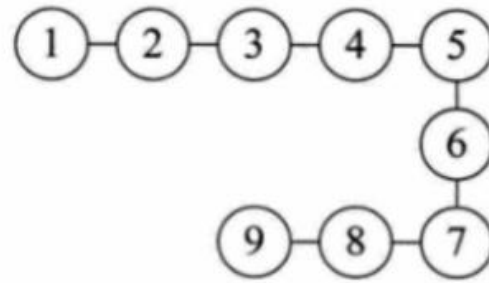
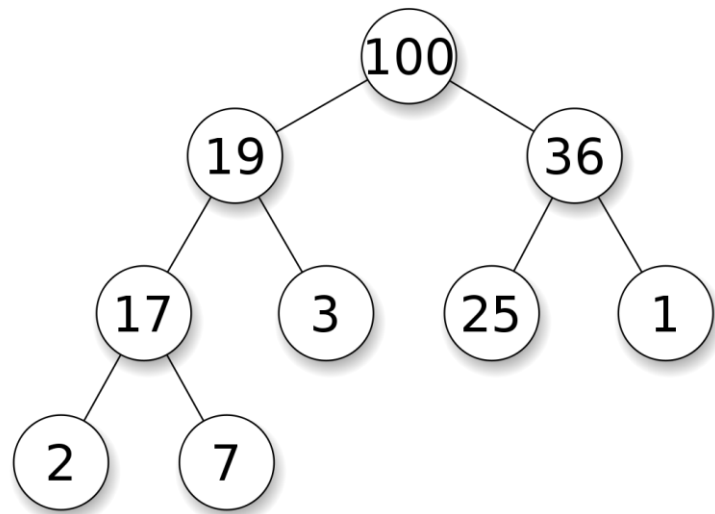


二叉树

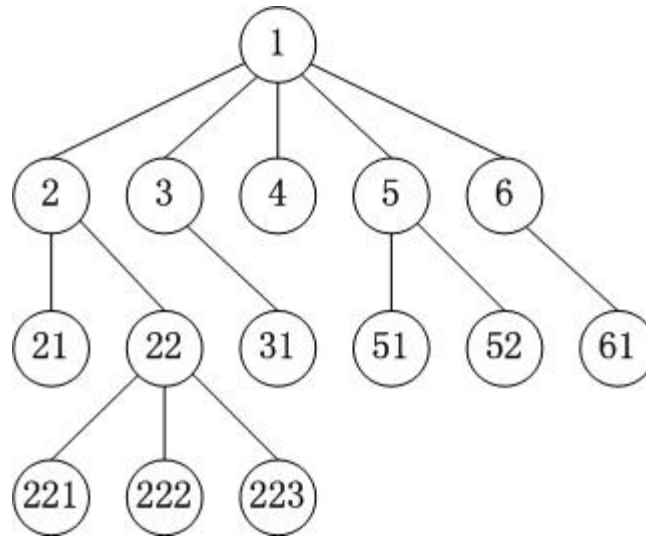
树形结构



线性结构



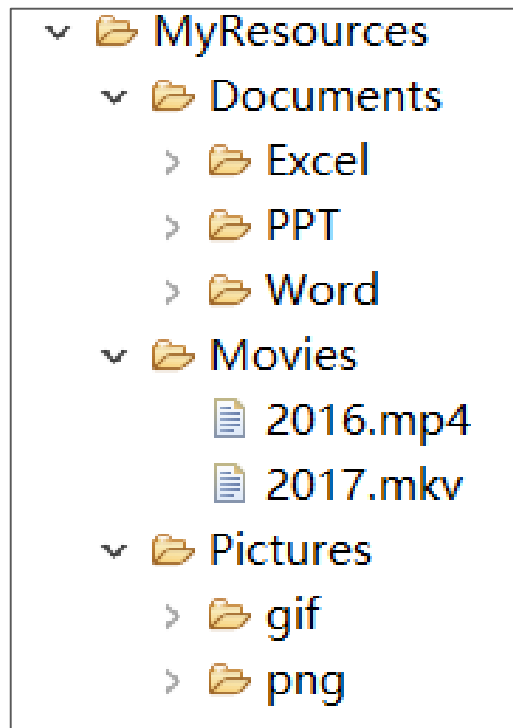
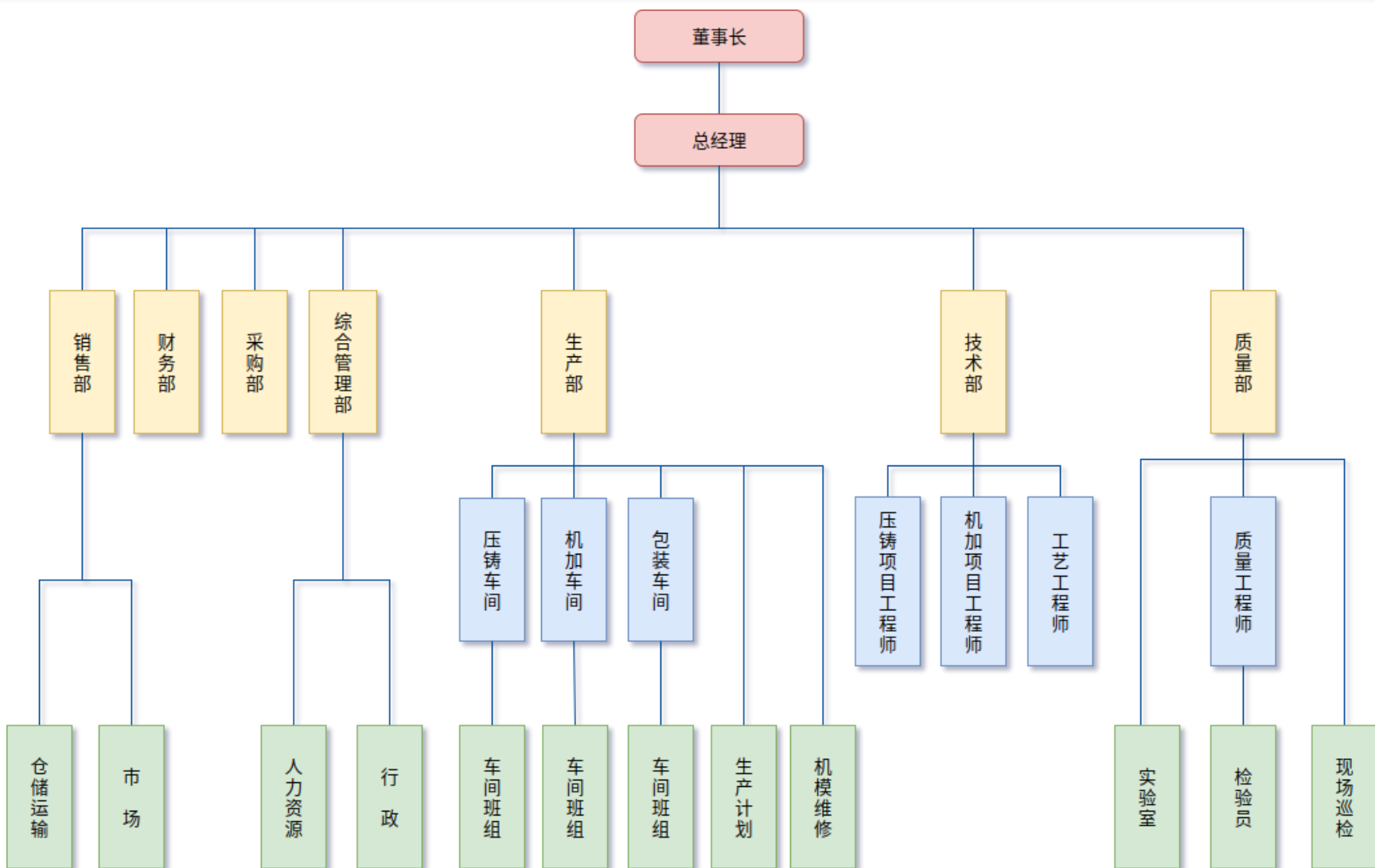
二叉树



多叉树



生活中的树形结构

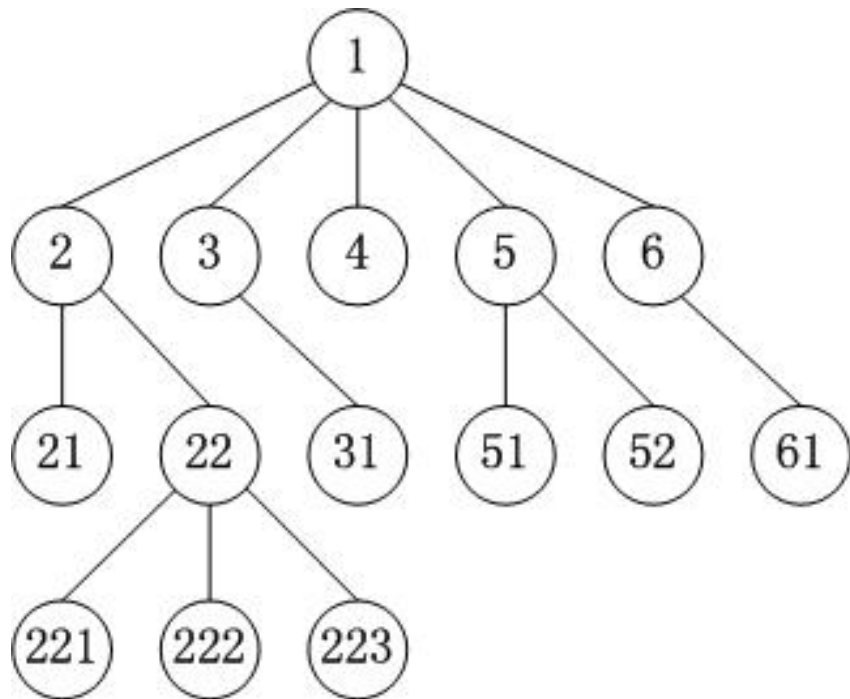


- 使用树形结构可以大大提高效率
- 树形结构是算法面试的重点

树 (Tree) 的基本概念

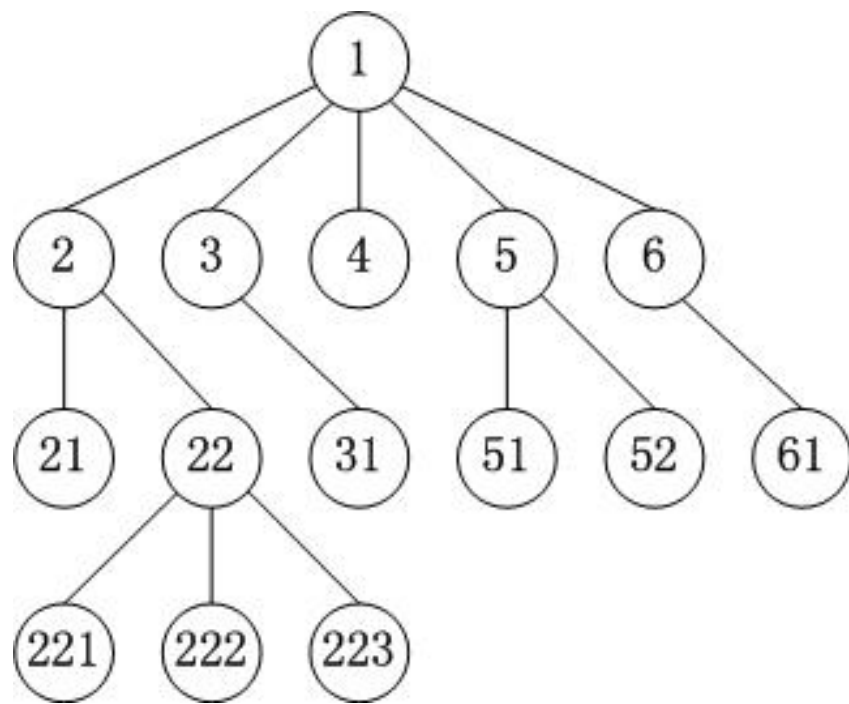
- 节点、根节点、父节点、子节点、兄弟节点
- 一棵树可以没有任何节点，称为空树
- 一棵树可以只有 1 个节点，也就是只有根节点
- 子树、左子树、右子树

- 节点的度 (degree)：子树的个数
- 树的度：所有节点度中的最大值
- 叶子节点 (leaf)：度为 0 的节点
- 非叶子节点：度不为 0 的节点



树 (Tree) 的基本概念

- **层数** (level) : 根节点在第 1 层, 根节点的子节点在第 2 层, 以此类推 (有些教程也从第 0 层开始计算)
- 节点的**深度** (depth) : 从根节点到当前节点的唯一路径上的节点总数
- 节点的**高度** (height) : 从当前节点到最远叶子节点的路径上的节点总数
- 树的**深度**: 所有节点深度中的最大值
- 树的**高度**: 所有节点高度中的最大值
- 树的**深度** 等于 树的**高度**



有序树、无序树、森林

■ 有序树

□ 树中任意节点的子节点之间有顺序关系

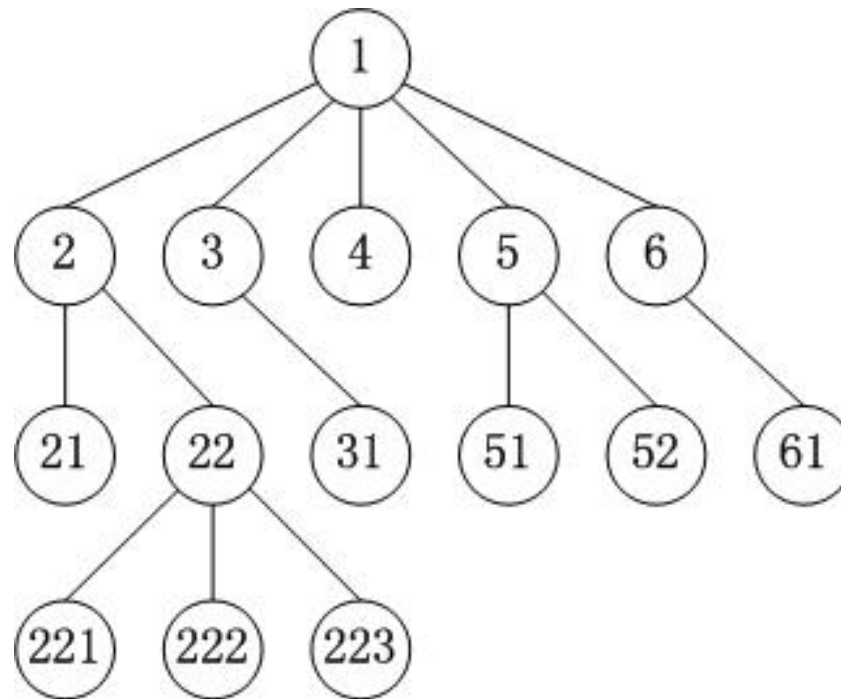
■ 无序树

□ 树中任意节点的子节点之间没有顺序关系

□ 也称为“自由树”

■ 森林

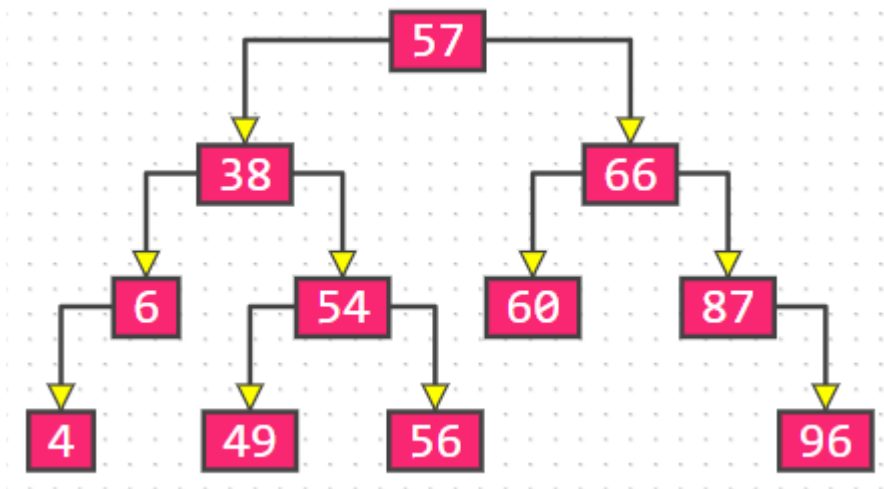
□ 由 m ($m \geq 0$) 棵互不相交的树组成的集合



二叉树 (Binary Tree)

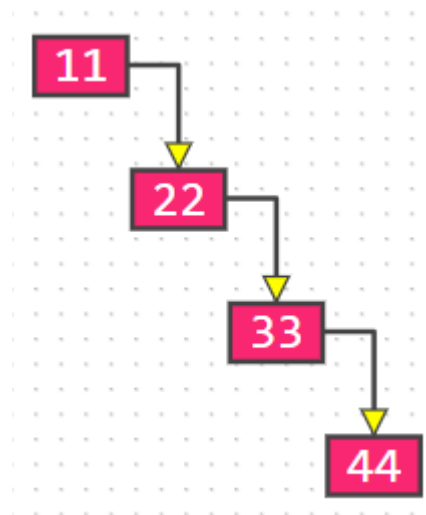
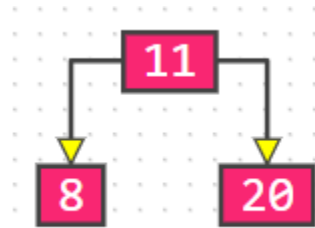
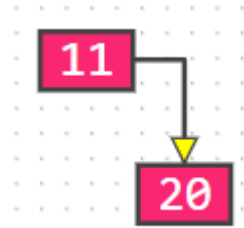
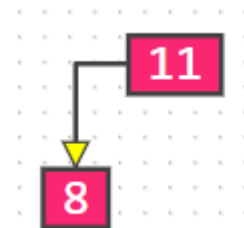
■ 二叉树的特点

- 每个节点的度最大为 2 (最多拥有 2 棵子树)
- 左子树和右子树是有顺序的
- 即使某节点只有一棵子树，也要区分左右子树



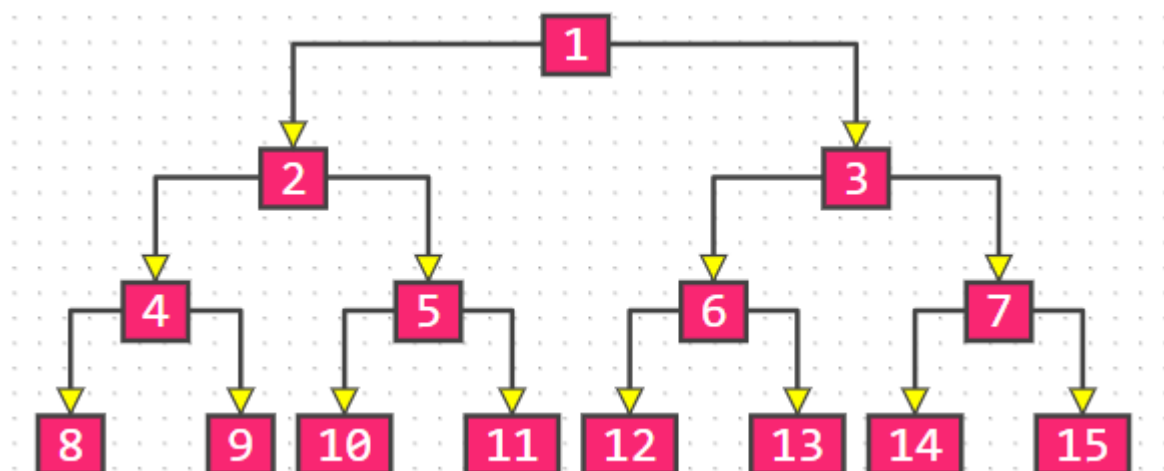
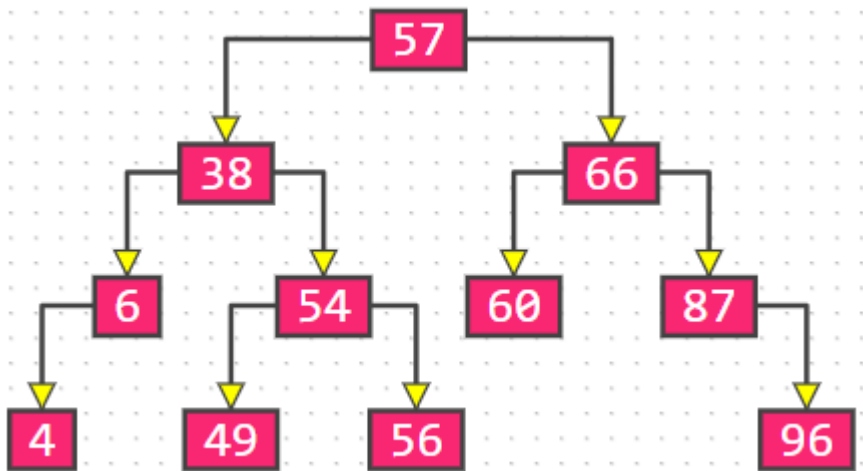
■ 二叉树是有序树 还是 无序树?

- 有序树



二叉树的性质

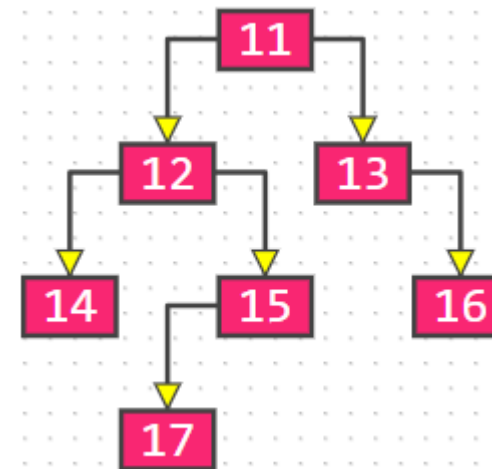
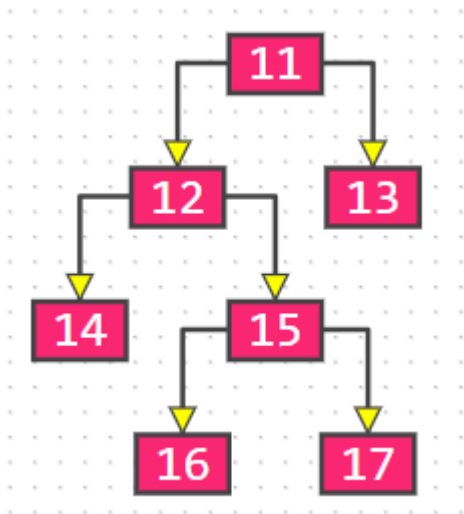
- 非空二叉树的第 i 层，最多有 2^{i-1} 个节点 ($i \geq 1$)
- 在高度为 h 的二叉树上最多有 $2^h - 1$ 个结点 ($h \geq 1$)
- 对于任何一棵非空二叉树，如果叶子节点个数为 n_0 ，度为 2 的节点个数为 n_2 ，则有: $n_0 = n_2 + 1$
- 假设度为 1 的节点个数为 n_1 ，那么二叉树的节点总数 $n = n_0 + n_1 + n_2$
- 二叉树的边数 $T = n_1 + 2 * n_2 = n - 1 = n_0 + n_1 + n_2 - 1$
- 因此 $n_0 = n_2 + 1$



真二叉树 (Proper Binary Tree)

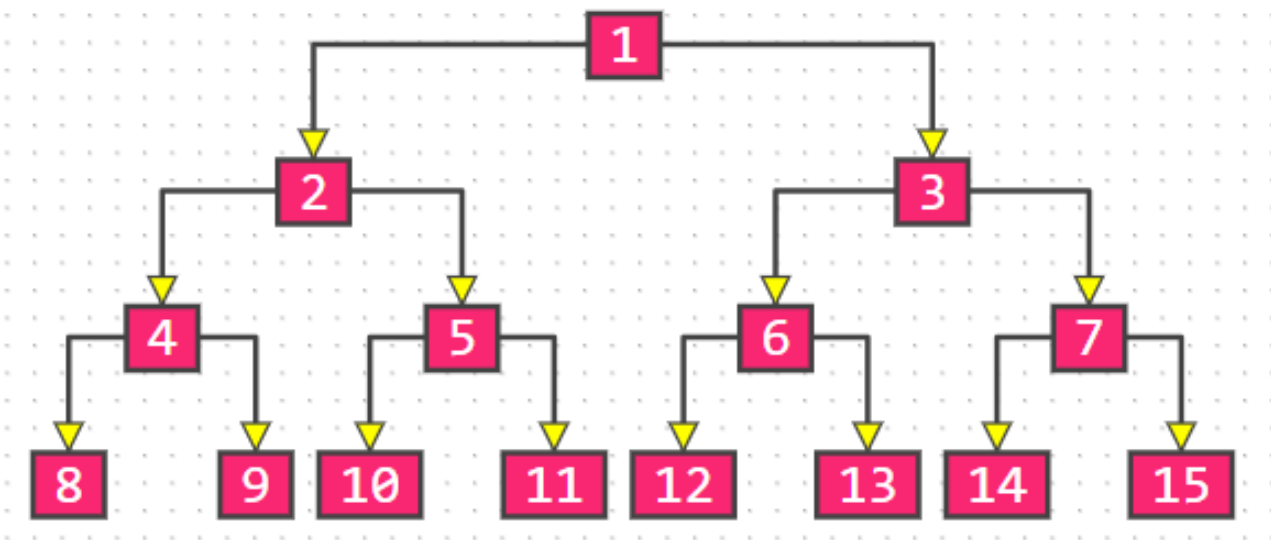
■ 真二叉树：所有节点的度都要么为 0，要么为 2

■ 下图不是真二叉树



满二叉树 (Full Binary Tree)

■ 满二叉树：最后一层节点的度都为 0，其他节点的度都为 2



■ 假设满二叉树的高度为 h ($h \geq 1$)，那么

□ 第 i 层的节点数量： 2^{i-1}

□ 叶子节点数量： 2^{h-1}

□ 总节点数量 n

✓ $n = 2^h - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{h-1}$

✓ $h = \log_2(n + 1)$

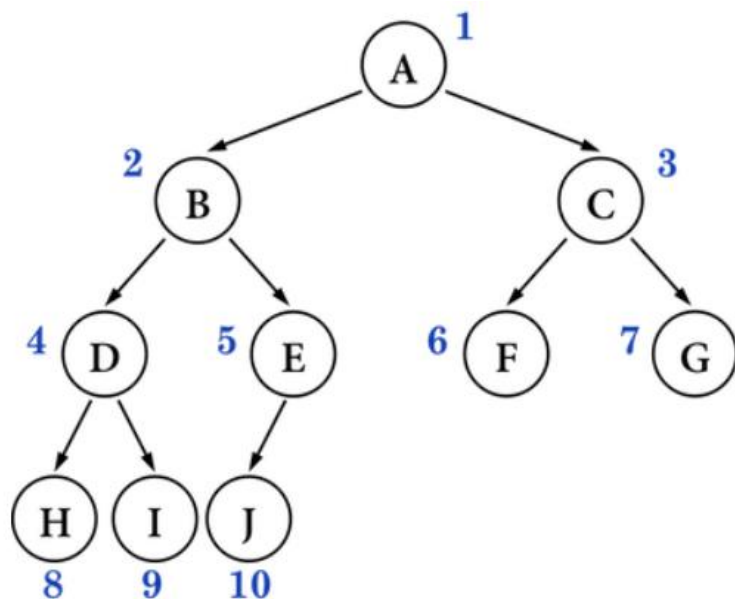
■ 在同样高度的二叉树中，满二叉树的叶子节点数量最多、总节点数量最多

■ 满二叉树一定是真二叉树，真二叉树不一定是满二叉树

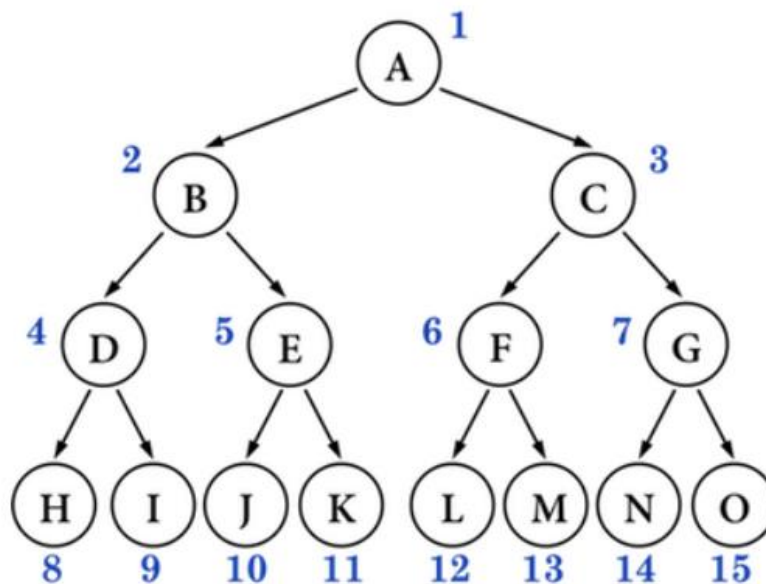
完全二叉树 (Complete Binary Tree)

■ **完全二叉树**：对节点从上至下、左至右开始编号，其所有编号都能与相同高度的满二叉树中的编号对应

完全二叉树



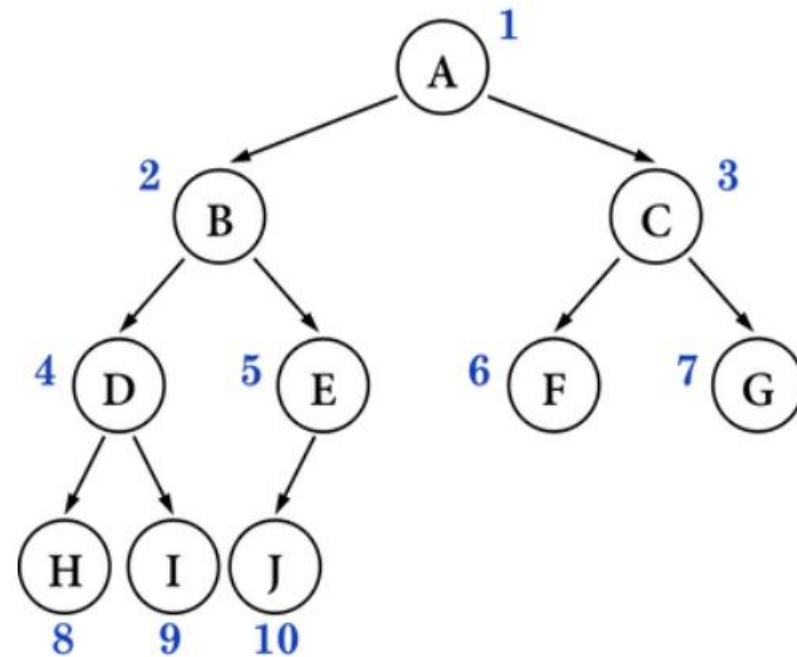
满二叉树



- 叶子节点只会出现最后 2 层，最后 1 层的叶子节点都靠左对齐
- 完全二叉树从根结点至倒数第 2 层是一棵满二叉树
- 满二叉树一定是完全二叉树，完全二叉树不一定是满二叉树

完全二叉树的性质

- 度为 1 的节点只有左子树
- 度为 1 的节点要么是 1 个，要么是 0 个
- 同样节点数量的二叉树，完全二叉树的高度最小
- 假设完全二叉树的高度为 h ($h \geq 1$)，那么
 - 至少有 2^{h-1} 个节点 ($2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{h-2} + 1$)
 - 最多有 $2^h - 1$ 个节点 ($2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{h-1}$, 满二叉树)
 - 总节点数量为 n
 - ✓ $2^{h-1} \leq n < 2^h$
 - ✓ $h - 1 \leq \log_2 n < h$
 - ✓ $h = \text{floor}(\log_2 n) + 1$
- floor 是向下取整，另外，ceiling 是向上取整



完全二叉树

完全二叉树的性质

■ 一棵有 n 个节点的完全二叉树 ($n > 0$)，从上到下、从左到右对节点从 1 开始进行编号，对任意第 i 个节点

□ 如果 $i = 1$ ，它是根节点

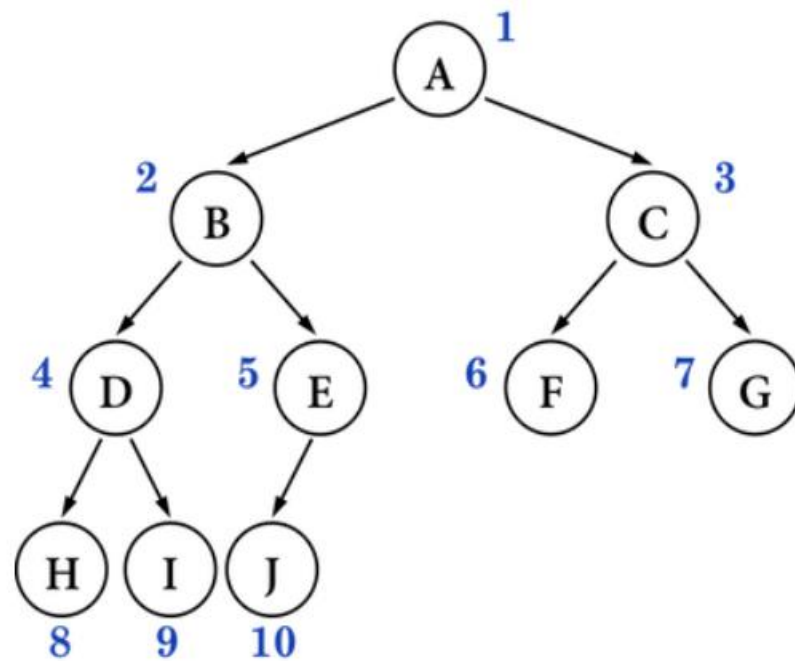
□ 如果 $i > 1$ ，它的父节点编号为 $\text{floor}(i / 2)$

□ 如果 $2i \leq n$ ，它的左子节点编号为 $2i$

□ 如果 $2i > n$ ，它无左子节点

□ 如果 $2i + 1 \leq n$ ，它的右子节点编号为 $2i + 1$

□ 如果 $2i + 1 > n$ ，它无右子节点



完全二叉树

完全二叉树的性质

■ 一棵有 n 个节点的完全二叉树 ($n > 0$)，从上到下、从左到右对节点从 0 开始进行编号，对任意第 i 个节点

□ 如果 $i = 0$ ，它是根节点

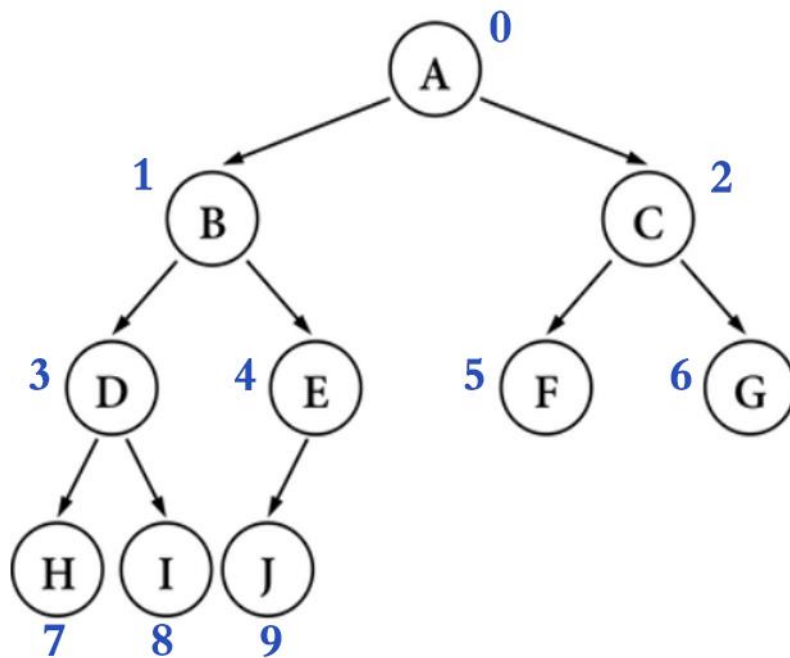
□ 如果 $i > 0$ ，它的父节点编号为 $\text{floor}((i - 1) / 2)$

□ 如果 $2i + 1 \leq n - 1$ ，它的左子节点编号为 $2i + 1$

□ 如果 $2i + 1 > n - 1$ ，它无左子节点

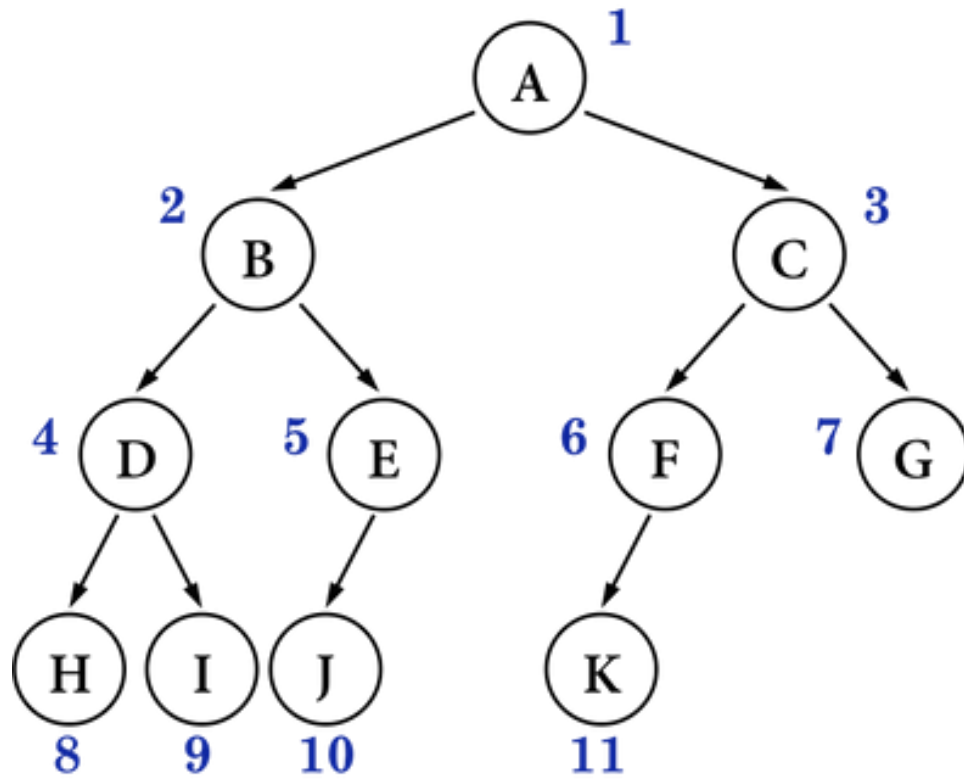
□ 如果 $2i + 2 \leq n - 1$ ，它的右子节点编号为 $2i + 2$

□ 如果 $2i + 2 > n - 1$ ，它无右子节点



完全二叉树

下图不是完全二叉树



面试题

- 如果一棵完全二叉树有 768 个节点，求叶子节点的个数
- 假设叶子节点个数为 n_0 ，度为 1 的节点个数为 n_1 ，度为 2 的节点个数为 n_2
- 总结点个数 $n = n_0 + n_1 + n_2$ ，而且 $n_0 = n_2 + 1$
- ✓ $n = 2n_0 + n_1 - 1$

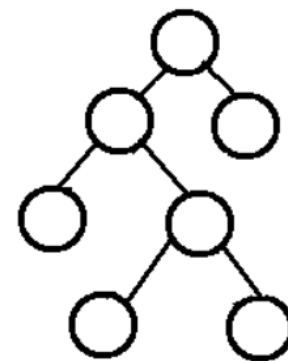
- 完全二叉树的 n_1 要么为 0，要么为 1
- ✓ n_1 为 1 时， $n = 2n_0$ ， n 必然是偶数
- 叶子节点个数 $n_0 = n / 2$ ，非叶子节点个数 $n_1 + n_2 = n / 2$
- ✓ n_1 为 0 时， $n = 2n_0 - 1$ ， n 必然是奇数
- 叶子节点个数 $n_0 = (n + 1) / 2$ ，非叶子节点个数 $n_1 + n_2 = (n - 1) / 2$

- 叶子节点个数 $n_0 = \text{floor}((n + 1) / 2) = \text{ceiling}(n / 2)$
- 非叶子节点个数 $n_1 + n_2 = \text{floor}(n / 2) = \text{ceiling}((n - 1) / 2)$
- 因此叶子节点个数为 384

国外教材的说法

■ Full Binary Tree: 完满二叉树

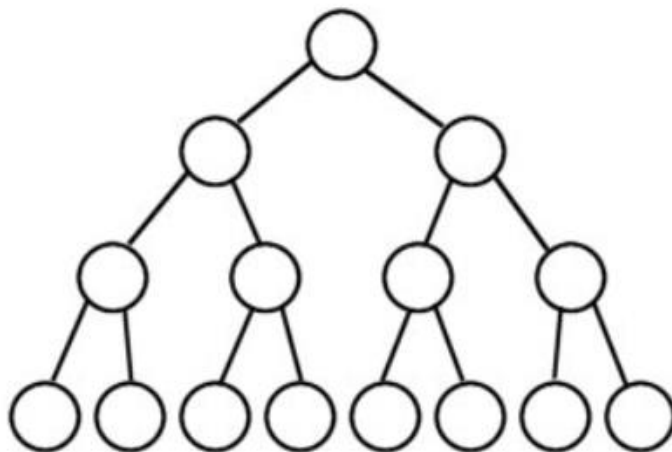
- 所有非叶子节点的度都为 2
- 就国内说的“真二叉树”



Full Binary Tree

■ Perfect Binary Tree: 完美二叉树

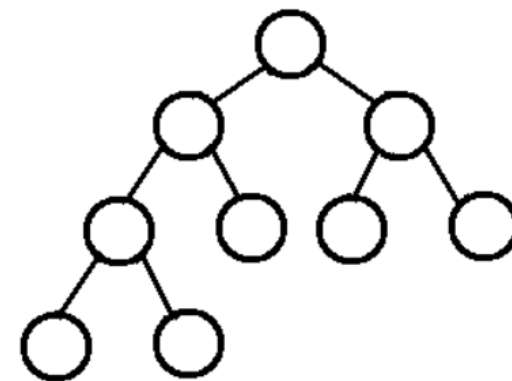
- 所有非叶子节点的度都为 2，且所有的叶子节点都在最后一层
- 就是国内说的“满二叉树”



Perfect Binary Tree

■ Complete Binary Tree: 完全二叉树

- 跟国内的定义一样



Complete Binary Tree

二叉树的遍历

- 遍历是数据结构中的常见操作

- 把所有元素都访问一遍

- 线性数据结构的遍历比较简单

- 正序遍历

- 逆序遍历

- 根据节点访问顺序的不同，二叉树的常见遍历方式有4种

- 前序遍历 (Preorder Traversal)

- 中序遍历 (Inorder Traversal)

- 后序遍历 (Postorder Traversal)

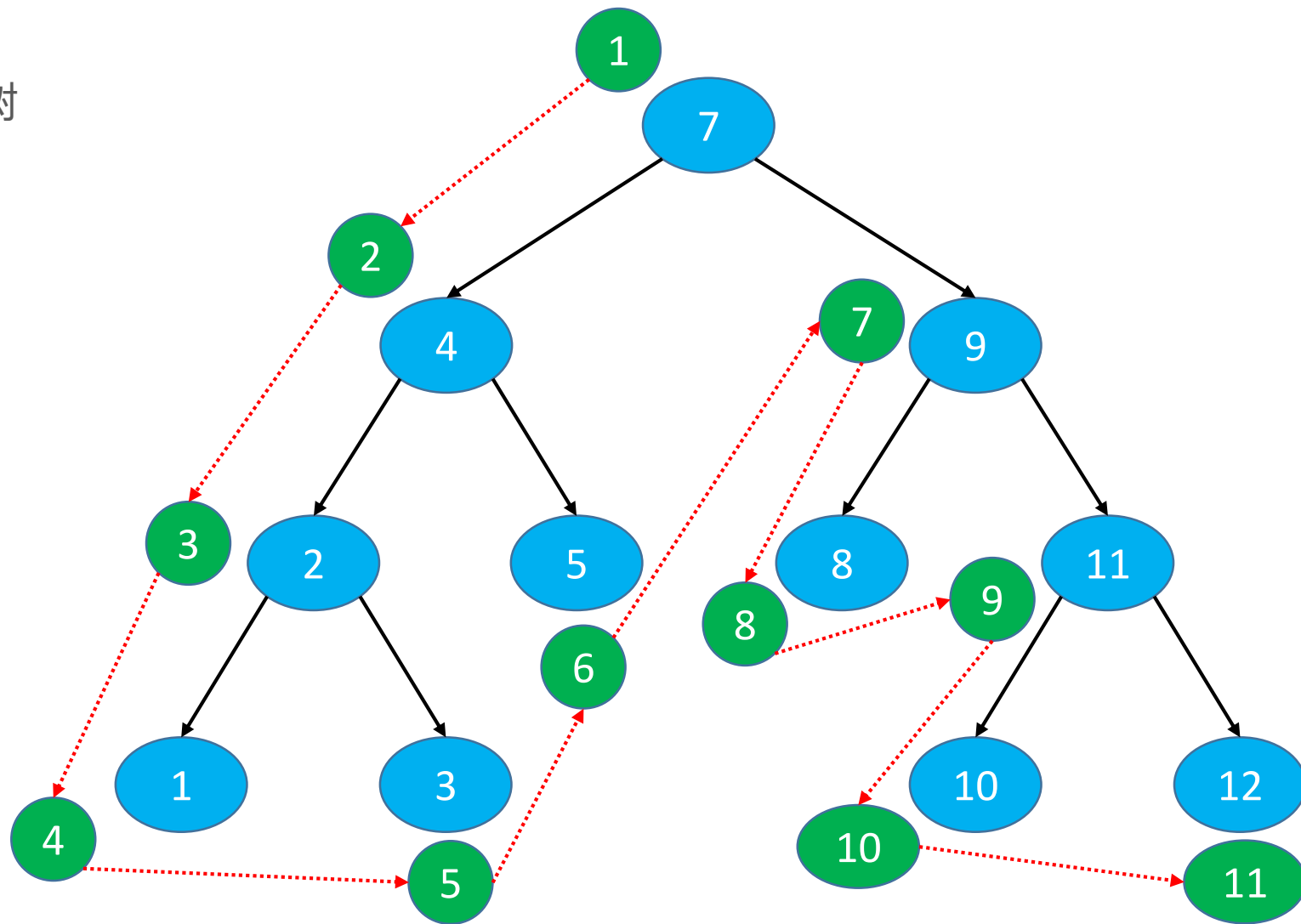
- 层序遍历 (Level Order Traversal)

前序遍历 (Preorder Traversal)

■ 访问顺序

□ 根节点、前序遍历左子树、前序遍历右子树

□ 7、4、2、1、3、5、9、8、11、10、12



前序遍历 – 非递归

■ 利用栈实现

1. 设置 `node = root`

2. 循环执行以下操作

□ 如果 `node != null`

✓ 对 `node` 进行访问

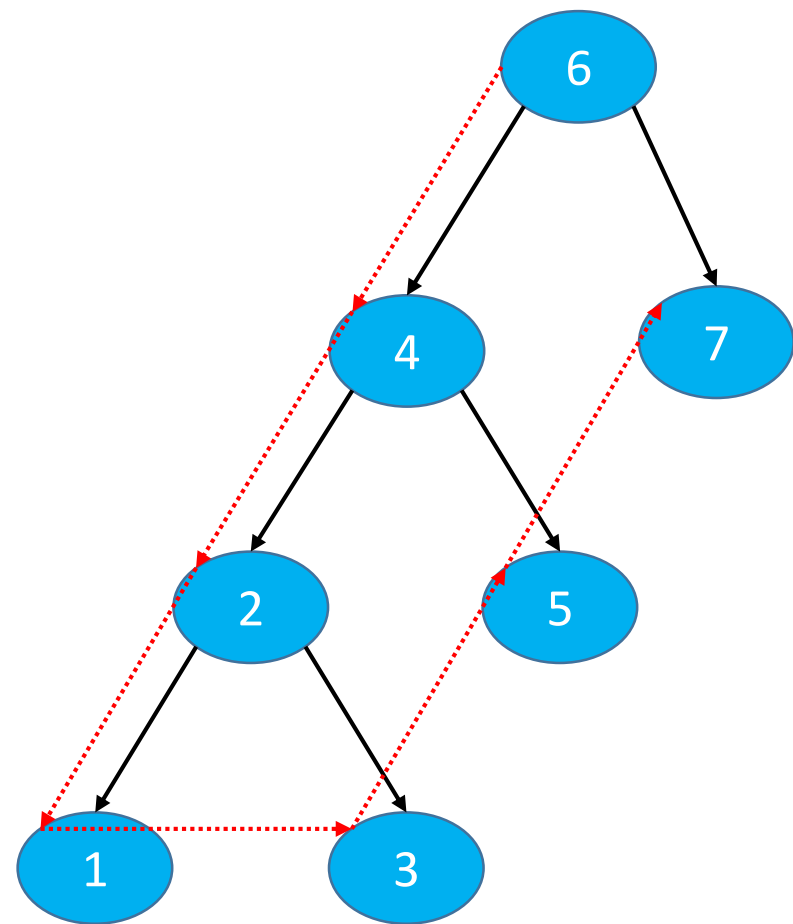
✓ 将 `node.right` 入栈

✓ 设置 `node = node.left`

□ 如果 `node == null`

✓ 如果栈为空，结束遍历

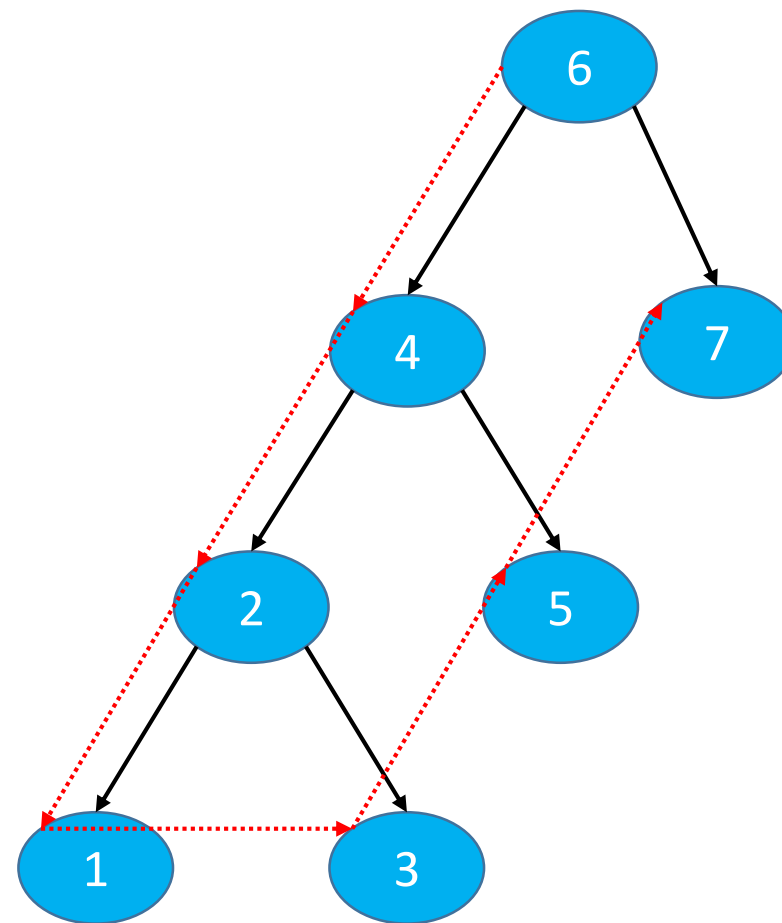
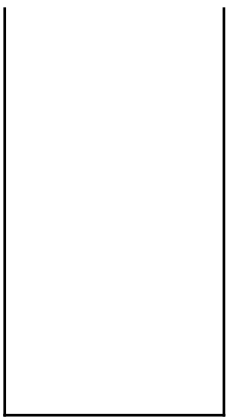
✓ 如果栈不为空，弹出栈顶元素并赋值给 `node`



前序遍历 – 非递归

■ 利用栈实现

1. 将 `root` 入栈
2. 循环执行以下操作，直到栈为空
 - 弹出栈顶节点 `top`，进行访问
 - 将 `top.right` 入栈
 - 将 `top.left` 入栈



中序遍历 (Inorder Traversal)

■ 访问顺序

□ 中序遍历左子树、根节点、中序遍历右子树

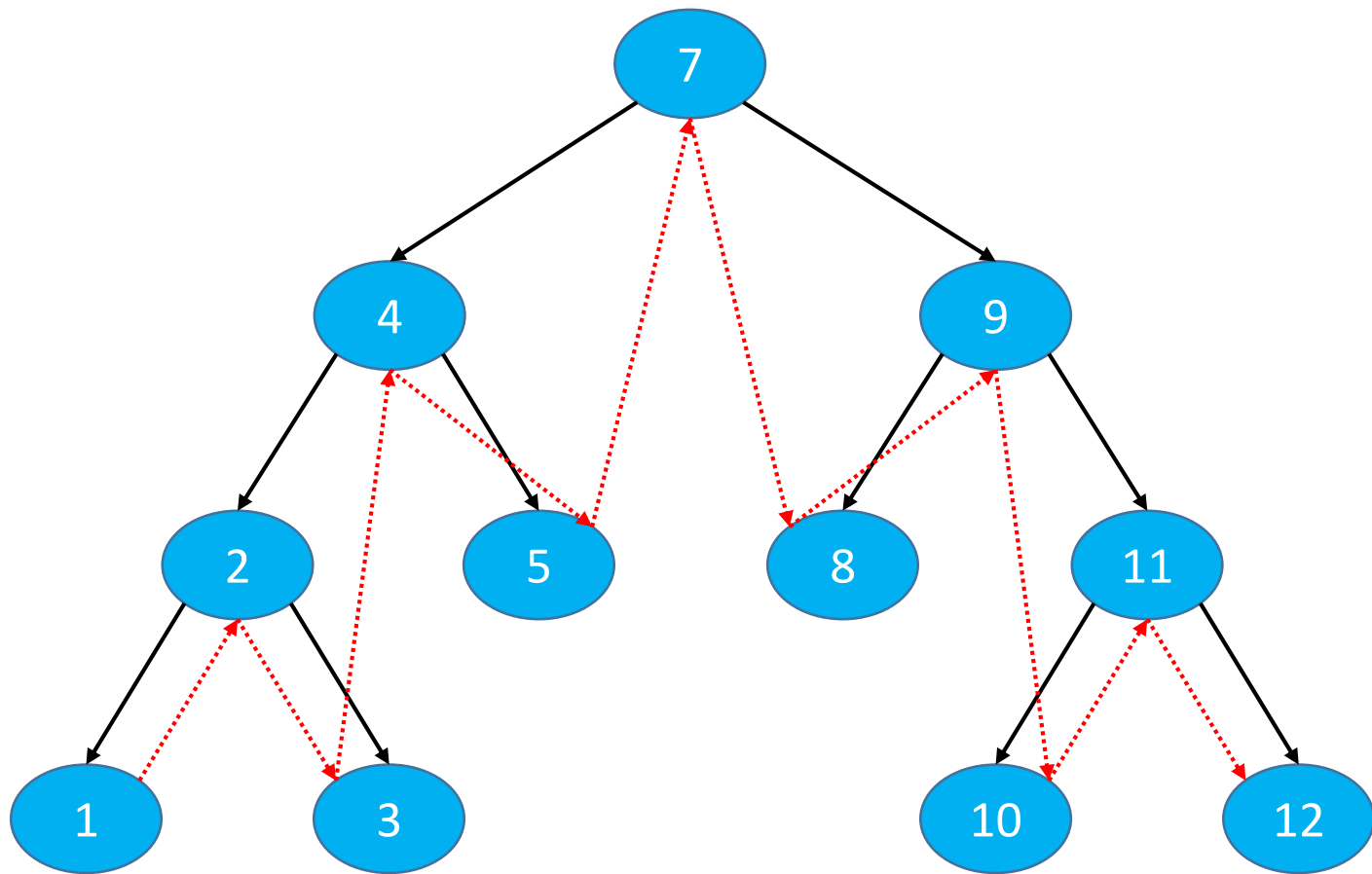
□ 1、2、3、4、5、7、8、9、10、11、12

■ 如果访问顺序是下面这样呢？

□ 中序遍历右子树、根节点、中序遍历左子树

□ 12、11、10、9、8、7、5、4、3、2、1

■ 二叉搜索树的中序遍历结果是升序或者降序的



中序遍历 – 非递归

■ 利用栈实现

1. 设置 `node = root`

2. 循环执行以下操作

□ 如果 `node != null`

✓ 将 `node` 入栈

✓ 设置 `node = node.left`

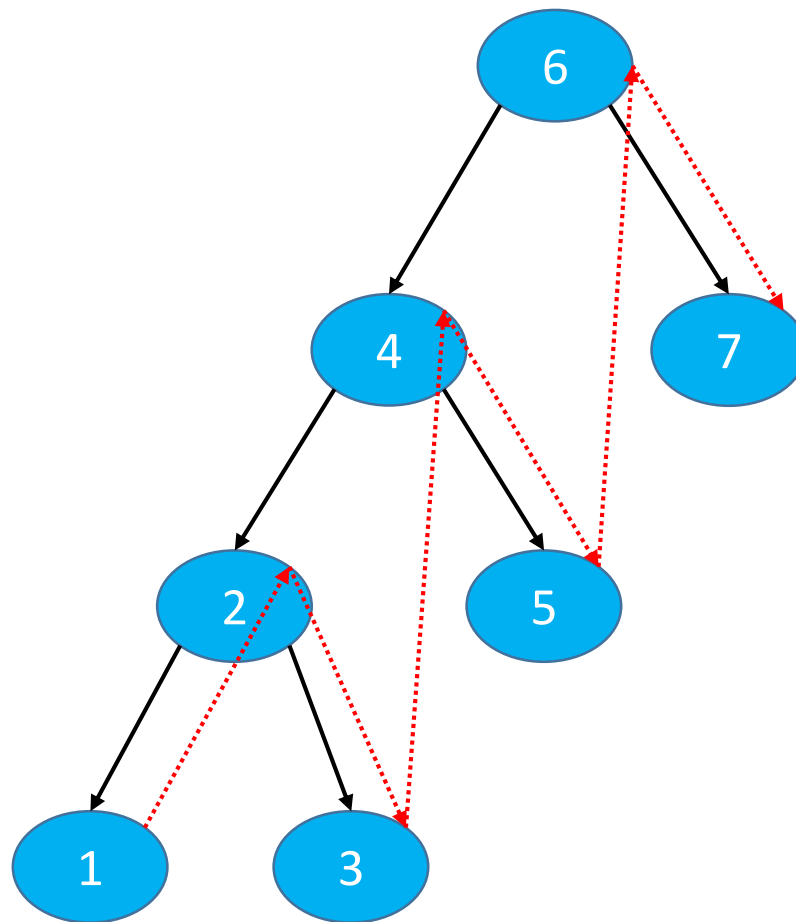
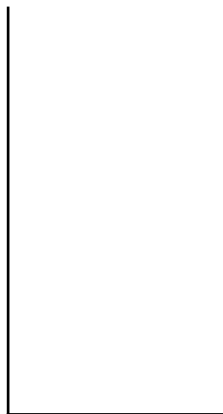
□ 如果 `node == null`

✓ 如果栈为空，结束遍历

✓ 如果栈不为空，弹出栈顶元素并赋值给 `node`

➤ 对 `node` 进行访问

➤ 设置 `node = node.right`

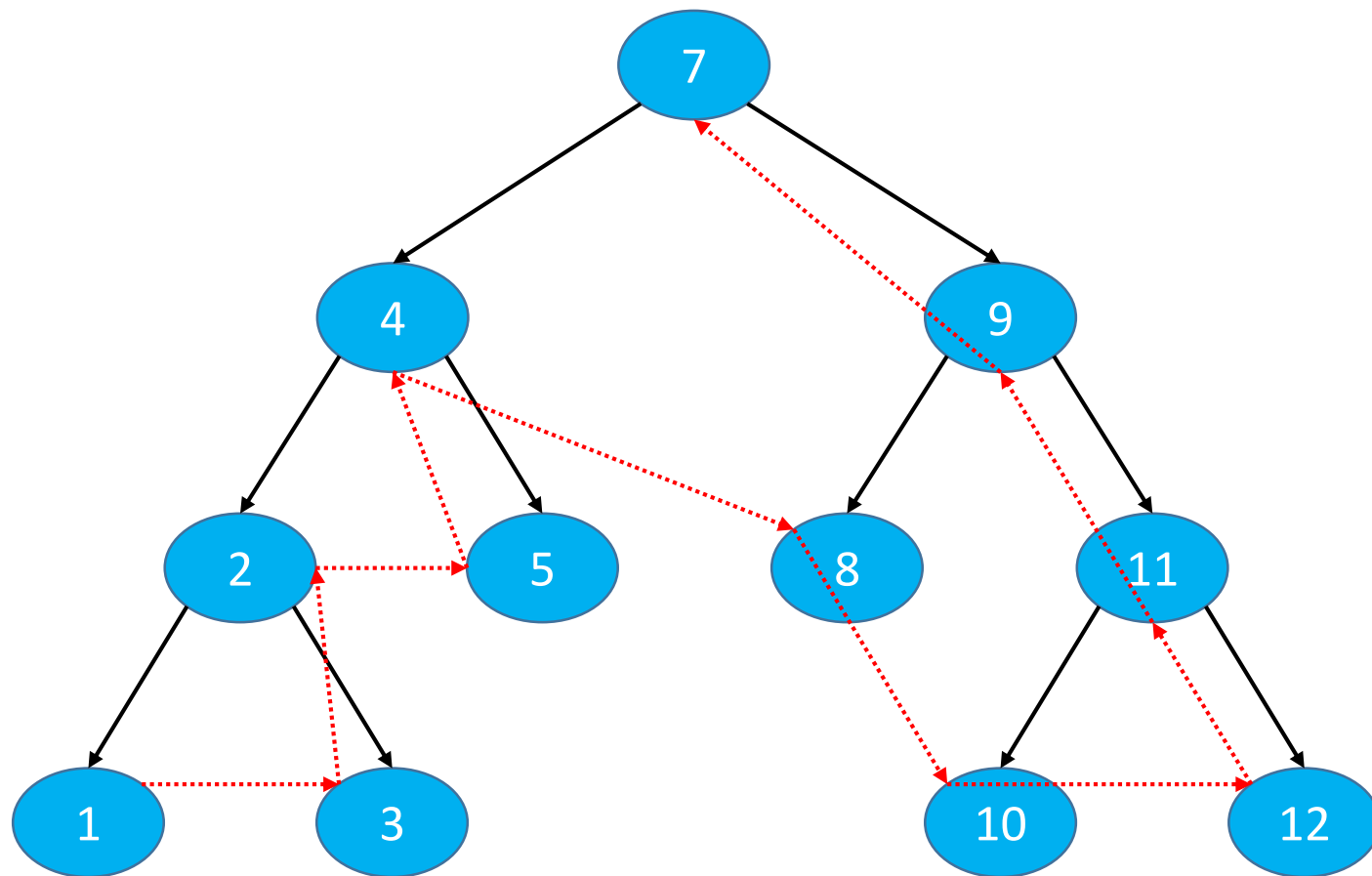


后序遍历 (Postorder Traversal)

■ 访问顺序

□ 后序遍历左子树、后序遍历右子树、根节点

□ 1、3、2、5、4、8、10、12、11、9、7



后序遍历 – 非递归

■ 利用栈实现

1. 将 **root** 入栈

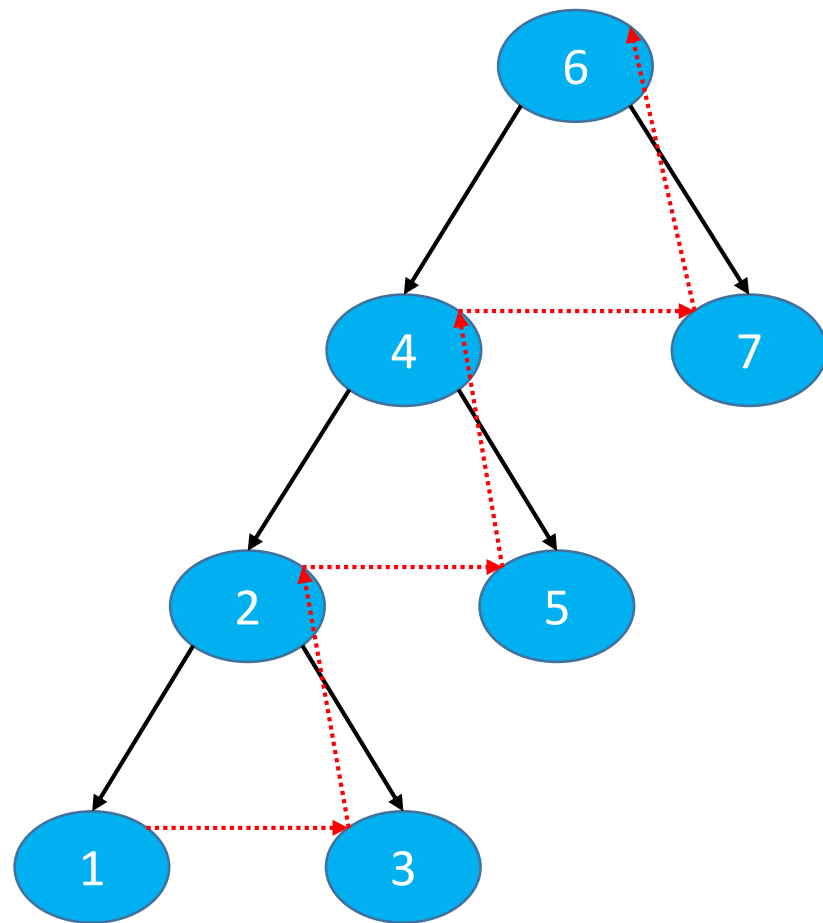
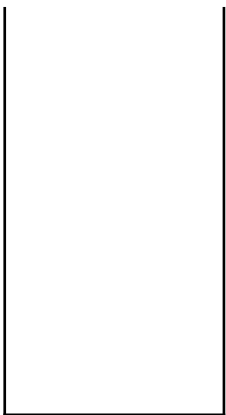
2. 循环执行以下操作，直到栈为空

□ 如果栈顶节点是叶子节点 或者 上一次访问的节点是栈顶节点的子节点

✓ 弹出栈顶节点，进行访问

□ 否则

✓ 将栈顶节点的**right**、**left**按顺序入栈



层序遍历 (Level Order Traversal)

■ 访问顺序

□ 从上到下、从左到右依次访问每一个节点

□ 7、4、9、2、5、8、11、1、3、10、12

■ 实现思路：使用队列

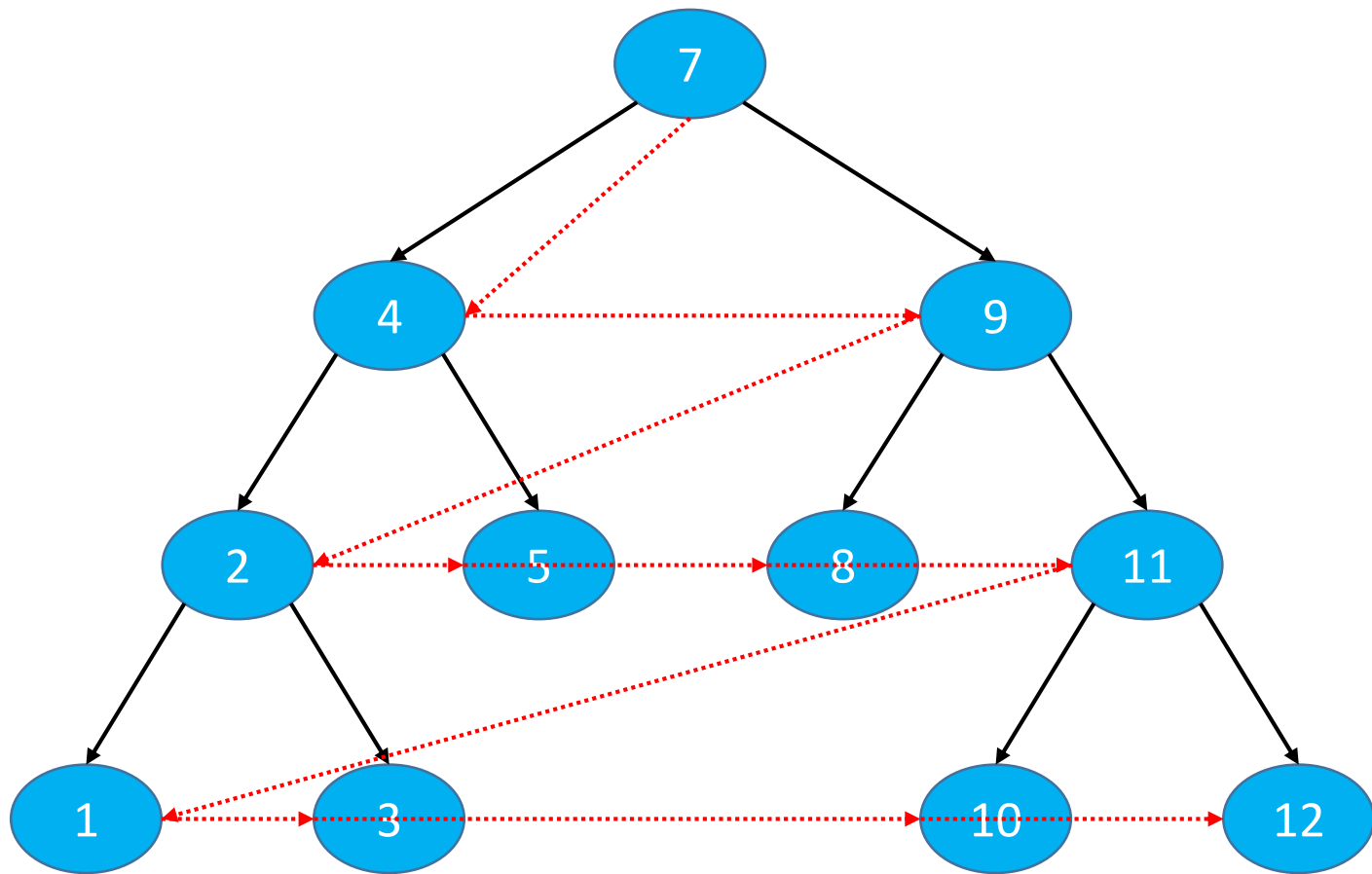
1. 将根节点入队

2. 循环执行以下操作，直到队列为空

□ 将队头节点 A 出队，进行访问

□ 将 A 的左子节点入队

□ 将 A 的右子节点入队



四则运算

- 四则运算的表达式可以分为3种
- 前缀表达式 (prefix expression) , 又称为波兰表达式
- 中缀表达式 (infix expression)
- 后缀表达式 (postfix expression) , 又称为逆波兰表达式

前缀表达式	中缀表达式	后缀表达式
+ 1 2	1 + 2	1 2 +
+ 2 * 3 4	2 + 3 * 4	2 3 4 * +
+ 9 * - 4 1 2	9 + (4 - 1) * 2	9 4 1 - 2 * +

表达式树

■ 如果将表达式的操作数作为叶子节点，运算符作为父节点（假设只是四则运算）

□ 这些节点刚好可以组成一棵二叉树

□ 比如表达式：A / B + C * D - E

■ 如果对这棵二叉树进行遍历

□ 前序遍历

✓ - + / A B * C D E

✓ 刚好就是前缀表达式（波兰表达式）

□ 中序遍历

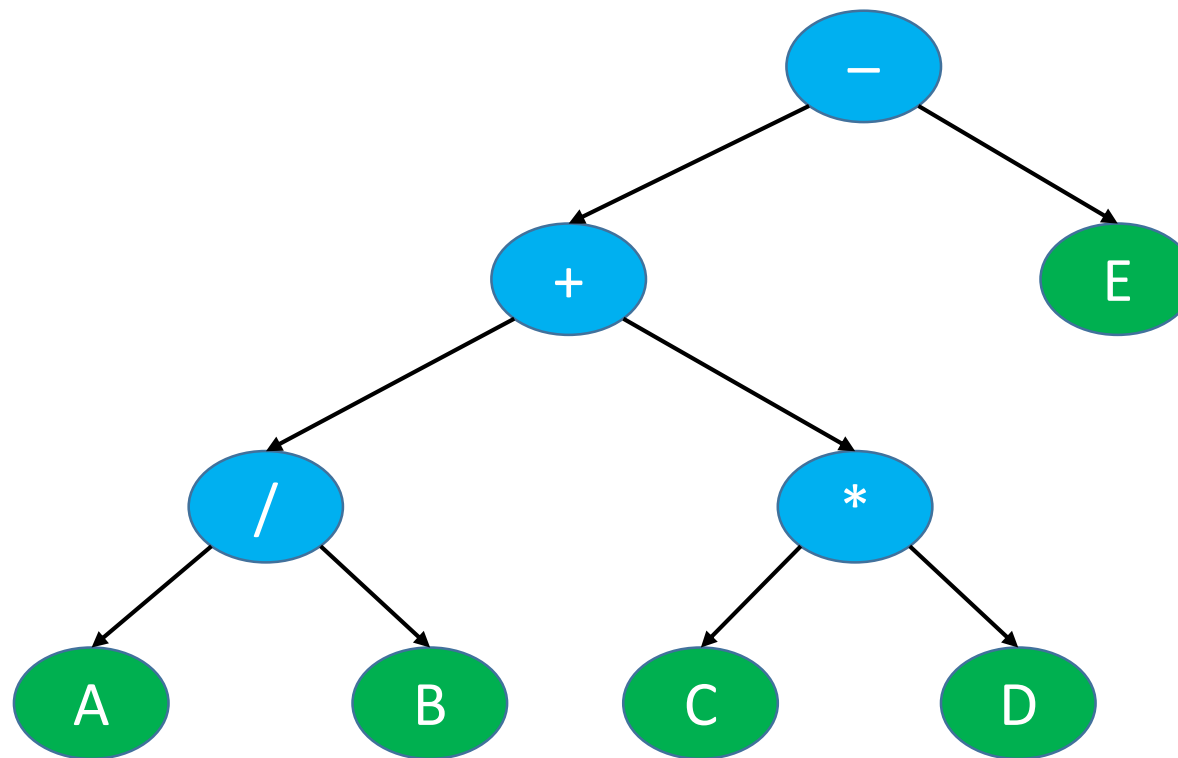
✓ A / B + C * D - E

✓ 刚好就是中缀表达式（波兰表达式）

□ 后序遍历

✓ A B / C D * + E -

✓ 刚好就是后缀表达式（逆波兰表达式）



思考

■ 如果允许外界遍历二叉树的元素？你会如何设计接口？

```
public void inorder(Visitor<E> visitor) {
    if (visitor == null) return;
    inorder(visitor, root);
}

private void inorder(Visitor<E> visitor, Node<E> node) {
    if (node == null) return;
    inorder(visitor, node.left);
    visitor.visit(node.element);
    inorder(visitor, node.right);
}

public static interface Visitor<E> {
    void visit(E element);
}
```

```
bst.inorder(new Visitor<Integer>() {
    public void visit(Integer element) {
        System.out.println(element);
    }
});
```

增强遍历接口

```
public void inorder(Visitor<E> visitor) {
    if (visitor == null) return;
    inorder(root, visitor);
}

private void inorder(Node<E> node, Visitor<E> visitor) {
    if (node == null || visitor.stop) return;

    inorder(node.left, visitor);
    if (visitor.stop) return;
    visitor.stop = visitor.visit(node.element);
    inorder(node.right, visitor);
}
```

```
public static abstract class Visitor<E> {
    boolean stop;
    /**
     * @return 如果返回true, 就代表停止遍历
     */
    public abstract boolean visit(E element);
}
```

```
bst.inorder(new Visitor<Integer>() {
    public boolean visit(Integer element) {
        System.out.print(element + " ");
        return element == 4 ? true : false;
    }
});
```

遍历的应用

■ 前序遍历

- 树状结构展示（注意左右子树的顺序）

■ 中序遍历

- 二叉搜索树的中序遍历按升序或者降序处理节点

■ 后序遍历

- 适用于一些先子后父的操作

■ 层序遍历

- 计算二叉树的高度
- 判断一棵树是否为完全二叉树

根据遍历结果重构二叉树

■ 以下结果可以保证重构出唯一的一棵二叉树

□ 前序遍历 + 中序遍历

□ 后序遍历 + 中序遍历

■ 前序遍历 + 后序遍历

✓ 如果它是一棵真二叉树（Proper Binary Tree），结果是唯一的

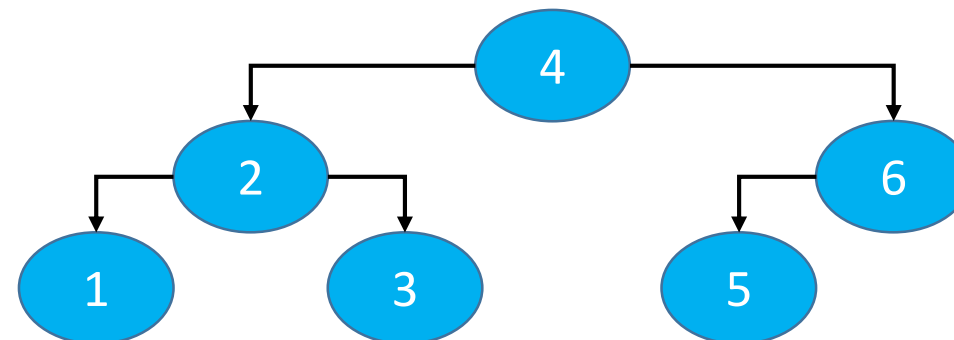
✓ 不然结果不唯一



前序遍历+中序遍历重构二叉树

■ 前序遍历: 4 2 1 3 6 5

■ 中序遍历: 1 2 3 4 5 6



练习 – 利用前序遍历树状打印二叉树

【4】

【L】 【2】

【L】 【L】 【1】

【L】 【R】 【3】

【R】 【6】

【R】 【L】 【5】

【R】 【R】 【7】

```
@Override
public String toString() {
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    toString(sb, root, "");
    return sb.toString();
}

private void toString(StringBuilder sb, Node<E> node, String prefix) {
    if (node == null) return;

    sb.append(prefix).append(" 【")
      .append(node.element).append("】").append("\n");

    toString(sb, node.left, prefix + " 【L】 ");
    toString(sb, node.right, prefix + " 【R】 ");
}
```

练习 - 翻转二叉树

■ <https://leetcode-cn.com/problems/invert-binary-tree/>

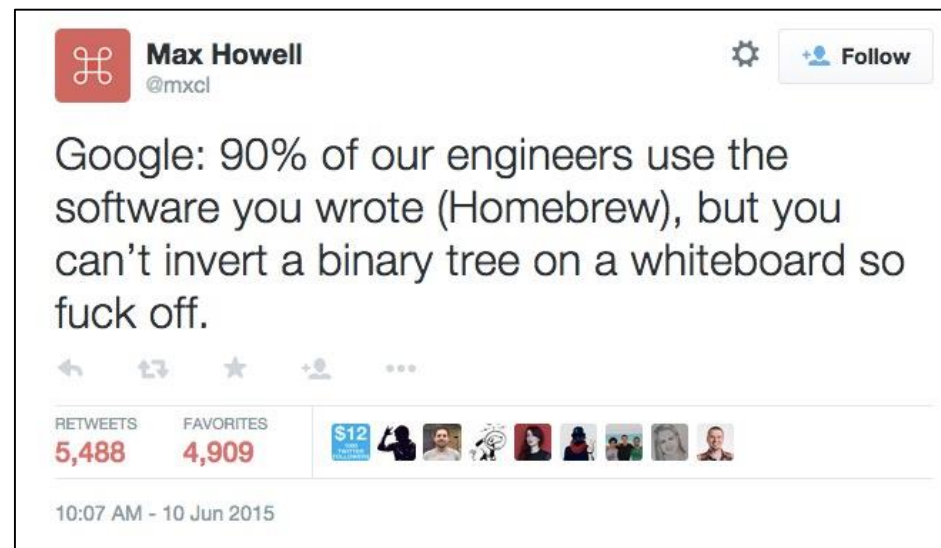
输入:



输出:



■ 请分别用递归、迭代（非递归）方式实现



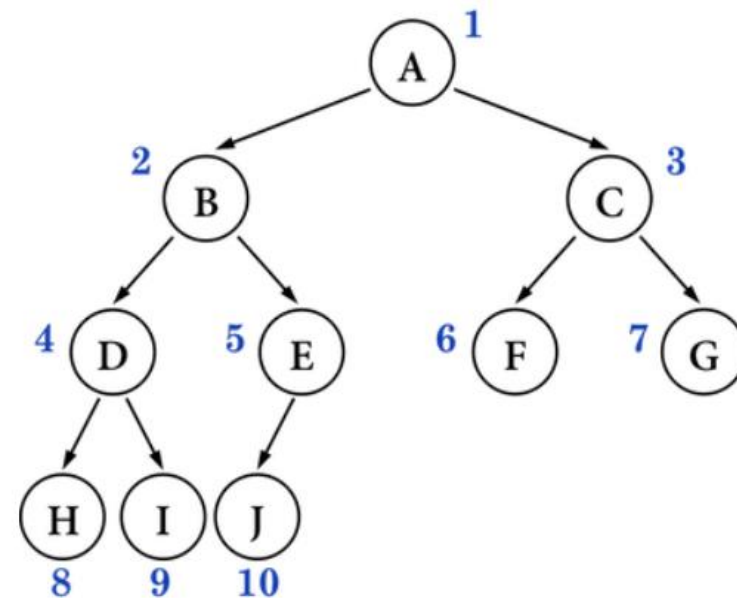
练习 – 计算二叉树的高度

- 递归

- 迭代

练习 – 判断一棵树是否为完全二叉树

- 如果树为空，返回 `false`
- 如果树不为空，开始层序遍历二叉树（用队列）
 - 如果 `node.left != null`，将 `node.left` 入队
 - 如果 `node.left == null && node.right != null`，返回 `false`
 - 如果 `node.right != null`，将 `node.right` 入队
 - 如果 `node.right == null`
- ✓ 那么后面遍历的节点应该都为叶子节点，才是完全二叉树
- ✓ 否则返回 `false`
- 遍历结束，返回 `true`



前驱节点 (predecessor)

- 前驱节点：中序遍历时的前一个节点
- 如果是二叉搜索树，前驱节点就是前一个比它小的节点

■ `node.left != null`

□ 举例：6、13、8

□ `predecessor = node.left.right.right.right...`

✓ 终止条件：`right` 为 `null`

■ `node.left == null && node.parent != null`

□ 举例：7、11、9、1

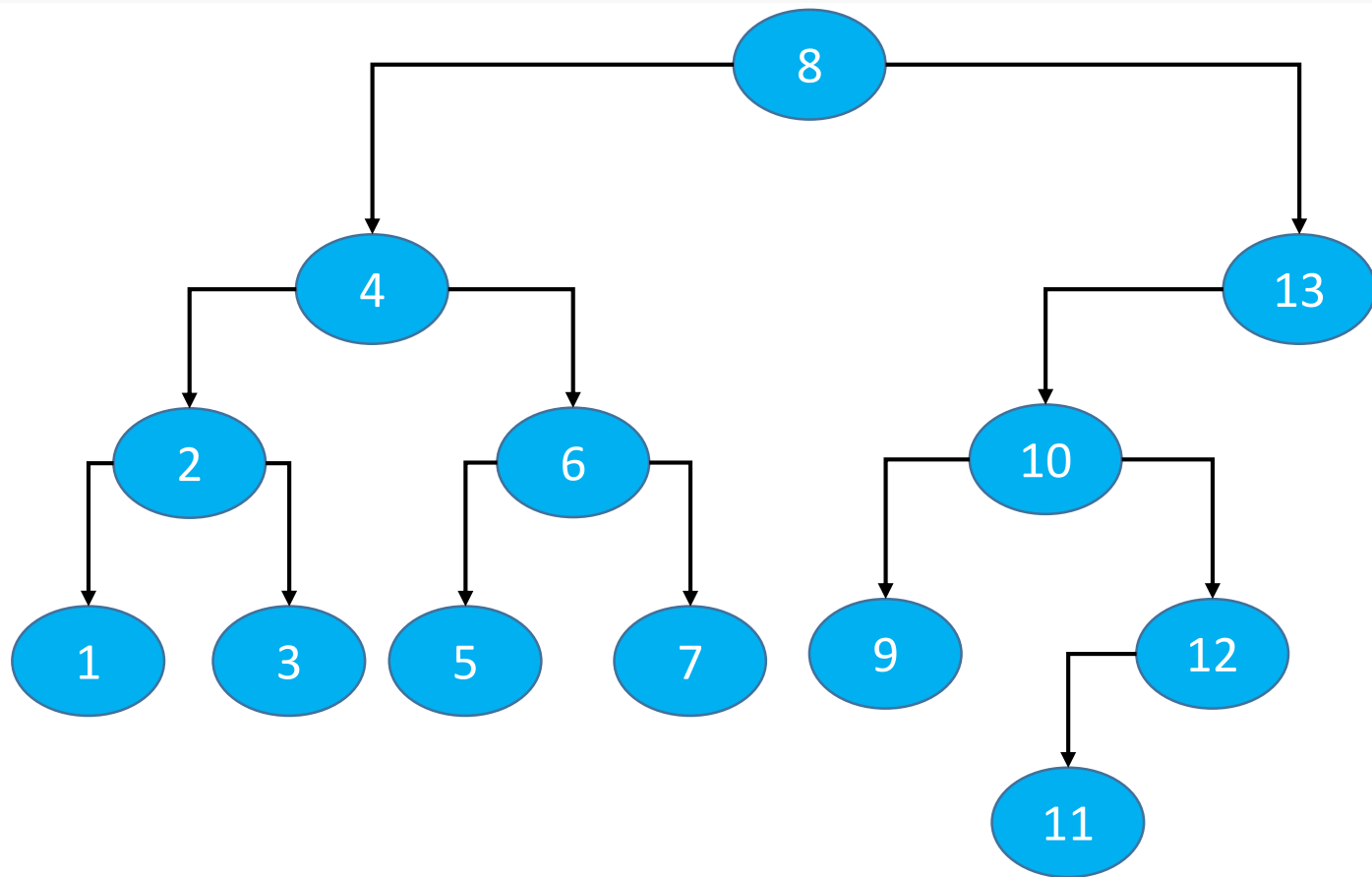
□ `predecessor = node.parent.parent.parent...`

✓ 终止条件：`node` 在 `parent` 的右子树中

■ `node.left == null && node.parent == null`

□ 那就没有前驱节点

□ 举例：没有左子树的根节点



1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13

后继节点 (successor)

- 后继节点：中序遍历时的后一个节点
- 如果是二叉搜索树，后继节点就是后一个比它大的节点

■ `node.right != null`

□ 举例：1、8、4

□ `successor = node.right.left.left.left...`

✓ 终止条件：left 为 null

■ `node.right == null && node.parent != null`

□ 举例：7、6、3、11

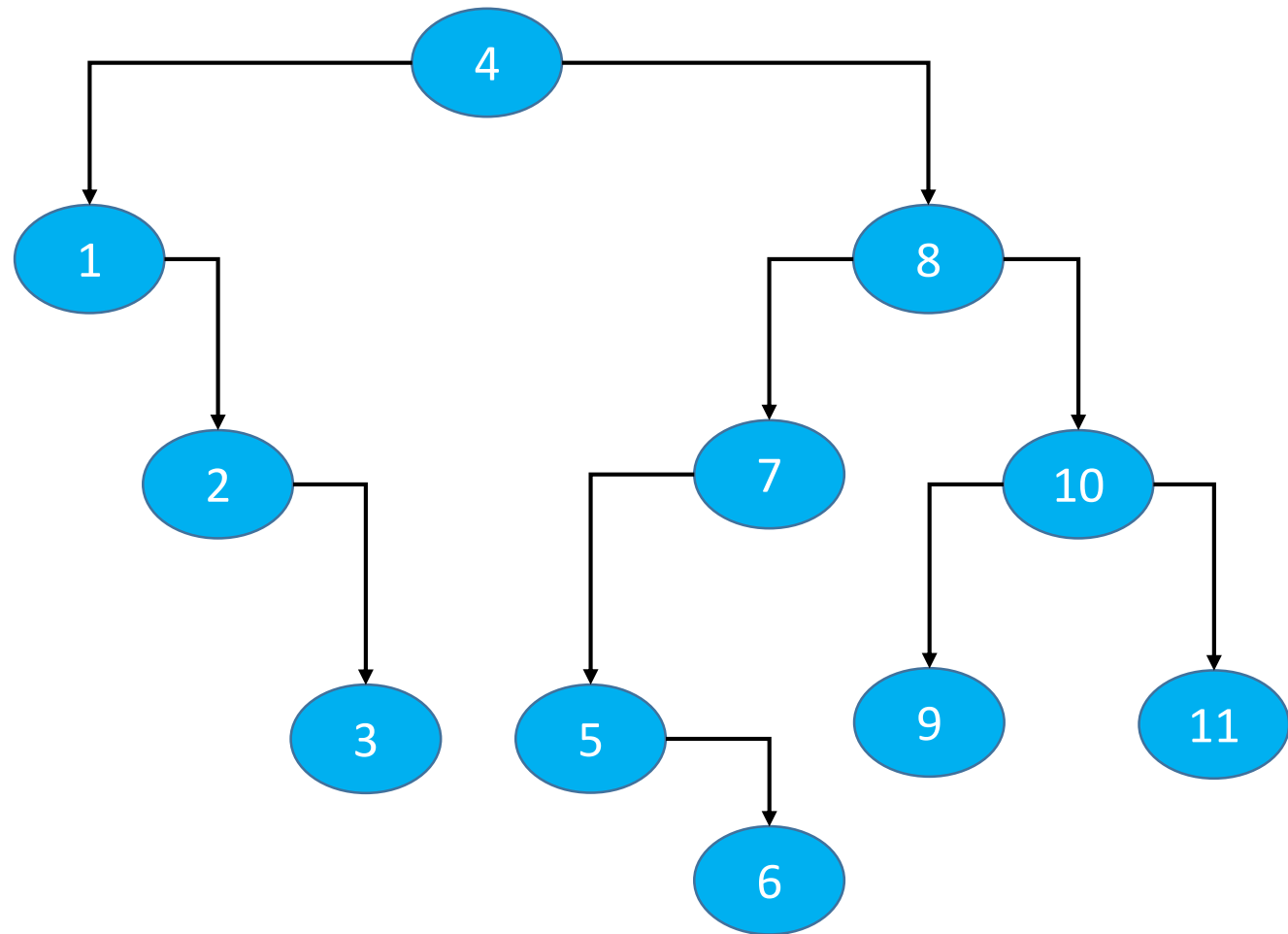
□ `successor = node.parent.parent.parent...`

✓ 终止条件：node 在 parent 的左子树中

■ `node.right == null && node.parent == null`

□ 那就没有前驱节点

□ 举例：没有右子树的根节点



1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11

作业

- 二叉树的前序遍历: <https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-preorder-traversal/> (递归+迭代)
- 二叉树的中序遍历: <https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-inorder-traversal/> (递归+迭代)
- 二叉树的后序遍历: <https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-postorder-traversal/> (递归+迭代)
- 二叉树的层次遍历: <https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-level-order-traversal/> (迭代)
- 二叉树的最大深度: <https://leetcode-cn.com/problems/maximum-depth-of-binary-tree/> (递归+迭代)

作业

- 二叉树的层次遍历II: <https://leetcode-cn.com/problems/binary-tree-level-order-traversal-ii/>
- 二叉树最大宽度: <https://leetcode-cn.com/problems/maximum-width-of-binary-tree/>
- N叉树的前序遍历: <https://leetcode-cn.com/problems/n-ary-tree-preorder-traversal/>
- N叉树的后序遍历: <https://leetcode-cn.com/problems/n-ary-tree-postorder-traversal/>
- N叉树的最大深度: <https://leetcode-cn.com/problems/maximum-depth-of-n-ary-tree/>

作业

- 二叉树展开为链表

- <https://leetcode-cn.com/problems/flatten-binary-tree-to-linked-list/>

- 从中序与后序遍历序列构造二叉树

- <https://leetcode-cn.com/problems/construct-binary-tree-from-inorder-and-postorder-traversal/>

- 从前序与中序遍历序列构造二叉树

- <https://leetcode-cn.com/problems/construct-binary-tree-from-preorder-and-inorder-traversal/>

- 根据前序和后序遍历构造二叉树

- <https://leetcode-cn.com/problems/construct-binary-tree-from-preorder-and-postorder-traversal/>

- 对称二叉树

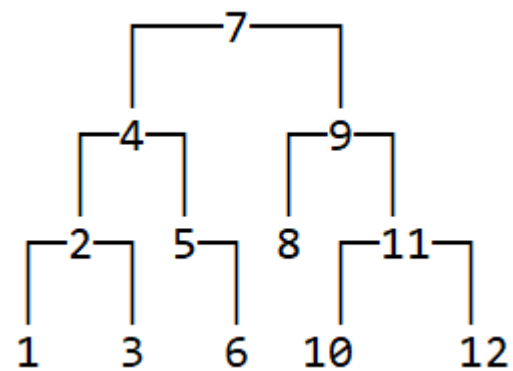
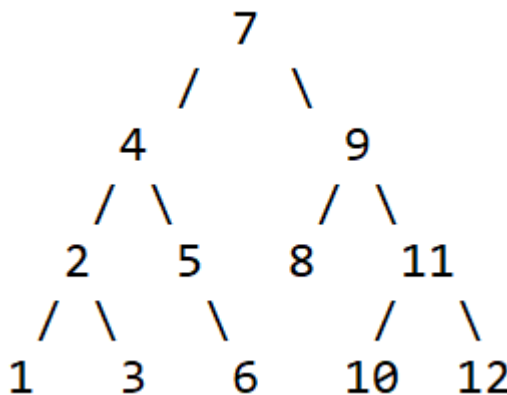
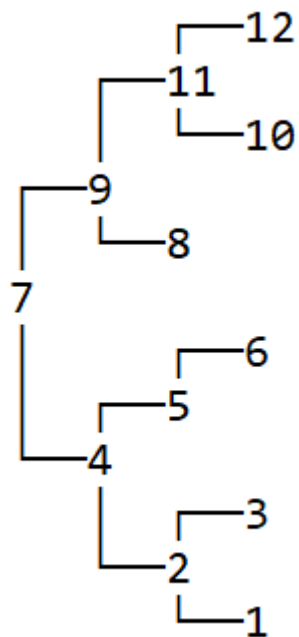
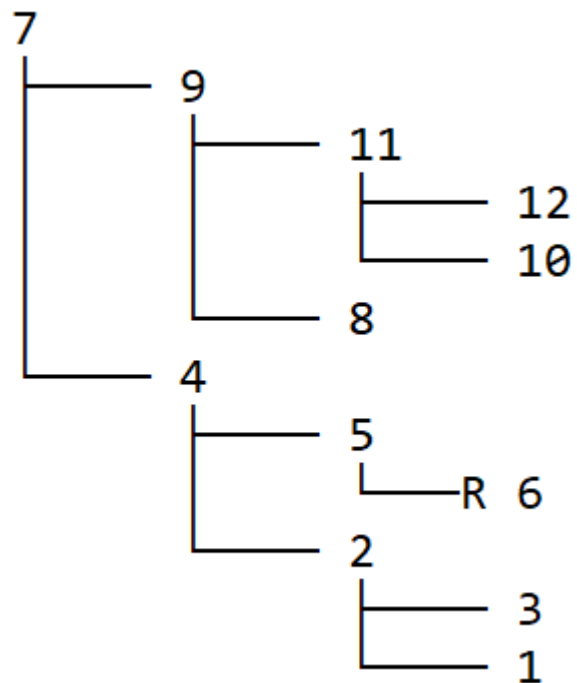
- <https://leetcode-cn.com/problems/symmetric-tree/>

作业

■ 树状形式打印二叉树

□ 比如给定一个二叉搜索树: [7, 4, 9, 2, 5, 8, 11, 1, 3, 6, 10, 12]

□ 尝试输出以下格式



■ 开源项目: <https://github.com/CoderMJLee/BinaryTrees>

作业

- 已知前序、中序遍历结果，求出后序遍历结果
- 已知中序、后序遍历结果，求出前序遍历结果