\in A} x$.

Remark. ($\sup A, \inf A$的等价定义)

$\xi = \sup A$的充要条件:

ξ是A的上界, 且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, s.t. $x > \xi - \varepsilon$.

$\eta = \inf A$的充要条件:

η是A的下界, 且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, s.t. $x < \eta + \varepsilon$.

Thm. (确界原理 — 实数的连续性)

非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

Ex. $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\le 2\}$,

$\sup A \underline{=\sqrt{2}}$, $\max A \underline{=\sqrt{2}}$,

$\inf A \underline{=-\sqrt{2}}$, $\min A \underline{=-\sqrt{2}}$.

$B=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2\le 2\}$,

$\sup B \underline{=\sqrt{2}}$, $\max B$ <u>不存在</u>,

$\inf B \underline{=-\sqrt{2}}$, $\min B$ <u>不存在</u>.

Ex. A为非空有界数集, 记 $-A=\{-x: x\in A\}$, 则

$\sup(-A)=$ __$-\inf A$__, $\inf(-A)=$ __$-\sup A$__.

Proof. 记 $\eta=\inf A$, 则

$\forall x\in A$, 有 $\eta\le x$; 且 $\forall\varepsilon>0, \exists y\in A$, s.t. $y<\eta+\varepsilon$.

于是, $\forall -x\in -A$, 有 $-\eta\ge -x$ ($-\eta$是集合$-A$的上界); 且 $\forall\varepsilon>0$,

$\exists -y\in -A$, s.t. $-y>-\eta-\varepsilon$ ($\forall\varepsilon>0, -\eta-\varepsilon$不是集合$-A$的上界).

由上确界的定义知 $\sup(-A)=-\eta=-\inf A$.

同理可证 $\inf(-A)=-\sup A$. $\square$

Remark. 若非空集合A无上界, 则记 $\sup A = +\infty$;

若非空集合A无下界, 则记 $\inf A = -\infty$.

Ex. 设A,B为有界集合, 且 $A\cap B$ 非空, 则

$\sup(A\cup B)$ $\underline{=\max\{\sup A, \sup B\}}$,

$\inf(A\cup B)$ $\underline{=\min\{\inf A, \inf B\}}$,

$\sup(A\cap B)$ $\underline{\le\min\{\sup A, \sup B\}}$,

$\inf(A\cap B)$ $\underline{\ge\max\{\inf A, \inf B\}}$.

如何证明?

清華大學

§ 2. 数列极限的概念

$\{a_n\}$： $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.　$\{\sin(2+3^{-n})\}$的极限为 $\underline{\ \sin 2\ }$.

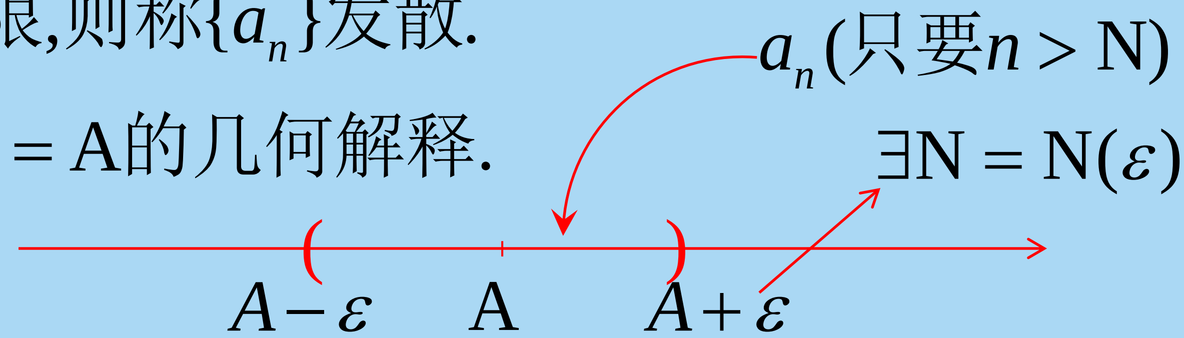
Def. 若$\exists \mathrm{A}\in\mathbb{R}, \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}=\mathrm{N}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, s.t. 当$n>\mathrm{N}$时,有

$|a_n-\mathrm{A}|<\varepsilon$,则称$\{a_n\}$有极限A,也称$\{a_n\}$收敛到A,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\mathrm{A} \quad 或 \quad a_n\to \mathrm{A}\ (n\to\infty).$$

若$\{a_n\}$没有极限,则称$\{a_n\}$发散.

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\mathrm{A}$的几何解释.



$\forall \varepsilon>0, \{a_n\}$中至多有有限项落在$(\mathrm{A}-\varepsilon, \mathrm{A}+\varepsilon)$之外！

Ex. $0<|q|<1$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

Proof. $\forall\varepsilon>0$, 为使 $|q^n-0|<\varepsilon$, 因 $0<|q|<1$, 只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon$ 即可. 取 $N=\lceil\log_{|q|}\varepsilon\rceil$. 当 $n>N$ 时, 有 $n>\log_{|q|}\varepsilon$, 从而 $|q^n-0|<\varepsilon$. 由极限的定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.□

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

Remark. 关于数列极限的分析或证明, 着手点是

$$|a_n-A|<\varepsilon,$$

求解 n 所满足的条件, 找出极限定义中所需的 $N=N(\varepsilon)$.

Ex. $a_n = \dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}$.证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

Proof. 当$n>8$时, $\left|a_n-2\right| = \dfrac{n+8}{n^2-3} \le \dfrac{2n}{n^2/2} = \dfrac{4}{n}.$

$\forall \varepsilon>0$,求解$\dfrac{4}{n}<\varepsilon$,得$n>\dfrac{4}{\varepsilon}$, 任意取定$\mathrm{N}>\max\{8,\dfrac{4}{\varepsilon}\}$,

当$n>\mathrm{N}$时,$\left|a_n-2\right|<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}=2.$ □

Remark. $\mathrm{N}=\mathrm{N}(\varepsilon)$的选取不唯一.可以通过放缩不等式

$\left|a_n-\mathrm{A}\right|<\varepsilon$,简化计算,选取合适的N.

$$\left|a_n-\mathrm{A}\right|<\cdots<\boxed{n\text{的简单表达式}}<\varepsilon$$

Remark. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当} n > \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当} n > \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon / 2$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0,1), \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{N} = \mathrm{N}(k) \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当} n \geq \mathrm{N} \text{时,有} |a_n - \mathrm{A}| \leq \frac{1}{k}.$$

Question. 如何用ε-N语言描述$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \mathrm{A}$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \mathrm{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon>0, \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \exists n > \mathrm{N}, \text{s.t.} |a_n - \mathrm{A}| > \varepsilon.$$

Ex. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Proof. 记$a_n=\sqrt[n]{n}-1\ (\geq 0)$, 则$\sqrt[n]{n}=1+a_n$. $\forall n>2$, 有

$$n=(1+a_n)^n>C_n^2a_n^2=\frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

$$a_n^2<\frac{2}{n-1}<\frac{4}{n},\quad a_n<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 求解$\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$得$n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$. 取$\mathrm{N}=\left\lfloor\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right\rfloor+2$, 当$n>\mathrm{N}$时,

$$a_n<\varepsilon,\quad 即\ \left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon.$$

由极限的定义, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ □

Ex. $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$.证明:(1) $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\mathrm{A}}$;(2)若 $\mathrm{A}>0, a_n>0$,则

$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \mathrm{A}$; (3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$

Proof.(1) $\forall \varepsilon \in (0, e^{\mathrm{A}})$,

$$\left|e^{a_n} - e^{\mathrm{A}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|e^{a_n - \mathrm{A}} - 1\right| < \varepsilon e^{-\mathrm{A}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon e^{-\mathrm{A}} < e^{a_n - \mathrm{A}} < 1 + \varepsilon e^{-\mathrm{A}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - \varepsilon e^{-\mathrm{A}}) < a_n - \mathrm{A} < \ln(1 + \varepsilon e^{-\mathrm{A}}) \qquad (*)$$

令 $\delta = \min\{-\ln(1-\varepsilon e^{-\mathrm{A}}), \ln(1+\varepsilon e^{-\mathrm{A}})\}$,则 $\delta > 0$. 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$,

$\exists N, s.t. \forall n > N$,有 $|a_n - \mathrm{A}| < \delta$. 于是 $n > N$ 时 $(*)$ 成立, 从而有

$\left|e^{a_n} - e^{\mathrm{A}}\right| < \varepsilon$. 由极限的定义得 $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\mathrm{A}}$.

(2) $|\ln a_n - \ln \mathrm{A}| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln \dfrac{a_n}{\mathrm{A}} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{\mathrm{A}} < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathrm{A}e^{-\varepsilon} < a_n < \mathrm{A}e^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}(e^{-\varepsilon}-1) < a_n - \mathrm{A} < \mathrm{A}(e^{\varepsilon}-1) \quad (**)$$

$\forall \varepsilon > 0$,令$\delta = \min\{-\mathrm{A}(e^{-\varepsilon}-1), \mathrm{A}(e^{\varepsilon}-1)\}\ (>0)$.由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$, $\exists N, s.t. \forall n > N$,有$|a_n - \mathrm{A}| < \delta$. 于是$n > N$时$(**)$成立, 从而$|\ln a_n - \ln \mathrm{A}| < \varepsilon$成立. 由极限的定义得$\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \mathrm{A}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \ln 1 = 0.$ □

Ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \mathrm{A}.$

Remark.

分步确定N.

Proof. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$,则$\forall \varepsilon>0$,$\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $s.t.$

$$|a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1.$$

对此N_1,$\exists N > N_1$, $s.t.$

$$\frac{|a_1-\mathrm{A}|+\cdots+|a_{N_1}-\mathrm{A}|}{n} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

于是, 当$n > N$时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \mathrm{A}\right| = \left|\frac{(a_1-\mathrm{A})+(a_2-\mathrm{A})+\cdots+(a_n-\mathrm{A})}{n}\right|$$

$$\le \frac{|a_1-\mathrm{A}|+\cdots+|a_{N_1}-\mathrm{A}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}-\mathrm{A}|+\cdots+|a_n-\mathrm{A}|}{n} < 2\varepsilon. \square$$

Remark. 上例可以推广到更加一般的情形：

Toeplitz数表：
$$\begin{array}{ccccc} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$$t_{nk} \ge 0,\ \forall k, n$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0, \forall k.$$

Thm. $t_{nk} \ge 0,\ \forall k, n; \lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0, \forall k; \sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1.$ 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a,$

$b_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k$，则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a.$ （证法同上例）

清華大学

Ex. $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A} > 0$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \mathrm{A}$.

Proof. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 \cdots + \ln a_n}{n}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 \cdots + \ln a_n}{n}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \ln a_n\right\} = \exp\left\{\ln \lim_{n\to\infty} a_n\right\} = e^{\ln \mathrm{A}} = \mathrm{A}. \square$$

Question. $a_n > 0, \mathrm{A} = 0$ 时结论是否成立？给出证明或反例.

(结论仍成立, 但ln0无意义, 例中证法失效)

Def. 称$\{a_n\}$发散到$+\infty$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, a_n > M.$$

称$\{a_n\}$发散到$-\infty$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, a_n < -M.$$

称$\{a_n\}$发散到∞, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, |a_n| > M.$$

Question. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$及$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$的几何意义?

Remark.(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in [-\infty, +\infty]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = e^a = \begin{cases} +\infty, & a = +\infty, \\ e^a, & a \in \mathbb{R}, \\ 0, & a = -\infty; \end{cases}$$

(2)若$a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in [0, +\infty]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln(\lim_{n\to\infty} a_n) = \ln a = \begin{cases} +\infty, & a = +\infty, \\ \ln a, & 0 < a \in \mathbb{R}, \\ -\infty, & a = 0. \end{cases}$$

作业：

习题1.1 No. 2

习题1.2 No.3(单), 5