Algoritmer och datastrukturer

Laborationsuppgift, 1.5hp

DA346G HT13

Jon Wahlström
19901213
b12jonwa@student.his.se

Sebastian Zander
19870318
a12sebza@student.his.se

Institutionen för Information och Kommunikation

Högskolan i Skövde

Innehållsförteckning

Inledning

Laborationens syfte är att få en bredare bekantskap med olika typer av algoritmer och datastrukturer. Bekantskapen ges genom att lösa fem olika typer av problem, implementera dem samt analysera en tidskomplexitet för dem. De fem uppgifter som skall genomföras är:

- Modifierad Bucketsort
- Sociala nätverk
- Komprimering via huffman-kodning
- Tidskomplexitet
- Handelsresandeproblemet

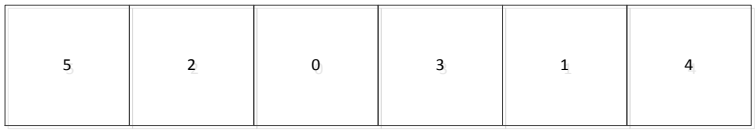
Detta är en praktisk övning för den teori kursen tagit upp där fokus snarare ligger på problemlösningen än implementationen.

1. Modifierad Bucketsort

Problemet som skall lösas är att sortera en given mängd av element med en modifierad ”Bucket sort”-algoritm.

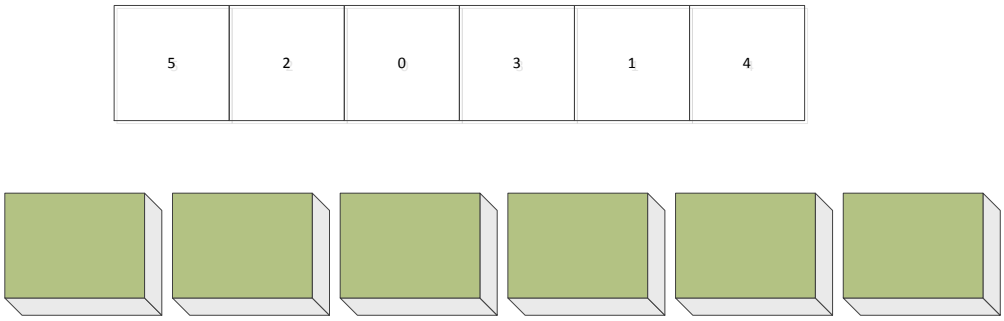
1.1 Intuitiv beskrivning

Denna algoritm bygger på att partitionera en given mängd element i hinkar. Utifrån det placeras sedan värdet från elementet storleksmässigt i hinkarna med minsta värdet först.



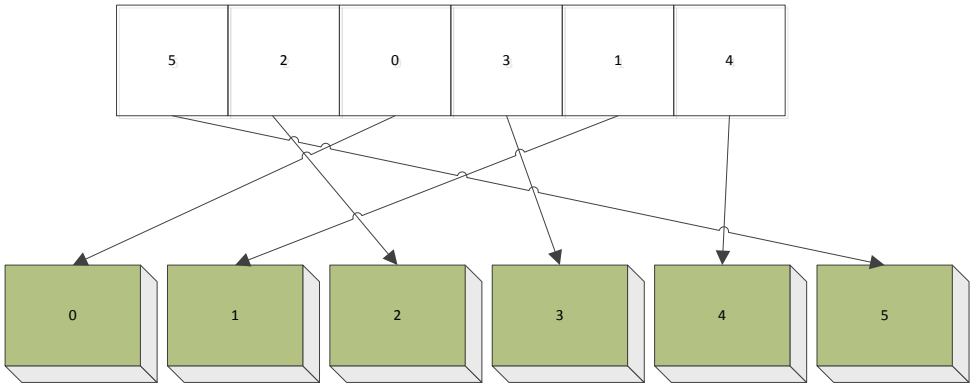
Figur 1: Given array som skall sorteras

Antalet hinkar som skapas beror på det största elementet i den array som skall sorteras. Om det största elementet är *k* i denna array kommer det att skapas *k+1* antal hinkar.



Figur 2: Antalet hinkar som skapas utefter största elementet i array

Efter att hinkarna har skapats initieras dessa först med värdet noll för att sedan iterativt tilldelas ett eller flera elements värden. Dessa mappas direkt mot dess hink vilket ger en sorterad följd som nu kan returneras.



Figur 3: Placering av element i hinkarna, sorterade i storleksordning

1.2 Kod

1.2.1 Pseudokod

```
function bucketSort(List list)
    List buckets
    int k => 0
    foreach element in list
        if element > k
            k => element
        end
    end
    buckets.setSize(k + 1)
    foreach bucket in buckets
        bucket => 0
    end

    foreach element in list
        buckets[element] => buckets[element] + 1
    end

    for i : 0 to buckets.size()
        for 1 to buckets
            print (i)
        end
    end
end
```

1.2.2 C++

<Main.cpp>

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <random>
#include <algorithm>
#include <iomanip>
#include <chrono>

template <class itrType>
void bucketSort(itrType begin, itrType end)
{
    int k = *std::max_element(begin, end);
    std::vector<int> buckets(k + 1, 0);
    for(itrType itr = begin; itr != end; ++itr)
    {
        ++buckets[*itr];
    }
    int val = 0;
    for(auto bucket : buckets)
    {
        for (int i = 0; i < bucket; ++i)
        {
            *begin = val;
            ++begin;
        }
        ++val;
    }
}

int main()
{
    std::mt19937 engine;
    std::uniform_int_distribution<int> distro(0, 127);
    std::vector<int> list(5000000);
    for (auto iter = list.begin(); iter != list.end(); ++iter)
    {
        *iter = distro(engine);
    }

    auto now = std::chrono::system_clock::now();
    bucketSort(list.begin(),list.end());
    auto then = std::chrono::system_clock::now();
    auto diff1 = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(then -
now).count();
    int i = 0;
    for(auto itr : list)
    {
        ++i;
        if (i % 5 == 0)
            std::cout << std::endl;
        std::cout << std::setw(5) << itr;
    }
    std::cout << std::endl;
    std::cout << "Bucket sort took: " << diff1 << " microsecs." << std::endl;
    return 0;
}
```

1.3 Tidskomplexitetsanalys

Genom att analysera algoritmen steg för steg har följande tidskomplexitet framtagits: $T(n) = 3m + 7 + n$. Detta kan skrivas i stora Oh notation som $O(m + n)$, där m är antalet element som skall sorteras och n är antalet hinkar.

```
function bucketSort(List list)
    List buckets                        # 0
    int k => 0                          # 1
    foreach element in list             # m
        if element > k                  # 1
            k => element                # 1
        end
    end

    buckets.setSize(k)                   # 1

    foreach bucket in buckets            # n
        bucket => 0                      # 1
    end

    foreach element in list                          # m
        buckets[element] => buckets[element] + 1     # 1
    end

    for i : 0 to buckets.size()                       # n
        for 1 to buckets                # i * antal element i varje bucket
            print (i)                   # 1
        end
    end
end                              # n * den genomsnittliga
                                element i varje bucket = m
```

I det specifika fallet där m och n får följande värden:

m	25	36	49	64	81	100
n	5	6	7	8	9	10

I det fallet gäller att tidskomplexiteten är $O(n^2)$ eftersom att m alltid är n^2 i tabellen ovan. Eftersom att $m + n$ i så fall är $n^2 + n$ och n^2 är det mest signifikanta gäller att $O(n^2)$.

1.4 Analys

Problemet med denna algoritm är att den inte tar hänsyn till hur indatat är distribuerat. Exempelvis om endast två element skall sorteras där det ena har värdet 1 och det andra har värdet fem miljoner. I det fallet kommer det skapas fem miljoner hinkar för att sortera två element. Ett sätt att lösa detta skulle vara att skapa en hink för varje unikt värde som finns i listan och mappa den hinken till det värdet.

Ett annat problem med just den här varianten är att endast positiva heltal kan sorteras.

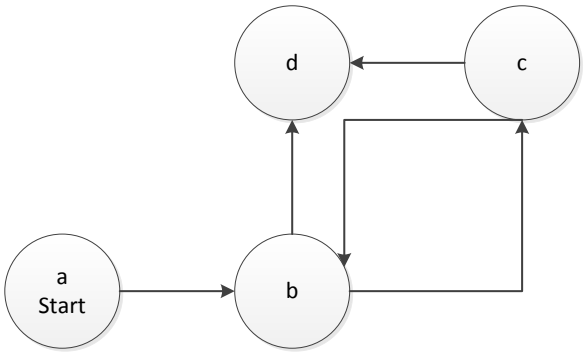
2. Sociala nätverk

Problemet som skall lösas är att utifrån ett nätverk av fiender hitta vänner till en person, utifrån filosofin ”min fiendes fiender är min vän”.

2.1 Intuitiv beskrivning

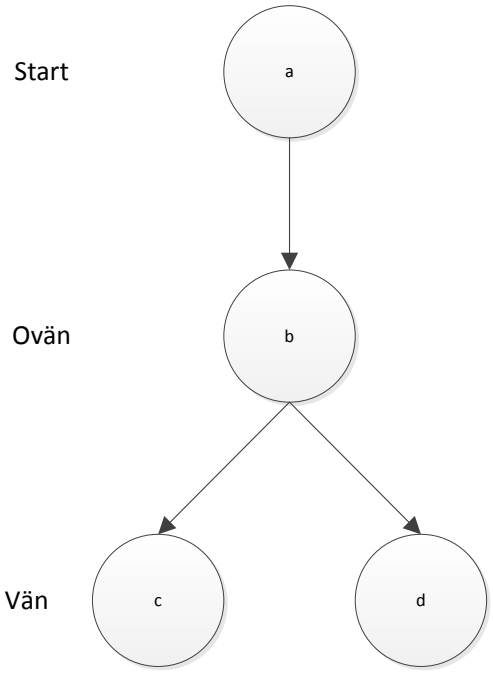
Utifrån en given startnod byggs ett träd upp av noderna i grafen genom att söka igenom grafen med bredden först. Vartannat lager i trädet innehåller noder som är fiender till startnoden och vartannat lager är vänner till startnoden.

Som ett exempel skall vänner till a hittas i nedanstående graf av fiender.



Figur 4: Ett exempel på en fiendegraf.

Det trädet som byggs från ovanstående graf illustreras nedan. Notera att cyklar tas bort och bara den kortaste vägen mellan två noder ges. Lagret precis under roten består av ovänner till a, därefter består vartannat kommande lager av ovänner och alla andra lager av vänner.



Figur 5: Trädet som byggs upp från grafen i Figur 4 ovan.

2.2 Kod

2.2.1 Pseudokod

```
def Node
    List:Node enemies
end

function ListFriends(Node node)
    List current_level
    List next_level
    List friends
    Set visited

    current_level.Add(node)
    visited.Add(node)
    bool enemyIsFriend = false

    while not current_level.IsEmpty()
        foreach child in current_level
            foreach enemy in child.enemies
                if enemy not in visited
                    if enemyIsFriend
                        friends.Add(enemy)
                    end
                else
                    visited.Add(enemy)
                    next_level.Add(enemy)
                end
            end
        end
        enemyIsFriend = not enemyIsFriend
        current_level = next_level
        next_level.clear()
    end
    return friends
end
```

2.2.2 C++

<Relations.h>

```
#pragma once
#include <vector>
#include <memory>
#include <set>
#include <string>

namespace relations
{
    class node : public std::enable_shared_from_this<node>
    {
    private:
        struct detail
        {
            struct this_is_private {};
        };

    public:
        typedef std::shared_ptr<node> ptr_t;
        std::vector<node::ptr_t> list_friends();
        void add_enemy(node::ptr_t);

        static node::ptr_t make(std::string);
        node(std::string, detail::this_is_private&);
        std::string& name();
    private:
        std::string name_;
        std::set<node::ptr_t> enemies_;
    };
}
```

<Relations.cpp>

```
#include "Relations.h"
#include <utility>
#include <deque>

namespace relations
{
    node::ptr_t node::make(std::string name)
    {
        return std::make_shared<node>(std::move(name), detail::this_is_private());
    }

    void node::add_enemy(node::ptr_t n)
    {
        enemies_.insert(n);
    }

    node::node(std::string name, detail::this_is_private&)
    :name_(std::move(name))
    {}
    std::vector<node::ptr_t> node::list_friends()
    {
        std::vector<node::ptr_t> current_level, next_level;
        std::vector<node::ptr_t> friends;
        std::set<node::ptr_t> visited;
        current_level.push_back(shared_from_this());
        visited.insert(shared_from_this());
        bool enemy_is_friend = false;

        while(!current_level.empty())
        {
            for (auto& node : current_level)
            {
                for(auto& enemy : node->enemies_)
                {
                    if (visited.count(enemy) == 0)
                    {
                        if(enemy_is_friend)
                        {
                            friends.push_back(enemy);
                        }
                        visited.insert(enemy);
                        next_level.push_back(enemy);
                    }
                }
            }
            enemy_is_friend = !enemy_is_friend;
            current_level = std::move(next_level);
        }
        return std::move(friends);
    }

    const std::string& node::name()
    {
        return name_;
    }
}
```

<Main.cpp>

```
#include "Relations.h"
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

template <class forward_iterator>
void pretty(forward_iterator begin, forward_iterator end,
        int width, int elem_per_row)
{
    while (begin != end)
    {
        if (std::distance(begin, end) % elem_per_row == 0)
            std::cout << std::endl;
        std::left(std::cout);
        std::cout << std::setw(width)<< (*(begin++))->name();
    }
}

int main()
{
    auto a = relations::node::make("a");
    auto b = relations::node::make("b");
    auto c = relations::node::make("c");
    auto d = relations::node::make("d");

    a->add_enemy(b);
    b->add_enemy(c);
    b->add_enemy(d);
    c->add_enemy(b);
    c->add_enemy(d);

    auto friends = a->list_friends();

    pretty(friends.begin(), friends.end(), 4, 10);

    return 0;
}
```

2.3 Tidskomplexitetsanalys

Analys av algoritmen rad för rad ger följande tidskomplexitet:
$T(n) = 11 + d * c * e * \log m$ vilket kan uttryckas i stora Oh-notation som $O(e * n\ log\ n)$, med en del förkortningar som beskrivet nedan.

```
def Node
    List:Node enemies
end

function ListFriends(Node node)
    List current_level
    List next_level
    List friends
    Set visited;

    current_level.Add(node)                                 1
    visited.Add(node)                                       1
    bool enemyIsFriend = false                              1

    while not current_level.IsEmpty()                       d
        foreach child in current_level                      c
            foreach enemy in child.enemies                  e
                if enemy not in visited                     log m
                    if enemyIsFriend                        1
                        friends.Add(enemy)                  1
                    end
                    visited.Add(enemy)                      1
                    next_level.Add(enemy)                   1
                end
            end
        end
        enemyIsFriend = not enemyIsFriend                   1
        current_level = next_level                          1
        next_level.clear()                                  1
    end
    return friends;                                         1
end
```

d är djupet för trädet av grafen eftersom att trädet söks igenom nivå för nivå. *c* är antalet noder i den nuvarande nivån. Detta betyder att *d*c* är *n*, där *n* är antalet noder. *e* är antalet fiender varje nod har, d.v.s. antalet utåtvertriser. *n*e* kommer då bli det totala antalet vertriser i grafen (*v*). Dessa tre loopar kan därmed ses som en loop vilket beror på antalet vertriser i grafen. En extra variabel i funktionen är *m*, vilket är det totala antalet besökta noder, vilket kommer att gå från 1 till *n* allteftersom algoritmen itererar, alltså kommer m i genomsnitt vara n/2. Tidskomplexiteten beror då på antalet noder i grafen, *n*, samt antalet vertriser i grafen (rättare sagt hur många fiender genomsnittsnoden har, *e*).

2.4 Analys

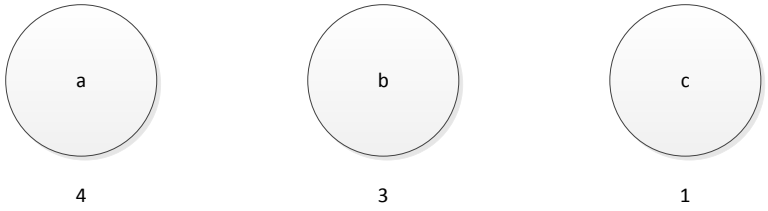
Det kan se ut som att vi har avvikit från uppgiften eftersom vår algoritm inte explicit använder en kö. Specifikt används inte std::queue utan std::vector används istället. Dock används vektorn som om det vore en kö eftersom den iteraras från början till slut samt att nya element läggs till i slutet. Den huvudsakliga poängen är att vi har gjort sökningen med bredden först.

3. Komprimering genom Huffman-kodning

Problemet som skall lösas är att givet en sträng bygga upp en huffman-kodning för strängen. En huffman-kodning är ett frekvenssorterat binärt träd. Detta kan användas för att komprimera och avkomprimera strängen.

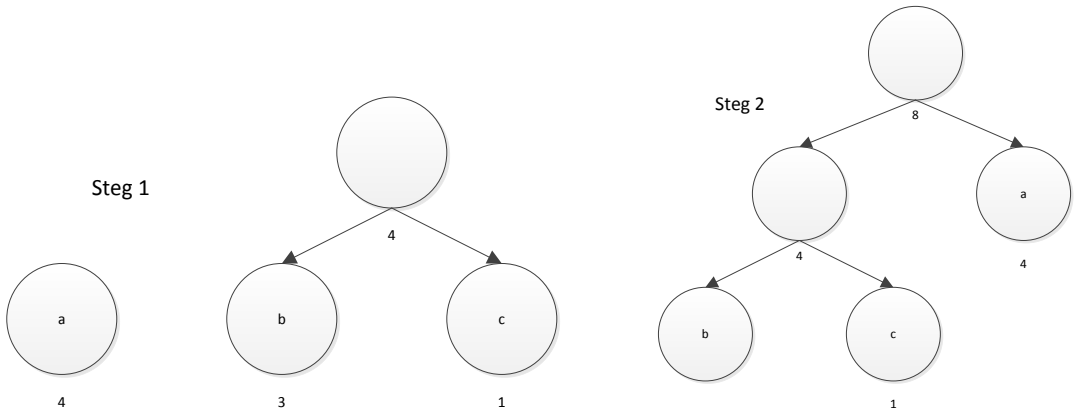
3.1 Intuitiv beskrivning

Som ett exempel används här strängen ”aaaabbbc”. Efter att ha räknat mängden karaktärer av samma typ skapas noder av respektive karaktär tillsammans med antalet av den typen (dess vikt) vilket illustreras nedan. Noderna sorteras i ordning där den nod med högst vikt läggs först.



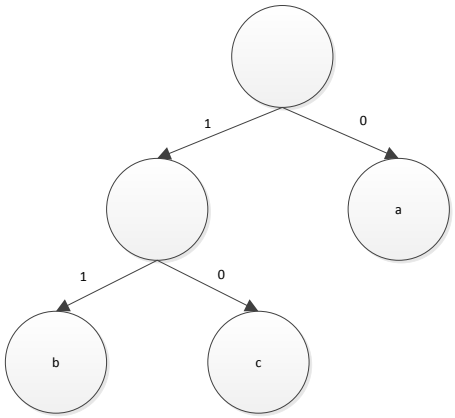
Figur 6: Exempel på noder kopplade till frekvensen av karaktärer i den givna stängen

Trädet byggs genom att kontinuerligt söka upp två noder med lägst vikt. Dessa två noder kopplas därefter ihop till ett subträd där rotnoden får den sammanlagda vikten från de bägge noderna. Roten läggs tillbaka i listan på den platsen att listan fortfarande bevarar en sorterad ordning utefter vikt. Detta illustreras i två steg nedan.



Figur 7: Ett frekvenssorterat träd byggs upp steg för steg.

Varje karaktär kan nu representeras av en binär sträng där en etta signalerar ett steg till vänster och en nolla signalerar ett steg till höger (i trädet). Exempelvis kan karaktären *c* representeras av bitsträngen 10 eftersom att denna nod nås genom att gå till vänster ett steg och sedan till höger ett steg. Hur karaktärerna i detta exempel kan nås illustreras i grafen nedan.



Figur 8: Det slutliga frekvenssorterade trädet.

3.2 Kod

3.2.1 Pseudokod

```
define Tree
    function construct(weight, char)
        this.weight = weight
        this.char = char
        this.left = null
        this.right = null
    end
    function construct(Tree lhs, Tree rhs)
        this.weight = lhs.weight + rhs.weight
        this.char = 0
        this.left = lhs
        this.right = rhs
    end
    function printTree(bitString)
        if this.char != 0
            print(bitString + " : " + this.char)
        end
        if this.right != null
            bitString.push(0)
            this.right.printTree(bitString)
            bitString.pop()
        end
        if this.left != null
            bitString.push(1)
            this.left.printTree(bitString)
            bitString.pop()
        end
    end
end

function encode(string)
    Table charCount
    PriorityQueue treeQ

    foreach char in string
        charCount[char]++
    end
```

```
    foreach char in charCount
        treeQ.pushWithPriority(char.value, new Tree(char.value, char.key))
    end

    while !treeQ.empty
        Tree lhs = treeQ.popAndRead()
        if treeQ.empty
            return lhs
        end

        Tree rhs = treeQ.popAndRead()
        Tree newTree = new Tree(lhs, rhs)
        treeQ.pushWithPriority(newTree.weight, newTree)
    end

end
```

3.2.2 C++

<Tree.h>

```
#pragma once

#include <memory>
#include <string>
#include <map>
#include <vector>
#include <iostream>

class Tree
{
public:
    Tree(int weight, char c);
    Tree(Tree* t1, Tree* t2);

    int getWeight() const;
    void printTree(std::ostream& stream = std::cout) const;
    std::map<char, std::vector<bool>> getEncodings();

    Tree* getLeft() const { return m_Left.get(); };
    Tree* getRight() const { return m_Right.get(); };
    void setLeft(Tree* left)  { m_Left = std::unique_ptr<Tree>(left); };
    void setRight(Tree* right) { m_Right = std::unique_ptr<Tree>(right); };
    char getChar() const { return m_Char; }
    void setChar(char chr) { m_Char = chr; }
private:
    void getEncodings(std::map<char, std::vector<bool>>& val, std::vector<bool>
bitString);
    void printTree(std::string& bitString, std::ostream& stream) const;
    std::unique_ptr<Tree> m_Left;
    std::unique_ptr<Tree> m_Right;
    int m_Weight;
    char m_Char;
}
```

<Tree.cpp>

```
#include "Tree.h"

Tree::Tree(int weight, char c)
    :m_Weight(weight)
    ,m_Char(c)
{}

Tree::Tree(Tree* t1, Tree* t2)
    :m_Weight(!t1 || !t2 ? 0 : t1->m_Weight + t2->m_Weight)
    ,m_Left(!t1 || !t2 ? nullptr : (t1->m_Weight > t2->m_Weight ? t1 : t2))
    ,m_Right(!t1 || !t2 ? nullptr : (t1->m_Weight <= t2->m_Weight ? t1 : t2))
    ,m_Char(0)
{}

int Tree::getWeight() const
{
    return m_Weight;
}

void Tree::printTree(std::ostream& stream) const
{
    std::string bitString;
    printTree(bitString, stream);
}

void Tree::printTree(std::string& bitString, std::ostream& stream) const
{
    if (m_Char != 0)
    {
        stream << bitString << ":" << m_Char << std::endl;
    }
    if (m_Right != nullptr)
    {
        bitString.push_back('0');
        m_Right->printTree(bitString, stream);
        bitString.pop_back();
    }
    if (m_Left != nullptr)
    {
        bitString.push_back('1');
        m_Left->printTree(bitString, stream);
        bitString.pop_back();
    }
}

void Tree::getEncodings(std::map<char, std::vector<bool>>& val, std::vector<bool>
bitString)
{
    if (m_Char != 0)
    {
        val[m_Char] = bitString;
    }
    if (m_Right != nullptr)
    {
        std::vector<bool> bitStringR(bitString);
        bitStringR.push_back(false);
        m_Right->getEncodings(val, bitStringR);
    }
```

```
    if (m_Left != nullptr)
    {
        std::vector<bool> bitStringL(bitString);
        bitStringL.push_back(true);
        m_Left->getEncodings(val, bitStringL);
    }
}

std::map<char, std::vector<bool>> Tree::getEncodings()
{
    std::map<char, std::vector<bool>> encodings;
    std::vector<bool> temp;
    getEncodings(encodings, temp);
    return encodings;
}
```

<Huffman.h>

```
#pragma once

#include "Tree.h"
#include <vector>
#include <string>

class Huffman
{
public:
    /* When creating a huffman, pass in a string of the
    text you want to encode. On construction the object
    will then encode the string */
    Huffman(std::string);

    /* Return the huffman tree of the compression */
    const Tree* const getTree() const;

private:
    void encode(std::string&);

    std::unique_ptr<Tree> m_Tree;
};
```

<Huffman.cpp>

```
#include "Huffman.h"
#include <queue>
#include <map>

Huffman::Huffman(std::string str)
{
    encode(str);
}

const Tree* const Huffman::getTree() const
{
    return m_Tree.get();
}
```

```
void Huffman::encode(std::string& str)
{
    std::array<int, 256U> charCount;
    std::fill(charCount.begin(), charCount.end(), 0);
    m_Tree.reset();

    struct priocomp
    {
        bool operator() (const std::pair<int, Tree*>& lhs,
            const std::pair<int, Tree*>& rhs) const
        {
            return (lhs.first > rhs.first );
        }
    };

    std::priority_queue<std::pair<int, Tree*>,
        std::vector<std::pair<int, Tree*>>, priocomp> treeQ;

    for (auto chr : str)
    {
        charCount[chr]++;
    }

    for (auto count = charCount.begin(); count != charCount.end(); ++count)
    {
        char chr = std::distance(charCount.begin(), count);
        if (*count != 0)
            treeQ.emplace(*count, new Tree(*count, chr));
    }

    while (!treeQ.empty())
    {

        Tree* lhs = treeQ.top().second;
        treeQ.pop();
        if (treeQ.empty())
        {
            m_Tree = std::unique_ptr<Tree>(lhs);
            break;
        }

        Tree* rhs = treeQ.top().second;
        treeQ.pop();
        Tree* newTree = new Tree(lhs, rhs);

        treeQ.emplace(newTree->getWeight(), newTree);
    }
}
```

<Main.cpp>

```
int main()
{
    Huffman huff("aaaabbbc");

    auto tree = huff.getTree();
    tree->printTree();
}
```

3.3 Tidskomplexitetsanalys

Komplexitetet för kodningen analyseras rad för rad enligt följande:

```
function encode(string)
    Table charCount
    PriorityQueue treeQ

    foreach char in string                          n
        charCount[char]++                           log m / 2
    end                                             = n log m / 2

    foreach char in charCount                       m
        treeQ.pushWithPriority(char.value, new Tree(char.value, char.key))
                                                    log m /2
    end                                             = m log m /2

    while !treeQ.empty                              m
        Tree lhs = treeQ.popAndRead()               log m / 2
        if treeQ.empty                              1
            return lhs                              1
        end

        Tree rhs = treeQ.popAndRead()               log m / 2
        Tree newTree = new Tree(lhs, rhs)           1
        treeQ.pushWithPriority(newTree.weight, newTree)         log m / 2
    end                                             = m * 3 * (log m / 2) + 2

end                                     = n (log m / 2) + m (log m / 2) +
                                        m * 3 * log m / 2 + 2
```

n är storleken på strängen som ska kodas, *m* är antalet unika karaktärer i strängen.

Tidskomplexiteten blir då i stora Oh notation $O(n\ log\ m\ +\ m\ log\ m)$.

Utskrivning av Huffman-trädet är O(m). Detta eftersom att antalet noder i ett (perfekt) binärt träd är 2l – 1 där antalet löv-noder är l. Eftersom att antalet löv-noder i Huffmanträdet är detsamma som antalet unika karaktärer i den kodade stängen beror utskrivningen på m. Ett Huffmanträd är dock inte ett perfekt binärt träd (i de flesta fall), men det är balanserat, så antalet noder är aldrig fler än 2m - 1. Utskriften beror direkt på hur många noder som finns i trädet, men det är svårt att veta hur många noder som finns i förhand.

3.4 Analys

En stor vikt för tidskomplexiteten i denna algoritm är prioritetskön. Om strängen från början hade varit sorterad hade komplexiteten varit O(n), men då kräver sorteringen som minst O(n log n) om inte speciella förhållanden föreligger av något skäl. Värt att tänka på är att en effektiv prioriteringskö spelar stor roll för hur lång tid algoritmen tar, av det som implementaren har kontroll över.

4. Tidskomplexitet

Problemet som skall lösas är att jämföra två implementationer av en rekursiv algoritm som skall beräkna tidskomplexiteten T(n). Tidskomplexiteten kan uttryckas som en rekursiv funktion: $T(n) = T(n-1) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n$ där basfallet är $T(1) = 1$. $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ är det minsta heltal som är större än $\frac{n}{2}$.

4.1 Intuitiv beskrivning

En rekursiv beräkning av tidskomplexiteten nedan kan lösas på olika sätt. I denna lösning finns både en trivial lösning som för varje rekursion gör en ny beräkning för uttrycket T(*n*). Det finns även en lösning där metoden dynamisk programmering tillämpas. Detta bygger på att spara ner det senaste beräknade T(*n*) för att undvika att beräkna uttrycket för samma *n* flera gånger. Istället börjar algoritmen med att se om uttrycket för det nuvarande *n* redan har beräknats. Om så är fallet hämtas värdet och algoritmen går vidare till nästa *n*. Annars beräknas uttrycket och sparas undan för senare eventuella likadana beräkningar.

4.2 Kod

4.2.1 Pseudokod

Uppgift 4.1

```
function expr(n)
  if n = 1
    return 1
  else
    return expr(n - 1) + expr(ceil(n/2)) + n
  end
end
```

Uppgift 4.2

```
Table table
table[1] = 1

function expr(n)
    if n not in table
        table[n] = expr(n - 1) + expr(ceil(n/2)) + n
    end
    return table[n]
end
```

4.2.2 C++

<Main.cpp> (Uppgft 4.1)

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cassert>
#include <limits>
#include <chrono>

//---- 4.1
template <class T, class U>
typename std::enable_if<std::numeric_limits<T>::digits >=
std::numeric_limits<U>::digits, T>::type
    ceildiv (T x_, U y_)
{
    typename std::enable_if<std::is_integral<T>::value, T>::type x = x_;
    typename std::enable_if<std::is_integral<U>::value, U>::type y = y_;
    assert(x >= 0 && y > 0);

    if (x == 0)
        return (x + y - 1) / y;
    else
        return 1 + ((x - 1) / y);
}

template <class T, class U>
typename std::enable_if<std::numeric_limits<T>::digits <
std::numeric_limits<U>::digits, U>::type
    ceildiv (T x_, U y_)
{
    typename std::enable_if<std::is_integral<T>::value, T>::type x = x_;
    typename std::enable_if<std::is_integral<U>::value, U>::type y = y_;
    assert(x >= 0 && y > 0);

    if (x == 0)
        return (x + y - 1) / y;
    else
        return 1 + ((x - 1) / y);
}

template <class T>
typename std::enable_if<std::is_integral<T>::value, T>::type
    complexity (T n)
{
    if(n == 1)
        return 1;
    else
        //this is wrong for some values due to floating point imprecision. :(
        return complexity(n-1) + complexity(static_cast<T>(ceildiv(n, 2))) + n;
}

int main()
{
    std::cout << "T(10) = " << complexity(short(10)) << std::endl;
    std::cout << "T(3) = " << complexity(3) << std::endl;
    std::cout << "T(4) = " << complexity(4) << std::endl;

    auto now = std::chrono::system_clock::now();
```

```
    for (int i = 0; i < 10000; ++i)
    {
        complexity(i % 100 + 1);
    }

    auto then = std::chrono::system_clock::now();
    auto diff = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(then -
now).count();

    std::cout << "100000 complexities took: " << diff << std::endl;

    return 0;
}
```

<Complexity_table.h> (uppgift 4.2)

```
#pragma once
#include <type_traits>
#include <map>
#include <cassert>

namespace complexity
{
    namespace detail
    {
        template <class T, class U>
        typename std::enable_if<std::numeric_limits<T>::digits >=
std::numeric_limits<U>::digits, T>::type
            ceildiv (T x_, U y_)
        {
            typename std::enable_if<std::is_integral<T>::value, T>::type x = x_;
            typename std::enable_if<std::is_integral<U>::value, U>::type y = y_;
            assert(x >= 0 && y > 0);

            if (x == 0)
                return (x + y - 1) / y;
            else
                return 1 + ((x - 1) / y);
        }

        template <class T, class U>
        typename std::enable_if<std::numeric_limits<T>::digits <
std::numeric_limits<U>::digits, U>::type
            ceildiv (T x_, U y_)
        {
            typename std::enable_if<std::is_integral<T>::value, T>::type x = x_;
            typename std::enable_if<std::is_integral<U>::value, U>::type y = y_;
            assert(x >= 0 && y > 0);

            if (x == 0)
                return (x + y - 1) / y;
            else
                return 1 + ((x - 1) / y);
        }

        template <class T>
        typename std::enable_if<std::is_integral<T>::value, T>::type
            complexity (T n)
        {
            if(n == 1)
```

```
                return 1;
            else
                return complexity(n-1) + complexity(static_cast<T>(ceildiv(n, 2)))
+ n;
        }
    }

    template<class T, class Enable = void>
    class complexity_table; // undefined

    template <class T>
    class complexity_table<T, typename
std::enable_if<std::is_integral<T>::value>::type>
    {
    public:
        T complexity(T);
        inline T operator()(T);
    private:
        std::map<T, T> m_Table;
    };

    template <class T>
    T complexity_table<T, typename
std::enable_if<std::is_integral<T>::value>::type>::operator()(T n)
    {
        return complexity(n);
    }

    template <class T>
    T complexity_table<T, typename
std::enable_if<std::is_integral<T>::value>::type>::complexity(T n)
    {
        auto find = m_Table.find(n);
        if (find == m_Table.end())
        {
            T val = detail::complexity(n);
            m_Table.insert(std::make_pair(n, val));
            return val;
        }
        else
            return find->second;
    }
}
```

<Main.cpp> (uppgift 4.2)

```
#include <iostream>
#include "complexity_table.h"
#include <chrono>

int main()
{
    complexity::complexity_table<int> complexity;
    std::cout << "T(10) = " << complexity(short(10)) << std::endl;
    std::cout << "T(3) = " << complexity(3) << std::endl;
    std::cout << "T(4) = " << complexity(4) << std::endl;
    auto now = std::chrono::system_clock::now();
```

```
    for (int i = 0; i < 10000; ++i)
    {
        complexity(i % 100 + 1);
    }
    auto then = std::chrono::system_clock::now();
    auto diff = std::chrono::duration_cast<std::chrono::microseconds>(then -
now).count();
    std::cout << "100000 complexities took: " << diff << std::endl;

    return 0;
}
```

4.3 Tidskomplexitetsanalys

```
Table table
table[1] = 1

function expr(n)
    if n not in table
        table[n] = expr(n - 1) + expr(ceil(n/2)) + n
    end
    return table[n]
end
```

Eftersom att T(*n*) bara räknas ut en gång för varje unikt värde av *n* kommer rekursionen bara ske *n* gånger. T(*n – 1*) respektive $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ i uttrycket kommer att räknas ut sammanlagt *n* gånger under en rekursion. Detta eftersom att för några av T(*n - 1*) kommer $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ redan ha beräknat. I de fall T(*n*) redan har räknats ut kommer komplexiteten för att slå upp värdet i tabellen vara *log n*, förutsatt att tabellen är implementerat som ett binärt sökträd.

Tidskomplexiteten för denna algoritm kan i stora Oh-notation alltså skrivas som O(n log n).

4.4 Analys

Den första lösningen räknar ut vissa värden för T(*n*) flera gånger, specifikt för de *n* som fås av $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ för det specifika förstavärdet på *n*, vilket även gäller rekursivt. Eftersom att T(*n*) i sig är rekursiv är det extra kostsamt att räkna ut dessa flera gånger. Att då spara undan redan uträknade värden i en tabell sparar beräkningar.

För att exemplifiera det kan T(5) användas. I det fallet kommer T(n – 1) att räknas ut i ordningen:

T(4), T(3), T(2).

$T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ kommer att räknas ut i följande ordning:

T(3), T(2).

Om algoritmen löses dynamiskt kommer beräkningarna T(3) och T(2) bara att räknas ut en gång istället för två gånger, alltså sparas två beräkningar. T(n – 1)-delen kommer i så fall att använda resultatet av T(3) och T(2) från tidigare beräkning från $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$-beräkning.

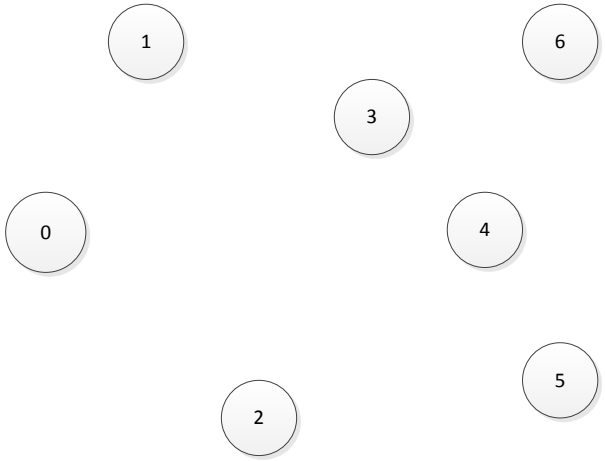
Vi har löst problemet top- down, dvs. ett värde för T(*n*) räknas inte ut förrän det behövs. Eftersom att T(*n - 1*) ingår i den rekursiva funktionen vet vi att alla $T(k)$ $(för\ alla\ k \leq n)$ kommer att räknas ut hade det gått lika bra att gör det bottom-up, Top-down passar bättre för algoritmer där inte alla utfall behöver räknas ut, eller om det inte går att veta vilka utfall som räknas ut från början.

5. Handelsresandeproblemet

Handelsresandeproblemet går ut på att hitta den kortaste vägen genom alla noder i en viktad graf, utan att passera samma nod mer än en gång. Detta kallas en Hamiltonväg.

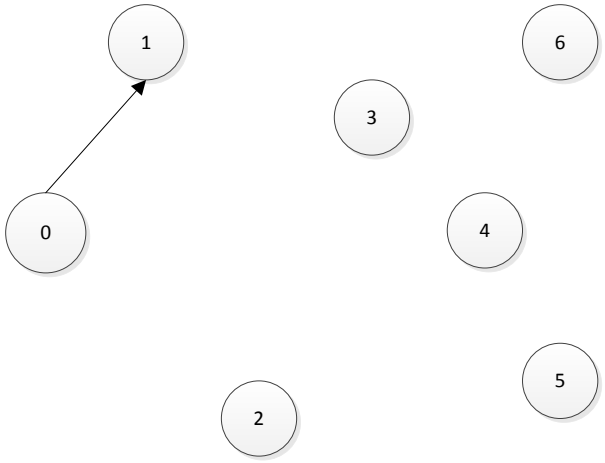
5.1 Intuitiv beskrivning

Den enklaste algoritmen är ”Nearest Neighbour”, vilken är en girig algoritm. Algoritmen väljer ut en nod som startpunkt, och går sedan till den granne som är närmast (vars kant har lägst vikt) och gör detta succesivt med den grannen som ny nod, tills alla noder har besökts. Utifrån detta skapas en väg; för att vägen sen ska bli en full cykel kopplas startnoden och slutnoden ihop. Eftersom att olika val av startnod ger olika totallängd för vägen används här alla noder i grafen som startnod i olika iterationer. På så sätt ges lika många olika vägar som det finns noder, och den kortaste vägen av dessa väljs ut.



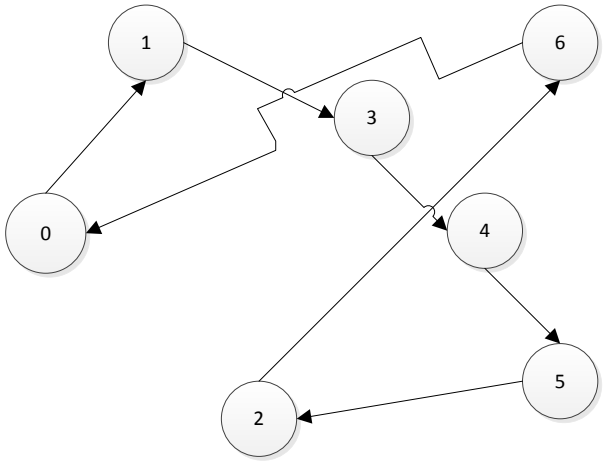
Figur 9: Noder i grafen

Grafen bildas av noderna ovan genom att koppla en kant mellan varje nod där vikten är det kartesiska avståndet mellan noderna. Låt säga att utgångsnoden är nod 0 i ovanstående graf. Algoritmen kommer söka igenom alla andra noder och räkna ut att den närmaste noden är nod 1.



Figur 10: Vägen från startnod till dess närmsta granne

Detta fortsätter och algoritmen kommer att hitta den närmaste grannen till nod 1, vilket är nod 3. Sedan kommer den fortsätta till nod 4, nod 5, nod 2 till nod 6 för att till sist återgå till startnoden.



Figur 11: Slutgiltig Hamiltonväg genom grafen.

Det går tydligt att se att detta inte är den kortaste Hamiltonvägen i grafen. Algoritmen kan inte hitta en kortare väg med utgångspunkt från nod 0. Däremot är det som sagt möjligt att testa algoritmen med samtliga noder som startnod för att eventuellt hitta en kortare väg. Dock finns det ingen garanti att hitta den kortaste Hamiltonvägen i grafen trots detta.

5.2 Kod

5.2.1 Pseudokod

```
function NearestNeighbour(Graph graph)
    var total_weight = #INF
    Path ret

    foreach node in graph
        Set unvisited = graph.get_nodes
        var current_total_travelling_cost = 0
        var lowest_total_travelling_cost = #INF
        Path path
        var start_node = node;
        var current_node = start_node;
        Edge next_edge(0, 0)
        unvisited.remove(current_node)

        while unvisited is not empty ->
            var lowest_travelling_cost = #INF
            Edge current_edge(current_node, 0)
            Set neighbours = graph.get_neighbours(current_node)

            foreach neighbour of current_node in unvisited
                current_edge.end_node = neighbour;

                if travelling_cost from current_node to neighbour <
lowest_travelling_cost
                    next_edge = current_edge
                    lowest_travelling_cost = cost to neighbour
                end
```

```
            end
            current_total_travelling_cost += lowest_travelling_cost
            current_node = next_edge.end_node
            path.push(next_edge)
            unvisited.remove(current_node)
        end
        Edge join_path(path.last.end_node, path.first.start_node
        path.push(join_path)
        current_total_travelling_cost += join_path.travelling_cost

        if current_total_travelling_cost < lowest_total_travelling_cost
            lowest_total_travelling_cost = current_total_travelling_cost
            ret = path
        end
    end
    return ret
end
```

5.2.2 C++

<Edge.h>

```
#pragma once
#include <algorithm>

namespace tsp
{
    class Edge
    {
    public:
        Edge(int start_node, int end_node)
            :m_start_node(start_node)
            ,m_end_node(end_node)
        {}

        void set_start_node(int start) { m_start_node = start; }
        void set_end_node(int end)       { m_end_node = end; }
        int get_start_node() const       { return m_start_node; }
        int get_end_node() const       { return m_end_node; }

        void balance()
        {
            int old_start_node = m_start_node;
            m_start_node = std::min(old_start_node, m_end_node);
            m_end_node = std::max(old_start_node, m_end_node);
        }

        inline friend bool operator<(const Edge& lhs, const Edge& rhs)
        {
            return (lhs.m_start_node < rhs.m_start_node) || (!(rhs.m_start_node <
lhs.m_start_node)) && lhs.m_end_node < rhs.m_end_node;
        }

    private:
        int m_start_node;
        int m_end_node;
    };
}
```

<Graph.h>

```
#pragma once

#include <set>
#include <map>
#include <exception>
#include <utility>
#include "Region.h"
#include "Edge.h"

namespace tsp
{
    struct Path
    {
    public:
        void push(Edge edge) { m_path.push_back(edge); }
        std::vector<Edge> get_path() const { return m_path; }
    private:
        std::vector<Edge> m_path;

    };

    template <class T>
    class Graph
    {
    public:
        Graph() {}
        Graph(tsp::Region<T>& region);

        void set(Edge edge, T weight);
        T get_weight(Edge edge) const;
        std::set<int> get_neighbours(int) const;
        std::set<int> get_nodes() const;
        std::map<Edge, T> get_graph() const;

    private:
        std::map<Edge, T> m_map;
    };

    template <class T>
    Graph<T>::Graph(tsp::Region<T>& region)
    {
        for(int i = 0; i < region.size() - 1; ++i)
        {
            for(int j = i + 1; j < region.size(); ++j)
            {
                set(Edge(i, j), region.distance(region[i], region[j]));
            }
        }
    }
```

```
    template <class T>
    void Graph<T>::set(Edge edge, T weight)
    {
        edge.balance();
        m_map[edge] = weight;
    }

    template <class T>
    T Graph<T>::get_weight(Edge edge) const
    {
        edge.balance();
        auto find = m_map.find(edge);
        if(find == m_map.end())
            throw std::out_of_range("Edge not found");

        return find->second;
    }

    template <class T>
    std::set<int> Graph<T>::get_neighbours(int node) const
    {
        std::set<int> ret;

        for(auto itr : m_map)
        {
            if(itr.first.get_start_node() == node)
                ret.insert(itr.first.get_end_node());
            if(itr.first.get_end_node() == node)
                ret.insert(itr.first.get_start_node());
        }

        return ret;
    }

    template <class T>
    std::set<int> Graph<T>::get_nodes() const
    {
        std::set<int> ret;
        for(auto node : m_map)
        {
            ret.insert(node.first.get_start_node());
            ret.insert(node.first.get_end_node());
        }

        return ret;
    }

    template <class T>
    std::map<Edge, T> Graph<T>::get_graph() const
    {
        return m_map;
    }
}
```

<Region.h>

```
#pragma once
#include <vector>
#include <cmath>

namespace tsp
{
    template <class T>
    class Region
    {
    public:
        void add_city(T x, T y);
        T distance(std::pair<T, T> c0, std::pair<T, T> c1) const;
        int size() { return static_cast<int>(m_city_coords.size()); }
        std::pair<T, T> operator[](int index) { return m_city_coords[index]; }

    private:
        std::vector<std::pair<T, T>> m_city_coords;
    };

    template <class T>
    void Region<T>::add_city(T x, T y)
    {
        m_city_coords.push_back(std::make_pair(x, y));
    }

    template <class T>
    T Region<T>::distance(std::pair<T, T> c0, std::pair<T, T> c1) const
    {
        T x = c0.first - c1.first;
        T y = c0.second - c1.second;
        T ret = std::sqrt(x * x + y * y);
        return std::sqrt(x * x + y * y);
    }
};
```

<NearestNeighbour.h>

```
#pragma once

#include "Graph.h"
#include <vector>
#include <numeric>

namespace tsp
{
    namespace algorithm
    {
        template <class T>
        tsp::Path NearestNeighbour(Graph<T> graph)
        {
            std::set<int> nodes = graph.get_nodes();
            T total_weight = std::numeric_limits<T>::max();
            tsp::Path ret;

            for(auto count : nodes)
            {
                T current_total_weight = 0;
                tsp::Path path;
                std::set<int> unvisited;
```

```
                int start_node = count;
                int current_node = start_node;

                for(auto node : nodes)
                {
                    unvisited.insert(node);
                }

                tsp::Edge next_edge(0, 0);
                unvisited.erase(current_node);

                while(!unvisited.empty())
                {
                    T min_weight = std::numeric_limits<T>::max();
                    tsp::Edge current_edge(current_node, 0);
                    std::set<int> neighbours = graph.get_neighbours(current_node);

                    for(auto neighbour : neighbours)
                    {
                        if(unvisited.count(neighbour) == 0)
                            continue;

                        current_edge.set_end_node(neighbour);

                        if(graph.get_weight(current_edge) < min_weight)
                        {
                            next_edge = current_edge;
                            min_weight = graph.get_weight(current_edge);
                        }
                    }

                    current_total_weight += min_weight;
                    current_node = next_edge.get_end_node();
                    path.push(next_edge);
                    unvisited.erase(current_node);
                }
                path.push(Edge(path.get_path().back().get_end_node(),
path.get_path().front().get_start_node()));
                current_total_weight += graph.get_weight(path.get_path().back());

                if(current_total_weight < total_weight)
                {
                    total_weight = current_total_weight;
                    ret = path;
                }
            }
            return ret;
        }
    }
}
```

<Main.cpp>

```
#include "Graph.h"
#include "NearestNeighbour.h"
#include <iostream>

int main()
{
    tsp::Region<float> region;

    region.add_city(15, 30);
    region.add_city(43, 18);
    region.add_city(95, 80);
    region.add_city(15, 65);
    region.add_city(0, 60);
    region.add_city(47, 55);
    region.add_city(32, 27);


    tsp::Graph<float> graph(region);

    auto path = tsp::algorithm::NearestNeighbour(graph);
    float total_weight = 0;
    for(auto edge : path.get_path())
    {
        total_weight += graph.get_weight(edge);
        std::cout << edge.get_start_node() << " -> " << edge.get_end_node() << "
(" << graph.get_weight(edge) << ")" << std::endl;
    }

    std::cout << "Total weight: " << total_weight << std::endl;

    return 0;
}
```

5.3 Tidskomplexitetsanalys

Tidskomplexiteten för algoritmen uttryckt i stora Oh-notation är $O(n^3)$. För varje nod hittar algoritmen den närmaste grannen (n). Detta görs för varje nod i grafen till en komplett väg har hittats (n). Detta i sin tur görs för varje nod i grafen som startnod (n).

För varje kontroll att hitta den nuvarande nodens grannar måste algoritmen hålla koll på vilka av grannarna som inte redan ingår i vägen. Detta kan göras linjärt, med exempelvis ett hash-set, så det påverkar inte tidskomplexiteten.

5.4 Analys

Att kontrollera vilka noder som redan ingår i vägen kan göras på olika sätt där det bästa vore om det kan göras linjärt. En linjär lösning kan göras exempelvis med hjälp av ett set implementerat med en hash-tabell eller genom att markera noder som besökts.

Den mest naiva *nearest neighbour* har tidskomplexiteten n^2. Vår lösning får istället n^3 eftersom att varje nod i grafen testas som startnod. Detta kommer att öka tiden för uträkningen dramatiskt (dock blir det fortfarande mindre än mer exakta lösningar) men algoritmen kommer hitta den kortaste vägen som går att hitta via *nearest neighbour*. Detta har båda för- och nackdelar, vi ansåg att fördelarna vägde upp nackdelarna i det här fallet. En av

de stora nackdelarna är i det fallet då algoritmens kortaste möjliga väg hittas redan under den första iterationen av noder som startnod. Detta kommer att leda till en stor mängd onödiga beräkningar, men samtidigt går detta inte att veta om och när detta kommer att ske. Det är helt enkelt övervägning mellan effektivitet och exakthet.

Oavsett hur en sådan girig algoritm implementeras kommer den aldrig med säkerhet hitta den absolut kortaste vägen. Till och med är det så att för varje antal städer finns det en graf där algoritmen ger den sämsta möjliga vägen, vilket är ett stort problem för algoritmen.

Det finns väldigt många sätt att representera en graf som kan användas för den här algoritmen. Vi har valt att använda en key-value representation, med en uppslagningstabell som mappar ett par av noder till en längd. Denna representation är i grunden asymmetriskt, men vi har gjort den symmetrisk genom att alltid sätta den lägsta noden (om noder representeras av ett heltal) som det högra elementet i paret, i C++-koden. Det beror på domänen om grafen bör vara symmetrisk eller inte. Key-value passar bäst om grafen inte är tät, med andra ord om det finns få kopplingar mellan noder. Detta är inte nödvändigtvis fallet för problemet (det beror på domänen).

En annan representation är genom en grannmatris, där varje element i matrisen representerar vikten mellan noden i elementets kolon och noden i elementets rad. En sådan representation passar bäst om grafen är tät, dessutom är representationen också cache-vänlig. Om grafen inte är tät och det finns väldigt många noder kräver matrisen väldigt mycket onödigt minne (n^2). En key-value representation kräver dock generellt sett mer minne om grafen är extremt tät än en matris-representation, men minnet som behövs beror på antalet kopplingar istället för antalet noder.

En otät graf kan representeras som en matris utan att ta upp onödigt minne om en icke-naiv implementation används.

Representation av grafen påverkar till stor del hur mycket minne algoritmen kommer att använda. Snabbheten påverkas också av representationen, dels genomsökningen och hur element i grafen hittas, men även cachen kan spela en roll vilket kan vara viktigt.

Problemet kan parallelliseras, genom att exempelvis köra algoritmen för varje nod som startnod i separata trådar och därefter jämföra resultatet från varje tråd. Detta ökar snabbheten för sökningen.