1.4 初等行变换与线性方程组有解之判定

目标：

方程组对应的增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形矩阵

1. 倍加变换
2. 倍乘变换
3. 对换变换

判断方程组解集的情况

主要内容:

(a) 方程组的行变换与矩阵的初等行变换

(b) 行阶梯形矩阵

(c) 方程组是否有解的判定定理

(d) 行简化阶梯形矩阵

$$E_{32}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{32}(-3)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{21}(5)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{13}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

例：

消元，倍加

倍乘

回代

考虑方程组 $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & (1) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 & (2) \\ 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 24 & (3) \end{cases}$

第一步：用方程(1)中的含x_1项消去方程 (2)(3)中含x_1项

$(-4) \times (1) + (2)$，$(-8) \times (1) + (3)$得到

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & (1)' \\ \quad -3x_2 + (-6)x_3 = -9 & (2)' \\ \quad -7x_2 + (-17)x_3 = -24 & (3)' \end{cases}$$

第二步：用方程(2)′中的含x_2项消去方程 (3)′中含x_2项

.

$(-7/3) \times (2)' + (3)'$得到

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & (1)'' \\ \quad -3x_2 + (-6)x_3 = -9 & (2)'' \\ \quad\quad -3x_3 = -3 & (3)'' \end{cases}$$

第三步：对方程(3)″两侧同时乘以$-1/3$得到

$$x_3 = 1$$

第四步：将$x_3 = 1$代入方程(2)″得到

$$x_2 = 1.$$

第五步：将$x_2 = x_3 = 1$代入方程(1)″得到

$$x_1 = 1.$$

于是方程组的解为$[1，1，1]^T$

在高斯消元及后面的求解过程中，我们注意以下几点：

(1)求解过程不改变方程组的解。这是因为消元过程是可逆的。

(2)求解过程出现了对方程组的行的两种变换：

倍加变换：将方程组的某行的c倍加到另一行上

倍乘变换：将方程组的某行乘以非零常数k

(3)方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的未知元$\boldsymbol{x}$不参与消元过程的运算。

消元过程对系数矩阵A的行向量与向量$\boldsymbol{b}$同时做同一操作。

增广矩阵：

由第(3)条，我们用增广矩阵记录下整个计算过程，对增广矩阵进行行变换。矩阵$\left[A \mid \boldsymbol{b}\right]$称为方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的增广矩阵。

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right]$$

增广矩阵：

利用增广矩阵，高斯消元的过程可写为：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第1行乘以}-4\text{加到第2行}]{E_{21}(-4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第1行乘以}-8\text{加到第3行}]{E_{31}(-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -7 & -17 & -24 \end{array}\right]$$

待严格化

$$\xrightarrow[\text{第2行乘以}-7/3\text{加到第3行}]{E_{32}(-7/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

唯一解

例:

考虑方程组

$$\begin{cases} \quad\quad\quad 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

对换1，2行得到

$$\xrightarrow{P_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

对换矩阵的操作

第1行的−2倍加到第3行

无解 $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

第三个方程 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ 无解。

因此，原方程组无解。

矩阵的初等行变换：

(1) 对换变换：互换矩阵的两行

(2) 倍乘变换：某一行乘以非零常数k

(3) 倍加变换：把某一行的k倍加到另一行上

类似的，我们定义矩阵的初等列变换：

(1) 对换变换：互换矩阵的两列

(2) 倍乘变换：某一列乘以非零常数k

(3) 倍加变换：把某一列的k倍加到另一列上

初等列变换在求解方程问题中不出现，但是在矩阵理论中有重要作用

例:

考虑方程组

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}$$

齐次方程组

方程组有解： $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^T$ 总是齐次方程组的解。

$$[A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{P_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

无穷多解

任取x_3的一组值，可以解出相应的x_1, x_2。

$$x_1 = x_2 - x_3 = -\frac{x_3}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_3}{2}.$$

称x_3为自由变量,x_1, x_2为主变量

实际上，自由变量与主变量并不唯一。

例如，我们也可取x_2为自由变量， x_1, x_3为主变量。

(b) 行阶梯形矩阵

定义:

(1) **非零行**(元素不全为0的行)在**零行**(元素全为零的行)之上

(2) 非零行左数第一个非零元(称为**主元**)的列指标随行指标的增加而严格增加

$$\begin{bmatrix} \bullet * \cdots *** \cdots *** \cdots * \cdots \cdots \cdots ** \cdots * \\ \quad\quad \bullet * \cdots *** \cdots * \cdots \cdots \cdots ** \cdots * \\ \quad\quad\quad\quad \bullet * \cdots * \cdots \cdots \cdots ** \cdots * \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \;\; \vdots \quad\; * \\ \text{主元} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ** \cdots * \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \bullet * \cdots * \\ \end{bmatrix}$$

主元所在的列称为**主元列**，主元列以外的列称为**自由列**;
阶梯形矩阵的**阶梯数**=非零行个数=主元个数

定理：

任意矩阵可以通过对换行变换和倍加行变换化为（行）阶梯形矩阵（row echelon form).

$A \rightsquigarrow ref(A)$

不是一个好的记号，我们稍后引入 $rref(A)$来替换它

注意以下两条：

(1) $A \rightsquigarrow ref(A)$的过程不唯一. 因此, $A \rightsquigarrow ref(A)$不是一个映射. 但是, $ref(A)$的**阶梯数**(即主元个数)是唯一确定的.

(2) $ref(A)$的**阶梯数**小于等于A的行数，小于等于A的列数. 因此, 如果A为$m \times n$阶矩阵, $ref(A)$的**阶梯数**小于等于 $\min(m, n)$

例：$ref(A)$不唯一

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&9&7\end{bmatrix}\xrightarrow{P_{12}}\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\8&9&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1/4)}\begin{bmatrix}4&5&6\\0&3/4&3/2\\8&9&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)}\begin{bmatrix}4&5&6\\0&3/4&3/2\\0&-1&-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(4/3)}\begin{bmatrix}4&5&6\\0&3/4&3/2\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&9&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-4)}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\8&9&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-8)}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-7&-17\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-7/3)}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

注意以下两条：

所得到的阶梯形矩阵形状相同，具体数可能不同

主元可能会发生变换$1\times(-3)\times(-3)=9$，$4\times3/4\times(-3)=-9$. 主元乘积的绝对值不变。

阶梯形矩阵小结：

任意矩阵可以通过**对换行变换**和**倍加行变换**化为阶梯形矩阵.

$ref(A)$不唯一．因此，$A \rightsquigarrow ref(A)$不是一个映射.

$ref(A)$的**阶梯数**是唯一确定的.

$ref(A)$的阶梯数小于等于A的行数，小于等于A的列数.

（阶梯数=非零行个数=主元列个数）

对于主元我们关心：

(1) 主元的个数

(2) 主元所在的列(主元列)

(3) 主元的乘积(见第四章行列式)

(c) **判定定理**：

首先注意 $ref(A)$ 的阶梯数小于等于 $ref([A\,|\,\boldsymbol{b}])$的阶梯数

(1)方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$**有解**当且仅当

$ref(A)$ 的阶梯数**等于** $ref([A\,|\,\boldsymbol{b}])$的阶梯数

例：

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \;-\; x_2 \;+\; x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left[A\,|\,\boldsymbol{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$ref\left(\left[A\,|\,\boldsymbol{b}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

无解

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \;-\; x_2 \;+\; x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[A\,|\,\boldsymbol{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$ref\left(\left[A\,|\,\boldsymbol{b}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

有解

判定定理：

(2)假设 $ref(A)$ 的阶梯数**等于** $ref([A\mid \boldsymbol{b}])$的阶梯数（即方程一定有解）

未知数个数 = A的列数

1. 如果阶梯数和未知数个数**相等**，则方程组有**唯一解**.
2. 如果阶梯数**小于**未知数个数，则方程组有**无穷多组解**.

例：

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 24 \end{cases}$$

$$[A\mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right]$$

$$ref([A\mid \boldsymbol{b}]) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

有唯一解

$$\begin{cases} \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A\mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$ref([A\mid \boldsymbol{b}]) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

无穷多解

判定定理小结:

(1)方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解当且仅当

$ref(A)$ 的阶梯数**等于** $ref([A\mid\boldsymbol{b}])$的阶梯数

是否有解的判定，比较系数矩阵和增广矩阵化为阶梯形矩阵后的主元个数

(2)假设 $ref(A)$ 的阶梯数等于 $ref([A\mid\boldsymbol{b}])$的阶梯数.

如果阶梯数和未知数个数**相等**，则方程组有**唯一解**.

如果阶梯数**小于**未知数个数，则方程组有**无穷多组解**.

有唯一解或无穷解的判定
进一步比较主元个数和A的列数

推论：

一个齐次线性方程组(即 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$)（一定有解)

只有零解当且仅当阶梯数和未知数个数相等 ⇐ 有唯一解

有非零解当且仅当阶梯数小于未知数个数. ⇐ 有无穷多解

实际上$A\boldsymbol{x_0}=\mathbf{0} \implies A(c\boldsymbol{x_0})=\mathbf{0}\ \forall c\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}1x_1+2x_2+3x_3=0\\4x_1+5x_2+6x_3=0\\8x_1+9x_2+7x_3=0\end{cases}$$

$$[A\,|\,\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\4&5&6&0\\8&9&7&0\end{array}\right]$$

$$ref([A\,|\,\boldsymbol{b}])=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-3&-6&0\\0&0&-3&0\end{array}\right]$$

有唯一解

$$\begin{cases}\qquad\quad 2x_2-x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\2x_1-2x_2+2x_3=0\end{cases}$$

$$[A\,|\,\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&-1&0\\1&-1&1&0\\2&-2&2&0\end{array}\right]$$

$$ref([A\,|\,\boldsymbol{b}])=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

无穷多解

上面的推论有如下**重要推论**：

设A为$m \times n$阶矩阵且$m < n$，则方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$必有非零解.

矮胖形矩阵

原因非常简单：这是因为$ref(A)$的阶梯数小于等于$\min(m, n)$，而由于$m < n$, 阶梯数严格小于未知元个数n.

在第二章线性空间理论的建立上，这一事实有重要应用.

推论（重要）：

设$n > m$. 线性空间$\mathbb{R}^m$中任意n个向量线性相关.

证明：设$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$为$\mathbb{R}^m$中$n$个向量，

考虑矩阵$A = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$（矮胖形矩阵）

因此，方程$A\boldsymbol{x} = 0$有非零解$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

于是，$\boldsymbol{a}_1 c_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_n c_n = \boldsymbol{0}$

由于$c_1, \dots c_n$不全为零, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$线性相关.

这回答了我们在第0章提出的问题

(d) 行简化阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & * & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

行**简化**阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的定义：

(1) 非零行在零行之上

(2) 非零行左数第一个非零元为1，其列指标随行指标的增加而严格增加

(3) 主元所在列的其它元素为0.

$$\begin{array}{c}
p\ \ f\ \ f\ \ f\ \ p\ \ f\ \ f\ \ f\ \ p\ \ f\ \ f\ \ f \qquad\qquad p\ \ f\ \ f\ \ f \\
\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

行简化阶梯形矩阵

定理：

任意矩阵A可以通过**对换行变换**, **倍加行变换**和**倍乘行变换**化为行简化阶梯形矩阵$rref(A)$. reduced row echelon form

$rref(A)$由A**唯一决定**. $A \longmapsto rref(A)$

例：$rref(A)$由A决定

$$\begin{bmatrix}1&2&3&6\\4&5&6&15\\8&9&7&24\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&6\\0&-3&-6&-9\\0&0&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{33}(-1/3),E_{22}(-1/3)}\begin{bmatrix}1&2&3&6\\0&1&2&3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-2),E_{13}(-3)}\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-2)}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&6\\4&5&6&15\\8&9&7&24\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{12}}\begin{bmatrix}4&5&6&15\\1&2&3&6\\8&9&7&24\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}4&5&6&15\\0&3/4&3/2&9/4\\0&0&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{11}(1/4),E_{22}(4/3),E_{33}(-3)}\begin{bmatrix}1&5/4&6/4&15/4\\0&1&2&3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-2),E_{13}(-3/2)}\begin{bmatrix}1&5/4&0&9/4\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-5/4)}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

本节总结:

1. 矩阵A的阶梯形不唯一，但行简化阶梯形$rref(A)$唯一.

2. 将方程系数矩阵和增广矩阵化为阶梯形矩阵可用来判定方程是否有解、有唯一解或有无穷多解. (判定定理)

3.行简化阶梯形矩阵有两个作用:

a. 方便求解方程

b. 化为行简化阶梯形矩阵的过程可用来求矩阵的逆. 重要

1.5 线性映射的运算

回顾：$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为线性映射，如果$\mathcal{A}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{w}), \mathcal{A}(c\boldsymbol{v}) = c\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$

$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

线性映射$\mathcal{A}$ ⟷ 矩阵$A = [\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

线性映射的加法 ⟷ 矩阵的加法

线性映射的数乘 ⟷ 矩阵的数乘

线性映射的复合 ⟷ 矩阵的乘法 ⟸ 重点

线性映射的加法和数乘：

设$\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$为线性映射，$c\in\mathbb{R}$,定义映射

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ \ \boldsymbol{x}\mapsto\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^m.$$

$$c\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\boldsymbol{x}\mapsto(c\mathcal{A})(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(c\boldsymbol{x})=c\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^m.$$

命题：

$\mathcal{A}+\mathcal{B}$与$c\mathcal{A}$均为线性映射。　　直接验证

零映射：

$$O:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,O(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

线性映射的加法和数乘运算满足8条性质

设$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$为线性映射，则

（1）加法结合律：$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$

（2）加法交换律：$\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$

（3）零映射：$\mathcal{O}+\mathcal{A}=\mathcal{A}$

（4）负映射：有线性映射$-\mathcal{A}=(-1)\mathcal{A}$满足$\mathcal{A}+(-\mathcal{A})=\mathcal{O}$

（5）单位数：$1\in\mathbb{R}$，$1\mathcal{A}=\mathcal{A}$

（6）数乘结合律：$(c_1c_2)\mathcal{A}=c_1(c_2\mathcal{A}),c_1,c_2\in\mathbb{R}$

（7）数乘对数的分配律：$(c_1+c_2)\mathcal{A}=c_1\mathcal{A}+c_2\mathcal{A}$，$c_1,c_2\in\mathbb{R}$

(8）数乘对加法的分配律：$c(\mathcal{A}+\mathcal{B})=c\mathcal{A}+c\mathcal{B}$

矩阵的加法和数乘

设$\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$为线性映射，

$\mathcal{A}$对应$m\times n$阶矩阵 $A=[\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1),\ldots,\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)]=[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$.

$\mathcal{B}$对应$m\times n$阶矩阵 $B=[\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1),\ldots,\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)]=[\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n]$.

问题：线性映射$\mathcal{A}+\mathcal{B}$对应到哪个矩阵?

线性映射$c\mathcal{A}$对应到哪个矩阵?

矩阵的加法和数乘

$\mathcal{A}+\mathcal{B}$对应的矩阵为

$$[(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{e}_1),\dots,(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{e}_n)]=[\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)+\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1),\dots,\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)+\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)]$$

$$=[\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n]$$

$c\mathcal{A}$对应的矩阵为

$$[(c\mathcal{A})(\boldsymbol{e}_1),\dots,(c\mathcal{A})(\boldsymbol{e}_n)]=[c\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1),\dots,c\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)]$$

$$=[c\boldsymbol{a}_1,\dots c\boldsymbol{a}_n].$$

π

矩阵的加法和数乘的定义：

设$A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,定义

$$A + B = (a_{ij}+b_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$$

$\mathcal{A} + \mathcal{B}$的矩阵表出

设$A = \left(a_{ij}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$定义

$$cA = (ca_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$$

$c\mathcal{A}$的矩阵表出

零矩阵：

$O_{m\times n}$为元素均为零的$m \times n$阶矩阵，它对应到零映射

例:

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$

$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}, 2A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

2. $n=1, A, B\in M_{m\times 1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^m$

$A+B, cA$为$\mathbb{R}^m$中向量的加法和数乘

矩阵的加法和数乘运算满足8条性质

设$A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，则

（1）加法结合律：$(A+B)+C = A+(B+C)$。

（2）加法交换律：$A+B = B+A$

（3）零矩阵：$O_{m\times n} + A = A$

（4）负矩阵：有矩阵$-A = (-1)A$满足$A + (-A) = O_{m\times n}$

（5）单位数：$1 \in \mathbb{R}$，$1A = A$。

（6）数乘结合律：$(c_1 c_2)A = c_1(c_2 A), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

（7）数乘对数的分配律：$(c_1 + c_2)A = c_1 A + c_2 A$，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(8) 数乘对加法的分配律：$c(A+B) = cA + cB$.

定义矩阵的减法$A - B = A + (-B)$.

加法与数乘小结:

1. $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$所有线性映射构成的集合在加法和数乘运算下满足与$\mathbb{R}^n$中向量运算类似的8条性质

2. $m \times n$阶矩阵的集合在加法和数乘运算下满足与$\mathbb{R}^n$中向量运算类似的8条性质

3. 与$\mathbb{R}^n$不同, 线性映射空间和矩阵空间没有内积结构

线性映射的复合:

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathcal{B}: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射，定义

$\mathcal{B}$的陪域等于$\mathcal{A}$的定义域

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\boldsymbol{x})\big).$$

命题:

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$是线性映射.

直接验证

矩阵的乘积:

线性映射$\mathcal{A},\mathcal{B}$的表出矩阵分别为A,B.

$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$的表出矩阵是哪个矩阵?

$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$的表出矩阵为

$$C=\left[\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1),\dots,\mathcal{A}\circ\mathcal{B}\left(\boldsymbol{e}_p\right)\right].$$

$$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}\left(\boldsymbol{e}_j\right)=\mathcal{A}\left(\mathcal{B}\left(\boldsymbol{e}_j\right)\right)=\mathcal{A}\left(\boldsymbol{b}_j\right)=A\boldsymbol{b}_j.$$

$$\boxed{\mathcal{A}(x)=Ax}$$

因此，$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$的表出矩阵为$C=\left[A\boldsymbol{b}_1,\dots,A\boldsymbol{b}_p\right]$.

矩阵乘法的定义:

B的行数等于A的列数 ⟺ $\mathcal{B}$的陪域等于$\mathcal{A}$的定义域

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B = \left(b_{jk}\right) = \left[\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_p\right] \in M_{n\times p}(\mathbb{R}),\text{定义}$$

$$\boxed{AB = \left[A\boldsymbol{b}_1, \dots, A\boldsymbol{b}_p\right] \in M_{m\times p}(\mathbb{R})}$$