回顾上节课内容：

基本命题1 ⟹ $\mathbb{R}^m$的子空间$\mathcal{M}$都可写成$Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$

向量组		子空间
向量组S: $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$	⟷	子空间$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$
S的极大线性无关部分组:	⟷	子空间的基:
$\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ 构成 S 的极大线性无关部分组，如果$\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性无关且$S$可由$\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性表示 $Span(S) = Span(\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k})$		$\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$构成$\mathcal{M}$的基，如果$\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性无关且$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k})$

关于向量组我们逐条建立下面3条性质

(a) 任意向量组存在极大线性无关部分组

(b) 线性无关组可以扩充为一个极大线性无关部分组

(c) 向量组的任意两个极大线性无关部分组的向量个数相同

向量组		子空间
向量组$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$	$\Longleftrightarrow$	子空间$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$
极大线性无关部分组	$\Longleftrightarrow$	子空间的基
极大线性无关部分组向量数相同	$\Longleftrightarrow$	基的个数相同
线性无关组扩充为极大线性无关部分组	$\Longleftrightarrow$	基的扩充

π

命题: (极大线性无关部分组的存在性)

任意向量组$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$都存在极大线性无关部分组。

证明：采用逐一筛选的方法。

如果$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$，则去掉$\boldsymbol{v}_1$，否则保留。

不妨设$\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$。如果$\boldsymbol{v}_2$与$\boldsymbol{v}_1$线性相关，则去掉$\boldsymbol{v}_2$；否则保留$\boldsymbol{v}_2$。

接着考察$\boldsymbol{v}_3$。如果$\boldsymbol{v}_3$与$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$线性相关，则去掉$\boldsymbol{v}_3$；否则保留$\boldsymbol{v}_3$。

类似地逐个考察每个向量，如果某个向量与前一步得到的向量组线性相关，则去掉；否则保留。

考查完所有向量后得到原向量组的极大线性无关部分组。

π

命题: (无关组扩充为极大无关部分组)

设$T: \boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$为向量组$S: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$的一组线性无关向量，则$T$可以扩充为$S$的一个极大线性无关部分组。

证明：使用筛选法，将S中的向量逐个添加到T中查看线性相关性。

回顾：向量组的线性表示

定义：设S,T为$\mathbb{R}^m$中两组向量，如果对任意$\boldsymbol{v}\in S,\boldsymbol{v}\in Span(T)$, 则称**$S$可被$T$线性表示。**

$S:\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n$与$T:\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$为$\mathbb{R}^m$中的两组向量，以下叙述等价

（1）S可以被T线性表示；

（2）存在$k\times n$矩阵A满足$[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k]A$;

（3）$Span(S)\subseteq Span(T)$.

基本命题2：

设$k < n, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$与$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$为$\mathbb{R}^m$的两组向量。如果$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$可由$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$线性表示，则$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$线性相关。

Slogan:如果多数向量能被少数向量线性表示，那么多数向量一定线性相关。

证明：$[\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k]A = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$

因$k < n, A$为“矮胖形”矩阵,方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$有非零解$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

于是$[\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = ([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k]A)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k]\left(A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$

表明向量$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$线性相关。

推论:

设向量组$S: \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n, T: \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$线性等价，如果两个向量组都线性无关，则$n = k$.

证明：如果$k < n$,由两个向量组线性等价，S可由T线性表示。

根据基本命题2，$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$线性相关，与假设矛盾。

同理知道如果$n < k$也会得到矛盾。

命题:

向量组S: $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 的两个极大线性无关部分组的向量个数相同。

证明：设S_1, S_2为S的两个极大线性无关部分组。

$Span(S_1) = Span(S) = Span(S_2)$。因此$S_1, S_2$线性等价，且都线性无关。

于是S_1, S_2具有相同数目的向量。

定义:

S的**秩** $=$ S的极大线性无关部分组的向量个数。记为$rank(S)$。

如果向量组只有零向量，则定义它的秩为0.

小结: 向量组的性质

(a) 任意向量组存在极大线性无关部分组

(b) 线性无关组可以扩充为一个极大线性无关部分组

(c) 向量组的任意两个极大线性无关部分组的向量个数相同

向量组		子空间
向量组$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$	$\Longleftrightarrow$	子空间$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$
极大线性无关部分组	$\Longleftrightarrow$	子空间的基
极大线性无关部分组向量数相同	$\Longleftrightarrow$	基的个数相同
向量组的秩	$\Longleftrightarrow$	子空间的维数

回顾基的存在定理:

给定$\mathbb{R}^m$的非零子空间$\mathcal{M}$（即$\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$），则$\mathcal{M}$存在一组基，且基中向量的个数$\leq m$.

如果$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$,

则$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$中的一个极大线性无关部分组是$\mathcal{M}$的一组基.

任一极大线性无关部分组的向量个数$\leq m$.

定理：（基的数目）

给定$\mathbb{R}^m$的非零子空间$\mathcal{M}$，则$\mathcal{M}$的任意两组基的向量个数相同。

基的向量个数称为$\mathcal{M}$的**维数**，记为$dim\mathcal{M}$。我们有$dim\mathcal{M} \leq m$。

如果$\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$，定义$dim\mathcal{M} = 0$.

证明：设$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$与$\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k\}$分别为$\mathcal{M}$的两组基。

两个向量组线性等价，且都线性无关，于是$n = k$.

由于$\mathbb{R}^m$中最多有m个线性无关的向量，$dim\mathcal{M} \leq m$.

例:

$A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 向量组$S$: $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$,

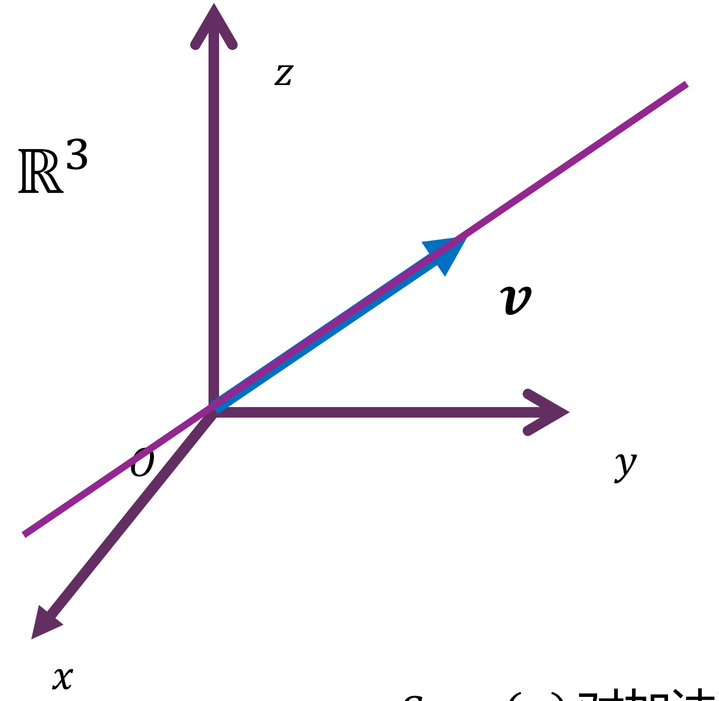
$\mathcal{R}(A)=Span(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$为$\mathbb{R}^m$的子空间

$dim\mathcal{R}(A)=rank(S)$称为$A$的(列)秩，列秩$\le m$

类似地，定义A的行秩$=dim\mathcal{R}\left(A^T\right)$，行秩$\le n$

2.3节证明A的列秩与行秩相等，于是A的**秩**$=dim\mathcal{R}(A)$

例：



$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$为$\mathbb{R}^3$中非零向量。

$Span(\boldsymbol{v}) = \{c\boldsymbol{v} | c \in \mathbb{R}\}$为一过原点直线。

$Span(\boldsymbol{v})$对加法和数乘封闭，因此，$Span(\boldsymbol{v})$是$\mathbb{R}^3$的子空间。

$\boldsymbol{v}$构成$Span(\boldsymbol{v})$的一组基，因此，$\dim Span(\boldsymbol{v}) = 1$。

例：$\mathbb{R}^3$中过原点的平面

设平面法向量$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

因此，平面$\mathcal{M}$上的向量满足方程$x+y+z=0$

一组线性无关的解为$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

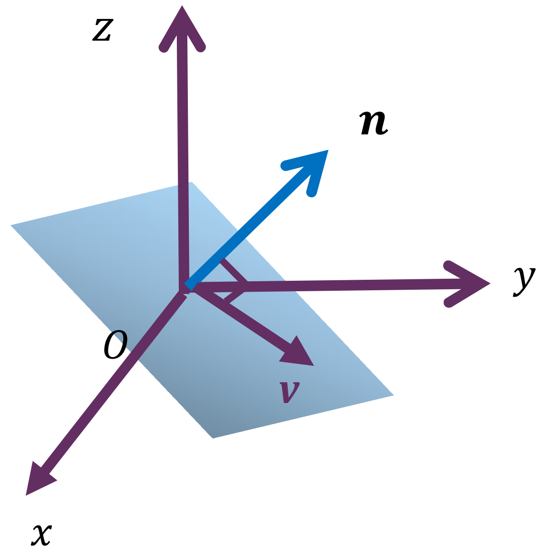
$\mathcal{M}=Span(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$

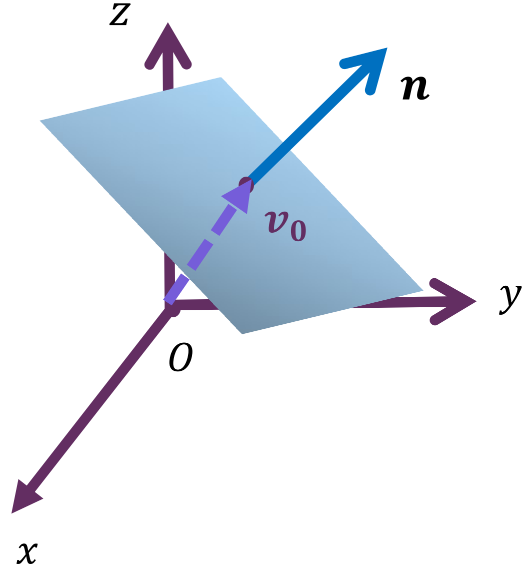
维数=2

第0章“自由度”实际上就是维数

如果平面不过原点，例如$x+y+z=1.$

该平面不是子空间，而是子空间的平移。





例：$\mathbb{R}^m$ 中的超平面：

一般的，方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = 0$$

表示$\mathbb{R}^m$中过原点的一个超平面。

它的维数是$m-1$.

例: $dim\mathbb{R}^m = m$

因为，$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ 线性无关且线性生成$\mathbb{R}^m$，于是它们构成$\mathbb{R}^m$的一组基。

小结:

向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ $\Longleftrightarrow$ 子空间$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$

极大线性无关部分组 $\Longleftrightarrow$ 子空间的基

极大线性无关部分组向量数相同 $\Longleftrightarrow$ 基的个数相同

线性无关组扩充为极大线性无关部分组 $\Longleftrightarrow$ 基的扩充

接下来讨论

基扩充定理:

设$\mathcal{M},\mathcal{N}$为$\mathbb{R}^m$的子空间，且$\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$。如果$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则$\mathcal{M}$的任意一组基都能扩充成$\mathcal{N}$的一组基。特别地， $dim\mathcal{M} \leq dim\mathcal{N}$。

取$\mathcal{N} = \mathbb{R}^m$，则非零子空间$\mathcal{M}$的任一组基可以扩充成$\mathbb{R}^m$的一组基。

证明：设$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$为$\mathcal{M}$的一组基，则$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$.

如果$\mathcal{M} = \mathcal{N}$，则$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$是$\mathcal{N}$的一组基。

否则，$\mathcal{N}$中存在向量$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$，

由基本命题1，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$线性无关。

如果$\mathcal{N} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1})$，证毕。否则，以此类推。

因为，$\mathcal{N}$中最多有m个线性无关向量，筛选过程在有限步后结束。

基扩充定理的推论:

设$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$为$\mathbb{R}^m$的两个子空间，如果$dim\mathcal{M} = dim\mathcal{N}$，

那么$\mathcal{M} = \mathcal{N}$。

证明：反设$\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$。

那么$\mathcal{M}$的一组基需要添加至少一个向量才能得到$\mathcal{N}$的一组基，

与维数相等矛盾。因此，$\mathcal{M} = \mathcal{N}$。

基扩充定理的推论:

设$\mathcal{M}$是$\mathbb{R}^m$的r维子空间，给定$\mathcal{M}$中含有r个向量的向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$。

（1）如果$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$线性无关，则$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$是$\mathcal{M}$的一组基；

（2）如果$\mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r)$，则$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$是$\mathcal{M}$的一组基。

只需证明：$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$线性无关$\Leftrightarrow \mathcal{M} = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r)$.

注意$Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r)$是$\mathcal{M}$的子空间。

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$线性无关$\Leftrightarrow \dim Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r) = r = dim\mathcal{M}$

$$\Leftrightarrow Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r) = \mathcal{M}$$

基扩充定理的应用: 维数公式

$\mathcal{M},\mathcal{N}$为$\mathbb{R}^m$的子空间，我们有维数公式

$$dim\mathcal{M}+dim\mathcal{N}=\dim(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})+dim(\mathcal{M}+\mathcal{N}).$$

证明思路:

令$d_1=dim(\mathcal{M}\cap\mathcal{N}), d_2=dim\mathcal{M},\ d_3=dim\mathcal{N}$.

取$\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$一组基$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{d_1}$,

将$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{d_1}$扩充为$\mathcal{M}$的一组基$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{d_1},\ \boldsymbol{u}_{d_1+1},\dots,\boldsymbol{u}_{d_2}$,

将$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{d_1}$扩充为$\mathcal{N}$的一组基$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{d_1},\ \boldsymbol{w}_{d_1+1},\dots,\boldsymbol{w}_{d_3}$,

习题：证明$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{d_1},\ \boldsymbol{u}_{d_1+1},\dots,\boldsymbol{u}_{d_2},\ \boldsymbol{w}_{d_1+1},\dots,\boldsymbol{w}_{d_3}$构成$\mathcal{M}+\mathcal{N}$的一组基。

本节小结：$\mathbb{R}^m$及其子空间的基和维数的基本理论

分两步研究：

1. 任意子空间可写为$Span(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r)$

2. 通过研究向量组$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$的极大线性无关部分组的性质研究基和维数的基本性质：

基的存在性定理；基的数目定理；基的扩充定理

在建立了基和维数的基本理论后我们在下一节讨论：

对于矩阵的四个基本子空间

(1) 如何找它们的一组基？

(2) 它们的维数各是多少？

2.3 矩阵的秩

主要内容：

(a) 矩阵秩的定义及如何求矩阵的秩

(b) 如何求**列空间**、**行空间**的一组基？

(c) 矩阵秩的性质

(d) 矩阵分解

基本方法：

(1) 研究行简化阶梯形矩阵的基本子空间

(2) 研究矩阵的基本子空间和它的行简化阶梯形矩阵基本子空间的联系

(a) 矩阵秩的定义与求法：

定义：

矩阵A的列空间的维数称为矩阵A的**秩**，$rank(A) = dim\mathcal{R}(A)$.

例：

秩为0的$m \times n$阶矩阵 = $O_{m\times n}$

秩为1的$m \times n$阶矩阵

有非零向量$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$, 以及不全为零的常数$c_1, \dots, c_n$使得

$$A = [c_1\boldsymbol{a}, \dots, c_n\boldsymbol{a}\ ] = \boldsymbol{a}[c_1, \dots, c_n]$$

列向量　　行向量

问题:

矩阵A的秩是否可以通过$rref(A)$求呢?

例:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}(A) = Span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{R}(R) = Span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{R}(R)$$

但是 $\boxed{rank(A) = rank(R)}$

矩阵和它的行简化阶梯形比较
列空间可能不同, 但维数相等!

例：行简化阶梯形矩阵

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & a & 0 & c\\ 0 & 1 & b & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$为主元列，

主元列线性无关。

$\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5$为自由列，

每个自由列可由它**之前的**主元列线性表示

主元列构成$\mathcal{R}(R)$的一组基。

$rank(R)=dim\mathcal{R}(R)=3=$主元个数

例：行简化阶梯形矩阵

$$
R=\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

主元列线性无关，每个自由列可由它之前的主元列线性表示

因此，主元列构成$\mathcal{R}(R)$的一组基。

$rank(R)=$ 主元列的个数 $=$ 主元个数

自由列的个数=$n-rank(R)$

π

命题：

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$为$\mathbb{R}^m$中$k$个向量，$E$为$m$阶可逆方阵。

令$\boldsymbol{r}_1 = E\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{r}_2 = E\boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{r}_k = E\boldsymbol{a}_k$。 则

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$线性相关当且仅当$\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k$线性相关。

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$线性无关当且仅当$\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k$线性无关。

$A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$

$EA = rref(A) = R, E$可逆

$[\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n] = E[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$

因此，R主元列对应的A的列向量线性无关

证明：

只需证明对$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}, [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow [\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$

如果$[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$，那么

$$[\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = [E\boldsymbol{a}_1, \dots, E\boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = E[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

如果$[\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$，那么

$$[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \left[E^{-1}\boldsymbol{r}_1, \dots, E^{-1}\boldsymbol{r}_k\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = E^{-1}[\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

命题：

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}$为$\mathbb{R}^m$中向量，$E$为$m$阶可逆方阵。

令$\boldsymbol{r}_1 = E\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{r}_2 = E\boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{r}_k = E\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{r} = E\boldsymbol{a}$。则

$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k$当且仅当$\boldsymbol{r} = c_1\boldsymbol{r}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{r}_k$。

$R = rref(A)$ 的自由列可由它之前的主元列线性表示，相对应的A的列向量也有相应的关系

证明与前命题类似，留为练习。

定义:

$A=[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$, $\quad R=rref(A)=[\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_n]$

如果$\boldsymbol{r}_i$为R的主元列，则$\boldsymbol{a}_i$称为A的主元列

如果$\boldsymbol{r}_i$为R的自由列，则$\boldsymbol{a}_i$称为A的自由列

根据上面的讨论，A的主元列线性无关，A的每个自由列可由它之前的主元列线性表示

因此，**A的主元列构成A的列空间$\mathcal{R}(A)$的一组基。**

例:

求向量组$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$的一个极大线性无关部分组。

法1：采用筛选法逐个添加，得到极大无关部分组

法2：求$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\-1&0&1&1\\0&-1&-1&1\end{bmatrix}$的主元列，给出一个极大无关部分组

实际上，求A的主元列只需要将A化成阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$为$A$的主元列，它们构成一个极大线性无关部分组

小结：

(1) $R = rref(A)$, $\mathcal{R}(A)$与$\mathcal{R}(R)$可能不同，但是它们的维数相同

于是，$rank(A) = dim\big(\mathcal{R}(A)\big) = dim\big(\mathcal{R}(R)\big) = rank(R)$

(2) A的主元列构成列空间的一组基