

PA0202 Beneath the Bottom of a Dream 题解

FlashHu

Dec 9, 2022

Contents

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

1 题目概况

2 思路分析

- 如何枚举所有 m 元子集
- 如何把所有 m 元子集建成堆结构
- 如何在堆结构中求第 k 大

3 代码实现

Contents

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

1 题目概况

2 思路分析

- 如何枚举所有 m 元子集
- 如何把所有 m 元子集建成堆结构
- 如何在堆结构中求第 k 大

3 代码实现

题意简述

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

有 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n

你可以选择一个 m 元子集

(意味着一共有 $C(n, m)$ 种选择方案)

每个方案有一个子集和，你需要找出第 k 大的子集和

题目评价

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

涉及知识点：排序，堆（或许枚举 m 元子集也需要了解一下）

思维难度：约 4 到 5

实现难度：约 2 到 3

Contents

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

1 题目概况

2 思路分析

- 如何枚举所有 m 元子集
- 如何把所有 m 元子集建成堆结构
- 如何在堆结构中求第 k 大

3 代码实现

人类智慧如何枚举所有 m 元子集

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

例子: $n = 5, m = 3$

1,2,3	1,4,5
1,2,4	2,3,4
1,2,5	2,3,5
1,3,4	2,4,5
1,3,5	3,4,5

应该是能很自然地枚举出来

将人类智慧转化成算法语言

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

例子: $n = 5, m = 3$

大家可以验证一下枚举出来是不是就是之前那个顺序

```
for  $s_1 = 1$  to 3  
for  $s_2 = s_1 + 1$  to 4  
for  $s_3 = s_2 + 1$  to 5  
yield  $s_1, s_2, s_3$ 
```


枚举顺序的多样性

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

例子: $n = 5, m = 3$

当然, 某些地方改一改能得到多种多样的枚举顺序, 只要能
不重不漏就行, 那么需要保证 $s_1 < s_2 < s_3$, 比如

```
for  $s_1$  in shuffle([1, 3])           for  $s_3 = 3$  to 5
for  $s_2$  in shuffle([ $s_1 + 1, 4$ ])      for  $s_2 = 2$  to  $s_3 - 1$ 
for  $s_3$  in shuffle([ $s_2 + 1, 5$ ])    for  $s_1 = 1$  to  $s_2 - 1$ 
yield  $s_1, s_2, s_3$                 yield  $s_1, s_2, s_3$ 
```

注意, 枚举所有 m 元子集和本题做法不是直接关联, 而是间接关联。题解接下来的描述中, 借用上面右边的这些 **for** 来描述把所有 m 元子集建成堆结构的过程。

Contents

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

1 题目概况

2 思路分析

- 如何枚举所有 m 元子集
- 如何把所有 m 元子集建成堆结构
- 如何在堆结构中求第 k 大

3 代码实现

满足堆结构的性质

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

第一：每个点不超过两个儿子

第二：所有父结点的权值大于/小于子结点的权值

对于本题，结点是一个方案 $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$

结点的权值是该方案的子集和 $\sum_{j=1}^m a_{s_j}$

根结点显然是最大的 m 个数组成的子集

如果要让父结点的权值大于子结点的权值，可以让父结点代表的子集中某个数换成更小的数来得到子结点

把 n 个数从大到小排序，换而言之：

根结点显然是 $\{1, 2, \dots, m\}$

如果要让父结点的权值大于子结点的权值，可以让父结点代表的子集中某个 s_j 换成更大的下标来得到子结点

从 for 联想到堆结构中的枚举

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

这一步的思维比较跳跃，但理解起来很形象

对于每个结点，增加一个状态量 j ，表示正在 for s_j ；
如果往左儿子走，就是继续 for s_j ；
如果往右儿子走，就是开始 for s_{j-1} 。

更形式化地，记 $'$ 的为儿子的状态量：

根结点 $s_1 = 1, \dots, s_m = m, j = m$ ；

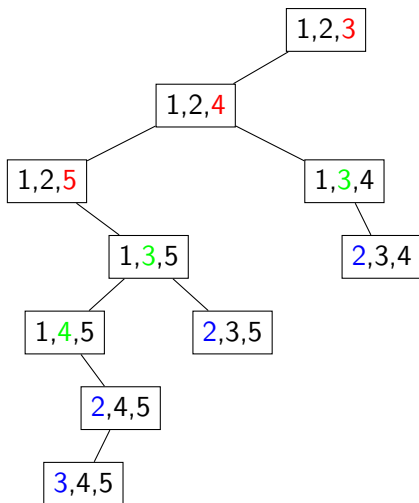
如果往左儿子走， $s'_j \leftarrow s_j + 1$ ；

如果往右儿子走， $j' \leftarrow j - 1, s'_{j-1} \leftarrow s_{j-1} + 1$ 。

当然，如果出现 $j' < 1, s'_j \geq s'_{j+1}$ 等非法情况时，没有相应的左儿子或右儿子。

用例子说明堆结构

例子: $n = 5, m = 3$, 每个结点将表示正在 **for** 的 s_j 高亮标记



PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

集

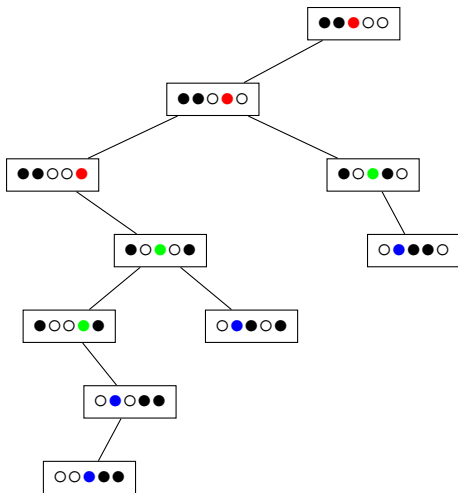
如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

用例子说明堆结构

例子: $n = 5, m = 3$, 更形象的表现



PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

Contents

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

1 题目概况

2 思路分析

- 如何枚举所有 m 元子集
- 如何把所有 m 元子集建成堆结构
- 如何在堆结构中求第 k 大

3 代码实现

如何在堆结构中求第 k 大

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

OJ 上的 Hint, 见推文

简单概括, 维护候选结点的优先队列, 每次取一个, 加 (至多) 两个

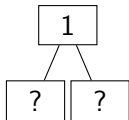
还有一个 Hint 就是另外一道题了: 你可以选择任意大小的子集, 而不是 m 元子集

它和本题的相同点在于都是在堆结构中求第 k 大, 不同点在于建成堆结构的方式。所以大家会发现两道题的代码框架高度相似。

用例子说明如何在堆结构中求第 k 大

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

用? 表示候选结点



题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

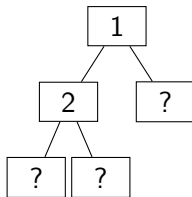
如何把所有 m 元子集建成堆结构

如何在堆结构中求第 k 大

代码实现

用例子说明如何在堆结构中求第 k 大

用? 表示候选结点



PA0202

Beneath the
Bottom of a

Dream

题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

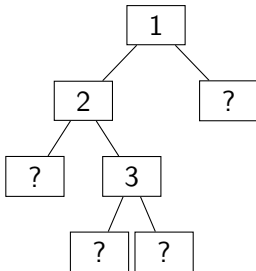
如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

用例子说明如何在堆结构中求第 k 大

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

用? 表示候选结点



题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

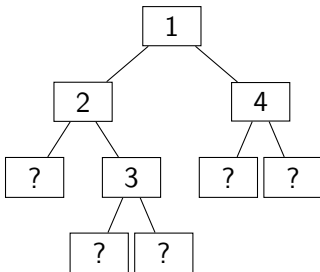
如何把所有 m 元子集建成堆结构

如何在堆结构中求第 k 大

代码实现

用例子说明如何在堆结构中求第 k 大

用? 表示候选结点



PA0202

Beneath the
Bottom of a

Dream

题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

Contents

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解
FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

1 题目概况

2 思路分析

- 如何枚举所有 m 元子集
- 如何把所有 m 元子集建成堆结构
- 如何在堆结构中求第 k 大

3 代码实现

代码框架

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集

如何把所有 m 元子集
建成堆结构

如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

对 n 个数排序，使用 `std::sort`。

建立候选结点的优先队列，使用 `std::priority_queue`。初始插入根结点。

循环 k 次，每次取出优先队列的 `top`，将它在 m 元子集堆结构中的儿子 `push` 进去。

如果中途优先队列为 `empty`，输出 -1，否则第 k 次取出的即为答案。

将思路准确转化为高效的代码

PA0202
Beneath the
Bottom of a
Dream
题解

FlashHu

题目概况

思路分析

如何枚举所有 m 元子集
如何把所有 m 元子集
建成堆结构
如何在堆结构中求第
 k 大

代码实现

思路是成功的一半。 $O(n \log n + k \log k)$ 的代码实现才能获得满分，这要求我们精简代码，避免冗余的实现方式。

如果我们每个结点都记录 s_1, s_2, \dots, s_m, j 这么多变量的话，就会变成 $O(mk \log k)$ 导致超时。标程的结点仅记录 4 个变量：

```
struct Node {  
    long long sum; // 子集和  
    int j, sj, end; // 正在for s_j, 当s_j > end时终止  
    inline bool operator<(const Node& other) const {  
        return sum < other.sum; }  
};
```

push左右儿子时，sum的修改就是减去被换的数，加上换后的数；j, sj, end的修改见前面的思路。

另外， m 元子集堆结构是不需要在代码中建出来的，我们只需要维护候选结点的优先队列。