4.1 行列式函数

（a）行列式函数的定义

（b）行列式函数的性质

（c）一些初步的例子

（a）行列式函数的定义

例：$n = 2$时的行列式函数

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, 方程组$\begin{cases} ax + by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases}$有唯一解当且仅当$ad - bc \neq 0$. 这里$ad - bc$即为$A$的行列式。

$|ad - bc|$也是$\mathbb{R}^2$中两个向量$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$构成的平行四边形的面积

因此, $n = 2$, 行列式函数 = 有向面积

高维情形, 行列式函数应当理解为有向面积、有向体积的推广

$n = 2$时行列式函数的性质

令$S(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$为$\mathbb{R}^2$中两向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$构成的平行四边形的有向面积，

$S(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$满足：

$n=2$时行列式函数的性质

令$S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$为$\mathbb{R}^2$中两向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$构成的平行四边形的有向面积，

$S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$满足下面3条：

(1) 双线性性：$S(\boldsymbol{a}_1,\ell\boldsymbol{a}_2)=\ell S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$，$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_1)+S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_2)$,

$S(\ell\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\ell S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, $S(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a})=S(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a})+S(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a})$.

(2) 共线为零：$S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$,

(3) 归一化条件：$S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=1$,

实际上，行列式由上述三条刻画。

命题:

如果$\delta: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$满足:

(1) 双线性线性：$\delta([\boldsymbol{a}, \ell_1\boldsymbol{a}_1 + \ell_2\boldsymbol{a}_2]) = \ell_1\delta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1) + \ell_2\delta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_2)$,

$\delta([\ell_1\boldsymbol{a}_1 + \ell_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}]) = \ell_1\delta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}) + \ell_2\delta\left(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}\right)$.

(2) 共线为零 $\delta([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]) = 0, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$,

(3) 归一化条件 $\delta(I_2) = 1$,

则对$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \delta(A) = ad - bc$.

证明:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\left[a\boldsymbol{e}_1+c\boldsymbol{e}_{2,}b\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2\right].$$

$$\delta(A)=\delta(\left[a\boldsymbol{e}_1+c\boldsymbol{e}_{2,}b\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2\right])$$

$$=ab\delta([\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1])+ad\delta([\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2])+cb\delta([\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1])+cd\delta([\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2])$$

$$=ad-bc.$$

只需说明$\delta([\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1])=-\delta([\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2])=-1$

对于实矩阵，在双线性性条件下，以下两条等价

(2) $\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])=0,\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2$

(2’) $\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2])=-\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1]),\forall \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$

假设（2）成立，考虑$\delta([\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2])=0$。由双线性性展开得到

$\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1])+\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2])+\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1])+\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2])=0$

由于$\delta([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1])=\delta([\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2])=0$，得到(2’).

(2’)中取$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}$得到$\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])=-\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])$，于是$2\delta([\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}])=0$，得到(2)

教材定义行列式函数时采用(2’).

$n = 2$时行列式函数的性质

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\det A^T = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = \det A$$

于是行列式函数对矩阵的行有双线性性和反对称性

行列式函数的定义:

令$n \geq 1$. 如果函数δ：$M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$满足如下3条，则$\delta$称为**行列式函数**

(1) $\delta(I_n) = 1$

(2) $\delta\left(\left[\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots\right]\right) = -\delta\left(\left[\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots\right]\right)$

(3) δ对于矩阵的一列是线性的，

即$\delta\left(\left[\dots, \ell_1 \boldsymbol{a}_i + \ell_2 \boldsymbol{a}_i', \dots\right]\right) = \ell_1 \delta([\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots]) + \ell_2 \delta\left(\left[\dots, \boldsymbol{a}_i', \dots\right]\right)$

利用初等列变换的矩阵表达，我们有

$\delta\left(AP_{ij}\right) = -\delta(A)$

$\delta\left(AE_{ii}(k)\right) = k\delta(A)$

定理:

对每个自然数n, 行列式函数存在且唯一.

4.1节: 行列式函数的唯一性

$\Rightarrow$ 行列式的性质

4.2节: 行列式函数的存在性

$\Rightarrow$ 行列式的计算公式

（b）行列式函数的性质：

从性质(1)-(3)出发推导出行列式函数应该具有的性质，从而证明行列式函数的唯一性

关注初等(行)列变换对行列式的影响

命题:

如果A的两列相等，那么$\delta(A) = 0.$

证明：

假设$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$，$\delta(A) = \delta\left(AP_{ij}\right) = -\delta(A)$。于是$\delta(A) = 0.$

命题:

列的倍加变换不改变行列式。即$i \neq j, \delta(AE_{ji}(k)) = \delta(A)$.

证明:

$$\delta\left(AE_{ji}(k)\right) = \delta([\dots, k\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots])$$

根据线性性(3) $$= \underbrace{k\delta([\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots])}_{0} + \underbrace{\delta([\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots])}_{\delta(A)}$$

$$= \delta(A).$$

小结：初等列变换对行列式函数的影响

$\delta\left(AE_{ji}(k)\right) = \delta(A), j \neq i$

$\delta\left(AP_{ij}\right) = -\delta(A)$

$\delta\left(AE_{ii}(k)\right) = k\delta(A)$

取$A = I_n$，由性质(1) ($\delta(I_n) = 1$),

$\delta\left(E_{ji}(k)\right) = 1, j \neq i$

$\delta\left(P_{ij}\right) = -1$

$\delta\left(E_{ii}(k)\right) = k$

行列式函数在初等矩阵上的取值唯一决定

推论：$E \in \left\{E_{ji}(k), P_{ij}, E_{ii}(k)\right\}$，$\delta(AE) = \delta(A)\delta(E)$

命题：

A可逆当且仅当$\delta(A) \neq 0.$

于是A的行列式决定（determines）方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是否有唯一解

证明：

回顾矩阵可逆的判定定理：A可逆当且仅当A是有限个初等矩阵的乘积。

假设A可逆，则$A = E_1 \cdots E_k$，E_i是初等矩阵

$\delta(A) = \delta(E_1 \cdots E_k) = \delta(E_1 \cdots E_{k-1})\delta(E_k) = \cdots = \delta(E_1) \cdots \delta(E_k) \neq 0$

反设A不可逆，则A的列线性相关。因此有一列可以由其它列线性表出，

不妨设$\boldsymbol{a}_n = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}$。根据列线性性，

$\delta([\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_n])$
$= k_1\delta([\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1]) + \cdots + k_{n-1}\delta([\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1}])$
$= 0$

与$\delta(A) \neq 0$矛盾。

定理：

如果δ_1, δ_2为行列式函数（即满足性质(1),(2),(3)), 则$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \delta_1(A) = \delta_2(A)$.

证明：

如果A不可逆，则$\delta_1(A) = 0 = \delta_2(A)$.

如果A可逆，则$A = E_1 \cdots E_k$是有限个初等矩阵的乘积

$\delta_i(A) = \delta_i(E_1) \cdots \delta_i(E_k)$，$i = 1,2.$

由于行列式函数在初等矩阵上的取值唯一，$\delta_1(A) = \delta_2(A)$.

我们证明了行列式函数的唯一性，今后用$\det$或$|A|$记A的行列式。

行列式的若干性质：

(1) 如果E为初等矩阵，则$\det(AE) = \det(A)\det(E)$

(2) 如果$A = E_1 \cdots E_k$，其中E_i为初等矩阵，则$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_k)$

(3) $\det(A) \neq 0$当且仅当A可逆

(4) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,则$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(5) $\det(A^T) = \det(A)$

(1)-(3)已经证明过了。

(4) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,则 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

证明:

如果A, B中有一个矩阵不可逆，由于$rank(AB) \leq \min\big(rank(A), rank(B)\big)$

AB 也不可逆，等式两边同为零。

假设A, B均可逆，则$A = E_1 \cdots E_k, B = E'_1 \cdots E'_{k'}$为初等矩阵乘积。

$AB = E_1 \cdots E_k \cdot E'_1 \cdots E'_{k'}$.

$\det(AB) = \det(E_1) \cdots \det(E_k)\det(E'_1) \cdots \det(E'_{k'}) = \det(A)\det(B)$.

(4)的推论：

$\det(AB) = \det(BA)\,, \det\left(A^{-1}\right) = 1/(\det(A)).$

证明：

$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)\,.$

$\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det(I) = 1$,得到$\det\left(A^{-1}\right) = 1/(\det(A)).$

AB不一定等于BA，但是它们的行列式相同。

(5) $\det\left(A^T\right) = det(A)$

引理:

如果$E \in \left\{E_{ji}(k), P_{ij}, E_{ii}(k)\right\}$，则$\delta\left(E^T\right) = \delta(E)$

证明:

$P_{ij}^T = P_{ij}, E_{ii}(k)^T = E_{ii}(k), E_{ji}(k)^T = E_{ij}(k)$

(5)的证明:

如果A不可逆，则A^T也不可逆，此时$\det(A) = 0 = \det(A^T)$.

如果$A = E_1 \cdots E_k$可逆，E_i是初等矩阵.

那么$A^T = E_k^T \cdots E_1^T$

由于$\det(E_i^T) = \det(E_i)$，$\det(A^T) = \det(A)$.

(5)的推论：

行列式对**行**有如下性质：

(1) $\det$对于矩阵的一行是线性的

(2) $\det\left(P_{ij}A\right) = -\det(A)$

(3) $\det(E_{ii}(k)A) = k\det(A)$

(4) $\det\left(E_{ji}(k)A\right) = \det(A)\,, j \neq i$

(c) 一些初步的例子

例:

$n=1, a \in \mathbb{R} = M_1(\mathbb{R})$,

$\det(a) = a\det(1) = a$

$n=2, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

例:

设P为置换矩阵,则$\det(P) \in \{\pm 1\}$.

证明: $P = P_{i_1,j_1} \dots P_{i_k,j_k}$

例:

设Q为正交矩阵, $\det(Q) \in \{\pm 1\}$.

证明:

这是因为$(\det Q)^2 = \det Q^T \det Q = \det Q^T Q = \det(I_n) = 1$,

于是$\det Q \in \{\pm 1\}$.

例:

如果A是上三角或下三角矩阵，其行列式为对角线元素相乘。

证明:

如果对角线元素含零，则A不可逆，$\det(A) = 0$.

若对角线元素均不为零，则利用一系列消去矩阵$E_{ji}(k), j \neq i$可将A化为对角矩阵D,

D的对角线与A的对角线相同，且$\det(A) = \det(D)$.

因此，$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\big(E_{11}(a_{11})\big)\cdots\det\big(E_{nn}(a_{nn})\big) = a_{11}\cdots a_{nn}$.

例：

$X=\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$,其中$A,B$为方阵。则$\det(X)=\det(A)\det(B)$.

证明：

如果X不可逆，则$\det(X)=\det(A)\det(B)=0$（X可逆当且仅当A,B可逆）

假设A,B,X均可逆，则有初等矩阵$E_1,\ldots,E_k,E_1',\ldots,E_l'$使得

$A=E_1\cdots E_k,\ B=E_1'\cdots E_l',\ X=\begin{bmatrix} E_1 & \\ & I \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} E_k & \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \\ & E_1' \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I & \\ & E_l' \end{bmatrix}$

E_i与$\begin{bmatrix} E_i & \\ & I \end{bmatrix}$是同类型的初等矩阵，$E_i'$与$\begin{bmatrix} I & \\ & E_i' \end{bmatrix}$是同类型的初等矩阵，行列式相同。

因此，$\det(X)=\det\begin{bmatrix} E_1 & \\ & I \end{bmatrix}\cdots\det\begin{bmatrix} E_k & \\ & I \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I & \\ & E_1' \end{bmatrix}\cdots\det\begin{bmatrix} I & \\ & E_l' \end{bmatrix}=\det(A)\det(B)$.

例:

$X = \begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix}$,其中$A, B$为方阵. 则$\det X = \det(A)\det(B)$.

证明:

X可逆当且仅当A, B均可逆，不妨假设A, B, X均可逆，利用分块倍加矩阵，

$\det \begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} = \det(A)\det(B)$.

本节小结

1. 行列式函数的定义和性质

   得到行列式函数在初等矩阵上的取值

   得到初等行、列变换对矩阵行列式的影响

   证明了行列式函数的唯一性
2. 方阵可逆当且仅当行列式非零
3. 将(可逆)矩阵写成初等矩阵的乘积，即高斯消元，是计算行列式的有效方法。

下节通过具体公式给出行列式的存在性