线性代数(2023-2024)第二次作业

1 复习知识点

- 矩阵相等，加法，减法，标量积的定义。
- 矩阵乘法的定义以及乘法能被定义的前提条件: $A \in M_{m_1 \times n_1}$，$B \in M_{m_2 \times n_2}$的乘积可以被定义只有当$n_1 = m_2$，即A的列数等于B的行数时。此时$AB \in M_{m_1 \times n_2}$，即乘积$AB$的行数等于左边矩阵$A$的行数，$AB$的列数等于右边矩阵$B$的列数。
- 矩阵乘法不满足交换律！即对一般的矩阵A,B不一定$AB = BA$。类似的，$AB = 0$并不一定可以意味着$A = 0$或$B = 0$。请记住矩阵乘法中这些与实数乘法不同的地方！
- 矩阵加法，标量积，转置与乘法之间的运算法则，尤其是英文教材Theorem 1.4.1, 1.4.2, 1.4.8.
- 矩阵多项式的定义，矩阵迹的定义。
- 初等矩阵的定义，初等矩阵与初等行变换的关系，如何利用初等矩阵或者初等行变换求出矩阵的逆。

2 习题部分

Problem A(6 Points). 证明以下说法

1. (2 分) 假设A为一个$m \times r$-矩阵，B为一个$r \times n$-矩阵，将B用列向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

每个$\boldsymbol{c}_j$为$r \times 1$-矩阵，$j = 1, \dots, n$。证明矩阵乘积AB的列向量表示:

$$AB = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \dots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{c}_1 & A\boldsymbol{c}_2 & \dots & A\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix},$$

即A与B的乘积AB的第j列为矩阵A与B的第j列$\boldsymbol{c}_j$ (作为$r \times 1$-矩阵)的乘积$A\boldsymbol{c}_j$。

2. (1分) 设A为一个$m \times r$-矩阵，B为一个$r \times n$-矩阵。将A用行向量表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix},$$

每个$\boldsymbol{r}_i$为$1 \times r$-矩阵，$i = 1, \ldots, m$。证明矩阵乘积AB的行向量表示：

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 B \\ \boldsymbol{r}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m B \end{bmatrix}$$

即A与B的乘积AB的第i行为矩阵A的第i行$\boldsymbol{r}_i$ (作为$1 \times r$-矩阵)与矩阵B的乘积$\boldsymbol{r}_i B$。

3. (1分) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$。通过计算$(AB)C$与$A(BC)$验证矩阵乘法的结合律。
4. (2分) 证明：对任何矩阵A与B，只要AB能够被定义，那么一定有$(AB)^\top = B^\top A^\top$。同时证明$(A^\top)^\top = A$。

Problem B(6 Points). 回顾矩阵迹(trace)的定义，并证明以下说法。

1. (2分) 对任何$A, B \in M_{n\times n}$，常数c, d， $\mathrm{tr}(cA + dB) = c\mathrm{tr}(A) + d\mathrm{tr}(B)$。
2. (1分) 对任何$A \in M_{n\times n}$，$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^\top)$。
3. (2分) 对任何$A, B \in M_{m\times n}$，证明

$$\mathrm{tr}(AB^\top) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}.$$

注意：这里我们使用了**爱因斯坦求和符号**$\sum$。比如对于给定的i，$\sum_{j=1}^n A_{ij}B_{ij} = A_{i1}B_{i1} + A_{i2}B_{i2} + \ldots + A_{in}B_{in}$，即对下标$j$从1到$n$求和；因此$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}B_{ij}$指先对每个$i = 1, \ldots, m$求$\sum_{j=1}^n A_{ij}B_{ij}$的值，将得到的数记作$a_i$，再对$a_i$的下标$i$从1到$m$求和：

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} = a_1 + a_2 + \ldots + a_m, \quad a_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} = A_{i1}B_{i1} + A_{i2}B_{i2} + \ldots + A_{in}B_{in}.$$

Bonus(不计分数/并非考试内容): 证明tr$(AB^\top) =$ **tr**$(A^\top B)$。

4. (1分) 对任何$A \in M_{m\times n}$，证明 $\mathrm{tr}(AA^\top) \geq 0$。

Problem C(6 Points). Let $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$，

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. (2 points) Let $p(x) = (x-1)(x+1)$. Compute $p(A)$. (2021年线性代数期中考试题)
2. (2 points) Let $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Compute $\mathrm{tr}(p(B))$. (2022年线性代数期中考试题)
3. (1 point) Compute $(2E^\top - 3D^\top)^\top$.
4. (1 point) Compute $B^\top(CC^\top - A)$.

Problem D(6 Points). Use the inversion algorithm to find the inverse of the matrix, if the inverse exists.

1. (2 points) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.
2. (2 points) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$.
3. (2 points) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Problem E(6 Points). (2021年线性代数期中考试题)
A square matrix A is called idempotent if $A^2 = A$.
A square matrix A is called involutory if $A^2 = I$ (I is the identity matrix).

1. (2 points) Suppose that A, B are both idempotent. Prove that $A + B$ is idempotent if and only if $AB + BA = 0$. (if and only if: 当且仅当)
2. (3 Points) Suppose that A, B are both involutory. Prove that AB is involutory if and only if $AB = BA$.
3. (1 point) Find an 2×2-matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ such that $b \neq 0, c \neq 0$ and $A^2 = I$.

Deadline: 22:00, October 22.

作业提交截止时间：10月22日晚上22：00。