线性代数(2023-2024)第十三次作业

1 复习知识点

- 牢记Gram–Schmidt算法，熟练掌握如何用Gram–Schmidt算法将一个内积空间里的一组基底转化为一组标准正交基底。作为重要应用，熟练掌握使用Gram–Schmidt算法得到对称矩阵的各个特征空间的标准正交基底，从而将对称矩阵正交对角化。
- 二次型的定义，orthogonal change of variables的定义，Theorem 7.17 (The principal axes theorem)的内容，以及熟练掌握如何用orthogonal change of variables化简一个给定的二次型，参考讲义196页-197页，198页-199页的两个例子。
- 二次型的positive definite, negative definite, indefinite与其对应的对称矩阵特征值的关系，如何判断一个对称矩阵是否是positive defintie。
- 熟练掌握QR分解与奇异值分解(SVD)的具体计算过程。

2 习题部分

Problem A(6 Points)

令V为一个内积空间，$\langle \cdot, \cdot \rangle$为$V$上的内积。假设$S = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$是$V$的一组基底。对$S$使用Gram–Schmidt算法，依次得到

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 / \|\boldsymbol{u}_1\|;$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle\|};$$

$$\boldsymbol{v}_j = \frac{\boldsymbol{u}_j - \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \ldots - \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_{j-1} \rangle \boldsymbol{v}_{j-1}}{\|\boldsymbol{u}_j - \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \ldots - \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_{j-1} \rangle \boldsymbol{v}_{j-1}\|}, j = 1, \ldots, n.$$

用尽量严格的数学语言证明，对任何$j = 1, \ldots, n$，都有

$$\text{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_j\} = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j\}.$$

Problem B(6 Points), 2022-2023年线性代数期末考试题

Let $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ be m vectors in $\mathbb{R}^n$. Denote by "$\cdot$" the Euclidean inner product on $\mathbb{R}^n$. Prove that $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ are linearly dependent if and only if the determinant

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_m \\ \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u}_m \cdot \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_m \cdot \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_m \cdot \boldsymbol{u}_m \end{vmatrix} = 0.$$

Problem C(6 Points)

已知$\boldsymbol{v} = (1,1,1)$是二次型$Q_A(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2x_2x_3$对应的对称矩阵$A$的一个特征向量，其中$a, b$为待定实数。

1. (2 points) 求a与b的值，并求出对阵矩阵A。
2. (3 points) 利用orthogonal change of variables $\boldsymbol{y} = P^\top \boldsymbol{x}$ 求出二次型关于$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$的表达式。
3. (1 point) 判断对称矩阵A是否是positive definite。

Problem D(6 Points), 2022-2023年线性代数期末延期考试题

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Find a decomposition $A = QRP$ such that: P and Q are orthogonal matrices, and

$$R = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

is an upper triangular matrix with $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Problem E(6 Points), 最小二乘法

通过这道题目，我们简单了解一个线性代数的具体应用：最小二乘法(Least Squares)与最佳逼近(Best Approximation)。

这个应用的背景如下：假设$A \in M_{m\times n}$与$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$给定，但方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$无解。我们试图找到一个向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$使得$A\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{b}$的距离尽可能的小，即：

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\| > 0$$

对任何$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$都成立。满足这个条件的向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$被称为最小二乘法(Least Squares)的解，$\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$被称为最小二乘法误差向量(least squares error vector)，$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|$被称为最小二乘法误差(least squares error)。

现在我们讨论如何求出这个最小二乘法的解$\boldsymbol{x}$。这里我们需要用到下面的这个结论。

- (1 point) 令V为一个内积空间，$\langle \cdot, \cdot \rangle$为$V$上的一个内积，$W$是$V$的一个有限维子空间，$\boldsymbol{b} \in V$。证明对于任何$\boldsymbol{w} \in W$，都有

  $$\|\boldsymbol{b} - \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{b})\| \leq \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{w}\|,$$

  且等号只有当$\boldsymbol{w} = \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{b})$时才能取到。

  提示： 对于任何$\boldsymbol{w} \in W$，我们有

  $$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{b} - \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{b})) + (\mathrm{proj}_W(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{w}).$$

由于$\boldsymbol{b}$可以表示为$\boldsymbol{b} = \text{proj}_W(\boldsymbol{b}) + \text{proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{b})$(讲义Theorem 7.15)，我们又有$\boldsymbol{b} - \text{proj}_W(\boldsymbol{b}) = \text{proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{b})$，因此$\boldsymbol{b} - \text{proj}_W(\boldsymbol{b})$实际上与$\text{proj}_W(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{w} \in W$正交。因此利用勾股定理可得

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{b} - \text{proj}_W(\boldsymbol{b})\|^2 + \|\text{proj}_W(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{w}\|^2.$$

利用这一等式可完成证明。

现在令$V = \mathbb{R}^m$为欧式内积空间。那么以上结果告诉我们

- (1 point) 证明：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是最小二乘法的解当且仅当$A\boldsymbol{x} = \text{proj}_W(\boldsymbol{b})$，这里$W$是$A$的列空间。

现在，为了求解$A\boldsymbol{x} = \text{proj}_W(\boldsymbol{b})$($W$是$A$的列空间)，我们首先将其写为

$$\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \text{proj}_W(\boldsymbol{b}).$$

等式两边同乘以$A^\top$，可得

$$A^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = A^\top(\boldsymbol{b} - \text{proj}_W(\boldsymbol{b})) = A^\top(\text{proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{b})).$$

- (1 point) 证明： $A^\top(\text{proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{0}$。

因此，由以上结果，我们实际上得到，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是最小二乘法的解当且仅当$A^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = A^\top(\text{proj}_{W^\perp}(\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{0}$，也即当且仅当$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$满足方程

$$(A^\top A)\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}.$$

以上方程也被称为normal system。

- (3 points) 令$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$。证明$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$无解，并利用normal system$(A^\top A)\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$.求出最小二乘法的解$\boldsymbol{x}$，接着求出最小二乘法的误差$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|$。

Bonus: 不计入分数，但强烈建议亲手计算

- 计算$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的QR分解。

- 计算$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$的奇异值分解(SVD)。

Deadline: 22:00, January 14.

作业提交截止时间：1月14日晚上22：00。