回顾上次课内容：

1. 从(有向)面积出发给出行列式函数的定义：

   (1)$\det(I_n)=1$，(2) $\det\left(AP_{ij}\right)=-\det(A)$, (3)对一列线性。

2. 得到$\det(AE)=\det(A)\det(E)$, E为初等矩阵

3. 证明了行列式函数的唯一性； A可逆当且仅当$\det(A)\neq 0$

4. $A,B\in M_n(\mathbb{R})$,则$\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

5. $\det\left(A^T\right)=\det(A)$

6. 行列式的计算：置换矩阵；正交矩阵；上、下三角矩阵

7. 将(可逆)矩阵写成初等矩阵的乘积，即高斯消元，是计算行列式的有效方法。

8. $X=\begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix}$,其中$A,B$为方阵. 则$\det X=\det(A)\det(B)$.

4.2 行列式的展开式

主要内容：

（a）行列式的三种公式

（b）伴随矩阵, Cramer法则

（c）叉积, 有向体积

（a）行列式的三种公式：

1. 主元公式
2. 余子式(cofactor)展开
3. 完全展开式

余子式展开和完全展开式给出行列式的存在性

主元公式和余子式展开是常用的计算方法；有时需要配合使用

完全展开式非常粗暴，应尽量避免使用

主元公式：

A为可逆方阵。

假设A有LU分解$A = LU$,

L为单位下三角矩阵，U为上三角矩阵。U的对角线上元素为A的主元。

$\det A = \det L \det U = \det U = A$的主元乘积。

一般的，可逆矩阵A有PLU分解，$A = PLU$, 其中P为置换矩阵，L为单位下三角矩阵，U为上三角矩阵。

U的对角线上元素为A的主元。

$\det A = \det P \det L \det U = \det P \det U = \pm$（主元乘积）。

因此，高斯消元是求矩阵行列式的有效方法。

例：

求$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$的行列式。

LU分解：由$E_{32}\left(\frac{2}{3}\right)E_{21}\left(\frac{1}{2}\right)D_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ & 3/2 & -1 \\ & & 4/3 \end{bmatrix}$得到，

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ & -2/3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ & 3/2 & -1 \\ & & 4/3 \end{bmatrix}$$

因此，$|D_3| = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 4$

例:

$X=\begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix}$,其中$A,B$为方阵，则$\det X=\det A\ \det B$.

我们已经看到可以用行列式函数的性质证明（写成初等矩阵的乘积）。

用主元公式：X的主元为A的主元并上B的主元。因此,$\det X=\det A\ \det B$.

例：求$X=\begin{bmatrix} A_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & A_n \end{bmatrix}$的行列式，其中$A_1,\dots,A_n$为方阵。

$|X|=|A_1|\dots|A_n|$.

分块下三角矩阵有类似结果，由取转置得到。

例:

求$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$的行列式。

$P_{13}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,因此$\det A=-1$.

余子式展开: 以$n=3$为例

根据行列式对一列的线性性，我们沿矩阵的第一列展开

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由行列式对行的反对称性，即$\det\left(P_{ij}A\right) = -\det(A)$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

保持1，3行的相对位置　　保持1，2行的相对位置

利用分块上三角矩阵的行列式，我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

因此我们可以利用2阶行列式递归表示3阶行列式

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

类似的算法在$n \geq 4$时不再成立

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

定义：

给定n阶方阵A。令$A\binom{i}{j}$表示从A划去第i行和第j列得到的$n-1$阶方阵

$M_{ij}=\det A\binom{i}{j}$称为元素$a_{ij}$的**余子式**，

$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^{i+j}\det A\binom{i}{j}$

称为元素a_{ij}的**代数余子式**

例:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

定理：

给定n阶方阵$A=[a_{ij}]$，归纳定义函数$\delta(A)=a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1}$，

则此函数满足行线性性、行反对称性和单位化条件，即它是行列式函数$\det(A)$.

命题：

行列式按任意一行或任意一列展开

1.按第j列展开：$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$

2.按第i行展开：$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

原因：

1. 上述定理+第j列换到第1列
2. 取转置

例：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21})$$

例：

计算A的行列式$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d & 1 \end{bmatrix}$

按第三行或第四列展开。$|A| = c$.

例：计算A的行列式$A=\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \end{bmatrix}$

按第一行展开。行列式为$(-1)^{n-1}$.

例:

计算$D_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$的行列式，其中

$$D_n=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$的行列式

按第一行展开得到

$$D_n=2(-1)^{1+1}D_{n-1}+(-1)(-1)^{2+1}(-1)D_{n-2}=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

(在12位置展开时，需对$n-1$阶矩阵再按第一列展开)

于是，$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$.

由于$D_1=2, D_2=3, D_n=n+1$.

例：

范德蒙矩阵的行列式

$$V_n(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

从第n行开始，每行减去前一行的 a_1倍，得到

$$V_n(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_3-a_1) & a_4^{n-3}(a_4-a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & a_4^{n-2}(a_4-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_3-a_1) & a_4^{n-3}(a_4-a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & a_4^{n-2}(a_4-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)V_{n-1}(a_2,\dots,a_n)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

如果a_i互不相同，范德蒙矩阵可逆。

范德蒙矩阵的应用：

考虑平面上的点和曲线。

有唯一一条直线（一次曲线）穿过平面上两点

问题：考虑平面上三个点（不妨设横坐标不同），是否只有一条二次曲线（$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$）穿过这三个点呢?

范德蒙矩阵的应用：

考虑平面上的点和曲线。

有唯一一条直线（一次曲线）穿过平面上两点

问题：考虑平面上三个点（不妨设横坐标不同），是否只有一条二次曲线（$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$）穿过这三个点呢?

设三个点为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), x_i$互不相同

假设二次曲线$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$通过这三个点，则

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

由于x_i互不相同，范德蒙矩阵$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$可逆，方程组有唯一解

一般的，可以找到唯一的$n-1$次曲线穿过平面上横坐标不同的n个点

(b) 逆矩阵公式和Cramer法则 (余子式展开的应用)

伴随矩阵的定义：

设$A \in M_n(\mathbb{R})$。令$C = \left(C_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, 其中$C_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式。

C^T称为A的**补矩阵**(或伴随矩阵)。

$$C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

例：$n = 3$

A的伴随矩阵$C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$

计算$AC^T =?$

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

余子式展开公式：$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = |A|$

考虑$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，对第二行采用余子式展开 $= a_{11}\ C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23}$

于是$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} = 0$

因此，如果$|A| \neq 0,\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$

命题：

$$AC^T = C^T A = (\det A)I_n = \begin{bmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{bmatrix}$$

证明：

只证$AC^T = |A|I_n$，$C^T A$类似。

$\left(AC^T\right)_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$.

如果$i = j$，则由余子式展开，$\left(AC^T\right)_{ii} = |A|$.

如果$i \neq j$，令A'为将A的第j行换为$[\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \dots, \boldsymbol{a}_{in}]$,其余行保持不变得到的矩阵。

由于A'的i, j两行相同，$|A'| = 0$.

根据余子式展开公式

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = |A'| = 0.$$

逆矩阵公式：

对可逆矩阵A，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$.

逆矩阵公式在理论上给出了矩阵求逆的公式。

在实际中由于计算量较大，一般不采用。

Cramer法则：

如果$\det A \neq 0$，则方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解$x_1 = \frac{\det\ _1}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det B_n}{\det}$

其中，B_j是把A的第j列换为$\boldsymbol{b}$得到的矩阵。

证明：方程的解$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A} C^T \boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

于是, $x_j = \frac{1}{\det}(b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}) = \frac{\det B_j}{\det A}$.

Cramer法则给出了当系数矩阵可逆时的方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的理论求解公式，

但Cramer法则计算量较大，实际求解中很少使用。

例:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

求$-2C_{11}+2C_{21}+3C_{31}+4C_{41}$

将A的第一列替换成$[-2,2,3,4]^T$，得到矩阵B，然后计算$|B|=1$

行列式的完全展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T + a_{12}\boldsymbol{e}_2^T + a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T + a_{22}\boldsymbol{e}_2^T + a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T + a_{32}\boldsymbol{e}_2^T + a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{22}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{32}\boldsymbol{e}_2^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{33}\boldsymbol{e}_3^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{23}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1^T \\ a_{32}\boldsymbol{e}_2^T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13}\boldsymbol{e}_3^T \\ a_{22}\boldsymbol{e}_2^T \\ a_{31}\boldsymbol{e}_1^T \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1^T\\ \boldsymbol{e}_2^T\\ \boldsymbol{e}_3^T\end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1^T\\ \boldsymbol{e}_3^T\\ \boldsymbol{e}_2^T\end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_2^T\\ \boldsymbol{e}_1^T\\ \boldsymbol{e}_3^T\end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_2^T\\ \boldsymbol{e}_3^T\\ \boldsymbol{e}_1^T\end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_3^T\\ \boldsymbol{e}_1^T\\ \boldsymbol{e}_2^T\end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_3^T\\ \boldsymbol{e}_2^T\\ \boldsymbol{e}_1^T\end{vmatrix}$$

置换矩阵

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix} +$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} + a_{12}\,a_{23}a_{31}\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix} +$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}$$

每行每列各取一个元素，一共有 $3! = 6$ 项，于是A的行列式可以写成下面的求和形式：

$|A| = \sum_{j_1 j_2 j_3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_3}^T \end{vmatrix}$，这里求和项$j_1 j_2 j_3$取遍$1, 2, 3$的所有排列。

方阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_3}^T \end{bmatrix}$为置换矩阵，行列式为$\pm 1$.

对一般的n，同理有n阶方阵A的行列式：

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n \text{为} 12\dots n \text{的排列}} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1}^T \\ \boldsymbol{e}_{j_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n}^T \end{vmatrix}$$

问题：如何确定置换矩阵的行列式?