回顾上次课内容：

行列式的计算：

1. 主元公式= ±(主元乘积)
2. 余子式(cofactor)展开式：

给定n阶方阵A。令$A\binom{i}{j}$表示从A划去第i行和第j列得到的$n-1$阶方阵

$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^{i+j}\det A\binom{i}{j}$ 称为元素a_{ij}的**代数余子式**

行列式按任意一行或任意一列展开

按第j列展开：$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$

按第i行展开：$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$

例:

范德蒙矩阵的行列式

$$V_n(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

从第n行开始，每行减去前一行的 a_1倍，得到

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_3^{n-3}(a_3 - a_1) & a_4^{n-3}(a_4 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & a_4^{n-2}(a_4 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & a_3^{n-3}(a_3 - a_1) & a_4^{n-3}(a_4 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & a_4^{n-2}(a_4 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n)$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

a_i互不相同当且仅当范德蒙矩阵可逆。

范德蒙矩阵的应用：

考虑平面上的点和曲线。

有唯一一条直线（一次曲线）穿过平面上两点

问题：考虑平面上三个点（不妨设横坐标不同），是否只有一条二次曲线（$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$）穿过这三个点呢?

范德蒙矩阵的应用：

考虑平面上的点和曲线。

有唯一一条直线（一次曲线）穿过平面上两点

问题：考虑平面上三个点（不妨设横坐标不同），是否只有一条二次曲线（$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$）穿过这三个点呢？

设三个点为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, x_i互不相同

假设二次曲线$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$通过这三个点，则

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

由于x_i互不相同，范德蒙矩阵$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$可逆，方程组有唯一解

一般的，可以找到唯一的$n-1$次曲线穿过平面上横坐标不同的n个点

(b) 逆矩阵公式和Cramer法则 (余子式展开的应用)

补矩阵的定义：

设$A \in M_n(\mathbb{R})$。令$C = \left(C_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$，其中$C_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式。

C^T称为A的**补矩阵**(或伴随矩阵)。

$$C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

例：$n=3$

$$A\text{的补矩阵}C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

计算AC^T =?

$$AC^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

例：$n=3$

A的补矩阵$C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$

计算$AC^T=?$

$$AC^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

余子式展开公式：$a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}=|A|$

考虑$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，对第二行采用余子式展开 $=a_{11}\,C_{21}+a_{12}C_{22}+a_{13}C_{23}$

于是$a_{11}C_{21}+a_{12}C_{22}+a_{13}C_{23}=0$

因此，如果$|A|\neq 0,\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^T$

命题：

$$AC^T = C^TA = (\det A)I_n = \begin{bmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{bmatrix}$$

证明：

只证$AC^T = |A|I_n$，C^TA类似。

$$\left(AC^T\right)_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}.$$

如果$i = j$，则由余子式展开，$\left(AC^T\right)_{ii} = |A|$.

如果$i \neq j$，令A'为将A的第j行换为$[\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \dots, \boldsymbol{a}_{in}]$,其余行保持不变得到的矩阵。

由于A'的i,j两行相同，$|A'| = 0$.

根据余子式展开公式

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = |A'| = 0.$$

逆矩阵公式：

对可逆矩阵A，$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$.

逆矩阵公式在理论上给出了矩阵求逆的公式。

在实际中由于计算量较大，一般不采用。

Cramer法则：

如果$\det A \neq 0$，则方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解$x_1=\frac{\det B_1}{\det A}, x_2=\frac{\det B_2}{\det A}, \ldots, x_n=\frac{\det B_n}{\det A}$

其中，B_j是把A的第j列换为$\boldsymbol{b}$得到的矩阵。

证明：方程的解$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det A}C^T\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

于是, $x_j=\frac{1}{\det A}(b_1C_{1j}+b_2C_{2j}+\cdots+b_nC_{nj})=\frac{\det B_j}{\det A}$.

Cramer法则给出了当系数矩阵可逆时的方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的理论求解公式，

但Cramer法则计算量较大，实际求解中很少使用。

例:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

求$-2C_{11}+2C_{21}+3C_{31}+4C_{41}$

将A的第一列替换成$[-2,2,3,4]^T$，得到矩阵B，然后计算$|B|=1$

行列式的完全展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T + a_{12}\boldsymbol{e}_2^T + a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{22}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{32}\boldsymbol{e}_2^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{32}\boldsymbol{e}_2^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{22}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T \end{vmatrix}$$

π

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \end{vmatrix}$$

置换矩阵

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}\, a_{23}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

每行每列各取一个元素，一共有 $3!=6$ 项，于是A的行列式可以写成下面的求和形式：

$|A|=\sum_{j_1j_2j_3}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{j_1}^T\\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T\\ \boldsymbol{e}_{j_3}^T\end{vmatrix}$，这里求和项$j_1j_2j_3$取遍$1,2,3$的所有排列。

方阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{j_1}^T\\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T\\ \boldsymbol{e}_{j_3}^T\end{bmatrix}$为置换矩阵，行列式为$\pm 1$.

对一般的n，同理有n阶方阵A的行列式：

$$|A|=\sum_{j_1j_2\dots j_n\text{为}12\dots n\text{的排列}}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{j_1}^T\\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T\end{vmatrix}$$

问题：如何确定置换矩阵的行列式？

分两步：

1. 排列的符号
2. 排列的逆序数

定义：

(1) 由1,2,…, n组成的有序数组称为一个n阶**排列**，一般记为$\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$, 这里$j_k \in \{1,2,\dots,n\}$，且互不相同。排列$12\dots n$称为自然排列。

(2) 对调排列中两个数的顺序，称为对该排列施加一次对换

(3) 对于排列σ，如果可以经过奇数次对换得到自然排列，则称为奇排列；如果可以经过偶数次对换得到自然排列，则称为偶排列。

奇、偶排列各占排列总数的一半。

如果排列σ是奇排列，则定义其符号 $sign(\sigma) = -1.$

如果排列σ是偶排列，则定义其符号 $sign(\sigma) = 1.$

例：$n = 3$

排列132　置换矩阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　对换23列

排列213　置换矩阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　对换12列

排列312　置换矩阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_3^T \\ \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　先对换13列，然后对换23列

如果排列$\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$是奇排列，则方阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T \end{bmatrix}$经奇数次列对换得到$I_n$，

因此，$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T \end{bmatrix} = -1 = sign(\sigma)$.

如果排列$\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$是偶排列，则方阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T \end{bmatrix}$经偶数次列对换得到$I_n$，

因此，$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T \end{bmatrix} = 1 = sign(\sigma)$.

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n\text{为}12\dots n\text{的排列}} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n\text{为}12\dots n\text{的排列}} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}\, sign(j_1 j_2 \dots j_n).$$

因此，置换矩阵的行列式由对应排列的符号来计算

排列的符号与逆序数：

在排列$j_1j_2\dots j_n$中，如果一个大数排在小数之前，则称这两个数构成一个逆序。

一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**，记为$\tau(\sigma)=\tau(j_1j_2\dots j_n)$.

例:

自然排列12…n的逆序数为0.

排列45132的逆序数：

4开头的逆序有3个41，43，42；5开头的逆序有3个51，53，52；3开头逆序为32.

于是，排列的逆序数为7.

命题：

任意排列都可以通过若干次对换化为自然排列，对换的次数与排列逆序数的奇偶性相同。因此，$sign(j_1 j_2 \ldots j_n) = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)}$.

排列45132的逆序数为7：4开头的逆序有3个41，43，42；5开头的逆序有3个51，53，52；3开头逆序为32.

定理:

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n \text{为} 12\ldots n \text{的排列}} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)}$$

完全展开式同样给出行列式的存在性

例:

计算A的行列式$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

(1) 使用余子式展开

(2) 用完全展开式,

$|A|=\sum_{j_1 j_2 \dots j_n 为 12\dots n 的排列} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)}$

$= a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1} (-1)^{\tau(n,n-1,\dots 1)}$

计算排列$n, n-1, \dots, 1$的逆序数为$n(n-1)/2$.

$|A|=(-1)^{n(n-1)/2} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$.

小结：

1. 主元公式
2. 余子式展开公式

   逆矩阵公式

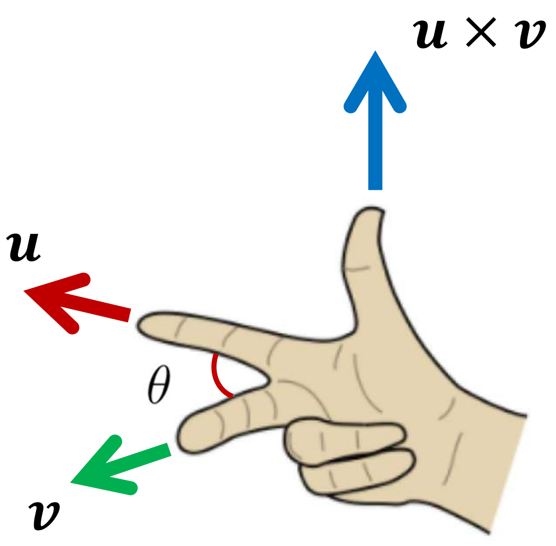
   Cramer法则
3. 完全展开公式

行列式与叉积: 回顾叉积的定义

π

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3,\text{定义}$$

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$



叉积方向由右手定则给出

容易验证

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=0$$

如果$\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\||\sin\theta|$ ⟸ $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$构成的平行四边形的面积

行列式记忆叉积：

令$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$为$\mathbb{R}^3$中的标准基。（物理里常用的记号）

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{k}.$$

我们可以用行列式形式地记忆叉积

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$$

形式地用余子式展开

行列式与有向体积：

1. 行列式 = 混合积
2. |混合积| = 体积

混合积

1. 行列式 = 混合积：

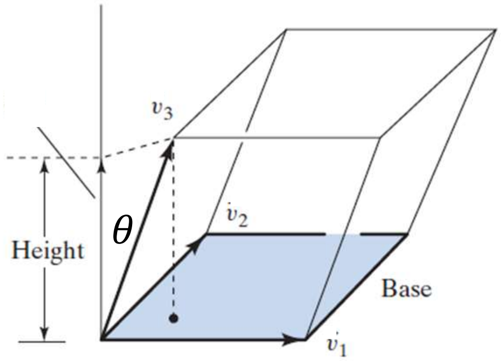
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3. \det[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$

证明：

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3$$

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^T \\ \boldsymbol{v}^T \\ \boldsymbol{w}^T \end{bmatrix} = \det[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}].$$

2. |混合积| = 体积:



$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$,构成一个平行六面体

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$构成的平行四边形的面积$= \|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\|$

平行六面体的高为$\|\boldsymbol{v}_3\||\cos\theta|$，其中$\theta$为$\boldsymbol{v}_3$与向量$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$的夹角

于是平行六面体的体积$= \|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\|\|\boldsymbol{v}_3\||\cos\theta|$

回顾两向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的夹角$\theta$满足$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$

因此，平行六面体的体积$= |(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}_3| = |\det([\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3])|$

而行列式$\det([\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3])$为平行六面体的**有向体积**.

QR分解决定有向体积：

对角线元素大于0

可逆方阵$A=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]\in M_3(\mathbb{R})$. A有QR分解：

$$A=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]=[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v}_3\\ 0 & \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{v}_3\\ 0 & 0 & \boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}=QR$$

(1) $\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1$在$\boldsymbol{q}_1$方向正交投影的长度=$\boldsymbol{v}_1$的长度

(2) $\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2$在$\boldsymbol{q}_2$方向正交投影的长度，

$(\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{v}_2)$=$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$构成的平行四边形的面积。

(3) $\boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_3$在$\boldsymbol{q}_3$方向正交投影的长度，

$(\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$构成的平行六面体的体积。

QR分解决定有向体积：

$\det A = \det Q \det R = \pm(\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{q}_3^T \boldsymbol{v}_3).$

R对角线乘积给出体积

体积的定向由Q决定

正交矩阵的定向:

$Q = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3]$列向量$\mathbb{R}^3$的构成标准正交基

行列式=混合积

由于$|\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2| = (\boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2) \cdot (\boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2) = 1.$

如果$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2$，则$\det Q = 1$；如果$\boldsymbol{q}_3 = -\boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2$，则$\det Q = -1.$

本章小结：行列式的几种理解

1. 行列式函数, 行列式函数的性质；可逆当且仅当行列式非零
2. 行列式的计算

   主元公式，余子式展开，完全展开式

   应用：逆矩阵公式，Cramer法则
3. 行列式是有向体积的高维推广

   行列式与混合积和QR分解的关系