Delta 方法

★ 依概率有界：

定义：称 X_n 依概率有界，若 $\forall \varepsilon > 0$，若存在常数 $B_\varepsilon > 0$ 及正整数 N_ε，使得对任意 $n > N_\varepsilon$，均有 $P(|X_n| \le B_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon$。

注：上式等价于 $P(|X_n| > B_\varepsilon) < \varepsilon$。

- 定理 1： $X_n \xrightarrow{D} X$ ，则 X_n 依概率有界。

证明（思考即可）：设 X 的分布函数为 $F_X(x)$，由分布函数的性质知，$\forall \varepsilon > 0$，

$\exists \eta_1$ 使得 $\forall x \le \eta_1$，有 $F_X(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$，

同时也 $\exists \eta_2$ 使得 $\forall x \ge \eta_2$，有 $F_X(x) > 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$，

故取 $\eta = \max(|\eta_1|, |\eta_2|)$，于是有

$$P(|X| \le \eta) = F_X(\eta) - F_X(-\eta - 0) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1-\varepsilon,$$

我们总是可取 $\pm\eta$ 为 $F_X(x)$ 的连续点，即 $\pm\eta \in C_{F_X}$，故

$$\lim_n P(|X_n| \le \eta) = \lim_n P(-\eta \le X_n \le \eta) = \lim_n [F_{X_n}(\eta) - F_{X_n}(-\eta - 0)]$$
$$= F_X(\eta) - F_X(-\eta) \ge 1-\varepsilon$$

定理 2：若 X_n 依概率有界，$Y_n \xrightarrow{P} 0$，则 $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$。（思考）

- 记号：

$$Y_n = o_p(X_n) \Leftrightarrow \frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{P} 0$$

$Y_n = O_p(X_n) \Leftrightarrow \dfrac{Y_n}{X_n}$ 依概率有界。

注：若 $\sqrt{n}(X_n-\theta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2)$，故由定理 1 知，$\sqrt{n}(X_n-\theta)$ 依概率有界，故 $\sqrt{n}(X_n-\theta) = O_p(1)$，从而有 $X_n-\theta = o_p(1)$，即 $X_n-\theta \xrightarrow{P} 0$。

定理 3：$Y_n = o_p(X_n)$，且 X_n 依概率有界，则 $Y_n \xrightarrow{P} 0$。

证明：$\forall 1>\varepsilon>0$，由于 X_n 依概率有界，故存在常数 $N_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$，使得当 $n > N_\varepsilon$ 时，有 $P(|X_n| > B_\varepsilon) < \varepsilon$。因为 $Y_n = o_p(X_n)$，故

$$
\begin{aligned}
&P(|Y_n| \geq \varepsilon) = P(|Y_n| \geq \varepsilon, |X_n| > B_\varepsilon) + P(|Y_n| \geq \varepsilon, |X_n| \leq B_\varepsilon) \\
&\leq P(|X_n| > B_\varepsilon) + P(|\frac{Y_n}{X_n}| \geq \frac{\varepsilon}{B_\varepsilon}) \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

定理 4（Delta Method）：随机变量序列 X_n 满足 $\sqrt{n}(X_n-\theta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2)$ θ, σ^2 均为有限常数，若 $g'(\theta)$ 存在且取值不为零，则

$$\sqrt{n}(g(X_n)-g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0,[g'(\theta)]^2\sigma^2)。$$

证明（严格证明）：Taylor 展开

$$g(X_n) = g(\theta) + g'(\theta)(X_n-\theta) + o_p(X_n-\theta)$$

$$\sqrt{n}(g(X_n)-g(\theta)) = g'(\theta)\sqrt{n}(X_n-\theta) + o_p(\sqrt{n}(X_n-\theta))$$

由于 $\sqrt{n}(X_n-\theta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2)$，所以 $\sqrt{n}(X_n-\theta)$ 依概率有界，从而 $o_p(\sqrt{n}(X_n-\theta)) \xrightarrow{P} 0$

故有 Slutsky 定理知，

$$\sqrt{n}(g(X_n)-g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0,[g'(\theta)]^2\sigma^2)$$

二阶 Delta 方法（一维的，高维也有类似结果）：

若 $g'(\theta) = 0$，如何处理？

定理 5：随机变量序列 X_n 满足 $\sqrt{n}(X_n-\theta)\xrightarrow{D}N(0,\sigma^2)$ θ,σ^2 均为有限常数，若 $g'(\theta)=0$ 且 $g''(\theta)$ 存在且不为零，则 $n(g(X_n)-g(\theta))\xrightarrow{D}\sigma^2\frac{g''(\theta)}{2}\chi^2(1)$。这里 $\chi^2(1)$ 为自由度为 1 的 χ^2 分布。