线性代数(2023-2024)第九次作业参考答案

Problem A(6 Points)

请大家认真阅读英文教材第263页上的Table 6，并用数学语言描述/证明以下说法。

1. (2 points) 令$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$上的线性变化，它将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正$x$轴逆时针旋转$\theta$度(counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ)。那么$T(x,y,z)=(x,y\cos\theta-z\sin\theta,y\cos\theta+z\sin\theta)$，且它的标准矩阵为
$$[T]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}.$$
2. (2 points) 令$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$上的线性变化，它将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正$y$轴逆时针旋转$\theta$度(counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ)。那么$T(x,y,z)=(x\cos\theta+z\sin\theta,y,-x\sin\theta+z\cos\theta)$，且它的标准矩阵为
$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix}.$$
3. (2 points) 令$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$上的线性变化，它将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正$z$轴逆时针旋转$\theta$度(counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ)。那么$T(x,y,z)=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta,z)$，且它的标准矩阵为
$$[T]=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

答案： 回答第一问只需注意到，将$\mathbb{R}^3$里的向量绕着正x轴逆时针旋转θ度的映射T作用在向量$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$上并不改变x轴上的坐标x，而是在y轴与z轴组成的yz平面上将(y,z)逆时针旋转了θ度，因此由$\mathbb{R}^2$平面上的逆时针旋转映射表达式可得$T(x,y,z)=(x,y\cos\theta-z\sin\theta,y\cos\theta+z\sin\theta)$，从而得到标准矩阵$[T]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$。当然也可以通过计算$T(\boldsymbol{e}_1),T(\boldsymbol{e}_2)$与$T(\boldsymbol{e}_3)$这三个列向量来得到标准矩阵$[T]=\begin{bmatrix}T(\boldsymbol{e}_1)&T(\boldsymbol{e}_2)&T(\boldsymbol{e}_3)\end{bmatrix}$。同理可解第二问与第三问。这里需要注意到第二问中沿着正y轴逆时针旋转θ度实际上对应固定y坐标，在xz平面上将(x,z)**顺时针**旋转了θ度，因此它的坐标表示与第一问和第三问略有不同。这一点可以通过画图看出来。

Problem B(6 Points)

请大家仔细阅读英文教材4.9节的Table 1 – Table 8，之后计算以下题目：
Find the standard matrix for the stated composition in $\mathbb{R}^3$.

1. (2 points) A rotation of $\frac{\pi}{6}$ about the positive x-axis, followed by a rotation of $\frac{\pi}{6}$ about the positive z-axis, followed by a contraction with factor $k = 1/4$.
2. (2 points) A reflection about the xy-plane, followed by a reflection about the xz-plane, followed by an orthogonal projection onto the yz-plane.
3. (2 points) A rotation of $\frac{3\pi}{2}$ about the positive x-axis, followed by a rotation of $\frac{\pi}{4}$ about the positive y-axis, followed by a rotation of π about the z-axis.

答案： 该题为纯计算题，故省略计算过程。

Problem C(6 Points)

Determine whether the matrix transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by the equations is one-to-one; if so, find the standard matrix for the inverse operator T^{-1}, and find $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.

1. (3 points)

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

2. (3 points)

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}.$$

答案： 这里给出第一问的求解过程，第二问类似可解。

由T的表达式容易确定$T(\boldsymbol{e}_1) = T(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$T(\boldsymbol{e}_2) = T(0, 1, 0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$T(\boldsymbol{e}_3) = T(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。因此，可得$T$的标准矩阵为

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

那么由讲义Theorem 4.51的第五条说法可知，T为one-to-one当且仅当$[T]$可逆。通过计算可得$\det([T]) = -2 \neq 0$，因此$[T]$可逆，故T为one-to-one。又由讲义Theorem 4.52可知，T^{-1}的标准矩阵为$[T]^{-1}$，因此通过计算可得

$$[T]^{-1} = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

从而有$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = [T]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 \end{bmatrix}$。

Problem D(6 Points)

判断以下说法是否正确。如果正确写出证明，如果错误举出反例。

1. (2 points) 如果$n > m$，那么任何矩阵变换$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$都不可能是一一映射(one-to-one)。

   答案： 正确。由rank–nullity theorem可知

   $$n = \text{rank}([T]) + \text{nullity}([T]) \Rightarrow \text{nullity}([T]) = n - \text{rank}([T]).$$

   由于$\text{rank}([T]) = \dim(\text{Col}([T]))$且$\text{Col}([T]) \subset \mathbb{R}^m$作为$\mathbb{R}^m$里的子空间其维数不大于$m$，可得

   $$\text{nullity}([T]) = n - \text{rank}([T]) \geq n - m > 0$$

   在$n > m$时成立。因此利用讲义Theorem 4.51可得此时T不可能为one-to-one。

2. (2 points) 如果$n < m$，那么任何矩阵变换$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$都不可能是满射(surjective, onto)，即不可能有$R(T) = \mathbb{R}^m$。

   答案： 正确。由rank–nullity theorem可知

   $$n = \text{rank}([T]) + \text{nullity}([T]) \Rightarrow \text{rank}([T]) = n - \text{nullity}([T]).$$

   由于$\text{nullity}([T]) \geq 0$，可得$\text{rank}([T]) = n - \text{nullity}([T]) \leq n < m$在$n < m$时成立，即此时不可能有$\text{rank}([T]) = m$。因此利用讲义Theorem 4.51可得此时$T$不可能为onto。

3. (2 points) 令$V = C^1(-\infty,\infty)$为所有连续可微函数的集合，令$W = C(-\infty,\infty)$为所有连续函数的集合，令$D : V \to W$为求导运算：$D(f(x)) = f'(x)$。那么D既是一一映射又是满射。

   答案： 错误。D不是one-to-one的：对任何$f \in V = C^1(-\infty,\infty)$，任何常数$c$，都有
   $$D(f) = f' = D(f + c).$$
   另一方面注意$D : V \to W$确实是onto的：对任何连续函数$f \in W = C(-\infty,\infty)$，定义$g(x) = \int_0^x f(t)dt$。由微积分基本定理可得$g(x) \in V = C^1(-\infty,\infty)$，且有
   $$D(g)(x) = g'(x) = f(x).$$

Problem E(6 Points)

证明以下两个说法。

1. (3 points) 假设V为一个向量空间，$\dim(V) = n$，$B = \{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$为$V$的一组基底。假设$W$为另一个向量空间。那么如果两个线性变换$T : V \to W$与$S : V \to W$满足
   $$T(\boldsymbol{v}_1) = S(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2) = S(\boldsymbol{v}_2),\ldots,T(\boldsymbol{v}_n) = S(\boldsymbol{v}_n),$$
   则必然有$T = S$，即$T(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v})$对任何$\boldsymbol{v} \in V$都成立。

   答案： 由于B是基底，任何$\boldsymbol{v} \in V$都有唯一的线性组合表示
   $$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n.$$
   因此如果两个线性变换$T : V \to W$与$S : V \to W$满足
   $$T(\boldsymbol{v}_1) = S(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2) = S(\boldsymbol{v}_2),\ldots,T(\boldsymbol{v}_n) = S(\boldsymbol{v}_n),$$
   那么对任何$\boldsymbol{v} \in V$都有$T(\boldsymbol{v}) = k_1T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + k_nT(\boldsymbol{v}_n) = k_1S(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + k_nS(\boldsymbol{v}_n) = S(\boldsymbol{v})$。

2. (3 points) Let U, V, W be vector spaces and let $T : V \to W$, $S : W \to U$ be linear transformations. Prove that rank$(S \circ T) \le \min($rank$(S),$ rank$(T))$, rank$(S \circ T) =$ rank(S) if T is surjective, rank$(S \circ T) =$ rank(T) if S is one-to-one.

   答案：

- 由于$R(S\circ T)=\{(S\circ T)(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{v}\in V\}=\{T(S(\boldsymbol{v})):\boldsymbol{v}\in V\}$且$R(T)=\{T(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{v}\in V\}\subset W$为$W$里的子空间，我们必然有

  $$R(S\circ T)=\{S(T(\boldsymbol{v})):\boldsymbol{v}\in V\}=\{S(\boldsymbol{w}):\boldsymbol{w}\in R(T)\}\subset\{S(\boldsymbol{w}):\boldsymbol{w}\in W\}=R(S),$$

  由此可得rank$(S\circ T)=\dim(R(S\circ T))\leq\dim(R(S))=$ rank(S)。
  另一方面，注意我们已经证明

  $$R(S\circ T)=\{S(T(\boldsymbol{v})):\boldsymbol{v}\in V\}=\{S(\boldsymbol{w}):\boldsymbol{w}\in R(T)\}.$$

  因此如果我们只考虑S在$R(T)\subset W$上的取值，即定义另一个线性变换$S':R(T)\to U$满足$S'(\boldsymbol{w})=S(\boldsymbol{w})$对任何$\boldsymbol{w}\in R(T)$，那么我们得到

  $$R(S')=\{S(\boldsymbol{w}):\boldsymbol{w}\in R(T)\}=R(S\circ T),$$

  从而有rank$(S')=$ rank$(S\circ T)$。此时利用讲义Theorem 5.5(rank–nullity theorem)又得到

  $$\text{rank}(S')+\text{nullity}(S')=\dim(R(T))$$

  (因为$R(T)$是线性变换S'的定义域)，从而有

  $$\text{rank}(S')=\dim(R(T))-\text{nullity}(S')\leq\dim(R(T))$$

  即rank$(S')=$ rank$(S\circ T)\leq\dim(R(T))=$ rank(T)。因此得证rank$(S\circ T)\leq\min(\text{rank}(S),\text{rank}(T))$。
- 如果$T:V\to W$是满射(surjective/onto)，那么$R(T)=W$。此时我们在上一步里定义的线性变换$S':R(T)\to U$显然与$S:W\to U$完全相等，因此由上一步中得到的等式rank$(S')=$ rank$(S\circ T)$，我们可以推出

  $$\text{rank}(S')=\text{rank}(S)=\text{rank}(S\circ T).$$

- 如果S是one-to-one的，那么Ker$(S)=\{\mathbf{0}\}$。显然此时我们在第一步里定义的线性变换$S':R(T)\to U$满足$\{\mathbf{0}\}\subset$ Ker$(S')\subset$ Ker$(S)=\{\mathbf{0}\}$，从而有Ker$(S')=\{\mathbf{0}\}$，即nullity$(S')=0$。此时利用我们在第一步里得到的等式

  $$\text{rank}(S')+\text{nullity}(S')=\dim(R(T))$$

  与

  $$\text{rank}(S')=\text{rank}(S\circ T)$$

  可以得到rank$(T)=\dim(R(T))=$ rank$(S')+0=$ rank$(S')=$ rank$(S\circ T)$。

Deadline: 22:00, December 17.

作业提交截止时间：12月17日晚上22：00。