**第三周习题课（多元函数极限、连续、可微及偏导）**

**一. 多元函数极限的多种形式**

1.：



2. ：



3.：



4. ：



1. 求。

**解：**，所以。

1. 设，求。

解：，所以。

讨论在其他点的极限。

1. 求

解：，所以。

讨论极限是否存在？

1. 

解：，而，所以

。

**二.累次极限与重极限**

1. =

两个二次极限都不存在，但二重极限

1. 

解：，而二重极限不存在．

1. ，证明：，而二重极限不存在。

证明：，故；同理，。

沿直线趋于点，；沿直线趋于点，，故不存在。

1. 记，。证明：

，但是不存在。

解：，同理，。

取，则，但是

不相等，所以不存在。

**一般结论：**

（1）重极限与累次极限没有关系。

重极限存在，累次极限可以不存在；累次极限存在，重极限可以不存在。

（2）定理：设在的某个去心邻域有定义，且

（i）；

（ii），存在，

则。

证明：因为，所以，

，

即。

又因为，存在，在不等式两边同时令，

，

，

。

所以。

推论：若重极限与累次极限均存在，则有 =

若均存在但不等，不存在。

（3）函数在点的去心邻域有定义，若

（i）存在的去心邻域，使得， 存在；

（ii）关于的某个去心邻域上**一致**，则



即 。

证明：因为关于的某个去心邻域上**一致**，所以

，

都有 。

令，则，故由Cauchy准则，存在，记。

因此。

又由条件（ii），当。

取定。由（i），，

。

从而，

，

于是。

【注记】二元函数关于变量，分别有极限并不能推出二元函数关于变量有极限，本定理用“关于的某个去心邻域上**一致**”来约束变量，使得在一致的条件下，二元函数关于变量有极限。

1. 教材P.23，1（8）（10）（12），2（4）（6）
2. 记，讨论。

解：沿曲线趋于原点，不存在，所以不存在

，是否存在？

1. 设一元函数在上连续可微，定义，求。

解：，所以

。

而在上连续可微，所以。