线性代数(2023-2024)第四次作业

1 复习知识点

- 行列式的基本性质，尤其是讲义Theorem 2.10, Theorem 2.11。(很多行列式计算会间接或直接的用到这些性质，请务必牢记！)
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$这个性质非常重要，在计算类似$\det(A^{2023})$这种题目时需要知道这其实是求$\det(A)^{2023}$，见某2021年期中考试题(讲义Theorem 2.15上方的例子)。
- 伴随矩阵adj(A)的定义(不要忘记它是代数余子式矩阵的转置！)以及伴随矩阵与矩阵可逆性的关系，牢记Theorem 2.17的内容以及**证明**。以下几个结论请务必牢记(多次出现在考试中，比如2022年期中考试，见讲义2.3节最后的一个例子):

$$A \text{ 可逆} \iff \det(A) \neq 0, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A),$$
$$A\text{adj}(A) = \det(A)I_n,$$
$$a_{i1}C_{j1} + \ldots + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A), & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- 第三章比较重要的一节是英文教材3.2节关于范数(norm)，内积(dot product)与欧式空间中的距离(distance)的内容，建议大家认真阅读这一节的英文教材，熟悉以上概念的计算。

2 习题部分

Problem A(6 Points). (2021年线性代数期中考试题)
Let A be an $n \times n$ invertible matrix. Prove the following statements:

1. (3 points) $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$.
2. (3 points) $\text{adj}(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-2}A$.

Problem B(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)

Let

$$A_n = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{bmatrix}.$$

Compute $\det(A_n)$.

Problem C(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)
Suppose that A and B are 3×3-matrices satisfying

$$A^2B - A - B = I_3,$$

and

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Compute $\det(B)$.

注意：Problem C 与 Problem B 分别属于2022年两个不同班级的期中考试卷子。通常在一张考卷里这类关于行列式计算的大题只有一道。

Problem D(6 Points).

1. (2分) 计算多项式$f(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix}$中$x$的系数和常数项。(这里$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix}$指代该矩阵的行列式。)
2. (2分) 若矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$的余子式$M_{22} = 3$，求$x$。
3. (2分) 假设3阶方阵A第一列上的元素为$a_{11} = 1, a_{21} = -3, a_{31} = 2$，第三列元素的余子式依次是$M_{13} = 2, M_{23} = a, M_{33} = -2$。求$a$。

Problem E(6 Points).

1. (3 points) Let $\boldsymbol{u} = (3, -2, 1)$, $\boldsymbol{w} = (1, 0, -1)$. Compute $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$, and the angle θ between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{w}$ (use $\arccos$).
2. (3 points) Let $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{w} = (0, 1, 2)$. Compute $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$, and the angle θ between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{w}$ (use $\arccos$).

Bonus: (不计入分数) 设A，B为三阶方阵，满足关系

$$A^2 - AB - 2B^2 = A - 2BA - B.$$

现在已知$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$，且$\det(A - B) \neq 0$。求$A$。

Deadline: 22:00, November 05.

作业提交截止时间：11月5日晚上22：00。