线性代数(2023-2024)第七次作业

1 复习知识点

- 基底变换问题中的转移矩阵求法，尤其是目前讲义第116页-117页所介绍的算法需要掌握。
- 本次作业的要点之一，也是期中考试潜在考点之一，是如何从一个给定集合$S=\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r\}\subset\mathbb{R}^n$里选出$W=\text{span}(S)$的一组基底。这里我们需要记住的解题方法是：将$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$作为**列向量**拼成$n\times r$-矩阵$A$，然后用初等行变换将$A$转化为阶梯型$R$，那么$R$里所包含主1的列所对应原矩阵$A$中的列向量组成$W=\text{span}(S)$的一组基底。具体细节请参考目前讲义第125页的例子。
- 对一个矩阵A，通过确定Null(A)的一组基底$\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r\}$，写出线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的基础解系：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_0+c_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+c_r\boldsymbol{v}_r,\quad \boldsymbol{s}_0\text{为一个特解}.$$

  目前讲义120页-122页的例子是重要题型。

2 习题部分

Problem A(6 Points). (2022年线性代数期末考试题)
Consider the sets of functions $B=\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$ and $B'=\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$, where

$$f_1(x)=1,f_2(x)=\sin x,f_3(x)=\cos x,$$
$$g_1(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6}),g_2(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3}),g_3(x)=(\sin(\frac{x}{2}))^2.$$

Let $V=\text{span}\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$. Compute the transition matrix from the basis B' to B.

Problem B(6 Points). (2022年线性代数期末考试题)
In P_2, let $p_1(x)=5+2x+4x^2$, $p_2(x)=-3+2x+2x^2$, $q_1(x)=2-x-2x^2$, $q_2(x)=2x+5x^2$. Let $V=\text{span}\{p_1(x),p_2(x)\}$, $W=\text{span}\{q_1(x),q_2(x)\}$. Find a basis for $V\cap W$.
提示： 令$B=\{1,x,x^2\}$为P_2的标准基底，考虑坐标向量

$$[p_1(x)]_B,[p_2(x)]_B,[q_1(x)]_B,[q_2(x)]_B\in\mathbb{R}^3.$$

这样将问题转化为求$V' = \text{span}\{[p_1(x)]_B, [p_2(x)]_B\} \subset \mathbb{R}^3$与$W' = \text{span}\{[q_1(x)]_B, [q_2(x)]_B\} \subset \mathbb{R}^3$的交集$V' \cap W'$的基底。

Problem C(6 Points). (2019年某985高校线性代数期中考试题)

设$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -7 & 9 \end{bmatrix}$，$\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$，$\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ s \\ 2.4 \end{bmatrix}$，其中$s$为参数。

1. (3 points) 解方程组$A\boldsymbol{x} = \beta$，并将其通解表示为基础解系：

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 + c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_r\boldsymbol{v}_r, \quad \boldsymbol{s}_0\text{为一个特解.}$$

   $\boldsymbol{s}_0$为一个特解，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$为Null$(A)$的一组基底。

2. (3 points) 令B为分块矩阵

$$B = \begin{bmatrix} A & \beta \\ \gamma^\top & 3 \end{bmatrix}.$$

   解方程组$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，并将其通解表示为基础解系：

$$\boldsymbol{s} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_r\boldsymbol{v}_r, \quad \boldsymbol{s}_0\text{为一个特解.}$$

   $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$为Null$(B)$的一组基底。

Problem D(6 Points). (2019年某985高校线性代数期中考试题)

令$S = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$，令$M = \left\{ \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$。

1. (2 points) 求S的一个子集$S' \subset S$使得S'是span(S)的一组基底。
2. (2 points) 求M的一个子集$M' \subset S$使得M'是span(M)的一组基底。
3. (2 points) 求$S \cup M$的一个子集$Z \subset S \cup M$使得Z是span$(S \cup M)$的一组基底。

Problem E(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)

Let Z be a vector space of dimension 5. Let $U, V, W \subset Z$ be subspaces of Z such that

$$\dim(U) = \dim(V) = \dim(W) = 2,$$

and $U+V+W=Z$. Prove that $U\cap V\cap W=\{\mathbf{0}\}$.

Bonus: (2022年线性代数期中考试题) (不计入分数)

Let U be a vector space of dimension 6. Let V and W be two subspaces of U such that $\dim(V)=2$, $\dim(W)=3$. Find all possible dimensions of $V+W$, and explain your argument.

提示： 不妨令$U=\mathbb{R}^6$ (为何？)。若$B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$为$V$的一组基底，$M=\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$为$W$的一组基底，不难验证$V+W=\text{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$。因此问题转化为如何找出span$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$的一组基底，在该过程中可得到基底可能包含的向量个数。

Deadline: 22:00, November 26.

作业提交截止时间：11月26日晚上22：00。