Отчет по лабораторной работе 6

Задача об эпидемии

Шалыгин Георгий Эдуардович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить построение математической модели задачи об эпидемии.

2 Задание

1. Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп.
2. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

    1. если $I(0) < I^*$
    2. если $I(0) > I^*$

3 Теоретическое введение

3.1 Постановка задачи

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 11300$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 240$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 46$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Подробнее в [1].

3.2 Модель

3.2.1 Скорость изменения $S(t), I(t), R(t)$

$S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{если } I(t) > I^* \\ 0, & \text{если } I(T) < I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S + \beta I, & \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I, & \text{если } I(T) < I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$.

Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: если $I(0) < I^*$, если $I(0) > I^*$.

Подробнее в [2].

4 Выполнение лабораторной работы

1. Вариант 27, начальные значения: $N = 11300, I(0) = 240, R(0) = 46, S(0) = N - I(0) - R(0)$.

2. Рассмотрим первый случай, если $I(0) < I^*$.

3. Зададим систему и начальные условия на Julia (fig. 4.1).

```
function F!(du, u, p, t)
    du[1] = 0
    du[2] = -0.02u[2]
    du[3] = 0.02u[2]
end
```

```
DEProblem with uType Vector{Int64} and t
imespan: (0.0, 200.0)
0: 3-element Vector{Int64}:
11014
  240
   46
```

```
begin
    u₀ = [11300-46-240, 240, 46]
    T = (0.0, 200)
    prob = ODEProblem(F!, u₀, T)
end
```

Рис. 4.1: Код для первой модели

4. Построим график изменения численности (fig. 4.2)

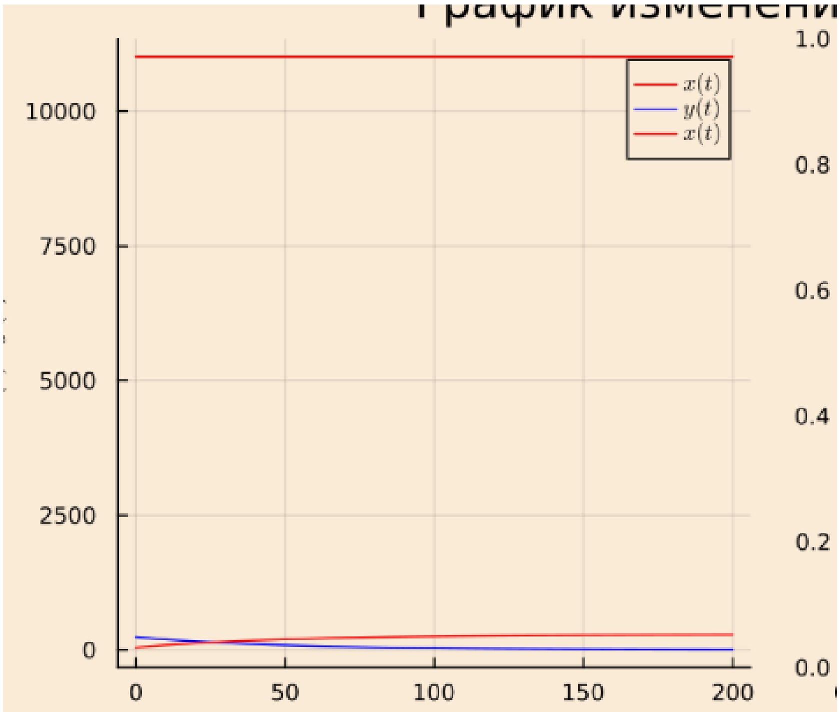

Рис. 4.2: График для первой модели

5. Теперь зададим модель в Opemmodelica (fig. 4.3).

```
model d

Real a = 0.01;
Real b = 0.02;
Real s;
Real i;
Real r;
Real t = time;
initial equation
i = 240;
r = 46;
s = 11300 - 240 - 46;
equation
der(s) = 0;
der(i) = - b * i;
der(r) = b  *i;

end d;
```

Рис. 4.3: Модель в openmodelica

6. Построим график (fig. 4.4).

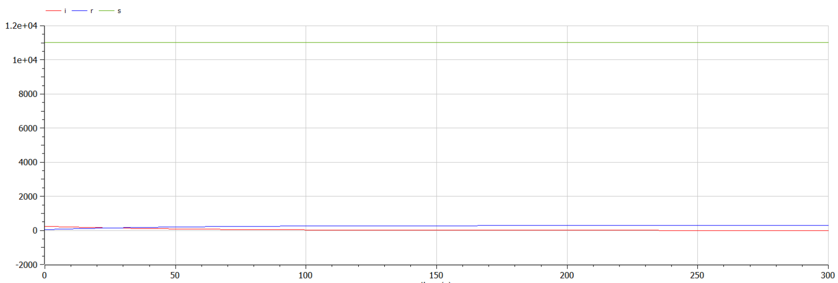

Рис. 4.4: Результаты моделирования в openmodelica

7. Рассмотрим второй случай, если $I(0) > I^*$.

8. Система уравнений в Julia (fig. 4.5).

```julia
"""Правая часть нашей системы, p, t не используются
u[1] -- x, u[2] -- y
"""
function F!(du, u, p, t)
    du[1] = -0.01u[1]
    du[2] = 0.01u[1]-0.02u[2]
    du[3] = 0.02u[2]
end
```

```
DEProblem with uType Vector{Int64} and tType Float64. In
imespan: (0.0, 200.0)
: 3-element Vector{Int64}:
11014
  240
   46
```

```julia
begin
    u0 = [11300-46-240, 240, 46]
    T = (0.0, 200)
    prob = ODEProblem(F!, u0, T)
end
```

Рис. 4.5: Код для второй модели

9. Построим графики (fig. 4.6)

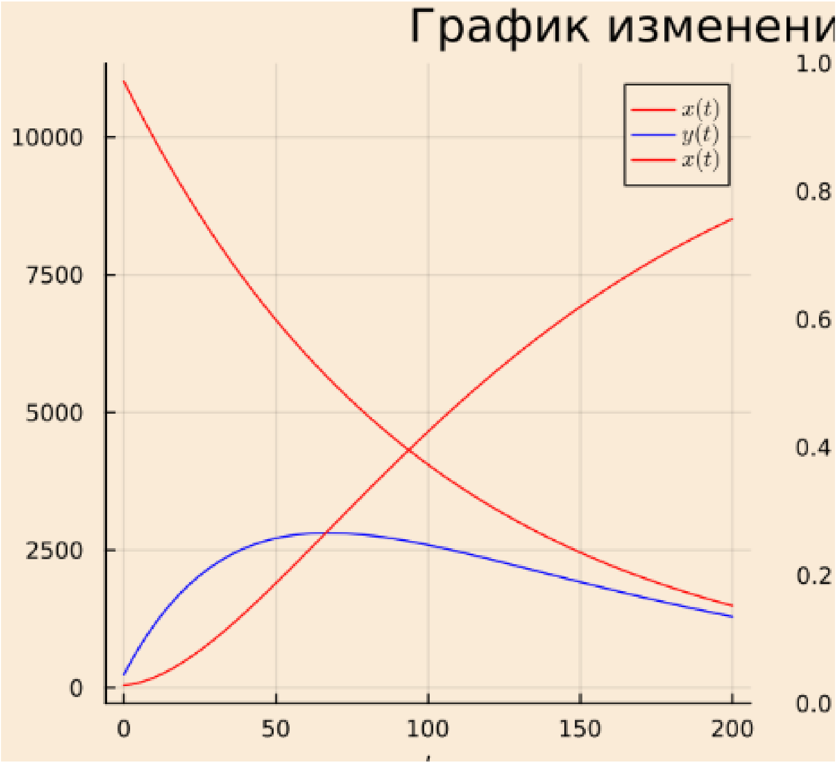

Рис. 4.6: Результат моделирования в julia

10. Та же модель в openmodelica (fig. 4.7)

```
model d

Real a = 0.01;
Real b = 0.02;
Real s;
Real i;
Real r;
Real t = time;
initial equation
i = 240;
r = 46;
s = 11300 - 240 - 46;
equation
der(s) = -a * s;
der(i) = a * s - b * i;
der(r) = b  *i;

end d;
```

Рис. 4.7: Код для второй модели

11. И результаты моделирования (fig. 4.8)

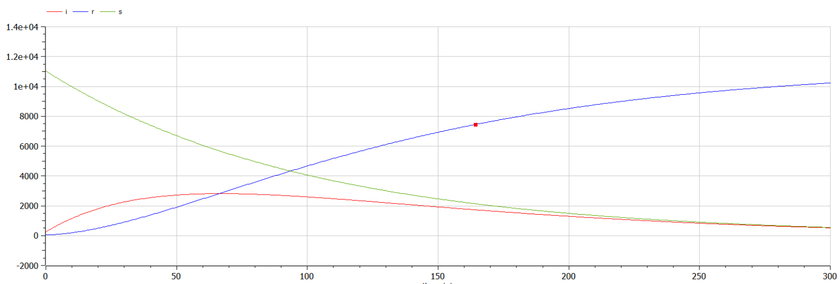

Рис. 4.8: График модели

5 Выводы

В итоге была рассмотрена простейшая модель эпидемии. С использованием Julia и OpenModelica построены графики изменения численности групп здоровых, больных людей и людей с иммунитетом.

Список литературы

1. АЛЛА ЛОСЕВА М.Н. Моделирование эпидемий: модель SIR. 1-е изд. 2020. 524 с.
2. Жумартова Б. О. Ы.Р.С. ПРИМЕНЕНИЕ SIR МОДЕЛИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭПИДЕМИЙ. 2021.