5) (a)

Para acharmos uma base ortonormal que contenha ~~o~~ estado fornecido, temos que achar um estado $|\upsilon\rangle$, tal que:

$$|\upsilon\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Representando o estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ em forma de vetor, temos: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$. Pegando seu conjugado complexo: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ -i)$.

Dessa maneira, para acharmos um estado ortogonal de modo que junto ao estado fornecido tenhamos uma base ortonormal, temos que achar os coeficientes α e β de $|\upsilon\rangle$.

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ -i)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0 \quad \therefore \boxed{\alpha = \beta i}$$

Logo, seguindo a propriedade do vetor unitário (para cumprir os requisitos de ortonormalidade), temos:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\beta i|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\beta^2 + \beta^2 = 1$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

Então o estado $|\upsilon\rangle$ é: $|\upsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|0\rangle + |1\rangle)$, que é ortogonal ao fornecido e unitário, formando com ele uma base ortonormal.

Mas como podemos usar fase global para obter um estado quântico equivalente, usando a fase global $\boxed{c = -i}$, temos:

$$(-i)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(i|0\rangle + |1\rangle) \ \therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) \therefore \boxed{|-i\rangle}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \therefore |i\rangle$, podemos então assumir que essa base ortonormal é $\{|i\rangle, |-i\rangle\}$