# Counter Examples of the Observability Redundant Conditions

李子硕

对于如下离散时间线性时不变系统，矩阵$A, C$决定了系统的可观测性。为了实现可信估计，可观测性需要有冗余，我们对比如下几个可观测性冗余条件，并比较他们的关系。

**定义 1** (稀疏可观/可测)**.** *一个线性系统$(A, C)$是$s$-稀疏可观/可测的，当且仅当对任意含有$s$个元素的传感器标号子集$\mathcal{A}, \mathcal{A} \subset \mathcal{I}$,去除$\mathcal{A}$中的传感器后，系统$(A, C_{\mathcal{I}\setminus\mathcal{A}})$[1]仍然是可观/可测的。一个系统的稀疏可观/可测指数$s$是指能够让它是$s$稀疏可观/可测的最大的非负整数$s$.*

定义1是稀疏可观性，也是大部分文献中使用的经典可观测性冗余定义。下文进一步对比我们的结果需要的零空间性质2与文献中其他两个概念的关系，一个概念叫做$2p$-特征值可观（$2p$-eigenvalue observable, [2, 定义2]），另一个叫做公共基假设（common basis assumption, [1, 假设4]），这两个概念定义如下。

**定义 2** (零空间性质)**.** *对任意集合 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathcal{C} \subset \mathcal{I}, |\mathcal{C}| = p$ 以及任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^n, x \neq \mathbf{0}$, 如下不等式成立:*

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \|H_i x\|_1 < \sum_{i \in \mathcal{I}\setminus\mathcal{C}} \|H_i x\|_1. \tag{1}$$

*其中$H_i$定义见本人学位论文引理5.2。*

**定义 3** ($2p$-特征值可观)**.** *如果矩阵$A$的特征值$\lambda \in \mathrm{sp}(A)$满足矩阵$\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C_i \end{bmatrix}$是一个单射（injective），我们称传感器$i$可以观测特征值$\lambda$。系统$(A, C)$被称*

[1] $C_{\mathcal{I}\setminus\mathcal{A}}$代表矩阵$C$只保留$\mathcal{I} \setminus \mathcal{A}$代表的那些行后删去其他行，构成的矩阵。

为$p$-特征值可观的，如果去掉任意$p$个传感器，每个特征值仍然能被至少一个传感器观测到。

**定义 4** (公共基条件). *存在$\mathbb{R}^n$空间的一组基$\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$，使得每个传感器$i \in \mathcal{I}$对应的不可观空间$\mathbb{U}_i \triangleq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{O}_i$，都能被这组基的线性展开表示。*

我们定义与这些可观测性冗余条件相关的集合

$$\text{Set } 1 \triangleq \{(A,C)|(A,C) \text{ 满足2}p\text{-稀疏可观性}\} \tag{2a}$$

$$\text{Set } 2 \triangleq \{(A,C)|(A,C) \text{ 满足零空间性质(定义2)}\} \tag{2b}$$

$$\text{Set } 3 \triangleq \{(A,C)|A \text{ 的所有特征值几何重数都是1}\} \tag{2c}$$

$$\text{Set } 4 \triangleq \{(A,C)|(A,C) \text{ 满足2}p\text{-特征值可观性(定义3)}\} \tag{2d}$$

$$\text{Set } 5 \triangleq \{(A,C)|(A,C) \text{ 满足公共基条件(定义4)}\} \tag{2e}$$

本报告为了证明如下式子中的包含关系是真包含，需要举出一些反例，并证明其在大集合中但不在小集合中。

$$\begin{aligned}
&\text{Set } 4 \triangleq \text{Set } 1 \cap \text{Set } 3 \\
&\text{Set } 1 \supset \text{Set } 2 \supsetneq \text{Set } 4 \\
&\text{Set } 1 \supset \text{Set } 2 \supsetneq (\text{Set } 1 \cap \text{Set } 5)
\end{aligned}$$

可以证明真包含的反例如下。

**例子 1** (在Set 2中但不在Set 4中的例子). *考虑如下2状态6传感器系统，假设有1个传感器受了攻击*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个例子来源于 [2] Example 1，在其中已经证明了系统不是2-特征值

可观的，我们来证明它是满足我们的假设2的。首先计算可观测性矩阵

$$O_1 = O_2 = O_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ O_3 = O_4 = O_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算其行标准型$H_i$:

$$H_1 = H_2 = H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ H_3 = H_4 = H_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们证明对任意集合$\mathcal{C}$ 其中$\mathcal{C} \subset \{1,2,3,4,5,6\}, |\mathcal{C}| = 1$ 以及任意向量$x \in \mathbb{R}^2, x \neq \mathbf{0}$, 如下结论成立:

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \|H_i x\|_1 < \sum_{i \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{C}} \|H_i x\|_1. \tag{3}$$

由于传感器1，2，3所观测的状态分量完全一致，传感器4，5，6所观测的状态分量完全一致，我们只需要证明如下两个不等式对任意 $x \neq \mathbf{0}$成立即可

$$\text{If } \mathcal{C} = \{1\} \text{ or } \mathcal{C} = \{2\} \text{ or } \mathcal{C} = \{3\}, |x_1| < 2|x_1| + 3|x_2|,$$

$$\text{If } \mathcal{C} = \{4\} \text{ or } \mathcal{C} = \{5\} \text{ or } \mathcal{C} = \{6\}, |x_2| < 3|x_1| + 2|x_2|.$$

这是显然的，于是例子1满足我们的假设2而不满足2-特征值可观测性。

**例子 2** (在Set 2中但不在Set 1∩Set 5中的例子). *考虑如下3状态5传感器系统，假设有1个传感器受了攻击*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

这个例子来源于 [1]的Appendix B，在其中以及证明了其不满足公共基

假设，因此我们重点证明它满足我们的假设2。首先计算可观测性矩阵

$$O_1 = O_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},\ O_2 = O_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix},\ O_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

计算其行标准型$H_i$:

$$H_1 = H_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ H_2 = H_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ H_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这些行标准型的含义为，传感器1和4可以独立观测状态$x_3$，也可以观测状态$x_1$和$x_2$的线性组合$x_1 + x_2$；传感器2和5可以独立观测状态$x_3$，也可以观测状态$x_1$和$x_2$的线性组合$x_1 - x_2$；传感器3可以独立观测状态$x_3$，也可以观测状态$x_1$和$x_2$的线性组合$x_1 + 2x_2$。

我们证明对任意集合$\mathcal{C}$ 其中$\mathcal{C} \subset \{1,2,3,4,5\}, |\mathcal{C}| = 1$ 以及任意向量$x \in \mathbb{R}^3, x \neq \mathbf{0}$, 如下结论成立:

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \|H_i x\|_1 < \sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}} \|H_i x\|_1. \tag{4}$$

这等价于证明如下的不等式对任意$x \neq \mathbf{0}$成立

$$\text{If } \mathcal{C} = \{1\} \text{ or } \mathcal{C} = \{4\}, 0 < 2 \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{If } \mathcal{C} = \{2\} \text{ or } \mathcal{C} = \{5\}, 0 < 2 \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{If } \mathcal{C} = \{3\}, \begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} < 2 \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}.$$

前两个不等式被 $x \neq 0$ 满足。第三个不等式的验证可以通过分类讨论$x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3$ 这四项的正负性依次得出结果。通过遍历这$2^4 = 16$种结果，我们发现第三个不等式也被满足了，因此例子2可以满足我们的假设2，而不能满足公共基假设（定义4）。

# 参考文献

[1] Jin Gyu Lee, Junsoo Kim, and Hyungbo Shim. Fully distributed resilient state estimation based on distributed median solver. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(9):3935–3942, 2020.

[2] Yanwen Mao, Aritra Mitra, Shreyas Sundaram, and Paulo Tabuada. On the computational complexity of the secure state-reconstruction problem. *Automatica*, 136:110083, 2022.