线性代数(2023-2024)第四次作业

Problem A(6 Points). (2021年线性代数期中考试题)
Let A be an $n \times n$ invertible matrix. Prove the following statements:

1. (3 points) $\mathrm{adj}(A^{-1}) = (\mathrm{adj}(A))^{-1}$.
2. (3 points) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-2}A$.

答案:

1. 我们知道，若一个矩阵B可逆，则有$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\mathrm{adj}(B)$。现在已知$A$可逆，则自然$A^{-1}$也可逆，因此将$A^{-1}$代入上式，即令$B = A^{-1}$，我们得到
$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})}\mathrm{adj}(A^{-1}),$$
由于$(A^{-1})^{-1} = A$，$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$，以上等式可被写为
$$A = \det(A)\mathrm{adj}(A^{-1}),$$
即$\mathrm{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}A$。因此我们现在只需要验证$\frac{1}{\det(A)}A = \mathrm{adj}(A)^{-1}$。显然，因为$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$，我们得到$I_n = AA^{-1} = A(\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)) = (\frac{1}{\det(A)}A)\mathrm{adj}(A)$，这当然意味着$\mathrm{adj}(A)$可逆且$\frac{1}{\det(A)}A = \mathrm{adj}(A)^{-1}$。因此第一问得证。
2. 由第一问，我们知道$\mathrm{adj}(A)$可逆，因此使用等式$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\mathrm{adj}(B)$并代入$B = \mathrm{adj}(A)$可得
$$\mathrm{adj}(A)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{adj}(A))}\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A))$$
即$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(\mathrm{adj}(A))\mathrm{adj}(A)^{-1}$。另一方面，由第一问我们还知道$\mathrm{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}A$，因此$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(\mathrm{adj}(A))\frac{1}{\det(A)}A$。
现在我们计算$\det(\mathrm{adj}(A))$。注意在第一问中我们已经得到$I_n = AA^{-1} = (\frac{1}{\det(A)}A)\mathrm{adj}(A)$，因此有
$$1 = \det(I_n) = \det((\frac{1}{\det(A)}A)\mathrm{adj}(A)) = \det(\frac{1}{\det(A)}A)\det(\mathrm{adj}(A)),$$
从而有
$$\det(\mathrm{adj}(A)) = \frac{1}{\det(\frac{1}{\det(A)}A)}.$$
又因为$\det(\frac{1}{\det(A)}A) = (\frac{1}{\det(A)})^n\det(A) = (\frac{1}{\det(A)})^{n-1}$，最终得到$\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$。将其代入等式$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(\mathrm{adj}(A))\frac{1}{\det(A)}A$，我们有
$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(\mathrm{adj}(A))\frac{1}{\det(A)}A = (\det(A))^{n-1}\frac{1}{\det(A)}A = (\det(A))^{n-2}A.$$
第二问证毕。

Problem B(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)

Let

$$A_n = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{bmatrix}.$$

Compute $\det(A_n)$.

答案：至少有以下两种方法：

1. 方法1：将A_n的第二列乘以x加到第一列，第三列乘以x^2加到第一列，...，将A_n的第n列乘以x^{n-1}加到第一列，可得

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1 x^{n-1} + x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

那么对右手边的方阵沿第一列做代数余子式展开，可得

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} =$$

$$(a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n) \times (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

显然作为$n-1$阶下三角方阵，有

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

因此

$$\det(A_n) = (a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n) \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1} = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n.$$

2. 方法2：容易计算出$\det(A_1) = x + a_1$， $\det(A_2) = x^2 + a_1x + a_2$。因此猜测$\det(A_n) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + x^n$。因此使用数学归纳法，假设$\det(A_{n-1}) = a_{n-1} + a_{n-2}x + \dots + a_1x^{n-2} + x^{n-1}$。对于$n$阶方阵$A_n$，我们沿第一列做代数余子式展开，容易看出$A_n$删掉第一行第一列后得到的$n-1$阶子矩阵为$A_{n-1}$，见下图：

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x + a_1 \end{bmatrix},$$

即它关于第一行第一列的代数余子式为$C_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{n-1})$；$A_n$删掉第$n$行与第一列后得到的$n-1$阶子矩阵为下三角矩阵:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \end{bmatrix},$$

因此A_n关于第n行第一列的代数余子式为$C_{n1} = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \end{vmatrix} =$ $(-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1} = 1$. 因此，代入归纳假设$\det(A_{n-1}) = a_{n-1} + a_{n-2}x + \dots + a_1 x^{n-2} + x^{n-1}$我们得到

$$\det(A_n) = xC_{11} + a_n C_{n1} = x\det(A_{n-1}) + a_n = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1 x^{n-1} + x^n.$$

Problem C(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)
Suppose that A and B are 3×3-matrices satisfying

$$A^2B - A - B = I_3,$$

and

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Compute $\det(B)$.

答案：

$$\begin{aligned} A^2B - A - B = I_3 &\Rightarrow (A^2 - I_3)B = A + I_3 \\ &\Rightarrow (A - I_3)(A + I_3)B = A + I_3 \\ &\Rightarrow \det((A - I_3)(A + I_3)B) = \det(A + I_3) \\ &\Rightarrow \det(A - I_3)\det(A + I_3)\det(B) = \det(A + I_3). \end{aligned}$$

$$A+I_3=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=3\times(-1)^{2+2}\times(2\times 2-1\times(-2))=24,$$

$$A-I_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A-I_3)=1\times(-1)^{1+3}\times(0\times 0-1\times(-2))=2,$$

so from $\det(A-I_3)\det(A+I_3)\det(B)=\det(A+I_3)$ we get $2\times 24\times\det(B)=24\Rightarrow 2\det(B)=1\Rightarrow\det(B)=\frac{1}{2}$.

注意，这里不能在没有计算$\det(A+I_3)$的情况下直接在等式$\det(A-I_3)\det(A+I_3)\det(B)=\det(A+I_3)$两边除以$\det(A+I_3)$，因为需要保证$\det(A+I_3)\neq 0$!

Problem D(6 Points).

1. (2分) 计算多项式$f(x)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&x&-1\end{vmatrix}$中$x$的系数和常数项。
2. (2分) 若矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&x\\3&0&2\\1&3&4\end{bmatrix}$的余子式$M_{22}=3$，求$x$。
3. (2分) 假设3阶方阵A第一列上的元素为$a_{11}=1,a_{21}=-3,a_{31}=2$，第三列元素的余子式依次是$M_{13}=2,M_{23}=a,M_{33}=-2$。求$a$。

答案：

1. 对$\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&x&-1\end{vmatrix}$沿第二列做代数余子式展开，可得
$$f(x)=-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=2x+2.$$
因此x的系数为2，常数项为1。
2. 由余子式定义可得$M_{22}=\begin{vmatrix}2&x\\1&4\end{vmatrix}=8-x=3$，因此$x=5$。
3. 这道题的解题思路与2022年期中考试的一道题目第二问，即讲义2.3节最后的一个例子，一模一样。利用等式
$$a_{11}C_{13}+a_{21}C_{23}+a_{31}C_{33}=0$$

以及$C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=2$，$C_{23}=(-1)^{2+3}a=-a$，$C_{33}=(-1)^{3+3}(-2)=-2$，得到

$$1\times 2+(-3)\times(-a)+2\times(-2)=0$$

从而解出$a=\frac{2}{3}$。这里还是注意代数余子式与余子式的区别!

Problem E(6 Points).

1. (3 points) Let $\boldsymbol{u}=(3,-2,1)$, $\boldsymbol{w}=(1,0,-1)$. Compute $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|$, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$, and the angle θ between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{w}$ (use $\arccos$).
2. (3 points) Let $\boldsymbol{u}=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{w}=(0,1,2)$. Compute $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|$, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$, and the angle θ between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{w}$ (use $\arccos$).

答案：此题为简单计算题，具体细节请咨询助教。

Bonus: (不计入分数) 设A，B为三阶方阵，满足关系

$$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B.$$

现在已知$B=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&1&-1\\1&3&2\end{bmatrix}$，且$\det(A-B)\neq 0$。求$A$。

答案： 由所给关系$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$可得

$$\begin{aligned}A^2-AB-2B^2-(A-2BA-B)&=\mathbf{0}\\ &\Rightarrow A^2-AB+2BA-2B^2-(A-B)=\mathbf{0}\\ &\Rightarrow (A+2B)(A-B)-(A-B)=\mathbf{0}\\ &\Rightarrow (A+2B-I_3)(A-B)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

由假设$\det(A-B)\neq 0$可知矩阵$A-B$可逆，因此以上等式两边同乘以$(A-B)^{-1}$，得到

$$A+2B-I_3=\mathbf{0},$$

即$A=I_3-2B$。代入$B=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&1&-1\\1&3&2\end{bmatrix}$可立即得到

$$A=\begin{bmatrix}3&-4&-2\\0&-1&2\\-2&-6&-3\end{bmatrix}.$$

该题的难点在于快速看出$A^2-AB+2BA-2B^2=(A+2B)(A-B)$。这里可以先观察出$A^2-AB+2BA-2B^2$是将$x=A$,$y=B$代入到多项式$x^2-xy+2yx-2y^2$中的结果。不难看出多项式$x^2-xy+2yx-2y^2=(x+2y)(x-y)$，因此再次代入$x=A$,$y=B$可以得到想要的结果。此外这道题的另一个陷阱是从等式$(A+2B-I_3)(A-B)=\mathbf{0}$直接得出$A-B=0$。这里显然需要利用假设$\det(A-B)\neq 0$推出$A-B$可逆，从而得到正确的推论$A+2B-I_3=\mathbf{0}$。

Deadline: 22:00, November 05.

作业提交截止时间：11月5日晚上22：00。