线性代数(2023-2024)第三次作业

1　复习知识点

- 讲义Theorem 1.22, 1.23, 1.24,1.25的内容以及证明。
- 对角矩阵，三角矩阵与对称矩阵的定义与基本特点，请仔细阅读英文教材第1.7节。
- 余子式，代数余子式，行列式的定义。
- 如何利用行变换，列变换，选取合适的行或者列进行代数余子式展开来化简矩阵行列式的计算。
- 讲义Remark 2.6的内容。

2　习题部分

Problem A(6 Points). 证明以下说法

1. (2 分) 若一个齐次线性方程组有m个方程和n个未知数，且$m < n$，即方程个数小于未知数个数，那么该齐次线性方程组必然有无穷多组解。
   提示：利用阶梯型的特点证明这种情况下自由元的个数必然大于等于1。
2. (2 分) 先仔细阅读讲义第41页至42页关于英文教材Theorem 1.7.1(b)部分的证明，之后证明：若A为一个下三角或者上三角n阶方阵，那么对任何自然数k，A^k对角线上的项为$a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k$。
3. (2 分) 对角矩阵$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix}$，证明$D$可逆当且仅当$d_1 d_2 \ldots d_n \neq 0$，且此时$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/d_n \end{bmatrix}$。

Problem B(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)
A $n \times n$ matrix B is called skew-symmetric or antisymmetric if $B^\top = -B$. Now let A be a symmetric $n \times n$ matrix, B be a skew-symmetric $n \times n$ matrix. Is $AB - BA$ symmetric, skew-symmetric, or neither? Prove your conclusion.

Problem C(6 Points). 假设n阶矩阵A具有以下分块矩阵(partitioned matrix)形状：

$$A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix},$$

其中B为r阶方阵，$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{r\times k}$为$r \times k$-零矩阵，$C$为$k \times r$-矩阵，$D$为$k$阶方阵，$r+k = n$。换而言之，我们可以将$A$写为

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \dots & B_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ C_{11} & \dots & C_{1r} & D_{11} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & \dots & C_{kr} & D_{k1} & \dots & D_{kk} \end{bmatrix}.$$

证明$\det(A) = \det(B)\det(D)$。(同样的，对于$A = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$这样的分块矩阵我们也有$\det(A) = \det(B)\det(D)$。)

提示：可以先对$r = 1$的情况进行证明，然后对一般的自然数r进行数学归纳法证明。

Problem D(6 Points). 计算以下矩阵的行列式，请写清楚计算的步骤，没有计算细节展示只写答案的不得分。

1. (2分) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$。
2. (2分) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$。
3. (2分) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$。

Problem E(6 Points). Let

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{bmatrix},$$

where $x_i \neq 0$ for all $i = 1, \dots, n$.
Prove that for any $n \geq 1$, $\det(A_n) = x_1 x_2 \dots x_n (1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n})$.
提示：用数学归纳法，并尝试沿最后一列做代数余子式展开。

Bonus:（不计入分数）设A为n阶方阵，$A^\top$为它的转置。证明：对$A^\top$沿第i行进行代数余子式展开等于对A沿第i列进行代数余子式展开。
提示：可以对矩阵的阶数n做数学归纳法，即假设该说法对任何n阶的方阵成立(n为某个给定的自然数)，然后再利用这个归纳假设证明$n+1$阶方阵的情况。

Deadline: 22:00, October 29.

作业提交截止时间：10月29日晚上22：00。