线性代数(2023-2024)第五次作业

1 复习知识点

- 内积，范数，夹角，叉乘，标量三重积的定义与运算法则。熟练掌握具体计算。(会出现在考试填空题！)
- 内积与矩阵乘法之间的关系，见英文教材151页至153页。
- 正交性的定义，正交投影的定义，正交投影定理(英文教材Theorem 3.3.2)，熟练掌握如何求正交投影$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$。
- 线性组合的定义。

2 习题部分

Problem A(6 Points). 请证明：

1. (3 分) 对任何n阶方阵A，

$$a_{1j}C_{1k} + \ldots + a_{nj}C_{nk} = \begin{cases} \det(A), & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

2. (3 分) 对任何$m \times n$-矩阵A，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

任何m维向量$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$，线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当列向量$\boldsymbol{b}$可以被表示为$A$的$n$个列向量$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$， ...， $\boldsymbol{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$的线性组合(linear combination)。

Problem B(6 Points).

1. (2 分) 我们知道向量$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$与$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$之间的夹角$\theta$被定义为

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

请结合正交投影定理(讲义Theorem 3.13，教材Theorem 3.3.2)及图像阐述为何以上等式定义的两个向量之间的夹角具有正确的几何意义。

提示：可直接假设$n = 2$或者$n = 3$。

2. (2 分) Prove that if $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ is an orthogonal set in $\mathbb{R}^n$, then $\|\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_r\|^2 = \|\boldsymbol{v}_1\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{v}_r\|^2$。
3. (2 分) 证明英文教材Theorem 3.5.2的全部内容。

Problem C(6 Points).

1. (2 分) (2022年线性代数期中考试题) Let $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$ that are mutually orthogonal (that is, they form a orthogonal set). Assume $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $\|\boldsymbol{v}\| = 2$, $\|\boldsymbol{w}\| = 3$. Compute

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}\|.$$

提示： 这里可直接利用以下事实：若$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$是$\mathbb{R}^3$中的向量且彼此相互正交(mutually orthogonal)，那么如果另一个向量$\boldsymbol{w}$同时垂直$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$，那么存在某个常数$c$使得$\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{v}_3$。

2. (2 分) Prove that for $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ three vectors in $\mathbb{R}^3$, we have

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}).$$

3. (2 分) Use the cross product to find a vector which is orthogonal to both $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} = (-6, 4, 2), \quad \boldsymbol{v} = (3, 1, 5).$$

Problem D(6 Points).

1. (2 分) Let $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{w} = (0, 1, 2)$. Compute $\text{proj}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u})$.
2. (2 分) Let $\boldsymbol{u} = (3, -2, 1)$, $\boldsymbol{w} = (1, 0, -1)$. Compute $\text{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$.
3. (2 分) Let $\boldsymbol{u} = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2, 3)$. Compute $\text{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$.

Problem E(6 Points). 设A为n阶方阵，且$A^\top = -A$。证明矩阵$I_n - A$可逆。
提示：一个方阵B可逆当且仅当齐次方程组$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有平凡解。另外利用等式$A\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\top A^\top \boldsymbol{v}$。

Bonus: (不计入分数) 令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

现已知21375，38798，34162，40223，79154都可以被19整除。

1. 证明如果一个方阵的所有项都是整数，那么它的行列式也必然是一个整数。
2. 证明$\det(A)$可以被19整除。

Deadline: 22:00, November 12.

作业提交截止时间：11月12日晚上22：00。