2022-2023线性代数期中考试-薛老师班考卷参考答案

1. 填空题

(1): 非常简单，已在课堂上讲过。

(2): 会在后续课程中讲到，暂时不做。

(3): 简单计算，已在课堂上讲过。

(4): 见第五次作业Problem C第一问。

(5): 令$B=\{1,x,x^2\}$为P_2的标准基底。那么对于$p_1(x)=1$，$p_2(x)=x-2$以及$p_3(x)=(x-2)^2$，我们有

$$[p_1(x)]_B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},[p_2(x)]_B=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},[p_3(x)_B]=\begin{bmatrix}4\\-4\\1\end{bmatrix},$$

对于$q(x)=x^2$显然有

$$[q(x)]_B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

因此$q(x)=k_1p_1(x)+k_2p_2(x)+k_3p_3(x)$等价于$(k_1,k_2,k_3)$是以下线性方程组的解：

$$\begin{bmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

解方程可得唯一解为

$$k_1=4,k_2=4,k_3=1,$$

即$q(x)=4p_1(x)+4p_2(x)+p_3(x)$。

2.

会在后续课程中讲到，暂时不做。

3.

显然$(P^{-1}AP)^{2023} = P^{-1}A^{2023}P$(必要时演算一下推导过程)，因此

$$\det((P^{-1}AP)^2023) = \det(P^{-1})\det(A^{2023})\det(P).$$

由于$\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$，以上等式等于

$$\det(P^{-1})\det(A^{2023})\det(P) = \det(P)\det(P)^{-1}\det(A)^{2023} = \det(A)^{2023}.$$

经简单计算可得$\det(A) = -1$，因此$\det((P^{-1}AP)^{2023}) = (-1)^{2023} = -1$。

4.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 = 0,\end{aligned}$$

因此$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$正交于$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$。

5.

见第三次作业Problem B.

6.

纯计算题。依次计算可得

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$C^{-1}B = \begin{bmatrix} -4/3 & 4/3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I - C^{-1}B = \begin{bmatrix} 7/3 & -4/3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(I - C^{-1}B)^\top C^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此$A = ((I - C^{-1}B)^\top C^\top)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$。

7.

1. 此问非常简单，直接验证W关于加法与标量积的封闭性即可。
2. 对于$A \in W$，我们有

$$A \in V \Rightarrow A = \begin{bmatrix} k & a & b \\ 0 & k & c \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{tr}(B^\top A) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & a & b \\ 0 & k & c \end{bmatrix}\right) = a + c = 0 \Rightarrow c = -a;$$

$$\mathrm{tr}(C^\top A) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} k & a & b \\ 0 & k & c \\ k & a & b+k \end{bmatrix}\right) = b + 3k = 0 \Rightarrow b = -3k.$$

因此任何$A \in W$都可以写成

$$A = \begin{bmatrix} k & a & -3k \\ 0 & k & -a \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, k \in \mathbb{R}.$$

以上告诉我们span$\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\} = W$。容易验证

$$\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

为线性无关集合，因此W的一组基底为

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}.$$