回顾上节内容：

1. 如何判断矩阵可逆

2. 高斯-若尔当消元求矩阵的逆

例：A, B为n阶方阵，$AB = I_n$, 则A, B均可逆

1.7 矩阵的相抵标准型

主要内容：

（a）等价关系简介

（b）矩阵的相抵标准型

（a）等价关系简介：

如果非空集合S的元素之间定义了一种二元关系“~”，满足：

1. 反身性：对任意$a \in S$，$a \sim a$；

2. 对称性：如果$a \sim b$，那么 $b \sim a$；

3. 传递性：如果$a \sim b$， $b \sim c$, 那么$a \sim c$，

则称此关系为S上的**等价关系**

$a \in S$, 与a等价的元素的集合称为a的**等价类**, 用$[a]$记这个S的子集

同一等价类中形式最简单的元素称为这一等价关系中的**标准形。**

例：

$S = M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$A, B \in S$，如果有可逆矩阵$P$使得 $PA = B$

有限个初等矩阵的乘积

则A, B称为**左相抵**

等价地说，A可以经过一系列初等行变换化成矩阵B.

左相抵是S上的一个等价关系

左相抵标准形:
矩阵A在左相抵下最简单的形式是什么呢?
等价地问, A在有限步初等行变换下最简单的形式是什么?

$$rref(A)=\begin{bmatrix}
1 & * & * & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & *
\end{bmatrix}$$

因此，$rref(A)$是A的（等价类的）**左相抵标准形**.

矩阵相抵：

$S = M_{m\times n}(\mathbb{R}), A, B \in S$称为**相抵**, 如果有可逆矩阵$P, Q$使得$PAQ = B$.

$m \times m$ $n \times n$

等价地说，A可以经过一系列初等行、列变换化成矩阵B。

两矩阵相抵是S上的一个等价关系。

相抵标准形：

从左相抵标准形出发

列的倍加变换消为0

$$
\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & *
\end{bmatrix}
$$

相抵标准形：

列的倍加变换消为0

$$
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \\
 & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & & * & \cdots & * \\
 & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & *
\end{bmatrix}
$$

相抵标准形：

列的对换变换

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

列的对换变换

相抵标准形：

I_r $\qquad r = A$的主元个数

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \\ \end{bmatrix}$$

定理：

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$存在可逆矩阵$P$，$Q$使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$$

$r = A$的主元个数

$\begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$称为$A$的（等价类的）**相抵标准形**

1.8 分块矩阵

处理有特点的大矩阵运算时可以对矩阵进行**分块**运算

什么是矩阵分块运算：
将矩阵用纵线和横线分成若干小矩阵，每个小矩阵称为原矩阵的**子块**，分为子块的矩阵叫**分块矩阵**

注意：
分块矩阵运算**不是**一种新的矩阵运算，而是用于简化原有的矩阵运算

主要内容：

(a) 矩阵分块运算的三个原则

(b) 矩阵分块运算示例

(c) Schur补与2×2分块矩阵求逆

(a) 矩阵分块的三个原则：

例：

令$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$M_1=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 3\\0 & 1 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}I_2 & A\\O & I_2\end{bmatrix}$$

$M_1+M_2=?$

$$M_2=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 6\\0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A & O\\O & 2A\end{bmatrix}$$

体现原矩阵特点

子块像**元素**一样运算

$$M_1+M_2=\begin{bmatrix}I_2 & A\\O & I_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A & O\\O & 2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_2+A & A\\O & I_2+2A\end{bmatrix}$$

根据问题需要分块

矩阵分块的三个原则：

(1) 根据问题需要分块；

(2) 体现原矩阵的特点；

(3) 能够将子块看作**元素**进行运算.

注意事项: 合理分块, 使得分块后的矩阵满足运算的规则.

特别注意矩阵乘法的顺序，矩阵乘法**没有**交换律.

(b) 矩阵分块运算示例

例:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&4\\0&0&2&5\\\hline 0&0&0&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}D&\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{0}^T&2\end{bmatrix}\qquad A^T=\ ?$$

$$A^T=\begin{bmatrix}D^T&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{a}^T&2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{a}^T&2\end{bmatrix}$$

例:

设A, B均为2×2分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

且$A_{ij}B_{jk}$在矩阵乘法下有意义，则

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

例: $M = \begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix}$, $M^{-1} = ?$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

例：$M=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}, A, B$可逆。 $M^{-1}=?$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

例： $M=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$, A,B可逆。 $M^{-1}=?$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

例：AB的分块乘法

$$A=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\end{bmatrix}=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]=(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}\qquad B=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{b}}_1^T\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{b}}_n^T\end{bmatrix}=[\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_p]=(b_{jk})_{1\le j\le n,1\le k\le p}$$

1×1 $\quad m\times 1$ $\quad 1\times n$ $\quad m\times n$ $\quad 1\times 1$ $\quad n\times 1$ $\quad 1\times p$ $\quad n\times p$

$$AB=[A\boldsymbol{b}_1,\dots,A\boldsymbol{b}_p]$$

$$AB=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^T B\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T B\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{b}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{b}_p\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{b}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{b}_p\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{b}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{b}_p\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}\sum_i a_{1i}\tilde{\boldsymbol{b}}_i^T\\ \vdots\\ \sum_i a_{mi}\tilde{\boldsymbol{b}}_i^T\end{bmatrix}$$

$$AB=\left[\sum_i \boldsymbol{a}_i b_{i1},\dots,\sum_i \boldsymbol{a}_i b_{ip}\right]$$

$$AB=\left(\sum_l a_{il}b_{lk}\right)_{1\le i\le m,1\le k\le p}$$

$$AB=\boldsymbol{a}_1\tilde{\boldsymbol{b}}_1^T+\cdots+\boldsymbol{a}_n\tilde{\boldsymbol{b}}_n^T$$

例：分块初等行变换与分块初等列变换

$$\begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$= E_{12}(B)\begin{bmatrix} Row_1 \\ Row_2 \\ Row_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Row_1 + BRow_2 \\ Row_2 \\ Row_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 2BA & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

例：分块初等行变换与分块初等列变换

$$\begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$= [Col_1, Col_2, Col_3] \begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

$$= [Col_1 A, Col_2(2A), Col_3 C] = \begin{bmatrix} A & 2BA & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

例：分块初等行变换与分块初等列变换

$$\begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Row_1 \\ Row_2 \\ Row_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ARow_1 \\ 2ARow_2 \\ CRow_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

例：分块初等行变换与分块初等列变换

$$\begin{bmatrix} A & & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & B & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

$$= [Col_1, Col_2, Col_3]E_{12}(B)$$

$$= [Col_1, Col_1B + Col_2, Col_3] = \begin{bmatrix} A & AB & \\ & 2A & \\ & & C \end{bmatrix}$$

命题：

对角线元素均非零的上三角矩阵可逆，且它的逆是上三角矩阵；
对角线元素均非零的下三角矩阵可逆，且它的逆是下三角矩阵。

证明：以下三角矩阵L为例：将分块为

$$L=\begin{bmatrix} a_{11} & \\ \boldsymbol{a} & L_{n-1}\end{bmatrix}$$

$a_{11}\neq 0, \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^{n-1}$,$L_{n-1}$为$n-1$阶对角线均非零的下三角矩阵。

利用高斯－若尔当消元求L的逆：

$$\left[\begin{bmatrix} a_{11} & \\ \boldsymbol{a} & L_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & I_{n-1}\end{bmatrix}\right]\xrightarrow{E_{21}\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{a_{11}}\right)}\left[\begin{bmatrix} a_{11} & \\ \boldsymbol{0} & L_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ -\dfrac{\boldsymbol{a}}{a_{11}} & I_{n-1}\end{bmatrix}\right]$$

由归纳假设L_{n-1}可逆，且L_{n-1}^{-1}为对角线均非零的下三角矩阵

$$\left[\begin{bmatrix} a_{11} & \\ \boldsymbol{0} & L_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ -\dfrac{\boldsymbol{a}}{a_{11}} & I_{n-1}\end{bmatrix}\right]\xrightarrow{\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \\ & L_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}}\left[\begin{bmatrix} 1 & \\ \boldsymbol{0} & I_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \\ -\dfrac{L_{n-1}^{-1}\boldsymbol{a}}{a_{11}} & L_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}\right]$$

因此，$L^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \\ -\dfrac{L_{n-1}^{-1}\boldsymbol{a}}{a_{11}} & L_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}$

为下三角矩阵且对角元素均非零。

(c) Schur补与2×2分块矩阵求逆

问题：分块2×2的矩阵何时可逆？

命题：

考虑分块矩阵$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中$A_{11}$与$A_{22}$为方阵。

若A_{11}与$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$可逆，则矩阵$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$可逆。且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \\ & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

称$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$为$A_{11}$关于$A$的**舒尔（Schur）补**。

注意：这不是可逆的等价条件

证明: $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

由于A_{11}可逆,

$$\begin{bmatrix} I & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

因此,

$$\begin{bmatrix} I & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \\ & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

类似的推理，对于上述分块矩阵$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，

若A_{22}与$A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$可逆，则矩阵$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$可逆，且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I & \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(A_{11}-A_{21}A_{22}^{-1}A_{12}\right)^{-1} & \\ & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ & I \end{bmatrix}$$

称$A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$为$A_{22}$关于$A$的**Schur补**。

本节小结:

1. 矩阵分块运算的三个原则

   根据问题需要分块；体现原矩阵的特点；能够将子块看作元素进行运算.

   注意事项: 合理分块, 使得分块后的矩阵满足运算的规则.

   注意矩阵乘法没有交换律.

2. 矩阵分块运算技巧性比较强

   Schur补与2×2分块矩阵求逆

1.9 方阵的LU分解

主要内容：

(a) 什么是LU分解?

(b) LU分解的作用

(c) 什么矩阵有LU分解?

两个版本的判定定理：实操版和理论版

(a) LU分解的定义：

A为n阶方阵。将A写成 $A = LU$ 其中，

L为对角线元素均为1的n阶下三角矩阵， ⟵ 单位下三角矩阵

U为n阶上三角矩阵。

分解$A = LU$称为A的LU分解

(b) LU分解的作用:

可快速求解方程

n阶上三角方阵$\begin{bmatrix} a_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_n \end{bmatrix}$ 单位下三角矩阵$\begin{bmatrix} 1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \longrightarrow LU\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \longrightarrow \begin{cases} L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b} \\ U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \end{cases}$$

假设我们求解系数矩阵为A的一系列方程，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\dots,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_k$，我们只需对$A$做一次$LU$分解，利用$L$型和$U$型方程求解，而不需要对每个方程进行高斯消元求解。计算量大为降低（大致从n^3级降为n^2级）