线性代数(2023-2024)第十二次作业

Problem A(6 Points)

Find the geometric and algebraic multiplicity of each eigenvalue of the following matrix A, and determine whether A is diagonalizable. If A is diagonalizable, then find a matrix P that diagonalizes A, and find the diagonal matrix D such that $D = P^{-1}AP$.

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

  答案： 首先计算A的特征多项式为

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

因此A有三个不同的特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$。显然$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$的代数重数都等于1，因此它们的代数重数必然等于它们的几何重数，故A可对角化。

接下来求解齐次线性方程组

$$(\lambda_1 I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

可求得λ_1的特征空间$V_{\lambda_1} = \text{Null}(\lambda_1 I_3 - A)$的一组基底为$\boldsymbol{x}_1^{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；求解齐次线性方程组

$$(\lambda_2 I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

可求得λ_2的特征空间$V_{\lambda_2} = \text{Null}(\lambda_2 I_3 - A)$的一组基底为$\boldsymbol{x}_1^{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；求解齐次线性方程组

$$(\lambda_3 I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

可求得λ_3的特征空间$V_{\lambda_3} = \text{Null}(\lambda_3 I_3 - A)$的一组基底为$\boldsymbol{x}_1^{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$。因此可得$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\lambda_1} & \boldsymbol{x}_1^{\lambda_2} & \boldsymbol{x}_1^{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。最后，注意$D$的对角线上的元

素依次是$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，即

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$

  答案： 首先计算A的特征多项式为

  $$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^3.$$

  因此A只有一个特征值$\lambda_1 = 5$，它的代数重数等于3。

  现在我们来计算$\lambda_1 = 5$的几何重数，即nullity$(\lambda_1 I_3 - A)$。显然，由于$\lambda_1 I_3 - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，我们立刻可以看出rank$(\lambda_1 I_3 - A) = 2$，故有nullity$(\lambda_1 I_3 - A) = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I_3 - A) = 1$。因此$\lambda_1 = 5$的几何重数为1，不等于它的代数重数3，因此$A$无法对角化。

Problem B(6 Points), 2022-2023年线性代数期末考试题

Let V be a finite dimensional vector space. Let $T : V \to V$ be a linear operator satisfying $T^3 = T \circ T \circ T = 4T$.

1. (3 points) Prove that $\ker(T) + \text{RAN}(T^2) = V$, here $\ker(T)$ denotes the kernel of T, RAN(T^2) denotes the range of $T^2 = T \circ T$. (这一问出现在第四章第五章自测题中)

   答案： 对任何$\boldsymbol{v} \in V$，我们都可以将其表示为

   $$\boldsymbol{v} = \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v})).$$

   显然，$\frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}) = T^2(\frac{1}{4}\boldsymbol{v}) \in \text{RAN}(T^2)$。另一方面，注意$T(\boldsymbol{v} - \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{4}T(T^2(\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{4}T^3(\boldsymbol{v})$。由假设$T^3 = 4T$可得$T(\boldsymbol{v} - \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{4}T^3(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{4} \times 4T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) - T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$，从而有$\boldsymbol{v} - \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}) \in \ker(T)$。因此，基于以上分析以及$\boldsymbol{v} = \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}))$我们得到$\boldsymbol{v} \in \ker(T) + \text{RAN}(T^2)$对任何$\boldsymbol{v} \in V$成立，从而有$V = \ker(T) + \text{RAN}(T^2)$。

2. (3 points) Prove that there is a basis B for V such that all vectors in B are eigenvectors of $T^2 = T \circ T$. (关于线性变换特征值，特征向量的定义见第11次作业，

Problem D)

答案： 首先取$\ker(T)$的一组基底$B=\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k\}$。由于$T^2(\boldsymbol{u}_i)=T(T(\boldsymbol{u}_i))=T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$且$\boldsymbol{u}_i\neq\mathbf{0}$对任何$i=1,\ldots,k$成立，我们得到$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k$都是$T^2$关于特征值0的特征向量。
现在取RAN(T^2)的一组基底$S=\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_r\}$。那么由值域的定义可知存在$\boldsymbol{v}_j\in V$使得$\boldsymbol{w}_j=T^2(\boldsymbol{v}_j)$对任何$j=1,\ldots,r$成立。那么利用$T^3=4T$，我们得到

$$T^2(\boldsymbol{w}_j)=T^2(T^2(\boldsymbol{v}_j))=T^4(\boldsymbol{v}_j)=T(T^3(\boldsymbol{v}_j))=T(4T(\boldsymbol{v}_j))=4T^2(\boldsymbol{v}_j)=4\boldsymbol{w}_j$$

对任何$j=1,\ldots,r$。因此可得$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$是$T^2$关于特征值4的特征向量。
现在考虑集合$M=B\cup S=\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_r\}$。由第一问可知，$V=\ker(T)+\text{RAN}(T^2)$，因此我们实际上有

$$\text{span}\{M\}=\text{span}\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_r\}=V.$$

现在利用Plus–Minus Theorem (讲义Theorem 4.18) 我们可以通过删去M里的一些向量(如果有必要的话)得到M的一个子集M'使其成为V的一组基底。由于M里的向量全部是T^2的特征向量，V的基底$M'\subset M$作为M的子集也全部由T^2的特征向量组成。证毕。

Problem C(6 Points), 2022-2023年线性代数期末延期考试题

Suppose that $A\in M_{3\times 3}$ has eigenvalues

$$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0,$$

with corresponding eigenvectors

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},$$

respectively. Find the matrix A.

答案： 由于已知$A\in M_{3\times 3}$作为3阶方阵有三个不同的特征值，讲义Theorem 6.15告诉我们A可以对角化，即$D=P^{-1}AP$，其中$D=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$。容易求出$P^{-1}=\begin{bmatrix}5&-1&-2\\3&-1&-1\\-4&1&2\end{bmatrix}$。因此利用$D=P^{-1}AP\iff A=$

PDP^{-1}我们最终得到

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 16 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Problem D(6 Points), 2022-2023年线性代数期末延期考试题

Let $V = M_{n\times n}$. Let $C \in V$ be a symmetric matrix whose eigenvalues are all positive. Define $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on V by

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^\top CA).$$

1. (3 points) Prove that $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is an inner product on V.
   提示：任何对称矩阵C都可以正交对角化，即存在正交矩阵P与对角矩阵D使得$D = P^\top CP$。

   答案： 容易验证

   $$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^\top CA) = \mathrm{tr}((B^\top CA)^\top) = \mathrm{tr}(A^\top C^\top B) \underbrace{=}_{C^\top = C} \mathrm{tr}(A^\top CB) = \langle B, A\rangle,$$

   $$\langle A_1+A_2, B\rangle = \mathrm{tr}(B^\top C(A_1+A_2)) = \mathrm{tr}(B^\top CA_1)+\mathrm{tr}(B^\top CA_2) = \langle A_1, B\rangle+\langle A_2, B\rangle,$$

   $$\langle kA, B\rangle = \mathrm{tr}(B^\top C(kA)) = k\mathrm{tr}(B^\top CA) = k\langle A, B\rangle, k \in \mathbb{R},$$

   $\langle A, B_1 + B_2\rangle = \langle A, B_1\rangle + \langle A, B_2\rangle$，$\langle A, kB\rangle = k\langle A, B\rangle$类似可证。
   最后我们验证$\langle\cdot,\cdot\rangle$的正定性。因为$C$作为对称矩阵可以正交对角化，存在正交矩阵$P$与对角矩阵$D$使得

   $$D = P^\top CP \iff C = PDP^\top.$$

   令$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$。由于$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$C$的特征值，且由假设$C$的特征值都为正数，我们有$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$。利用这一事实我们有

   $$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^\top CA) = \mathrm{tr}(A^\top PDP^\top A) = \mathrm{tr}((P^\top A)^\top D(P^\top A)).$$

   令$B = P^\top A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$，由矩阵乘法可计算求得

   $$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}((P^\top A)^\top D(P^\top A)) = \mathrm{tr}(B^\top DB) = \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i b_{ki}^2.$$

由于$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，必然有$\langle A, A\rangle = \sum_{i,k=1}^n \lambda_i b_{ki}^2 \geq 0$。
如果A满足$\langle A, A\rangle = \sum_{i,k=1}^n \lambda_i b_{ki}^2 = 0$，那么由于$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，此时必然需要$b_{ki} = 0$对任何$k, i = 1, \ldots, n$，也即$B = P^\top A = \mathbf{0}_{n\times n}$为零矩阵。由于$P^\top = P^{-1}$为可逆矩阵，我们得到$A = PB = \mathbf{0}_{n\times n}$为零矩阵。因此正定性证毕。
综上，当C是一个对称矩阵时，$\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^\top CA)$.是一个内积。

2. (3 points) Prove that $\langle A, B\rangle = 0$ if $AB^\top$ is skew–symmetric, i.e., $(AB^\top)^\top = -AB^\top$.
   提示： 可利用以下事实：对任何$A, B \in M_{n\times n}$，都有$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$。

   答案： 如果$(AB^\top)^\top = BA^\top = -AB^\top$，那么利用$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$，可得

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^\top(CA)) &= \text{tr}((CA)B^\top) \\ &= \text{tr}(C(AB^\top)) = \text{tr}(-C(BA^\top)) \\ &= \text{tr}(-(CB)A^\top) = -\text{tr}(A^\top(CB)) \\ &= -\langle B, A\rangle = -\langle A, B\rangle,\end{aligned}$$

   因此$\langle A, B\rangle = 0$。

Problem E(6 Points), 2022-2023年线性代数期末考试题

Suppose that $V = P_2$ is equipped with the following inner product

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)x^2 dx.$$

Let $W = \text{span}\{p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x^2\} \subset V$.

1. (2 points) Find an orthonormal basis for W.

   答案： 由Gram–Schmidt算法，令

$$q_1(x) = p_1(x)/\|p_1(x)\|,$$

   注意$\|p_1(x)\|^2 = \int_{-1}^1 p_1(x)^2 x^2 dx = \int_{-1}^1 (1 + x)^2 x^2 dx = \frac{16}{15}$，我们得到

$$q_1(x) = \sqrt{\frac{15}{16}} p_1(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}(1 + x).$$

   令$\tilde{q}_2(x) = p_2(x) - \langle p_2(x), q_1(x)\rangle q_1(x)$，由于

$$\langle p_2(x), q_1(x)\rangle = \frac{\sqrt{15}}{4}\int_{-1}^1 p_2(x)p_1(x)x^2 dx = \frac{\sqrt{15}}{4}\int_{-1}^1 (1 + x)(1 + x^2)x^2 dx$$

以及$\int_{-1}^{1}(1+x)(1+x^2)x^2dx = \frac{16}{15}$，我们得到

$$\tilde{q}_2(x) = p_2(x) - \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{16}{15}q_1(x) = p_2(x) - \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{16}{15}\frac{\sqrt{15}}{4}(1+x) = (1+x^2)-(1+x) = x^2-x.$$

因此令$q_2(x) = \tilde{q}_2(x)/\|\tilde{q}_2(x)\|$，我们得到

$$q_2(x) = \sqrt{\frac{35}{24}}\tilde{q}_2(x) = \sqrt{\frac{35}{24}}(x^2-x).$$

即$\{q_1(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}(1+x), q_2(x) = \sqrt{\frac{35}{24}}(x^2-x)\}$是$W$的一组orthonormal basis。

2. (2 points) Let $p_3(x) = 1$. Find $\text{proj}_W(p_3(x))$, the orthogonal projection of $p_3(x)$ on W.

答案： 由讲义Theorem 7.15可得

$$\text{proj}_W(p_3(x)) = \langle p_3(x), q_1(x)\rangle q_1(x) + \langle p_3(x), q_2(x)\rangle q_2(x).$$

代入$p_3(x) = 1$，$q_1(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}(1+x)$以及$q_2(x) = \sqrt{\frac{35}{24}}(x^2-x)$可得到

$$\langle p_3(x), q_1(x)\rangle q_1(x) = (\frac{15}{16}\int_{-1}^{1}(1+x)x^2dx)(1+x) = (\frac{15}{16}\times\frac{2}{3})(1+x) = \frac{5}{8}(1+x),$$

$$\langle p_3(x), q_2(x)\rangle q_2(x) = (\frac{35}{24}\int_{-1}^{1}(x^2-x)x^2dx)(x^2-x) = (\frac{35}{24}\times\frac{2}{5})(x^2-x) = \frac{7}{12}(x^2-x).$$

因此$\text{proj}_W(p_3(x)) = \langle p_3(x), q_1(x)\rangle q_1(x) + \langle p_3(x), q_2(x)\rangle q_2(x) = \frac{5}{8}(1+x) + \frac{7}{12}(x^2-x) = \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{5}{8}$。

3. (2 points) Find a basis for $W^\perp$, the orthogonal comlement of W.

答案： 由于$\dim(W) = 2$，我们得到$\dim(W^\perp) = \dim(P_2) - \dim(W) = 3-2 = 1$。又由于在第二问中我们已经有$\text{proj}_W(p_3(x)) = \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{5}{8} \in W^\perp$，见讲义Theorem 7.15，我们当然有$W^\perp = \text{span}\{\text{proj}_W(p_3(x))\}$，因此$W^\perp$的基底可选为$\text{proj}_W(p_3(x)) = \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{5}{8}$。

Bonus: 不计入分数

设向量$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$均为非零向量，且有$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$。令$A = \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^\top \in M_{n\times n}$。

1. 求A^2。

答案： $A^2 = \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^\top = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}^\top = \boldsymbol{v}\underbrace{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})}_{=0}\boldsymbol{w}^\top = \mathbf{0}_{n\times n}$.

2. 求A的特征值与特征向量。

答案： 首先注意如果A有特征值λ，那么λ^2必然是A^2的特征值。第一问告诉我们$A^2=\mathbf{0}_{n\times n}$，因此$A^2$的特征值是0。因此可得$A$的特征值为0。
现在求出A关于0的特征向量。因此我们求解齐次方程组

$$(0I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow -A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

注意由A的定义可知

$$-A = -\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^\top = \begin{bmatrix} -v_1w_1 & -v_1w_2 & \dots & -v_1w_n \\ -v_2w_1 & -v_2w_2 & \dots & -v_2w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ -v_nw_1 & -v_nw_2 & \dots & -v_nw_n \end{bmatrix}.$$

由于$\boldsymbol{v}$为非零向量，必然有一个$v_i \neq 0$，因此行变换可得$-A$的阶梯型为

$$R = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

又因为$\boldsymbol{w}\neq\mathbf{0}$，必然有一个$w_j\neq 0$，不妨设$j=1$。因此利用$R$可求得$-A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解空间的一组基底为：

$$\boldsymbol{u}_1 = (-\frac{w_2}{w_1}, 1, 0, \dots, 0), \boldsymbol{u}_2 = (-\frac{w_3}{w_1}, 0, 1, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{u}_{n-1} = (-\frac{w_n}{w_1}, 0, 0, \dots, 1),$$

且显然它们是A关于0的特征空间的一组基底，即任何A的特征向量均可以被以上向量$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{n-1}$的线性组合表示。

Deadline: 22:00, January 07.

作业提交截止时间：1月7日晚上22：00。