线性代数(2023-2024)第一次作业参考答案

Problem B(6 Points). Consider the following linear system

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10.$$

1. (1 point) Write down the augmented matrix of this linear system.
2. (3 points) Transform the augmented matrix to a row echelon form or to a reduced row echelon form, and indicate which elementary row operation is used in every step.
3. (1 point) Determine the leading variables and free variables of this linear system.
4. (1 point) Solve this linear system by using the row echelon form or reduced row echelon form obtained in 2., and give the general solution.

答案：

1. 增广矩阵为
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$
2.
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第1行}\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第1行}\times(-5)+\text{第2行}} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -8/3 & -2/3 & -8/3 & 10 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -8/3 & -2/3 & -8/3 & 10 \end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第2行}\times(-\frac{3}{8})} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 & -15/4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 & -15/4 \end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第2行}\times(-\frac{1}{3})+\text{第1行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 & -15/4 \end{bmatrix}.$$
   最终所得的矩阵
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 & -15/4 \end{bmatrix}$$
   为所求简化阶梯型。
3. 由于在简化阶梯型
$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 1/4 & 0 & 5/4 \\ 0 & \color{red}{1} & 1/4 & 1 & -15/4 \end{bmatrix}$$

中第一行的主1在第一列上，第二行的主1在第二列上，根据讲义 Definition 1.6 可知方程组的主元为x_1与x_2，自由元为x_3与x_4。

4. 对自由元x_3， x_4赋任意值：$x_3 = r$, $x_4 = s$ (r, s 为任意常数)，可得$x_2 = -\frac{15}{4} - \frac{1}{4}r - s$， $x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}r$。最终可得通解为

$$x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}r, x_2 = -\frac{15}{4} - \frac{1}{4}r - s, x_3 = r, x_4 = s.$$

Problem D(6 Points). Determine the values of a for which the linear system

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$3x - y + 5z = 2$$
$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

has

1. (2 points) no solution,
2. (2 points) exactly one solution,
3. (2 points) infinitely many solution.

翻译：考虑以下线性方程组

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$3x - y + 5z = 2$$
$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

求a取何值时

1. (2 分) 该方程组无解，
2. (2 分) 该方程组有且仅有一个解，
3. (2 分) 该方程组有无穷多个解。

答案：该方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2. \end{bmatrix}$$

我们通过初等行变化将其转化为阶梯型：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第1行}\times(-3)+\text{第2行},\text{第1行}\times(-4)+\text{第3行}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14\end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第2行}\times(-1)+\text{第3行}} \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{第2行}\times\frac{-1}{7}} \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{bmatrix}.$$

显然，以上矩阵告诉我们，方程组解的情况与a^2-16是否为0密切相关。因此对a^2-16是否为0进行分类讨论可得：

- 若$a^2-16\neq 0$，即$a\neq 4$，$a\neq -4$，此时对矩阵

  $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{bmatrix}.$$

  第3行乘以非零常数$\frac{1}{a^2-16}$可将其转化为阶梯型

  $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a^2-16}=\frac{1}{a+4}\end{bmatrix}.$$

  显然此时可知，以上阶梯型可继续转化为单位矩阵+解向量的形式，故此时原方程组有且仅有一个解。

- 若$a=4$，那么$a^2-16=0$且$a-4=0$，意味着矩阵

  $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{bmatrix}$$

  在此时等于

  $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

  这意味着x_3为一个自由元，因此原方程组有无穷多个解。

- 若$a=-4$，那么$a^2-16=0$且$a-4=-8$，意味着矩阵

  $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{bmatrix}$$

在此时等于

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

显然这意味着此时原方程组无解。

Problem E(6 Points). Solve the following system of nonlinear equations for x, y and z.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3. \end{aligned}$$

翻译：求解以下非线性方程组

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3. \end{aligned}$$

答案: 首先令$u = x^2, v = y^2, w = z^2$。那么关于未知数$x, y, z$的非线性方程组成为关于未知数$u, v, w$的线性方程组：

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ u - v + 2w &= 2 \\ 2u + v - w &= 3. \end{aligned}$$

利用高斯消元法或者高斯-若尔当消元法求解该方程组可得

$$u = 1, v = 3, w = 2.$$

因此$x^2 = u = 1$, $y^2 = v = 3$, $z^2 = w = 2$，由此可得 $x = 1, -1$, $y = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$, $z = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$。

Deadline: 22:00, October 15.

作业提交截止时间：十月十五日晚上22：00。