**习题课题目（统计部分一）**

**1. 设为总体的一个样本，的分布函数为，则**

**。**

**证明：：由于，故，事实上**

****

**即**

**从而由分布的可加性得：**

**2. 设*X*1, *X*2, …,*X*n+1是正态总体的简单样本，和，求（1）的分布，**

**（2）  的分布.**

**解：（1） **

**，且独立，故**

****

**（2）注意*X*n+1与*X*1, *X*2, …,*X*n独立，从而与‾*X*独立、也与样本方差*S*2独立。 又‾*X* ~ *N* (*μ*, *σ*2/*n*), 进而*X*n+1－‾*X ~ .***

**即 。**

**由 *t*-分布定义，注意 及*X*n+1－‾*X*与 *S* 独立。**

** 。**

**即所求分布是参数为 *n*-1的*t*分布。**

**3. 设*X*的分布函数为**

**其中参数*α*>0, *β*>1. 设*X*1, *X*2, …,*X*n为X的简单随机样本，**

**（1）当*α*=1时，求未知参数*β*的矩估计量；**

**（2）当*α*=1时，求未知参数*β*的最大似然估计量；**

**（3）当*β*=2时，求未知参数*α* 的最大似然估计量。**

**解：当时, 的概率密度为**

****

**(Ⅰ) 由于**

****

**令 , 解得 ,**

**所以, 参数的矩估计量为 .**

**(Ⅱ) 对于总体的样本值, 似然函数为**

****

**当时, , 取对数得**

**,**

**对求导数，得**

**，**

**令　，　解得　，**

**于是的最大似然估计量为**

**．**

**( Ⅲ) 当时, 的概率密度为**

****

**对于总体的样本值, 似然函数为**

****

**当时, 越大，越大, 即的最大似然估计值为**

**,**

**于是的最大似然估计量为**

**．**

**4. 设独立同分布，服从分布，即其密度函数为**

**，为已知。**

**（1）试求**

**（2）证明与均为的无偏估计；**

**（3）分布计算的均方误差，并进行比较；**

**（4）在均方误差意义下，在形如的估计中，时最优。**

**解：**

**（1）**

****

****

****

**（2）**

****

**由于Pareto分布的分布函数为**

**令，其密度分布为**

**（也为分布）**

**故**

****

**（3）由于均为的无偏估计，故**

****

****

**故**

**（4）**

****

**故当时，最小。**

**5. 设为总体的一个样本，为其顺序统计量，记统计量，试证明相互独立。**

**证明：**

****

**由于，故**

****

**故**

****

**在此变化下变为**

****

**故**

****

**可分离变量，故相互独立。**

**6. 设为总体的一个样本，的分布密度如下，试分别求参数的充分统计量。**

**（1）（幂分布）；**

**（2）（Pareto分布），**

**（3）（Laplace分布）**

**解：（1）样本联合密度为**

****

**由因子分解定理知，为的充分统计量。**

**（2）样本联合密度为**

****

**由因子分解定理知，为的充分统计量。**

**（3）**

**样本联合密度为**

****

**由因子分解定理知，为的充分统计量。**

**7. 设样本是来自，问的极大似然估计是否为的无偏估计。**

**解：似然函数**

****

**当时**

**，关于单减，故的极大似然估计为**

****

**的分布函数为**

****

**，不是无偏估计。**

**8. 设总体服从Γ--分布，密度**

**为已知常数，为样本均值，，**

**（1）试求：的极大似然估计。**

**（2）证明：的极大似然是有效估计**

**解：（1）似然函数 **

****

**似然方程 **

**解得：**

**所以，的MLE为由MLEd的性质知，**

**的MLE为**

**（2） **

****

**所以，是的UE**

**又因为 **

****

**故参数的C-R下界为**

**恰好达到了C-R下界，所以是的有效估计。**