

Linear Algebra Tutorial 9

2023.12.5

midterm review 期中复习

- 考试时间: 2023.12.6 星期三 8:15~9:55
- 考试地点: 教学中心202
- 考试内容: 第一章到第四章的4.8节 (包含)
- 期中考试占总成绩 30%
- 试卷为全英文, 不涉及数学的问题可以找监考人员翻译
- 作答中英文均可

一些要强调的事情

- iff \Leftrightarrow if and only if \Leftrightarrow 当且仅当,
 \Rightarrow 充分性, \Leftarrow 必要性, 都要证
或者全程使用 \Leftrightarrow 等价表述
- free variables
eg. $x_3 = s, x_4 = r$
 $s, r \in \mathbf{R}$
- consistent 有解的
- inconsistent 无解的
- trivial solution 平凡解(零解)
- the symbol $[]$ and $||$
 $[]$ for matrix, $||$ for determinant

一些要强调的事情

- 注意公式不要记错了

- $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ 不要忘记根号

- $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ 分母不要忘记开方

- $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$ 分母不要忘记平方,公式背不过的话可以自己考场推一下

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A + I = ?$, $A - I = ?$ 注意 I 是单位矩阵,只有对角线上的元素为1!!!

- P_n 所有次数 $\leq n$ 的多项式的集合

$$P_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

一些要强调的事情

- 行列式交换两行后, 记得要有一个负号
- 关于叉乘

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$

注意中间有个负号(原因: a_{12} 的代数余子式的符号是 $(-1)^{1+2}$)

- 行列式按行/列的展开时:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

注意 C_{ij} 是 a_{ij} 的**代数余子式**, 有一个 $(-1)^{i+j}$

- 矩阵没有二项式定理(本质: 矩阵乘法没有交换律)

$$\text{e.g. } (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

review list 复习清单

- chapter1 线性方程组
 - 矩阵
 - 高斯消元
 - 矩阵求逆
- chapter2 行列式
- chapter3 欧氏空间
- chapter4 向量空间
 - 子空间
 - 线性相关、线性无关
 - 基、维数、基变换
 - 行空间、列空间、零空间
 - 矩阵的秩、零度、矩阵基本空间

chapter 1 线性方程组

- 线性方程组
- 高斯消元
- 矩阵运算
- 矩阵求逆
- 特殊矩阵

coefficient matrix(系数矩阵) & augmented matrix(增广矩阵)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

系数矩阵 A and 增广矩阵 $\bar{A} = (A|\mathbf{b})$

初等行变换

- 交换两行
- 用一个非零常数乘以某一行
- 用一个非零常数乘以某一行，然后加到另一行上

注意化简矩阵的时候的符号写法, 写出矩阵的化简方式

row echelon form(行阶梯矩阵)

- leading 1(首1/主1/主元.....)
- 0 行必须在非零行的下面
- leading 1 的列必须在下一行的leading 1 的左边

reduced row echelon form(简化行阶梯矩阵)

- 首1所在的列的其他元素都为0

Gauss elimination 高斯消元

1. no solution 无解
2. 有解
 - i. unique solution 唯一解
 - ii. infinite solutions 无穷多解

leading variable & free variable 主元 & 自由元

增广矩阵 B 的行阶梯矩阵为 \tilde{B}

主元: \tilde{B} 中的leading 1对应的元素

自由元: \tilde{B} 中的非主元对应的元素

矩阵运算

- 矩阵加法

注意 $A + 1 = A + I$

只把对角线上的元素+1

- 矩阵乘法

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

- 矩阵乘法没有交换律

所以矩阵没有二项式定理

$$AB \neq BA$$

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

矩阵求逆

1. 伴随矩阵 A^* , $\text{adj}(A)$

- $C_{i,j}$: $a_{i,j}$ 的代数余子式
- C : A 的代数余子式矩阵
- $A^* = \text{adj}(A) = C^T$
- **无论 A 是否可逆**都有 $AA^* = A^*A = |A|I$
- 若 A 可逆, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

2. $[A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$

基础行变换

不能同时使用基础行变换和基础列变换

矩阵的基础变换

- 基础矩阵: 由单位矩阵经过一次初等行变换得到的矩阵
 - 交换两行
 - 用一个非零常数乘以某一行
 - 用一个非零常数乘以某一行, 然后加到另一行上
- 左行右列
基础行变换, 左乘一系列基础矩阵
基础列变换, 右乘一系列基础矩阵

例子(2021年线性代数期中考试题): Find an invertible matrix P such that $PA = B$, where

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} - a_{21} & a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} \end{bmatrix}.$$

逆矩阵的性质

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 矩阵的逆是唯一的

特殊矩阵

- 对角矩阵
- 上三角矩阵
- 下三角矩阵
 - 三角矩阵乘三角矩阵还是三角矩阵(使用时不需要证明,但需要说明)
 - 三角矩阵的逆还是三角矩阵
- 上面的三角矩阵是同一种
- 对称矩阵
$$A^T = A$$
- 矩阵的分块

chapter 2 行列式

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 行列式的应用

行列式的定义

- 作用于方阵 $A \in M_{n \times n}$ 上的函数

$$\det : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

- 记作 $|A|$ 或者 $\det(A)$

- 特别的: 二阶行列式:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

行列式的性质

- $|A^T| = |A|$
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- $|AB| = |A||B|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

行列式的性质

对行列式可以同时进行基础行变换和基础列变换
以行变换为例

1. B 由 A 交换两行得到

$$|B| = -|A|$$

2. B 由 A 用一个非零常数乘以某一行得到

$$|B| = k|A|$$

3. B 由 A 用一个非零常数乘以某一行，然后加到另一行上得到

$$|B| = |A|$$

行列式的性质

4. 由1. 若 A 有两行相同, 则 $|A| = 0$

e.g.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

find $C_{21} + C_{22} + 5C_{23} + 4C_{24}$

where C_{ij} is the cofactor of a_{ij}

行列式的性质

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|C| = |A| + |B|$$

行列式的计算

- 三角矩阵 / 对角矩阵

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

使用基础行/列变换将矩阵化为三角矩阵/对角矩阵

- 按行/列展开

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

注意 C_{ij} 是 a_{ij} 的**代数余子式**, 有一个 $(-1)^{i+j}$

- 使用行列式性质进行简化

行列式的应用

1. Cramer's rule 克拉默法则
求解单个变量的解
2. 判断矩阵是否可逆
 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
3. 判断一组向量是否线性无关
 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 线性无关

chapter 3 欧氏空间

- 范数、内积、距离
- 正交、叉乘
- 欧式几何

\mathbb{R}^n (n维欧氏空间)

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

- standard unit vector 标准单位向量

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的标准基

范数、内积、距离

- 范数 norm

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

- 内积 inner product

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

若将 \mathbf{u}, \mathbf{v} 看作列向量, 则 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$

- 距离 distance

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

正交、叉乘

- orthogonality 正交

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

- cross product 叉乘

只作用在 \mathbb{R}^3 上

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$

▮ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 是一个向量, 与 \mathbf{u} , \mathbf{v} 都垂直

注意第2项的负号

cross product

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ is orthogonal to both \mathbf{x} and \mathbf{y}
- $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$

投影

- orthogonal projection of \mathbf{u} on \mathbf{v}

\mathbf{u} 在 \mathbf{v} 上的投影

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$$

注意投影是向量

- the vector component of \mathbf{u} orthogonal to \mathbf{v}

\mathbf{u} 在 \mathbf{v} 的垂直分量

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$$

叉乘性质

THEOREM 3.5.2 Properties of Cross Product

If \mathbf{u} , \mathbf{v} , and \mathbf{w} are any vectors in 3-space and k is any scalar, then:

- (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- (c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- (d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
- (e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- (f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

混合积(标量三重积)

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ are coplanar
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = 0$
- Lagrange's identity
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

cross product geometric meaning

- parallelogram area

平行四边形面积

$$S = \bar{AB} * \bar{AC} \sin\theta = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$$

- volume of parallelepiped

平行六面体体积

$$V = Sh = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{AD}\| \cos\alpha = \mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC})$$

欧式几何

- 直线

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 直线的方向向量

- 平面

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$$

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 平面的法向量

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

欧式几何

- line(2-dimensional):

点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\mathbf{n} = (a, b)$ is the normal vector of the line

- plane(3-dimensional):

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $ax + by + cz + d = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\mathbf{n} = (a, b, c)$ is the normal vector of the plane

chapter 4 向量空间

- 向量空间
- 子空间
- 线性相关、线性无关
- 基、维数、基变换
- 行空间、列空间、零空间
- 矩阵的秩、零化度、矩阵基本空间

向量空间(线性空间) linear space/ vector space

1. If \mathbf{u} and \mathbf{v} are objects in V , then $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is in V .
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. There is an object $\mathbf{0}$ in V , called a *zero vector* for V , such that $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for all \mathbf{u} in V .
5. For each \mathbf{u} in V , there is an object $-\mathbf{u}$ in V , called a *negative* of \mathbf{u} , such that $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. If k is any scalar and \mathbf{u} is any object in V , then $k\mathbf{u}$ is in V .
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u}) = (km)(\mathbf{u})$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

向量空间满足以上10条性质

- 若证明不是向量空间, 只需要找到一个反例即可

子空间 subspace

1. 线性空间(向量空间)子集

$$W \subseteq V$$

2. 加法封闭性

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$$

3. 数量积封闭性

$$\mathbf{u} \in W, k \in \mathbb{R}$$

$$k\mathbf{u} \in W$$

线性相关、线性无关

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$$

- linear combination \mathbf{v} 是 $S = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 的线性组合
$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$$
- linearly dependent 线性相关
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 中至少有一个向量可以表示为其他向量的线性组合
- linearly independent 线性无关
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 中没有一个向量可以表示为其他向量的线性组合
$$\Leftrightarrow k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \text{ 只有零解}$$

基、维数

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一个基

- basis 基

S 是 V 的一个基

$$|S| = \dim(V)$$

- dimension 维数

V 的一个基的元素个数

基内的各个向量线性无关

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$$

$$|A| \neq 0$$

坐标

- 同一个线性空间 V 可以有不同的基 B, B'
- 每一个向量在不同的基下都有自己的坐标
 $[\mathbf{v}]_B$ 表示 \mathbf{v} 在基 B 下的坐标
 $[\mathbf{v}]_{B'}$ 表示 \mathbf{v} 在基 B' 下的坐标

基变换

$$B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], B' = [\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n]$$

- 过渡矩阵/转换矩阵

$$[\mathbf{v}]'_B = P_{B' \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B$$

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B \leftarrow B'} [\mathbf{v}]_{B'}$$

- $P_{B \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} = I$
- $[B' | B] \Rightarrow [I | P_{B' \leftarrow B}]$

行空间、列空间、零空间

A is a $m \times n$ matrix

- row space 行空间

$$\text{row}(A) = \text{span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\}$$

- column space 列空间

$$\text{col}(A) = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$$

- null space 零空间

$$\text{null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

- left null space 左零空间

$$\text{null}(A^T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

矩阵基本空间

Definition 4.31. 对 $m \times n$ -矩阵 A , 以下六个向量空间被称为 A 的基本空间(*the fundamental spaces of A*):

- A 的行空间 $Row(A)$,
 - A 的列空间 $Col(A)$,
 - A^T 的行空间 $Row(A^T)$,
 - A^T 的列空间 $Col(A^T)$,
 - A 的零空间 $Null(A)$,
 - A^T 的零空间 $Null(A^T)$ 。
-
- 行空间和零空间互为正交补
 - 列空间和左零空间互为正交补

正交补(Orthogonal Complements)

正交: $col(A) \perp null(A)$

补: $col(A) + null(A) = \mathbb{R}^n$

矩阵基本空间

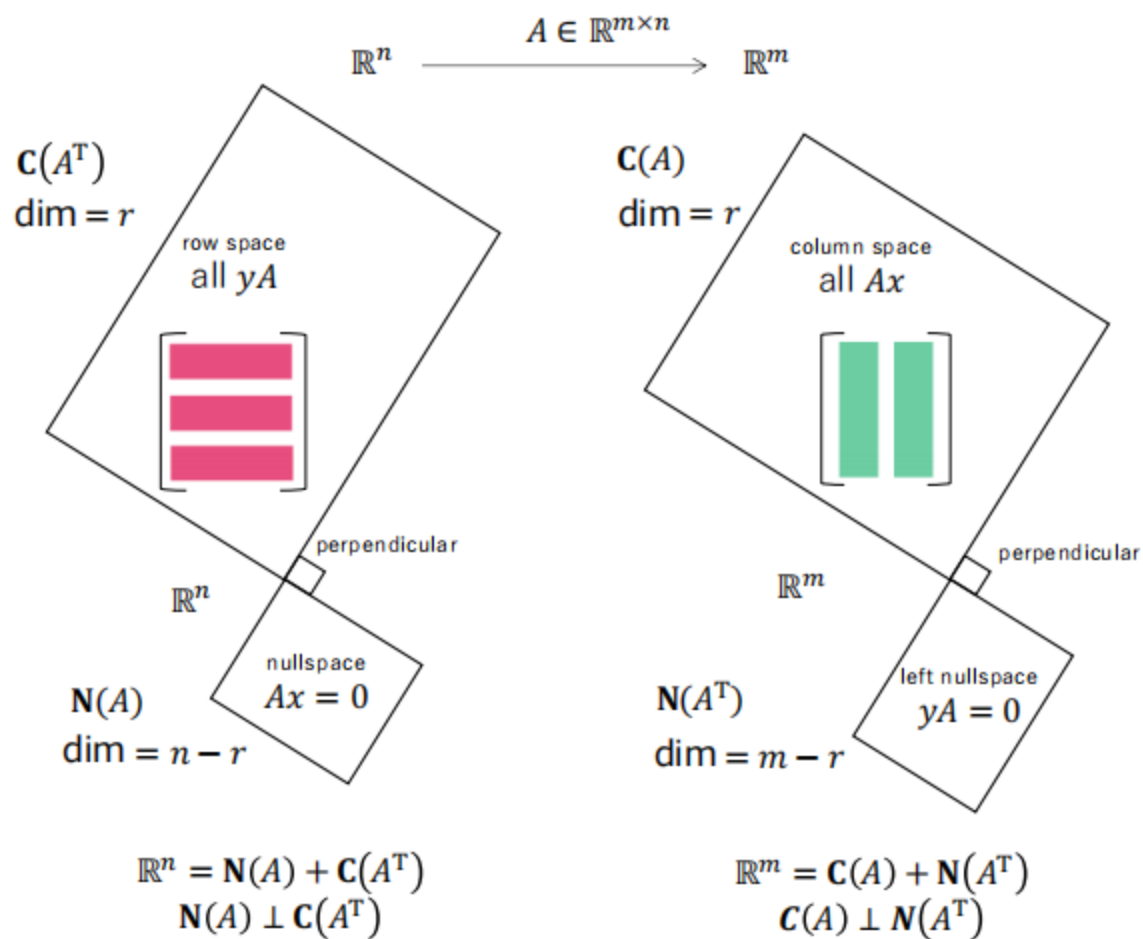


Figure 5: 四个子空间

矩阵的秩、零化度

- $\text{rank}(A) = \dim(\text{row}(A)) = \dim(\text{col}(A))$
 A 的秩 = A 的行阶梯矩阵的首一个数
 $\Rightarrow \text{rank}(A) \leq \min(n, m)$
- $\text{rank}(A)$ 可看作行阶梯矩阵的首一(非零行/主元) 个数
 $\text{nullity}(A) = \dim(\text{Null}(A))$ 可看作自由元的个数
 $\Rightarrow \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$

Equivalent expression

$$A \in M_{n \times n}$$

- A 可逆;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有平凡解;
- A 的简化阶梯型为单位矩阵;
- A 是一组初等矩阵的乘积;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任何 $n \times 1$ 的列向量 \mathbf{b} 都有解;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任何 $n \times 1$ 的列向量 \mathbf{b} 都有且只有一个解;
- $\det(A) \neq 0$;
- A 的所有 n 个行向量线性无关;
- A 的所有 n 个列向量线性无关;
- $\text{span}(\text{Row}(A)) = \mathbb{R}^n$;
- $\text{span}(\text{Col}(A)) = \mathbb{R}^n$;
- A 的所有 n 个行向量构成 \mathbb{R}^n 的一组基底;
- A 的所有 n 个列向量构成 \mathbb{R}^n 的一组基底;
- $\text{rank}(A) = n$;
- $\text{Null}(A) = \{0\}$.