Linear Algebra Tutorial 9

2023.12.5

midterm review 期中复习

- 考试时间: 2023.12.6 星期三 8:15~9:55
- 考试地点: 教学中心202
- 考试内容: 第一章到第四章的4.8节（包含）
- 期中考试占总成绩 30%
- 试卷为全英文, 不涉及数学的问题可以找监考人员翻译
- 作答中英文均可

一些要强调的事情

- iff $\Leftrightarrow$ if and only if $\Leftrightarrow$ 当且仅当,
  $\Rightarrow$ 充分性, $\Leftarrow$ 必要性, 都要证
  或者全程使用$\Leftrightarrow$等价表述
- free variables
  eg. $x_3 = s, x_4 = r$
  $s, r \in \mathbf{R}$
- consistent 有解的
- inconsistent 无解的
- trival solution 平凡解(零解)
- the symbol [] and ||
  [] for matrix, || for determinant

一些要强调的事情

- 注意公式不要记错了
  - $||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ 不要忘记根号
  - $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||}$ 分母不要忘记开方
  - $proj_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}$ 分母不要忘记平方,公式背不过的话可以自己考场推一下

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A + I = ?, A - I = ?$ 注意I是单位矩阵,只有对角线上的元素为1!!!
- P_n 所有次数$\leq n$的多项式的集合
  $P_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$

一些要强调的事情

- 行列式交换两行后，记得要有一个负号
- 关于叉乘

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2,-(u_1v_3-u_3v_1),u_1v_2-u_2v_1)$$

  注意中间有个负号(原因:a_{12}的代数余子式的符号是$(-1)^{1+2}$)
- 行列式按行/列的展开时:

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$$

  注意C_{ij}是a_{ij}的**代数余子式**,有一个$(-1)^{i+j}$
- 矩阵没有二项式定理(本质:矩阵乘法没有交换律)
  e.g. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

review list 复习清单

- chapter1 线性方程组
  - 矩阵
  - 高斯消元
  - 矩阵求逆
- chapter2 行列式
- chapter3 欧氏空间
- chapter4 向量空间
  - 子空间
  - 线性相关、线性无关
  - 基、维数、基变换
  - 行空间、 列空间、 零空间
  - 矩阵的秩、零度、 矩阵基本空间

chapter 1 线性方程组

- 线性方程组
- 高斯消元
- 矩阵运算
- 矩阵求逆
- 特殊矩阵

coeffcient matrix(**系数矩阵**) & augmented matrix(**增广矩阵**)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

系数矩阵 A and 增广矩阵 $\bar{A} = (A|\mathbf{b})$

初等行变换

- 交换两行
- 用一个非零常数乘以某一行
- 用一个非零常数乘以某一行，然后加到另一行上

> 注意化简矩阵的时候的符号写法, 写出矩阵的化简方式

row echelon form(**行阶梯矩阵**)

- leading 1(首1/主1/主元……)
- 0 行必须在非零行的下面
- leading 1 的列必须在下一行的leading 1 的左边

reduced row echelon form(**简化行阶梯矩阵**)

- 首1所在的列的其他元素都为0

Gauss elimination 高斯消元

1. no solution 无解
2. 有解
    i. unique solution 唯一解
    ii. infinite solutions 无穷多解

leading variable & free variable **主元** & **自由元**

增广矩阵B的行阶梯矩阵为$\tilde{B}$

主元: $\tilde{B}$中的leading 1对应的元素

自由元: $\tilde{B}$中的非主元对应的元素

矩阵运算

- 矩阵加法
  注意$A + 1 = A + I$
  只把对角线上的元素$+1$
- 矩阵乘法
  $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$
  - 矩阵乘法没有交换律
    所以矩阵没有二项式定理
    $AB \neq BA$
    $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

矩阵求逆

1. 伴随矩阵 A^*, $adj(A)$

- $C_{i,j}$: $a_{i,j}$的**代数余子式**
- C : A的代数余子式矩阵
- $A^* = adj(A) = C^T$
- **无论 A 是否可逆**都有$AA^* = A^*A = |A|I$
- 若A可逆, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$

2. $[A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$
   基础行变换

> 不能同时使用基础行变换和基础列变换

矩阵的基础变换

- 基础矩阵: 由单位矩阵经过一次初等行变换得到的矩阵
  - 交换两行
  - 用一个非零常数乘以某一行
  - 用一个非零常数乘以某一行，然后加到另一行上
- 左行右列
  基础行变换,左乘一系列基础矩阵
  基础列变换,右乘一系列基础矩阵

例子(2021年线性代数期中考试题)：Find an invertible matrix P such that $PA = B$, where

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} - a_{21} & a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} \end{bmatrix}.$$

逆矩阵的性质

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 矩阵的逆是唯一的

特殊矩阵

- 对角矩阵
- 上三角矩阵
- 下三角矩阵
  - 三角矩阵乘三角矩阵还是三角矩阵(使用时不需要证明,但需要说明)
  - 三角矩阵的逆还是三角矩阵

  > 上面的三角矩阵是同一种
- 对称矩阵
  $A^T = A$
- 矩阵的分块

chapter 2 行列式

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 行列式的应用

行列式的定义

- 作用于方阵$A \in M_{n\times n}$上的函数
  $det : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$
- 记作$|A|$或者$\det(A)$
- 特别的: 二阶行列式:
  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

行列式的性质

- $|A^T| = |A|$
- $\lambda A = \lambda^n |A|$
- $|AB| = |A||B|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

行列式的性质

> 对行列式可以同时进行基础行变换和基础列变换
> 以行变换为例

1. B 由 A 交换两行得到
   $|B| = -|A|$
2. B 由 A 用一个非零常数乘以某一行得到
   $|B| = k|A|$
3. B 由 A 用一个非零常数乘以某一行，然后加到另一行上得到
   $|B| = |A|$

行列式的性质

4. 由1. 若A有两行相同, 则$|A| = 0$

e.g.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

find $C_{21} + C_{22} + 5C_{23} + 4C_{24}$

where C_{ij} is the cofactor of a_{ij}

行列式的性质

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in}\,(\text{第}i\text{行}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\,(\text{第}i\text{行}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in}\,(\text{第}i\text{行}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

> $|C| = |A| + |B|$

行列式的计算

- 三角矩阵 / 对角矩阵
  $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

  > 使用基础行/列变换将矩阵化为三角矩阵/对角矩阵

- 按行/列展开
  $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$
  注意C_{ij}是a_{ij}的**代数余子式**,有一个$(-1)^{i+j}$

- 使用行列式性质进行简化

行列式的应用

1. Cramer's rule 克拉默法则
   求解单个变量的解
2. 判断矩阵是否可逆
   $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆
3. 判断一组向量是否线性无关
   $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$线性无关

chapter 3 欧氏空间

- 范数、内积、距离
- 正交、叉乘
- 欧式几何

$\mathbb{R}^n$ (n维欧氏空间)

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$

- standard unit vector 标准单位向量
  $\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$
  $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基

范数、内积、距离

- 范数 norm

  $$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

- 内积 inner product

  $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

  > 若将$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$看作列向量, 则$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$

- 距离 distance

  $$||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

正交、叉乘

- orthogonality 正交
  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
- cross product 叉乘
  只作用在$\mathbb{R}^3$上
  $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$

  > $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$是一个向量, 与$\mathbf{u}, \mathbf{v}$都垂直

  注意第2项的负号

cross product

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ is orthogonal to both $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$
- $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| sin\theta$

投影

- orthogonal projection of $\mathbf{u}$ on $\mathbf{v}$
  $\mathbf{u}$在$\mathbf{v}$上的投影
  $\mathbf{w}_1 = proj_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}$

> 注意投影是向量

- the vector component of $\mathbf{u}$ orthogonal to $\mathbf{v}$
  $\mathbf{u}$ 在$\mathbf{v}$的垂直分量
  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - proj_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||v||^2}\mathbf{v}$

叉乘性质

THEOREM 3.5.2 Properties of Cross Product

If $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are any vectors in* 3-*space and* k *is any scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(*d*) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

混合积(标量三重积)

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ are coplanar
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = 0$
- Lagrange's identity
  $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

cross product geometric meaning

- parallelogram area
  平行四边形面积
  $S = \bar{AB} * \bar{AC} sin\theta = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$
- volume of parallelepiped
  平行六面体体积
  $V = Sh = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{AD}\| cos\alpha = \mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC})$

欧式几何

- 直线

  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$

  $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$

  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 直线的方向向量

- 平面

  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$

  $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$

  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 平面的法向量

  $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

欧式几何

- line(2-dimensional):
  点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $ax + by + c = 0$
  $$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
  $\mathbf{n} = (a, b)$ is the normal vector of the line

- plane(3-dimensional):
  点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $ax + by + cz + d = 0$
  $$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ is the normal vector of the plane

chapter 4 向量空间

- 向量空间
- 子空间
- 线性相关、线性无关
- 基、维数、基变换
- 行空间、 列空间、 零空间
- 矩阵的秩、零化度、 矩阵基本空间

向量空间(线性空间) linear space/ vector space

1. If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are objects in V, then $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is in V.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. There is an object $\mathbf{0}$ in V, called a ***zero vector*** for V, such that $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for all $\mathbf{u}$ in V.
5. For each $\mathbf{u}$ in V, there is an object $-\mathbf{u}$ in V, called a ***negative*** of $\mathbf{u}$, such that $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
6. If k is any scalar and $\mathbf{u}$ is any object in V, then $k\mathbf{u}$ is in V.
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8. $(k+m)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u})=(km)(\mathbf{u})$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

向量空间满足以上10条性质

- 若证明不是向量空间, 只需要找到一个反例即可

子空间 subspace

1. 线性空间(向量空间)子集
   $W \subseteq V$
2. 加法封闭性
   $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$
   $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
3. 数量积封闭性
   $\mathbf{u} \in W, k \in \mathbb{R}$
   $k\mathbf{u} \in W$

线性相关、线性无关

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$

- linear combination $\mathbf{v}$ 是$S = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$的线性组合
  $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$
- linearly dependent 线性相关
  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$中至少有一个向量可以表示为其他向量的线性组合
- linearly independent 线性无关
  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$中没有一个向量可以表示为其他向量的线性组合
  $\Leftrightarrow k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = 0$只有零解

基、维数

$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$是$V$的一个基

- basis 基
  S是V的一个基
  $|S|=\dim(V)$
- dimension 维数
  V的一个基的元素个数

基内的各个向量线性无关
$A=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n]$
$|A|\neq 0$

坐标

- 同一个线性空间V可以有不同的基B, B'
- 每一个向量在不同的基下都有自己的坐标
  $[\mathbf{v}]_B$ 表示$\mathbf{v}$在基B下的坐标
  $[\mathbf{v}]_{B'}$ 表示$\mathbf{v}$在基B'下的坐标

基变换

$B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n]$, $B' = [\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \cdots, \mathbf{v}_n']$

- 过渡矩阵/转换矩阵
  $[\mathbf{v}]_B' = P_{B' \leftarrow B}[\mathbf{v}]_B$
  $[\mathbf{v}]_B = P_{B \leftarrow B'}[\mathbf{v}]_{B'}$
- $P_{B \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} = I$
- $[B'|B] \Rightarrow [I|P_{B' \leftarrow B}]$

行空间、 列空间、 零空间

A is a $m \times n$ matrix

- row space 行空间
  $row(A) = span\{\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_m\}$
- column space 列空间
  $col(A) = span\{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_n\}$
- null space 零空间
  $null(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
- left null space 左零空间
  $null(A^T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

矩阵基本空间

Definition 4.31. 对$m \times n$-矩阵A，以下六个向量空间被称为A的基本空间(*the fundamental spaces of* A):

- A的行空间$Row(A)$，
- A的列空间$Col(A)$，
- $A^\top$的行空间$Row(A^\top)$，
- $A^\top$的列空间$Col(A^\top)$，
- A的零空间$Null(A)$，
- $A^\top$的零空间$Null(A^\top)$。

- 行空间和零空间互为正交补
- 列空间和左零空间互为正交补

正交补(Orthogonal Complements)

> 正交: $col(A) \perp null(A)$
> 补: $col(A) + null(A) = \mathbb{R}^n$

矩阵基本空间

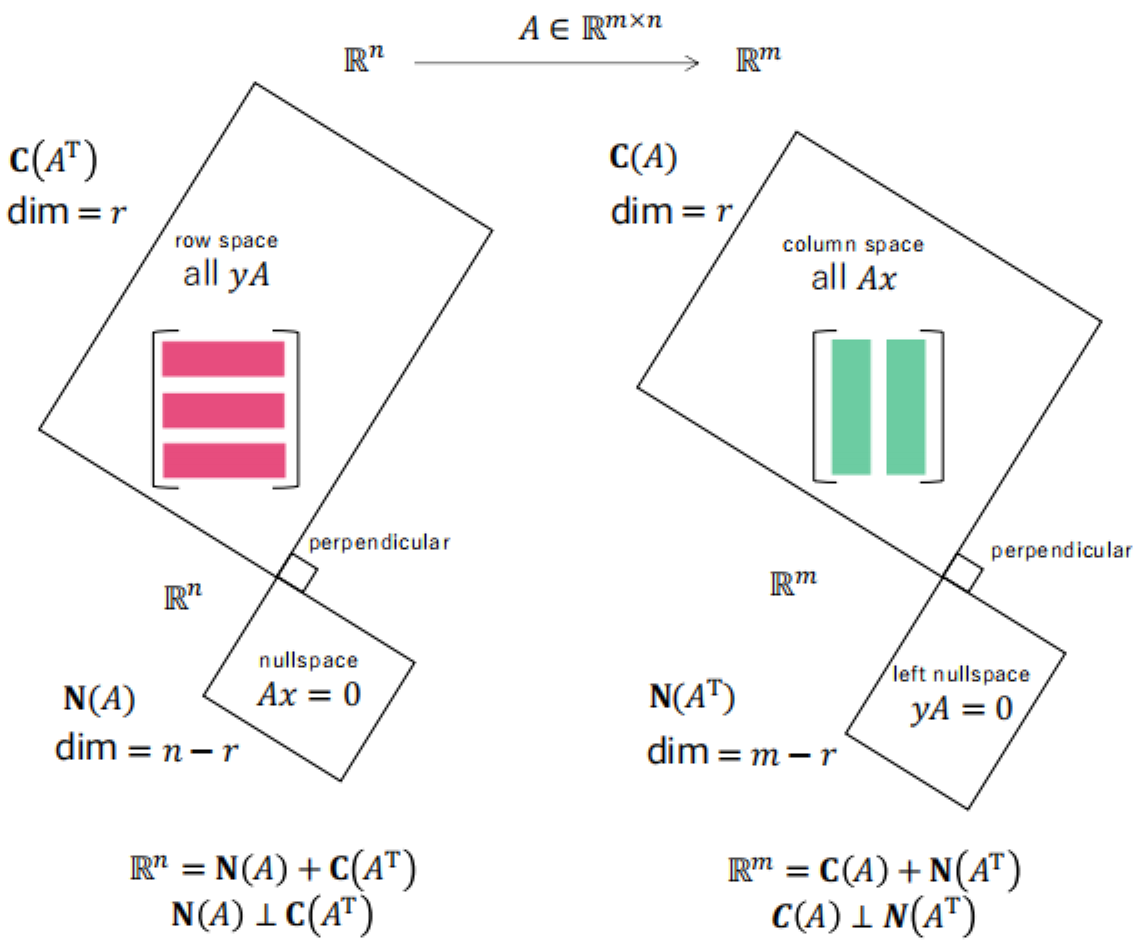

Figure 5: 四个子空间

矩阵的秩、零化度

- $rank(A) = dim(row(A)) = dim(col(A))$
  A 的秩 = A 的行阶梯矩阵的首一个数
  $\Rightarrow rank(A) \leq \min(n, m)$
- $rank(A)$ 可看作行阶梯矩阵的首一(非零行/主元) 个数
  $nullity(A) = dim(Null(A))$ 可看作自由元的个数
  $\Rightarrow rank(A) + nullity(A) = n$

rank property

- $A \in M_{m\times n}, W = \{A\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$
  then $W = Col(A)$
- $rank(AB) \leq \min(rank(A), rank(B))$
  矩阵相乘秩不增
- $rank(A^T A) = rank(A)$

Equivalent expression

$A \in M_{n\times n}$

- A可逆；
- $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$只有平凡解；
- A的简化阶梯型为单位矩阵；
- A是一组初等矩阵的乘积；
- $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$对任何$n\times 1$的列向量$\boldsymbol{b}$都有解；
- $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$对任何$n\times 1$的列向量$\boldsymbol{b}$都有且只有一个解；
- $\det(A)\neq 0$；
- A的所有n个行向量线性无关；
- A的所有n个列向量线性无关；
- $span(Row(A))=\mathbb{R}^n$；
- $span(Col(A))=\mathbb{R}^n$；
- A的所有n个行向量构成$\mathbb{R}^n$的一组基底；
- A的所有n个列向量构成$\mathbb{R}^n$的一组基底；
- $rank(A)=n$；
- $Null(A)=0$。