线性代数(2023-2024)第七次作业参考答案

Problem A(6 Points). (2022年线性代数期末考试题)
Consider the sets of functions $B=\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$ and $B'=\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$, where

$$f_1(x)=1, f_2(x)=\sin x, f_3(x)=\cos x,$$
$$g_1(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6}), g_2(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3}), g_3(x)=(\sin(\frac{x}{2}))^2.$$

Let $V=\text{span}\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$. Compute the transition matrix from the basis B' to B.

答案： 由于

$$g_1(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x,$$

$$g_2(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x,$$

$$g_3(x)=(\sin(\frac{x}{2}))^2=\frac{1}{2}(1-\cos x),$$

我们得到$g_1(x),g_2(x),g_3(x)$关于基底B的坐标向量为

$$[g_1(x)]_B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},[g_2(x)]_B=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},[g_3(x)]_B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

因此我们得到转移矩阵$P_{B\leftarrow B'}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$。

Problem B(6 Points). (2022年线性代数期末考试题)
In P_2, let $p_1(x)=5+2x+4x^2$, $p_2(x)=-3+2x+2x^2$, $q_1(x)=2-x-2x^2$, $q_2(x)=2x+5x^2$. Let $V=\text{span}\{p_1(x),p_2(x)\}$, $W=\text{span}\{q_1(x),q_2(x)\}$. Find a basis for $V\cap W$.

答案： 令$B=\{1,x,x^2\}$为P_2的标准基底，考虑坐标向量

$$[p_1(x)]_B=\begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix},[p_2(x)]_B=\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix},[q_1(x)]_B=\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix},[q_2(x)]_B=\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

令$V' = \text{span}\{[p_1(x)]_B, [p_2(x)]_B\} \subset \mathbb{R}^3$与$W' = \text{span}\{[q_1(x)]_B, [q_2(x)]_B\} \subset \mathbb{R}^3$我们首先找出$V' \cap W'$的基底。

由于任何V'里的向量都可以表示为$x_1[p_1(x)]_B + x_2[p_2(x)]_B$，任何$W'$里的向量都可以表示为$x_3[q_1(x)]_B + x_4[q_2(x)]_B$，我们知道如果$\boldsymbol{v} \in V' \cap W'$，那么需要存在实数$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$使得

$$x_1[p_1(x)]_B + x_2[p_2(x)]_B = x_3[q_1(x)]_B + x_4[q_2(x)]_B,$$

代入具体坐标后可知这意味着(x_1, x_2, x_3, x_4)需要是齐次方程组

$$\begin{aligned} &5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ &2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ &4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{aligned}$$

的一组解。那么利用高斯消元法解以上方程组，可得系数矩阵的阶梯型为

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 9/16 & -5/8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

从而得到通解为

$$\boldsymbol{s} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

因此我们得到，任何$\boldsymbol{v} \in V' \cap W'$可以表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{r}{2}[p_1(x)]_B - \frac{r}{2}[p_2(x)]_B = 2[q_1(x)]_B + [q_2(x)]_B = r \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

显然，满足这样坐标向量的多项式为

$$r(4 + x^2), \quad r \in \mathbb{R},$$

即$V \cap W = \{r(4+x^2) : r \in \mathbb{R}\}$，因此$V \cap W$为一维子空间，它的一个基底为$4+x^2$。

Problem C(6 Points). (2019年某985高校线性代数期中考试题)

设$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -7 & 9 \end{bmatrix}$，$\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$，$\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ s \\ 2.4 \end{bmatrix}$，其中$s$为参数。

1. (3 points) 解方程组$A\boldsymbol{x}=\beta$，并将其通解表示为基础解系：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_0+c_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+c_r\boldsymbol{v}_r,\quad \boldsymbol{s}_0\text{为一个特解.}$$

$\boldsymbol{s}_0$为一个特解，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$为Null$(A)$的一组基底。

2. (3 points) 令B为分块矩阵

$$B=\begin{bmatrix} A & \beta \\ \gamma^\top & 3 \end{bmatrix}.$$

解方程组$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，并将其通解表示为基础解系：

$$\boldsymbol{s}=c_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+c_r\boldsymbol{v}_r,\quad \boldsymbol{s}_0\text{为一个特解.}$$

$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$为Null$(B)$的一组基底。

答案：

1. 利用初等行变换将增广矩阵转化为阶梯型：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & -7 & 9 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 1 \\ 0 & 1 & -7/5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而得到方程组的通解为

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5}r+1 \\ \frac{7}{5}r-1 \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5}r+1 \\ \frac{7}{5}r-1 \\ r+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+r\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{bmatrix},\quad r\in\mathbb{R},$$

即$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$为方程组的一个特解，$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$为Null$(A)$的一组基底。

2. 注意

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & -7 & 9 & 6 \\ 3 & s & 2.4 & 3 \end{bmatrix},$$

利用初等行变换得到其阶梯型：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 1 \\ 0 & 1 & -7/5 & -1 \\ 0 & 0 & s & 5s/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

若$s=0$，那么阶梯型为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4/5 & 1\\ 0 & 1 & -7/5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可得通解为

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}r-s\\ \frac{7}{5}r+s\\ r\\ s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}r-s\\ \frac{7}{5}r+s\\ r+0s\\ 0r+s\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{7}{5}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad r,s\in\mathbb{R},$$

即$\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{7}{5}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$为Null$(A)$的一组基底。

若$s\neq 0$，那么阶梯型为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4/5 & 1\\ 0 & 1 & -7/5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可得通解为

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}r\\ 0\\ -\frac{5}{7}r\\ r\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\ 0\\ -\frac{5}{7}\\ 1\end{bmatrix},$$

即$\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\ 0\\ -\frac{5}{7}\\ 1\end{bmatrix}$是Null$(A)$的一组基底。

Problem D(6 Points). (2019年某985高校线性代数期中考试题)

令$S=\left\{\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 3\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 6\\ 2\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}\right\}$，令$M=\left\{\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ -1\end{bmatrix},\boldsymbol{w}_2=\right.$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix} \Bigg\}。$$

1. (2 points) 求S的一个子集$S' \subset S$使得S'是span(S)的一组基底。

   答案： 令$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，即它的列向量依次为$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$。通过行变换将其转化为阶梯型：

   $$R = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   经观察可知R里含有主1的是第一列与第三列(见标红的主1所在位置)，因此我们可以断定$S' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$是span$(S)$的一组基底。

2. (2 points) 求M的一个子集$M' \subset M$使得M'是span(M)的一组基底。

   答案： 令$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 12 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，即它的列向量依次为$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$。通过行变换将其转化为阶梯型：

   $$R = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   经观察可知R里含有主1的是第一列与第二列(见标红的主1所在位置)，因此我们可以断定$M' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$是span$(M)$的一组基底。

3. (2 points) 求$S \cup M$的一个子集$Z \subset S \cup M$使得Z是span$(S \cup M)$的一组基底。

   答案： 令$C = [A|B]$，那么

   $$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & -5 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

通过行变换将其转化为阶梯型：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

经观察可知R里含有主1的是第一列，第三列与第五列(见标红的主1所在位置)，因此我们可以断定$Z = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2\}$是span$(S \cup M)$的一组基底。

Problem E(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)

Let Z be a vector space of dimension 5. Let $U, V, W \subset Z$ be subspaces of Z such that

$$\dim(U) = \dim(V) = \dim(W) = 2,$$

and $U + V + W = Z$. Prove that $U \cap V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

答案： 我们使用反证法。假设$U \cap V \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$，那么必然存在某个$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \in U \cap V \cap W$。由于$\dim(U) = \dim(V) = \dim(W) = 2$,，利用讲义Theorem 4.20我们通过增加一个向量$\boldsymbol{u} \in U$使得$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$是$U$的一组基底，通过增加一个向量$\boldsymbol{v}' \in U$使得$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\}$是$V$的一组基底，通过增加一个向量$\boldsymbol{w} \in U$使得$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$是$W$的一组基底。因此，任何$U$里的向量都可以表示为$c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}$，任何$V$里的向量都可以表示为$k_1\boldsymbol{v} + k_2\boldsymbol{v}'$，任何$W$里的向量都可以表示为$d_1\boldsymbol{w} + d_2\boldsymbol{v}$，从而我们得到，任何$U + V + W$里的向量都可以表示为

$$c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v} + k_1\boldsymbol{v} + k_2\boldsymbol{v}' + d_1\boldsymbol{w} + d_2\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}' + d_1\boldsymbol{w} + (c_2 + k_1 + d_2)\boldsymbol{v}.$$

然而，由假设，$U + V + W = Z$，因此我们实际上得到，任何$\boldsymbol{z} \in Z$都可以表示为

$$\boldsymbol{z} = c_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}' + d_1\boldsymbol{w} + (c_2 + k_1 + d_2)\boldsymbol{v},$$

也即，span$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}\} = Z$，这与假设$\dim(Z) = 5$矛盾，因此$S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}\}$只包含了4个向量，而由讲义Theorem 4.16我们知道对于5维向量空间Z，含有小于5个向量的子集S无法生成整个空间Z。因此我们必须有$U \cap V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Bonus: (2022年线性代数期中考试题) (不计入分数)

Let U be a vector space of dimension 6. Let V and W be two subspaces of U such that $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 3$. Find all possible dimensions of $V + W$, and explain your argument.

答案： 通过选取一个U的基底B并考虑关于B的坐标向量，由讲义Theorem 4.19我们可以假设$U = \mathbb{R}^6$，且V, W为$\mathbb{R}^6$里的子空间。令$U = \mathbb{R}^6$。我们通过讨

论$\dim(V\cap W)$的取值来判断$\dim(V+W)$的取值可能。
如果$\dim(V\cap W)=0$，即$V\cap W=\{\mathbf{0}\}$，那么意味着对任何V的基底$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$,任何$W$的基底$\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$，如果存在$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$使得

$$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2=c_1\boldsymbol{w}_1+c_2\boldsymbol{w}_2+c_3\boldsymbol{w}_3$$

(注意，以上等式告诉我们$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2=c_1\boldsymbol{w}_1+c_2\boldsymbol{w}_2+c_3\boldsymbol{w}_3\in V\cap W$)，那么必然有$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2=c_1\boldsymbol{w}_1+c_2\boldsymbol{w}_2+c_3\boldsymbol{w}_3=\mathbf{0}$。因此，利用$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$与$\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$的线性无关性，可得$k_1=k_2=c_1=c_2=c_3=0$。因此$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$线性无关。由于$V+W=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$，我们此时可得$\dim(V+W)=5$。
如果$\dim(V\cap W)=1$，即存在某个非零向量$\boldsymbol{v}\in V\cap W$使得$V\cap W=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}\}$。与Problem E的证明过程相同，我们通过增加一个向量$\boldsymbol{v}'$使得$\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\}$是$V$的一组基底，通过增加两个向量$\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$使得$\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$是$W$的一组基底，从而得到$V+W=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$。现在我们验证$\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$为线性无关集合。考虑等式

$$k_1\boldsymbol{v}+k_2\boldsymbol{v}'+k_3\boldsymbol{w}_1+k_4\boldsymbol{w}_2=\mathbf{0}.$$

如果$k_2\neq 0$，那么以上等式告诉我们$\boldsymbol{v}'=-\frac{k_1}{k_2}\boldsymbol{v}+\frac{k_3}{k_2}\boldsymbol{w}_1+\frac{k_4}{k_2}\boldsymbol{w}_2$，即$\boldsymbol{v}'\in\operatorname{span}\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}=W$。然而这意味着$V=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\}\subset\operatorname{span}\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}=W$，从而有$\dim(V\cap W)\geq\dim(V)=2$，与假设$\dim(V\cap W)=1$矛盾。因此$\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$实际上构成$V+W$的一组基底。此时有$\dim(V+W)=4$。
如果$\dim(V\cap W)=2$，那么令$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$为$V\cap W$的一组基底。显然此时$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$也是$V$的基底(因为$\dim(V)=2$)。通过增加一个向量$\boldsymbol{w}$我们可以得到$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}\}$为$W$的一组基底。此时容易看出$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}\}=W=V+W$。因此此时有$\dim(V+W)=3$。
因此$V+W$的维数可能为$3,4,5$。

Deadline: 22:00, November 26.

作业提交截止时间：11月26日晚上22：00。