第七章 线性空间和线性映射

主要内容

推广$\mathbb{R}^n$上的线性代数至抽象线性空间

7.1 线性空间

7.2 基和维数

7.3 线性映射

7.4 向量的坐标表示

7.5 线性映射的矩阵表示（难点）

7.1 线性空间

推广$\mathbb{R}^n$(或$\mathbb{C}^n$)及其子空间的概念

(a) 推广$\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$)到一般的数域$\mathbb{F}$

(b) 推广$\mathbb{R}^n$(或$\mathbb{C}^n$)上的线性(向量)空间到$\mathbb{F}$上的线性空间

(c) 推广子空间，子空间的和、交等概念

(a) 数域:

问题：高斯消元需要哪些运算?

定义：

给定$\mathbb{C}$的子集$\mathbb{F}$，如果$\mathbb{F}$包含至少一个非零复数，且$\mathbb{F}$对加、减、乘、除四则运算法则封闭，则称$\mathbb{F}$为一个**数域。**

$a, b \in \mathbb{F}$,$a+b, a-b, ab \in \mathbb{F}$，且当$b \neq 0$时,$\frac{a}{b} \in \mathbb{F}$

对加减乘除封闭，可以进行高斯消元。

例: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$是数域, $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$不是数域

(b) 线性空间

1. 线性空间的定义和性质

2. 线性空间的例子：

   坐标向量空间

   矩阵空间

   函数空间

   多项式(函数)空间

3. 子空间

线性空间的定义:

给定数域$\mathbb{F}$和非空集合V，如果V上定义了加法运算和$\mathbb{F}$在V上的数乘运算，且这两种运算满足如下8条法则：

(1)加法结合律：$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$;

(2)加法交换律：$\forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$;

(3)零元素：存在元素$\mathbf{0}\in V$满足$\forall \boldsymbol{v}\in V,\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$;

(4)负元素：$\forall \boldsymbol{v}\in V$,存在一个元素记为$-\boldsymbol{v}\in V$，满足$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$;

(5)单位数：$1\in\mathbb{F},1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v},\forall \boldsymbol{v}\in V$;

(6)数乘结合律：$(c_1c_2)\boldsymbol{v}=c_1(c_2\boldsymbol{v}),c_1,c_2\in\mathbb{F},\boldsymbol{v}\in V$;

(7)数乘对数的分配律：$(c_1+c_2)\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}+c_2\boldsymbol{v},c_1,c_2\in\mathbb{F},\boldsymbol{v}\in V$;

(8)数乘对向量的分配律：$c(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=c\boldsymbol{v}_1+c\boldsymbol{v}_2,c\in\mathbb{F},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$.

则称V是$\mathbb{F}$上的**线性空间**或**向量空间**。

定义减法：$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+(-\boldsymbol{v}_2)$.

线性空间的性质:

(1) 零向量唯一;

(2) 任意向量的负向量唯一;

(3) $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$

(4) 加法消去律，即由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$可以推出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

(5) 可以移项，即由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$可以推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$

(6) $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},k\neq 0$可以推出$\boldsymbol{a}=\frac{1}{k}\boldsymbol{b}$.

线性空间的例子:

(1) 我们已经见过两个例子$\mathbb{R}^n$，$M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(2) 数域$\mathbb{F}$上的n维坐标向量空间$\mathbb{F}^n$；数域$\mathbb{F}$上的$m\times n$阶矩阵空间$\mathbb{F}^{m\times n}=M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

(3) 只有一个零元素的集合构成$\mathbb{F}$上的线性空间，记为$\{\mathbf{0}\}$.

函数空间的例子:

(1) 定义域为$\mathbb{R}$的实值函数f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$全体构成$\mathbb{R}$上的线性空间：

加法$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，数乘$(cf)(x)=cf(x)$.

(2) 定义域为$\mathbb{R}$的实值连续函数全体构成$\mathbb{R}$上的线性空间，记为$C(\mathbb{R})$

(3) 定义域为$\mathbb{R}$的实值无穷次可导函数全体构成$\mathbb{R}$上的线性空间，记为$C^\infty(\mathbb{R})$

函数空间的例子:

(4) 实系数多项式全体构成$\mathbb{R}$上的线性空间

$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$, 通常的加法与数乘

(5) 次数小于n的实系数多项式的全体**加上零多项式**也构成$\mathbb{R}$上的线性空间

$\mathbb{R}[x]_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \mid k < n, a_i \in \mathbb{R}\}$,

(6) 数域$\mathbb{F}$上的多项式同样可以定义$\mathbb{F}[x], \mathbb{F}[x]_n$

子空间:

给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间V及其非空子集$\mathcal{M}$，如果$\mathcal{M}$在V的加法与数乘下也满足线性空间定义中的8条性质，则称$\mathcal{M}$是V的**子空间**。

命题:

$\mathcal{M}$是V的子空间当且仅当$\mathcal{M}$对加法和数乘封闭。

例:

(1) 对任意$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$\mathcal{R}(A)$是$\mathbb{F}^m$的子空间，$\mathcal{N}(A)$是$\mathbb{F}^n$的子空间。

(2) $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,d \in \mathbb{F}\right\}$构成$\mathbb{F}^{2\times 2}$的子空间。

(3) n阶对称矩阵，n阶反对称矩阵均为$\mathbb{F}^{n\times n}$的子空间。

(4) n阶正交矩阵全体不是$M_n(\mathbb{R})$的子空间，

因为$O_{n\times n}$不是正交矩阵。

(5)多项式全体$\subset$ 光滑函数全体$\subset$ 连续函数全体，它们都是函数空间的子空间。

(6) 次数小于n的多项式全体$\mathbb{R}[x]_n$是次数小于$n+1$的多项式全体$\mathbb{R}[x]_{n+1}$的子空间。

子空间的交与和:

$\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$为V的子空间，则

（1）$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{v} \in \mathcal{M}_2 \right\}$为$V$的子空间。

（2）$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \left\{ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{w} \in \mathcal{M}_2 \right\}$为$V$的子空间。

子空间的直和:

给定线性空间V的两个子空间$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$。令$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$。

如果对$\mathcal{M}$的任意向量$\boldsymbol{m}$存在唯一的$\boldsymbol{m}_1 \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{m}_2 \in \mathcal{M}_2$,使得

$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$，

则称$\mathcal{M}$为$\mathcal{M}_1$与$\mathcal{M}_2$的直和。记作$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$。

例：矩阵的行空间和零空间；列空间与左零空间

定理:

对线性空间V的两个子空间$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$,以下叙述等价

(1) $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$是直和

(2) 零向量有唯一的分解式，即如果$\mathbf{0} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$，$\boldsymbol{m}_1 \in \mathcal{M}_1$，$\boldsymbol{m}_2 \in \mathcal{M}_2$，则$\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}$

(3) $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$.

证明:

(1)⇒(2): 零向量是$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$中的一个向量

(2) ⇒(3): $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$，$\mathbf{0} = \boldsymbol{m} + (-\boldsymbol{m})$,

由(2) $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$

(3) ⇒(1): $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{m}'_1 + \boldsymbol{m}'_2$,

$\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}'_1 = \boldsymbol{m}'_2 - \boldsymbol{m}_2 \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$,

于是$\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}'_1 = \boldsymbol{m}'_2 - \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}$.

7.2 基和维数

推广$\mathbb{R}^n$(或$\mathbb{C}^n$)子空间的基和维数的概念到数域$\mathbb{F}$上的线性空间

(a) 基本概念

线性相关、线性无关、线性生成

极大线性无关部分组、基和维数

(b) 基和维数的基本定理

(a) 基本概念:

(1) 给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间$V, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in V, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{F}$,

$k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m$是向量组$\boldsymbol{a}_{1,} \dots, \boldsymbol{a}_m$的一个线性组合。

(2) $Span(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m) = \left\{k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m \middle| k_1, \dots, k_m \in \mathbb{F}\right\}$线性组合全体，它是$V$的子空间，称为由$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ 生成的子空间。

(3) 如果$\boldsymbol{b} \in Span(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)$，则称$\boldsymbol{b}$可由$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$线性表示。

仿照矩阵和向量的乘法，如果$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m$,

我们写作$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$

(4) 若向量组$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$中的每个向量都可以被向量组$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$线性表示，则称向量组$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$可以被向量组$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$线性表示。

仿照矩阵乘法，有$A = [k_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$使得

$$(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m) \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix}$$

(5) 向量组$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$称为线性相关，如果有不全为零的$k_1, \dots, k_m \in \mathbb{F}$使得$k_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$，否则，称它们线性无关。

例:

$\mathbb{R}$上的函数 $\sin x$ 与$\cos x$线性无关。

$$k_1 \sin x + k_2 \cos x = (\sin x, \cos x)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

取$x = 0$得到$k_2 = 0$，取$x = \dfrac{\pi}{2}$得到$k_1 = 0$

因此，$\sin x, \cos x$ 线性无关。

例:

令$E_{ij} \in \mathbb{F}^{2\times2}$的$ij$位置为1，其余位置为0

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}$$

$$= (E_{11}, E_{12}, E_{22}) \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}$$

E_{11}, E_{12}, E_{22}线性无关

有限维线性空间与无限维线性空间:

定义:

给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间V，如果V中存在任意多个线性无关的向量，则称V为**无限维线性空间**。反之，称其为**有限维线性空间**。

零向量构成的线性空间维数是0

我们考虑有限维线性空间。

有限维线性空间:

对于有限维线性空间V（或者一个有限维线性空间的子空间），通过筛选法可以将V写成有限个向量的线性生成，即$V = Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$，其中$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$.

这里的关键是运用下面的命题:

基本命题1:

设$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$作为$V$中一组线性无关向量，$\boldsymbol{v} \in V$.

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}$线性相关当且仅当$\boldsymbol{v} \in Span(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$.

若等价条件成立，表示方法唯一。

(b) 基和维数的基本定理

π 给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间V，向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$满足

(1) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$线性无关;

(2) $V = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$.

则称$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$为$V$的一组**基**，$m$称为**维数**。

与$\mathbb{R}^n$类似，考虑如下问题：基的存在性，基数目的唯一性以及基的扩充问题。

首先：筛选法可以给出有限维线性空间中基的存在性

同样也可以通过得到向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$的一个极大线性无关部分组得到基

极大线性无关部分组:

给定线性空间V中的向量组$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$，如果部分组$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$,满足

(1) $\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性无关;

(2) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$可以被$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$线性表示;

则称$\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_k}$为$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$的一个**极大线性无关部分组。**

我们可以和$\mathbb{R}^n$一样，逐条建立下面的性质

(1) 任意向量组存在极大线性无关部分组

(2) 线性无关组可以扩充为一个极大线性无关部分组

(3) 任意两个极大线性无关部分组具有相同数目的向量个数

对于(1)(2)可以用筛选法得到, (3)的关键是下列命题

基本命题2:

设$k < n, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$与$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$为$V$的两组向量。

如果$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$可由$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$线性表示，则$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$线性相关。

“如果多数向量能被少数向量线性表示，那么多数向量一定线性相关。”

基本命题2的证明：

$$(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)A = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

因为$k < n, A$为“矮胖形”矩阵，方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$有非零解$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$。

于是

$$(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)\left(A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = \mathbf{0}.$$

表明$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$线性相关。

推论:

设向量组$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$和向量组$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$线性等价（即可以相互表示），如果两个向量组都线性无关，则$n = k$.

因此，一个向量组的两个极大线性无关部分组具有相同数目的向量个数。从而，我们得到有限维线性空间的维数概念。

例:

考虑$\mathbb{F}$线性空间$\mathbb{F}^{m\times n}$

$E_{ij} \in \mathbb{F}^{m\times n}, ij$位置为1，其余位置为0.

$\{E_{ij},\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 线性无关，构成$\mathbb{F}^{m\times n}$的一组基。

$\dim \mathbb{F}^{m\times n} = mn$

例:

线性空间$\mathbb{R}[x]_n$中，$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$线性无关。因此，$\dim \mathbb{R}[x]_n = n$.

证明:

设$k_0 + k_1 x + \cdots + k_{n-1} x^{n-1} = \mathbf{0}$.

逐次求导，代入$x = 0$，得到$k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$

$\mathbb{R}[x]$是无限维线性空间。

与$\mathbb{R}^n$类似, 我们也有基扩充定理:

有限维线性空间V中任意r个线性无关的向量$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$可以扩充成$V$的一组基。

推论:

如果$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$是V的子空间$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$且$\dim\mathcal{M} = \dim\mathcal{N}$, 则$\mathcal{M} = \mathcal{N}$。

维数公式:

给定数域$\mathbb{F}$上的线性空间V，$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$为$V$的子空间，我们有维数公式

$$\dim\mathcal{M}_1+\dim\mathcal{M}_2=\dim(\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2)+\dim(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2).$$

推论:

给定线性空间V的两个有限维子空间$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$

1.$\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$是直和当且仅当$\dim(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)=\dim\mathcal{M}_1+\dim\mathcal{M}_2$

2.若$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2$，则$\mathcal{M}_1$与$\mathcal{M}_2$各取一组基，其并集是$\mathcal{M}$的一组基。

7.1，7.2小结:

数域$\mathbb{F}$（可进行高斯消元）$\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}$上的线性空间概念

基和维数的基本理论自然推广到$\mathbb{F}$上的有限维线性空间

证明自然推广$\mathbb{R}^n$上的证明

关键：引入下面的写法

(1) $V = Span(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$中任意向量$\boldsymbol{v}$可表示成

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

(2) 向量组$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$可表示成

$$(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_m)A, \qquad A \in \mathbb{F}^{m\times n}.$$