线性代数(2023-2024)第六次作业

1 复习知识点

- 如何判断一个向量空间V里的某个子集$W \subset V$是子空间(subspace)：需要验证W关于向量加法与标量积的封闭性。
- 一些特殊的子空间构造方法，比如：若干子空间的交集(intersection)仍是一个子空间；齐次方程组的解空间(solution space)；
  由V里的某个集合$S = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$生成的子空间$W = \text{span}(S)$。
- 线性无关，线性相关的定义。**重要考试题型为：如何判断一个给定的向量集合是否线性无关。注意这类问题通常等价于判断某个方程组是否有非平凡解，**4.3节的几个例子非常重要需要完全掌握。
  重要知识点(Theorem 4.19)：对任何n维向量空间V以及V的一组基底$M = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$，$V$里包含$r$个向量的集合$S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\} \subset V$线性无关当且仅当以
  $$[\boldsymbol{v}_1]_M, \ldots, [\boldsymbol{v}_r]_M$$
  在$\mathbb{R}^n$里线性无关。
- 基底的定义，坐标向量基底之间的关系，如何计算给定向量关于给定基底的坐标向量。
  重要知识点(Theorem 4.19)：$\mathbb{R}^n$里包含n个向量的集合$S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$是$\mathbb{R}^n$的一组基底当且仅当以$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$为列向量的$n$阶方阵可逆。
  重要知识点(Theorem 4.19)：对任何n维向量空间V以及V的一组基底$M = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$，$V$里包含$n$个向量的集合$S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subset V$是$V$的一组基底当且仅当以
  $$[\boldsymbol{v}_1]_M, \ldots, [\boldsymbol{v}_n]_M$$
  为列向量的n阶方阵可逆。

2 习题部分

Problem A(6 Points). 判断以下集合是否**一定**是子空间(subspace)，**并给出理由**。

1. (2 points) 令V为一个向量空间，$U, W \subset V$为V里的两个子空间。我们定义U与W的和为集合
$$U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}.$$

那么$U+W$是否一定为V的一个子空间？(延伸问题：若$U_1,\ldots,U_r\subset V$都是V里的子空间，那么它们的和

$$U_1+\ldots+U_r=\{\boldsymbol{u}_1+\ldots+\boldsymbol{u}_r:\boldsymbol{u}_i\in U_i, i=1,\ldots,r\}$$

是否一定为V里的子空间？)

2. (2 points) 令V为一个向量空间，$U,W\subset V$为V里的两个子空间。我们定义U与W的并集为集合

$$U\cup W=\{\boldsymbol{v}\in V:\boldsymbol{v}\in U\text{或者}\boldsymbol{v}\in W\}.$$

那么$U\cup W$是否一定为V的子空间？

3. (2 points) 令$V=M_{2\times 2}$为2阶方阵组成的向量空间(即，加法为矩阵加法，标量积为实数与矩阵的标量积，将$M_{2\times 2}$里的零矩阵记为$\mathbf{0}_{2\times 2}$)。对于$A\in M_{2\times 2}$，如果存在一个自然数m使得$A^m=\mathbf{0}_{2\times 2}$，我们就称$A$为一个2阶**幂零矩阵**。令$W=\{A\in M_{2\times 2}:A\text{为幂零矩阵}\}$。那么$W$是否为$M_{2\times 2}$里的子空间？

Problem B(6 Points). 在讲义里我们提到了函数空间$F(-\infty,\infty)=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$，我们知道它装配加法

$$f\in F(-\infty,\infty), g\in F(-\infty,\infty), (f+g)(x)=f(x)+g(x);$$

与标量积

$$c\in\mathbb{R}, f\in F(-\infty,\infty), (cf)(x)=cf(x)$$

后成为一个向量空间。令

$$V_{\text{odd}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(-x)=-f(x)\}$$

为所有奇函数(odd functions)的集合，令

$$V_{\text{even}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(-x)=f(x)\}$$

为所有偶函数(even functions)的集合。证明：

1. (3 points) V_{odd}与V_{even}是$F(-\infty,\infty)$里的子空间。
2. (3 points)

$$V_{\text{odd}}+V_{\text{even}}=F(-\infty,\infty)$$

且$V_{\text{odd}}\cap V_{\text{even}}=\{\mathbf{0}\}$。这里$V_{\text{odd}}+V_{\text{even}}$代表两个子空间之和，见Problem A的第一问；$\mathbf{0}$为零函数，即$\mathbf{0}(x)=0$对一切$x\in\mathbb{R}$成立。

Problem C(6 Points). 令$P_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$为所有次数不大于3的多项式组成的集合。我们知道它装配上函数加法

$$f \in P_3, g \in P_3, (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

与标量积

$$c \in \mathbb{R}, f \in P_3, (cf)(x) = cf(x)$$

之后是一个向量空间。令$p_1(x) = x^3 + x^2$，$p_2(x) = x^2 - 2x - 4$，$p_3(x) = 3x + 4$，$p_4(x) = 2x + 3$。

1. (2 points) 将多项式$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \in P_3$表示为$p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$的线性组合。即求出系数$c_1, c_2, c_3, c_4$使得

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 = c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) + c_4p_4(x).$$

2. (2 points) 判断集合$S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$是否为线性无关集合，并给出理由。
3. (2 points) 证明$\mathrm{span}(S) = P_3$。

Problem D(6 Points).

1. (3 points) Find the coordinate vector of polynomial $p(x) \in P_2$ relative to the basis $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$. Here $p(x) = 2 - x + x^2$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + x^2$, $p_3(x) = x + x^2$.
2. (3 points) Show that the following Hermite polynomials

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = 2x, p_3(x) = -2 + 4x^2, p_4(x) = -12x + 8x^3$$

form a basis for P_3.

Problem E(6 Points). 对每个给定的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$与$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，考虑以下$M_{m\times n}$里的子集

$$W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}} = \{A \in M_{m\times n} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

找出所有能够使得集合$W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}}$成为$M_{m\times n}$里的子空间的向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{b}$。

Deadline: 22:00, November 19.

作业提交截止时间：11月19日晚上22：00。