1.3 矩阵的定义（★）

主要内容：

（a）矩阵的定义（√）

（b）矩阵在列向量上的作用

（c）线性映射与矩阵的关系

（d）矩阵在列向量上的作用举例

定义：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

A $\qquad$ $\boldsymbol{x}$

线性方程组问题的左侧

线性方程组的矩阵写法：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m
$$

线性方程组写成为 $\boxed{A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.}$

例:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_j=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \in \mathbb{R}^n, \quad A\boldsymbol{e}_j=?$$

$$A\boldsymbol{e}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m,\text{取出}A\text{的第}j\text{列}$$

一些特殊的矩阵：

零矩阵$O_{m\times n}$是系数全为零的$m\times n$阶矩阵$O_{m\times n}\boldsymbol{x}=?$

$O_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$I_n=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}, I_n\boldsymbol{x}=?$

$I_n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}.$

$I=I_n=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，$n$阶**恒等矩阵**或**单位矩阵**

对角矩阵:

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ D(a_1, \dots, a_n)\boldsymbol{x} = ?$$

$$D(a_1, \dots, a_n)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix}$$

上(下)三角阵:

$$n\text{阶上三角方阵}U=\begin{bmatrix} a_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

$$n\text{阶下三角方阵}L=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & a_n \end{bmatrix}$$

Upper triangular

Lower triangular

例: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=?$, $\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+2x_2+2x_3 \\ 2x_2+x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1+2x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix}$$

上(下)三角阵:

可快速求解方程

$$n\text{阶上三角方阵}U=\begin{bmatrix} a_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

Upper triangular

$$n\text{阶下三角方阵}L=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & a_n \end{bmatrix}$$

Lower triangular

例如: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

例:

设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$

$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$?

$A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x}$?

矩阵在列向量上的作用给出线性映射:

从A出发，定义映射$\mathcal{A}$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

则$\mathcal{A}$为线性映射!

线性映射$\mathcal{A}$的定义域、陪域和值域分别是什么?

定义域=$\mathbb{R}^n$

陪域=$\mathbb{R}^m$

值域=$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

单选题 1分

设置

令$\boldsymbol{v}_0 \neq \mathbf{0}$,映射$\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0$是否是线性映射?

A 是

B 不是

提交

从线性映射的视角看线性方程组问题：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为 A 对应的线性映射

向量$\boldsymbol{b}$的原像集为$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{b}) = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{b}\right\}$

线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{b})$非空

线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解集$= \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{b})$

例：矩阵分块乘法与看待方程组问题的行、列视角

矩阵按列分块:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \ \ldots, \boldsymbol{a}_n], \quad \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m$$

想象为$1 \times n$矩阵

列的分块看法：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_x + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n]$$

视为$1 \times n$矩阵

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$n \times 1$矩阵

$$A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n x_n.$$

矩阵按行分块:

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12} \cdots \cdots a_{1n}} \\ \boxed{a_{21}\ a_{22} \cdots \cdots a_{2n}} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \boxed{a_{m1}\, a_{m2} \cdots \cdots a_{mn}} \end{bmatrix}$$

令$\tilde{\boldsymbol{a}}_i=\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^n$，记$\tilde{\boldsymbol{a}}_i{}^T=[a_{i1},\dots,a_{in}]$，

$$A=\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix}$$

$\tilde{\boldsymbol{a}}_i$的转置

想象为$m\times 1$矩阵

按行分块:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix}$$

视为$m \times 1$矩阵

$$x = \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

视为1×1矩阵

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

小结:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T \end{bmatrix}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n],\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

行

$$=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n \quad =\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k \end{bmatrix}$$

列

方程组行、列的视角分别对应了矩阵的行、列分块乘法

线性映射$\mathcal{A}$的定义域、陪域和值域分别是什么?

定义域=$\mathbb{R}^n$

陪域=$\mathbb{R}^m$

值域=$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = Span(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$

小结: 看待线性方程组问题的三种视角

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{x}\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{x}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$

行

行、列的视角分别对应了矩阵的行、列分块乘法

$$A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n$$

列

线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解当且仅当$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{b})$非空

当且仅当$\boldsymbol{b}\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

线性变换

当且仅当$\boldsymbol{b}\in Span(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n)$

(c) 线性映射与矩阵的关系：

目标：线性映射$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ⟺ 矩阵$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

回顾：映射$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为**线性映射**，如果$f$满足

$$(1) f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(2) f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}), \forall c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

等价的定义：如果f满足

$$f(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) = cf(\boldsymbol{x}) + df(\boldsymbol{y}), \forall c, d \in \mathbb{R}，\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

从矩阵到线性映射：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

从A出发，定义映射$\mathcal{A}$：

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$\boldsymbol{x} \quad \mapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

定理

$m \times n$阶矩阵A对应的映射$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是一个线性映射，即

(1)$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$。

(2) $\mathcal{A}(c\boldsymbol{x}) = c\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\ \forall c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

映射$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$称为矩阵$A$对应的线性映射

证明：这里利用矩阵分块乘法说明(1).

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^T\boldsymbol{y} \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^T\boldsymbol{y} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^T\boldsymbol{y} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$$

$$= \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$$

例:

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n,\ \ \boldsymbol{a}^T=[a_1,a_2,\dots,a_n]$$给出线性映射

$$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad,\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=a_1x_1+\cdots+a_n\,x_n$$

称为线性函数

问题:

线性函数都能如此得到吗? 线性映射都能由矩阵得到吗?

从线性映射到矩阵：

定理：

设$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为一个线性映射

则映射$\mathcal{A}$由n个$\mathbb{R}^m$中向量$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$决定。

证明：$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n.$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n).$$

从线性映射到矩阵：

将n个$\mathbb{R}^m$中向量$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$排列，得到矩阵

$$A = [\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

A称为线性映射$\mathcal{A}$在标准基$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$下的**表出矩阵。**

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)$$

$$= [\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}.$$

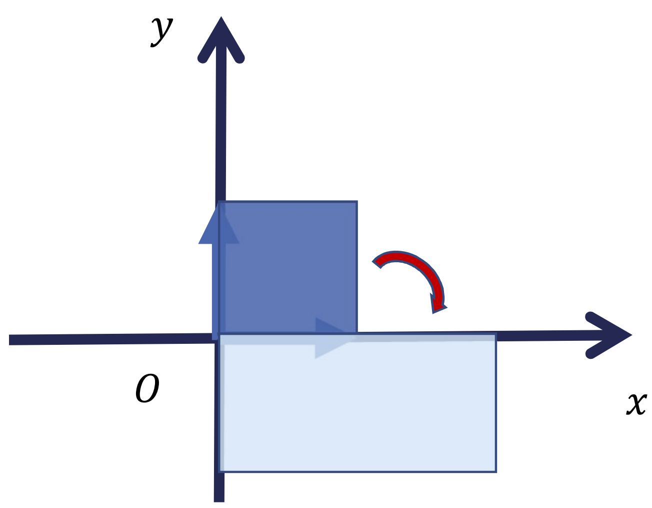
(d) 矩阵的作用举例：

例：2阶方阵在$\mathbb{R}^2$上的作用. 找到将向量$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$变为$\begin{bmatrix}2x_1\\-x_2\end{bmatrix}$的矩阵

首先容易验证这是一个线性映射，记为$\mathcal{A}$：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2x_1\\-x_2\end{bmatrix}$

$\mathcal{A}$的表出矩阵为

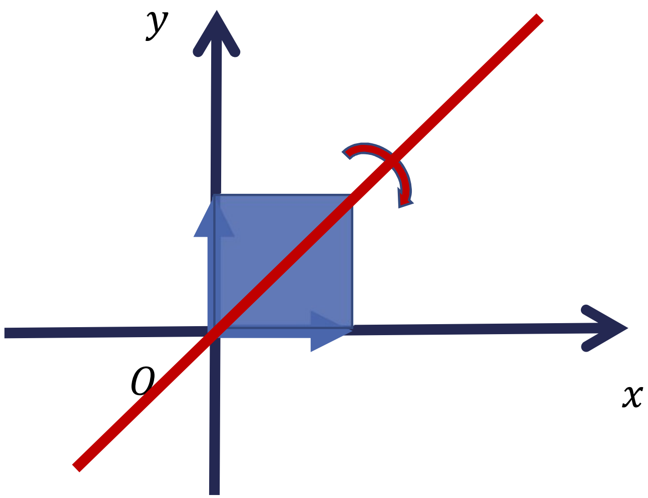
$$A=[\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1),\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)]=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$



练习：

找到将向量$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$变为$\begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}$这个线性映射的表出矩阵

$P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$. 称为**置换矩阵**(Permutation).

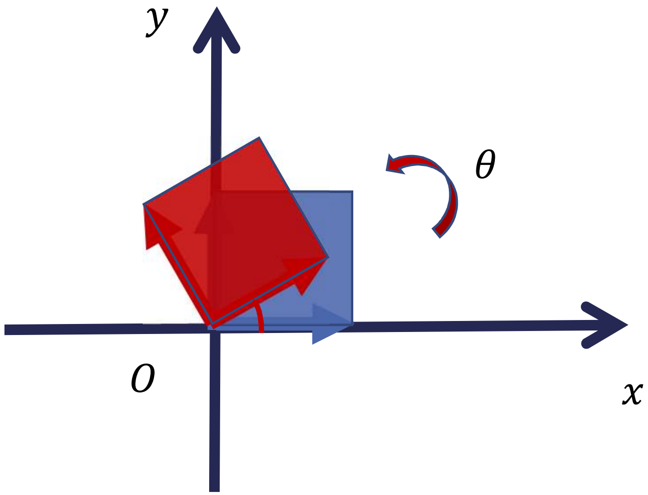


练习：

从几何上容易看出，$\mathbb{R}^2$中逆时针旋转θ角是一个线性映射

（1）找出$\mathcal{R}_\theta$的表出矩阵R_θ.

(2) 解释复合映射$\mathcal{R}_{\theta_1}\circ\mathcal{R}_{\theta_2}$.

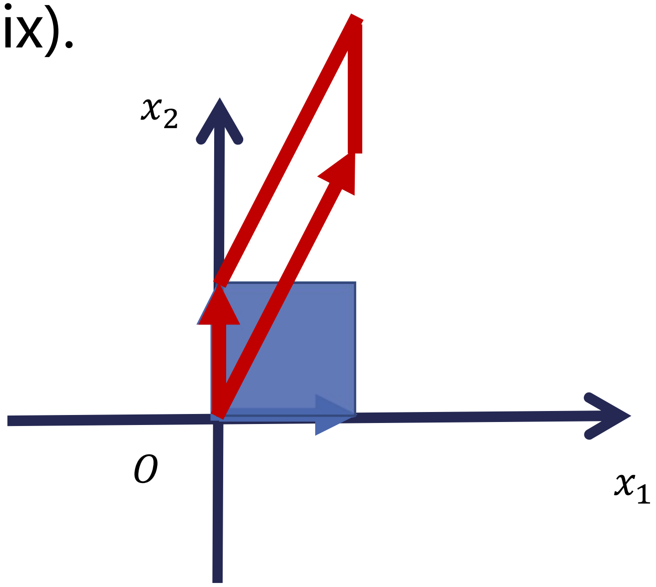


$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

练习：

$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^2$的线性映射，保持$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$的第一个分量$x_1$不动，将第二个分量$x_2$变为$kx_1 + x_2, k \in \mathbb{R}$. 找出这个线性映射的表出矩阵，这样的矩阵称为消去矩阵或倍加矩阵(Elimination matrix).

$$E_{21}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



错切变换

练习：

$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^2$的线性映射，保持$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$的第二个分量$x_2$不动，将第一个分量$x_1$变为$x_1+kx_2$. 找出这个线性映射的表出矩阵，这也是一种消去矩阵.

$$E_{12}(k)=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$$

练习：

$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^3$的线性映射，保持$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的第一，三个分量不动，将第二个分量$x_2$变为$5x_1+x_2$,写出这个线性映射的表出矩阵。

$$E_{21}(5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\5&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

消去矩阵或**倍加矩阵**

练习：

$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^3$的线性映射，保持$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$的第一，二个分量不动，将第三个分量$x_3$变为-$3x_2 + x_3$,写出这个线性映射的表出矩阵。

$$E_{32}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

消去矩阵或**倍加矩阵**

一般的，$E_{ji}(k)(j \neq i)$将x_j变为$x_j + kx_i$

练习：

$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^3$的线性映射，保持$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的第一，二个分量不动，将第三个分量$x_3$变为$5x_3$，写出这个线性映射的表出矩阵。

$$E_{33}(5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

倍乘矩阵

一般的，$E_{ii}(k)$将x_i变为kx_i，保持其余x_j不动

练习：

$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^3$的线性映射，保持$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的第三个分量不动，交换$\boldsymbol{x}$的前两个分量,写出这个线性映射的表出矩阵。

$$P_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

练习：

$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^3$的线性映射，保持$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的第二个分量不动，交换$\boldsymbol{x}$的一，三分量,写出这个线性映射的表出矩阵。

$$P_{12}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

对换矩阵，一种特殊的置换矩阵

P_{ij} 互换 x_i, x_j

1.4 初等行变换与线性方程组有解之判定

目标：

方程组对应的增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形矩阵

1. 倍加变换
2. 倍乘变换
3. 对换变换

判断方程组解集的情况

主要内容：

(a) 方程组的行变换与矩阵的初等行变换

(b) 行阶梯形矩阵

(c) 方程组是否有解的判定定理

(d) 行简化阶梯形矩阵

(a) 方程组的行变换与矩阵的初等行变换

方程组的行变换

1. 倍加变换：把某个方程的k倍加到另一个方程上

2. 倍乘变换：某个方程乘以非零常数k

3. 对换变换：互换两个方程

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n} \end{cases}$$

进行行操作

注意：在解方程的过程中不涉及列的操作

π

例:

考虑方程组
$$\begin{cases} 1x_1+2x_2+3x_3=6 & (1) \\ 4x_1+5x_2+6x_3=15 & (2) \\ 8x_1+9x_2+7x_3=24 & (3) \end{cases}$$

消元，倍加

倍乘

回代

第一步：用方程(1)中的含x_1项消去方程 (2)(3)中含x_1项

$(-4)\times(1)+(2)$，$(-8)\times(1)+(3)$得到
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & (1)' \\ \quad -3x_2+(-6)x_3=-9 & (2)' \\ \quad -7x_2+(-17)x_3=-24 & (3)' \end{cases}$$

第二步：用方程(2)′中的含x_2项消去方程 (3)′中含x_2项

.

$(-7/3)\times(2)'+(3)'$得到
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & (1)'' \\ \quad -3x_2+(-6)x_3=-9 & (2)'' \\ \quad -3x_3=-3 & (3)'' \end{cases}$$

第三步：对方程(3)″两侧同时乘以$-1/3$得到

$$x_3=1$$

第四步：将$x_3=1$代入方程(2)″得到

$$x_2=1.$$

第五步：将$x_2=x_3=1$代入方程(1)″得到

$$x_1=1.$$

于是方程组的解为$[1，1，1]^T$

高斯消元法是指前面三步消元的过程。

在高斯消元及后面的求解过程中，我们注意以下几点：

(1)求解过程不改变方程组的解。这是因为消元过程是可逆的。

(2)求解过程出现了对方程组的行的两种变换：

倍加变换：将方程组的某行的c倍加到另一行上

倍乘变换：将方程组的某行乘以非零常数k

(3)方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的未知元$\boldsymbol{x}$不参与消元过程的运算。

消元过程对系数矩阵A的行向量与向量$\boldsymbol{b}$同时做同一操作。

增广矩阵：

由第(3)条，我们用增广矩阵记录下整个计算过程，对增广矩阵进行行变换。矩阵$\left[A \mid \boldsymbol{b}\right]$称为方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的增广矩阵。

$$\begin{cases} 1x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=15 \\ 8x_1+9x_2+7x_3=24 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right]$$

增广矩阵:

利用增广矩阵，高斯消元的过程可写为:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\text{第1行乘以}-4\\ \text{加到第2行}}]{E_{21}(-4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 8 & 9 & 7 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\text{第1行乘以}-8\\ \text{加到第3行}}]{E_{31}(-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -7 & -17 & -24 \end{array}\right]$$

待严格化

$$\xrightarrow[\substack{\text{第2行乘以}-7/3\\ \text{加到第3行}}]{E_{32}(-7/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

唯一解