Victor Miguel de Morais Costa (vmmc2)
Victor Hugo Meirelles Silva (vhms)
Zênio Ângelo Oliveira Neves (zaon)
Zilde Souto Maior Neto (zsmn)

RELATÓRIO DE PROJETO

Métodos Numéricos

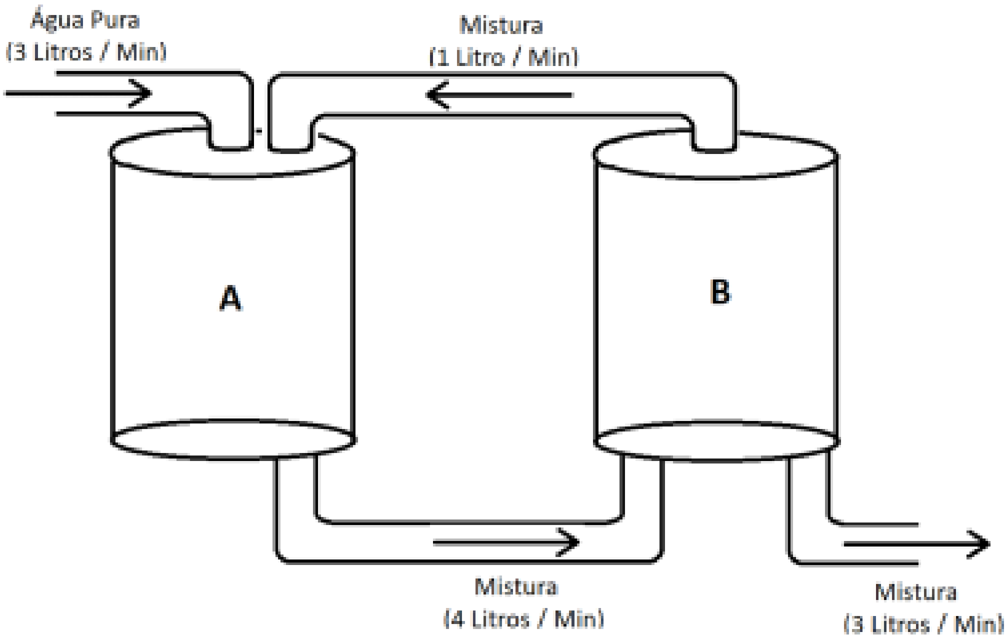
Recife
2019

Sumário

1 Introdução

2 Primeiro Problema

Considere os dois tanques mostrados na figura. O tanque A possui 50 Litros de água no qual 25 kilogramas de sal são dissolvidos. Suponha que o tanque B contenha 50 Litros de água pura inicialmente e que o liquido é bombeado para dentro e para fora dos tanques como mostrado na figura. A mistura trocada entre os dois tanques e o líquido bombeado para fora do tanque B são assumidos como estando bem misturados.



(a) Construa um modelo matemático que descreva o número de quilogramas x1(t) e x2(t) de sal nos tanques A e B, respectivamente, no tempo t.

(b) Usando os métodos numéricos implementados da primeira parte do projeto e a solução encontrada no quesito anterior, plote os gráficos de x1(t) e x2(t) mostrando os resultados na apresentação final. Não esqueça de comparar a eficiência dos métodos e a precisão em comparação com a solução exata.

(c) Comente o que acontece quando t tende para o infinito.

2.1 Modelagem

As variações na quantidade de sal são devidas somente aos fluxos de entrada e de saida do tanque. Mais precisamente a taxa de variação de sal no tanque, $\frac{dQ}{dt}$, é igual a taxa segundo a qual o sal está entrando menos a taxa segundo a qual ele está saindo:

$$\frac{dQ}{dt} = taxa_{entrada} - taxa_{saida} \tag{1}$$

A taxa de variação de sal no tanque A ($\frac{dQ_A}{dt}$) é dada por:

$$\frac{dQ_A}{dt} = \frac{1}{50}Q_B - \frac{2}{25}Q_A \tag{2}$$

A taxa de variação de sal no tanque B ($\frac{dQ_B}{dt}$) é dada por:

$$\frac{dQ_B}{dt} = \frac{2}{25}Q_A - \frac{2}{25}Q_B \tag{3}$$

2.2 Solução Analítica

Dessa forma, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 50Q'_A = Q_B - 4Q_A & (4) \\ 25Q'_B = 2Q_A - 2Q_B & (5) \end{cases}$$

Onde, aplicando Laplace para a primeira equação:

$$\begin{aligned} 50\mathcal{L}Q'_A &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50[s\mathcal{L}Q_A - Q_A(0)] &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50[s\mathcal{L}Q_A - 25] &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50s\mathcal{L}Q_A - 1250 &= \mathcal{L}Q_B - 4\mathcal{L}Q_A \\ 50s\mathcal{L}Q_A + 4\mathcal{L}Q_A &= \mathcal{L}Q_B + 1250 \\ 50sF_A + 4F_A &= F_B + 1250 \\ F_A[50s + 4] &= F_B + 1250 \\ F_A &= \frac{F_B + 1250}{50s + 4} \end{aligned}$$

E aplicando Laplace para a segunda equação:

$$\begin{aligned} 25Q'_B &= 2Q_A - 2Q_B \\ 25\mathcal{L}Q'_B &= 2\mathcal{L}Q_A - 2\mathcal{L}Q_B \\ 25[s\mathcal{L}Q_B - 0] &= 2\mathcal{L}Q_A - 2\mathcal{L}Q_B \\ 25sF_B &= 2F_A - 2F_B \\ 25sF_B + 2F_B &= 2F_A \end{aligned}$$

Aplicando o F_A obtido na primeira equação na segunda:

$$\begin{aligned} 25sF_B + 2F_B &= 2\frac{F_B + 1250}{50s + 4} \\ (25sF_B + 2F_B)(50s + 4) &= 2F_B + 2500 \\ 1250s^2F_B + 100sF_B + 100sF_B + 8F_B &= 2FB + 2500 \\ 1250s^2F_B + 200sF_B + 6F_B &= 2500 \\ F_B(1250s^2 + 200s + 6) &= 2500 \\ F_B1250(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}) &= 2500 \end{aligned}$$

$$F_B(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}) = 2$$

$$F_B(s + \frac{1}{25})(s + \frac{3}{25}) = 2$$

$$F_B = \frac{2}{(s + \frac{1}{25})(s + \frac{3}{25})}$$

Substituindo F_B encontrado na equação para F_A encontrada:

$$F_A = \frac{\frac{2}{(s+\frac{1}{25})(s+\frac{3}{25})} + 1250}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{\frac{2}{s^2+\frac{4}{25}s+\frac{3}{625}} + 1250}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{\frac{2+1250(s^2+\frac{4}{25}s+\frac{3}{625})}{s^2+\frac{4}{25}s+\frac{3}{625}}}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{2 + 1250s^2 + 200s + 6}{s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625}} \frac{1}{50s + 4}$$

$$F_A = \frac{2 + 1250s^2 + 200s + 6}{(s^2 + \frac{4}{25}s + \frac{3}{625})(50s + 4)}$$

Finalmente, aplicando o Laplace inverso em F_A e F_B, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_A] = \frac{25}{2}e^{-(3t)/25}(e^{2t/25} + 1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_B] = 25e^{-(3t)/25}(e^{2t/25} - 1)$$

2.3 Gráfico das soluções numéricas

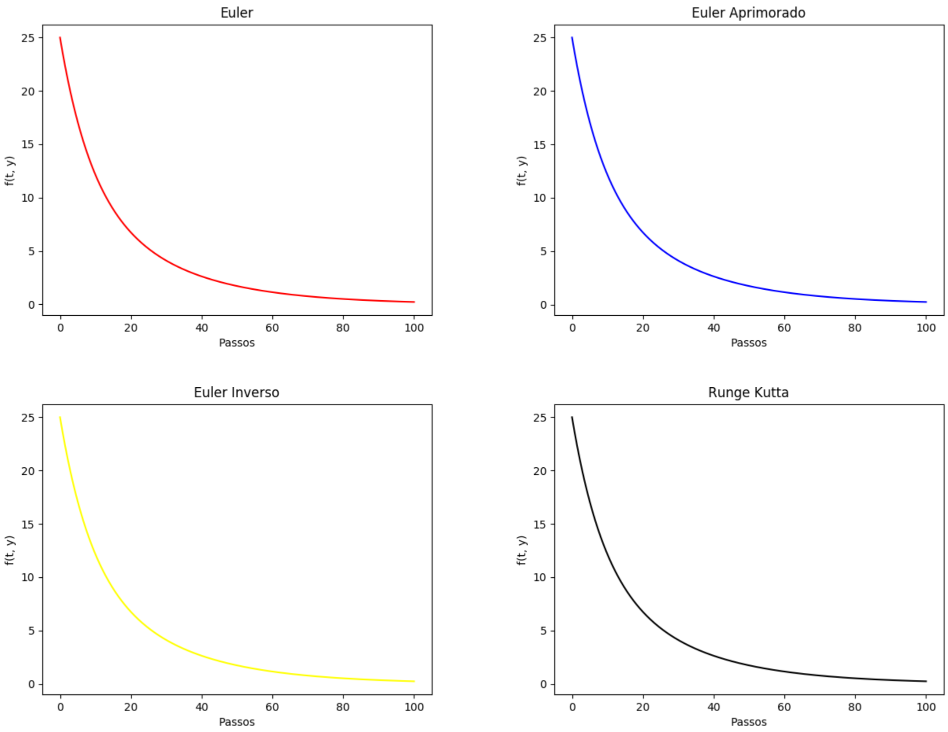


Figura 1: Métodos de passos simples para a equação do tanque A

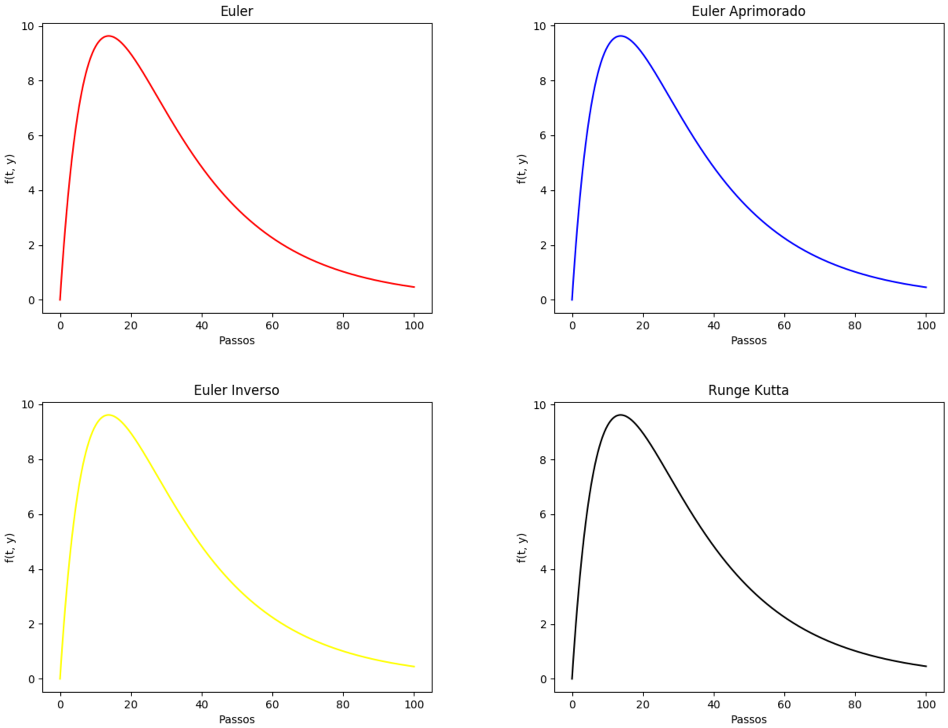


Figura 2: Métodos de passos simples para a equação do tanque B

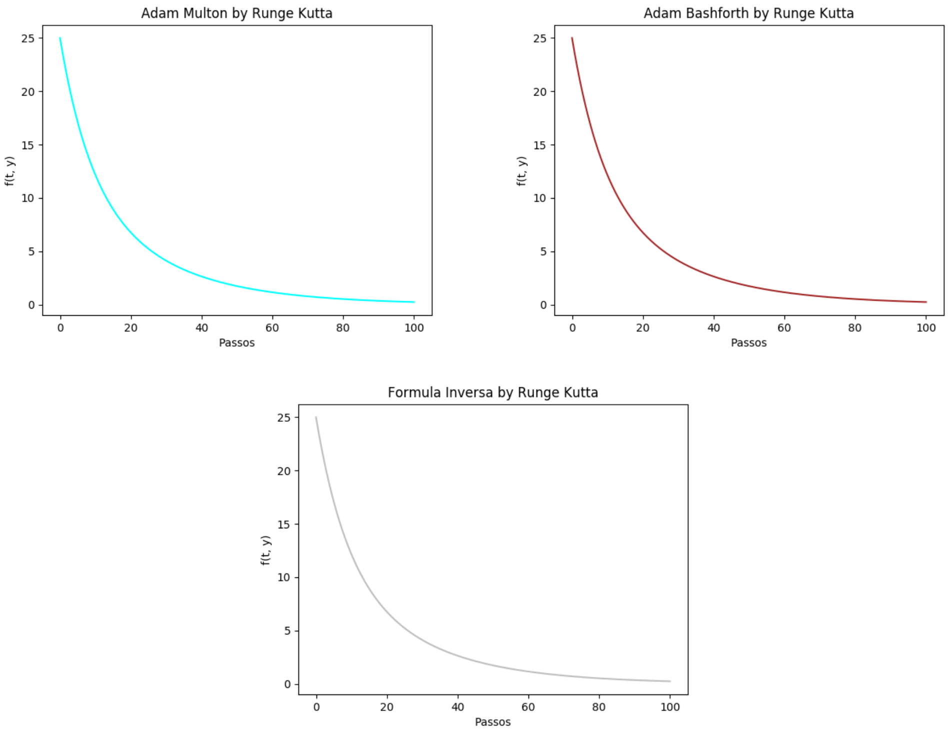


Figura 3: Métodos de passos múltiplos para a equação do tanque A

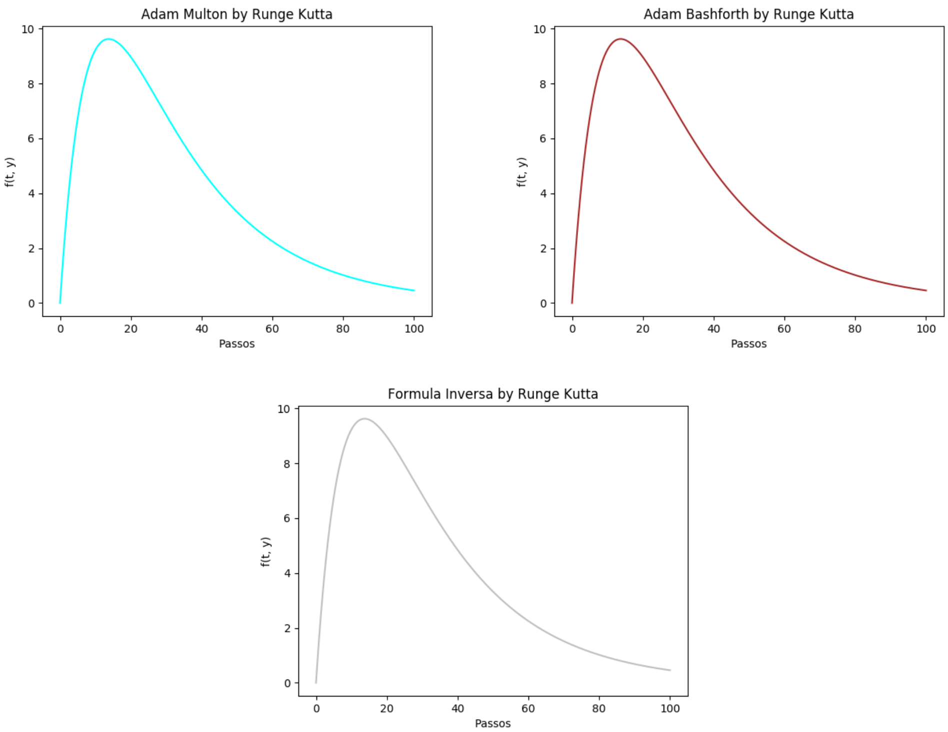


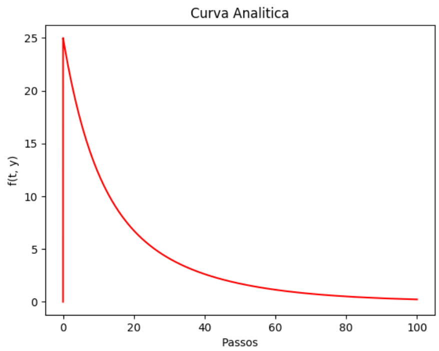
Figura 4: Métodos de passos múltiplos para a equação do tanque B

Como é possível notar nos gráficos gerados pelos métodos, tanto o tanque A quanto o tanque B tendem, após uma certa quantia de tempo, a uma cte. que pode ser calculada a partir do limite de suas equações quando t tender ao infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{25}{2} e^{-(3t)/25}(e^{2t/25}+1) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} 25e^{-(3t)/25}(e^{2t/25}-1) = 0$$

Logo é possível notar que quando t tende ao infinito, ambas as equações que definem a quantidade de sal nos tanques tende a zero, ou seja, a água em ambos os tanques se torna totalmente pura.

2.4 Comparação e análise de desempenho



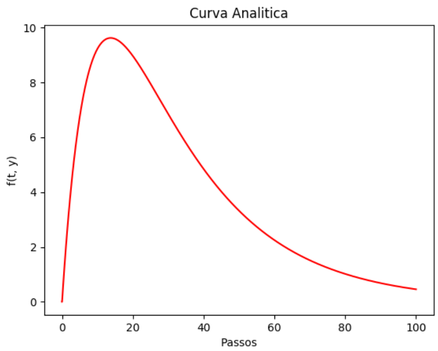


Figura 5: Curva analítica para os tanques A e B, respectivamente

Para o tanque A:

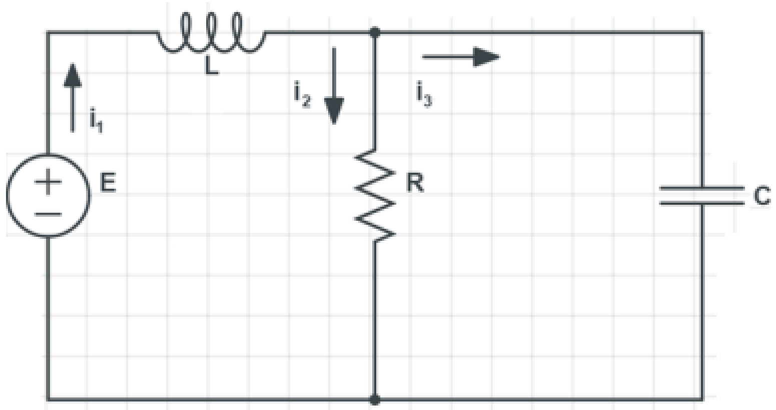
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.0108048258525886600	11.59800225300023200
Euler Aprimorado	0.0004709446229427919	14.41205902599995200
Euler Inverso	0.0096969795435341940	12.52702134199989800
Runge-Kutta	0.0004692057777403806	25.29071233800005000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.0004687661187315969	51.35361305399965000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.0004687661187558823	30.82791833299961600
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.0004687661004434365	52.82960727399950000

Para o tanque B:

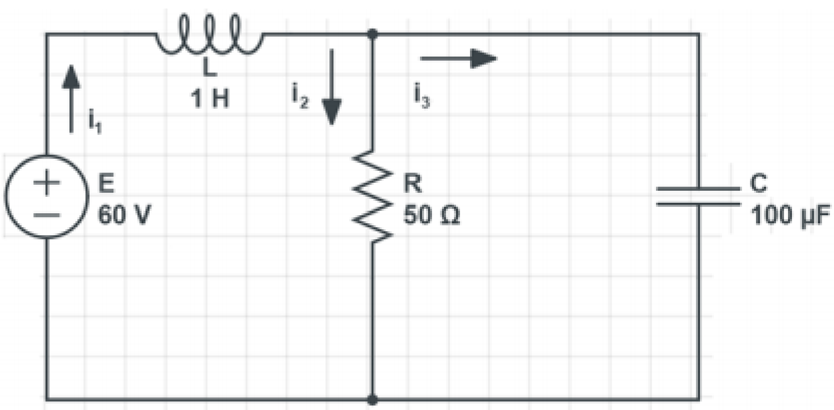
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.0060006359343268770	11.78195219100052800
Euler Aprimorado	0.0009779357032494515	14.42109552700094400
Euler Inverso	0.0073964231583328300	13.30305756199959400
Runge-Kutta	0.0009793411430042180	25.55836693000128400
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.0007714542257311467	52.61620650999975600
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.0007714542257347268	35.03763693700057000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.0007714542168683006	52.92300133599929000

3 Segundo Problema

(a) Descreva o sistema de equações diferenciais que descrevem i_1(t) e i_2(t) no circuito elétrico contendo um resistor, um indutor e um capacitor mostrado abaixo.



(b) Resolva por Laplace o sistema encontrado supondo que $E(t) = 60V, L = 1H, R = 50\Omega, C = 10^-4F$ e que inicialmente $i_1 = i_2 = 0$ (ver figura).



(c) Usando os métodos numéricos implementados da primeira parte do projeto e a solução exata encontrada, plote os gráficos de i1(t) e i2(t) mostrando os resultados na apresentação e comparando a eficiência dos métodos e as precisões em comparação com a solução exata. Comente o que acontece no circuito quando t tende para infinito.

3.1 Modelagem

Pela lei das malhas, temos que a soma das diferenças de potenciais em uma malha é igual a zero, logo a partir da malha esquerda da figura temos:

$$E - L\frac{di_1}{dt} - i_2R = 0 \tag{6}$$

Já pela malha da direita da figura, temos:

$$\frac{Q}{C} - i_2R = 0 \tag{7}$$

Podemos escrever Q como a integral da corrente i_3 em função do tempo:

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_3 t dt - i_2 R = 0 \tag{8}$$

Resolvendo a integral da equação 8, nós temos:

$$\frac{i_3 t}{C} - i_2 R = 0 \tag{9}$$

Por fim, derivando a equação 9 em relação ao tempo:

$$\frac{i_3}{C} - \frac{di_2}{dt} R = 0 \tag{10}$$

Pela regra da conservação das cargas, obtemos:

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{11}$$

Substituindo o valor de i_3 obtido pela equação 11 na equação 10, ficamos com:

$$\frac{i_1 - i_2}{C} - \frac{di_2}{dt} R = 0 \tag{12}$$

Por fim, multiplicando a equação 12 por C, obtemos a seguinte equação:

$$i_1 - i_2 - RC\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{13}$$

Utilizando as equações 6 e 13 podemos formar o nosso sistema de equações:

$$\begin{cases} E - L\dfrac{di_1}{dt} - i_2 R = 0 & (14) \\ i_1 - i_2 - RC\dfrac{di_2}{dt} = 0 & (15) \end{cases}$$

3.2 Solução Analítica

Substituindo os valores informados no enunciado do problema nas equações 6 e 13 temos

$$60 - \frac{di_1}{dt} - 50i_2 = 0 \tag{16}$$

$$i_1 - i_2 - 5 \cdot 10^{-3}\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{17}$$

Aplicando laplace na equação 16, obtemos a seguinte equação:

$$\mathcal{L}\frac{di_1}{dt} = 60\mathcal{L}1 - 50\mathcal{L}i_2 \tag{18}$$

Usando as transformadas de Laplace, a equação 18 fica como:

$$sI_1 - i_1(0) = \frac{60}{s} - 50I_2 \tag{19}$$

logo, reorganizando a equação:

$$I_1 = \frac{60}{s^2} - \frac{50I_2}{s} \tag{20}$$

Aplicando laplace na equação 17, temos:

$$\mathcal{L}i_1 = \mathcal{L}i_2 + 5 \cdot 10^{-3} \mathcal{L}\frac{di_2}{dt} \tag{21}$$

Usando as transformadas de Laplace, a equação 21 fica como:

$$I_1 = I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s) \tag{22}$$

Substituindo a equação 22 na equação 20 temos

$$I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s + \frac{50}{s}) = \frac{60}{s^2} \tag{23}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por s

$$I_2(s + 5 \cdot 10^{-3} s^2 + 50s) = \frac{60}{s} \tag{24}$$

Manipulando a equação 24 algebricamente

$$I_2 = \frac{120}{s(s^2 + 2s + 100)} \tag{25}$$

$$I_2 = \frac{120}{s10^{-2}(s^2 + 2s + 100)} \tag{26}$$

$$I_2 = \frac{12000}{s(s + 100)^2} \tag{27}$$

Usando a inversa de laplace na equação 27

$$i_2(t) = 12 \cdot 10^3 \int_0^t \tau e^{-100\tau} \, d\tau \tag{28}$$

E resolvendo a integral, encontramos o valor para i_2, segue

$$i_2(t) = \frac{1}{10000}[1 - (100t + 1)e^{-100t}] \cdot 12 \cdot 10^3 \tag{29}$$

$$i_2(t) = -120te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 \tag{30}$$

Substituindo a equação 27 na equação 22, vemos que I_1 é

$$I_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{s \cdot (s + 100)^2} + \frac{60}{(s + 100)^2} \tag{31}$$

Aplicando a inversa de laplace na equação 31 e substituindo o valor de i_2 encontrado na equação 30, obtem-se:

$$i_1(t) = -120te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 + 60te^{-100t} \tag{32}$$

portanto, reorganizando a equação:

$$i_1(t) = -60te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 \tag{33}$$

Logo a solução por Laplace para o sistema encontrado na seção anterior e utilizando os valores informados no enunciado do problema é mostrada nas equações 30 e 33.

3.3 Gráfico das soluções numéricas

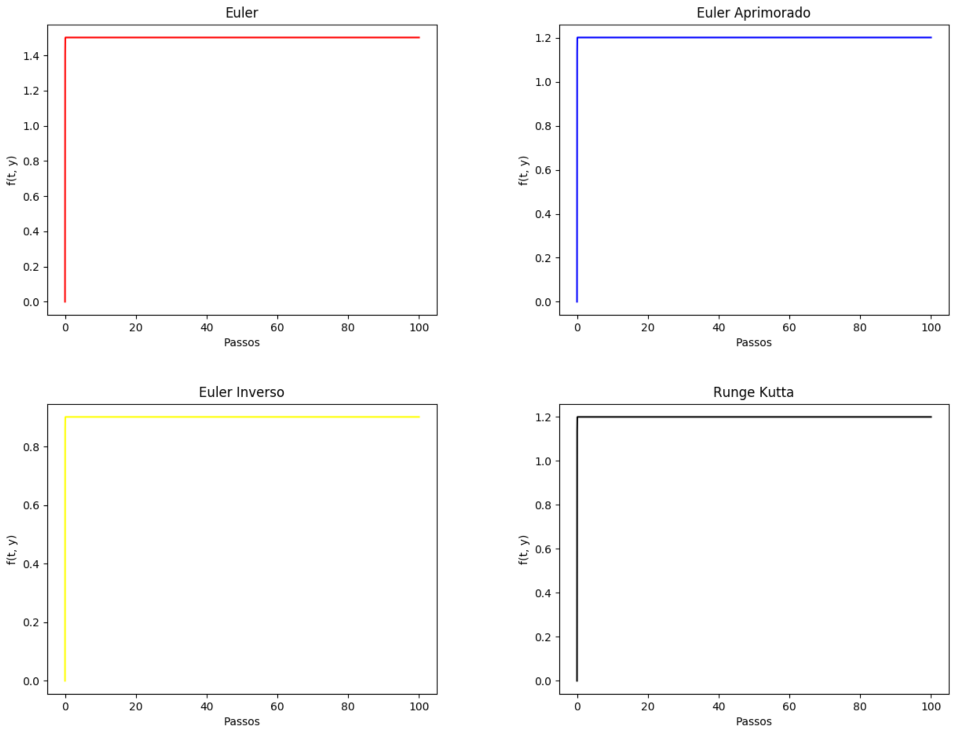


Figura 6: Métodos de passos simples para a equação da corrente i1

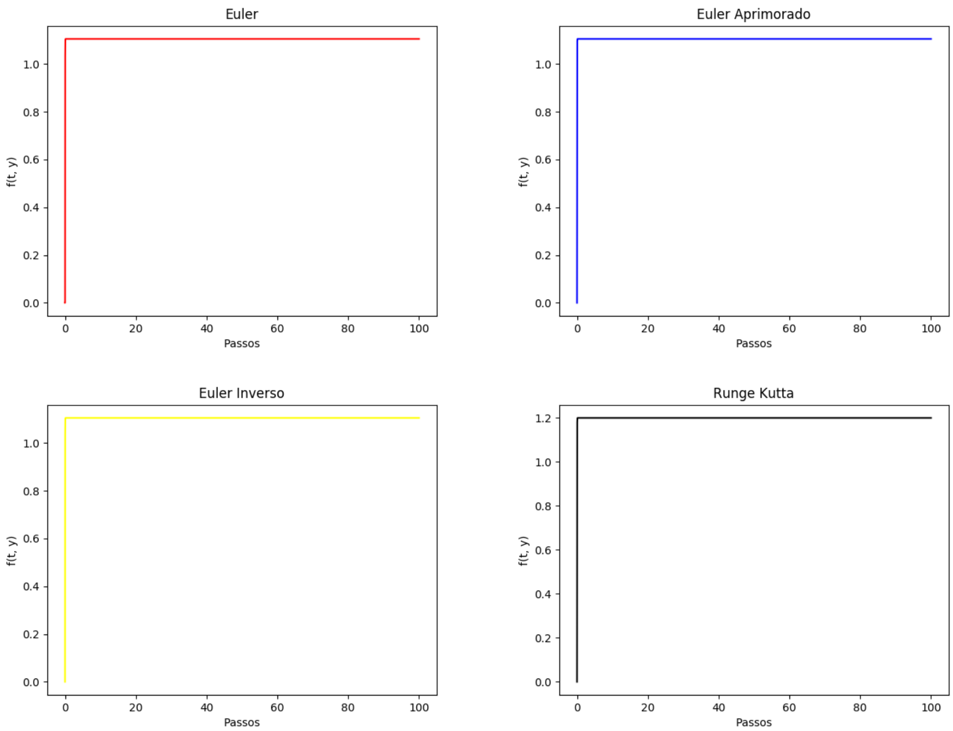


Figura 7: Métodos de passos simples para a equação da corrente i2

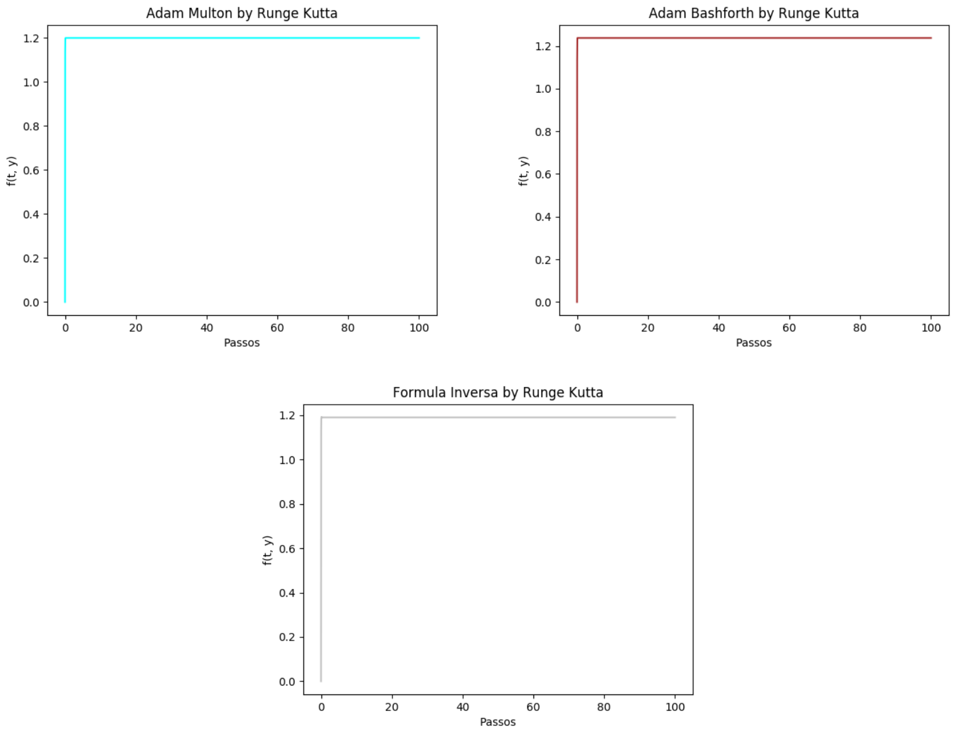


Figura 8: Métodos de passos simples para a equação da corrente i1

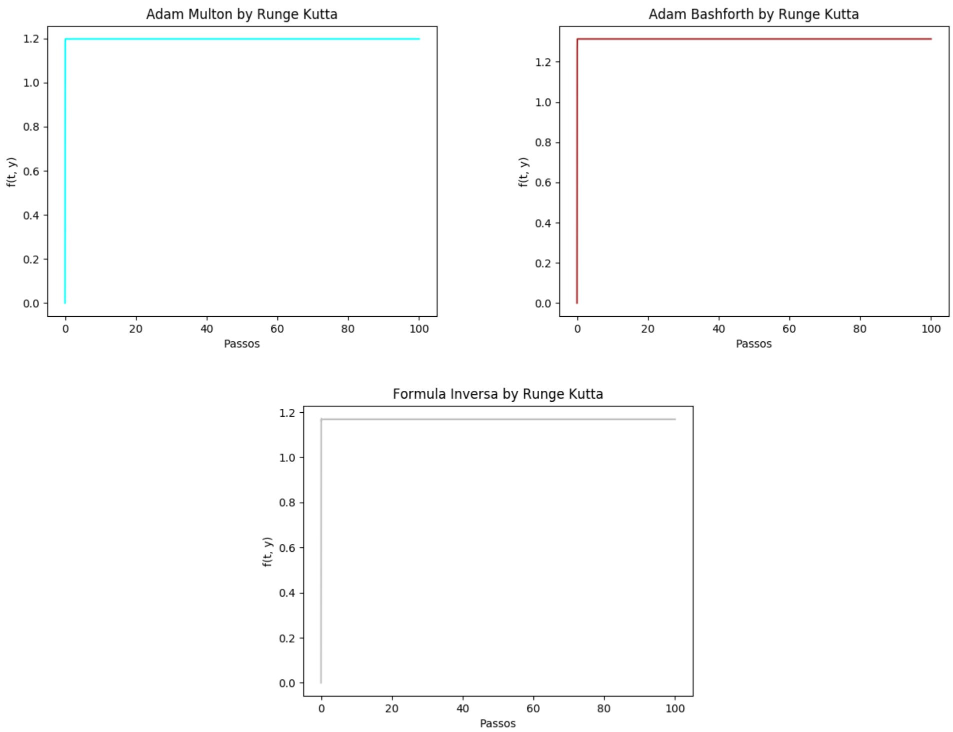


Figura 9: Métodos de passos simples para a equação da corrente i2

Como é possível notar nos gráficos gerados pelos métodos, tanto a corrente i1 quanto a corrente i2 tendem, após uma certa quantia de tempo, a uma cte. que pode ser calculada a partir do limite de suas equações quando t tender ao infinito:

$$\lim_{t\to\infty} i_1(t) = \lim_{t\to\infty} -60te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 = 1.2$$
$$\lim_{t\to\infty} i_2(t) = \lim_{t\to\infty} -120te^{-100t} - 1.2e^{-100t} + 1.2 = 1.2$$

Aplicando L'hospital em ambos os termos te^{-100t} nós notamos que nessa parcela de equação tende a zero, assim como no termo $1.2e^{-100t}$ também temos tendência a zero, dessa forma o nosso limite fica como sendo o limite de uma constante (que é a própria constante), assumindo o valor de 1.2.

3.4 Comparação e análise de desempenho

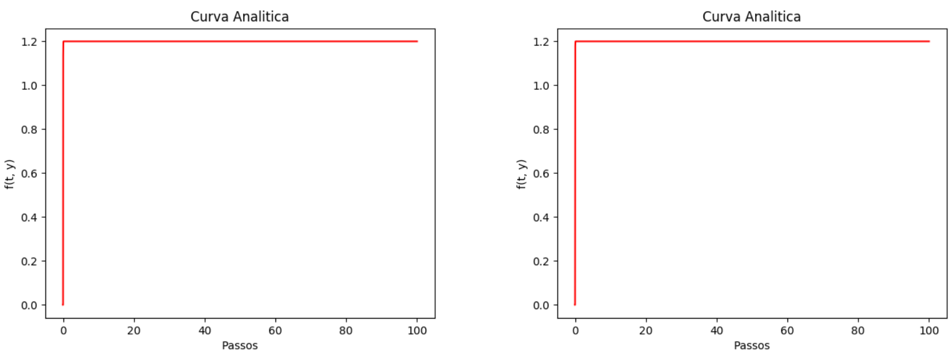


Figura 10: Curva analítica para as correntes i1 e i2, respectivamente

Para a corrente i_1

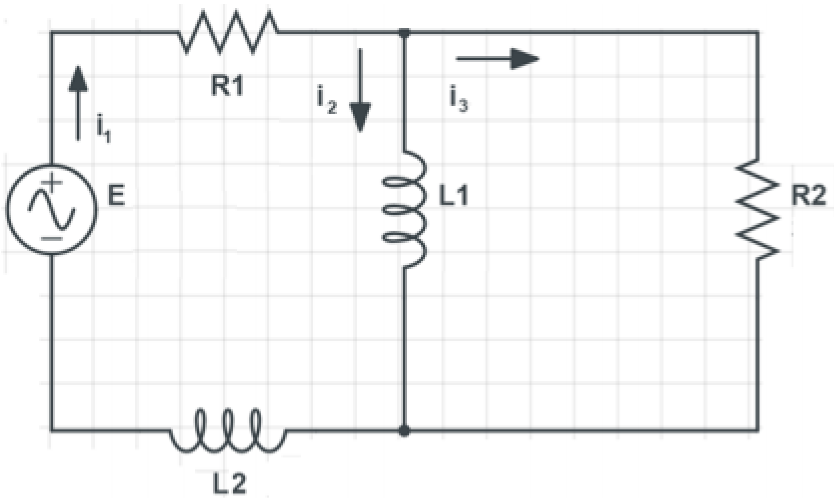
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.251430044774994500	11.602277582000170000
Euler Aprimorado	0.001417864799070890	13.629271321000488000
Euler Inverso	0.248611418340939100	12.652170947001650000
Runge-Kutta	0.000423068968327848	22.827011986999423000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.000644460580494456	46.779435370001010000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.031134816296751720	30.504497595000430000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.008057047787682205	46.627114184999300000

Para a corrente i_2

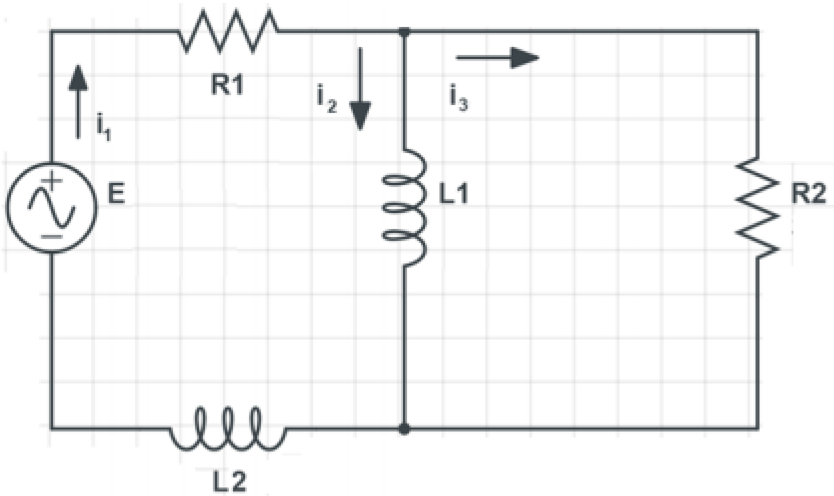
Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.079346140236202490	10.356844956999339000
Euler Aprimorado	0.079408088833889210	11.286269763999371000
Euler Inverso	0.079527994837800120	11.363029144000393000
Runge-Kutta	0.001172471542106021	19.196159512999657000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.002237778539132991	44.365425326001060000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.094591986405195180	25.409403187999487000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.026406731711903050	40.776882279000350000

4 Terceiro Problema

(a) Descreva o sistema de equações diferenciais que descrevem i1(t) e i2(t) no circuito elétrico contendo dois resistores e dois indutores mostrado abaixo.



(b) Use Variação dos paramêtros para resolver o sistema encontrado se, $R1 = 8\Omega, R2 = 3\Omega, L1 = 1H, L2 = 1H, E(t) = 100sin(t)V, i1(0) = 0, i2(0) = 0$.



(c) Usando os métodos númericos implementados da primeira parte do projeto e a solução exata encontrada, plote os gráficos de i1(t) e i2(t) mostrando os resultados na apresentação e comparando a eficiencia dos métodos e a precisão em comparação com a solução exata. Comente qual o valor maximo e minimo que a corrente pode atingir.

4.1 Modelagem

Pela lei das malhas, temos que a soma das diferenças de potenciais em uma malha é igual a zero, logo a partir da malha esquerda da figura temos:

$$-i_1R_2 + i_2R_2 - L_2i_1' + E - i_1R_1 = 0 \tag{34}$$

Já usando a malha externa da figura, temos:

$$E = i_3 R_2 + L_2 i_1' + i_1 R_1 \tag{35}$$

Usando a lei dos nós de Kirchoff, também obtemos a seguinte equação:

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{36}$$

Dessa forma, podemos montar o seguinte sistema (já realizando as substituições de 36 em 35 e 34:

$$\begin{cases} E = i_1 R_2 - i_2 R_2 + L_2 i_1' + i_1 R_1 & (37) \\ E = i_1 R_1 + i_2' L_1 + L_2 i_1' & (38) \end{cases}$$

4.2 Solução Analítica

Assumindo que A e B como a nossa primeira e a nossa segunda equação, respectivamente, podemos reescrever B como $B = -B + A$

$$\begin{cases} E = i_1 R_2 - i_2 R_2 + L_2 i_1' + i_1 R_1 & (39) \\ 0 = i_1 R_2 - i_2 R_2 - i_2' L_1 & (40) \end{cases}$$

Dividindo A por L_2 ($A = \frac{A}{L_2}$) e B por L_1 ($B = \frac{B}{L_1}$), temos:

$$\begin{cases} \dfrac{E}{L_2} = \dfrac{i_1 R_2}{L_2} - \dfrac{i_2 R_2}{L_2} + i_1' + \dfrac{i_1 R_1}{L_2} & (41) \\ 0 = \dfrac{i_1 R_2}{L_1} - \dfrac{i_2 R_2}{L_1} - i_2' & (42) \end{cases}$$

Reescrevendo em forma de matriz, temos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{-R_1}{L_2} - \frac{-R_2}{L_2}) & \frac{R_2}{L_2} \\ \frac{R_2}{L_1} & \frac{-R_2}{L_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores do enunciado, temos que:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante, obtemos:

$$r^2 + 14r + 24 = 0 \tag{43}$$

Cujas raizes são:

$$\begin{cases} r_1 = -2 & (44) \\ r_2 = -12 & (45) \end{cases}$$

Para a raiz $r_1 = -2$, obtem-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0$$

De onde obtemos o seguinte sistema:

$$\{-9\xi_1 + 3\xi_2 = 0 \tag{46}$$

Logo, obtemos:

$$3\xi_2 = 9\xi_1 \tag{47}$$

Portanto:

$$\xi_2 = 3\xi_1 \tag{48}$$

Dessa forma, obtemos então:

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para a raiz $r_1 = -12$, obtem-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0$$

De onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 = 0 & (49) \\ 3\xi_1 + 9\xi_2 = 0 & (50) \end{cases}$$

Logo, obtemos:

$$\xi_1 = -3\xi_2 \tag{51}$$

Dessa forma, obtemos então:

$$\xi^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo a equação homogênea é dada por:

$$x(t)_H = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-12t} \tag{52}$$

Com isso, chegamos a matriz fundamental:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-12t} \\ 3e^{-2t} & -e^{-12t} \end{bmatrix} \tag{53}$$

A partir da matriz fundamental podemos obter a matriz fundamental inversa:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}}{10} & \frac{3e^{2t}}{10} \\ \frac{3e^{12t}}{10} & \frac{-e^{12t}}{10} \end{bmatrix} \tag{54}$$

Dessa forma, como tinhamos a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar I' a partir da seguinte equação:

$$I' = AI + F(t) \tag{55}$$

Temos que, pela definição:

$$I_p = \Phi \cdot U \tag{56}$$

Podemos encontrar o valor de U a partir da seguinte equação:

$$U = \int \Phi^{-1} F(t) dt = \int \begin{bmatrix} 10e^{2t} \sin t \\ 30e^{12t} \sin t \end{bmatrix} dt \tag{57}$$

Logo, colocando o resultado na eq.56:

$$I_p = \begin{bmatrix} \frac{332 \sin t}{29} & \frac{-76 \cos t}{29} \\ \frac{276 \sin t}{29} & \frac{-168 \cos t}{29} \end{bmatrix} \tag{58}$$

Logo, como em $I(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ teremos, por fim, que as constantes C_1 e C_2 são:

$$\begin{cases} C_1 = 2 & (59) \\ C_2 = \dfrac{6}{29} & (60) \end{cases}$$

Logo, substituindo na homogênea encontrada, obtemos a solução geral:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + \frac{6}{29} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-12t} + \begin{bmatrix} \frac{332 \sin t}{29} & \frac{-76 \cos t}{29} \\ \frac{276 \sin t}{29} & \frac{-168 \cos t}{29} \end{bmatrix} \tag{61}$$

4.3 Gráfico das soluções numéricas

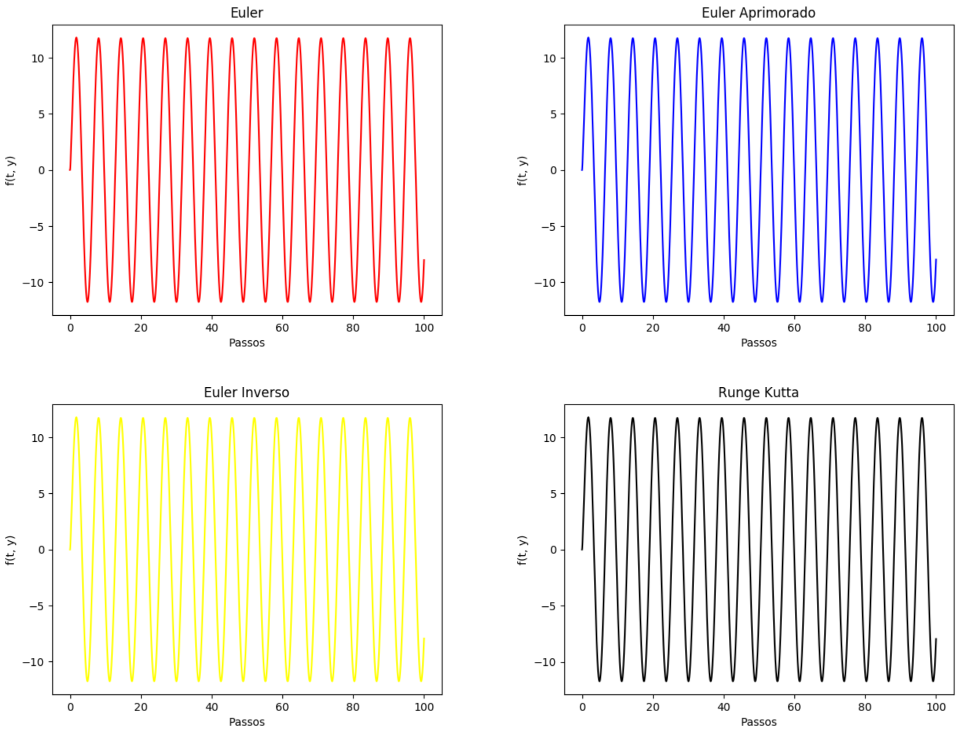


Figura 11: Métodos de passos simples para a equação da corrente i1

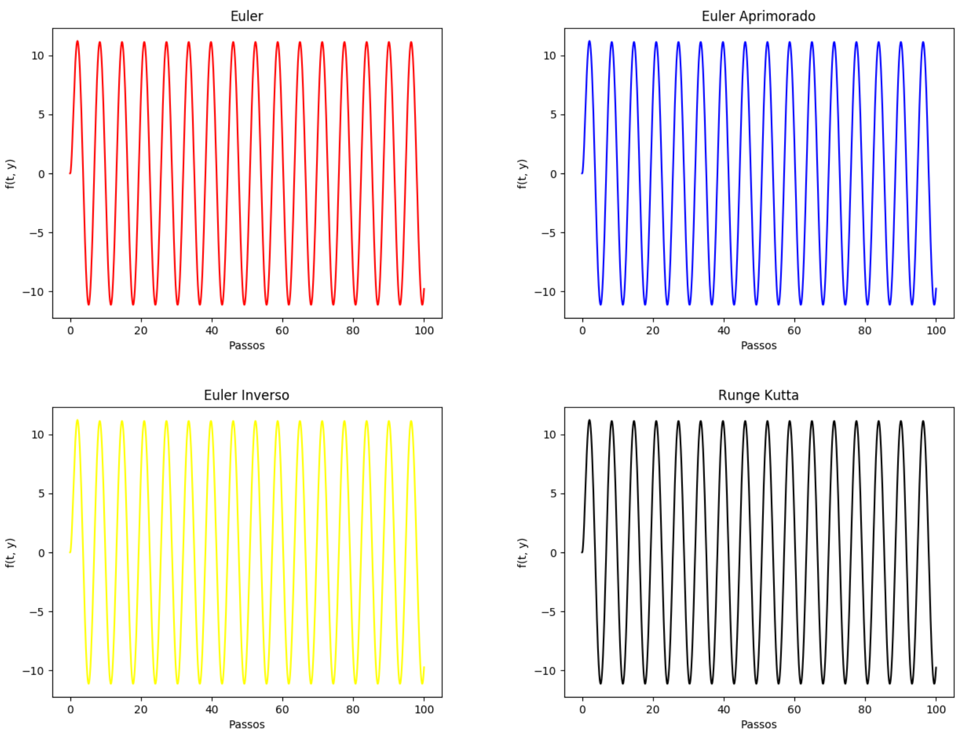


Figura 12: Métodos de passos simples para a equação da corrente i2

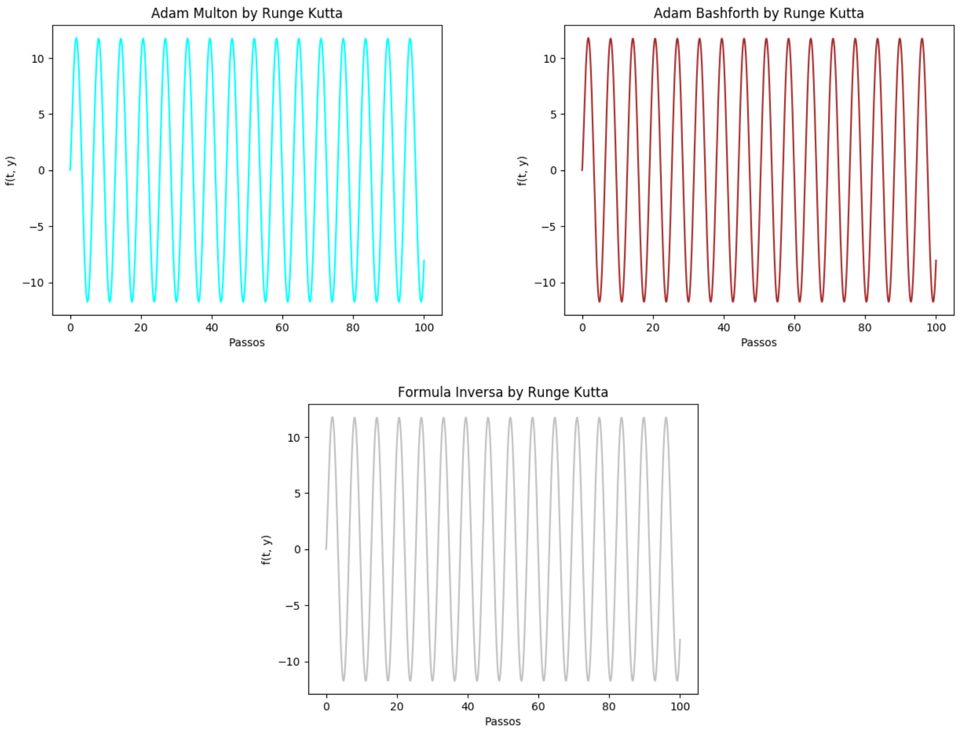


Figura 13: Métodos de passos simples para a equação da corrente i1

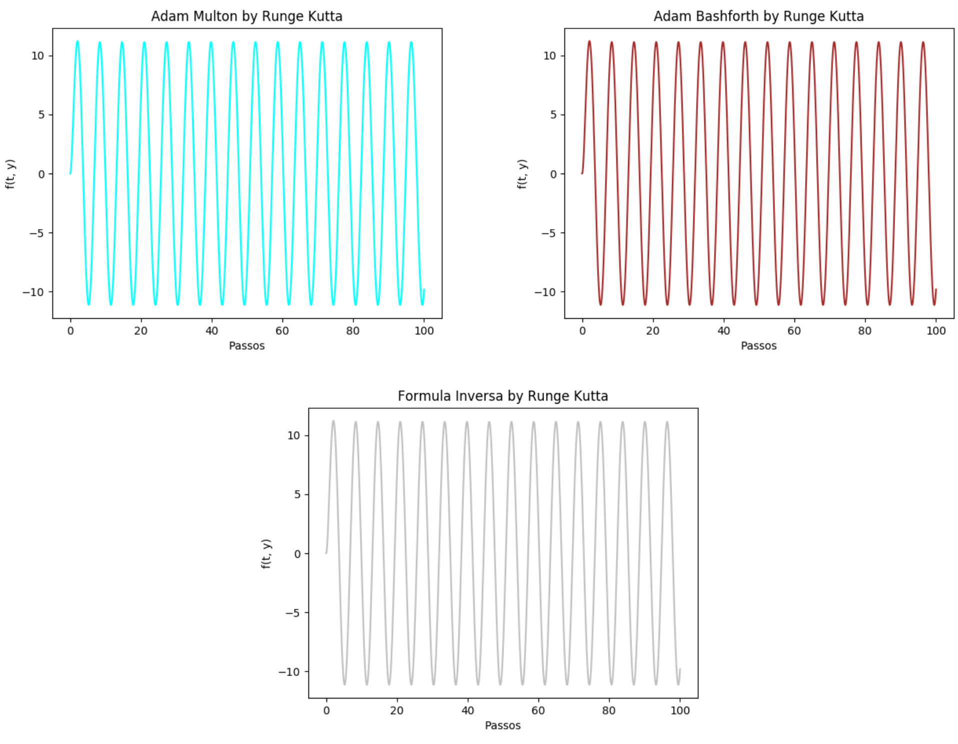


Figura 14: Métodos de passos simples para a equação da corrente i2

Para obter o valor máximo e mínimo que as correntes podem atingir, podemos derivar a equação referente às correntes i_1 e i_2 e igualar a zero, de modo a obtermos o pico (amplitude), que é onde ocorre a corrente máxima e mínima.

$$\begin{cases} i_1(t) = 2e^{-2t} + \dfrac{18}{29}e^{-12t} + \dfrac{332}{29}\sin t - \dfrac{76}{29}\cos t & (62) \\ i_1'(t) = \dfrac{-216}{29}e^{-12t} - 4e^{-2t} + \dfrac{76}{29}\sin t + \dfrac{332}{29}\cos t = 0 & (63) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2(t) = 6e^{-2t} - \dfrac{6}{29}e^{-12t} + \dfrac{276}{29}\sin t - \dfrac{168}{29}\cos t & (64) \\ i_2'(t) = \dfrac{72}{29}e^{-12t} - 12e^{-2t} + \dfrac{168}{29}\sin t + \dfrac{276}{29}\cos t = 0 & (65) \end{cases}$$

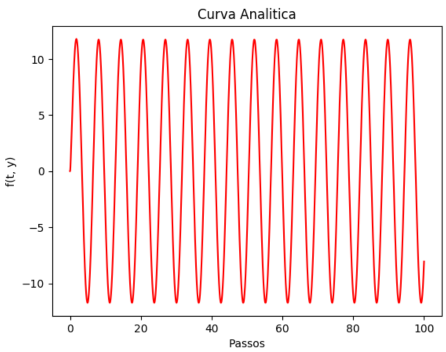
Observando a derivada e rearranjando os termos, obtemos que as correntes máximas e seus respectivos tempos são:

$$\begin{cases} i_{1_{max}} = 11.74A(t = 6.51) & (66) \\ i_{2_{max}} = 11.14A(t = 6.83) & (67) \end{cases}$$

Analogamente, as correntes mínimas e seus respectivos tempos são:

$$\begin{cases} i_{1_{min}} = -11.74A(t = 3.36) & (68) \\ i_{2_{min}} = -11.14A(t = 3.68) & (69) \end{cases}$$

4.4 Comparação e análise de desempenho



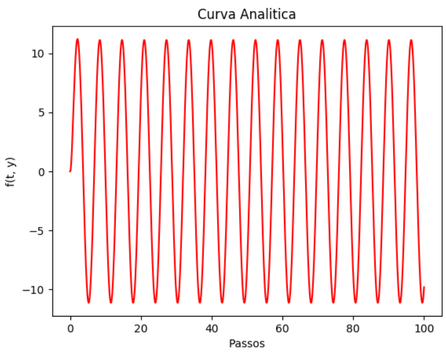


Figura 15: Curva analítica para as correntes i1 e i2, respectivamente

Para a corrente i_1

Método	Erro	Tempo gasto (segundos)
Euler	0.009611517371893686	24.665073835001750000
Euler Aprimorado	0.019126143199493020	28.487009765000040000
Euler Inverso	0.047425733994986020	27.996622590999323000
Runge-Kutta	0.019159397752914350	51.085060620000150000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.019684703613988750	86.963522034999190000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.019684725228976280	62.449688984999740000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.019684695414390690	84.357299414999940000

Para a corrente i_2

Método	**Erro**	**Tempo gasto (segundos)**
Euler	0.021449162178212290	26.529602385000544000
Euler Aprimorado	0.043421685699840550	29.648815021000700000
Euler Inverso	0.111077871914092200	26.481343131999893000
Runge-Kutta	0.043298465007121680	49.270973112001230000
Adam Multon (Runge-Kutta)	0.042181432202994560	88.481488043000350000
Adam Bashforth (Runge-Kutta)	0.042181374912469300	61.888950270000350000
Formula Inversa (Runge-Kutta)	0.042181453699299200	85.180135425000120000

5 Conclusão