线性代数(2023-2024)第五次作业参考答案

Problem A(6 Points). 请证明：

1. (3 分) 对任何n阶方阵A，

$$a_{1j}C_{1k}+\ldots+a_{nj}C_{nk}=\begin{cases}\det(A), & j=k\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

答案： 当$j=k$时，

$$a_{1j}C_{1j}+\ldots+a_{nj}C_{nj}$$

是矩阵A沿第j列的代数余子式展开。由行列式的定义可知$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+\ldots+a_{nj}C_{nj}$。

若$j\neq k$，我们定义一个矩阵P，它的第j列与第k列相等且都等于A的第j列，P的其他列与A的其他列相同。即，若A表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

那么P等于

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}\Theta$$

显然，由于P的特殊构造，将P删掉第k列第i行($i=1,\ldots,n$)后得到的子矩阵$\tilde{P}^{ik}$与将A删掉第k列第i行($i=1,\ldots,n$)后得到的子矩阵$\tilde{A}^{ik}$相等(因为P与A唯一的不同就是第k列！)，因此P关于第i行第k列的代数余子式

$$\tilde{C}_{ik}=(-1)^{k+i}\det(\tilde{P}^{ik})$$

与A关于第i行第k列的代数余子式$C_{ik}=(-1)^{k+i}\det(\tilde{A}^{ik})$相等(对任何$i=1,\ldots,n$)。因此，对$P$沿第$k$列展开，由于这一列等于$A$的第$k$列，即$P_{ik}=a_{ij}$对任何$i=1,\ldots,n$成立，我们有

$$\det(P)=P_{1k}\tilde{C}_{1k}+\ldots+P_{nk}\tilde{C}_{nk}=a_{1j}C_{1k}+\ldots+a_{nj}C_{nk}.$$

令P'指代将P的第j列与第k列交换后得到的矩阵，那么我们知道$\det(P')=-\det(P)$。另一方面，由于P的第j列与第k列相等，交换第j列与第k列后得到的依然是矩阵P自己，即$P'=P$，因此又有$\det(P')=\det(P)$。故

$$\det(P')=\det(P)=-\det(P),$$

即$\det(P) = 0$。因此我们证明了$0 = \det(P) = a_{1j}C_{1k} + \ldots + a_{nj}C_{nk}$当$k \neq j$时。

2. (3 分) 对任何$m \times n$-矩阵A，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

任何m维向量$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$，线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当列向量$\boldsymbol{b}$可以被表示为$A$的$n$个列向量$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$，...，$\boldsymbol{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$的线性组合(linear combination)。

答案： 先假设$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解。那么假设向量$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$是这个方程的一个解，即$A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$。这当然意味着

$$\begin{aligned} &a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n = b_1 \\ &a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n = b_m \end{aligned}$$

也即

$$\begin{bmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + s_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

我们当然得到$s_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + s_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = s_1\boldsymbol{c}_1 + s_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + s_n\boldsymbol{c}_n =$

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$。这意味着列向量$\boldsymbol{b}$可以表示为$A$的$n$个行向量的线性组合，其系数依次为$s_1, s_2, \ldots, s_n$。

现在假设$\boldsymbol{b} = s_1\boldsymbol{c}_1 + s_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + s_n\boldsymbol{c}_n$可以表示为$A$的$n$个列向量的线性组合。那么令$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$为由该线性组合的系数所组成的$n$维向量，那么由矩阵乘法计算可得

$$A\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + s_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b},$$

因此$\boldsymbol{s}$是线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$的一个解，所以$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$有解。

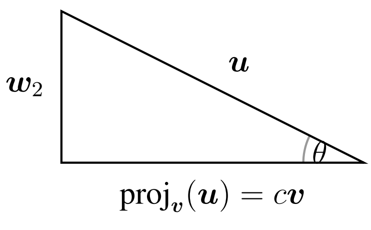
Problem B(6 Points).

1. (2 分) 我们知道向量$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$与$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$之间的夹角$\theta$被定义为

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

请结合正交投影定理(讲义Theorem 3.13，教材Theorem 3.3.2)及图像阐述为何以上等式定义的两个向量之间的夹角具有正确的几何意义。

答案： 由正交投影定理可知$\boldsymbol{u}$在$\boldsymbol{v}$上的正交投影为$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}$，令$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u} - \text{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$指代$\boldsymbol{u}$对$\boldsymbol{v}$的垂线，那么显然$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$与$\boldsymbol{w}_2$作为两条直角边与斜边$\boldsymbol{u}$组成了一个直角三角形。



显然$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的夹角θ满足

$$\cos\theta = \frac{\|\text{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\|\boldsymbol{v}\| \times \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

2. (2 分) Prove that if $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ is an orthogonal set in $\mathbb{R}^n$, then $\|\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_r\|^2 = \|\boldsymbol{v}_1\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{v}_r\|^2$。

答案： 利用点乘积对两个变量的线性性质，容易推出

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_r\|^2 &= (\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_r)\cdot(\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_r)\\ &= (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)+\ldots+(\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{v}_r)+\sum_{i\neq j}(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j).\end{aligned}$$

由假设可知，对任何$i\neq j$ $(i,j=1,\ldots,r)$，都有$\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j=0$。因此以上等式告诉我们

$$\|\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_r\|^2=(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)+\ldots+(\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{v}_r)=\|\boldsymbol{v}_1\|^2+\ldots+\|\boldsymbol{v}_r\|^2.$$

3. (2 分) 证明英文教材Theorem 3.5.2的全部内容。
   答案： 直接利用叉乘定义验证即可。具体细节省略。

Problem C(6 Points).

1. (2 分) (2022年线性代数期中考试题) Let $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$ that are mutually orthogonal (that is, they form a orthogonal set). Assume $\|\boldsymbol{u}\|=1$, $\|\boldsymbol{v}\|=2$, $\|\boldsymbol{w}\|=3$. Compute

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\|.$$

提示： 这里可直接利用以下事实：若$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$是$\mathbb{R}^3$中的向量且彼此相互正交(mutually orthogonal)，那么如果另一个向量$\boldsymbol{w}$同时垂直$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，那么存在某个常数$c$使得$\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{v}_3$。

答案： 首先注意到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\|^2 &= \|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\|^2+\|\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\|^2\\ &\quad+2(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+2(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+2(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

现在利用Lagrange's identity (讲义Theorem 3.18-3.)得到

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2=1^2\times2^2-0=4,$$

因为我们已经假设$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$。同理可得

$$\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\|^2=\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{w}\|^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})^2=2^2\times3^2-0=4\times9=36;$$

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{w}\|^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})^2=1^2\times3^2-0=9.$$

现在我们来计算"交叉项"$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$。由标量三重积的定义我们知道，

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}.$$

另一方面，利用讲义Theorem 3.18-1.,2.,我们知道$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=0$，$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=0$，即$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$正交于$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$。而由假设已知$\boldsymbol{w}$也正交于$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$。因此由**提示**可知，存在一个常数$c$使得$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{w}$。这意味着

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=c\begin{vmatrix}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=0,$$

因为最右边的矩阵包含有两个同样的行向量$\boldsymbol{w}$。同理可证

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})=0,\quad(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})=0.$$

因此最终得到

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\|^2=\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\|^2+\|\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\|^2=4+36+9=49,$$

即$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}\|=7$。

2. (2 分) Prove that for $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ three vectors in $\mathbb{R}^3$, we have

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}).$$

答案： 由标量三重积的定义可知

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}\end{vmatrix}=(-1)(-1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{vmatrix}=\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),$$

因为每次交换矩阵的两行会使得行列式乘以-1。同理可得

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=(-1)(-1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{u}\end{vmatrix}=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}).$$

3. (2 分) Use the cross product to find a vector which is orthogonal to both $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u}=(-6,4,2),\quad\boldsymbol{v}=(3,1,5).$$

答案： 由讲义Theorem 3.18-1.,2.我们知道$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$同时正交于$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$。因此只需计算

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\left(\begin{vmatrix}-6&4&2\\3&1&5\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-6&4&2\\3&1&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-6&4&2\\3&1&5\end{vmatrix}\right)=(18,36,-18).$$

$(18,36,-18)$即满足同时正交于$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$的条件。

Problem D(6 Points).

1. (2 分) Let $\boldsymbol{u}=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{w}=(0,1,2)$. Compute $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u})$.
2. (2 分) Let $\boldsymbol{u}=(3,-2,1)$, $\boldsymbol{w}=(1,0,-1)$. Compute $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$.
3. (2 分) Let $\boldsymbol{u}=(2,0,1)$, $\boldsymbol{w}=(1,2,3)$. Compute $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$.

答案： 只需利用公式$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u})=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|^2}\boldsymbol{w}$或者$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}$代入具体数值即可得到答案。注意是求哪个向量对哪个向量的正交投影。

Problem E(6 Points). 设A为n阶方阵，且$A^\top=-A$。证明矩阵I_n-A可逆。

提示：一个方阵B可逆当且仅当齐次方程组$B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$只有平凡解。另外利用等式$A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^\top A^\top\boldsymbol{v}$。

答案： 首先，利用讲义Theorem 1.25或者英文教材Theorem 1.6.4可知，I_n-A可逆当且仅当方程组$(I_n-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$仅有一个平凡解。因此令$\boldsymbol{u}$为方程组$(I_n-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的一个解，即，$(I_n-A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$，等价于$A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$。那么我们必然有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}&=A\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\\&=(A\boldsymbol{u})^\top\boldsymbol{u}\\&=\boldsymbol{u}^\top A^\top\boldsymbol{u}\\&=\boldsymbol{u}^\top(-A)\boldsymbol{u}\quad(A^\top=-A)\\&=-\boldsymbol{u}^\top(A\boldsymbol{u})\\&=-\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{u}\\&=-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

显然这意味着$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$，即$\|\boldsymbol{u}\|^2=0$，从而得到$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$。因此我们证明了，任何方程组$(I_n-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解$\boldsymbol{u}$都为$\mathbf{0}$，即，方程组$(I_n-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$仅有一个平凡解。因此$I_n-A$可逆。

Bonus: (不计入分数) 令

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&7&5\\3&8&7&9&8\\3&4&1&6&2\\4&0&2&2&3\\7&9&1&5&4\end{bmatrix}.$$

现已知21375，38798，34162，40223，79154都可以被19整除。

1. 证明如果一个方阵的所有项都是整数，那么它的行列式也必然是一个整数。

答案： 用数学归纳法即可。显然该说法对一阶方阵成立。那么现在假设这个说法对任何$n-1$阶方阵成立。对于n阶方阵A，令$\tilde{A}^{ij}$为A删掉第i行第j列后得到的$n-1$阶方阵，我们知道A关于a_{ij}的代数余子式为$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\tilde{A}^{ij})$。由于$n$阶方阵$A$的所有项均为整数，那么它的子矩阵$\tilde{A}^{ij}$的所有项也都为整数。因此利用归纳假设可得$\det(\tilde{A}^{ij})$为整数，从而得到$C_{ij}$也为整数。那么由于所有$a_{ij}$都为整数，我们得到

$$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+\ldots+a_{in}C_{in}$$

作为若干整数乘积之和，也为整数。因此证毕。

2. 证明$\det(A)$可以被19整除。

答案： 将A的第一列乘以10^4加到最后一列，第二列乘以10^3加到最后一列，第三列乘以10^2加到最后一列，第四列乘以10加到最后一列，得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 21375 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 38798 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 34162 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 40223 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 79154 \end{vmatrix}.$$

对右边矩阵沿最后一列展开，令$C_{15},C_{25},\ldots,C_{55}$指代对应的代数余子式，由第一问的结果可知它们都为整数，因此

$$\det(A)=21375C_{15}+38798C_{25}+34162C_{35}+40223C_{45}+79154C_{55}.$$

已知21375，38798，34162，40223，79154都可以被19整除。那么$21375=c_1\times 19$，$38798=c_2\times 19$，$34162=c_3\times 19$，$40223=c_4\times 19$，$79154=c_5\times 19$，$c_1,\ldots,c_5$均为整数。综上，我们得到

$$\begin{aligned}\det(A)&=21375C_{15}+38798C_{25}+34162C_{35}+40223C_{45}+79154C_{55}\\&=19(c_1C_{15}+c_2C_{25}+c_3C_{35}+c_4C_{45}+c_5C_{55})\\&=19\times k,\quad k=c_1C_{15}+c_2C_{25}+c_3C_{35}+c_4C_{45}+c_5C_{55}.\end{aligned}$$

由于$k=c_1C_{15}+c_2C_{25}+c_3C_{35}+c_4C_{45}+c_5C_{55}$作为若干整数乘积之和也为整数，我们得到$\det(A)$可以被19整除。

Deadline: 22:00, November 12.

作业提交截止时间：11月12日晚上22：00。