线性代数(2023-2024)第三次作业参考答案

Problem A(6 Points). 证明以下说法

1. (2 分) 若一个齐次线性方程组有m个方程和n个未知数，且$m < n$，即方程个数小于未知数个数，那么该方程组必然有无穷多个解。
   提示：利用阶梯型的特点证明这种情况下自由元的个数必然大于等于1。

   答案： 令A为该齐次线性方程组的系数矩阵，令R为A的简化阶梯型。作为一个$m \times n$-矩阵，我们知道R至多有m个非零行；又由阶梯型的性质可知每一个非零行只包含一个主1，因此R至多有m个主1，这意味着该齐次方程组至多有m个主元。因为未知数个数$n > m$，可得自由元数量至少为$n-m \geq 1$，因此该齐次方程组有无穷多个解。证毕。

2. (2 分) 先仔细阅读讲义第41页至42页关于英文教材Theorem 1.7.1(b)部分的证明，之后证明：若A为一个下三角或者上三角n阶方阵，那么对任何自然数k，A^k对角线上的项为$a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k$。

   答案： 不妨设A为上三角矩阵，即$a_{ij} = 0$对任何$i > j$成立

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

   我们对k使用数学归纳法。显然对$k = 1$，$A^1 = A$对角线上的项为$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$。现在假设$A^k$对角线上的项为$a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k$。由英文教材Theorem 1.7.1(b) 可知，作为多个上三角矩阵的乘积，A^k也是一个上三角矩阵，因此A^k具有以下形状：

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & A_{12}^k & \dots & A_{1n}^k \\ 0 & a_{22}^k & \dots & A_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

   现在我们利用以上归纳假设证明A^{k+1}的对角线上的项为$a_{11}^{k+1}, a_{22}^{k+1}, \dots, a_{nn}^{k+1}$。

任取$i = 1, \dots, n$，注意

$$A_{ii}^{k+1} = (A^k A)_{ii} = \begin{bmatrix} A_{i1}^k & A_{i2}^k & \dots & A_{in}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = a_{1i}A_{i1}^k + a_{2i}A_{i2}^k + \dots + a_{ni}A_{in}^k.$$

模仿讲义第41页至42页关于英文教材Theorem 1.7.1(b)部分的证明，我们把以上求和分解为：

$$\begin{aligned} a_{1i}A_{i1}^k + a_{2i}A_{i2}^k + \dots + a_{ni}A_{in}^k = {} & a_{1i}A_{i1}^k + a_{2i}A_{i2}^k + \dots + a_{i-1,i}A_{i,i-1}^k \\ & + a_{ii}A_{ii}^k + a_{i+1,i}A_{i,i+1}^k + \dots + a_{ni}A_{in}^k. \end{aligned}$$

由于A^k为上三角矩阵，我们有$A_{i1}^k = A_{i2}^k = \dots = A_{i,i-1}^k = 0$，因此

$$a_{1i}A_{i1}^k + a_{2i}A_{i2}^k + \dots + a_{i-1,i}A_{i,i-1}^k = 0;$$

由于A为上三角矩阵，我们有$a_{i+1,i} = a_{i+2,i} = \dots = a_{ni} = 0$，因此

$$a_{i+1,i}A_{i,i+1}^k + \dots + a_{ni}A_{in}^k = 0.$$

综上可得，$A_{ii}^{k+1} = a_{1i}A_{i1}^k + a_{2i}A_{i2}^k + \dots + a_{ni}A_{in}^k = a_{ii}A_{ii}^k$。而由归纳假设已知$A_{ii}^k = a_{ii}^k$，因此$A_{ii}^{k+1} = a_{ii}^{k+1}$。至此数学归纳法证对所有$k$证毕。下三角的情况类似可证。

3. (2 分) 对角矩阵$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$，证明$D$可逆当且仅当$d_1 d_2 \dots d_n \neq 0$，且此时$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}$。

答案： 显然，若$d_1 d_2 \dots d_n \neq 0$，那么$d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \dots, d_n \neq 0$。此时对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

可以被定义，且经过简单计算可得

$$\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \times \frac{1}{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 \times \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \times \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} = I_n.$$

因此可得$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}$，即$D$可逆。

现在我们证明若D可逆那么有$d_1 d_2 \dots d_n \neq 0$。对此我们证明其逆否命题：若$d_1 d_2 \dots d_n = 0$则D不可逆。若$d_1 d_2 \dots d_n = 0$，那么必然至少有一个$d_i = 0$，$i = 1, \dots, n$。此时D的第i行为0行，这意味着D的简化阶梯型中必然包含一个0行，因此D的简化阶梯型不可能为单位矩阵，因此由讲义 Theorem 1.22，即英文教材 Theorem 1.5.3，可知这种情况下必然D不可逆。证毕。

Problem B(6 Points). (2022年线性代数期中考试题)
A $n \times n$ matrix B is called skew-symmetric or antisymmetric if $B^\top = -B$. Now let A be a symmetric $n \times n$ matrix, B be a skew-symmetric $n \times n$ matrix. Is $AB - BA$ symmetric, skew-symmetric, or neither? Prove your conclusion.

答案： First we note that

$$(AB - BA)^\top = (AB)^\top - (BA)^\top = B^\top A^\top - A^\top B^\top.$$

Then, since $A^\top = A$, $B^\top = -B$, the above equation becomes

$$(AB - BA)^\top = B^\top A^\top - A^\top B^\top = (-B)A - A(-B) = AB - BA.$$

Therefore we can conclude that $AB - BA$ is a symmetric matrix.

Problem C(6 Points). 假设n阶矩阵A具有以下分块矩阵(partitioned matrix)形状：

$$A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix},$$

其中B为r阶方阵，$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{r \times k}$为$r \times k$-零矩阵，$C$为$k \times r$-矩阵，$D$为$k$阶方阵，$r + k =$

n。换而言之，我们可以将A写为

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \dots & B_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ C_{11} & \dots & C_{1r} & D_{11} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & \dots & C_{kr} & D_{k1} & \dots & D_{kk} \end{bmatrix}.$$

证明$\det(A) = \det(B)\det(D)$。(同样的，对于$A = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$这样的分块矩阵我们也有$\det(A) = \det(B)\det(D)$。)

提示：可以先对$r = 1$的情况进行证明，然后对一般的自然数r进行数学归纳法证明。

答案： 若$r = 1$ $(k = n-1)$，那么此时$B = [B_{11}]$为一个1×1-矩阵，且

$$A = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_{11} & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{k1} & D_{k1} & \dots & \dots & D_{kk} \end{bmatrix}.$$

显然此时$\det(B) = B_{11}$，且若我们沿A的第一行进行代数余子式展开，可得$\det(A) = B_{11}\det(D)$。因此$\det(A) = \det(B)\det(D)$。

现在我们假设对某个自然数$r \geq 1$有以下结论成立：对任何$m \geq r$，任何具有以下分块形状的m阶方阵$\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix},$$

$\tilde{B} \in M_{r\times r}$，$\mathbf{0} \in M_{r\times(m-r)}$， $\tilde{C} \in M_{(m-r)\times r}$，$\tilde{D} \in M_{(m-r)\times(m-r)}$，都有

$$\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{B})\det(\tilde{D})$$

成立。我们接下来考虑自然数$r+1$，$n \geq r+1$，以及具有以下分块形状的n阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1,r+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r+1,1} & \dots & B_{r+1,r+1} & 0 & \dots & 0 \\ C_{11} & \dots & C_{1r} & D_{11} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & \dots & C_{kr} & D_{k1} & \dots & D_{kk} \end{bmatrix},$$

其中B为$r+1$阶方阵，$\mathbf{0}=\mathbf{0}_{(r+1)\times k}$为$(r+1)\times k$-零矩阵，$C$为$k\times(r+1)$-矩阵，$D$为$k$阶方阵，$r+1+k=n$。注意，将这样的矩阵$A$删掉第一行与第一列后，我们得到的$n-1$阶子矩阵$\tilde{A}^{11}$具有以下分块形状：

$$\tilde{A}^{11}=\begin{bmatrix} B_{22} & \dots & B_{2,r+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r+1,2} & \dots & B_{r+1,r+1} & 0 & \dots & 0 \\ C_{22} & \dots & C_{1r} & D_{11} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k2} & \dots & C_{kr} & D_{k1} & \dots & D_{kk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{B}^{11} & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & D \end{bmatrix},$$

这里$\tilde{B}^{11}=\begin{bmatrix} B_{22} & \dots & B_{2,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r+1,2} & \dots & B_{r+1,r+1} \end{bmatrix}$为$r$阶方阵,，$\mathbf{0}=\mathbf{0}_{r\times k}$为$r\times k$-零矩阵，$\tilde{C}=\begin{bmatrix} C_{22} & \dots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k2} & \dots & C_{kr} \end{bmatrix}$为$(k-1)\times r$-矩阵，以及$D=\begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{k1} & \dots & D_{kk} \end{bmatrix}$仍为原来$A$中的分块矩阵。那么，由于此时$\tilde{B}$为$r$阶方阵，$\tilde{A}^{11}$为$n-1$阶方阵，$n-1\geq r$，我们可以对$\tilde{A}=\begin{bmatrix} \tilde{B}^{11} & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & D \end{bmatrix}$使用**归纳假设**得到：

$$\det(\tilde{A}^{11})=\det(\tilde{B}^{11})\det(D).$$

这里我们还要注意，矩阵$\tilde{B}^{11}$为B删掉第一行第一列后得到的矩阵，**因此$\det(\tilde{B}^{11})$实际上是B关于第一行第一列的余子式！** 使用同样的推导我们可以立刻得到，对任何$j=1,\dots,r+1$，A删掉第1行第j列后的$n-1$阶子矩阵$\tilde{A}^{1j}$都满足

$$\det(\tilde{A}^{1j})=\det(\tilde{B}^{1j})\det(D),$$

$\det(\tilde{B}^{1j})$为矩阵B关于第1行第j列的余子式。因此A关于第1行第j列$(j=1,\dots,r+1)$的代数余子式$C_{1j}=(-1)^{1+j}\det(\tilde{A}^{1j})=(-1)^{1+j}\det(\tilde{B}^{1j})\det(D)=\tilde{C}_{1j}\det(D)$，$\tilde{C}_{1j}=(-1)^{1+j}\det(\tilde{B}^{1j})$**为$B$关于第1行第j列的代数余子式**。
那么，沿着A的第一行进行代数余子式展开，注意$A_{1j}=0$对于所有$j>r+1$成立，且$A_{1j}=B_{1j}$对于所有$j\leq r+1$成立，我们得到

$$\begin{aligned}\det(A)&=A_{11}C_{11}+\dots+A_{1,r+1}C_{1,r+1}+0\times C_{1,r+2}+\dots+0\times C_{1n}\\&=A_{11}C_{11}+\dots+A_{1,r+1}C_{1,r+1}\\&=B_{11}\tilde{C}_{11}\det(D)+\dots+B_{1,r+1}\tilde{C}_{1,r+1}\det(D)\\&=(B_{11}\tilde{C}_{11}+\dots+B_{1,r+1}\tilde{C}_{1,r+1})\det(D)\\&=\det(B)\det(D),\end{aligned}$$

因为$\det(B) = B_{11}\tilde{C}_{11} + \ldots + B_{1,r+1}\tilde{C}_{1,r+1}$为$B$沿着第一行的代数余子式展开。至此，我们已经证明我们的结论对$r+1$阶的子矩阵B也成立，故由数学归纳法可得该结论对一切自然数r成立。证毕。

Problem D(6 Points). 计算以下矩阵的行列式，请写清楚计算的步骤，**没有计算细节展示只写答案的不得分。**

1. (2分) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$。

   答案：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(第2行乘以-2加到第1行)}$$

$$= 1 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(沿第一列做代数余子式展开)}$$

$$= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(第1行乘以3加到第3行)}$$

$$= (-1) \times (-1) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(沿第3列做代数余子式展开)}$$

$$= 2 \times 5 - 4 \times 1 = 10 - 4 = 6.$$

2. (2分) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$。

答案：

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{(第1行乘以某些常数加到第2，3，4行)}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 12 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{(沿第一列做代数余子式展开)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 108 & 23 \end{vmatrix} \quad \text{(第1行乘以-12加到第3行)}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 108 & 23 \end{vmatrix} \quad \text{(沿第一列做代数余子式展开)}$$

$$= -3 \times 23 - 108 \times (-1) = -69 + 108 = 39.$$

3. (2分) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$。

答案：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{41} \times (-1)^{4+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \quad \text{(沿第一列做代数余子式展开)}$$

$$= -a_{41}a_{32} \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 0 & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \quad \text{(沿第一列做代数余子式展开)}$$

$$= -a_{41}a_{32} \times (-a_{23}a_{14}) = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

Problem E(6 Points). Let

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{bmatrix},$$

where $x_i \neq 0$ for all $i = 1, \ldots, n$.
Prove that for any $n \geq 1$, $\det(A_n) = x_1 x_2 \ldots x_n(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n})$.
提示：用数学归纳法，并尝试沿最后一列做代数余子式展开。

答案： 我们对n用数学归纳法。对$n = 1$，$A_1 = [a_1 + x_1]$，因此$\det(A_1) = a_1 + x_1 = x_1(1 + \frac{a_1}{x_1})$，符合题目中要证的等式。
现在假设$\det(A_n) = x_1 x_2 \ldots x_n(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n})$对某个$n$成立。我们考虑

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -x_n & x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

沿最后一列进行代数余子式展开可得

$$\det(A_{n+1}) = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n+1} \times (-1)^{n+1+1} \times \begin{vmatrix} -x_1 & x_2 & 0 & \ldots & a_n \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -x_n \end{vmatrix}$$

$$+ x_{n+1} \times (-1)^{n+1+n+1} \times \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$= a_{n+1} \times (-1)^{n+2} \times (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n + x_{n+1} \times \det(A_n)$$

$$= a_{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n + x_{n+1} \det(A_n).$$

由归纳假设，$\det(A_n) = x_1x_2\dots x_n(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\dots+\frac{a_n}{x_n})$，因此

$$\begin{aligned}\det(A_{n+1}) &= a_{n+1}x_1x_2\dots x_n + x_{n+1}x_1x_2\dots x_n(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\dots+\frac{a_n}{x_n})\\ &= x_1x_2\dots x_nx_{n+1}(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\dots+\frac{a_n}{x_n}+\frac{a_{n+1}}{x_{n+1}}).\end{aligned}$$

因此等式$\det(A_n) = x_1x_2\dots x_n(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\dots+\frac{a_n}{x_n})$对任何$n$成立。

Bonus:（不计入分数）设A为n阶方阵，$A^\top$为它的转置。证明：对$A^\top$沿第i行进行代数余子式展开等于对A沿第i列进行代数余子式展开。
提示：可以对矩阵的阶数n做数学归纳法，即假设该说法对任何$n-1$阶的方阵成立，然后再利用这个归纳假设证明n阶方阵的情况。

答案： 若$n=1$，1阶方阵$A=[a_{11}]$与$A^\top=[a_{11}]$相等，此时我们要证明的说法显然成立。
现在假设对任何n阶方阵A，对$A^\top$沿第i行进行代数余子式展开等于对A沿第i列进行代数余子式展开，特别地，我们假设对任何n阶方阵A有$\det(A)=\det(A^\top)$。接下来我们考虑$n+1$阶方阵A。对$A^\top$沿第i行进行代数余子式展开可得

$$A^\top_{i1}\tilde{C}_{i1} + A^\top_{i2}\tilde{C}_{i2} + \dots + A^\top_{i,n+1}\tilde{C}_{i,n+1},$$

这里$\tilde{C}_{ij}$指$A^\top$关于第i行第j列的代数余子式，即$\tilde{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\widetilde{A^\top}^{ij})$，$\widetilde{A^\top}^{ij}$为删去$A^\top$第i行第j列所得到的$n$阶方阵。显然，$\widetilde{A^\top}^{ij} = (\tilde{A}^{ji})^\top$，$\tilde{A}^{ji}$为删掉$A$第j行第i列所得到的$n$阶方阵。对$n$阶方阵$\tilde{A}^{ji}$和$\widetilde{A^\top}^{ij}$使用归纳假设可得$\det(\widetilde{A^\top}^{ij}) = \det((\tilde{A}^{ji})^\top) = \det(\tilde{A}^{ji})$，从而有$\tilde{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\widetilde{A^\top}^{ij}) = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}^{ji}) = C_{ji}$，$C_{ji}$为$A$关于第j行第i列的代数余子式。因此，

$$A^\top_{i1}\tilde{C}_{i1} + A^\top_{i2}\tilde{C}_{i2} + \dots + A^\top_{i,n+1}\tilde{C}_{i,n+1} = A_{1i}C_{1i} + A_{2i}C_{2i} + \dots + A_{n+1,i}C_{n+1,i}.$$

由于$A_{1i}C_{1i} + A_{2i}C_{2i} + \dots + A_{n+1,i}C_{n+1,i}$是$A$沿第i列的代数余子式展开，我们要证明的说法现在对$n+1$阶方阵也成立。因此该说法对任何$n$都成立。证毕。

Deadline: 22:00, October 29.

作业提交截止时间：10月29日晚上22：00。