线性代数(2023-2024)第九次作业

1 复习知识点

- 线性变换的两个重要性质：$T : V \to W$是一个线性变换，如果它同时满足
  1. $T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2)$ (additivity),
  2. $T(k\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{v})$ (homogeneity).
- 如果$V = \mathbb{R}^n$，$W = \mathbb{R}^m$，那么$T : V \to W$是一个线性变换当且仅当它是一个矩阵变换，即存在$A \in M_{m\times n}$使得$T(\boldsymbol{x}) = T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$对任何$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$都成立。这里$A = [T]$被称为$T$的标准矩阵(standard matrix)，它的表示为

  $$A = [T] = \begin{bmatrix} T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) & \dots & T(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix}$$

  这里$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$为$\mathbb{R}^n$的标准单位向量，即它们组成$\mathbb{R}^n$的标准基底。
- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的线性性质导致$T$实际上被它在标准基底$\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$上的取值所决定。这是线性变换特有的重要性质。对于一般向量空间之间的线性变换$T : V \to W$，也有类似的性质，见本次作业习题。
- 值域(range)，核(kernel)，单射(injective)/一一映射(one-to-one)，满射(surjective,onto)的定义，以及它们与标准矩阵之间的关系。尤其是讲义的Thoerem 4.51.

2 习题部分

Problem A(6 Points)

请大家认真阅读英文教材第263页上的Table 6，并用数学语言描述/证明以下说法。

1. (2 points) 令$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$上的线性变化，它将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正$x$轴逆时针旋转$\theta$度(counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ)。那么$T(x, y, z) = (x, y\cos\theta - z\sin\theta, y\cos\theta + z\sin\theta)$，且它的标准矩阵为

   $$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. (2 points) 令$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$上的线性变化，它将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正$y$轴逆时针旋转$\theta$度(counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ)。那么$T(x, y, z) = (x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta)$，且它的标准矩阵

为

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

3. (2 points) 令$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$上的线性变化，它将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正$z$轴逆时针旋转$\theta$度(counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ)。那么$T(x,y,z)=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta,z)$，且它的标准矩阵为

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Problem B(6 Points)

请大家仔细阅读英文教材4.9节的Table 1 – Table 8，之后计算以下题目：
Find the standard matrix for the stated composition in $\mathbb{R}^3$.

1. (2 points) A rotation of $\frac{\pi}{6}$ about the positive x-axis, followed by a rotation of $\frac{\pi}{6}$ about the positive z-axis, followed by a contraction with factor $k=1/4$.
2. (2 points) A reflection about the xy-plane, followed by a reflection about the xz-plane, followed by an orthogonal projection onto the yz-plane.
3. (2 points) A rotation of $\frac{3\pi}{2}$ about the positive x-axis, followed by a rotation of $\frac{\pi}{4}$ about the positive y-axis, followed by a rotation of π about the z-axis.

Problem C(6 Points)

Determine whether the matrix transformation $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ defined by the equations is one-to-one; if so, find the standard matrix for the inverse operator T^{-1}, and find $T^{-1}(w_1,w_2,w_3)$.

1. (3 points)

$$T(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1-2x_2+2x_3\\ 2x_1+x_2+x_3\\ x_1+x_2\end{bmatrix}.$$

2. (3 points)

$$T(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1-3x_2+4x_3\\ -x_1+x_2+x_3\\ -2x_2+5x_3\end{bmatrix}.$$

Problem D(6 Points)

判断以下说法是否正确。如果正确写出证明，如果错误举出反例。

1. (2 points) 如果$n > m$，那么任何矩阵变换$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$都不可能是一一映射(one-to-one)。
2. (2 points) 如果$n < m$，那么任何矩阵变换$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$都不可能是满射(surjective, onto)，即不可能有$R(T) = \mathbb{R}^m$。
3. (2 points) 令$V = C^1(-\infty, \infty)$为所有连续可微函数的集合，令$W = C(-\infty, \infty)$为所有连续函数的集合，令$D : V \to W$为求导运算：$D(f(x)) = f'(x)$。那么D即是一一映射又是满射。

Problem E(6 Points)

证明以下两个说法。

1. (3 points) 假设V为一个向量空间，$\dim(V) = n$，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$为$V$的一组基底。假设$W$为另一个向量空间。那么如果两个线性变换$T : V \to W$与$S : V \to W$满足

$$T(\boldsymbol{v}_1) = S(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2) = S(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n) = S(\boldsymbol{v}_n),$$

   则必然有$T = S$，即$T(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v})$对任何$\boldsymbol{v} \in V$都成立。
2. (3 points) Let U, V, W be vector spaces and let $T : V \to W$, $S : W \to U$ be linear transformations. Prove that $\text{rank}(S \circ T) \le \min(\text{rank}(S), \text{rank}(T))$, $\text{rank}(S \circ T) = \text{rank}(S)$ if T is surjective, $\text{rank}(S \circ T) = \text{rank}(T)$ if S is one-to-one.

Deadline: 22:00, December 17.

作业提交截止时间：12月17日晚上22：00。