别样的数数大战

TaoRan

No.1 Middle School of Zhengzhou

2025.11

目录

这些你肯定会

乘法逆元

下文约定 p 是质数，只考虑 $\mathbb{F}_p$ 内的数也就是 $[0,p) \cup \mathbb{Z}$ 。

对于非零的 a ，存在唯一的一个 b 使得 $ab \equiv 1 \pmod p$ 。则称 b 是 a 模 p 意义下的乘法逆元，记为 a^{-1} 。

计算 1 计算 2

有理数取模

略 。

模数怎么夹带私货（

一切的源头组合数学

定义

从 n 个不同元素中选出 m 个的方案称为组合数，记作 $\binom{n}{m}$ ，读作 n 选 m 。

推导

选出来第一个有 n 种选法，第二个有 $n-1$ 种选法，选 m 个共有 $\frac{n!}{(n-m)!}$ 种选法。

推导

选出来第一个有 n 种选法，第二个有 $n-1$ 种选法，选 m 个共有 $\frac{n!}{(n-m)!}$ 种选法。

算重了 $m!$ 次，所以 $\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$ 。

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

试计算：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i$$

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

试计算:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i$$

答案是 3^n ，事实上这就是对于一个集合的所有子集枚举子集的复杂度。

常见恒等式

对称恒等式： $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

常见恒等式

对称恒等式：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

吸收恒等式：$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

常见恒等式

对称恒等式：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

吸收恒等式：$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

归纳恒等式：$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$

常见恒等式

对称恒等式：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

吸收恒等式：$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

归纳恒等式：$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$

上指标求和：$\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

常见恒等式

对称恒等式：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

吸收恒等式：$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

归纳恒等式：$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$

上指标求和：$\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

范德蒙德卷积：$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

常见恒等式

对称恒等式：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

吸收恒等式：$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

归纳恒等式：$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$

上指标求和：$\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

范德蒙德卷积：$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

只讲了比较常用的，参考文献：Blogs 。

常见模型

非常经典的球盒问题，据说有十二重计数法。

常见模型

非常经典的球盒问题，据说有十二重计数法。

有 n 个球和 m 个盒子。

球不同盒不同，盒可以为空

常见模型

非常经典的球盒问题，据说有十二重计数法。

有 n 个球和 m 个盒子。

球不同盒不同，盒可以为空

答案：m^n

球相同盒不同，每个盒子至多装一个球

常见模型

非常经典的球盒问题，据说有十二重计数法。

有 n 个球和 m 个盒子。

球不同盒不同，盒可以为空

答案：m^n

球相同盒不同，每个盒子至多装一个球

答案：$\binom{m}{n}$

常见模型

球相同盒不同，每个盒子至少装一个球

常见模型

球相同盒不同，每个盒子至少装一个球

考虑使用插板法，把 n 个球排成一列并划分成 m 个部分，就是往 $n-1$ 个空隙中插入 $m-1$ 个分隔板，故答案为 $f(n,m)=\binom{n-1}{m-1}$

球相同盒不同，盒可以为空

常见模型

球相同盒不同，每个盒子至少装一个球

考虑使用插板法，把 n 个球排成一列并划分成 m 个部分，就是往 $n-1$ 个空隙中插入 $m-1$ 个分隔板，故答案为 $f(n,m)=\binom{n-1}{m-1}$

球相同盒不同，盒可以为空

假设每个盒子底部已经放了额外的一个球，于是转化成至少装一个球的情况，答案为 $f(n+m,m)=\binom{n+m-1}{m-1}$

我草了怎么是容斥与反演

容斥原理

引入

小 L 班里有 50 人喜欢语文，40 人喜欢数学，35 人既喜欢语文也喜欢数学。已知班上的同学至少喜欢语文和数学中的一门学科，那么小 L 班里总共有多少人？

容斥原理

引入

小 L 班里有 50 人喜欢语文，40 人喜欢数学，35 人既喜欢语文也喜欢数学。已知班上的同学至少喜欢语文和数学中的一门学科，那么小 L 班里总共有多少人？

大家都知道答案是 50+40-35=55 人。

补集转化

补集转化又称为减法原理，若集合 S 被划分成了两部分 A, B 则 $|A| = |S| - |B|$ 。

基本容斥原理 1

现在我们有一个集合 S，和它的 n 个子集 $A_{1\dots n}$ ，那么有：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right| = |S| + \sum_{T\subseteq\{1,2,\dots,n\},T\neq\emptyset}(-1)^{|T|}\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|$$

组合意义：不具备任何性质的元素个数 $=$ 元素总个数 $-$ 至少具备一个性质的元素个数之和 $+$ 至少具备两个性质的元素个数之和 $-$ 至少具备三个性质的元素个数之和...

基本容斥原理 2

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{T\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} \left|\bigcap_{i\in T} A_i\right|$$

组合意义：所有集合的并集大小 = 所有集合的大小之和 − 每两个集合之间的交集大小 + 每三个集合之间的交集大小...

基本容斥原理 2

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{T\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} \left|\bigcap_{i\in T} A_i\right|$$

组合意义：所有集合的并集大小 = 所有集合的大小之和 − 每两个集合之间的交集大小 + 每三个集合之间的交集大小...

问：刚刚小 L 的问题使用了基本容斥原理哪一种？

染色

染色

一个长度为 n 的序列，每个位置会被染成 m 种颜色中的一种，求每种颜色都出现的方案数。

染色

染色

一个长度为 n 的序列，每个位置会被染成 m 种颜色中的一种，求每种颜色都出现的方案数。

枚举钦定没有出现的颜色个数 i ，答案即为：

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

染色

染色

一个长度为 n 的序列，每个位置会被染成 m 种颜色中的一种，求每种颜色都出现的方案数。

枚举钦定没有出现的颜色个数 i，答案即为：

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

把位置看成球，颜色看成盒子，可以发现这也是：球不同盒不同，每个盒子至少装一个球问题的方案数。

第二类 Stirling 数

将 n 个互不相同的元素划分到 m 个集合，使得每个集合非空的方案数记为 ${n \brace m}$ ，读作 n 子集 m 。

第二类 Stirling 数

将 n 个互不相同的元素划分到 m 个集合，使得每个集合非空的方案数记为 ${n \brace m}$ ，读作 n 子集 m 。

其实上一页的式子就是 $m!{n \brace m}$ ，因为 Stirling 数中的集合本身是相同的，盒子/颜色是不同的所以乘上了一个 $m!$ 。

错位排列

错位排列

求有多少个长度为 n 的排列 p ，使得 $\forall 1 \le k \le n, p_k \ne k$ 。（一般记为 D_n）

错位排列

错位排列

求有多少个长度为 n 的排列 p ，使得 $\forall 1 \le k \le n, p_k \ne k$ 。（一般记为 D_n）

枚举钦定 $p_k = k$ 的位置个数 i ，答案即为：

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

什么是反演

给定函数 f,g （值域一般是 $1\dots n$ 的正整数或一个集合的子集），其中 f 已知或容易计算，且已知如何通过 g 计算 f 。

那么通过 f 反过来计算 g 的过程就称为反演。

反演的实质

对于形如下的式子，我们称左右两式互为反演式：

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} A_{i,j} g_j \Leftrightarrow g_i = \sum_{j=1}^{i} B_{i,j} f_j$$

我们可以把 f, g 看作向量，于是反演原理本质上就是矩阵乘法求逆：

$$f = g \times A \Leftrightarrow g = f \times A^{-1}$$

对于一般的 A ，想要求逆只能 Guass 消元了，但是我们研究的 A 一般都有特殊性质可以直接得出。

子集反演

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T) \Leftrightarrow g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T)$$

证明只需右式代入左式，交换求和号：

$$\begin{aligned} f(S) &= \textstyle\sum_{P\subseteq S} f(P)\sum_{P\subseteq T\subseteq S}(-1)^{|T|-|P|} \\ &= \textstyle\sum_{P\subseteq S} f(P)\sum_{i=0}^{|S|-|P|}(-1)^{i}\binom{|S|-|P|}{i} \\ &= \textstyle\sum_{P\subseteq S} f(P)[|S|=|P|]=f(S) \end{aligned}$$

二项式反演

如果 $f(S)$ 只跟 $|S|$ 有关会怎么样？

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$$

期望你学会期望

引子

人话就是随机变量的“平均数”，现在我们只考虑离散的情况。

例：均匀骰子的点数（这是一个随机变量）期望是 3.5 。

更靠谱的计算

随机变量 X 的期望 EX （有时候也写作 $E[X]$）为:

$$\sum_i iP(X=i)$$

常用套路

如果每个方案是等概率出现的，那么期望就是所有方案的权值和除以方案数。

常用套路

如果每个方案是等概率出现的，那么期望就是所有方案的权值和除以方案数。

如果我们要算期望的随机变量可能的值是 0 到 n 之间的整数，那么期望 = 大于等于一的概率 + 大于等于二的概率 +⋯+ 大于等于 n 的概率。

图上随机游走

根据走到每个点期望时间之间的关系，列线型方程组用高斯消元解。

图上随机游走

根据走到每个点期望时间之间的关系，列线型方程组用高斯消元解。

比较经典的一个应用是：给定一个字符串的集合 A，接着不断往另一个给定的字符串 S 后随机添加字符，问 S 有一个子串出现在 A 中的期望时间。

图上随机游走

根据走到每个点期望时间之间的关系，列线型方程组用高斯消元解。

比较经典的一个应用是：给定一个字符串的集合 A，接着不断往另一个给定的字符串 S 后随机添加字符，问 S 有一个子串出现在 A 中的期望时间。

做法是建出来 AC 自动机，转化成前面的问题。

图上随机游走

根据走到每个点期望时间之间的关系，列线型方程组用高斯消元解。

比较经典的一个应用是：给定一个字符串的集合 A，接着不断往另一个给定的字符串 S 后随机添加字符，问 S 有一个子串出现在 A 中的期望时间。

做法是建出来 AC 自动机，转化成前面的问题。

这种各种状态之间来回随机转化的问题，都可以建立图论（更准确的说是自动机）模型试着解决。

期望的线性性

$$E[aX+b]=aEX+b$$

期望的线性性

$$E[aX+b]=aEX+b$$

$$E[X+Y]=EX+EY$$

期望的线性性

$$E[aX+b]=aEX+b$$

$$E[X+Y]=EX+EY$$

$$E[X^2]\neq(EX)^2$$

LG1654 OSU!

提示：分别维护 1,2,3 次方的期望。

LG6835 [Cnoi2020] 线形生物

记 f_i 表示从 i 开始走到 $n+1$ 的期望步数。

LG6835 [Cnoi2020] 线形生物

记 f_i 表示从 i 开始走到 $n+1$ 的期望步数。

$$f_{n+1} = 0$$

LG6835 [Cnoi2020] 线形生物

记 f_i 表示从 i 开始走到 $n+1$ 的期望步数。

$$f_{n+1} = 0$$

$$f_i = \frac{1}{out_i + 1}(f_{i+1} + \sum_{(i,j)\in E} f_j) + 1$$

LG6835 [Cnoi2020] 线形生物

记 f_i 表示从 i 开始走到 $n+1$ 的期望步数。

$$f_{n+1} = 0$$

$$f_i = \frac{1}{out_i + 1}(f_{i+1} + \sum_{(i,j)\in E} f_j) + 1$$

因为 $j \le i$，所以可以将 f_1 当做常量递推，最后在解一个一元一次方程即可。

LG6835 [Cnoi2020] 线形生物

记 f_i 表示从 i 开始走到 $n+1$ 的期望步数。

$$f_{n+1} = 0$$

$$f_i = \frac{1}{out_i + 1}(f_{i+1} + \sum_{(i,j)\in E} f_j) + 1$$

因为 $j \le i$，所以可以将 f_1 当做常量递推，最后在解一个一元一次方程即可。

或者说改为走到 $i+1$ 的期望步数，最后前缀和。

经典问题

考虑以下问题：n 个不同的球，其中有 m 个白的，每次拿一个出来，问期望次数。

经典问题

考虑以下问题：n 个不同的球，其中有 m 个白的，每次拿一个出来，问期望次数。

1. 放回，存在一个拿出来

经典问题

考虑以下问题：n 个不同的球，其中有 m 个白的，每次拿一个出来，问期望次数。

1. 放回，存在一个拿出来

显然就是概率的倒数 $\frac{n}{m}$ 。

经典问题

考虑以下问题：n 个不同的球，其中有 m 个白的，每次拿一个出来，问期望次数。

1. 放回，存在一个拿出来

显然就是概率的倒数 $\frac{n}{m}$ 。

2. 不放回，存在一个拿出来

经典问题

考虑以下问题：n 个不同的球，其中有 m 个白的，每次拿一个出来，问期望次数。

1. 放回，存在一个拿出来

显然就是概率的倒数 $\frac{n}{m}$ 。

2. 不放回，存在一个拿出来

枚举前面有几个非白，直接硬推：

$$m(n-m)!\sum_{i=0}^{n-m}\frac{(n-i-1)!(i+1)}{(n-m-i)!n!}=\frac{n+1}{m+1}$$

不是？为什么啊？

经典问题

考虑以下问题：n 个不同的球，其中有 m 个白的，每次拿一个出来，问期望次数。

1. 放回，存在一个拿出来

显然就是概率的倒数 $\frac{n}{m}$ 。

2. 不放回，存在一个拿出来

枚举前面有几个非白，直接硬推：

$$m(n-m)!\sum_{i=0}^{n-m}\frac{(n-i-1)!(i+1)}{(n-m-i)!n!}=\frac{n+1}{m+1}$$

不是？为什么啊？

看看这题的题解，发现 ** 最后一个白球后面的期望球数就是非白球的数量乘上所有白球都在前面的概率 **，算出来就是这个。

经典问题

3. 放回，全拿出来

经典问题

3. 放回，全拿出来

就是拿出来第一个的期望时间 + 拿出来第二个的期望时间⋯⋯：$mH(n)$。

经典问题

3. 放回，全拿出来

就是拿出来第一个的期望时间 $+$ 拿出来第二个的期望时间……：$mH(n)$ 。

4. 不放回，全拿出来

经典问题

3. 放回，全拿出来

就是拿出来第一个的期望时间 $+$ 拿出来第二个的期望时间……：$mH(n)$。

4. 不放回，全拿出来

倒着看这个序列，发现这个问题和问题二的答案和为 $n+1$，故答案为 $\dfrac{m(n+1)}{m+1}$。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

听到 LA 群里面说能 $O(nk)$ 计算 k 次方的期望，于是来看了看这道题。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

听到 LA 群里面说能 $O(nk)$ 计算 k 次方的期望，于是来看了看这道题。

当 $k=1$ 时，直接用期望的线性性算每条边的贡献即可。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

听到 LA 群里面说能 $O(nk)$ 计算 k 次方的期望，于是来看了看这道题。

当 $k=1$ 时，直接用期望的线性性算每条边的贡献即可。

否则就只能考虑组合意义了，首先要选一些点，再选一些边，如果一条边两边都选了点，它可以被选非负整数次，求边总共选了 k 条的方案数。注意现在我们是在对可重集计数，想要转成 k 次方（相当于一个长度为 k 的序列，每个位置表示选的数）还要乘上一个多重集排列。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

听到 LA 群里面说能 $O(nk)$ 计算 k 次方的期望，于是来看了看这道题。

当 $k=1$ 时，直接用期望的线性性算每条边的贡献即可。

否则就只能考虑组合意义了，首先要选一些点，再选一些边，如果一条边两边都选了点，它可以被选非负整数次，求边总共选了 k 条的方案数。注意现在我们是在对可重集计数，想要转成 k 次方（相当于一个长度为 k 的序列，每个位置表示选的数）还要乘上一个多重集排列。

于是直接 dp，记录子树里选了几条边和有没有选点，复杂度 $O(nk^2)$ 。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

听到 LA 群里面说能 $O(nk)$ 计算 k 次方的期望，于是来看了看这道题。

当 $k=1$ 时，直接用期望的线性性算每条边的贡献即可。

否则就只能考虑组合意义了，首先要选一些点，再选一些边，如果一条边两边都选了点，它可以被选非负整数次，求边总共选了 k 条的方案数。注意现在我们是在对可重集计数，想要转成 k 次方（相当于一个长度为 k 的序列，每个位置表示选的数）还要乘上一个多重集排列。

于是直接 dp，记录子树里选了几条边和有没有选点，复杂度 $O(nk^2)$ 。

如果每条边至多选一次，复杂度就是 $O(nk)$ 了。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

于是你考虑 dp 时先不管一条边选几次，只管选没选，最后再把不重集扩充成可重集，进一步扩充成序列。

CF1097G Vladislav and a Great Legend

于是你考虑 dp 时先不管一条边选几次，只管选没选，最后再把不重集扩充成可重集，进一步扩充成序列。

对于一个大小为 m 的集合，扩充到长为 k 的序列的方案数相当于长为 k 的序列，$1 \dots m$ 每个数出现至少一次的方案数，也就是

CF1097G Vladislav and a Great Legend

于是你考虑 dp 时先不管一条边选几次，只管选没选，最后再把不重集扩充成可重集，进一步扩充成序列。

对于一个大小为 m 的集合，扩充到长为 k 的序列的方案数相当于长为 k 的序列，$1\dots m$ 每个数出现至少一次的方案数，也就是

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^k=m!\left\{\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right\}$$

CF1097G Vladislav and a Great Legend

于是你考虑 dp 时先不管一条边选几次，只管选没选，最后再把不重集扩充成可重集，进一步扩充成序列。

对于一个大小为 m 的集合，扩充到长为 k 的序列的方案数相当于长为 k 的序列，$1 \dots m$ 每个数出现至少一次的方案数，也就是

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^k = m!\left\{ {k \atop m} \right\}$$

这个组合意义很强了，感觉什么期望都能做，比如可以出一道虚树点个数的期望。

你还有何话说？

白板

提问专用 PPT，

白板

提问专用 PPT，

绝不是为了一盘醋包的饺子。

下期预告

寒假估计我还会来。

下期预告

寒假估计我还会来。

一位不愿透漏身份的神秘嘉宾也有意向，ZYZOJ 或将迎来首位女生省队讲师！

再无话说，请速动手！

时间原因，还有很多有意思的题没有呈现，觉得这三道题小菜一碟的同学，可以试一下题单里的后几道题。

简单题 1

P3197 [HNOI2008] 越狱

简单题 1

P3197 [HNOI2008] 越狱

考虑从前往后安排，第一个人有 m 种方法，其他 $n-1$ 人有 $m-1$ 种，因为不能和前一个相同，答案为 $m(m-1)^{n-1}$ 。

简单题 2

P1287 盒子与球

简单题 2

P1287 盒子与球

讲过了，答案为 $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$ 。

简单题 3

P5520 [yLOI2019] 青原樱

简单题 3

P5520 [yLOI2019] 青原樱

先移除 $m-1$ 个花盆，摆放完幼苗后，在相邻两个幼苗之间放一个花盆，这样就没有幼苗不能相邻的限制了，答案为 $m!\binom{n-(m-1)}{m}$ 。