回顾上节课内容:

数域$\mathbb{F}$（可进行高斯消元） $\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}$上的线性空间概念

基和维数的基本理论自然推广到$\mathbb{F}$上的有限维线性空间

证明自然推广$\mathbb{R}^n$上的证明

关键：引入下面的写法

(1) $V = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$中任意向量$\boldsymbol{v}$可表示成

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

(2) 向量组$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$可表示成

$$(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_m)A, \qquad A \in \mathbb{F}^{m\times n}.$$

7.3 线性映射

介绍数域$\mathbb{F}$上的线性空间之间的线性映射

内容：

(a) 线性映射的定义、运算

(b) 特征值和特征子空间

(c) 线性空间的同构

(a) 线性映射的定义和运算

定义：

设U,V为$\mathbb{F}$上两个线性空间，如果映射$f: U \longrightarrow V$满足对任意$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a} \in U, c \in \mathbb{F}$

(1) $f(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_1) + f(\boldsymbol{a}_2)$,

(2) $f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a}), c \in \mathbb{F}$

则称f为U到V的线性映射，U到V的线性映射全体记作$Hom(U,V)$.

homomorphism

注记：

(1) 定义线性映射的两个条件等价于$f(c\boldsymbol{a}_1 + d\boldsymbol{a}_2) = cf(\boldsymbol{a}_1) + df(\boldsymbol{a}_2), \forall c, d \in \mathbb{F}$.

(2) $f \in Hom(U,V), f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

对比零空间和列空间的定义, 定义线性映射的核与像集:

给定数域上的线性空间，以及线性映射$f: U \longrightarrow V$,定义

(1) $\mathcal{N}(f) \coloneqq \left\{ \boldsymbol{a} \in U \,\middle|\, f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}_V \right\}$，称为$f$的核(kernel);

(2) $\mathcal{R}(f) \coloneqq \left\{ f(\boldsymbol{a}) \,\middle|\, \boldsymbol{a} \in U \right\}$，称为$f$的像集(image).

命题:

(1) $\mathcal{N}(f)$是U的子空间，而且f是单射当且仅当$\mathcal{N}(f) = \mathbf{0}_U$;

(2) $\mathcal{R}(f)$是V的子空间，而且f是满射当且仅当$\mathcal{R}(f) = V$.

线性映射全体构成线性空间:

给定数域上的线性空间U,V,在U到V的线性映射全体$Hom(U,V)$上定义加法和数乘

(1) 加法：$f,g \in Hom(U,V)$，定义$(f+g)(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{a})$;

(2) 数乘：$f \in Hom(U,V), c \in \mathbb{F}$，定义$(cf)(\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$.

容易验证在这样定义的加法和数乘下，$Hom(U,V)$构成线性空间。

通过各取U,V的一组基，$Hom(U,V)$将等同于$\mathbb{F}^{m\times n}$

线性映射的复合:

给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间U,V,W，若$f \in Hom(U,V), g \in Hom(V,W)$，则定义$f$与$g$的复合：$g \circ f: U \to W, \boldsymbol{a} \mapsto g\big(f(\boldsymbol{a})\big)$.

通过各取U,V,W的一组基，映射复合对应到矩阵乘法

例:

取转置给出$\mathbb{F}^{m\times n}$到$\mathbb{F}^{n\times m}$的线性映射:

$$\cdot^T: \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{n\times m}$$

$$A \mapsto A^T$$

$$(cA + dB)^T = cA^T + dB^T$$

例:

取方阵的迹定义一个线性映射$trace: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}, A \mapsto trace(A)$

$$trace(cA + dB) = ctrace(A) + dtrace(B)$$

反例:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(\boldsymbol{x}) = \| \boldsymbol{x} \|$不是线性映射。

一般有$\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \| \leq \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|, \| c\boldsymbol{x} \| = | c | \| \boldsymbol{x} \|$.

例:

设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.定义

$$f: \mathbb{F}^{2\times 2} \to \mathbb{F}^{2\times 2}, M \mapsto f(M) = AM.$$

f是线性映射。

$f(cM_1 + dM_2) = A(cM_1 + dM_2) = cAM_1 + dAM_2 = cf(M_1) + df(M_2).$

一般地，$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，左乘$A$定义线性映射

$L_A: \mathbb{F}^{n\times p} \to \mathbb{F}^{m\times p}, \qquad X \mapsto L_A(X) = AX.$

右乘A定义线性映射

$R_A: \mathbb{F}^{l\times m} \to \mathbb{F}^{l\times n}, \qquad X \mapsto R_A(X) = XA.$

例:

求导: $D = \frac{d}{dx}: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$f \mapsto D(f) = f'.$$

$D(f+g) = D(f) + D(g), \qquad D(cf) = cD(f).$

$\mathcal{N}(D) = \left\{ f \,\middle|\, f' = \mathbf{0} \right\} = \mathbb{R}.$

积分: $I = \int_0^x dt : C^{\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$f \longmapsto I(f): x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$

$I(f+g) = I(f) + I(g), \qquad I(cf) = cI(f).$

线性变换:

线性空间$\mathcal{U}$到自身的线性映射称为**线性变换。**

$Hom(\mathcal{U},\mathcal{U})$ 具有三种运算结构:

加法： $f,g \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{U}), f+g \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{U})$

数乘：$f \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{U}), c \in \mathbb{F}, cf \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{U})$

乘法（映射的复合）： $f,g \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{U}), f \circ g \in Hom(\mathcal{U},\mathcal{U})$

三种运算满足一些好的运算法则。

具有这三种代数结构的对象称为一个**环（ring）**

(b) 特征值、特征向量：

给定线性空间$\mathcal{U}$及其上的线性变换f. 如果对$\lambda \in \mathbb{F}$, 非零向量$\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$, 使得$f(\boldsymbol{x}) = \lambda\,\boldsymbol{x}$, 则称$\lambda$为线性变换$f$的**特征值**, $\boldsymbol{x}$为f的一个属于特征值λ的**特征向量**.

$(\lambda, \boldsymbol{x})$称为**特征对**.

$\mathcal{N}(\lambda \boldsymbol{I} - f)$ 称为f的属于特征值λ的**特征子空间**.

非零向量$\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$为$f$的属于特征值$\lambda$的特征向量当且仅当$\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\lambda \boldsymbol{I} - f)$.

例:

设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 取左乘$A$和右乘$A$两个映射的差

$L_A - R_A: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}, X \mapsto AX - XA$

这是$\mathbb{F}^{n\times n}$上的线性变换。

线性变换的核$\mathcal{N}(L_A - R_A)$是特征值为0特征子空间。

$\mathcal{N}(L_A - R_A) = \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid AX - XA = O\}$, 即与$A$可交换的矩阵。

例:

$$D=\frac{d}{dx}:C^{\infty}(\mathbb{R})\to C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{N}(D)=\mathbb{R}$是常数函数的全体构成的线性空间

对任意$\lambda\in\mathbb{R}$，考虑$\lambda\boldsymbol{I}-D:C^{\infty}(\mathbb{R})\to C^{\infty}(\mathbb{R})$

容易验证$e^{\lambda x}\in\mathcal{N}(\lambda\boldsymbol{I}-D)$，

实际上利用常微分方程可以证明$\mathcal{N}(\lambda\boldsymbol{I}-D)=\mathbb{R}e^{\lambda x}$。

(c) 线性空间的同构

给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间U, V，如果存在线性映射$f: U \to V$是双射，则称U和V**同构**，称f为U到V的**同构映射**。

由于f是双射，f^{-1}也是双射线性映射，f^{-1}给出V到U的同构映射。

命题:

线性空间的同构关系是等价关系。因此，两个同构的线性空间具有相同的线性结构。

等价关系中的传递性基于:

$f: U \to V, g: V \to W$是同构映射，则$g \circ f$是同构映射。

例:

$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆，则线性映射

$L_A: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}, X \mapsto AX$

$R_A: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}, X \mapsto XA$

都是同构映射。

例:

给定$\mathbb{F}$上的有限维线性空间V, 取V的一组基$\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n$，对$V$中的向量$\boldsymbol{v}$，存在唯一的$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$使得

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

因此，固定基$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$后，映射$V \to \mathbb{F}^n, \boldsymbol{v} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$给出$V$到$\mathbb{F}^n$的同构映射。

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$称为$\boldsymbol{v}$在基$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$下的**坐标**

例:

取$\mathbb{F}^{2\times 2}$一组基$\mathcal{B}=(E_1,E_2,E_3,E_4)$,

其中$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

求$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$在$\mathcal{B}$下的坐标。

$A=\mathcal{B}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\cdot\quad \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$给出线性空间同构$\mathbb{F}^{2\times 2}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}^4$

维数定理:

$f: U \to V$线性映射. $\dim U = \dim \mathcal{N}(f) + \dim \mathcal{R}(f)$

$\dim of\ input = \dim of\ null + \dim of\ output$

简略证明:

$n = \dim U, m = \dim V.$

各取U, V的一组基, U等同于$\mathbb{F}^n$, V等同于$\mathbb{F}^m$,

f由$m \times n$阶矩阵A表示, $\mathcal{N}(f) \leftrightarrow \mathcal{N}(A), \mathcal{R}(f) \leftrightarrow \mathcal{R}(A)$

7.4 向量的坐标表示

(a) 向量的坐标表示

(b) 一组向量的表示

(c) 基变换与坐标变换

(a) 向量的坐标表示

给定$\mathbb{F}$上的有限维线性空间V，取V的一组基$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$,

对V中的向量$\boldsymbol{v}$，存在唯一的$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$使得

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$称为$\boldsymbol{v}$在基$\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$下的**坐标**

在V的基$\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$下

映射$V \to \mathbb{F}^n, \boldsymbol{v} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$给出$V$到$\mathbb{F}^n$的同构映射。

逆映射为$\mathbb{F}^n \to V, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \mathcal{B}X$.

通过取定一组基，线性空间中的问题转换到$\mathbb{F}^n$中的问题

问题：如果取不同的基会怎么样呢?

我之后会回答这个问题。

例:

取$\mathbb{F}^{2\times 2}$一组基$\mathcal{B}=(E_1,E_2,E_3,E_4)$，其中$E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 求$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$在$\mathcal{B}$下的坐标。

$$A=\mathcal{B}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$给出线性空间同构$\mathbb{F}^{2\times 2}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}^4$

一般地，给定$\mathbb{F}^{m\times n}$的一组基，矩阵在这组基下的坐标给出同构$\mathbb{F}^{m\times n}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}^{mn}$

例:

考虑次数小于n的多项式空间$\mathbb{R}[x]_n$，$\mathcal{B}=\left(1,x,\dots,x^{n-1}\right)$构成一组基

求$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$在$\mathcal{B}$下的坐标。

$f(x)=\mathcal{B}[a_0,\dots,a_{n-1}]^T$

$\mathcal{B}'=\left(1,\ x-x_0,\dots,(x-x_0)^{n-1}\right)$也构成$\mathbb{R}[x]_n$一组基，（$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$可相互表示），求$f(x)$在$\mathcal{B}'$下的坐标。

$$f(x)=\mathcal{B}'\left[f(x_0),f'(x_0),\dots,\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)\right]^T$$

Taylor展开得到

(b) 一组向量的表示:

给定$\mathbb{F}$上的有限维线性空间V, 取V的一组基$\mathcal{B}=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$,

$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$为$V$中$m$个向量,

$\boldsymbol{a}_i=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)\hat{\boldsymbol{a}}_i$, 记$\hat{\boldsymbol{a}}_i\in\mathbb{F}^n$为$a_i$的坐标

$(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m)=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)[\widehat{\boldsymbol{a}_1},\dots,\widehat{\boldsymbol{a}_m}]$

$[\widehat{\boldsymbol{a}_1},\dots,\widehat{\boldsymbol{a}_m}]\in\mathbb{F}^{n\times m}$

V中一组向量的问题 $\Rightarrow$ $\mathbb{F}^n$中列向量的问题

命题:

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$在$V$中线性无关，当且仅当$\widehat{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \widehat{\boldsymbol{a}_m}$在$\mathbb{F}^n$中线性无关。

证明:

$$(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)[\widehat{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \widehat{\boldsymbol{a}_m}]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

由于$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$线性无关 $\Updownarrow$

$$[\widehat{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \widehat{\boldsymbol{a}_m}]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

π

命题:

给定数域$\mathbb{F}$上n维线性空间V的一组基$\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$。

设$\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n'$为$V$中$n$个向量，有矩阵$P \in \mathbb{F}^{n\times n}$使得

$(\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n') = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)P$.

$(\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n')$构成$V$的一组基当且仅当$P$可逆.

证明:

$(\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n')$构成$V$的一组基当且仅当$\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n'$的坐标构成$\mathbb{F}^n$的一组基

注意：$\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n'$的坐标正好是矩阵$P$的列向量

于是$(\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n')$构成$V$的一组基当且仅当$P$可逆

小结:

m维线性空间V与$\mathbb{F}^m$的关系:

取V的一组基$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$,

(1) V中任意向量$\boldsymbol{v}$可表示成

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

(2) 向量组$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$可表示成

$$(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_m)A, \qquad A \in \mathbb{F}^{m \times n}.$$

(c) 基变换与坐标变换

问题：换基会导致向量坐标怎样变化?

如果$(\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n')$是$V$的一组新基，记$\mathcal{B}^{new} = (\boldsymbol{v}_1', \dots, \boldsymbol{v}_n') = \mathcal{B}P$,

P称为$\mathcal{B}$到$\mathcal{B}^{new}$的**过渡矩阵**

基变换与坐标变换:

设$X \in \mathbb{F}^n$为向量$\boldsymbol{v}$在$\mathcal{B}$下坐标，即$\boldsymbol{v} = \mathcal{B}X$. 那么$\boldsymbol{v}$在新基$\mathcal{B}^{new}$下坐标为$P^{-1}X$.

证明:

设X^{new}为$\boldsymbol{v}$在$\mathcal{B}^{new}$下的坐标

$\boldsymbol{v} = \mathcal{B}^{new}X^{new} = (\mathcal{B}P)X^{new} = \mathcal{B}(PX^{new}) = \mathcal{B}X.$

因此，$PX^{new} = X, \quad X^{new} = P^{-1}X.$