线性代数(2023-2024)第二次作业参考答案

Problem A(6 Points). 证明以下说法

1. (2 分) 假设A为一个$m \times r$-矩阵，B为一个$r \times n$-矩阵，将B用列向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

每个$\boldsymbol{c}_j$为$r \times 1$-矩阵，$j = 1, \dots, n$。证明矩阵乘积AB的列向量表示：

$$AB = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{c}_1 & A\boldsymbol{c}_2 & \dots & A\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

即A与B的乘积AB的第j列为矩阵A与B的第j列$\boldsymbol{c}_j$ (作为$r \times 1$-矩阵)的乘积$A\boldsymbol{c}_j$。

答案：首先回顾矩阵乘法的定义：将A用行向量表示：$A =$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{r}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m$; 将$B$用列向量表示：$B =$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{c}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}, j = 1, \dots, n$，那么乘积$AB$在第$i$行第$j$列上的项定义为

$$(AB)_{ij} = \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{c}_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj},$$

即，$(AB)_{ij}$为矩阵A第i行与矩阵B第j列的乘积，对任何$i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$。因此AB是以下矩阵 $AB =$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_n \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_n. \end{bmatrix}$$

特别地，矩阵AB的第j列$(j=1,\dots,n)$为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_j \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_j \end{bmatrix}.$$

另一方面，将B的第j列$\boldsymbol{c}_j$视为$r\times 1$-矩阵，由矩阵乘法定义可得

$$A\boldsymbol{c}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_j \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_j \end{bmatrix}.$$

显然$A\boldsymbol{c}_j$与AB的第j列相等。因此AB的列向量表示为

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{c}_1 & A\boldsymbol{c}_2 & \dots & A\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}.$$

2. (1分) 设A为一个$m\times r$-矩阵，B为一个$r\times n$-矩阵。将A用行向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix},$$

每个$\boldsymbol{r}_i$为$1\times r$-矩阵，$i=1,\dots,m$。证明矩阵乘积AB的行向量表示：

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 B \\ \boldsymbol{r}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m B \end{bmatrix}$$

即A与B的乘积AB的第i行为矩阵A的第i行$\boldsymbol{r}_i$ (作为$1\times r$-矩阵)与矩阵B的乘积$\boldsymbol{r}_iB$。

答案： 由矩阵乘法的定义可知，

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_n \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}.$$

即AB的第i行$(i=1,\dots,m)$ 为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}.$$

另一方面，将B写为列向量的表示：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

由于$\boldsymbol{r}_i$为$1\times r$-矩阵，由矩阵乘法定义可知$\boldsymbol{r}_iB=\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$。显然$AB$的第$i$行等于$\boldsymbol{r}_iB$。因此$AB$的行向量表示为：

$$AB=\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1B \\ \boldsymbol{r}_2B \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_mB \end{bmatrix}$$

3. (1分) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$。通过计算$(AB)C$与$A(BC)$验证矩阵乘法的结合律。

答案： 按照矩阵乘法定义计算即可。具体答案请咨询习题课助教。

4. (2分) 证明：对任何矩阵A与B，只要AB能够被定义，那么一定有$(AB)^\top=B^\top A^\top$。同时证明$(A^\top)^\top=A$。

答案： 设A为一个$m\times r$-矩阵，B为一个$r\times n$-矩阵。将A用行向量表示：$A=$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix},$$

将B用列向量表示：$B=$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}.$$

由矩阵乘法定义我们知道，

$$AB=\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_n \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

因此，由转置矩阵的定义，可知

$$(AB)^\top = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_1 & \ldots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_2 & \ldots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{c}_n & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{c}_n & \ldots & \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

即$(AB)^\top_{ij} = (AB)_{ji} = \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{c}_i$。

另一方面，我们知道若B的列向量表示为$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \ldots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$，那么 $B^\top$的行向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \\ \boldsymbol{c}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_n^\top \end{bmatrix};$$

类似地，若A的行向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix},$$

那么$A^\top$的列向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1^\top & \boldsymbol{r}_2^\top & \ldots & \boldsymbol{r}_m^\top \end{bmatrix}.$$

因此，由矩阵乘法定义可知，$(B^\top A^\top)_{ij} = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{r}_j^\top$。现在，只需代入

$$\boldsymbol{r}_j = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jr} \end{bmatrix}$$

以及

$$\boldsymbol{c}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ri} \end{bmatrix}$$

我们得到

$$\boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{r}_j^\top = \begin{bmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \ldots & b_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jr} \end{bmatrix} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \ldots + b_{ri}a_{jr}$$

以及

$$\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{c}_i = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ri} \end{bmatrix} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \ldots + a_{jr}b_{ri},$$

因此$\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{c}_i^\top\boldsymbol{r}_j^\top$，即$(AB)^\top_{ij} = (B^\top A^\top)_{ij}$ 对任何$i = 1, \ldots n$，$j = 1, \ldots, m$成立。因此$(AB)^\top = B^\top A^\top$。

要证明$(A^\top)^\top = A$只需要直接从转置矩阵的定义出发：若A为$m \times n$-矩阵，那么$A^\top$为$n \times m$-矩阵，再转置一次所得的矩阵$(A^\top)^\top$则又为$m \times n$-矩阵。对于$i = 1, \ldots, m$，$j = 1, \ldots, n$，由转置的定义可知

$$(A^\top)^\top_{ij} = A^\top_{ji} = A_{ij},$$

因此我们得到$(A^\top)^\top = A$。

Problem B(6 Points). 回顾矩阵迹(trace)的定义，并证明以下说法。

1. (2分) 对任何$A, B \in M_{n\times n}$，常数c, d， $\mathrm{tr}(cA + dB) = c\mathrm{tr}(A) + d\mathrm{tr}(B)$。

   答案： 直接从迹的定义出发即可。注意由于矩阵的迹只依赖于矩阵对角线上的项，我们只需观察矩阵$cA + dB$对角线上的项。那么由于$(cA + dB)_{ii} = cA_{ii} + dB_{ii}$对任何$i = 1, \ldots, n$成立，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(cA + dB) &= (cA_{11} + dB_{11}) + (cA_{22} + dB_{22}) + \ldots + (cA_{nn} + dB_{nn}) \\ &= c(A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}) + d(B_{11} + B_{22} + \ldots + B_{nn}) \\ &= c\mathrm{tr}(A) + d\mathrm{tr}(B).\end{aligned}$$

2. (1分) 对任何$A \in M_{n\times n}$，$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^\top)$。

   答案： 由于转置并不影响对角线，即$A^\top_{ii} = A_{ii}$对所有$i = 1, \ldots, n$成立，我们有

$$\mathrm{tr}(A^\top) = A^\top_{11} + A^\top_{22} + \ldots + A^\top_{nn} = A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn} = \mathrm{tr}(A).$$

3. (2分) 对任何$A, B \in M_{m\times n}$，证明

$$\mathrm{tr}(AB^\top) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}.$$

   Bonus(不计分数): 证明tr$(AB^\top) =$ tr$(A^\top B)$。

答案： 我们首先计算$AB^\top$的对角线。注意$AB^\top$为$m\times m$-方阵。对$i=1,\ldots,m$，我们知道$(AB^\top)_{ii}$是A的第i行与$B^\top$的第i列相乘(即这两个向量的内积)；而另一方面由转置的定义可知$B^\top$的第i列是B的第i行的转置。现在将A的第i行表示为

$$\begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{in} \end{bmatrix},$$

将B的第i行表示为

$$\begin{bmatrix} B_{i1} & B_{i2} & \ldots & B_{in} \end{bmatrix},$$

我们得到$B^\top$的第i列为

$$\begin{bmatrix} B_{i1} & B_{i2} & \ldots & B_{in} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{in} \end{bmatrix},$$

由之前的观察可得

$$(AB^\top)_{ii} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{in} \end{bmatrix}}_{A\text{的第i行}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{in} \end{bmatrix}}_{B^\top\text{的第i列}=B\text{的第i行的转置}} = A_{i1}B_{i1}+A_{i2}B_{i2}+\ldots+A_{in}B_{in}.$$

在数学上为了方便表示，我们用爱因斯坦求和符号$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$来表示将常数$A_{ij}B_{ij}$对所有下标$j=1,\ldots,n$求和；即$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = A_{i1}B_{i1}+A_{i2}B_{i2}+\ldots+A_{in}B_{in}$。也就是说现在我们得到

$$(AB^\top)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = A_{i1}B_{i1}+A_{i2}B_{i2}+\ldots+A_{in}B_{in}$$

对任何$i=1,\ldots,m$成立。那么如果我们用a_i指代$(AB^\top)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = A_{i1}B_{i1}+A_{i2}B_{i2}+\ldots+A_{in}B_{in}$，那么由矩阵迹的定义可得

$$\mathrm{tr}(AB^\top) = (AB^\top)_{11}+(AB^\top)_{22}+\ldots+(AB^\top)_{mm} = a_1+a_2+\ldots+a_m.$$

再次使用爱因斯坦求和符号，但这次对下标$i=1,\ldots,m$求和，可知

$$\mathrm{tr}(AB^\top) = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}.$$

Bonus 答案：

现在我们计算tr$(A^\top B)$。注意$A^\top B$为$n\times n$-方阵。那么对$j=1,\ldots,n$，模仿我们之前的计算，可以得到

$$(A^\top B)_{jj} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{1j} & A_{2j} & \ldots & A_{mj} \end{bmatrix}}_{A\text{的第j行}=A\text{的第i列的转置}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{mj} \end{bmatrix}}_{B^\top\text{的第j列}} = A_{1j}B_{1j} + A_{2j}B_{2j} + \ldots + A_{mj}B_{mj}.$$

注意，固定j对$i=1,\ldots,m$使用爱因斯坦求和符号，我们有

$$(A^\top B)_{jj} = A_{1j}B_{1j} + A_{2j}B_{2j} + \ldots + A_{mj}B_{mj} = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}B_{ij}.$$

令$b_j = (A^\top B)_{jj} = A_{1j}B_{1j} + A_{2j}B_{2j} + \ldots + A_{mj}B_{mj} = \sum_{i=1}^m A_{ij}B_{ij}$，由矩阵迹的定义，我们实际上得到了

$$\text{tr}(A^\top B) = (A^\top B)_{11} + (A^\top B)_{22} + \ldots + (A^\top B)_{nn} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

即

$$\text{tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij}B_{ij}.$$

最后，将以上求和完全展开，我们可以对比得到

$$\text{tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij}B_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = \text{tr}(AB^\top).$$

(实际上很容易看出以上两个求和相等，因为先对i求和再对j求和与先对j求和再对i求和得到的结果显然是一样的。不过注意这样的等式仅限于有限求和的情况，即m,n都需要是自然数。)

4. (1分) 对任何$A\in M_{m\times n}$，证明 tr$(AA^\top)\geq 0$。

答案： 由第3问可知tr$(AA^\top) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n A_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n A_{ij}^2$。显然由于每个$A_{ij}^2\geq 0$，它们的求和也必然非负，即tr$(AA^\top)\geq 0$。

Problem C(6 Points). Let $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,
$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1. (2 points) Let $p(x) = (x-1)(x+1)$. Compute $p(A)$. (2021年线性代数期中考试题)

答案： 显然$p(x) = x^2 - 1$，直接代入矩阵多项式的定义可得

$$p(A) = A^2 - I_2.$$

经计算可得$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$，因此可得最终答案：

$$p(A) = A^2 - I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

注意：此题在试卷中是一道填空题，只需写入答案，不需要提供计算过程。但这也意味着一旦答案算错就没有分数！因此请务必保证计算的正确性。

2. (2 points) Let $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Compute $\mathrm{tr}(p(B))$. (2022年线性代数期中考试题)

答案： $p(B) = 2B^2 - 3B + I$。由于

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

我们得到

$$2B^2 - 3B + I = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意我们要求的该矩阵的迹，因此只需要计算以上矩阵对角线上的项即可(不需要将该矩阵所有的项都算出来)：$2B^2 - 3B + I$对角线上的第一项为$2 - 3 \times 1 + 1 = 0$，第二项为$2 \times 25 - 3 \times 5 + 1 = 50 - 15 + 1 = 36$，因此答案为$\mathrm{tr}(p(B)) = 0 + 36 = 36$。

注意：此题在试卷中是一道填空题，只需写入答案，不需要提供计算过程。但这也意味着一旦答案算错就没有分数！因此请务必保证计算的正确性。

3. (1 point) Compute $(2E^\top - 3D^\top)^\top$.
4. (1 point) Compute $B^\top(CC^\top - A)$.

答案： 以上两题均只需直接计算，具体细节与答案请咨询助教。

Problem D(6 Points). Use the inversion algorithm to find the inverse of the matrix, if the inverse exists.

1. (2 points) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.
2. (2 points) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$.
3. (2 points) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

答案： 以上题目均只需直接计算，具体细节与答案请咨询助教。

Problem E(6 Points). (2021年线性代数期中考试题)
A square matrix A is called idempotent if $A^2 = A$.
A square matrix A is called involutory if $A^2 = I$.

1. (2 points) Suppose that A, B are both idempotent. Prove that $A + B$ is idempotent if and only if $AB + BA = 0$. (if and only if: 当且仅当)
   答案： Since A, B are both idempotent, we have $A^2 = A, B^2 = B$. Therefore we have
   $$\begin{aligned} A + B \text{ is idempotent } &\Leftrightarrow (A+B)^2 = A + B \\ &\Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A + B = A^2 + B^2 \\ &\Leftrightarrow AB + BA = 0. \end{aligned}$$

2. (3 Points) Suppose that A, B are both involutory. Prove that AB is involutory if and only if $AB = BA$.

   答案： If $AB = BA$, then we have
   $$(AB)^2 = ABAB = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2.$$
   Since A, B are both involutory, we have $A^2 = B^2 = I$. Therefore the above equation becomes
   $$(AB)^2 = A^2B^2 = II = I^2 = I.$$
   This means that AB is involutory.
   Conversely let us suppose that AB is involutory, which means that $(AB)^2 = ABAB =$

$A(BA)B = I$. Now first multiply both sides of the equality $A(BA)B = I$ from left the matrix A (翻译：对等式$A(BA)B = I$两边同时左乘矩阵A), we get $AA(BA)B = AI = A$; then multiply both sides of the equality $AA(BA)B = A$ from right the matrix B (翻译：对等式$AA(BA)B = A$两边同时右乘矩阵B), we get $AA(BA)BB = AB$. Since $A^2 = B^2 = I$, we finally get that

$$AB = AA(BA)BB = A^2(BA)B^2 = I(BA)I = BA.$$

Hence AB is involutory if and only if $AB = BA$.

3. (1 point) Find an 2×2-matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ such that $b \neq 0, c \neq 0$ and $A^2 = I$.

答案： 显然对任何$\alpha \in [0, 2\pi]$，矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

满足

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 & \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \end{bmatrix}$$

即$A^2 = I$。因此任意选取某个α使得$\sin\alpha \neq 0$即可。

Deadline: 22:00, October 22.

作业提交截止时间：10月22日晚上22：00。