Linear Algebra Tutorial 13

2024.1.2

homework

Definition 6.9. 假设$A \in M_{n\times n}$，λ为A的一个特征值。我们称$Null(\lambda I_n - A)$为A关于λ的**特征空间*(the eigensapce of A corresponding to the eigenvalue λ)***。

homework

C

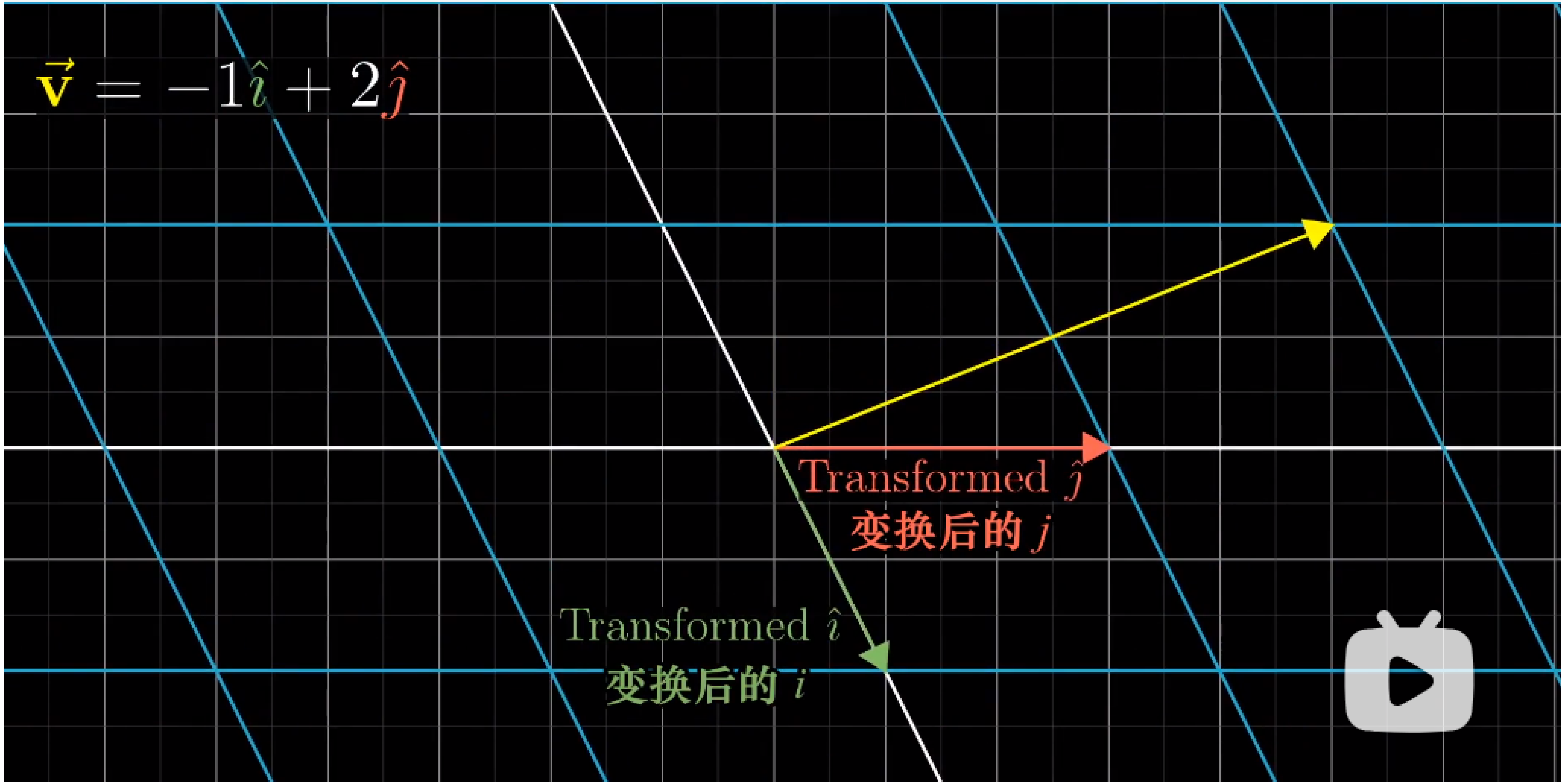
2. (2 points) Let $J : P_3 \to \mathbb{R}$ be the integral transformation, $I(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$. Let $B' = \{1\}$ be the standard basis of $\mathbb{R}$, $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ be the standard basis of P_3, what is the matrix $[J]_{B',B}$? What is the kernel of J?

$$[J]_{B',B} = [2\ 0\ \frac{2}{3} 0]$$

$$Ker(J) = ?$$

特征值(eigenvalue)与特征向量(eigenvector)

> chapter 5 in the textbook



特征值(eigenvalue)

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
$\left|\lambda I - A\right| = 0$

- $p(\lambda) = \left|\lambda I - A\right|$: eigen polynomial 特征多项式
- $p(\lambda) = 0$: characteristic equation 特征方程

eigen polynomial 特征多项式

$p(\lambda) = \left|\lambda I - A\right|$

$p(\lambda)$为关于λ,最高次项为n的多项式

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

- let $\lambda = 0$, then $p(0) = \left|-A\right| = (-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n = a_0 \Rightarrow a_0 = (-1)^n|A|$
  $\left|A\right| = \lambda_1\cdots\lambda_n = (-1)^n a_0$
- 由行列式的另一种定义(不同行不同列的元素的积之和), λ_{n-1}的系数只能由
  $(\lambda - a_{11})\cdots(\lambda - a_{nn})$产生, 即$a_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$
  $tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = -a_{n-1}$

特征向量(eigenvector)

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

- the nontrivial solutions of $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{x} \in null(A - \lambda I)$
- $\mathbf{x}$: the eigenvectors(特征向量) of A corresponding to λ
- $null(A - \lambda I)$: the eigenspace(特征空间) of A corresponding to λ

The number of the eigenvectors of A corresponding to λ_i is same as the multiplicity of roots of λ_i of $p(\lambda)$

property

Theorem 6.7. 以下说法都成立：

1. 对于任何n阶方阵$A \in M_{n\times n}$，它最多有n个不同的特征值。
2. 对于上三角矩阵$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$它有特征值为对角线上的元素$a_{11}, \dots, a_{nn}$。该结论对下三角矩阵也成立。
3. 假设$\lambda \in \mathbb{R}$为A的一个特征值，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$为$A$关于$\lambda$的一个特征向量，那么对于任何多项式$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$，$f(\lambda)$是多项式矩阵$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_m A^m$的一个特征值，$\boldsymbol{x}$为$f(A)$关于$f(\lambda)$的一个特征向量。
4. A可逆当且仅当$\lambda = 0$不是A的特征值。
5. 如果$\lambda \in \mathbb{R}$为A的一个特征值，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$为$A$关于$\lambda$的一个特征向量，且$A$可逆，那么对于任何多项式$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$，$f(\frac{1}{\lambda})$是多项式矩阵$f(A^{-1}) = a_0 I_n + a_1 A^{-1} + \dots + a_m A^{-m}$的一个特征值，$\boldsymbol{x}$为$f(A^{-1})$关于$f(\frac{1}{\lambda})$的一个特征向量。

example

A is a 2×2 matrix with eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, $B = A^{-2} - 6A^{-1}$, the eigenvalues of B are -5 and 7, find λ_1, λ_2

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - 6\frac{1}{\lambda_1} = -5$$
$$\frac{1}{\lambda_2^2} - 6\frac{1}{\lambda_2} = 7$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

similarity invariants 相似不变量

$B = P^{-1}AP$

- determinant, rank, nullity, trace
- A,B有相同的特征多项式(eigen polynomial)
  $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |\lambda I - A|$
- A,B有相同的特征值(eigenvalues)
- A,B 特征空间的**维度数**相同,特征空间不一定相同

similarity

$B = P^{-1}AP$

- A, B 有相同的eigenvalues λ
- 若$\mathbf{x}$是A的eigenvector, 则$P^{-1}\mathbf{x}$是B的eigenvector
- 若$\mathbf{y}$是B的eigenvector, 则$P\mathbf{y}$是A的eigenvector

(相似)对角化 Diagonalization

若一个矩阵A可写作$D = P^{-1}AP$,即$A = PDP^{-1}$, 则称A可对角化(diagonalizable)

usage:
$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

Diagonalization

e.g. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, find A^n

思路: 将A对角化, $A = PDP^{-1}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

1. 求A的特征值和特征向量
2. 将特征向量组成P
   原因: $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD$

$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$
$P = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n]$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Diagonalization

可对角化: 对于一个有着k重根的特征值, 其特征空间的维度也为k

即能找到n个线性无关的特征向量

- 若 $A \in M_{n \times n}$拥有n个不同的特征值，那么A可对角化
  每个特征值至少有一个对应的特征向量
- 不同特征值的对应的特征向量线性无关
- A的任何一个特征值λ, 几何重数(geometric multiplicity)(特征空间的维度) $\leq$ 代数重数(algebraic multiplicity)(λ的重数)

property

- **对称矩阵**不同特征值对应的特征向量彼此正交
  设$\lambda_1 \neq \lambda_2$, 其对应的特征向量为$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$
  $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$
  $\mathbf{x}_1^\top A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^\top\lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_1^\top\mathbf{x}_2$
  $(A\mathbf{x}_1)^\top\mathbf{x}_2 = (\lambda_1\mathbf{x}_1)^\top\mathbf{x}_2$
  $(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}_1^\top\mathbf{x}_2 = x_1^\top A\mathbf{x}_2 - x_1^\top A^\top\mathbf{x}_2 = 0$
- 若将**对称矩阵**的特征向量的基**单位化**得到P,则P是正交矩阵
  $P^\top P = I$
- 实对称矩阵一定可以相似对角化
- $A^\top A$的特征值一定都是非负的
  $\forall x, x^\top A^\top Ax = \|Ax\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow A^\top A \succeq 0 \Leftrightarrow A^\top A$的特征值都是非负的
- 同理, $AA^\top$的特征值一定都是非负的

数列的特征值

e.g. $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$x^2 = x + 1$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$

带入$a_0 = a_1 = 1$得到c_1, c_2的值

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

所以$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

数列的特征值

e.g. $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

对$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$做特征值分解:

$$\left| \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix} \right| = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

内积，正交矩阵与二次型

chapter 6

$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$

- orthogonal set(正交集合)
  $\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = 0$ for $i \neq j$
- **orthogonal normal set / orthonormal**(正交规范集合)
  S is orthogonal and $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ for $i = 1, 2, \cdots, n$
- **不包含零向量的正交集合一定是线性无关的**
  $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}_i^\top \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0$

Orthogonal Matrices(正交矩阵)

- $A^\top A = AA^\top = I_n$
  $A^{-1} = A^\top$

e.g. rotation matrix $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

正交矩阵性质

- A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行/列向量组成的集合是正交规范集合
- 正交矩阵的行/列向量是**标准正交基底**
- A是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^\top$是正交矩阵
- A是正交矩阵 $\Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
- A是正交矩阵 $\Leftrightarrow A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
- A是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^{-1}$也是正交矩阵
- A, B是正交矩阵 $\Rightarrow AB$也是正交矩阵
- A是正交矩阵 $\Rightarrow |A| = 1$ or $|A| = -1$

Orthogonal Diagonalization(正交对角化)

- recall
  若一个矩阵A可写作$D = P^{-1}AP$,即$A = PDP^{-1}$, 则称A可对角化 (diagonalizable)
- 若P为正交矩阵, 即$D = P^{\top}AP$, 则称A可正交对角化(orthogonal diagonalizable)

正交对角化

A是**实对称**矩阵, 则A 一定可以正交对角化(证明较复杂)

- **对称矩阵**不同特征值对应的特征向量彼此正交(this slide P15)
- 若将**对称矩阵**的特征向量的基**单位化**得到P,则P是正交矩阵

内积空间(inner product space)

Definition 7.11. 令V为一个向量空间。令$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$为一个定义在$V\times V$上的函数，即对任何的$\boldsymbol{u}\in V,\boldsymbol{v}\in V$，$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$是一个对应的实数。如果$\langle\cdot,\cdot\rangle$满足以下条件：

1. $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle$ *(对称性，symmetry)*;
2. $\langle\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\rangle$，$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\rangle=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle+\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle$ *(对两个变量都满足可加性，additivity)*;
3. 对任何实数$k\in\mathbb{R}$，都有$\langle k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=k\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$，$\langle\boldsymbol{u},k\boldsymbol{v}\rangle=k\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ *(对两个变量都满足齐次性，homogeneity)*;
4. $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\geq 0$对任何$\boldsymbol{v}\in V$，且$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=0$当且仅当$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\in V$ *(正定性，positivity)*,

那么我们称$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$V$上的一个内积，称$V$是一个内积空间*(inner product space)*。

property

Theorem 7.12. 假设V是一个内积空间且$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$V$上的一个内积。那么以下说法全部成立：

1. $\|\boldsymbol{v}\| = 0$当且仅当$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$。
2. $\|k\boldsymbol{v}\| = |k|\|\boldsymbol{v}\|$对任何$k \in \mathbb{R}$成立。
3. $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$。
4. $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$。
5. $|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$ (*Cauchy–Schwarz* 不等式)，且等号成立当且仅当$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$线性相关。
6. $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$， $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \leq d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + d(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ (*Triangle* 不等式)。
7. $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Rightarrow \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2$ (勾股定理)。
8. 令$W \subset V$为V的一个子空间，我们称$W^\perp = \{\boldsymbol{u} \in V : \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle = 0\}$为$W$的**正交补(*orthogonal complement*)**。那么有
   - $W^\perp$是一个子空间。
   - $W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$。
   - 若W为有限维空间，那么$(W^\perp)^\perp = W$。

inner product space

Theorem 7.14. 令V为一个内积空间，其内积记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$。那么我们有以下结果：

1. 对于任何正交集合$S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\} \subset V$，如果$\boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}$对所有$i = 1, \ldots, r$成立，那么$S$一定是线性无关集合。
2. 对于任何V的标准正交基底S，任何$\boldsymbol{u} \in V, \boldsymbol{v} \in V$，将其关于$S$的坐标向量记为

$$(\boldsymbol{u})_S = (u_1, \ldots, u_n), \quad (\boldsymbol{v})_S = (v_1, \ldots, v_n),$$

那么总是有

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = u_1^2 + \ldots + u_n^2,$$

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = (\langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2},$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n.$$

3. 若V为有限维向量空间，S与S'为V的两组标准正交基底。那么$P_{S \leftarrow S'}$与$P_{S' \leftarrow S}$都是正交矩阵。

- 与欧式空间类似, 只需把点乘替换成内积即可$< \cdot, \cdot >$