线性代数(2023-2024)第十二次作业

1 复习知识点

- $A \in M_{n\times n}$可对角化当且仅当存在一组A的特征向量$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$构成$\mathbb{R}^n$的一组基底。
- 令$p(\lambda)$为A的特征多项式。如果$a \in \mathbb{R}$是A的一个特征值，那么我们可以将$p(\lambda)$表示为

  $$p(\lambda) = (\lambda - a)^c q(\lambda),$$

  这里的多项式$q(\lambda)$的最高次幂为$n - c$且$q(a) \neq 0$。我们称c为a的代数重数。将V_a记为A关于a的特征空间，那么它的维数$\dim(V_a) = d$被称为a的几何重数。我们永远有代数重数c大于或等于几何重数d。一个矩阵A可以对角化当且仅当它所有特征值的代数重数都等于几何重数。
- 熟练掌握判断矩阵是否可以对角化以及将其对角化的计算过程。
- 正交矩阵的原始定义与等价定义。
- 内积空间的重要例子，正交集合，标准正交基底的定义与性质。
- 内积空间中子空间的正交补。
- Gram-Schmidt程序。

2 习题部分

Problem A(6 Points)

Find the geometric and algebraic multiplicity of each eigenvalue of the following matrix A, and determine whether A is diagonalizable. If A is diagonalizable, then find a matrix P that diagonalizes A, and find the diagonal matrix D such that $D = P^{-1}AP$.

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
- $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Problem B(6 Points), 2022-2023年线性代数期末考试题

Let V be a finite dimensional vector space. Let $T : V \to V$ be a linear operator satisfying

$T^3 = T \circ T \circ T = 4T$.

1. (3 points) Prove that $\ker(T) + \text{RAN}(T^2) = V$, here $\ker(T)$ denotes the kernel of T, $\text{RAN}(T^2)$ denotes the range of $T^2 = T \circ T$. (这一问出现在第四章第五章自测题中)

   提示： 注意对任何$\boldsymbol{v} \in V$，都可以写成$\boldsymbol{v} = \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \frac{1}{4}T^2(\boldsymbol{v}))$。

2. (3 points) Prove that there is a basis B for V such that all vectors in B are eigenvectors of $T^2 = T \circ T$. (关于线性变换的特征值，特征向量的定义见第11次作业，Problem D)

   提示： 考虑$\ker(T)$与$\text{RAN}(T^2)$的基底，并利用第一问的结论。

Problem C(6 Points), 2022-2023年线性代数期末延期考试题

Suppose that $A \in M_{3\times 3}$ has eigenvalues

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0,$$

with corresponding eigenvectors

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

respectively. Find the matrix A.

Problem D(6 Points), 2022-2023年线性代数期末延期考试题

Let $V = M_{n\times n}$. Let $C \in V$ be a symmetric matrix whose eigenvalues are all positive. Define $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on V by

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^\top CA).$$

1. (3 points) Prove that $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is an inner product on V.
   提示： 任何对称矩阵C都可以正交对角化，即存在正交矩阵P与对角矩阵D使得$D = P^\top CP$。
2. (3 points) Prove that $\langle A, B \rangle = 0$ if $AB^\top$ is skew–symmetric, i.e., $(AB^\top)^\top = -AB^\top$.
   提示： 可利用以下事实：对任何$A, B \in M_{n\times n}$，都有$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$。

Problem E(6 Points), 2022-2023年线性代数期末考试题

Suppose that $V = P_2$ is equipped with the following inner product

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)x^2dx.$$

Let $W = \text{span}\{p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x^2\} \subset V$.

1. (2 points) Find an orthonormal basis for W.
2. (2 points) Let $p_3(x) = 1$. Find $\text{proj}_W(p_3(x))$, the orthogonal projection of $p_3(x)$ on W.
3. (2 points) Find a basis for $W^\perp$, the orthogonal comlement of W.

Bonus: 不计入分数 设向量$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$均为非零向量，且有$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$。令$A = \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^\top \in M_{n\times n}$。

1. 求A^2。
2. 求A的特征值与特征向量。

Deadline: 22:00, January 07.

作业提交截止时间：1月7日晚上22：00。