



Victor Miguel de Moraes Costa (vmmc2)

Victor Hugo Meirelles Silva (vhms)

Zênio Ângelo Oliveira Neves (zaon)

Zilde Souto Maior Neto (zsmn)

## RELATÓRIO DE PROJETO

Métodos Numéricos

Recife  
2019

# Sumário

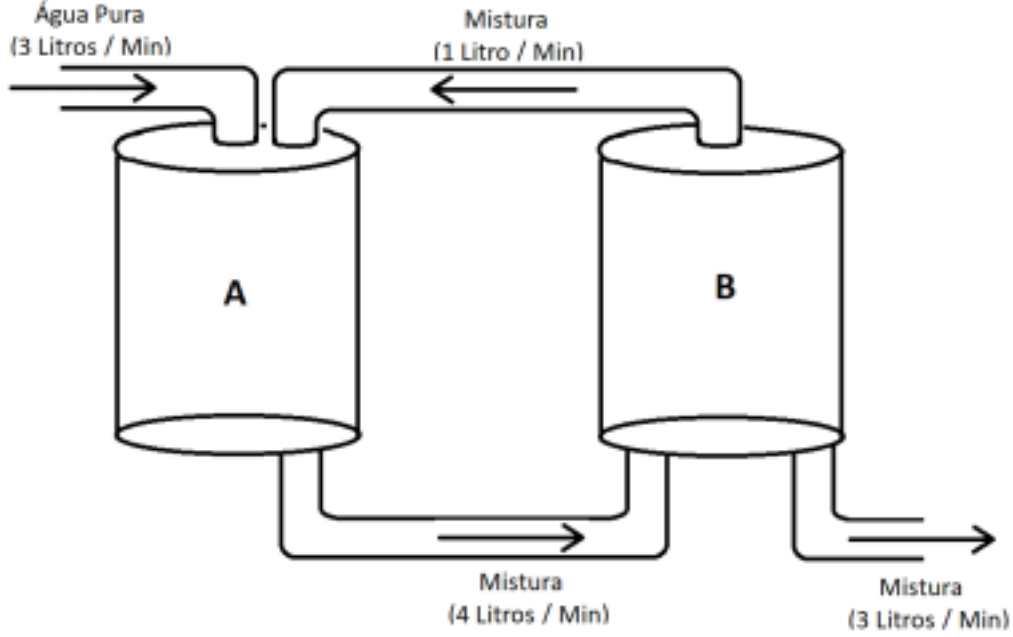
<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Primeiro Problema</b>	<b>2</b>
2.1	Modelagem . . . . .	2
2.2	Solução Analítica . . . . .	3
2.3	Gráfico das soluções numéricas . . . . .	5
2.4	Comparação e análise de desempenho . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Segundo Problema</b>	<b>9</b>
3.1	Modelagem . . . . .	9
3.2	Solução Analítica . . . . .	10
3.3	Gráfico das soluções numéricas . . . . .	12
3.4	Comparação e análise de desempenho . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Terceiro Problema</b>	<b>16</b>
4.1	Modelagem . . . . .	16
4.2	Solução Analítica . . . . .	17
4.3	Gráfico das soluções numéricas . . . . .	20
4.4	Comparação e análise de desempenho . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>24</b>

# 1 Introdução

O presente projeto tem como objetivo compreender melhor e exercitar os assuntos da disciplina de Métodos Numéricos (IF-816EC), ministrada pelo professor Ricardo Martins, no CIN-UFPE. Nesse contexto, foram resolvidas 3 diferentes questões que abordam os assuntos de: modelagem, resolução de equações diferenciais lineares, resolução de sistemas de equações diferenciais lineares e métodos numéricos de passo simples e de passo múltiplo. Ademais, o projeto busca fazer com que os alunos possam aplicar tais tópicos em outras áreas das ciências exatas.

## 2 Primeiro Problema

Considere os dois tanques mostrados na figura. O tanque A possui 50 Litros de água no qual 25 kilogramas de sal são dissolvidos. Suponha que o tanque B contenha 50 Litros de água pura inicialmente e que o líquido é bombeado para dentro e para fora dos tanques como mostrado na figura. A mistura trocada entre os dois tanques e o líquido bombeado para fora do tanque B são assumidos como estando bem misturados.



(a) Construa um modelo matemático que descreva o número de quilogramas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  de sal nos tanques A e B, respectivamente, no tempo  $t$ .

(b) Usando os métodos numéricos implementados da primeira parte do projeto e a solução encontrada no quesito anterior, plote os gráficos de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  mostrando os resultados na apresentação final. Não esqueça de comparar a eficiência dos métodos e a precisão em comparação com a solução exata.

(c) Comente o que acontece quando  $t$  tende para o infinito.

### 2.1 Modelagem

As variações na quantidade de sal são devidas somente aos fluxos de entrada e de saída do tanque. Mais precisamente a taxa de variação de sal no tanque,  $\frac{dQ}{dt}$ , é igual a taxa segundo a qual o sal está entrando menos a taxa segundo a qual ele está saindo:

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa}_{\text{entrada}} - \text{taxa}_{\text{saida}} \quad (1)$$

A taxa de variação de sal no tanque A ( $\frac{dQ_A}{dt}$ ) é dada por:

$$\frac{dQ_A}{dt} = \frac{1}{50}Q_B - \frac{2}{25}Q_A \quad (2)$$

A taxa de variação de sal no tanque B ( $\frac{dQ_B}{dt}$ ) é dada por:

$$\frac{dQ_B}{dt} = \frac{2}{25}Q_A - \frac{2}{25}Q_B \quad (3)$$

## 2.2 Solução Analítica

Dessa forma, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 50Q'_A = Q_B - 4Q_A \\ 25Q'_B = 2Q_A - 2Q_B \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

Onde, aplicando Laplace para a primeira equação:

$$\begin{aligned} 50\mathcal{L}Q'_A &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50[s\mathcal{L}Q_A - Q_A(0)] &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50[s\mathcal{L}Q_A - 25] &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50s\mathcal{L}Q_A - 1250 &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50s\mathcal{L}Q_A + 4\mathcal{L}Q_A &= \mathcal{L}Q_B + 1250 \\ 50sF_A + 4F_A &= F_B + 1250 \\ F_A[50s + 4] &= F_B + 1250 \\ F_A &= \frac{F_B + 1250}{50s + 4} \end{aligned}$$

E aplicando Laplace para a segunda equação:

$$\begin{aligned} 25Q'_B &= 2Q_A - 2Q_B \\ 25\mathcal{L}Q'_B &= 2\mathcal{L}Q_A - 2\mathcal{L}Q_B \\ 25[s\mathcal{L}Q_B - 0] &= 2\mathcal{L}Q_A - 2\mathcal{L}Q_B \\ 25sF_B &= 2F_A - 2F_B \\ 25sF_B + 2F_B &= 2F_A \end{aligned}$$

Aplicando o  $F_A$  obtido na primeira equação na segunda:

$$\begin{aligned} 25sF_B + 2F_B &= 2\frac{F_B + 1250}{50s + 4} \\ (25sF_B + 2F_B)(50s + 4) &= 2F_B + 2500 \\ 1250s^2F_B + 100sF_B + 100sF_B + 8F_B &= 2F_B + 2500 \\ 1250s^2F_B + 200sF_B + 6F_B &= 2500 \\ F_B(1250s^2 + 200s + 6) &= 2500 \\ F_B1250(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}) &= 2500 \end{aligned}$$

$$F_B(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}) = 2$$

$$F_B(s + \frac{1}{25})(s + \frac{3}{25}) = 2$$

$$F_B = \frac{2}{(s + \frac{1}{25})(s + \frac{3}{25})}$$

Substituindo  $F_B$  encontrado na equação para  $F_A$  encontrada:

$$F_A = \frac{\frac{2}{(s + \frac{1}{25})(s + \frac{3}{25})} + 1250}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{\frac{2}{s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}} + 1250}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{\frac{2 + 1250(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625})}{s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}}}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{2 + 1250s^2 + 200s + 6}{s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}} \frac{1}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{2 + 1250s^2 + 200s + 6}{(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625})(50s + 4)}$$

Finalmente, aplicando o Laplace inverso em  $F_A$  e  $F_B$ , obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_A] = \frac{25}{2}e^{-(3t)/25}(e^{2t/25} + 1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_B] = 25e^{-(3t)/25}(e^{2t/25} - 1)$$

## 2.3 Gráfico das soluções numéricas

Os métodos foram usados com ordem = 6 para os de passos múltiplos, ordem = 4 para o runge-kutta e ordem = 1 para os eulers, tomando como base 10000 iterações e um  $h = 0.01$

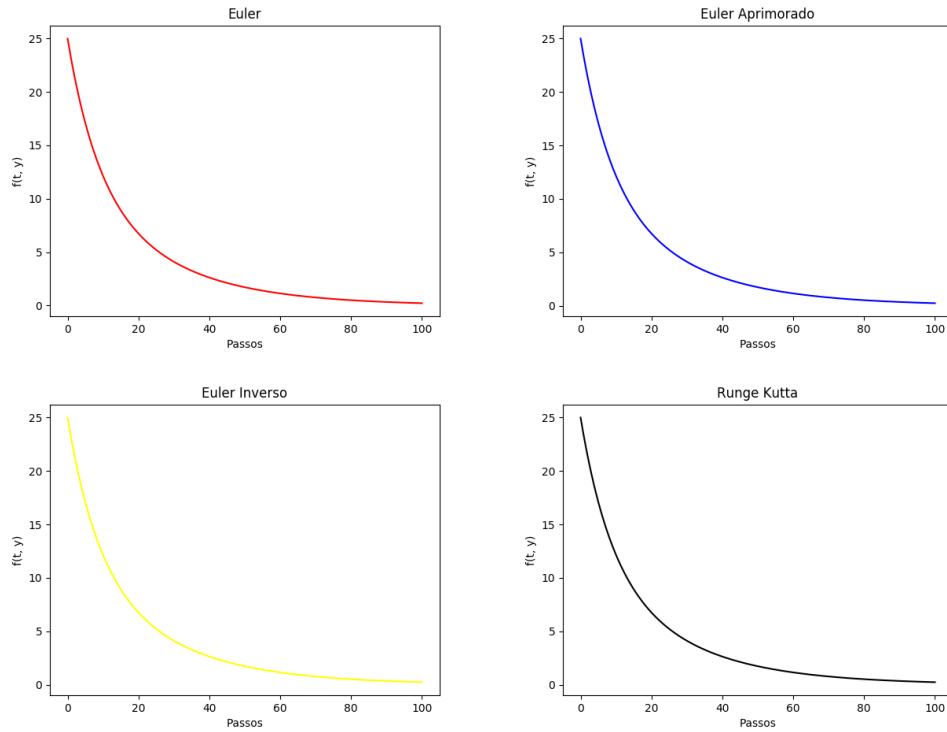


Figura 1: Métodos de passos simples para a equação do tanque A

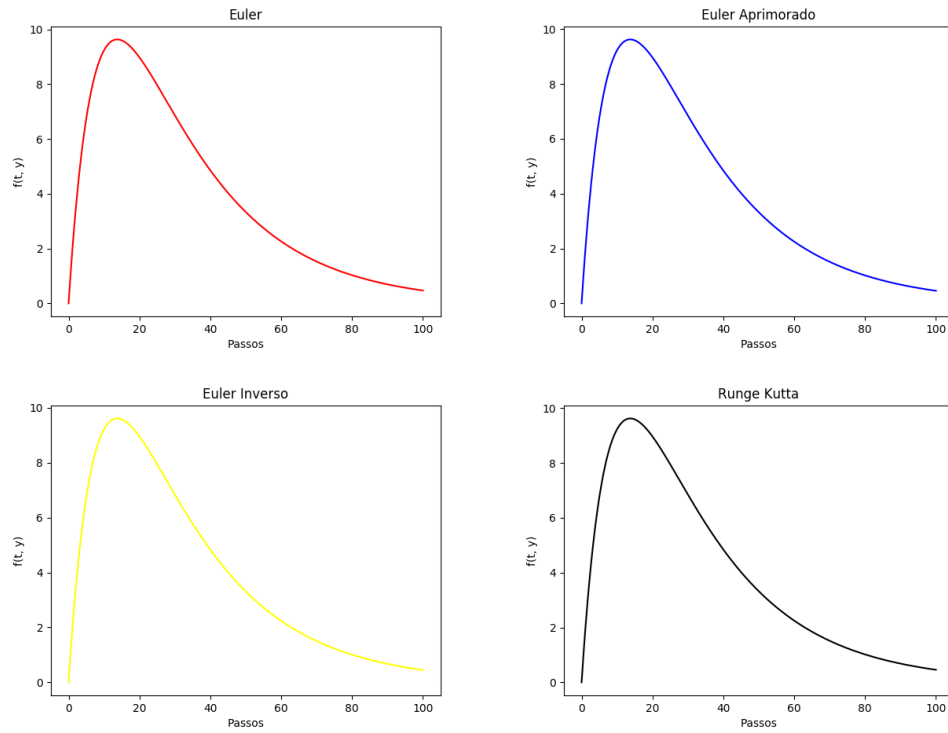


Figura 2: Métodos de passos simples para a equação do tanque B

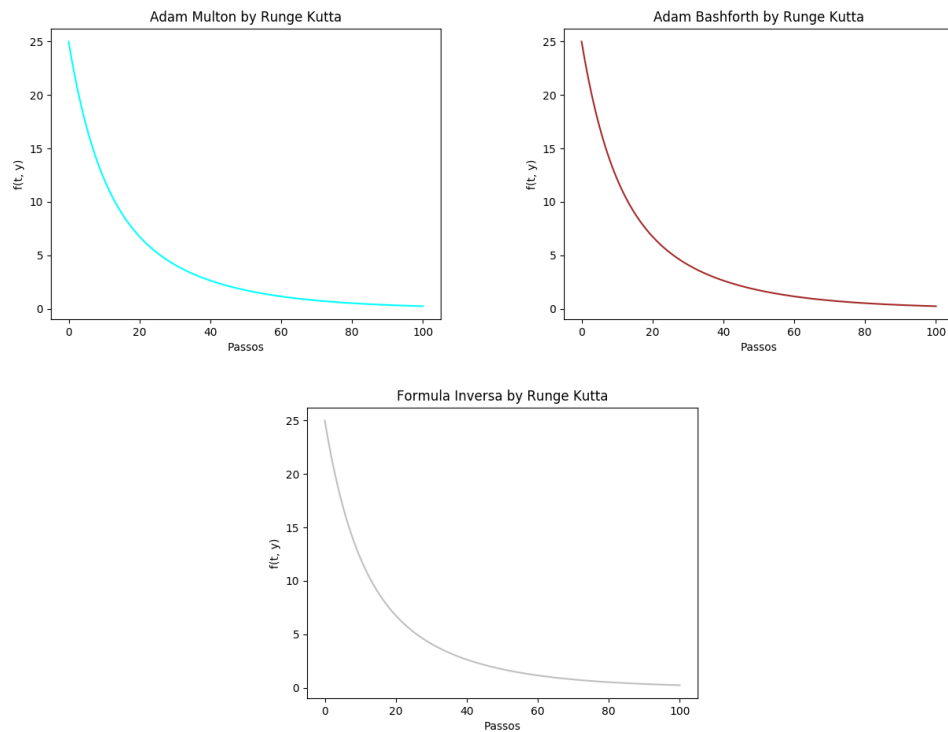


Figura 3: Métodos de passos múltiplos para a equação do tanque A



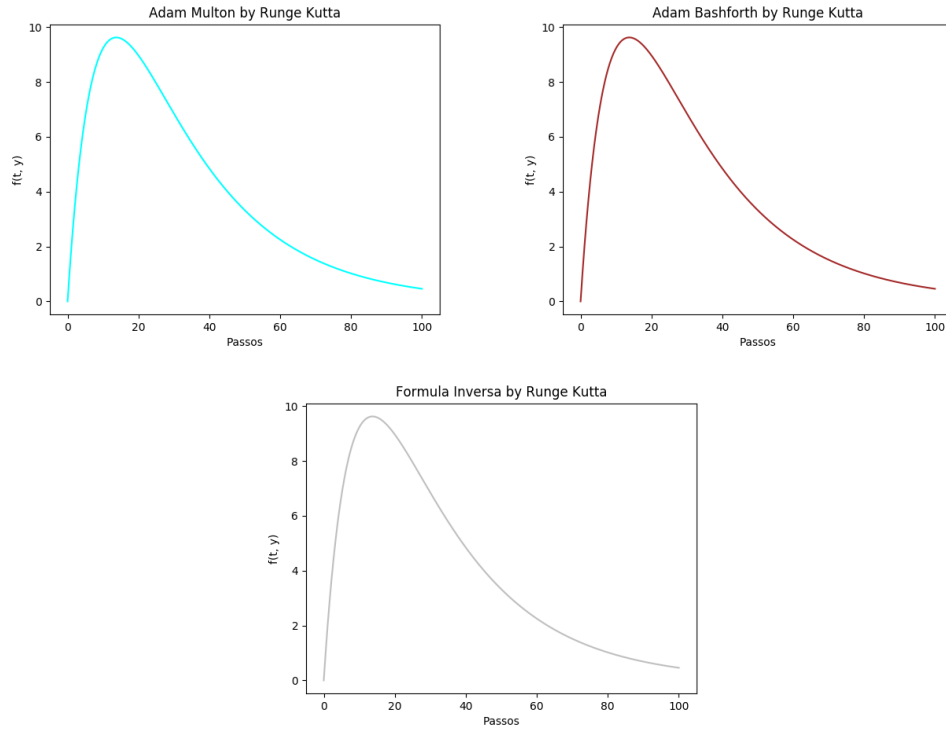


Figura 4: Métodos de passos múltiplos para a equação do tanque B

Como é possível notar nos gráficos gerados pelos métodos, tanto o tanque A quanto o tanque B tendem, após uma certa quantia de tempo, a uma cte. que pode ser calculada a partir do limite de suas equações quando  $t$  tender ao infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{25}{2} e^{-(3t)/25} (e^{2t/25} + 1) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 25 e^{-(3t)/25} (e^{2t/25} - 1) = 0$$

Logo é possível notar que quando  $t$  tende ao infinito, ambas as equações que definem a quantidade de sal nos tanques tende a zero, ou seja, a água em ambos os tanques se torna totalmente pura.

## 2.4 Comparação e análise de desempenho

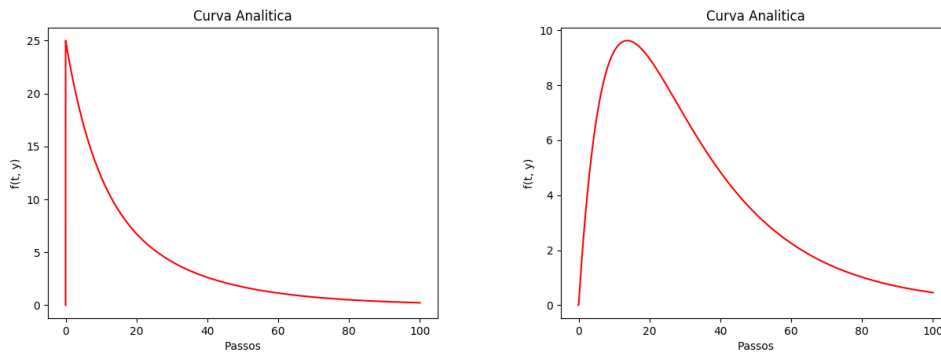


Figura 5: Curva analítica para os tanques A e B, respectivamente

Para o tanque A:

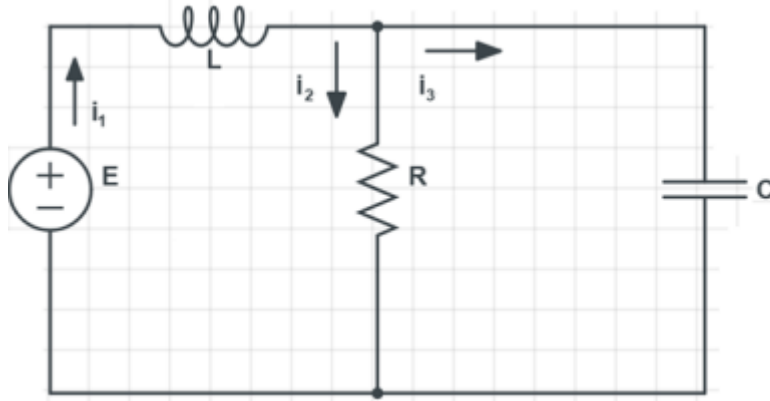
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.0108048258525886600	11.59800225300023200
Euler Aprimorado	0.0004709446229427919	14.41205902599995200
Euler Inverso	0.0096969795435341940	12.52702134199989800
Runge-Kutta	0.0004692057777403806	25.29071233800005000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.0004687661187315969	51.35361305399965000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.0004687661187558823	30.82791833299961600
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.0004687661004434365	52.82960727399950000

Para o tanque B:

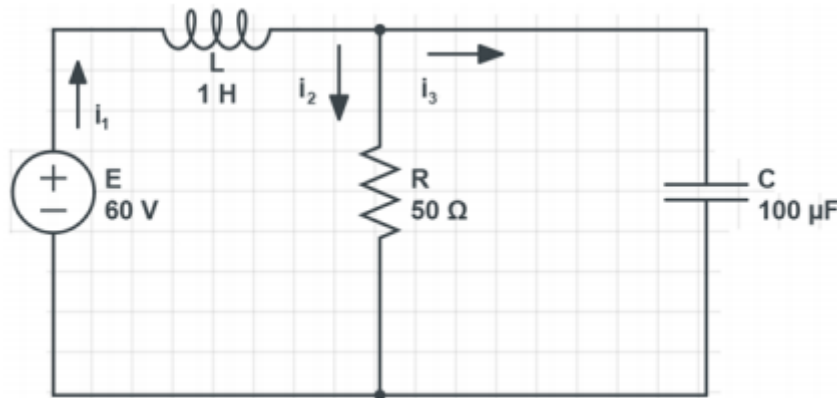
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.0060006359343268770	11.78195219100052800
Euler Aprimorado	0.0009779357032494515	14.42109552700094400
Euler Inverso	0.0073964231583328300	13.30305756199959400
Runge-Kutta	0.0009793411430042180	25.55836693000128400
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.0007714542257311467	52.61620650999975600
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.0007714542257347268	35.03763693700057000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.0007714542168683006	52.92300133599929000

### 3 Segundo Problema

(a) Descreva o sistema de equações diferenciais que descrevem  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  no circuito elétrico contendo um resistor, um indutor e um capacitor mostrado abaixo.



(b) Resolva por Laplace o sistema encontrado supondo que  $E(t) = 60V$ ,  $L = 1H$ ,  $R = 50\Omega$ ,  $C = 10^{-4}F$  e que inicialmente  $i_1 = i_2 = 0$  (ver figura).



(c) Usando os métodos numéricos implementados da primeira parte do projeto e a solução exata encontrada, plote os gráficos de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  mostrando os resultados na apresentação e comparando a eficiência dos métodos e as precisões em comparação com a solução exata. Comente o que acontece no circuito quando  $t$  tende para infinito.

#### 3.1 Modelagem

Pela lei das malhas, temos que a soma das diferenças de potenciais em uma malha é igual a zero, logo a partir da malha esquerda da figura temos:

$$E - L \frac{di_1}{dt} - i_2 R = 0 \quad (6)$$

Já pela malha da direita da figura, temos:

$$\frac{Q}{C} - i_2 R = 0 \quad (7)$$

Podemos escrever Q como a integral da corrente  $i_3$  em função do tempo:

$$\frac{1}{C} \int_0^t i_3 t dt - i_2 R = 0 \quad (8)$$

Resolvendo a integral da equação 8, nós temos:

$$\frac{i_3 t}{C} - i_2 R = 0 \quad (9)$$

Por fim, derivando a equação 9 em relação ao tempo:

$$\frac{i_3}{C} - \frac{di_2}{dt} R = 0 \quad (10)$$

Pela regra da conservação das cargas, obtemos:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (11)$$

Substituindo o valor de  $i_3$  obtido pela equação 11 na equação 10, ficamos com:

$$\frac{i_1 - i_2}{C} - \frac{di_2}{dt} R = 0 \quad (12)$$

Por fim, multiplicando a equação 12 por C, obtemos a seguinte equação:

$$i_1 - i_2 - RC \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (13)$$

Utilizando as equações 6 e 13 podemos formar o nosso sistema de equações:

$$\begin{cases} E - L \frac{di_1}{dt} - i_2 R = 0 \\ i_1 - i_2 - RC \frac{di_2}{dt} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$(15)$$

### 3.2 Solução Analítica

Substituindo os valores informados no enunciado do problema nas equações 6 e 13 temos

$$60 - \frac{di_1}{dt} - 50i_2 = 0 \quad (16)$$

$$i_1 - i_2 - 5 \cdot 10^{-3} \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (17)$$

Aplicando laplace na equação 16, obtemos a seguinte equação:

$$\mathcal{L} \frac{di_1}{dt} = 60\mathcal{L}1 - 50\mathcal{L}i_2 \quad (18)$$

Usando as transformadas de Laplace, a equação 18 fica como:

$$sI_1 - i_1(0) = \frac{60}{s} - 50I_2 \quad (19)$$

logo, reorganizando a equação:

$$I_1 = \frac{60}{s^2} - \frac{50I_2}{s} \quad (20)$$

Aplicando laplace na equação 17, temos:

$$\mathcal{L}i_1 = \mathcal{L}i_2 + 5 \cdot 10^{-3} \mathcal{L} \frac{di_2}{dt} \quad (21)$$

Usando as transformadas de Laplace, a equação 21 fica como:

$$I_1 = I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s) \quad (22)$$

Substituindo a equação 22 na equação 20 temos

$$I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s + \frac{50}{s}) = \frac{60}{s^2} \quad (23)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por s

$$I_2(s + 5 \cdot 10^{-3} s^2 + 50s) = \frac{60}{s} \quad (24)$$

Manipulando a equação 24 algebricamente

$$I_2 = \frac{120}{s(s^2 + 2s + 100)} \quad (25)$$

$$I_2 = \frac{120}{s10^{-2}(s^2 + 2s + 100)} \quad (26)$$

$$I_2 = \frac{12000}{s(s + 100)^2} \quad (27)$$

Usando a inversa de laplace na equação 27

$$i_2(t) = 12 \cdot 10^3 \int_0^t \tau e^{-100\tau} d\tau \quad (28)$$

E resolvendo a integral, encontramos o valor para  $i_2$ , segue

$$i_2(t) = \frac{1}{10000} [1 - (100t + 1)e^{-100t}] \cdot 12 \cdot 10^3 \quad (29)$$

$$i_2(t) = -120te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 \quad (30)$$

Substituindo a equação 27 na equação 22, vemos que  $I_1$  é

$$I_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{s \cdot (s + 100)^2} + \frac{60}{(s + 100)^2} \quad (31)$$

Aplicando a inversa de laplace na equação 31 e substituindo o valor de  $i_2$  encontrado na equação 30, obtem-se:

$$i_1(t) = -120te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 + 60te^{-100t} \quad (32)$$

portanto, reorganizando a equação:

$$i_1(t) = -60te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 \quad (33)$$

Logo a solução por Laplace para o sistema encontrado na seção anterior e utilizando os valores informados no enunciado do problema é mostrada nas equações 30 e 33.

### 3.3 Gráfico das soluções numéricas

Os métodos foram usados com ordem = 6 para os de passos múltiplos, ordem = 4 para o runge-kutta e ordem = 1 para os eulers, tomando como base 10000 iterações e um  $h = 0.01$

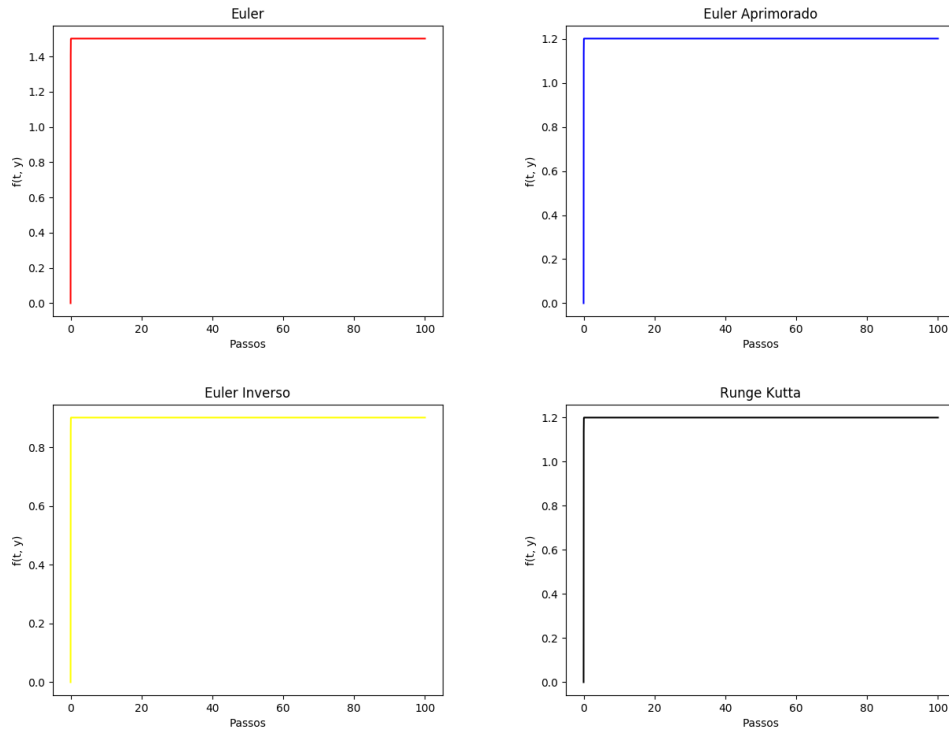


Figura 6: Métodos de passos simples para a equação da corrente i1

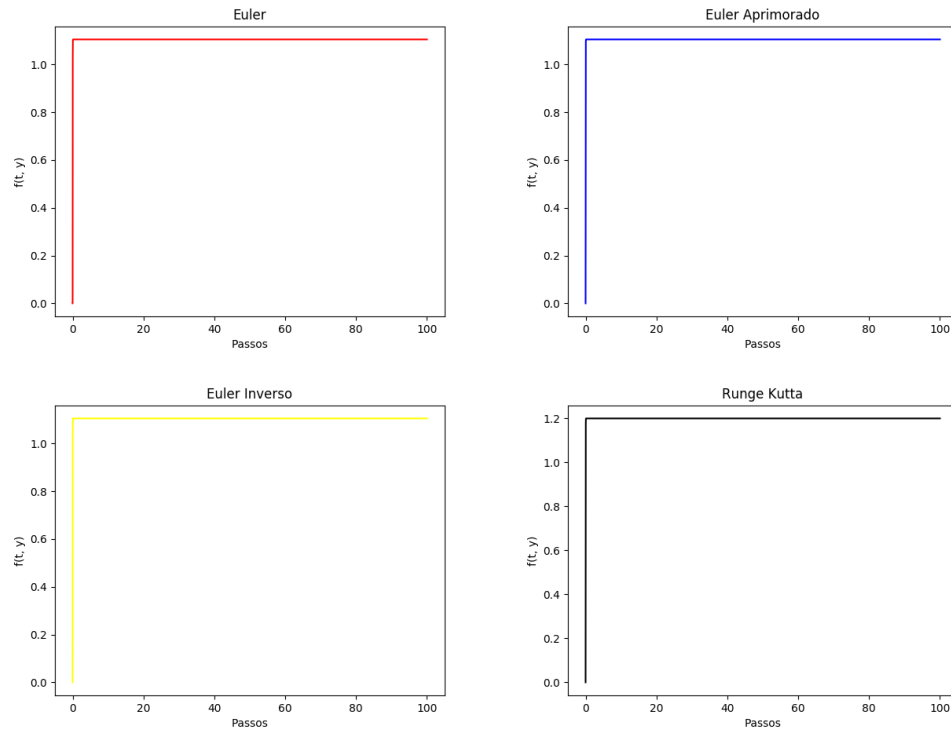


Figura 7: Métodos de passos simples para a equação da corrente  $i_2$

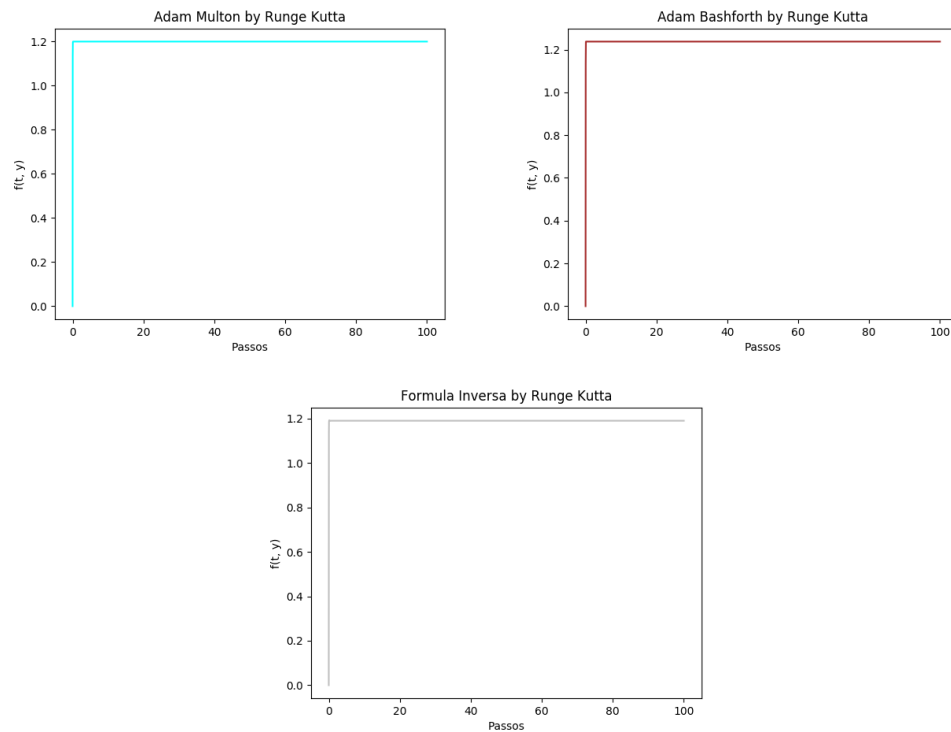


Figura 8: Métodos de passos múltiplos para a equação da corrente  $i_1$

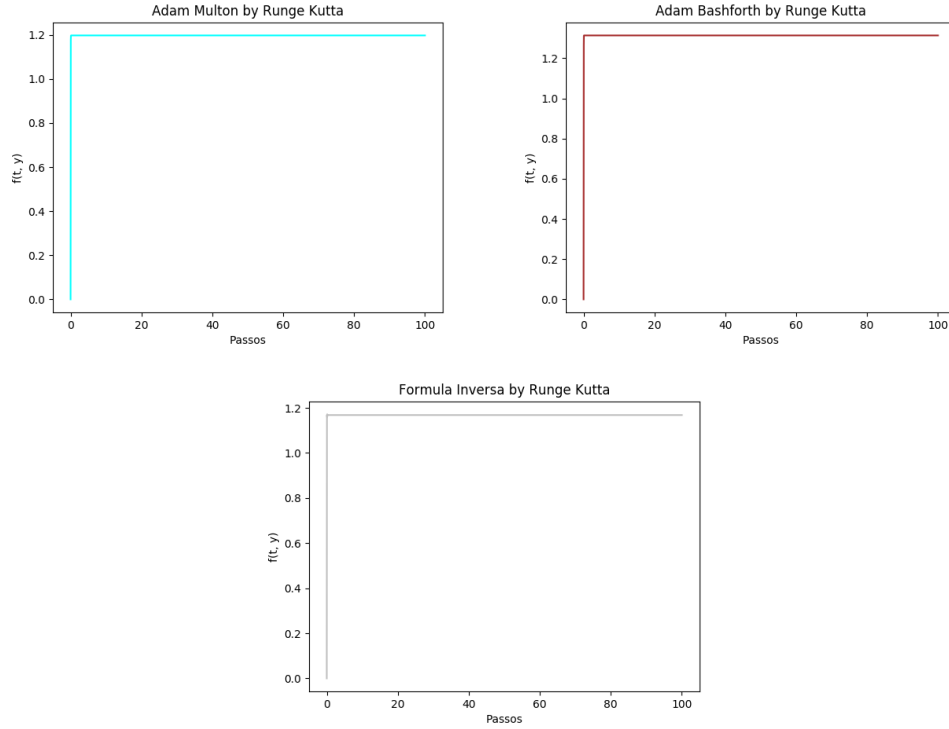


Figura 9: Métodos de passos múltiplos para a equação da corrente i2

Como é possível notar nos gráficos gerados pelos métodos, tanto a corrente i1 quanto a corrente i2 tendem, após uma certa quantia de tempo, a uma cte. que pode ser calculada a partir do limite de suas equações quando t tender ao infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -60te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 = 1.2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -120te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 = 1.2$$

Aplicando L'hospital em ambos os termos  $te^{-100t}$  nós notamos que nessa parcela de equação tende a zero, assim como no termo  $1.2e^{-100t}$  também temos tendência a zero, dessa forma o nosso limite fica como sendo o limite de uma constante (que é a própria constante), assumindo o valor de 1.2.



### 3.4 Comparação e análise de desempenho

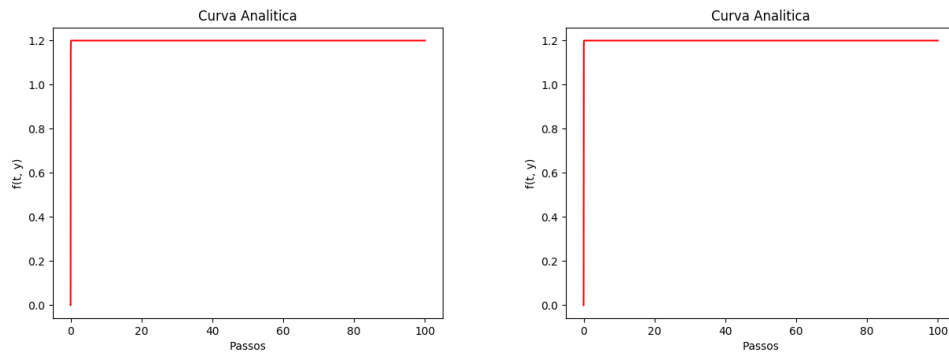


Figura 10: Curva analítica para as correntes  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente

Para a corrente  $i_1$

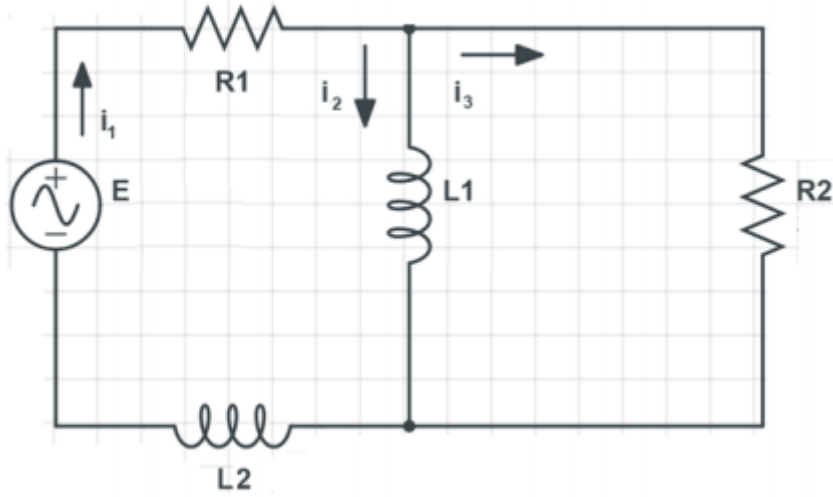
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.251430044774994500	11.602277582000170000
Euler Aprimorado	0.001417864799070890	13.629271321000488000
Euler Inverso	0.248611418340939100	12.652170947001650000
Runge-Kutta	0.000423068968327848	22.827011986999423000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.000644460580494456	46.779435370001010000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.031134816296751720	30.504497595000430000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.008057047787682205	46.627114184999300000

Para a corrente  $i_2$

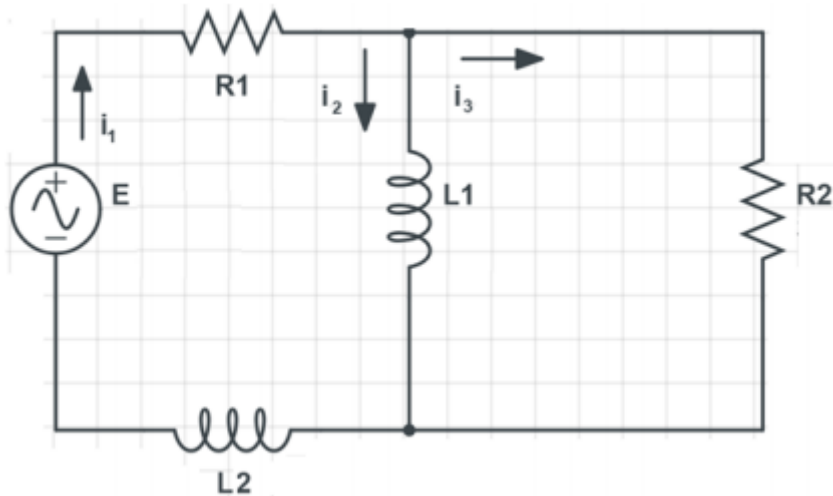
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.079346140236202490	10.356844956999339000
Euler Aprimorado	0.079408088833889210	11.286269763999371000
Euler Inverso	0.079527994837800120	11.363029144000393000
Runge-Kutta	0.001172471542106021	19.196159512999657000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.002237778539132991	44.365425326001060000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.094591986405195180	25.409403187999487000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.026406731711903050	40.776882279000350000

## 4 Terceiro Problema

(a) Descreva o sistema de equações diferenciais que descrevem  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  no circuito elétrico contendo dois resistores e dois indutores mostrado abaixo.



(b) Use Variação dos parâmetros para resolver o sistema encontrado se,  $R_1 = 8\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $L_1 = 1H$ ,  $L_2 = 1H$ ,  $E(t) = 100\sin(t)V$ ,  $i_1(0) = 0$ ,  $i_2(0) = 0$ .



(c) Usando os métodos numéricos implementados da primeira parte do projeto e a solução exata encontrada, plote os gráficos de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  mostrando os resultados na apresentação e comparando a eficiência dos métodos e a precisão em comparação com a solução exata. Comente qual o valor máximo e mínimo que a corrente pode atingir.

### 4.1 Modelagem

Pela lei das malhas, temos que a soma das diferenças de potenciais em uma malha é igual a zero, logo a partir da malha esquerda da figura temos:

$$-i_1 R_2 + i_2 R_2 - L_2 i_1' + E - i_1 R_1 = 0 \quad (34)$$

Já usando a malha externa da figura, temos:

$$E = i_3 R_2 + L_2 i_1' + i_1 R_1 \quad (35)$$

Usando a lei dos nós de Kirchoff, também obtemos a seguinte equação:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (36)$$

Dessa forma, podemos montar o seguinte sistema (já realizando as substituições de 36 em 35 e 34:

$$\begin{cases} E = i_1 R_2 - i_2 R_2 + L_2 i_1' + i_1 R_1 \\ E = i_1 R_1 + i_2' L_1 + L_2 i_1' \end{cases} \quad (37)$$

$$(38)$$

## 4.2 Solução Analítica

Assumindo que A e B como a nossa primeira e a nossa segunda equação, respectivamente, podemos reescrever B como  $B = -B + A$

$$\begin{cases} E = i_1 R_2 - i_2 R_2 + L_2 i_1' + i_1 R_1 \\ 0 = i_1 R_2 - i_2 R_2 - i_2' L_1 \end{cases} \quad (39)$$

$$(40)$$

Dividindo A por  $L_2$  ( $A = \frac{A}{L_2}$ ) e B por  $L_1$  ( $B = \frac{B}{L_1}$ ), temos:

$$\begin{cases} \frac{E}{L_2} = \frac{i_1 R_2}{L_2} - \frac{i_2 R_2}{L_2} + i_1' + \frac{i_1 R_1}{L_2} \\ 0 = \frac{i_1 R_2}{L_1} - \frac{i_2 R_2}{L_1} - i_2' \end{cases} \quad (41)$$

$$(42)$$

Reescrevendo em forma de matriz, temos:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{-R_1}{L_2} - \frac{-R_2}{L_2}\right) & \frac{R_2}{L_2} \\ \frac{R_2}{L_1} & \frac{-R_2}{L_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores do enunciado, temos que:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante, obtemos:

$$r^2 + 14r + 24 = 0 \quad (43)$$

Cujas raízes são:

$$\begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -12 \end{cases} \quad (44)$$

$$(45)$$

Para a raiz  $r_1 = -2$ , obtem-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0$$

De onde obtemos o seguinte sistema:

$$\{-9\xi_1 + 3\xi_2 = 0 \quad (46)$$

Logo, obtemos:

$$3\xi_2 = 9\xi_1 \quad (47)$$

Portanto:

$$\xi_2 = 3\xi_1 \quad (48)$$

Dessa forma, obtemos então:

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para a raiz  $r_1 = -12$ , obtem-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0$$

De onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 = 0 \\ 3\xi_1 + 9\xi_2 = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Logo, obtemos:

$$\xi_1 = -3\xi_2 \quad (51)$$

Dessa forma, obtemos então:

$$\xi^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo a equação homogênea é dada por:

$$x(t)_H = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-12t} \quad (52)$$

Com isso, chegamos a matriz fundamental:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-12t} \\ 3e^{-2t} & -e^{-12t} \end{bmatrix} \quad (53)$$

A partir da matriz fundamental podemos obter a matriz fundamental inversa:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}}{\frac{10}{3e^{12t}}} & \frac{3e^{2t}}{\frac{10}{-e^{12t}}} \\ \frac{3e^{12t}}{10} & \frac{-e^{12t}}{10} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Dessa forma, como tínhamos a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar  $\Gamma$  a partir da seguinte equação:

$$I' = AI + F(t) \quad (55)$$

Temos que, pela definição:

$$I_p = \Phi \cdot U \quad (56)$$

Podemos encontrar o valor de U a partir da seguinte equação:

$$U = \int \Phi^{-1} F(t) dt = \int \begin{bmatrix} 10e^{2t} \sin t \\ 30e^{12t} \sin t \end{bmatrix} dt \quad (57)$$

Logo, colocando o resultado na eq.56:

$$I_p = \begin{bmatrix} \frac{332 \sin t}{29} & \frac{-76 \cos t}{29} \\ \frac{276 \sin t}{29} & \frac{-168 \cos t}{29} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Logo, como em  $I(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  teremos, por fim, que as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são:

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = \frac{6}{29} \end{cases} \quad (59)$$

$$\quad (60)$$

Logo, substituindo na homogênea encontrada, obtemos a solução geral:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + \frac{6}{29} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-12t} + \begin{bmatrix} \frac{332 \sin t}{29} & \frac{-76 \cos t}{29} \\ \frac{276 \sin t}{29} & \frac{-168 \cos t}{29} \end{bmatrix} \quad (61)$$

### 4.3 Gráfico das soluções numéricas

Os métodos foram usados com ordem = 6 para os de passos múltiplos, ordem = 4 para o runge-kutta e ordem = 1 para os eulers, tomando como base 10000 iterações e um  $h = 0.01$

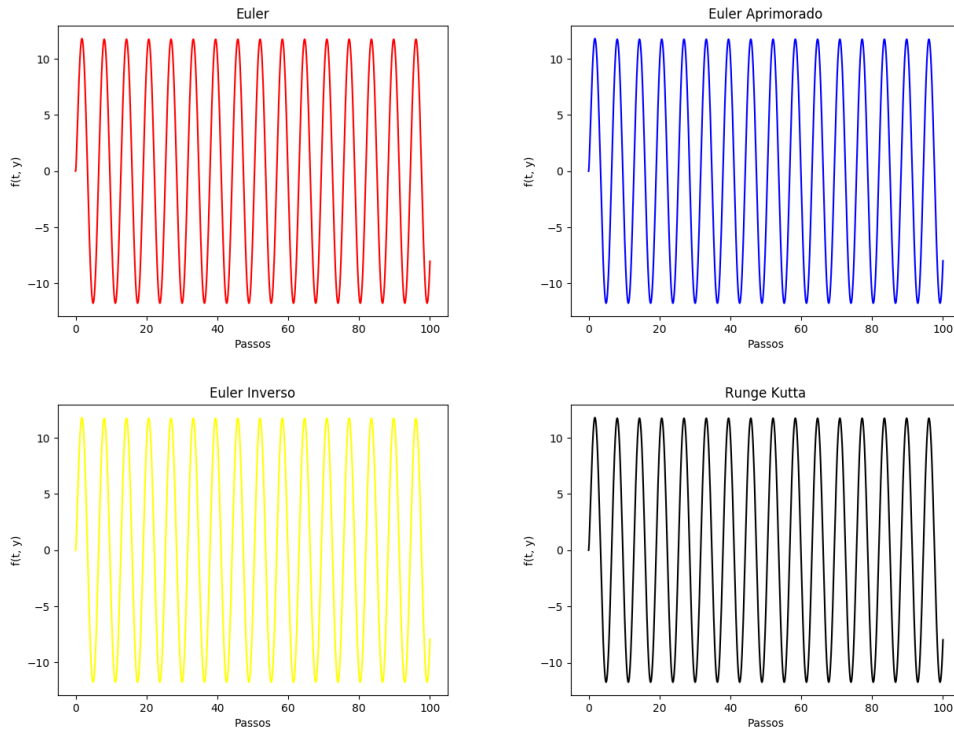


Figura 11: Métodos de passos simples para a equação da corrente i1

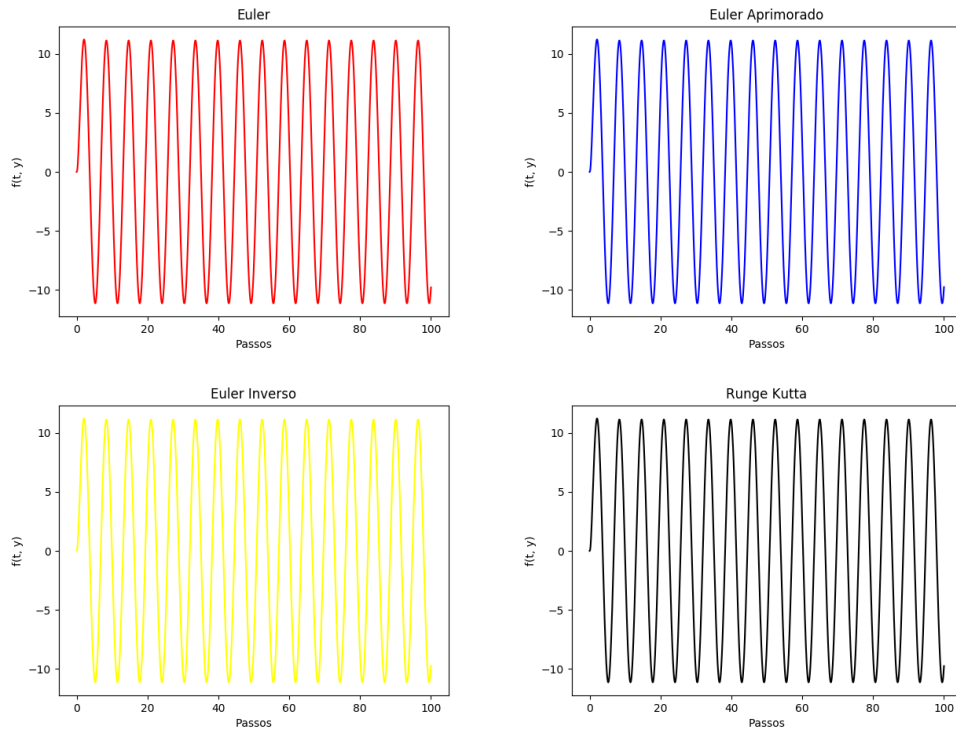


Figura 12: Métodos de passos simples para a equação da corrente i2

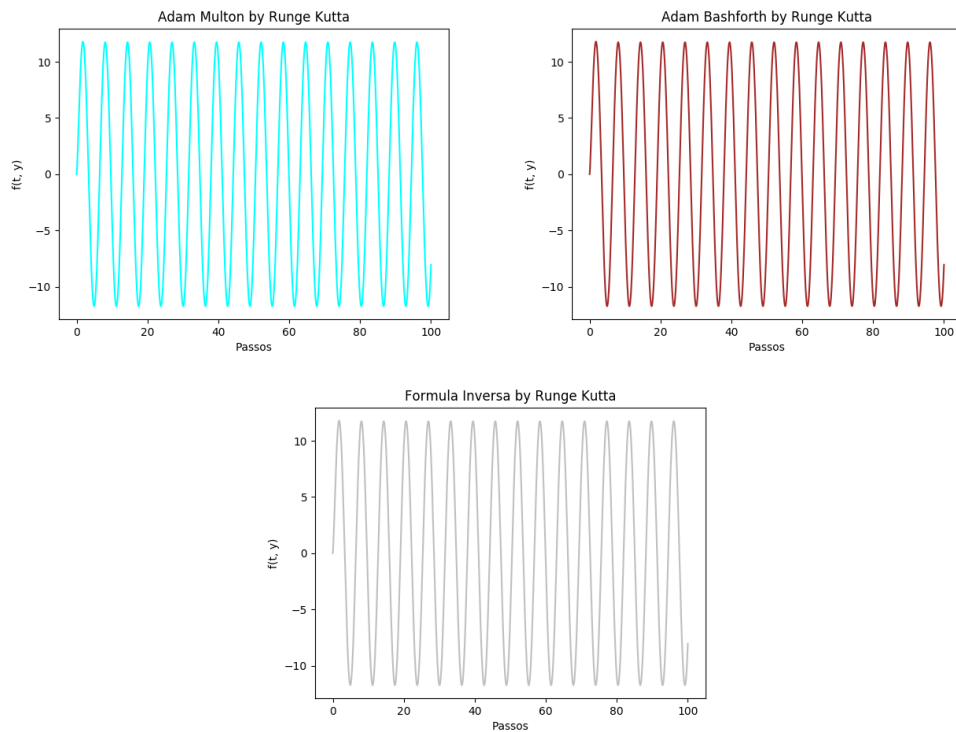


Figura 13: Métodos de passos múltiplos para a equação da corrente i1

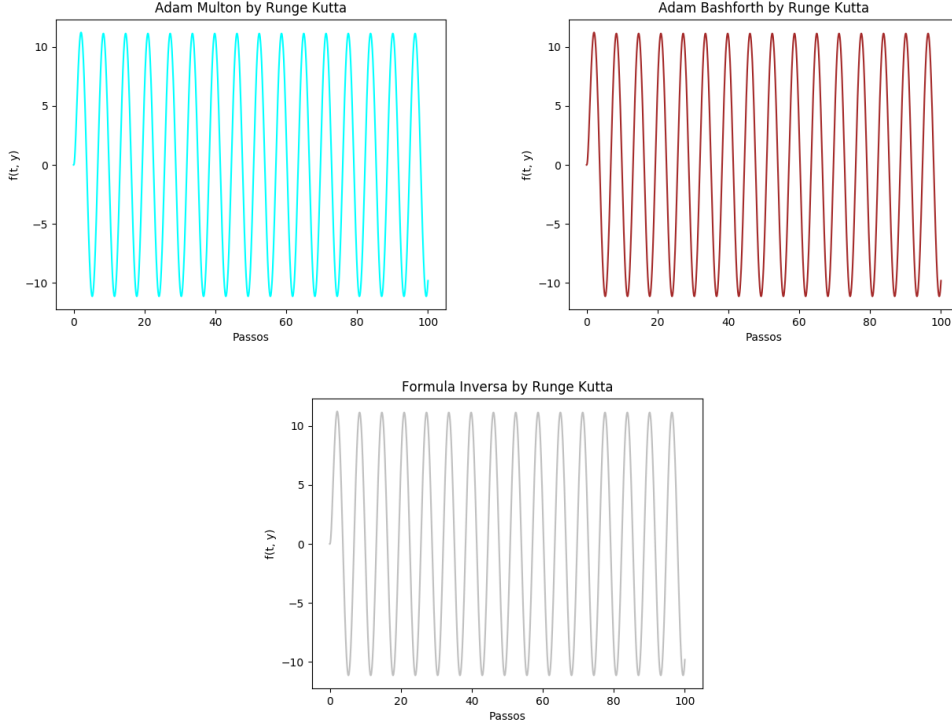


Figura 14: Métodos de passos múltiplos para a equação da corrente  $i_2$

Para obter o valor máximo e mínimo que as correntes podem atingir, podemos derivar a equação referente às correntes  $i_1$  e  $i_2$  e igualar a zero, de modo a obtermos o pico (amplitude), que é onde ocorre a corrente máxima e mínima.

$$\begin{cases} i_1(t) = 2e^{-2t} + \frac{18}{29}e^{-12t} + \frac{332}{29}\sin t - \frac{76}{29}\cos t \\ i_1'(t) = \frac{-216}{29}e^{-12t} - 4e^{-2t} + \frac{76}{29}\sin t + \frac{332}{29}\cos t = 0 \end{cases} \quad (62)$$

$$(63)$$

$$\begin{cases} i_2(t) = 6e^{-2t} - \frac{6}{29}e^{-12t} + \frac{276}{29}\sin t - \frac{168}{29}\cos t \\ i_2'(t) = \frac{72}{29}e^{-12t} - 12e^{-2t} + \frac{168}{29}\sin t + \frac{276}{29}\cos t = 0 \end{cases} \quad (64)$$

$$(65)$$

Observando a derivada e rearranjando os termos, obtemos que as correntes máximas e seus respectivos tempos são:

$$\begin{cases} i_{1_{max}} = 11.74A(t = 6.51) \\ i_{2_{max}} = 11.14A(t = 6.83) \end{cases} \quad (66)$$

$$(67)$$

Analogamente, as correntes mínimas e seus respectivos tempos são:

$$\begin{cases} i_{1_{min}} = -11.74A(t = 3.36) \\ i_{2_{min}} = -11.14A(t = 3.68) \end{cases} \quad (68)$$

$$(69)$$



## 4.4 Comparação e análise de desempenho

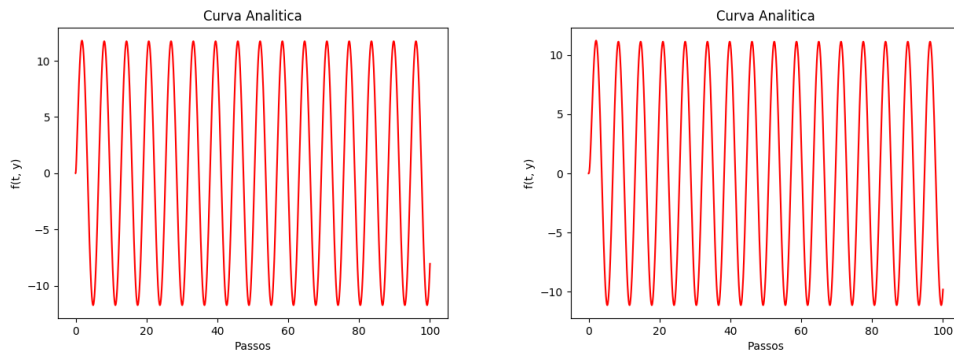


Figura 15: Curva analítica para as correntes  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente

Para a corrente  $i_1$

Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.009611517371893686	24.665073835001750000
Euler Aprimorado	0.019126143199493020	28.487009765000040000
Euler Inverso	0.047425733994986020	27.996622590999323000
Runge-Kutta	0.019159397752914350	51.085060620000150000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.019684703613988750	86.963522034999190000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.019684725228976280	62.449688984999740000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.019684695414390690	84.357299414999940000

Para a corrente  $i_2$

Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.021449162178212290	26.529602385000544000
Euler Aprimorado	0.043421685699840550	29.648815021000700000
Euler Inverso	0.111077871914092200	26.481343131999893000
Runge-Kutta	0.043298465007121680	49.270973112001230000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.042181432202994560	88.481488043000350000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.042181374912469300	61.888950270000350000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.042181453699299200	85.180135425000120000

## 5 Conclusão

Por meio do projeto, foi possível perceber a grande aplicabilidade que os assuntos aprendidos durante o decorrer da disciplina possuem, não só no que diz respeito à área matemática mas também a outras áreas como por exemplo: resolução de problemas envolvendo modelagem de situações cotidianas (como acontece no problema 1) e resolução de problemas envolvendo circuitos elétricos (como acontece nos problemas 2 e 3). Por fim, é perceptível que, para resolver certos problemas que envolvem equações diferenciais e funções matemáticas, é possível obter resultados de grande precisão e com pequena margem de erro em relação à solução analítica fazendo uso dos métodos numéricos lecionados.