

Numerical Optimization

Lecture 3: Simplex Method

王浩

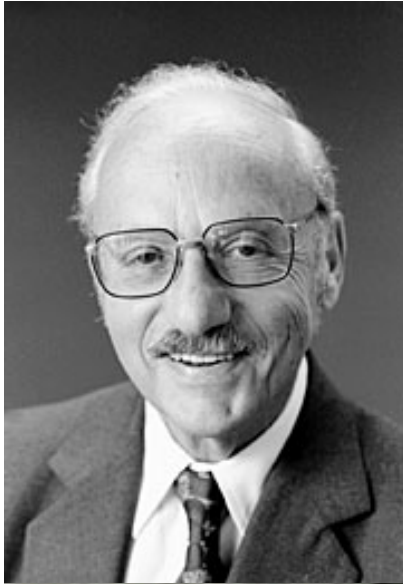
信息科学与技术学院

Email: wanghao1@shanghaitech.edu.cn

线性规划的历史

- 渊源要追溯到Euler、Leibniz、Lagrange等
- 二战期间，G. Dantzig, Von Neumann和 L. Kantorovich等等在1940's创建了线性规划
- 1947年, George Bernard Dantzig于发明了单纯形法
- 被誉为对20世纪的科学发展和工程实践产生巨大影响的10大算法
- 以后接着说.....

单纯形法的历史



- **George Bernard Dantzig**

1914-2005

University of Maryland (BS)

University of Michigan (MS)

University of California, Berkeley (PhD)

mathematical adviser to the military (1946-1952),

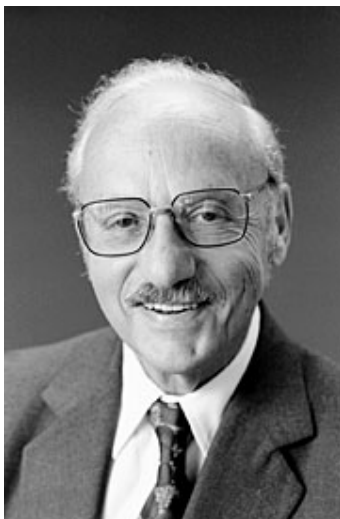
a research mathematician at the RAND Corp. (1952-1960)

chair and professor of the Operations Research Center at UC-Berkeley (1960-1966).



The recipients of the Dantzig Prize are:

- 1982: [Michael J.D. Powell](#), [R. Tyrell Rockafellar](#)
- 1985: [Ellis Johnson](#), [Manfred Padberg](#)
- 1988: [Michael J. Todd](#)
- 1991: [Martin Grotschel](#), [Arkady S. Nemirovskii](#)
- 1994: [Claude Lemarechal](#), [Roger J.B. Wets](#)
- 1997: [Roger Fletcher](#), [Stephen M. Robinson](#)
- 2000: [Yurii Nesterov](#)
- 2003: [Jong-Shi Pang](#), [Alexander Schrijver](#)
- 2006: [Eva Tardos](#)
- 2009: [Gérard Cornuéjols](#)
- 2012: [Jorge Nocedal](#), [Laurence Wolsey](#)
- 2015: [Dimitri P. Bertsekas](#)
- 2018: [Andrzej Piotr Ruszczyński](#), [Alexander Shapiro](#)
- 2021: [Hedy Attouch](#), [Michel Goemans](#)




传奇永流传

- George Bernard Dantzig



中国网事·感动2016
第三季度网络人物评选候选人

// “心灵捕手”余建春



出身草根，没有受过任何专业教育，却执着于数学梦想，在艰难环境中推导出一项受学界认可的公式。这个诗意故事的主人公，是打工青年余建春。

Simplex Method (单纯形法)

- 适用形式：standard form (BFS好找)
- 理论基础：线性规划的基本定理！
- 基本思想：从约束集的某个极点/BFS开始，依次移动到相邻极点/BFS，直到找出最优解，或判断问题无界。

Simplex Method (单纯形法)

- 适用形式: standard form (BFS好找)
- 理论基础: 线性规划的基本定理 !
- 基本思想: 从约束集的某个极点/BFS开始, 依次移动到相邻极点/BFS, 直到找出最优解, 或判断问题无界.
- 迭代规则: 如何从一个极点/BFS迭代到相邻的 (更好的) 极点/BFS? (转轴)
- 终止准则: 何时最优? 何时无界? (即约费用)
- 初始化: 如何找到一个BFS? (启动)
- 退化: 如何避免死循环? (Bland法则)

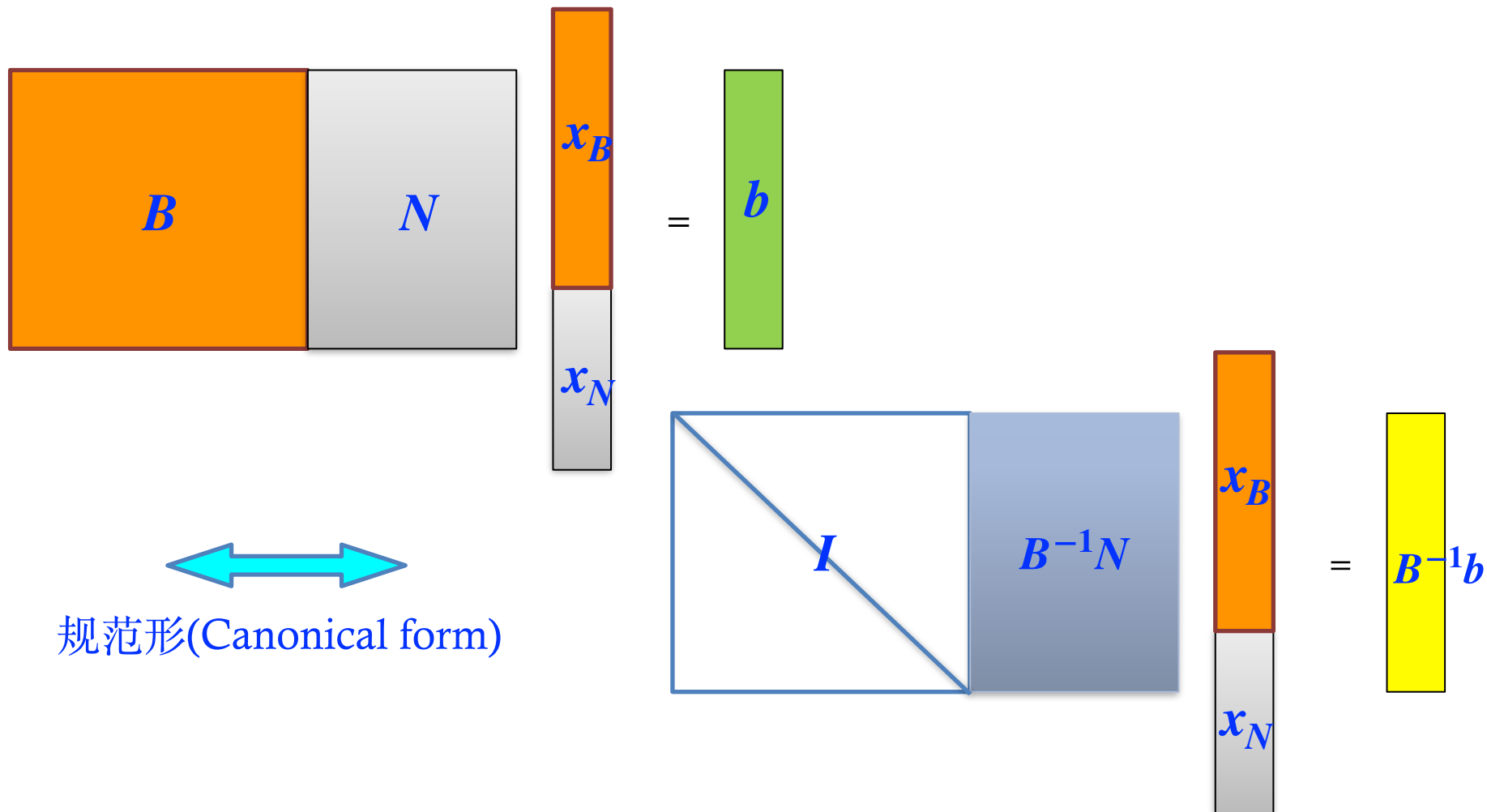
1、Simplex Method

标准形 $\min c^T x \quad \text{s.t. } Ax = b, x \geq 0$

$$B = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_{B(1)} & a_{B(2)} & \cdots & a_{B(m)} \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{bmatrix}$$

\mathcal{B} : set of basis

\mathcal{N} : set of nonbasic



规范形(Canonical form)

规范形(Canonical form) $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, x \geq 0$

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array}} & + \boxed{\begin{array}{c} y_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + y_{1,n}x_n \\ y_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + y_{2,n}x_n \\ \vdots \\ y_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + y_{m,n}x_n \end{array}} & = \begin{array}{c} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{array}
 \end{array}$$

↑
这代表了什么?

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

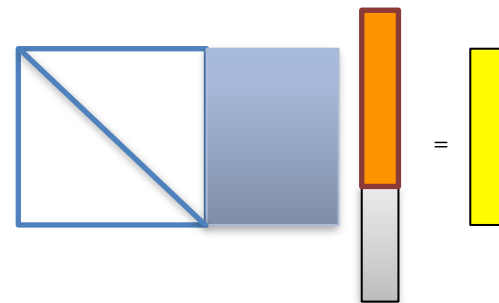
不妨设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]$, 第 j 列的系数向量 $\mathbf{y}_j = [y_{1j}, \dots, y_{mj}]^T$ 为

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \implies \mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \dots + y_{mj}\mathbf{a}_m$$

第 j 列的系数是用当前基表示 \mathbf{a}_j 时的系数 !

将 $Ax = b$ 的任一解 x 用非基变量表示为

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{b}_1 - \sum_{j=m+1}^n y_{1j} x_j \\ x_2 &= \bar{b}_2 - \sum_{j=m+1}^n y_{2j} x_j \\ &\vdots \\ x_m &= \bar{b}_m - \sum_{j=m+1}^n y_{mj} x_j \end{aligned}$$



$$x_B + B^{-1}N(Y) x_N = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$x_1 = \bar{b}_1 - \sum_{j=m+1}^n y_{1j}x_j$$

❖ 既约费用系数的经济解释！(合成费用、相对费用)

$$x_2 = \bar{b}_2 - \sum_{j=m+1}^n y_{2j}x_j$$

❖ What if you have all reduced costs being nonnegative?

⋮

$$x_m = \bar{b}_m - \sum_{j=m+1}^n y_{mj}x_j$$

❖ What is the values of $r_j, j \in \mathcal{B}$?

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = f_0 + \sum_{j=m+1}^n (c_j - z_j)x_j$$

$$f_0 = \bar{b}_1c_1 + \dots + \bar{b}_mc_m,$$

$$z_j = y_{1j}c_1 + \dots + y_{mj}c_m$$

Reduced Cost

$$r_j = c_j - z_j$$

Reduced Linear Programming (既约线性规划)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && r_{m+1}x_{m+1} + \dots + r_nx_n + f_0 \\ & \text{subject to} && (x_1 =) \bar{b}_1 - \sum_{j=m+1}^n y_{1j}x_j \geq 0 \end{aligned}$$

原问题相对**basis** ...

B的等价表述

$$\begin{aligned} & (x_m =) \bar{b}_m - \sum_{j=m+1}^n y_{mj}x_j \geq 0 \\ & x_{m+1} \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

- 定理(**optimality criterion**最优性判别)

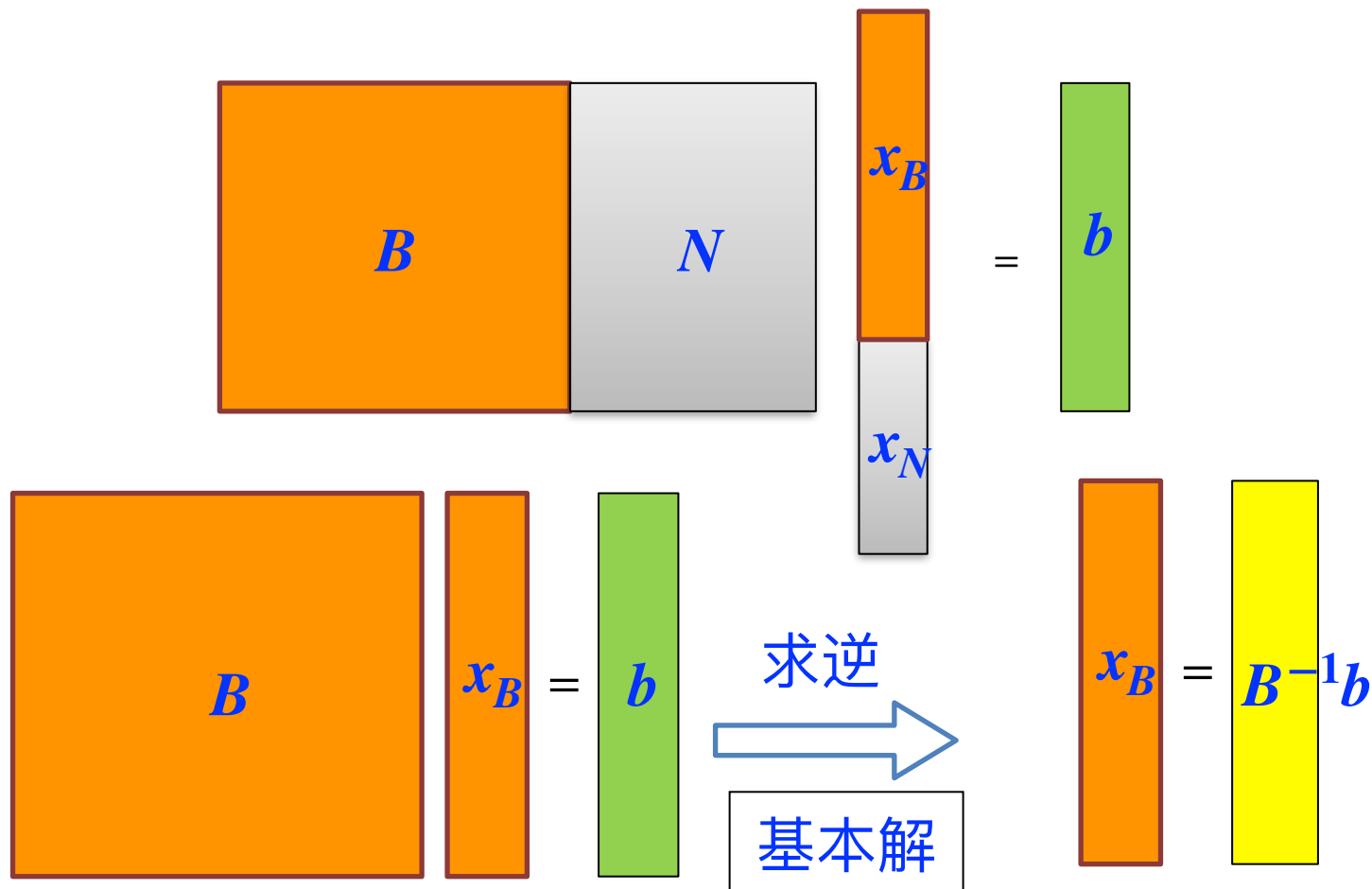
在某**基本可行**解处，如果对所有 j 有 $r_j = c_j - z_j \geq 0$ ，
则这个基本可行解是最优的。

- 如果没有达到最优，该怎么办？

当前选取基为: $A = [B \ N]$, $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$,

在选定的基上把 x_B 用 x_N 来表示: $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

把 x_N 设置为0得基本解 (假设可行且非退化) 为: $x^{(0)} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$



基本可行解的改进

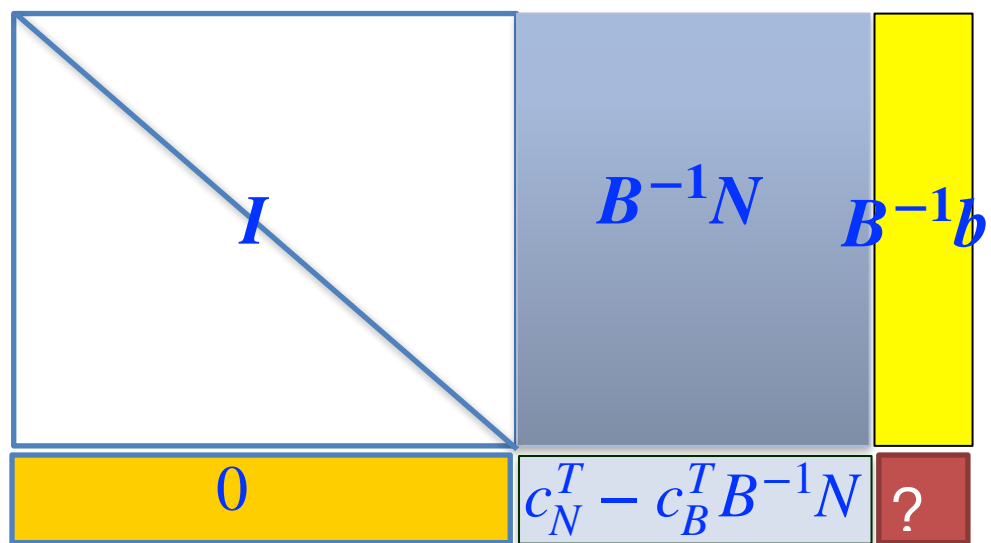
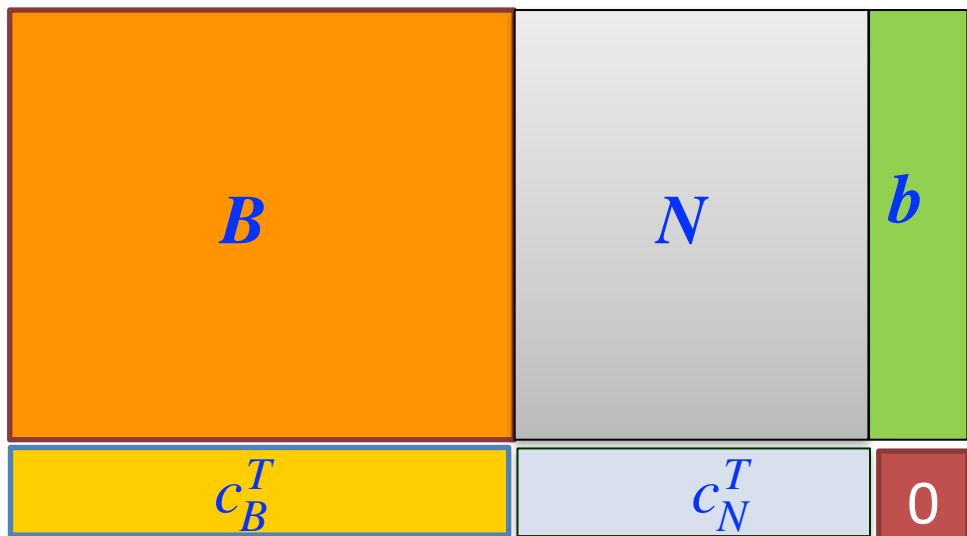
在 $x^{(0)}$ 的目标函数值为: $f_0 = c^T x^{(0)} = [c_B^T, c_N^T] \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1}b$

现在换一个不同的可行解: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$

带入, 目标函数变为:

$$\begin{aligned} f &= c^T x = [c_B^T, c_N^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N \\ &= \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{f_0} + \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N}_r \end{aligned}$$

现在假设 $r_q > 0$



严格增大，则目标严格下降

minimize $r_{m+1}0 + \dots r_{q-1}0 + r_q \boxed{x_q} + r_{q+1}0 + \dots + r_n 0 + f_0$

非退化，则这些都是正数

subject to

$(x_1 =) \boxed{\bar{b}_1} - y_{1q} \boxed{x_q} \geq 0$

\vdots

$(x_m =) \boxed{\bar{b}_m} - y_{mq} \boxed{x_q} \geq 0$

$x_{m+1} \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

x_q 可以严格增大

如果有多个 $r_j < 0$ ，选哪个？ $r_q = \min_j \{r_j, j \in \mathcal{N}\}$

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_q x_q = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1q} \\ y_{2q} \\ \vdots \\ y_{mq} \end{bmatrix} x_q \geq 0$$

所以 x_q 最大可以是 $\max? \min? \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0, i = 1, \dots, m \right\} = \frac{\bar{b}_p}{y_{pq}}$

Pivot(转轴): x_q 进基后导致 x_p 出基，得到新的基本可行解

从一个基本可行解，得到了一个临近的基本可行解

并且带来了目标函数的（严格）下降

基本可行解的改进

定理 (BFS的改进)

给定目标值为 f_0 的非退化基本可行解，且假设存在 q 使得 $r_q < 0$ ，则

- (i) 用 a_q 替换基中某列得到了新的BFS，则新BFS处的目标值比当前目标值严格小. (why?)
- (ii) 否则，即任何替换都产生不了新的BFS ($y_q \leq 0$)，问题无界. (why?)

基本算法：给定一组基

$$\text{目标函数变为: } f = f_0 + \sum_{i \in \mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j = f_0 + \sum_{i \in \mathcal{N}} r_j x_j$$

如果换为新的基本可行解，则选某 x_j 从0变为非0

令 $r_q = \min_j \{r_j, j \in \mathcal{N}\}$ ，选 q 进基，但开除哪个基变量？

$$\begin{aligned} \text{原基变量: } \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}[\dots \mathbf{a}_q \dots] \begin{bmatrix} \vdots \\ x_q \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= \boxed{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}} - \boxed{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_q}x_q = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_q x_q \end{aligned}$$

当增加 x_q ， f 下降，但是持续增加 x_q ，还能保证 $\mathbf{x}_B \geq 0$ ？

如果 $\mathbf{y}_q \leq 0$ ，则令 $x_q \rightarrow +\infty$ ，问题无界 $f \rightarrow -\infty$

如果存在 $p \in \{1, \dots, m\}$ 有 $y_{pq} > 0$ ，则 x_q 不可能无限制增大

一直增大 x_q ，使得某原来的基变量 $x_i, i \in \mathcal{B}$ 变成0（出基）

何时终止算法?

以 (p, q) 元转轴后, 新规范形的系数

Pivot, 意味着以此消元

Pivot后, 意味此列出基

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x_1 & & + y_{1q}x_q + \dots + y_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \boxed{1 \cdot x_p} & & + \boxed{y_{pq}}x_q + \dots + y_{pn}x_n = \bar{b}_p \\ & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot x_m & + y_{mq}x_q + \dots + y_{mn}x_n & = \bar{b}_m \end{array}$$

$$\text{对 } j = 1, \dots, n, \text{ 新系数: } y'_{ij} = \begin{cases} y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq} & i \neq p \\ \frac{y_{pj}}{y_{pq}} & i = p \end{cases}$$

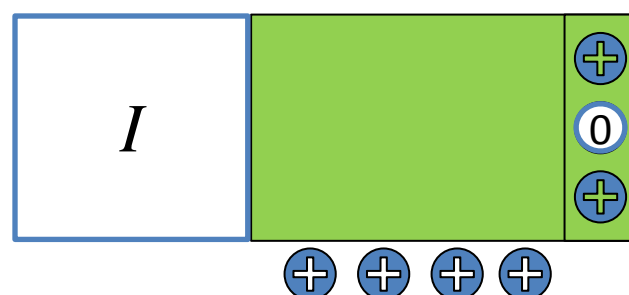
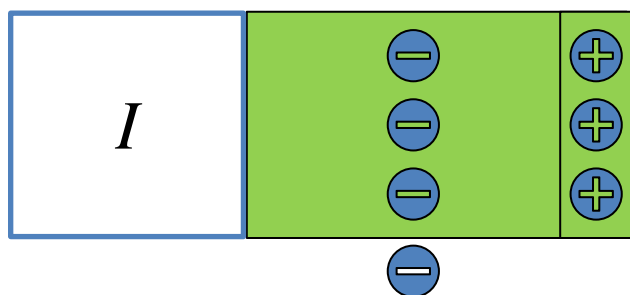
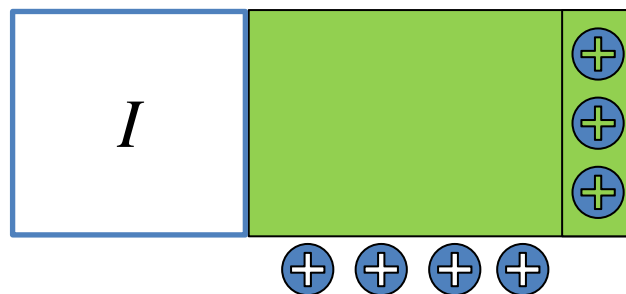
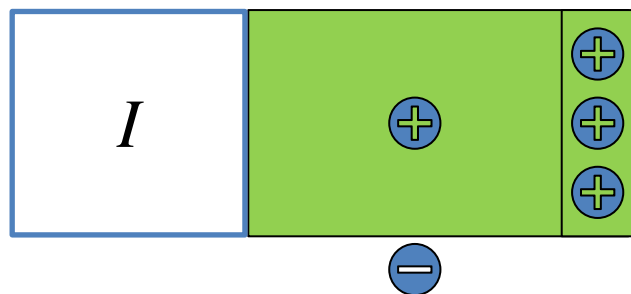
我们可以随后从单纯性表里观察到既约参数的更新

- 以 (p, q) 元转轴后，新**reduced cost**: $r'_j = r_j - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} r_q$

- 特别的:

$$r'_q = r_q - \frac{y_{pq}}{y_{pq}} r_q = 0, \quad r'_p = r_p - \frac{y_{pp}}{y_{pq}} r_q = 0 - \frac{1}{y_{pq}} r_q > 0 \quad \uparrow \text{why?}$$

$1 \cdot x_1$				$+y_{1q}x_q$	$+ \dots +$	$y_{1n}x_n$	$= \bar{b}_1$
	$1 \cdot x_p$			$+ \boxed{y_{pq}}x_q$	$+ \dots +$	$y_{pn}x_n$	$= \bar{b}_p$
		\ddots		\dots	\dots		
			$1 \cdot x_m$	$+y_{mq}x_q$	$+ \dots +$	$y_{mn}x_n$	$= \bar{b}_m$
0	$\boxed{0}$	\dots	0	$\boxed{r_q}$	\dots	$\boxed{r_n}$	
0	$\boxed{-\frac{1}{y_{pq}}r_q}$	\dots	0	$\boxed{0}$	\dots	$\boxed{r_n - \frac{y_{pn}}{y_{pq}}r_q}$	



2、Simplex Method in Tableau

Simplex Method in Tableau Format

单纯形表(tableau): **BFS**对应规范形的表格 + 既约费用系数 + **BFS**目标值的相反数

	x_1	\cdots	x_p	\cdots	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	\cdots	x_q	\cdots	x_n	$B^{-1}b$
	1	\cdots	0	\cdots	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	\cdots	y_{1q}	\cdots	y_{1n}	\bar{b}_1
		\ddots				\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	0	\cdots	1	\cdots	0	$y_{p,m+1}$	$y_{p,m+2}$	\cdots	y_{pq}	\cdots	y_{pn}	\bar{b}_p
				\ddots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	0	\cdots	0	\cdots	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	\cdots	y_{mq}	\cdots	y_{mn}	\bar{b}_m
r^T	0	\cdots	0	\cdots	0	r_{m+1}	r_{m+2}	\cdots	r_q	\cdots	r_n	$-f$

why?

单纯形表可以提供计算需要的所有信息！

- ❖ 有的教材在底端采用判别数/检验数(Optimality Test), 其为即约费用的相反数。

如何得到第一张单纯形表

- 初始化: BFS对应规范形的表格 + $(c^T, 0)$

x_1	\cdots	x_p	\cdots	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	\cdots	x_q	\cdots	x_n	$B^{-1}b$	
1	\cdots	0	\cdots	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	\cdots	y_{1q}	\cdots	y_{1n}	\bar{b}_1	
	\ddots				\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	
0	\cdots	1	\cdots	0	$y_{p,m+1}$	$y_{p,m+2}$	\cdots	y_{pq}	\cdots	y_{pn}	\bar{b}_p	
			\ddots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	
0	\cdots	0	\cdots	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	\cdots	y_{mq}	\cdots	y_{mn}	\bar{b}_m	
c^T	c_1	\cdots	c_p	\cdots	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	\cdots	c_q	\cdots	c_n	0

- 用转轴运算(初等行变换)将最后一行与基变量对应的元素化为零，即得第一张单纯形表！(Why?)

例1. maximize $3x_1 + x_2 + 3x_3$
 subject to $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$
 化标准形 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5,$
 $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

得标准形的初始表格/第一张单纯形表

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
c^T / r^T	-3	-1	-3	0	0	0	0

转轴

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
-1	0	-2	1	0	0	2
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
-7	0	0	-3	2	0	4

转轴

转轴

0



-2



-4



x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	1/5	0	3/5	-1/5	0	1/5
0	3/5	1	-1/5	2/5	0	8/5
0	1	0	-1	0	1	4
0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

最优解:

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_3 = \frac{8}{5}, x_6 = 4, x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

最优值: $-\frac{27}{5}$ 原问题的极大值: $\frac{27}{5}$

单纯形法的步骤

步0 形成与初始BFS对应的初始表格。

通过行变换求出第一张单纯形表。

步1 若对每个 j 都有 $r_j \geq 0$ ，停；当前BFS是最优的。

步2 选取 q 满足 $r_q = \min\{r_j \mid r_j < 0, j = 1, \dots, n\}$

步3 若 $y_q \leq 0$ ，停，问题无界；

否则，选 p 满足

$$\frac{\bar{b}_p}{y_{pq}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0, i = 1, \dots, m\right\}$$

步4 以 y_{pq} 为转轴元进行转轴，更新单纯形表，返回步1。

进基变量：最小既约费用系数规则；出基变量：最小指标规则！

3、Convergence and Degeneracy

单纯形法的收敛性

- 非退化的线性规划问题

称任意一个基本可行解都非退化的线性规划问题是非退化的.

- 收敛性定理

对于非退化的线性规划问题，利用单纯形法，从任一BFS出发，可在有限步内得到最优解或判断问题无界（why?）.

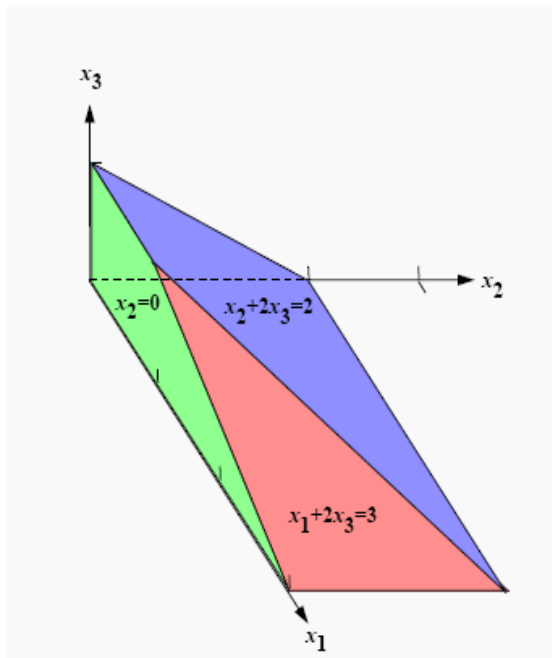
- 退化情况呢?

退化的基本可行解→退化的线性规划问题(几何解释)

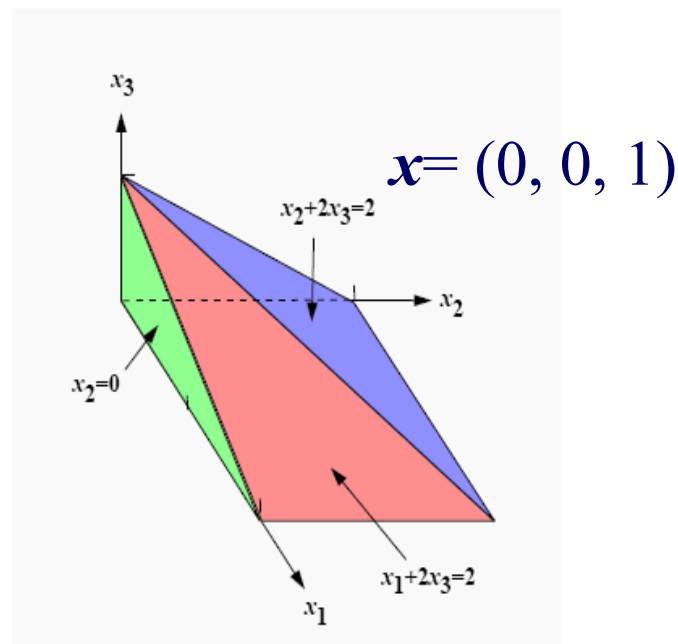
当**BFS**仅对应一个基时，是非退化的；当**BFS**对应多个基时，是退化的。

BFS是退化的当且仅当单纯形表最后一列有一个或者多个零。

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}$$



对于三维问题(非标准形, 如图), 若极点是三个平面的交点, 是非退化的; 否则, 是退化的。

退化的基本可行解→退化转轴→循环

非退化转轴

退化转轴 !

退化基本可行解

0	2	1	-3	0	2	0	0	1
0	-1	0	3	1	-1	0	0	4
1	0	0	0	0	2	0	0	3
0	0	0	1	0	-1	1	0	2
0	1	0	-1	0	0	0	1	0
0	-5	0	-4	0	-1	0	0	-6

退化转轴指转轴后目标函数的值没有发生变化！

退化(degenerate) → 循环(cycling)

- 退化问题

单纯形法可能出现循环(从某张单纯形表开始, 若干次转轴迭代后又返回到该单纯形表的一串转轴)

- 循环的例子 E. M. L. Beale 的例子 ([1]例3.3.1)

$$\text{minimize} \quad -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7$$

$$\text{subject to} \quad x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$

$$x_3 + x_6 = 1$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0$$

- 转轴规则(进基出基变量的选取规则)

进基变量: 最小既约费用系数(平局时采用最小指标)规则

出基变量: 最小正比率(平局时采用最小指标)规则

1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

$$B = (a_1, a_2, a_3)$$

$$x = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$$

4	0	0	1	-32	-4	36	0
-2	1	0	0	4	3/2	-15	0
0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	0	-4	-7/2	33	0

$$B = (a_4, a_2, a_3)$$

-12	8	0	1	0	8	-84	0
-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	-2	18	0

$$B = (a_4, a_5, a_3)$$

$-3/2$	1	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	0
$1/16$	$-1/8$	0	$-3/64$	1	0	$3/16$	0
$3/2$	-1	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	1
<hr/>							
-2	3	0	$1/4$	0	0	-3	0

最小既约费用系数原则

$$B = (a_6, a_5, a_3)$$

2	-6	0	$-5/2$	56	1	0	0
$1/3$	$-2/3$	0	$-1/4$	$16/3$	0	1	0
-2	6	1	$5/2$	-56	0	0	1
<hr/>							
-1	1	0	$-1/2$	16	0	0	0

$$B = (a_6, a_7, a_3)$$

1	-3	0	$-5/4$	28	$1/2$	0	0
0	$1/3$	0	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
<hr/>							
0	-2	0	$-7/4$	44	$1/2$	0	0

$$B = (a_1, a_7, a_3)$$

1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

第七张单纯形表 $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ，又回来了！循环！

注：循环时，转轴序列中所有**BFS**都是退化的，是同一个**BFS**，但每张表对应这个**BFS**的互不相同的基！

避免循环的方法

- 实际中经常碰到退化问题，但很少出现循环
- 避免出现循环的措施：摄动法、字典序法、Bland法则
- 摄动法(Charnes, 1954)、字典序法(Dantzig, Orden, Wolfe, 1954)
- **Bland法则(Bland, 1977)—最小指标法则**
 - ◆ 进基后使目标值减小的变量中，选**指标最小者**进基(负既约费用系数中指标最小者规则)
 - ◆ 出基后使新的基本解保持可行的变量中，选**指标最小者**出基(最小正比率规则，平局时取最小指标者)



New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method. *Mathematics of Operations Research*. Vol. 2, No. 2 (May, 1977), pp. 103-107 (5 pages)

利用**Bland**法则作为转轴规则求解**Beale**的例子！

前四张单纯形表相同！但在第四张单纯形表：

$-3/2$	1	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	0
$1/16$	$-1/8$	0	$-3/64$	1	0	$3/16$	0
$3/2$	-1	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	1
-2	3	0	$1/4$	0	0	-3	0

0	-2	0	-1	24	1	-6	0
1	-2	0	$-3/4$	16	0	3	0
0	2	1	1	-24	0	6	1
0	-1	0	$-5/4$	32	0	3	0

0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1/4	-8	0	9	1
0	1	1/2	1/2	-12	0	3	1/2
0	0	1/2	-3/4	20	0	6	1/2
0	0	1	0	0	1	0	1
1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
0	2	1	1	-24	0	6	1
0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4

最后一张单纯形表/最优单纯形表

$$x^* = (3/4, 0, 0, 1, 0, 1, 0)^T, z^* = -5/4$$