Review

$$F(x) \triangleq \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x).$
- $\displaystyle\int_a^{b(\text{瑕点})} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^{c} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x).$
- 广义积分的Newton-Leibnitz公式、变量替换、分部积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow p>1; \qquad \int_0^{1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow p<1.$$

§2.广义积分判敛法

广义积分判敛与函数极限的判别相关,我们先回顾函数极限存在的Cauchy准则:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)\text{存在}$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{A}>0, s.t. \left|F(\mathrm{A}_2)-F(\mathrm{A}_1)\right|<\varepsilon, \forall \mathrm{A}_2>\mathrm{A}_1>\mathrm{A}.$$

$$\lim_{x\to b^-} F(x)\text{存在}$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, s.t.$$

$$\left|F(b-\delta_2)-F(b-\delta_1)\right|<\varepsilon, \forall 0<\delta_2<\delta_1<\delta.$$

•无穷限积分判敛

Thm.(Cauchy收敛原理) $\forall b>a, f\in R[a,b]$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是：

$$\forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{M}>a, s.t. \forall \mathrm{A}_2>\mathrm{A}_1>\mathrm{M}, 有\left|\int_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

Proof. 令$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x 收敛 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} F(t) 存在.$$

由函数极限存在的 Cauchy 收敛原理即证定理.□

Ex. $\forall b > a,\ f \in R[a,b], \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

Proof. $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\mathrm{d}x.\square$

Def. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛, 则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛; 此时也称 f在$[a,+\infty)$上广义绝对可积.

若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散, 则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$条件收敛.

Thm.(比较判敛法 ---一般形式) $f, g \in R[a,b], \forall b > a.$

若$\exists K > a, s.t. \left|f(x)\right| \le g(x), \forall x > K,$则

(1)$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛;

(2)$\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散.

Proof.(1)$\int_{A_1}^{A_2} \left|f(x)\right|\mathrm{d}x \le \int_{A_1}^{A_2} g(x)\mathrm{d}x.$

(2)若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛,则由(1)知$\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$收敛,矛盾.□

Question.比较判别法的几何意义?

Thm.(比较判敛法---极限形式)

设 f,g非负; $f,g\in R[a,b],\forall b>a;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C.$

(1)若$C\in(0,+\infty)$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$同敛散;

(2)若$C=0$,且$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(3)若$C=+\infty$,且$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

Remark. "f,g非负" 可以放宽为

$\exists \mathrm{M}>0$,使得 f,g 在$[\mathrm{M},+\infty)$上非负.

Proof. f,g非负, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C$.

(1)若$C>0$,则$\exists K$, $s.t.$ $\dfrac{C}{2}g(x)\le f(x)\le\dfrac{3C}{2}g(x), \forall x\ge K$.

由比较判敛法(一般形式), $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

(2)若$C=0$,则$\exists K$, $s.t.$ $f(x)\le g(x), \forall x\ge K$. 而$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛,由比较判敛法(一般形式)知$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

(3)若$C=+\infty$, 则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$. 若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛, 由(2)中结论知$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛, 与已知矛盾. □

清華大學

Ex.判别广义积分的敛散性

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ \int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{e^x+x},\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+2x+1}},\ \int_2^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{x(\ln x+9)}.$$

解:(1) $\dfrac{|\sin x|}{1+x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+x}\Big/\frac{1}{x^2}=0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$收敛, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{e^x+x}$收敛.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^3+2x+1}}\Big/\frac{1}{x^{5/4}}=0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{5/4}}$收敛, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+2x+1}}$收敛.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x(\ln x+9)}\Big/\frac{1}{x}=1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$发散, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\mathrm{d}x}{x(\ln x+9)}$发散.

Thm.(积分第二中值定理) 设$f\in R[a,b]$, g在$[a,b]$上单调,

则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 只证$f\in C[a,b]$, $g'\in R[a,b]$的情形. $F(t)\triangleq\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, 则

$F\in C^1[a,b]$, g单调, g'在$[a,b]$上不变号,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

由积分第一中值定理, $\exists\xi\in[a,b]$, $s.t.$

$$\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x = F(\xi)(g(b)-g(a)).$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(x)F(x)\Big|_a^b - F(\xi)(g(b)-g(a))$$

$$= g(b)F(b) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a)$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x. \square$$

Thm.(Dirichlet判别法) 设

(1)$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界,

(2)$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

Proof. $\forall \mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_1 > a$,由积分第二中值定理, $\exists \xi \in [\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2]$, $s.t.$

$$\int_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\mathrm{A}_1)\int_{\mathrm{A}_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(\mathrm{A}_2)\int_{\xi}^{\mathrm{A}_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

$F(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界, $\exists C$, $s.t.$ $|F(t)| < C, \forall t > a$.

因此$\forall x_2 > x_1 > a$, $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(x_2) - F(x_1)| \le 2C$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,因此$\forall \varepsilon > 0, \exists K > a$,当$x > K$时, $|g(x)| < \varepsilon$.

综上, $\mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_1 > K$时,

$$\left|\int_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le 2C\left(|g(\mathrm{A}_1)| + |g(\mathrm{A}_2)|\right) \le 4C\varepsilon. \square$$

Thm.(Abel判别法) 设

(1)$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, (2) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

Proof. $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界,从而收敛.设 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b.$

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{t} f(x)\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界. 由Dirichlet判别法, $\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-b)\mathrm{d}x$收敛. 因此

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)\big(g(x)-b\big)\mathrm{d}x+b\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛.}\square$$

Ex. $\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x-\ln x}\mathrm{d}x$的敛散性.

解: $\frac{1}{x-\ln x}$在$[1,+\infty)$上单调, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\ln x}=0.\ \forall A>1,$

$$\left|\int_1^A(-1)^{\lfloor x\rfloor}\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_1^{\lfloor A\rfloor}(-1)^{\lfloor x\rfloor}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\lfloor A\rfloor}^A(-1)^{\lfloor x\rfloor}\mathrm{d}x\right|\le 2.$$

由Dirichlet判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{[x]}}{x-\ln x}\mathrm{d}x$收敛.

又因 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x-\ln x}\mathrm{d}x$发散, 故$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{[x]}}{x-\ln x}\mathrm{d}x$条件收敛. □

Ex. $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$与$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\arctan x dx$的敛散性.

解: (1) $\frac{1}{\ln x}$在$[2,+\infty)$上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$; $\left|\int_2^A \sin x dx\right|\le 2$.

由Dirichlet判别法, $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$收敛. 同理, $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2\ln x}dx$ 收敛.

因而 $\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\ln x}\right|dx \ge \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2\ln x}dx-\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2\ln x}dx$

$\ge\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x}dx-\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2\ln x}dx=+\infty$. 故$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$条件收敛.

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$收敛, $\arctan x$在$[2,+\infty)$上单调有界, 由Able判别法, $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\arctan x dx$收敛. 同理, $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2\ln x}\arctan x dx$收敛.

又 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\ln x}\arctan x\Big/\frac{1}{x}=+\infty$, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{2\ln x}\arctan x dx$发散, 因而

$$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\ln x}\arctan x\right|dx \geq \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\ln x}\arctan x dx$$

$$=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2\ln x}\arctan x dx-\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2\ln x}\arctan x dx=+\infty$$

故 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\arctan x dx$条件收敛.□

Ex. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$的收敛性与绝对收敛性？

解: 当$\alpha>1$时, $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}, \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}, \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$收敛, 故

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{绝对收敛},\quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{绝对收敛}.$$

当$\alpha\le 0$时, 对任意正整数k,

$$\left|\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right|\ge\frac{\sqrt{2}\pi}{4},\quad \left|\int_{2k\pi-\pi/4}^{2k\pi+\pi/4}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right|\ge\frac{\sqrt{2}\pi}{4},$$

由Cauchy收敛原理, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$发散, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$发散.

当$0<\alpha\le 1$时, 由Dirichlet判别法,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{收敛},\ \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{收敛},\ \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\text{收敛};$$

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\mathrm{d}x\ge\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\mathrm{d}x=+\infty,$$

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|\mathrm{d}x\ge\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\mathrm{d}x=+\infty,$$

故$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$条件收敛, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$条件收敛.□

例. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$

解：由广义积分的Dirichlet判别法, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛. 于是

$$I=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\mathrm{d}t.$$

恒等式 $\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 两边在$[0,\pi]$上积分, 得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

令$g(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$,往证$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t=0$.

$$\lim_{t\to0} g(t)=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{2t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)}{2t\left(t-\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)\right)}=0.$$

故$t=0$是$g(t)$的可去间断点.由Riemann-Lebesgue引理,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t=0.\square$$

Remark. 比较判敛法只能用于判断广义积分的绝对收敛性, 不能用于判断广义积分的条件收敛性. 例如:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{\sqrt{x}},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

$\int_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 (Dirichlet判别法), 但 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

•瑕积分判敛

Thm.(Cauchy收敛原理)$\forall c\in(a,b),\ f\in R[a,c]$,则瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(b为唯一瑕点)收敛的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,b-a)$, $s.t.$

$$\left|\int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \forall 0<\delta_2<\delta_1<\delta.$$

Thm.b为 f 的瑕点,$\forall c\in(a,b),\ f\in R[a,c]$,则

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛}.$$

Def. b 为 f 的瑕点. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 也称 f 在 $[a,b]$ 上广义绝对收敛; 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

Thm. (比较判敛法) b 为 f 的瑕点, 且 $f \in R[a,c], \forall c \in (a,b)$. 若 $|f(x)| \le g(x), \forall x \in (b-\delta, b)$, 则

(1) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

(2) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

Thm.(比较判敛法-极限形式) 设 f, g 在 $(b-\delta, b)$ 中非负; $f, g \in R[a, d], \forall d \in (a, b)$; $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$.

(1)若 $C \in (0, +\infty)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2)若 $C = 0$, 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3)若 $C = +\infty$, 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

Thm. 设b为瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的唯一瑕点.

(1)(Dirichlet判别法)若$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$在$[a,b)$上有界, $g(x)$在$[a,b)$上单调且$\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$, 则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

(2)(Abel判别法) 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛, $g(x)$在$[a,b)$上单调有界, 则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

Ex. $\int_0^1 \sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x$的敛散性.

解: $x=0$是瑕点.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\cot x}}{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}}=1,$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛,

故$\int_0^1 \sqrt{\cot x}\,\mathrm{d}x$(绝对)收敛.□

Ex. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} \mathrm{d}x \, (p>0)$的敛散性.

解: $x=0$是瑕点.

$p \geq 1$时, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$发散, $\frac{-x^{-p}\ln x}{x^{-p}} = -\ln x \geq 1, \forall x \in (0, 1/e)$.

由比较判敛法, $\int_0^1 \frac{-\ln x}{x^p} \mathrm{d}x$发散, 从而$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} \mathrm{d}x$发散.

$0<p<1$时, 取$q \in (p, 1)$, 则$\int_0^1 \frac{1}{x^q} \mathrm{d}x$收敛; 而

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-p}\ln x}{x^{-q}} = -\lim_{x\to 0^+} x^{q-p} \ln x = 0.$$

由比较判敛法(极限形式), $\int_0^1 \frac{-\ln x}{x^p} \mathrm{d}x$收敛, $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} \mathrm{d}x$收敛.□

Ex. $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性.

P15例题

解: $x=0$ 是瑕点.

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_1^{1/\delta}\frac{1}{t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\sin t\,\mathrm{d}t, \text{收敛}.$$

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_1^{1/\delta}\left|\frac{1}{t}\sin t\right|\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left|\frac{1}{t}\sin t\right|\mathrm{d}t, \text{发散}.$$

故 $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.□

Remark. $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{t=1/x}{=\!=\!=} -\int_{+\infty}^1 \frac{1}{t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\sin t\,\mathrm{d}t.$

Ex. $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$的敛散性.

解: $x=0$是瑕点.

$\cos x$在$(0,1)$上单调有界,

由前一例题结论, $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$收敛.

因此,由Abel判别法, $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$收敛.□

Ex. $p>0$, 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$$\Leftrightarrow \int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x \text{ 同时收敛.}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^{p-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}=1,\ \int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow p-1<1,$$

故 $\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow p<2$.

当$0 < p \le 1$时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$发散, 从而$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} \mathrm{d}x$发散.

当$p > 1$时, $\forall q \in (1, p)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^q \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^q} \mathrm{d}x$收敛,

从而$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} \mathrm{d}x$收敛.

综上, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} \mathrm{d}x$收敛$\Leftrightarrow 1 < p < 2$.$\square$

Ex. Beta函数$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$的敛散性.

解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}}=1$, 故

$$\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\text{收敛}\Leftrightarrow\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}dx\text{收敛}\Leftrightarrow\alpha>0.$$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(1-x)^{\beta-1}}=1$, 故

$$\int_{1/2}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\text{收敛}\Leftrightarrow\int_{1/2}^1 (1-x)^{\beta-1}dx\text{收敛}\Leftrightarrow\beta>0.$$

综上, $B(\alpha,\beta)$收敛$\Leftrightarrow\alpha>0$且$\beta>0$.□

清华大学

Ex.Gamma函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$的敛散性.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}}=1$,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x\text{收敛}\Leftrightarrow\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x\text{收敛}\Leftrightarrow\alpha>0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{1/x^2}=0,$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\ \text{收敛}\Rightarrow\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x\ \text{收敛}.$$

综上,$\Gamma(\alpha)$收敛$\Leftrightarrow\alpha>0$.□

作业：习题6.2 No.4(3,4),5(3,15),8,9(4)

$$6.2\ \text{No.}5(3)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{p_0}\left|x-1\right|^{p_1}\left|x-2\right|^{p_2}}$$