线性代数(2023-2024)第六次作业参考答案

Problem A(6 Points). 判断以下集合是否**一定**是子空间(subspace)，**并给出理由**。

1. (2 points) 令V为一个向量空间，$U, W \subset V$为V里的两个子空间。我们定义U与W的和为集合

   $$U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}.$$

   那么$U + W$是否一定为V的一个子空间？(延伸问题：若$U_1, \ldots, U_r \subset V$都是$V$里的子空间，那么它们的和

   $$U_1 + \ldots + U_r = \{\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_r : \boldsymbol{u}_i \in U_i, i = 1, \ldots, r\}$$

   是否一定为V里的子空间？)

   答案： 我们直接证明，若$U_1, \ldots, U_r \subset V$都是$V$里的子空间，那么它们的和

   $$U_1 + \ldots + U_r = \{\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_r : \boldsymbol{u}_i \in U_i, i = 1, \ldots, r\}$$

   一定为V里的子空间。对此我们需要验证$U_1 + \ldots + U_r$关于向量加法与标量积的封闭性。
   对于$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_i \in U_i (i = 1, \ldots, r)$，$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u}'_1 + \ldots + \boldsymbol{u}'_r$，$\boldsymbol{u}'_i \in U_i (i = 1, \ldots, r)$。显然，$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}'_1) + \ldots + (\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}'_r)$。那么由于$U_1, \ldots, U_r$均为子空间，我们必然有$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}'_1 \in U_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}'_r \in U_r$，故由子空间的和的定义可知，$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in U_1 + \ldots + U_r$。
   同理可证$U_1 + \ldots + U_r$关于标量积的封闭性：对任何$c \in \mathbb{R}$，任何$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_r$，都有

   $$c\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c\boldsymbol{u}_r$$

   且由于$U_1, \ldots, U_r$均为子空间，必然有$c\boldsymbol{u}_1 \in U_1, \ldots, c\boldsymbol{u}_r \in U_r$，故$c\boldsymbol{w} \in U_1 + \ldots + U_r$。
   综上，$U_1 + \ldots + U_r$为子空间。

2. (2 points) 令V为一个向量空间，$U, W \subset V$为V里的两个子空间。我们定义U与W的并集为集合

   $$U \cup W = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \in U \text{或者} \boldsymbol{v} \in W\}.$$

   那么$U \cup W$是否一定为V的子空间？

答案： $U\cup W$不一定为V的子空间。比如，令$V=\mathbb{R}^2$，令$U=\{k(1,1):k\in\mathbb{R}\}$，令$W=\{c(1,-1):c\in\mathbb{R}\}$为$\mathbb{R}^2$的两个子空间。显然，$(1,1)\in U\cup W$，$(1,-1)\in U\cup W$，但是$(1,1)+(1,-1)=(2,0)$既不属于$U$也不属于$W$，因此$U\cup W$不满足加法的封闭性，故不是子空间。

3. (2 points) 令$V=M_{2\times 2}$为2阶方阵组成的向量空间(即，加法为矩阵加法，标量积为实数与矩阵的标量积，将$M_{2\times 2}$里的零矩阵记为$\mathbf{0}_{2\times 2}$)。对于$A\in M_{2\times 2}$，如果存在一个自然数m使得$A^m=\mathbf{0}_{2\times 2}$，我们就称$A$为一个2阶**幂零矩阵**。令$W=\{A\in M_{2\times 2}:A\text{为幂零矩阵}\}$。那么$W$是否为$M_{2\times 2}$里的子空间？

答案： $W=\{A\in M_{2\times 2}:A\text{为幂零矩阵}\}$不是$M_{2\times 2}$里的子空间。注意$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$满足$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，因此$A\in W$是一个幂零矩阵。类似的，$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$也满足$B^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，因此$B\in W$是一个幂零矩阵。然而$A+B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$不可能是一个幂零矩阵，因为任何幂零矩阵$C\in W$由于满足$A^m=\mathbf{0}_{2\times 2}$，必须满足$\det(A^m)=\det(A)^m=\det(\mathbf{0}_{2\times 2})=0$，即必须满足$\det(A)=0$；然而$\det(A+B)=-1\neq 0$。这意味着$W$不满足关于加法的封闭性，故不能成为子空间。

Problem B(6 Points). 在讲义里我们提到了函数空间$F(-\infty,\infty)=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$，我们知道它装配加法

$$f\in F(-\infty,\infty),g\in F(-\infty,\infty),(f+g)(x)=f(x)+g(x);$$

与标量积

$$c\in\mathbb{R},f\in F(-\infty,\infty),(cf)(x)=cf(x)$$

后成为一个向量空间。令

$$V_{\text{odd}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(-x)=-f(x)\}$$

为所有奇函数(odd functions)的集合，令

$$V_{\text{even}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(-x)=f(x)\}$$

为所有偶函数(even functions)的集合。证明：

1. (3 points) V_{odd}与V_{even}是$F(-\infty,\infty)$里的子空间。

答案： 我们证明$V_{\text{odd}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(-x)=-f(x)\}$是一个子空间，对$V_{\text{even}}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(-x)=f(x)\}$的证明类似可得。

若$f \in V_{\text{odd}}$，$g \in V_{\text{odd}}$，即$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$。那么显然有

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x),$$

从而得到$f+g \in V_{\text{odd}}$仍是一个奇函数。对于$c \in \mathbb{R}$，$f \in V_{\text{odd}}$，那么$(cf)(-x) = cf(-x) = -cf(x) = -(cf)(x)$，即$cf \in V_{\text{odd}}$仍是一个奇函数。综上，$V_{\text{odd}}$满足关于加法与标量积的封闭性，因此是一个子空间。

2. (3 points)

$$V_{\text{odd}} + V_{\text{even}} = F(-\infty, \infty)$$

且$V_{\text{odd}} \cap V_{\text{even}} = \{\mathbf{0}\}$。这里$V_{\text{odd}} + V_{\text{even}}$代表两个子空间之和，见Problem A的第一问；$\mathbf{0}$为零函数，即$\mathbf{0}(x) = 0$对一切$x \in \mathbb{R}$成立。

答案： 要证明$V_{\text{odd}} + V_{\text{even}} = F(-\infty, \infty)$，我们只需证明任何函数$h \in F(-\infty, \infty)$都可以写成$h = f + g$，$f \in V_{\text{odd}}$，$g \in V_{\text{even}}$。那么对于任何$h \in F(-\infty, \infty)$，我们定义$f(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$，定义$g(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$。容易验证$f \in V_{\text{odd}}$为一个奇函数，$g \in V_{\text{even}}$为一个偶函数，且$h(x) = f(x) + g(x)$。
如果$h \in V_{\text{odd}} \cap V_{\text{even}}$，那么$h$既是奇函数又是偶函数，从而有

$$h(-x) = -h(x), h(-x) = h(x) \Rightarrow h(x) = -h(x).$$

那么只可能是$h(x) = 0$对任何$x \in \mathbb{R}$。因此$V_{\text{odd}} \cap V_{\text{even}} = \{\mathbf{0}\}$。

Problem C(6 Points). 令$P_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$为所有次数不大于3的多项式组成的集合。我们知道它装配上函数加法

$$f \in P_3, g \in P_3, (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

与标量积

$$c \in \mathbb{R}, f \in P_3, (cf)(x) = cf(x)$$

之后是一个向量空间。令$p_1(x) = x^3 + x^2$，$p_2(x) = x^2 - 2x - 4$，$p_3(x) = 3x + 4$，$p_4(x) = 2x + 3$。

1. (2 points) 将多项式$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \in P_3$表示为$p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$的线性组合。即求出系数$c_1, c_2, c_3, c_4$使得

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) + c_4 p_4(x).$$

答案： 由于

$$
\begin{aligned}
c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x) &= c_1(x^3+x^2)+c_2(x^2-2x-4)\\
&\quad +c_3(3x+4)+c_4(2x+3)\\
&=(-4c_2+4c_3+3c_4)+(-2c_3+3c_3+2c_4)x\\
&\quad +(c_1+c_2)x^2+c_1x^3,
\end{aligned}
$$

我们得到：$p(x)=2x^3+3x^2-1=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x)$当且仅当$(c_1,c_2,c_3,c_4)\in\mathbb{R}^4$满足方程组

$$
\begin{aligned}
c_1&=2\\
c_1+c_2&=3\\
-2c_3+3c_3+2c_4&=0\\
-4c_2+4c_3+3c_4&=-1.
\end{aligned}
$$

用高斯消元法解该方程组可得$c_1=2$，$c_2=1$，$c_3=0$，$c_4=1$。因此$p(x)=2x^3+3x^2-1=2p_1(x)+p_2(x)+p_4(x)$。

2. (2 points) 判断集合$S=\{p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)\}$是否为线性无关集合，并给出理由。

答案： 令$M=\{1,x,x^2,x^3\}$为P_3的标准基底。利用讲义Theorem 4.19我们知道$S=\{p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)\}$为线性无关集合当且仅当坐标向量

$$[p_1(x)]_M,[p_2(x)]_M,[p_3(x)]_M,[p_4(x)]_M$$

在$\mathbb{R}^4$里线性无关，而后者又等价于以$[p_1(x)]_M,[p_2(x)]_M,[p_3(x)]_M,[p_4(x)]_M$在$\mathbb{R}^4$为列向量的方阵$A$可逆。那么由于

$$[p_1(x)]_M=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},[p_2(x)]_M=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\-4\end{bmatrix},[p_3(x)]_M=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\4\end{bmatrix},[p_4(x)]_M=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\end{bmatrix},$$

我们得到

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&-2&3&2\\0&-4&4&3\end{bmatrix}.$$

经计算可得$\det(A)=1\times1\times(3\times3-4\times2)=1$，因此$A$可逆，故$S$为线性无关集合。

3. (2 points) 证明$\mathrm{span}(S) = P_3$。

答案： 由讲义Theorem 4.19我们知道$S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$为一组基底当且仅当坐标向量

$$[p_1(x)]_M, [p_2(x)]_M, [p_3(x)]_M, [p_4(x)]_M$$

是$\mathbb{R}^4$的基底，而后者又等价于以$[p_1(x)]_M, [p_2(x)]_M, [p_3(x)]_M, [p_4(x)]_M$在$\mathbb{R}^4$为列向量的方阵$A$可逆。由于在上一问已经求出$\det(A) \neq 0$，我们得到$S$为$P_3$的一组基底，特别地，有$\mathrm{span}(S) = P_3$。

Problem D(6 Points).

1. (3 points) Find the coordinate vector of polynomial $p(x) \in P_2$ relative to the basis $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$. Here $p(x) = 2 - x + x^2$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + x^2$, $p_3(x) = x + x^2$.

答案： 设$(p(x))_S = (c_1, c_2, c_3)$，那么$(c_1, c_2, c_3)$满足

$$\begin{aligned} p(x) = c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) &= c_1(1 + x) + c_2(1 + x^2) + c_3(x + x^2) \\ &= (c_1 + c_2) + (c_1 + c_3)x + (c_2 + c_3)x^2 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ c_1 + c_3 &= -1 \\ c_2 + c_3 &= 1. \end{aligned}$$

用高斯消元法求解可得 $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = -1$。因此$(p(x))_S = (0, 2, -1)$。

2. (3 points) Show that the following Hermite polynomials

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = 2x, p_3(x) = -2 + 4x^2, p_4(x) = -12x + 8x^3$$

form a basis for P_3.

答案： 令$M = \{1ﬁx, x^2, x^3\}$为P_3的标准基底。那么有

$$[p_1(x)]_M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_2(x)]_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_3(x)]_M = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_4(x)]_M = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

以这些坐标向量为列向量的矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$的行列式$\det(A) = 1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64$。因此$A$可逆，由Theorem 4.19可得$S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$为$P_3$的一组基底。

Problem E(6 Points). 对每个给定的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$与$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，考虑以下$M_{m\times n}$里的子集

$$W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}} = \{A \in M_{m\times n} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

找出所有能够使得集合$W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}}$成为$M_{m\times n}$里的子空间的向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{b}$。

答案： 假如$\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$，那么由于$\mathbf{0}_{m\times n}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$对任何$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$成立，我们当然有$\mathbf{0}_{m\times n}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{b}$对任何$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，也即$\mathbf{0}_{m\times n} \notin W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}}$。这意味着如果$\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$，那么$W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}}$对任何$\boldsymbol{x}$都不是子空间。
若$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$，那么对于任何$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，显然集合$W_{\boldsymbol{x},\mathbf{0}}$关于矩阵加法和标量积封闭：$A \in W_{\boldsymbol{x},\mathbf{0}}, B \in W_{\boldsymbol{x},\mathbf{0}} \Rightarrow (A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow A + B \in W_{\boldsymbol{x},\mathbf{0}}$；$c \in \mathbb{R}, A \in W_{\boldsymbol{x},\mathbf{0}} \Rightarrow (cA)\boldsymbol{x} = c(A\boldsymbol{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow cA \in W_{\boldsymbol{x},\mathbf{0}}$。综上，只要$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$，那么任何$\boldsymbol{x}$都可以使得集合$W_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}}$成为$M_{m\times n}$里的子空间。

Deadline: 22:00, November 19.

作业提交截止时间：11月19日晚上22：00。