线性代数(2023-2024)第八次作业

Problem A(6 Points) (2022年线性代数期中考试题).
Consider two parallel (中文：平行的) planes in $\mathbb{R}^3$ whose equations are given by $x+2y+2z=4$ and $x+2y+2z=-5$. Compute the distance between these two planes.

答案： 解方程$x+2y+2z=4$可得一个特解，比如$x=4,y=0,z=0$。那么令$P_0=(4,0,0)$，利用讲义定理Theorem 4.34可得P_0到平面$x+2y+2z=-5$的距离为

$$\frac{|1\times 4+2\times 0+2\times 0+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

显然这是两个平行平面之间的距离。

Problem B(6 Points) (2022年线性代数期中考试题).
In $\mathbb{R}^3$, let $\boldsymbol{u}=(1,1,2),\boldsymbol{v}=(0,2,3)$. Suppose that H is the plane passing through the point $P=(1,0,1)$ and parallel to $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$. Find an equation of H in the form $Ax+By+Cz+D=0$.

答案： 由于H与$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$张成的平面平行，那么通过计算$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$可得$H$的法向量为$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(-1,-3,2)$，即$(A,B,C)=(-1,-3,2)$，因此$H$的方程为

$$-x-3y+2z+D=0.$$

为了确定D，只需将$P=(1,0,1)\in H$代入以上方程，得到$-1+2+D=0$，即$D=-1$。因此H的方程为

$$-x-3y+2z-1=0.$$

Problem C(6 Points) (2022年线性代数期中考试题).
Consider the matrix $A=\begin{bmatrix}2x&-1&2&3\\x&-2&1&2\\1&x&x&x\end{bmatrix}$, where x is a real number.

1. (2 points) Prove that $\text{rank}(A)\geq 2$ for all $x\in\mathbb{R}$.
2. (4 points) Find all $x\in\mathbb{R}$ such that $\text{rank}(A)=2$.

答案：

1. 将A的第三行与第一行互换，得到$\begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ x & -2 & 1 & 2 \\ 2x & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，将第一行乘以$-x$加到第二行，将第一行乘以$-2x$加到第三行，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -2-x^2 & 1-x^2 & 2-x^2 \\ 0 & -1-2x^2 & 2-2x^2 & 3-2x^2 \end{bmatrix}.$$

显然，不论$x \in \mathbb{R}$取何值，都有$-2-x^2 \neq 0$，这意味着A的阶梯型的第一行与第二行都会包含一个主1，因此$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) \geq 2$。

2. 由第一问的解答可知，$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) = 2$当且仅当第二个行向量$(0, -2-x^2, 1-x^2, 2-x^2)$与第三个行向量$(0, -1-2x^2, 2-2x^2, 3-2x^2)$线性相关，即存在某个常数$k \in \mathbb{R}$使得

$$(0, -2-x^2, 1-x^2, 2-x^2) = k(0, -1-2x^2, 2-2x^2, 3-2x^2).$$

比较每个坐标可得k必须满足

$$(1-2k)x^2 = k-2, (1-2k)x^2 = 1-2k, (1-2k)x^2 = 2-3k.$$

显然$k \neq \frac{1}{2}$，因为$k = \frac{1}{2}$不能满足第一个等式$(1-2k)x^2 = k-2$。那么对于$k \neq \frac{1}{2}$，我们有$1-2k \neq 0$，那么第二个等式$(1-2k)x^2 = 1-2k$告诉我们此时必然有$x^2 = 1$。将$x^2 = 1$代入第一个和第三个等式可得$k = 1$同时满足以上三个等式。由此我们得到当$x^2 = 1$时有

$$(0, -2-x^2, 1-x^2, 2-x^2) = (0, -1-2x^2, 2-2x^2, 3-2x^2),$$

即$x = 1, -1$时$\text{rank}(A) = 2$。

Problem D(6 Points)

假设$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$是$\mathbb{R}^5$里的五个列向量。假设矩阵$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$(即以$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$依次作为列向量)的秩为$\text{rank}(A) = 3$，矩阵$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix}$的秩为$\text{rank}(B) = 3$，矩阵$C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_5 \end{bmatrix}$的秩为$\text{rank}(C) = 4$。证明矩阵

$$D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_5 - \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix}$$

的秩为$\text{rank}(D) = 4$。

答案： 因为$\text{rank}(A) = 3$，我们知道A的三个列向量$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$线性无关。因为$\text{rank}(B) = 3$，我们知道$B$的四个列向量$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$线性相关。综上，可推断出$\boldsymbol{v}_4$能够被$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$的线性组合表示(请思考为什么？)：

$$\boldsymbol{v}_4 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3.$$

对于D的四个列向量$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5 - \boldsymbol{v}_4$，考虑等式

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + k_4(\boldsymbol{v}_5 - \boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0},$$

代入$\boldsymbol{v}_4 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$.可得以上等式变为

$$(k_1 - c_1k_4)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 - c_2k_4)\boldsymbol{v}_2 + (k_3 - c_3k_4)\boldsymbol{v}_3 + k_4\boldsymbol{v}_5 = \boldsymbol{0}.$$

由于$\text{rank}(C) = 4$，可知$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5$线性无关，因此以上等式只能在$k_1 - c_1k_4 = k_2 - c_2k_4 = k_3 - c_3k_4 = k_4 = 0$时成立。显然这要求$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，即$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + k_4(\boldsymbol{v}_5 - \boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$ 只能在$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$时成立，即它们线性无关，即$\text{rank}(D) = 4$。

Problem E(6 Points) (2022年线性代数期中考试题)

Determine whether the following statements are true or false, and explain why.

1. (2 points) For any matrix with two rows and three columns, the matrix $A^\top A$ is always singular. (注：一个方阵被称为singular，如果它不可逆。)
2. (2 points) For any matrix with three rows and two columns, the matrix $A^\top A$ is always singular.
3. (2 points) In any vecotr space of dimension 5, one can find 4 linearly independent vectors.

答案：

1. 该说法正确。我们可以证明对任何$A \in M_{2\times 3}$，$A^\top A \in M_{3\times 3}$都不可逆。
   基于反证法，假设存在$A \in M_{2\times 3}$使得$A^\top A \in M_{3\times 3}$可逆。那么我们知道，对任何$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$，存在$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$使得$A^\top A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$。现在令$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$，将$A^\top$的列向量表示为
   $$A^\top = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix},$$
   那么以上告诉我们，对任何$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$，都有
   $$\boldsymbol{b} = A^\top(A\boldsymbol{x}) = A^\top\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{c}_1 + y_2\boldsymbol{c}_2.$$
   这其实意味着，$\text{span}\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\} = \mathbb{R}^3$，矛盾！(因为3维向量空间$\mathbb{R}^3$不可能由两个向量生成，见讲义Theorem 4.16)。因此$A^\top A$必然不可逆。
2. 该说法错误。令$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，有 $A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，显然为一个可逆矩阵。

3. 该说法正确。如果V为5维向量空间，那么假设它的一组基底为$S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_5\}$，显然$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$这四个向量线性无关。

Deadline: 22:00, December 03.

作业提交截止时间：12月3日晚上22：00。