SCIENCES
SORBONNE
UNIVERSITÉ

Module « Actionnement électrique »

Chap1 : Comprendre la mécanique

Paul Claudel : « Les choses qui existent sont importantes. »

Licence EEA – S6 (Version janvier 2022)

Olivier Béthoux

Sommaire

La dynamique a pour objet d'expliquer le mouvement, c'est-à-dire

d'en identifier les causes ;

d'établir les lois qui le régissent.

Les éléments de cours visitent les principes fondamentaux à maîtriser pour décrire correctement les mouvements d'objets solides. Il s'articule en 3 grandes parties.

1 Forces et lois de Newton

C'est à Newton que revint le mérite d'énoncer les 3 lois fondamentales qui constituent les bases de la mécanique classique dans
« Philosophia naturalis principa mathematica » en 1686.

① **1ère loi : Principe d'inertie**

② **2ème loi : Principe fondamental**

③ **3ème loi : Principe des actions réciproques**

④ **Construction d'une trajectoire**

⑤ **Forces de frottements : cône de frottement**

« Toute la difficulté de la philosophie paraît consister à trouver les forces qu'emploie la nature » Isaac Newton (1642 – 1727).

1ère loi : Principe d'inertie

Enoncé :

Le vecteur vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ d'un mobile reste constant tant que la résultante des forces extérieures s'exerçant sur lui est nulle.

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext \to mobile}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{C^{te}}}$$

Cadre :

Il existe des cadres particuliers, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels le principe d'inertie est vérifié.

Pour beaucoup d'expériences, la Terre peut être considérée comme un référentiel galiléen.

$1^{ère}$ loi : Principe d'inertie

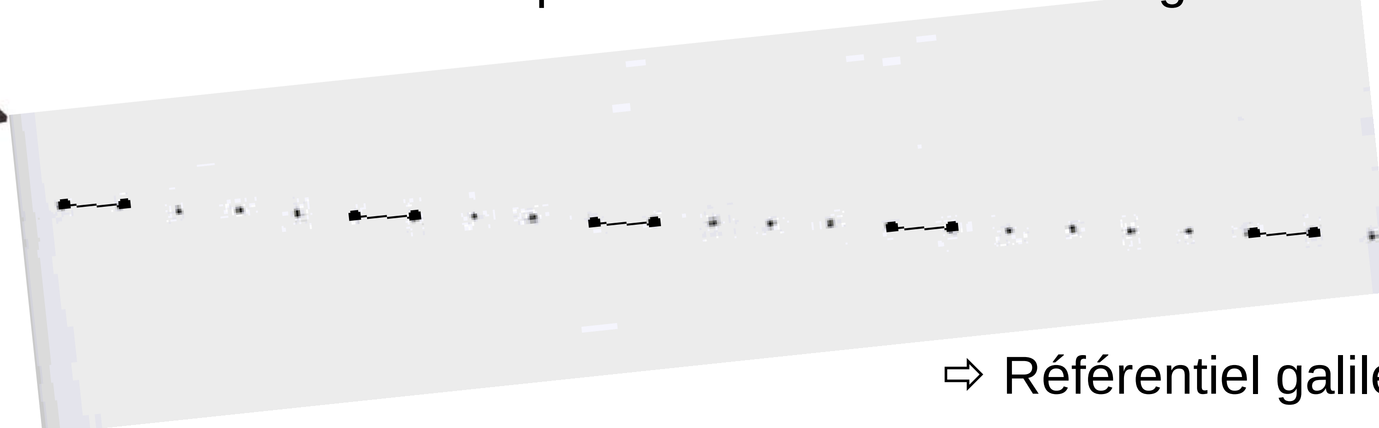
Conséquence :

Aucune force n'est nécessaire pour maintenir le mouvement : c'est pour l'arrêter qu'il en faut une!

1ère loi : Principe d’inertie

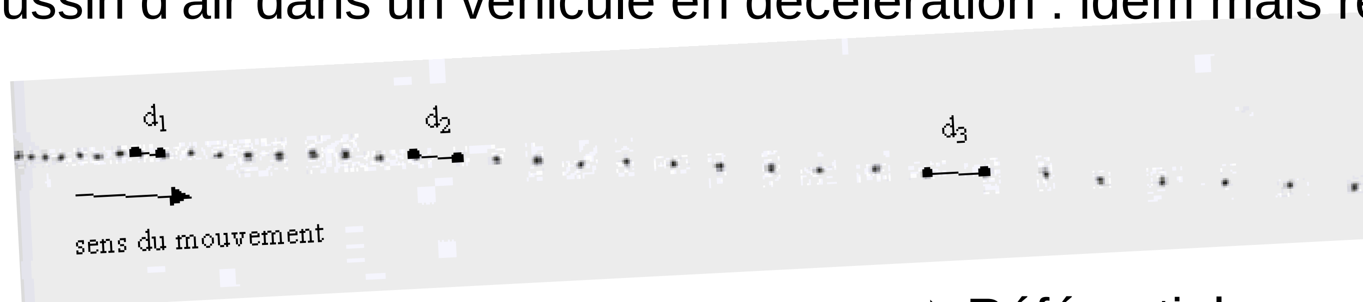
Exemple 1 :

- Table à coussin d’air sur le sol : palet en mouvement rectiligne uniforme



⇨ Référentiel galiléen

- Table à coussin d’air dans un véhicule en décélération : idem mais relevé ≠

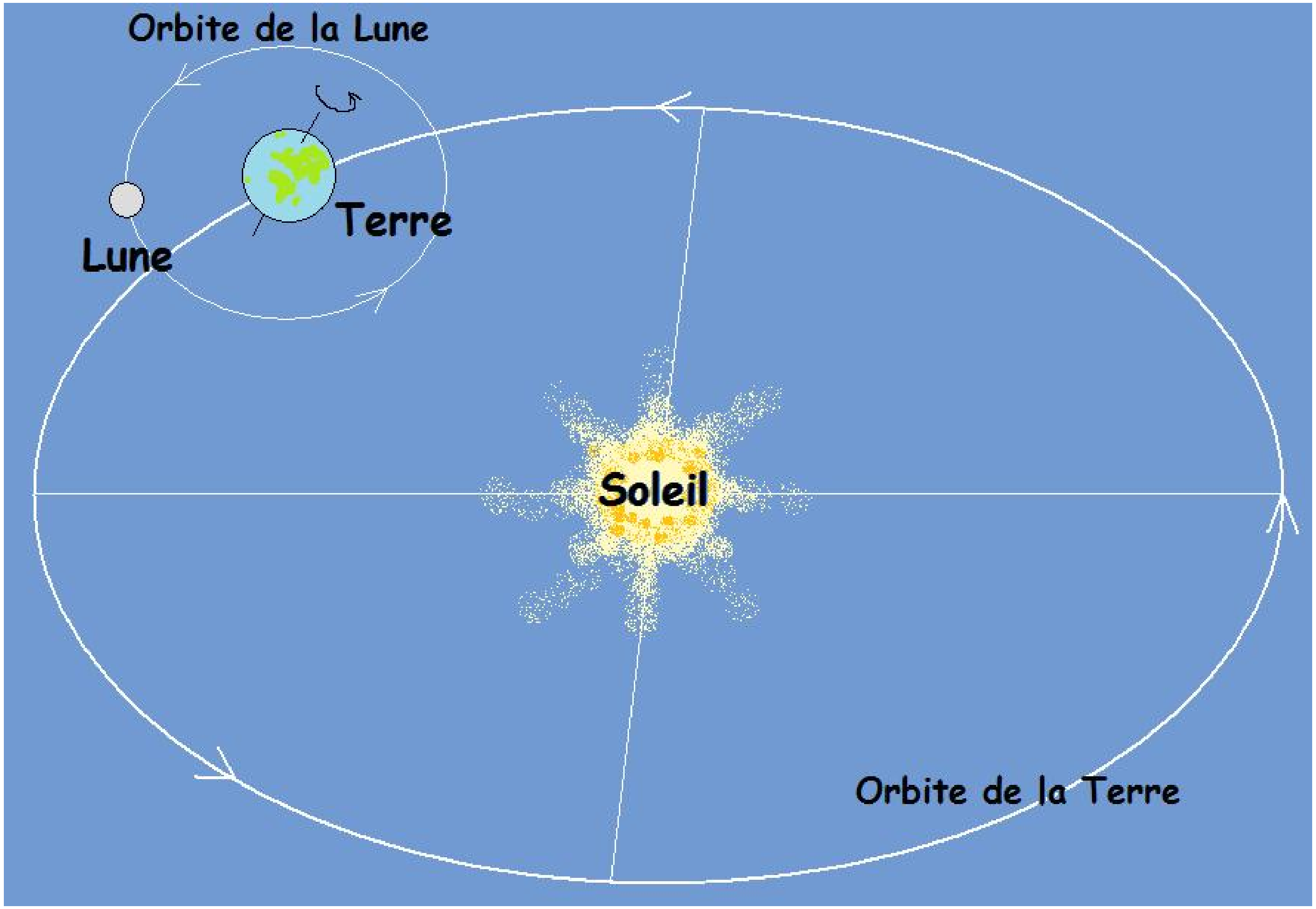


⇨ Référentiel non galiléen

1ère loi : Principe d'inertie

Exemple 2 :

Pour certaines expériences (balistique, etc),
la Terre se révèle être un référentiel non galiléen.



pendule de Foucault

Mouvement de la Terre

- *Autour du soleil;*
- *Autour d'elle-même.*

2ème loi : Principe fondamental de la dynamique

Enoncé :

Dans un référentiel galiléen, la force résultante $\sum \vec{F}$ exercée sur un corps est égale à la dérivée de sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Conséquence pour m(t) = constante :

Lorsque la masse du corps reste constante au cours du temps, la force résultante confère au corps une accélération (en $m.s^{-2}$).

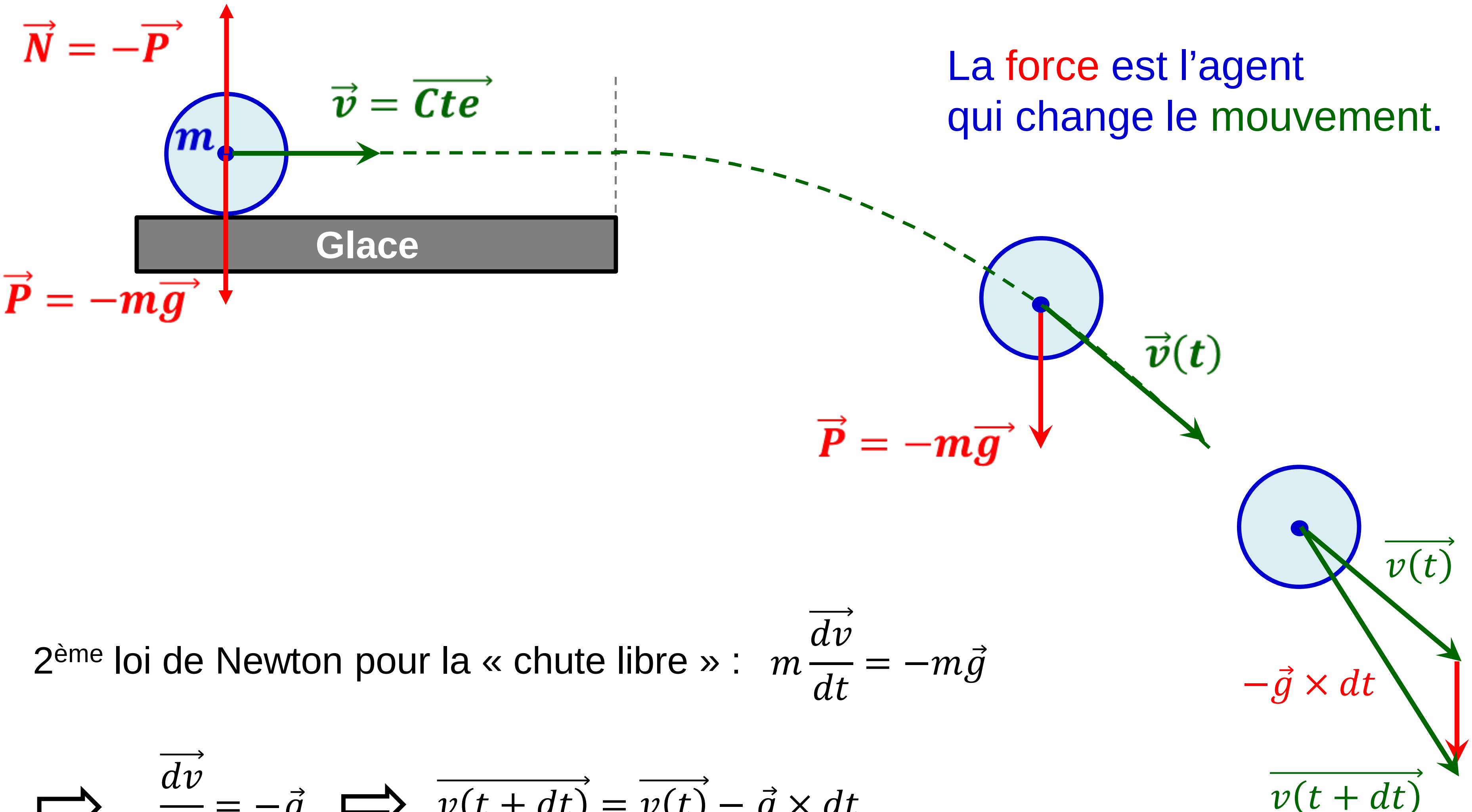
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

La masse (inertielle) s'oppose au changement du mouvement, c'est-à-dire au changement du vecteur vitesse.

$\Rightarrow$ La force, en Newton [N] $\equiv$ [$kg.m.s^{-2}$], est l'agent qui change le mouvt.

2ème loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 1 :



La force est l'agent qui change le mouvement.

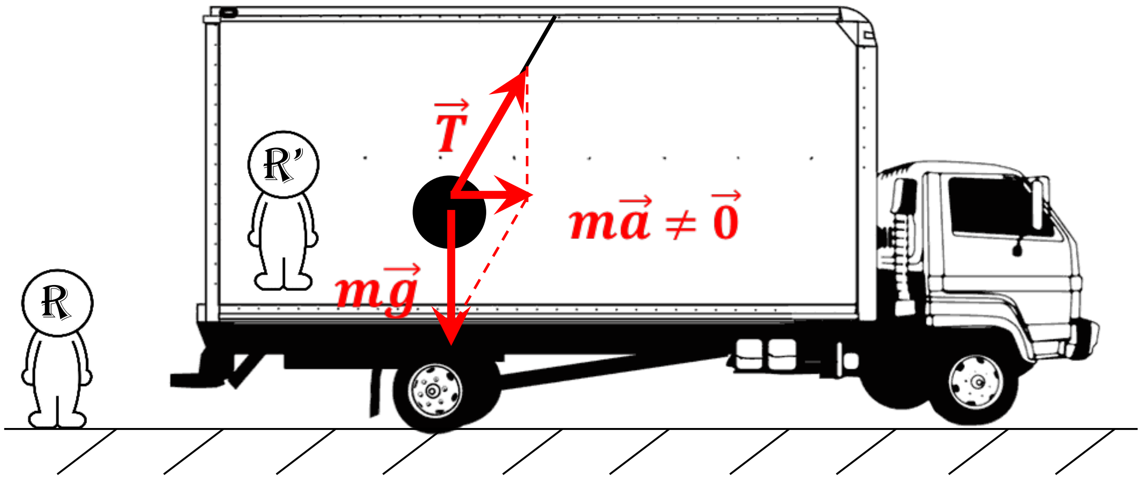
2ème loi de Newton pour la « chute libre » : $m\dfrac{\overrightarrow{dv}}{dt} = -m\vec{g}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = -\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v(t+dt)} = \overrightarrow{v(t)} - \vec{g} \times dt$$

2ème loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 2 :

Masse m suspendue dans un véhicule animé d'un mouvement rectiligne **d'accélération uniforme** $\vec{a} = \overrightarrow{C^{te}}$.



☺ Pour un observateur lié au **référentiel galiléen (R)**, la position du pendule s'explique par la relation fondamentale de la dynamique.

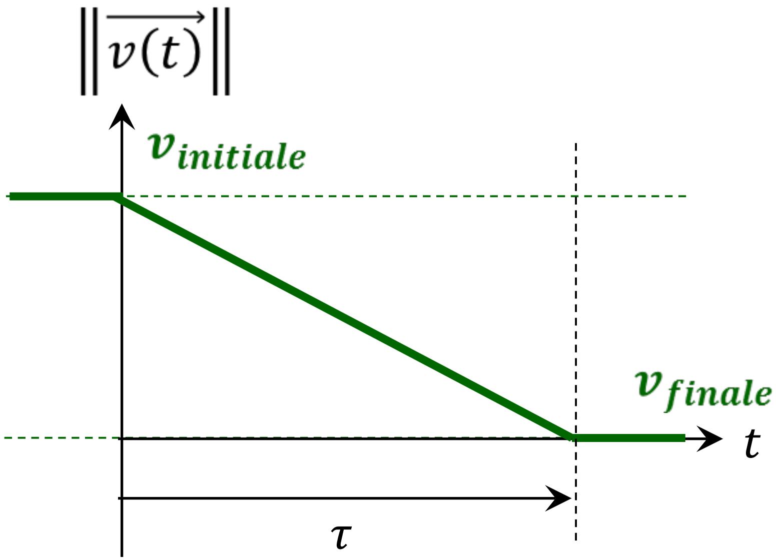
$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \neq \vec{0}$$

☹ Pour un observateur lié au **référentiel non galiléen (R')**, le principe d'inertie ne s'applique pas. En effet:

$\vec{T} + \mathrm{m}\vec{g} \neq \vec{0}$ **alors que** $\overrightarrow{v_{m/\mathcal{R}'}} = \vec{0}$

2ème loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 3 : Force moyenne < F(t) > subie lors d'un choc.



Crash test d'une Renault Captur

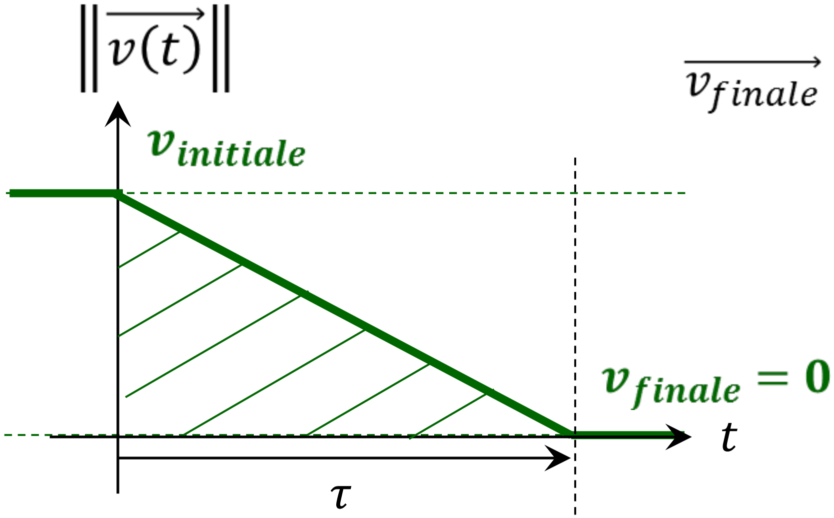
Schématiquement, lorsqu'un corps subit un choc, sa vitesse $v(t)$ change de $v_{initiale}$ à v_{finale} pendant un intervalle de temps assez bref τ.

⇨ Conformément au principe fondamental de la dynamique, la force moyenne $<\vec{F}>$ subie au cours de cette collision est définie par :

$$\langle\vec{F}\rangle = \frac{\left(m\overrightarrow{v_{finale}}\right) - \left(m\overrightarrow{v_{initiale}}\right)}{\tau}$$

2ème loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 2 : Force moyenne subie lors d'un choc.

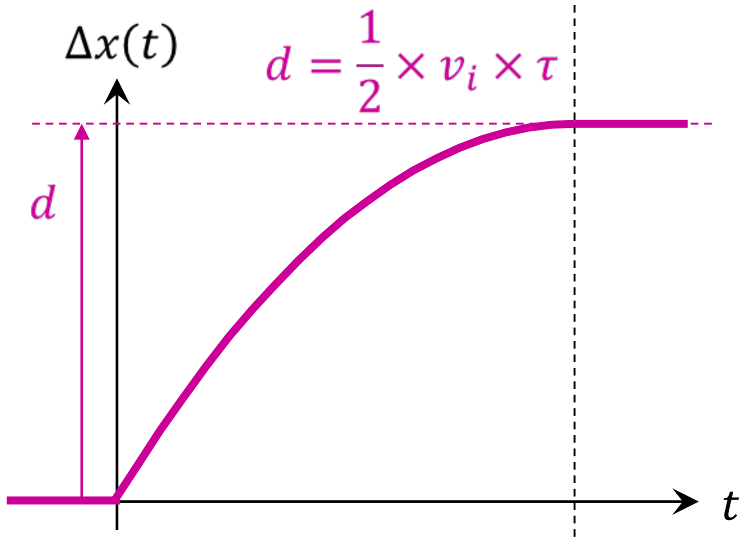


$$\overrightarrow{v_{finale}} = \vec{0} \longrightarrow \langle \vec{F} \rangle = -\frac{m\overrightarrow{v_{initiale}}}{\tau}$$

$$\Downarrow$$

L'intensité moyenne de la force subie :

- Augmente avec la vitesse initiale;
- Diminue avec la durée du choc ($\tau_{matelas} >> \tau_{carrelage}$)



Pour augmenter la durée du choc ($\tau \nearrow$), l'habitacle rigide d'un véhicule est encadré par des zones déformables susceptibles de se comprimer de 1 cm par km.h^{-1} avant la collision.

⇨ Pour un choc frontal à 72 km.h^{-1}, l'avant du véhicule se raccourcit d'une longueur d = 72 cm!!!

$$\tau = \frac{2d}{v_i} \longrightarrow \langle \vec{F} \rangle = -\frac{m v_i}{2d/v_i} = -\frac{m(v_i)^2}{2d}$$

A. N. $v_i = 20 m.s^{-1}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \tau = 0{,}072\ s \\ \langle \vec{F} \rangle = 280\ m = 28(mg)\ [N] \end{cases}$$

3ème loi : Principe des actions réciproques

Enoncé :

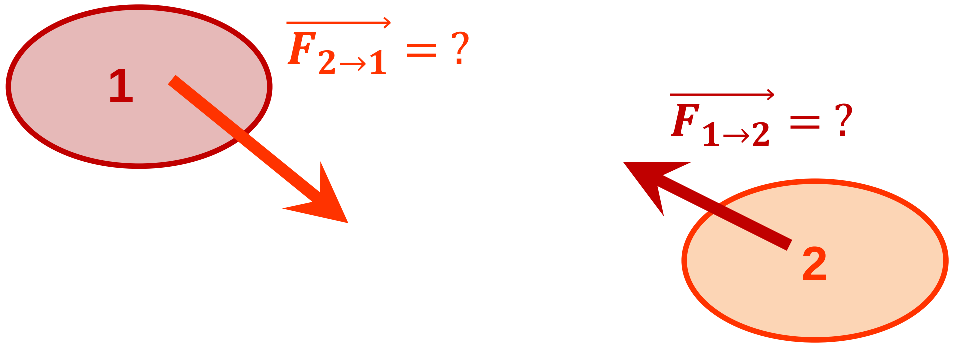
L’action est toujours égale en intensité et opposée en direction à la réaction.

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \overrightarrow{F_{2\to 1}}}$$

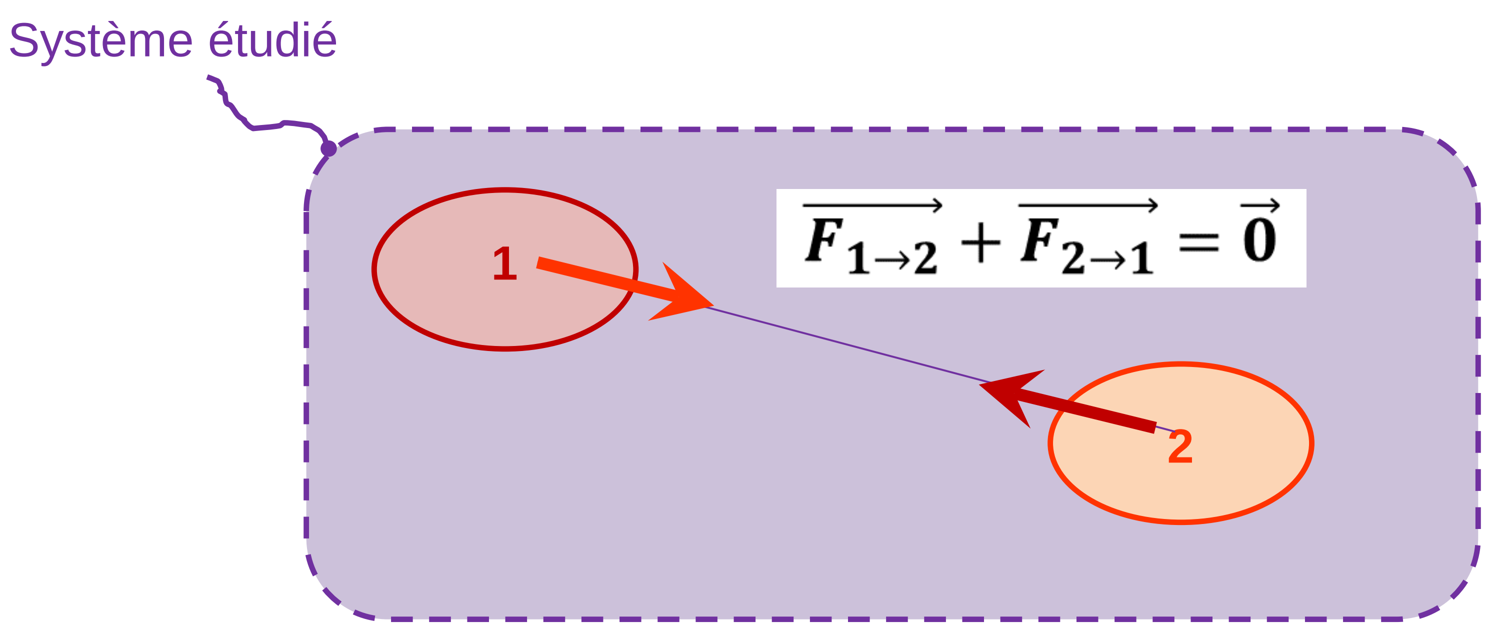
Système isolé constitué de deux objets en interaction (preuve - 1)

3ème loi : Principe des actions réciproques

Système isolé constitué de deux objets en interaction (preuve - 2)



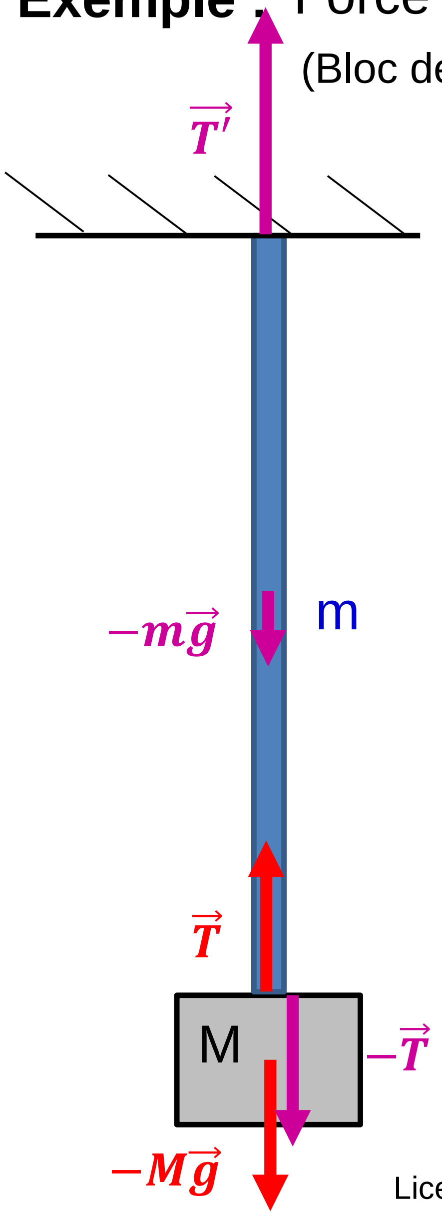
Système isolé constitué de deux objets en interaction (preuve - 3)



3ème loi : Principe des actions réciproques

Exemple : Force exercée par la corde sur le point d'attache au plafond ?

(Bloc de masse M suspendu verticalement par une corde de masse m)



① Pour le **bloc suspendu**, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{T} + M\vec{g} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = -M\vec{g}$$

Action - réaction

② Pour la **corde intermédiaire** entre le bloc et le plafond, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$-\vec{T} + m\vec{g} + \overrightarrow{T'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{T'} = \vec{T} - \mathrm{m}\vec{g} = -(M+m)\vec{g}$$

Construction d'une trajectoire

Etape 1 : Ecrire la relation fondamentale de la dynamique afin d'obtenir l'accélération *a*(*t*).

$$\vec{a} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext \to syst}}}{m}$$

Etape 2 : Intégrer cette relation a(t) = *dv*/*dt* en tenant compte de la condition initiale $v(t_0) = v_0$ afin d'obtenir la vitesse *v*(*t*).

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t).dt$$

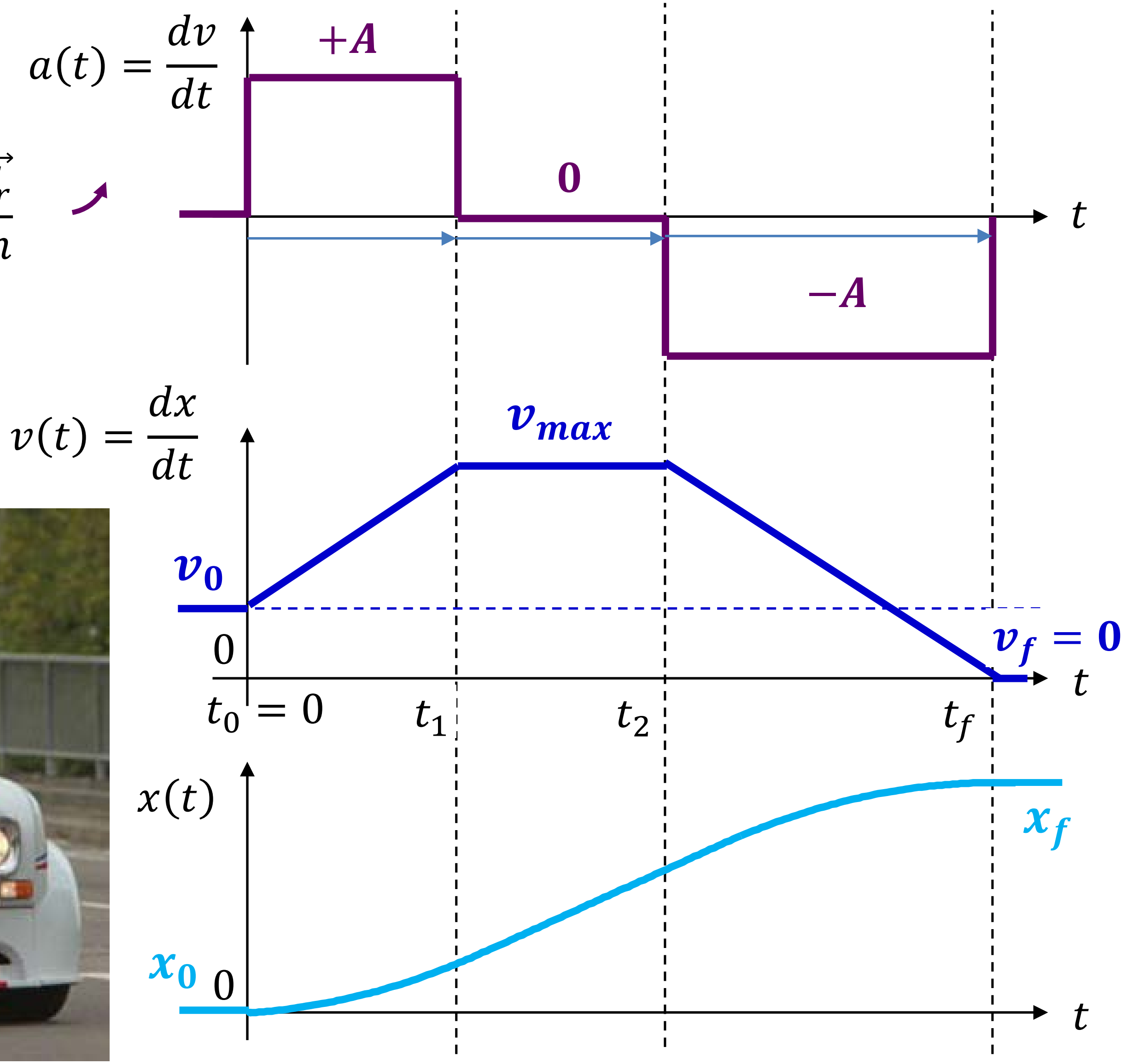
Etape 3 : Intégrer cette relation *v*(t) = *dx*/*dt* en tenant compte de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ afin d'obtenir la position *x*(*t*).

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t).dt$$

Construction d’une trajectoire

Exemple : véhicule

$$\overrightarrow{F_r} = \sum \overrightarrow{F_{ext \to syst}} \longrightarrow \vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_r}}{m}$$

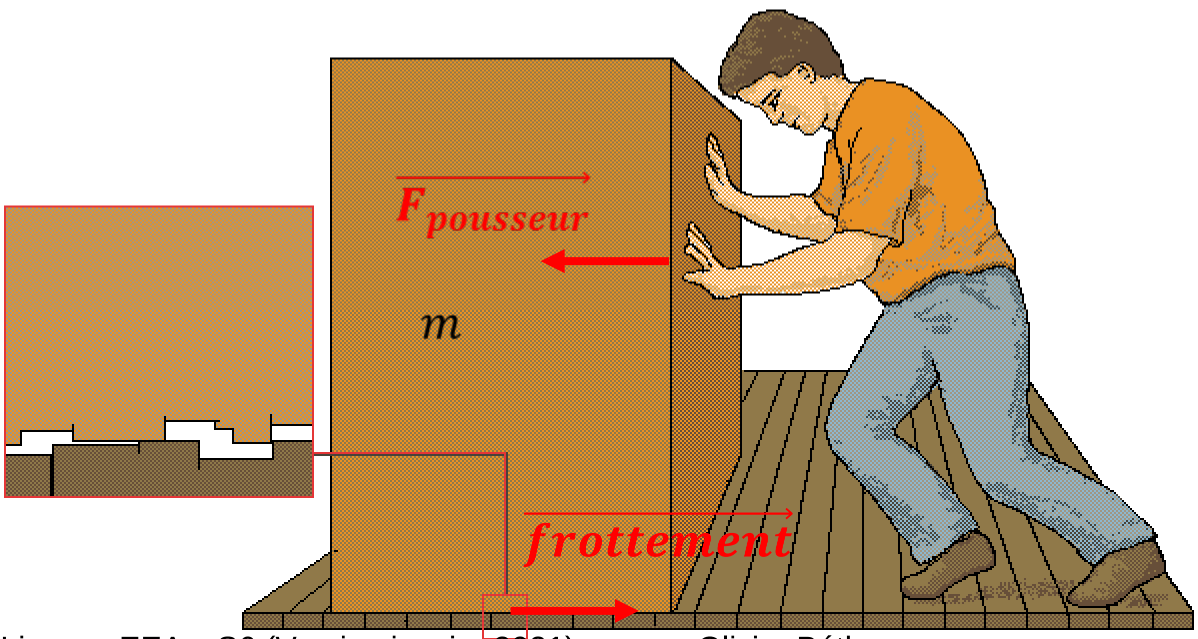


Forces de frottement

Expérience du pousseur :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext \to syst}}}{m} = \frac{\overrightarrow{F_{pousseur}} + \overrightarrow{frottement}}{m}$$

Pour mettre en mouvement un bloc initialement au repos il faut exercer une force suffisante.
Le principe fondamental de la dynamique prouve donc qu'il s'exerce une force au contact entre l'objet et le sol.
On parle de force de frottement statique (tant que l'objet ne bouge pas).



Forces de frottement

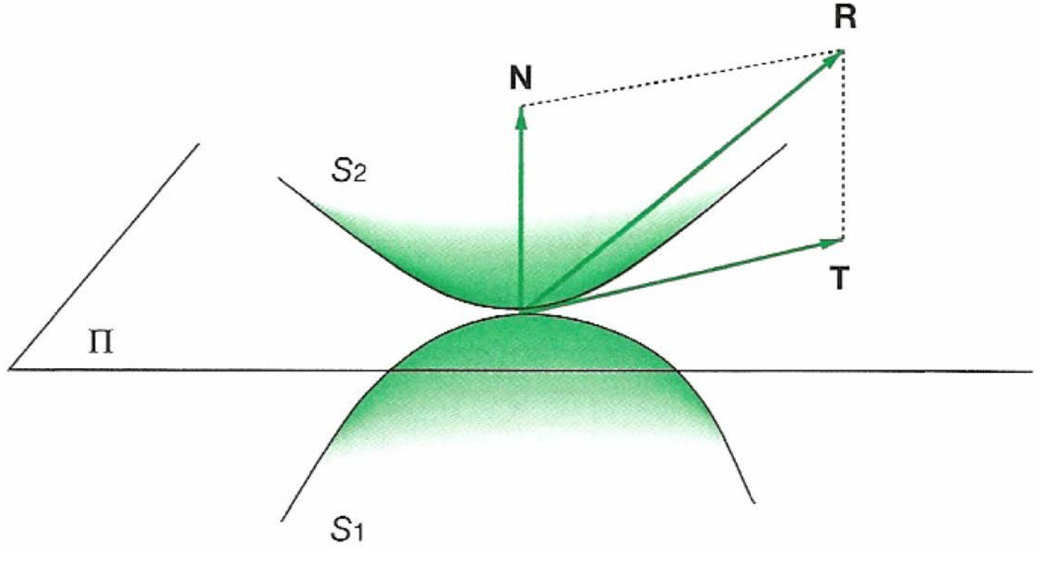
Actions mécaniques de contact :

On note $\overrightarrow{R}$ la résultante des actions de contact du solide (1) sur le solide (2).
Elle se décompose selon :

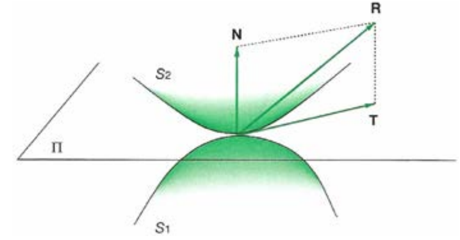
$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$$

- $\overrightarrow{T}$ est la composante appartenant au plan tangent.
  C'est la force de frottement de glissement.

- $\overrightarrow{N}$ *est* la composante normale à ce plan. Celle-ci est dirigée de (1) vers (2).
  L'annuler revient à dire que le contact est rompu entre les deux solides.



Forces de frottement



Lois de Coulomb :

Au XVIII[ème] siècle, Coulomb a énoncé des lois approchées .
On note : $\overrightarrow{v_g}$ la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1).

- Si $\overrightarrow{v_g} = \vec{0}$, il n'y a pas glissement de (S_2) par rapport à (S_1), alors:

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \times \|\vec{N}\|$$

- Si $\overrightarrow{v_g} \neq \vec{0}$, il y a glissement de (S_2) par rapport à (S_1), alors:

$$\begin{cases} \|\vec{T}\| = \mu_d \times \|\vec{N}\| \\ \vec{T} \parallel \overrightarrow{v_g} \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \overrightarrow{v_g} < 0 \end{cases}$$

Le **coefficient de frottement cinétique μ_d ≤ au coefficient de frottement statique μ_S**.
A l'échelle microscopique, les surfaces des solides s'interpénètrent plus lorsqu'il n'y a pas glissement.

Energie cinétique

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} M V^2}$$

☞ Preuve :

① 2ème loi de Newton :

$$\overrightarrow{F_{résultante}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

② Produit scalaire par la vitesse :

$$\underbrace{\overrightarrow{F_{résultante}} \cdot \vec{v}}_{\text{Puissance mécanique de la force résultante}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

Puissance mécanique de la force résultante

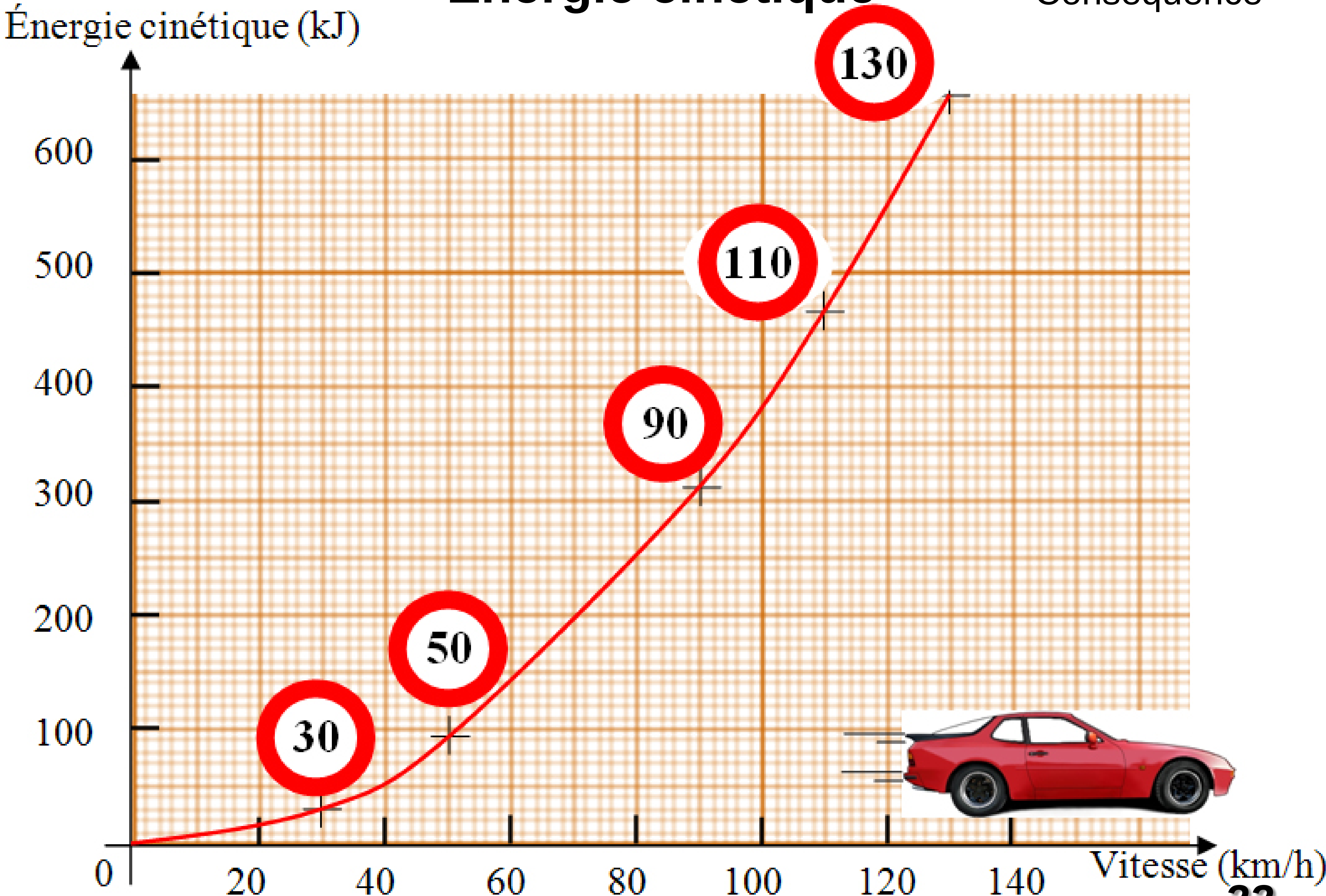
③ Or: $\frac{dv^2}{dt^2} = 2v \frac{dv}{dt}$

④ Donc, par intégration entre t_i (⇔ $v_i = 0$) et t_f (⇔ $v_f = V$), on a :

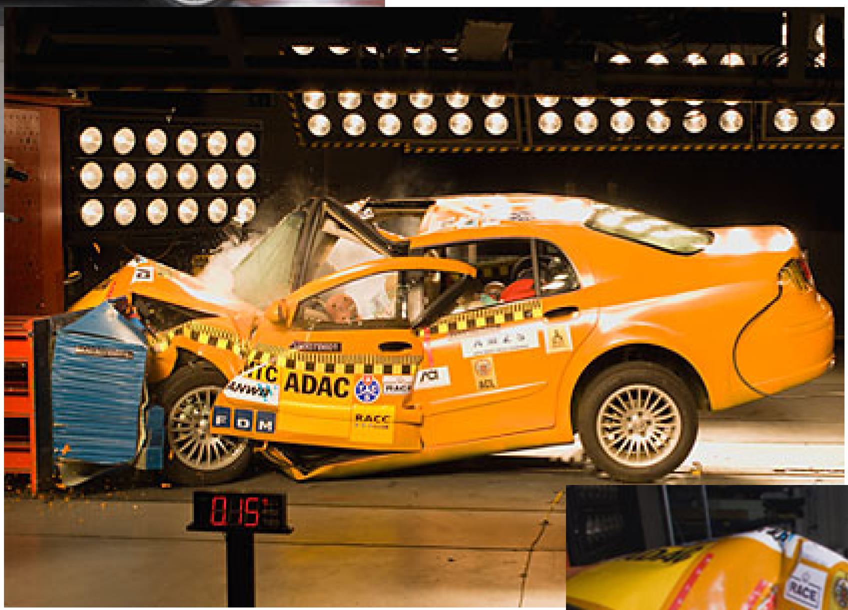
$$\int_{t_i}^{t_f} P_{méca}(t).\, dt = \frac{1}{2} m [V^2 - 0^2]$$

Energie cinétique

☞ Conséquence



Energie cinétique



2 Mouvement de rotation autour d'un point fixe

① **Cinématique**

② **Vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$**

③ **Dynamique d'un point matériel en rotation**

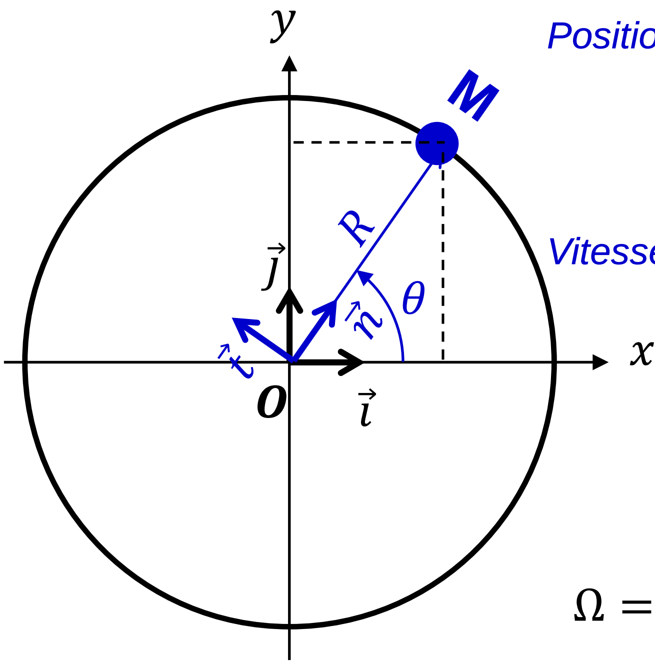
④ **Dynamique d'un solide en rotation**

⑤ **Moment d'un couple de forces**

⑥ **Energie cinétique d'un objet en rotation**

Cinématique

Mouvement circulaire d'un point matériel autour de O fixe dans $R_{\text{Galiléen}}$



Position : Vecteur radial

$$\overrightarrow{OM} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = R\big((\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}\,\big) = R\vec{n}$$

Vitesse : Vecteur ortho-radial

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(R\frac{d\theta}{dt}\cos(\theta+\pi/2)\right)\vec{i} + \left(R\frac{d\theta}{dt}\sin(\theta+\pi/2)\right)\vec{j}$$

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\big((\cos(\theta+\pi/2))\vec{i} + (\sin(\theta+\pi/2))\vec{j}\big) = R\frac{d\theta}{dt}\vec{t}$$

$\Omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ Vitesse angulaire, avec : $\|\vec{v}\| = R\left|\dfrac{d\theta}{dt}\right|$ et $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OM} = 0$

Accélération : *Vecteur radial uniquement dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme (Ω = 0)*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(R\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{t} + \left(R\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\vec{t}}{dt} = \left(R\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{t} - \left(R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{n}$$

Accélération centripète : a_n

$$a_n = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{R}\left(R\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{v^2}{R}$$

Accélération tangentielle : a_t

$$a_t = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

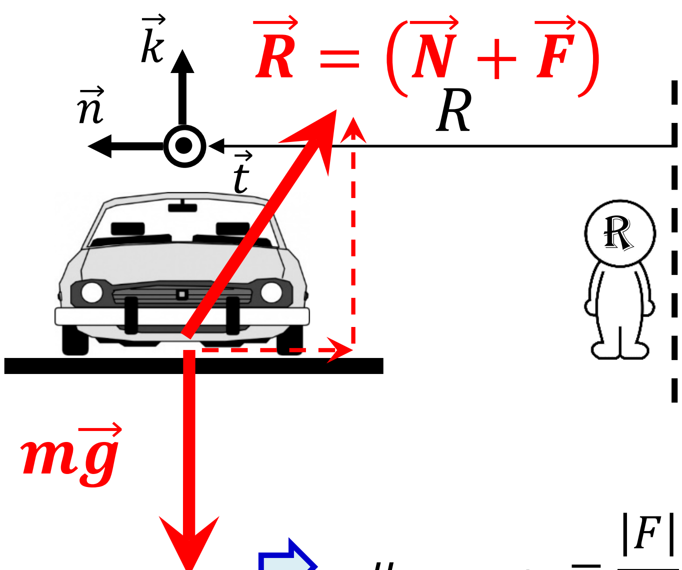
Car R = constante

Conséquence : exemple d'application

Quelle est la vitesse maximale v_{max} que peut prendre une voiture dans un dans un **virage à vitesse constante** en fonction de son rayon de courbure R = *10 m* et du coefficient de friction statique μ_S = 0,8 ?

La 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton s'écrit dans $\mathbb{R}$:

$$\left(\vec{N}+\vec{F}\right)+\left(m\vec{g}\right)=m\vec{a}$$



Projetée sur le repère orthonormé lié au véhicule :

- Sur $\vec{n}$ $\quad F_n = ma_n = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$
- Sur $\vec{t}$ $\quad F_t = ma_t = m\left(R\frac{d\Omega}{dt}\right) = 0$
- Sur $\vec{k}$ $\quad N + (-mg) = m(0) = 0$

$\Rightarrow$ $\mu_{sollicitée} = \frac{|F|}{N} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg} \leq \mu_S$ $\Rightarrow$ $\boxed{v \leq \sqrt{\mu_S R g}}$

A.N. $\quad v \leq 32{,}2\ km/h$

Vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}$

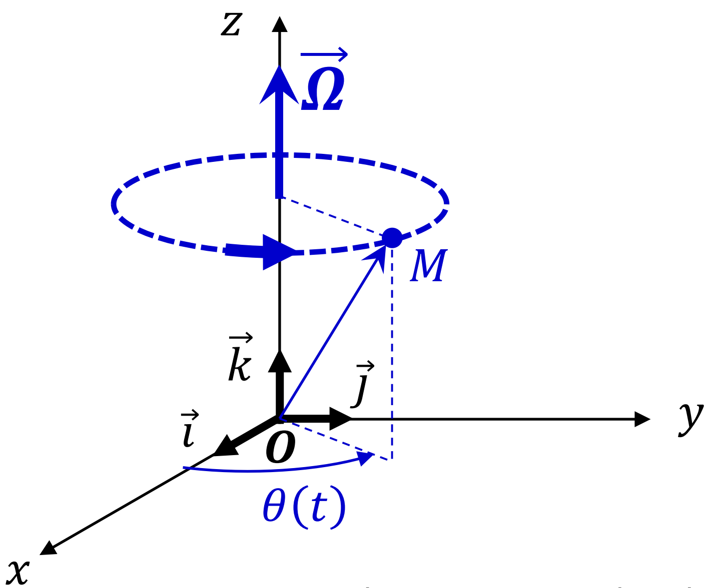
Le mouvement de rotation introduit une plus grande complexité que le mouvement de translation. Pour obtenir une écriture vectorielle plus simple, on **définit** le vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}$. Il contient les **3 informations** définissant la rotation.

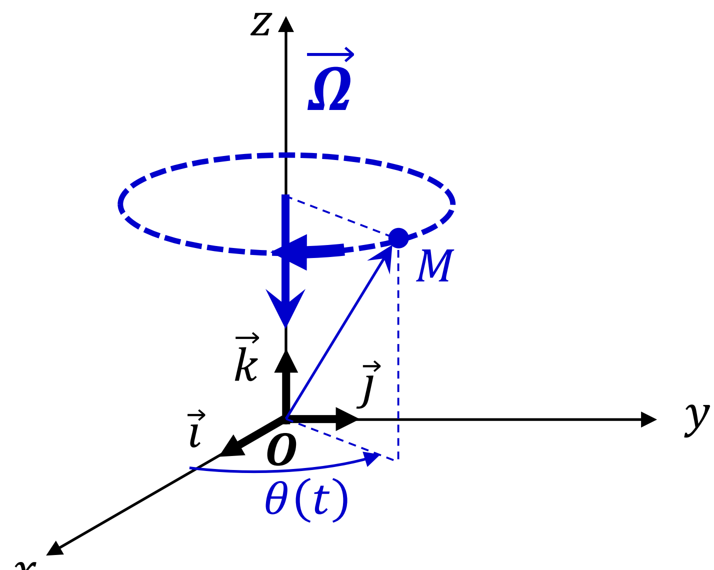
a) La direction du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est la **direction de l'axe** autour duquel s'effectue la rotation.

b) Le sens du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est lié au **sens de rotation** dans le plan orthogonal à l'axe de rotation.

c) Le module du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est la **vitesse angulaire**

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}\right\| = \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$



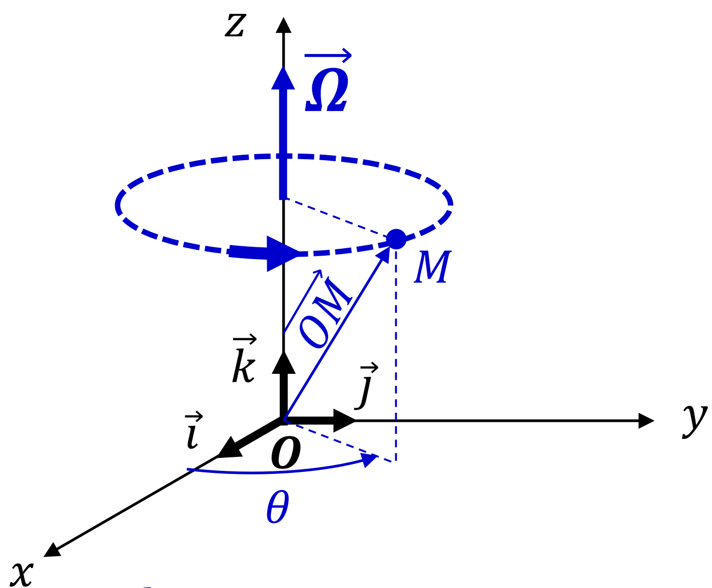


Vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}$

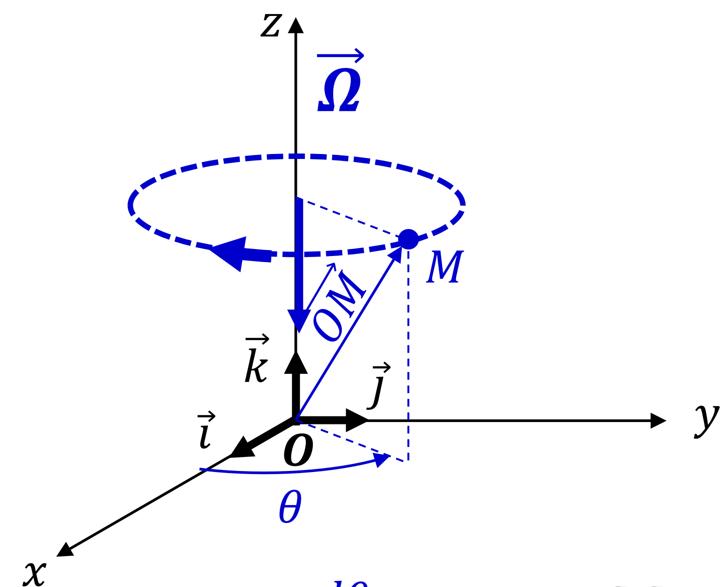
Le vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ s'écrit en fonction

- du vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$
- Et du vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}$.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$



$$\frac{d\theta}{dt} > 0$$



$$\frac{d\theta}{dt} < 0$$

Preuve

Vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}$

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\left((\cos(\theta+\pi/2))\vec{\imath} + (\sin(\theta+\pi/2))\vec{\jmath}\right) = R\frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\ \sin(\theta+\pi/2)\\ 0\end{bmatrix}$$

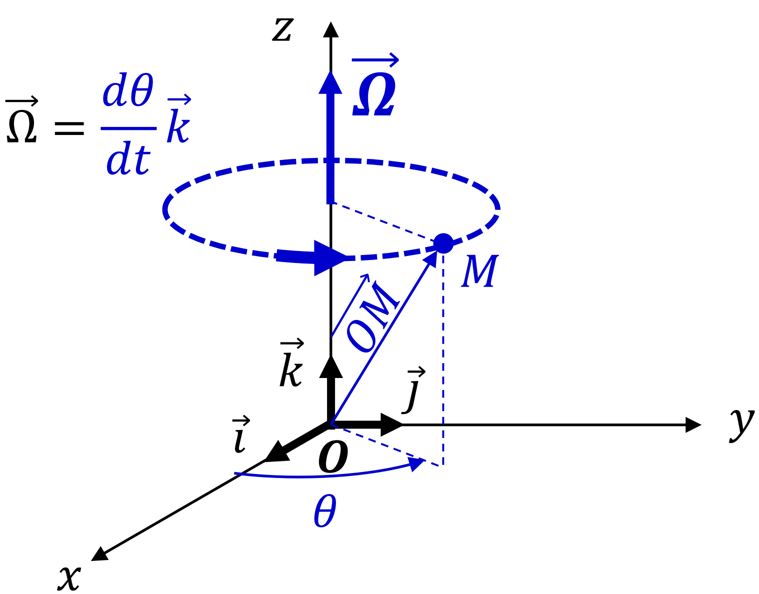
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = R\left((\cos\theta)\vec{\imath} + (\sin\theta)\vec{\jmath}\,\right) = R\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 0\end{bmatrix} \\ \vec{\Omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{k} = \dfrac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = R\frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

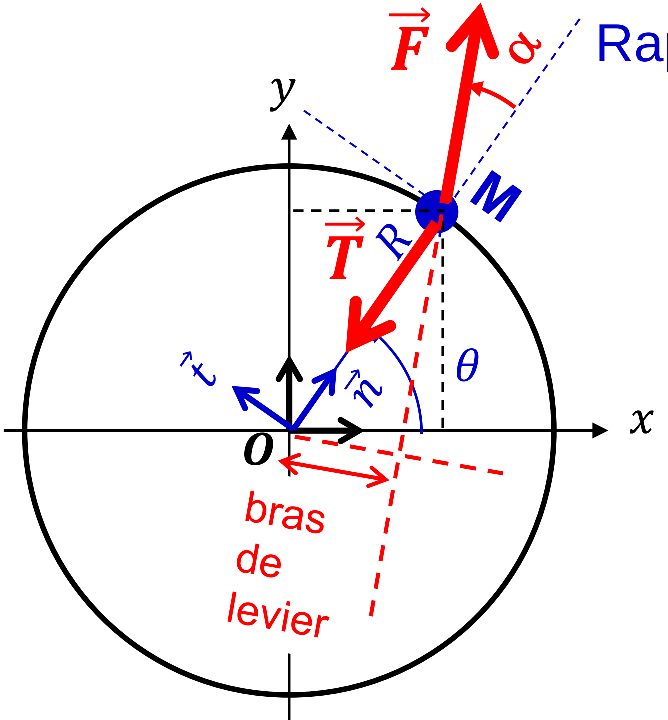
$$\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = R\frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix}0-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\ \ -0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = R\frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\ \sin(\theta+\pi/2)\\ 0\end{bmatrix} = \vec{v}$$



Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire



Rappel : La force est l'agent qui change le mouvement.

① La 2ème **loi de Newton** s'écrit:

$$\vec{F} + \vec{T} = m\vec{a} = m(\overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t})$$

② ⇨ Composante tangentielle :

$$F\sin\alpha + 0 = ma_t = mR\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

③ Puis, multiplication par R :

$$F(R\sin\alpha) = (mR^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

④ *Définitions :*

Bras de levier : $\ell = R\sin\alpha$

Moment de la force : $\Gamma = F\ell$

Moment d'inertie : $I = mR^2$

⇩ Le **théorème du moment cinétique** est un corollaire de la 2ème loi de Newton.

⑤
$$\boxed{\sum \Gamma_{ext\to M/O} = I_O\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

Dynamique d’un point matériel en m^{vt} circulaire

Conséquences

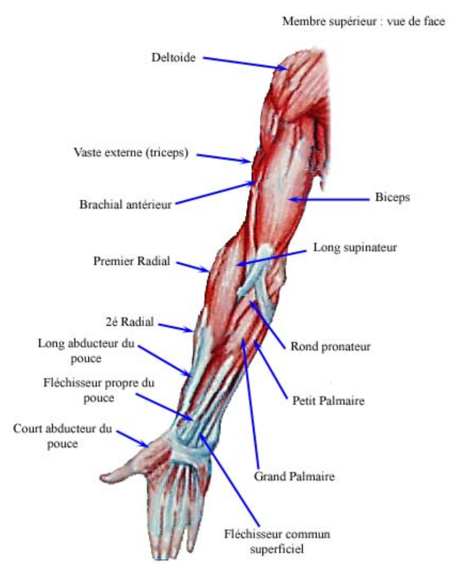
$$\Gamma = I\frac{d\Omega}{dt}$$

Un objet ayant un moment d’inertie I plus élevé est plus difficile à accélérer (γ = dΩ/dt = d$^2\theta$/dt^2 dépend de $1/I$).

$$I = mR^2$$

La valeur du moment d’inertie I dépend de la distribution de la masse d’un objet.
Plus la masse est près de l’axe de rotation, plus l’objet sera facile à faire tourner.

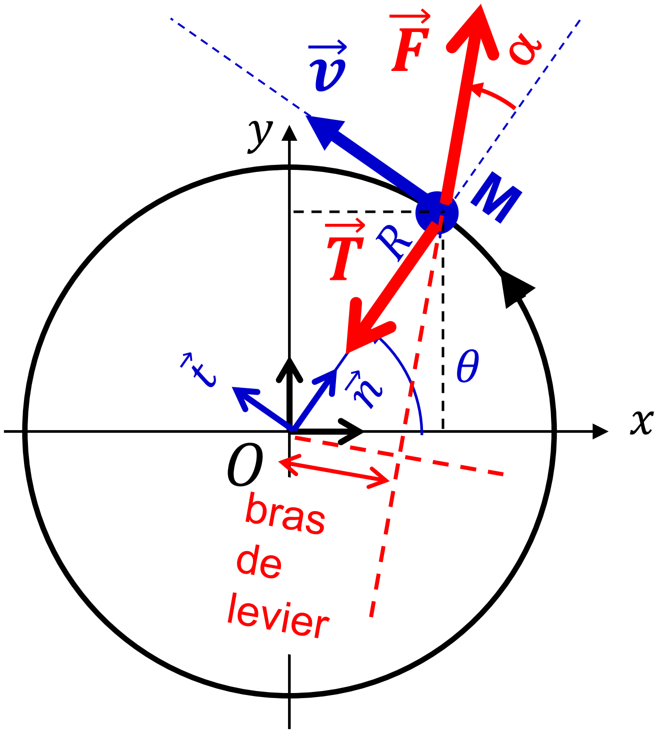
⇨ Pour les membres articulés : muscles et tendons.



Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire

Expression vectorielle du théorème du moment cinétique

$$\Gamma_0 = I\frac{d\Omega}{dt}$$



Avec:

a) **Moment de la force** par rapport à l'axe Oz:

$$\Gamma_0 = FR\sin\alpha$$

$$\overrightarrow{\Gamma_0} = (FR\sin\alpha)\vec{k} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$$

b) **Dérivé du moment cinétique** par rapport à l'axe Oz:

$$I\frac{d\Omega}{dt} = (mR^2)\frac{d\Omega}{dt} = R\left(mR\frac{d\Omega}{dt}\right) = R\left(m\frac{dv}{dt}\right)$$

La vitesse étant ortho-radiale, on a : $R\left(m\frac{dv}{dt}\right)\vec{k} = \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}\right)$

car $\vec{v}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

Donc : $$\boxed{\sum\overrightarrow{\Gamma_{ext/O}} = \sum\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}\right)}$$

Moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$

Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire

Expression vectorielle du théorème du moment cinétique

$$\sum \overrightarrow{\Gamma_O} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}$$

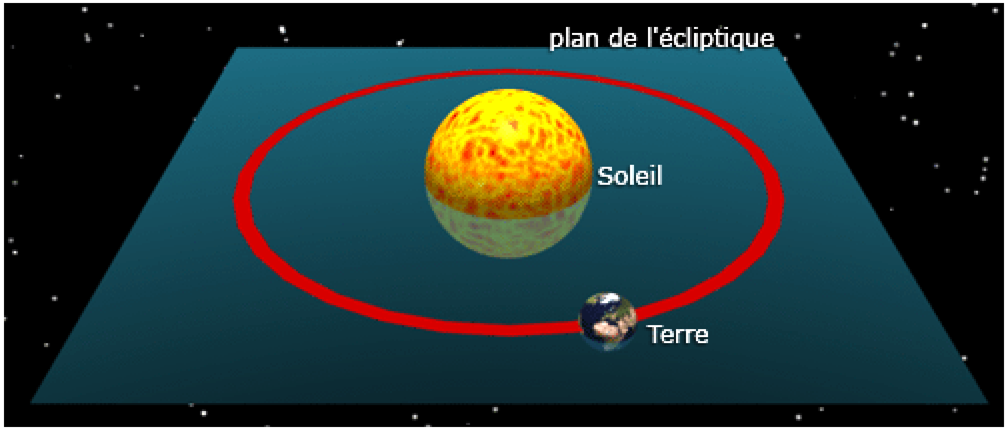
Avec:

a) **Moment d'une force** par rapport à l'axe Oz: $\overrightarrow{\Gamma_0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

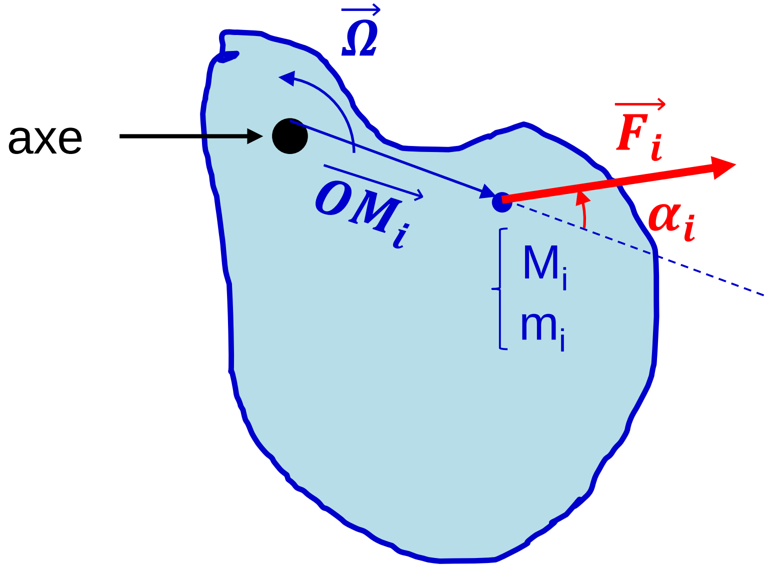
b) **Moment cinétique** par rapport à l'axe Oz: $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

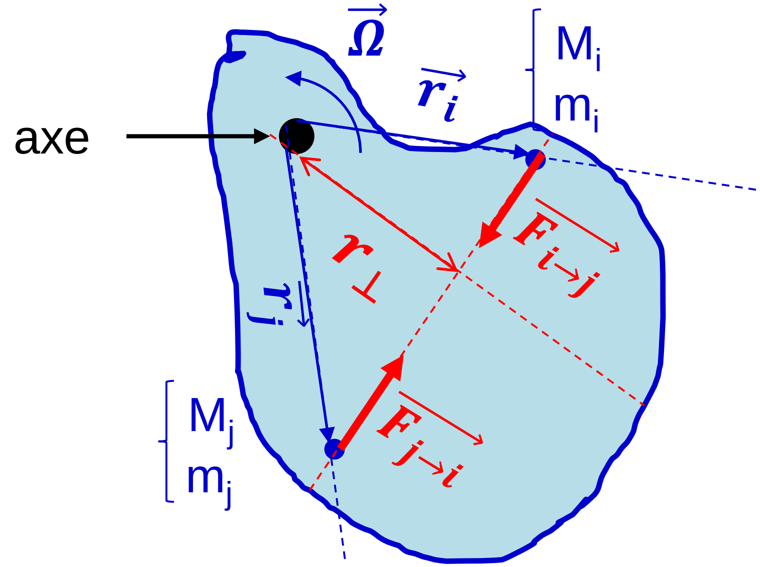
☞ Conséquence : Un mobile (Terre) subissant exclusivement une force centrale (attraction gravitationnelle du soleil O) évolue dans un plan contenant O de normale $\vec{\Omega}$ à tout instant.

La trajectoire est une conique :
- *ellipse,*
- *parabole*
- *ou hyperbole*



Dynamique d'un solide en rotation





① On applique la 2ème loi de Newton à toutes les masses m_i composant l'objet.

$$\sum\left(\Gamma_{ext\to i}+\Gamma_{j\to i}\right)=\frac{d^2\theta}{dt^2}\sum m_i(r_i)^2$$

② On remarque que les moments des forces internes s'annulent tous.

car

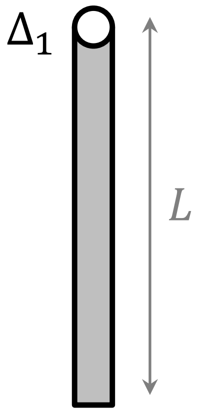
- Principe d'action - réaction

$$\overrightarrow{F_{i\to j}}=-\overrightarrow{F_{j\to i}}$$

- $F_{i\to j}$ et $F_{j\to i}$ ont le même bras de levier

③ Conclusion : $\boxed{\sum \Gamma_{ext/o}=I_o\frac{d^2\theta}{dt^2}}$ avec $\boxed{I_o=\sum m_i(r_i)^2}$

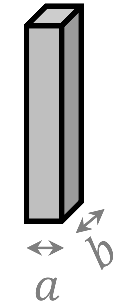
Calcul de 2 moments d’inertie d’un même objet

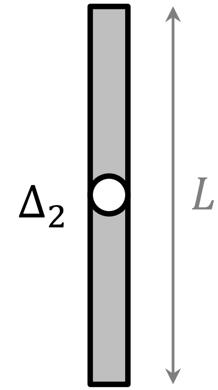


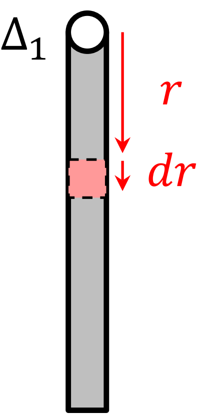
$$\boxed{I = \sum m_i {R_i}^2}$$

$$\rho = Cte$$

$$M = \rho \times (a \times b \times L)$$





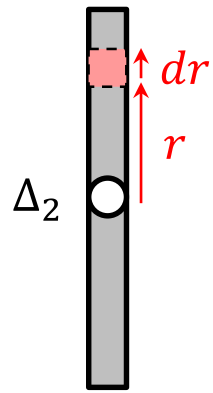


$$I_1 = \int_{r=0}^{r=L} \rho \times (a \times b \times dr) \times r^2$$

$$I_1 = \rho \times a \times b \times \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=L}$$

$$I_1 = \rho \times a \times b \times \frac{L^3}{3}$$

$$I_1 = M \times \frac{L^2}{3}$$



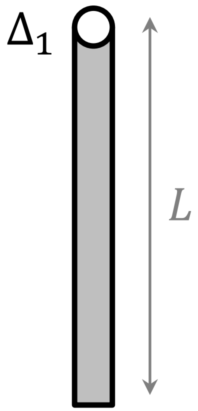
$$I_2 = \int_{r=-L/2}^{r=+L/2} \rho \times (a \times b \times dr) \times r^2$$

$$I_2 = \rho \times a \times b \times \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=-L/2}^{r=+L/2}$$

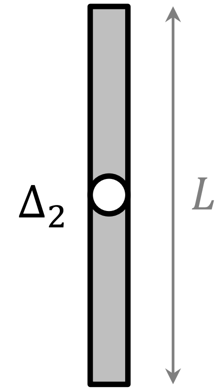
$$I_2 = \rho \times a \times b \times \left[2 \times \frac{L^3}{3 \times 8}\right]$$

$$I_2 = \frac{I_1}{4} = M \times \frac{L^2}{12}$$

Calcul de 2 moments d’inertie d’un même objet



$$I = \sum m_i {R_i}^2$$

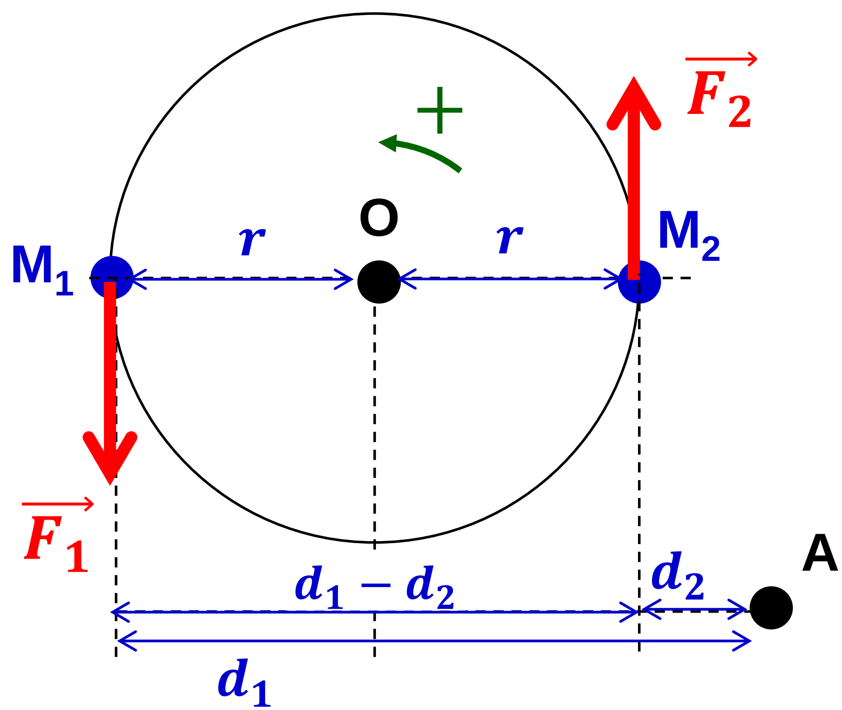


$$I_2 = \frac{I_1}{4}$$

Moment d'un couple de forces

Il s'agit de forces
- Exerçant un moment au point O $\sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \neq \vec{0}$
- Ayant une résultante nulle $\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$

Dans ce cas, le moment des forces est indépendant du point d'application O !



- Preuve scalaire

$$\Gamma_0 = (rF) + (rF) = r(F + F) = 2rF$$

$$\Gamma_A = (d_1 F) - (d_2 F) = (d_1 - d_2)F = 2rF$$

- Preuve vectorielle

$$\overrightarrow{\Gamma_{total/A}} = \overrightarrow{\Gamma_{1/A}} + \overrightarrow{\Gamma_{2/A}} = \overrightarrow{AM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$$

avec $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{M_2M_1}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_{total/A}} = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \overrightarrow{F_1}$$

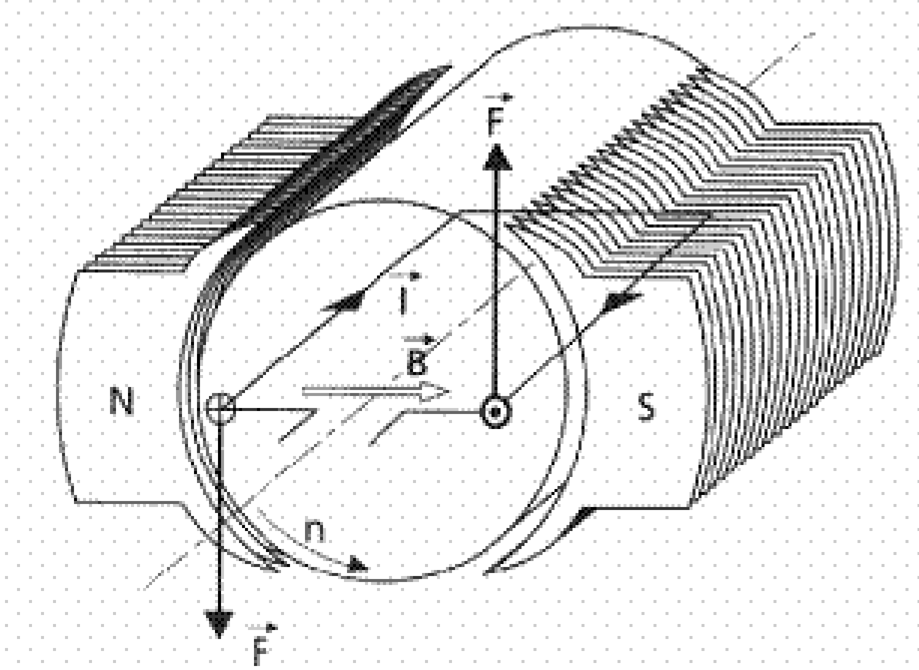
Annexe

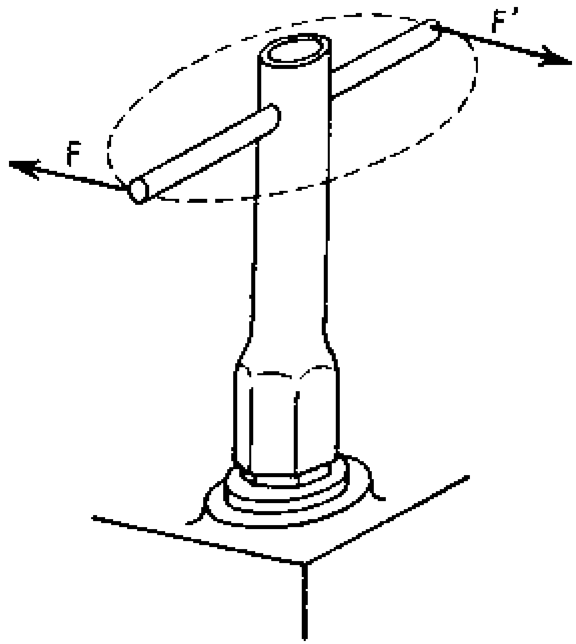
Moment d'un couple de forces

Exemples importants

- Moteur électrique : les forces de Laplace sur chaque conducteur créent un couple.
- Frottement sur un axe : le long du contact, les forces de frottement créent un couple
- Torsion d'un câble crée un couple de torsion proportionnel à l'angle $\Delta\theta$. $\Gamma = k \cdot \Delta\theta$

$$\overrightarrow{F_{Laplace}} = I \times \left(\vec{L} \wedge \vec{B}\right)$$





Energie cinétique de rotation

L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_{cinétique} = \sum \frac{1}{2} m_i (v_i)^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \Omega_i)^2$$

Or la vitesse angulaire Ω est la même pour tous les points du solide. Donc :

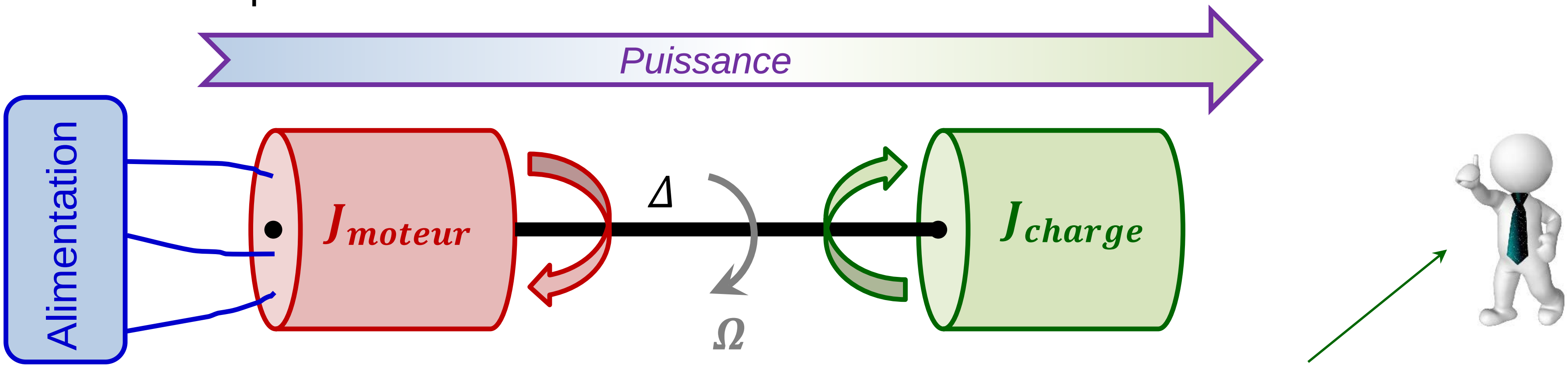
$$E_{cinétique} = \Omega^2 \sum \frac{1}{2} m_i (r_i)^2$$

gyroscope

$$\boxed{E_{cinétique} = \frac{1}{2} I_{Oz} \Omega^2}$$

Comment prendre en compte le moment d'inertie?

① Cas simple : un seul axe de rotation



C_{moteur} $\quad$ $C_{resistant} = C_{pertes} + C_{utile}$

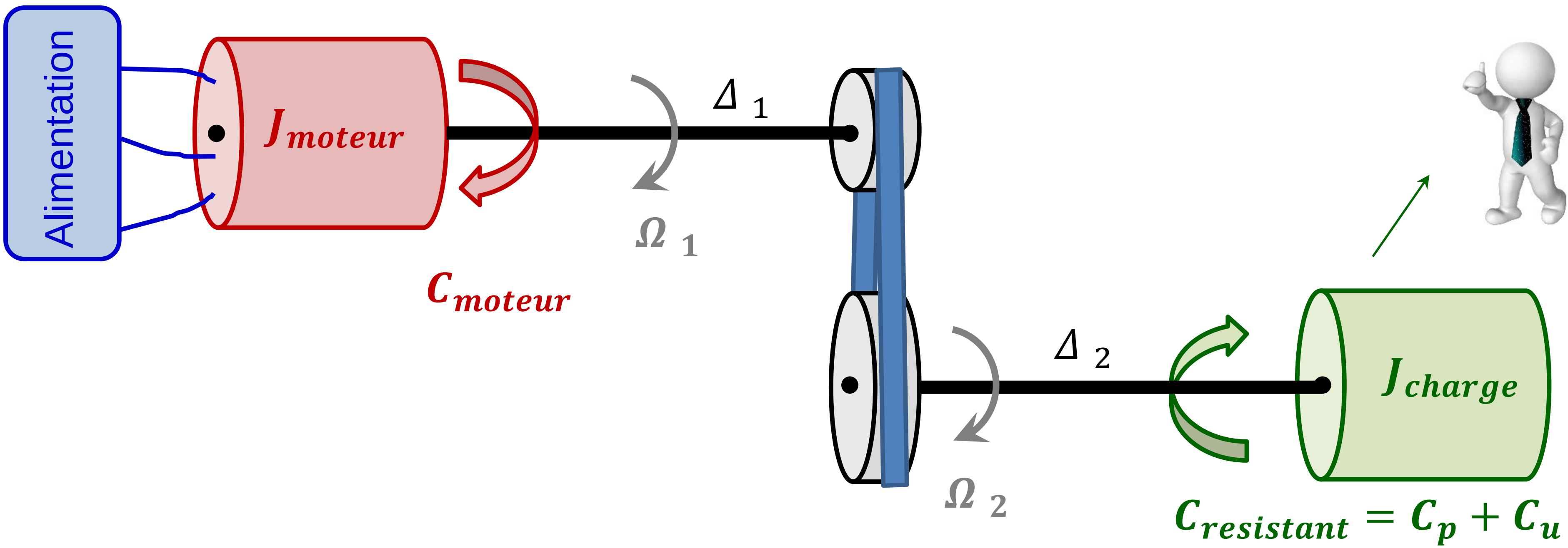
- Frottements secs
- Frottements visqueux
- Frottements aérodynamiques

⇨ 2nde loi de Newton en rotation :

$$\boxed{\left(J_{moteur} + J_{charge}\right) \times \frac{d\Omega}{dt} = C_{moteur} - C_{resistant}}$$

Comment prendre en compte le moment d’inertie?

② Cas de plusieurs axes de rotation interconnectés



⇨ 2nde loi de Newton en rotation :

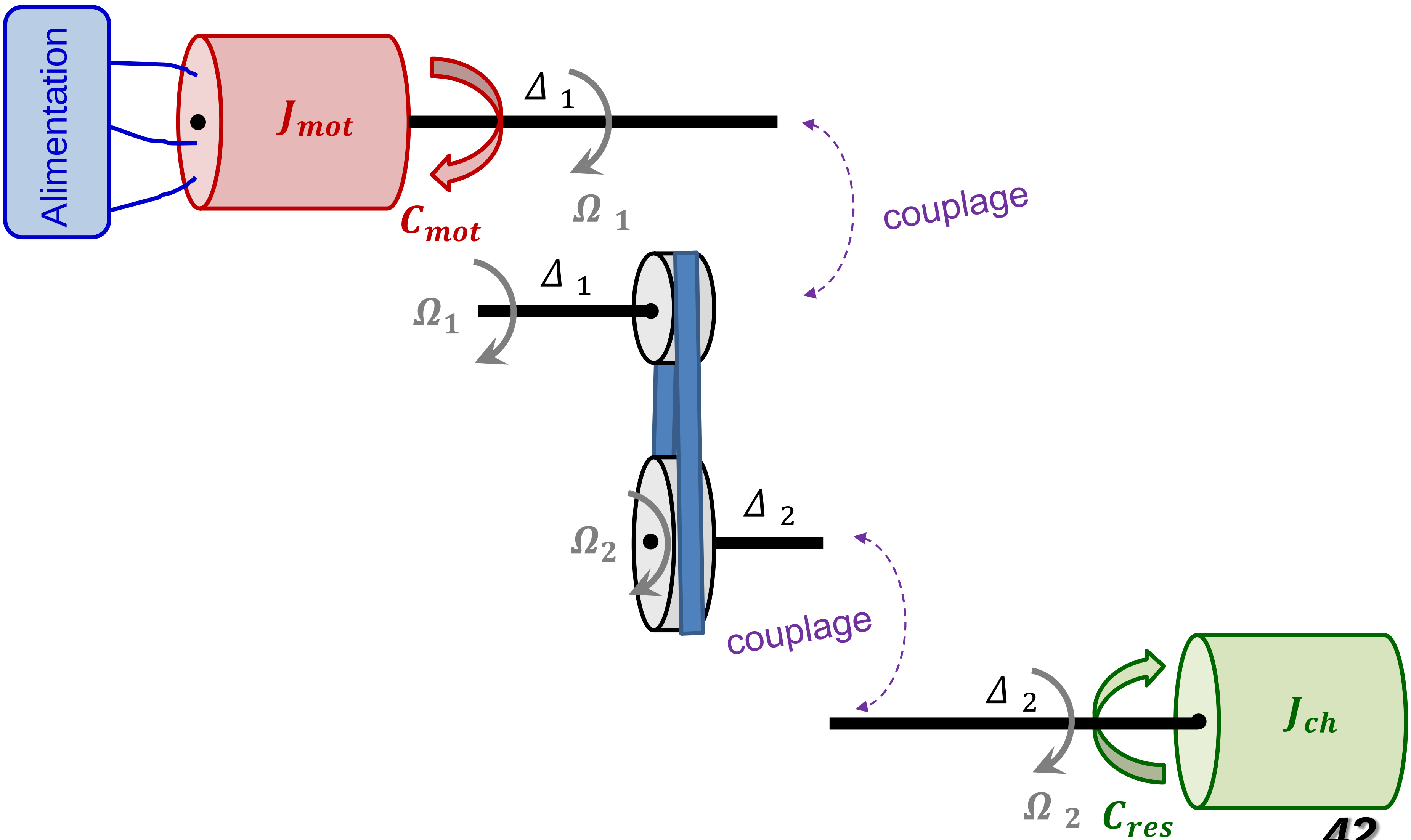
?

$$(J) \times \frac{d\Omega}{dt} = \sum Moments$$

? ?

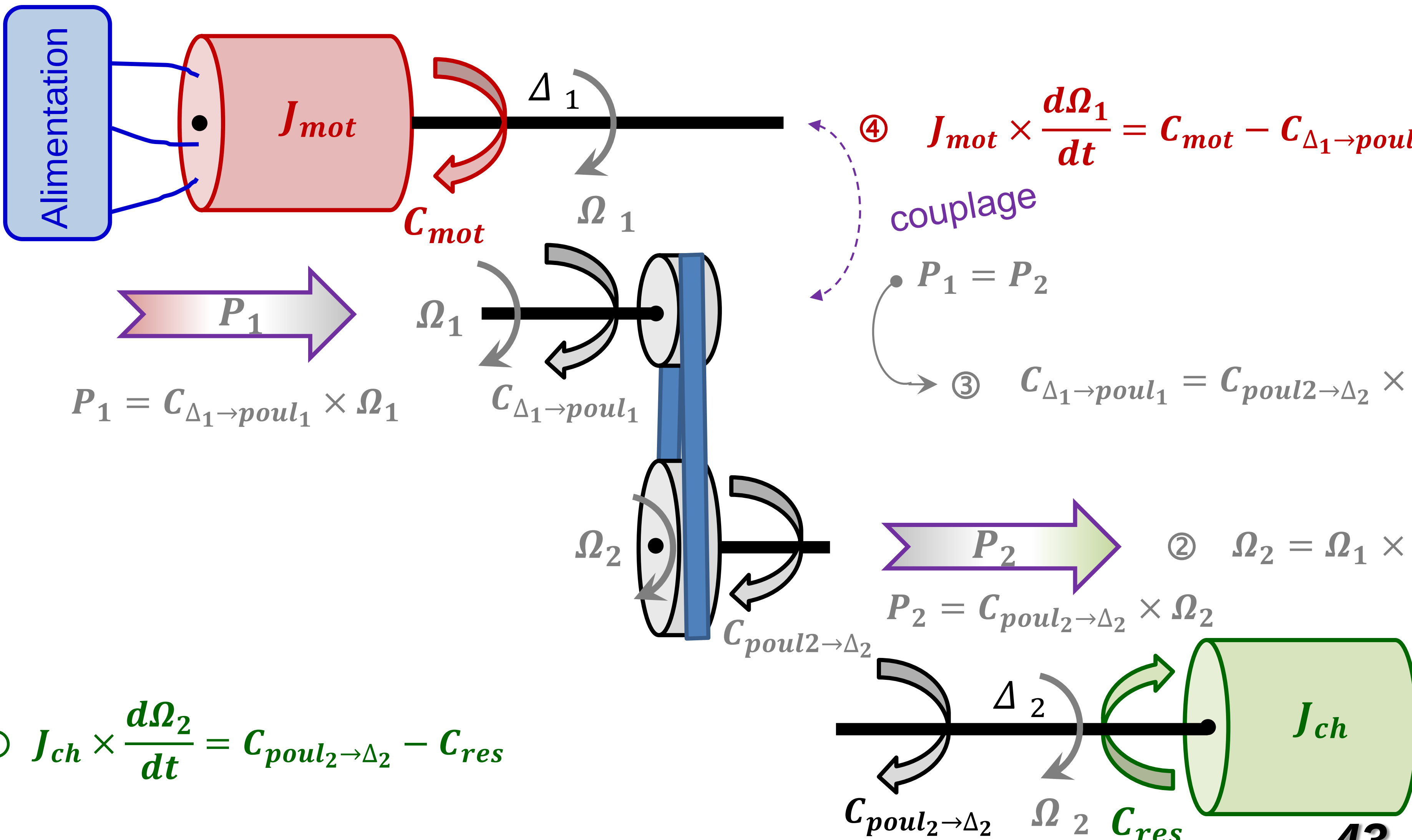
Comment prendre en compte le moment d'inertie?

② Cas de plusieurs axes de rotation interconnectés ⟶ ✋ "Divide and Conquer"



Comment prendre en compte le moment d'inertie?

② Cas de plusieurs axes de rotation interconnectés ← ✋ "Divide and Conquer"



④ $$J_{mot} \times \frac{d\Omega_1}{dt} = C_{mot} - C_{\Delta_1 \to poul_1}$$

$$P_1 = C_{\Delta_1 \to poul_1} \times \Omega_1$$

$$P_1 = P_2$$

③ $$C_{\Delta_1 \to poul_1} = C_{poul2 \to \Delta_2} \times \mathrm{r}$$

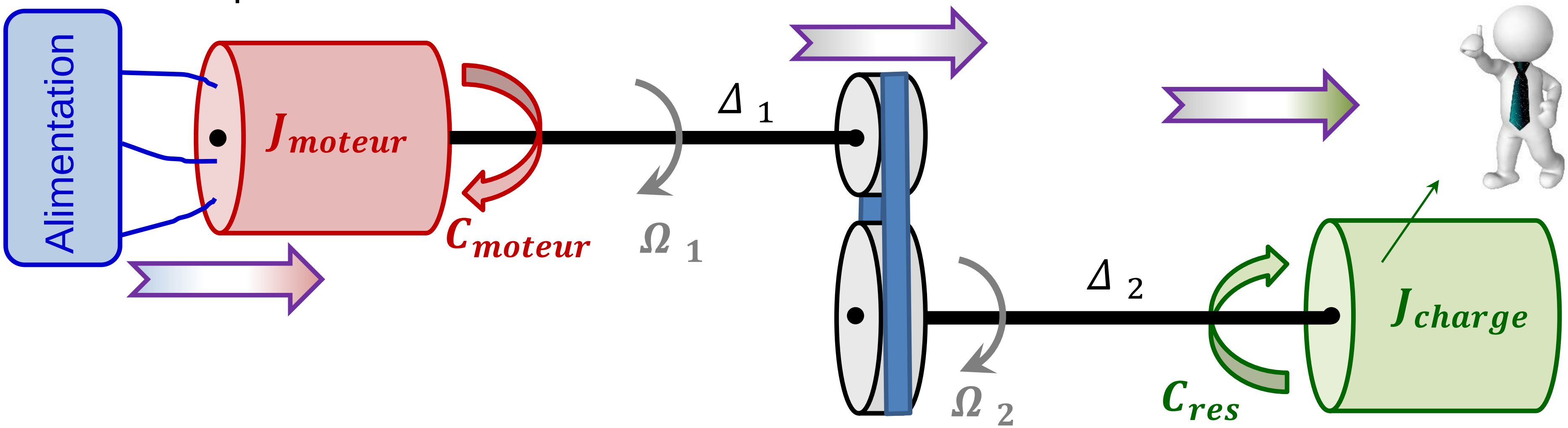
② $$\Omega_2 = \Omega_1 \times \mathrm{r}$$

$$P_2 = C_{poul_2 \to \Delta_2} \times \Omega_2$$

① $$J_{ch} \times \frac{d\Omega_2}{dt} = C_{poul_2 \to \Delta_2} - C_{res}$$

Comment prendre en compte le moment d'inertie?

② Cas de plusieurs axes de rotation interconnectés



⇨ Bilan : équation dynamique ramenée au moteur

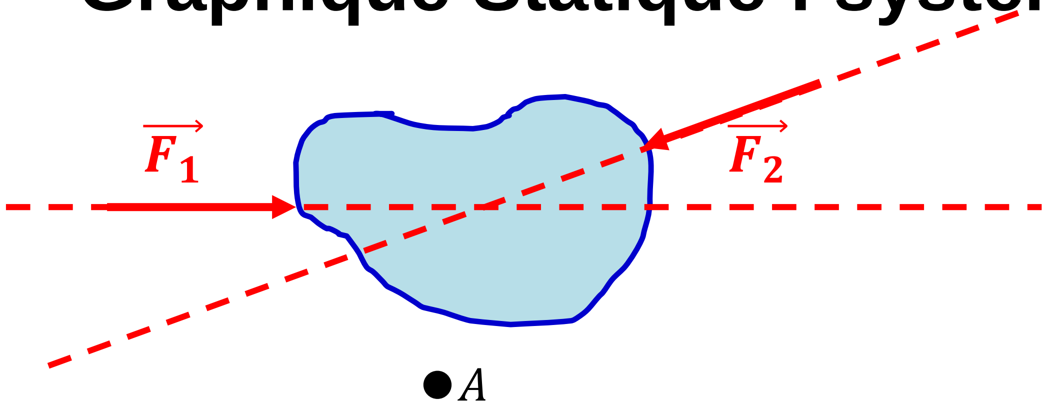
$$\begin{cases} J_{mot} \times \dfrac{d\Omega_1}{dt} = C_{mot} - C_{\Delta_1 \to poul_1} \\ C_{\Delta_1 \to poul_1} = C_{poul_2 \to \Delta_2} \times \mathrm{r} \\ \Omega_2 = \Omega_1 \times \mathrm{r} \\ J_{ch} \times \dfrac{d\Omega_2}{dt} = C_{poul_2 \to \Delta_2} - C_{res} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad J_{mot} \times \frac{d\Omega_1}{dt} = C_{mot} - C_{poul_2 \to \Delta_2} \times \mathrm{r}$$

$$\longrightarrow \quad C_{poul_2 \to \Delta_2} = C_{res} + J_{ch} \frac{d\Omega_2}{dt} = C_{res} + J_{ch} r \frac{d\Omega_1}{dt}$$

$$\boxed{(J_{mot} + \underbrace{J_{ch} r^2}) \frac{d\Omega_1}{dt} = C_{mot} - \underbrace{C_{res}\ \mathrm{r}}}$$

Graphique Statique : système subissant 2 forces



$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \vec{0} \qquad \forall A \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_i}\right) = \vec{0}$$

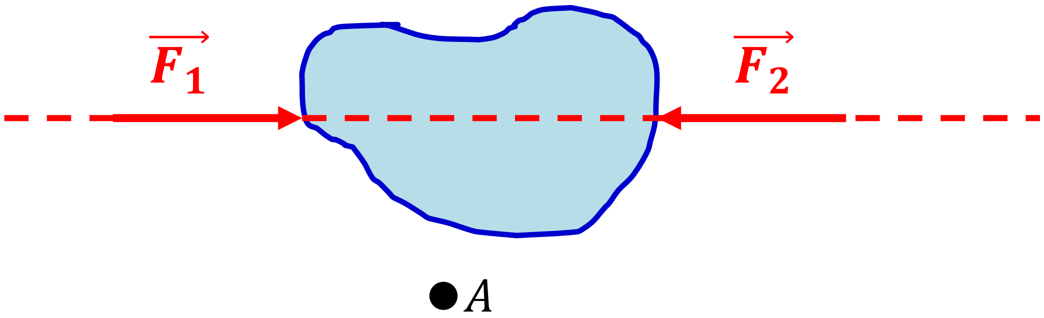
Donc en particulier pour un point A sur la ligne d'action de $\overrightarrow{F_1}$.

Dans ce cas, on a : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) = \vec{0}$

Et donc : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \vec{0}$

Par conséquent, le point A est également sur la ligne d'action de $\overrightarrow{F_2}$.

Graphique Statique : système subissant 2 forces



$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \vec{0} \qquad \forall A \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_i}\right) = \vec{0}$$

Donc en particulier pour un point A sur la ligne d'action de $\overrightarrow{F_1}$.

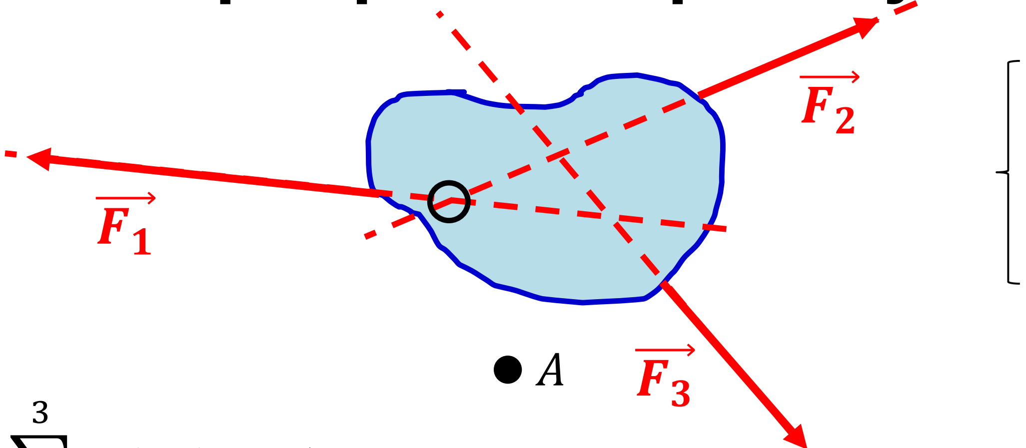
Dans ce cas, on a : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) = \vec{0}$

Et donc : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \vec{0}$

Par conséquent, le point A est également sur la ligne d'action de $\overrightarrow{F_2}$.

Les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont donc
1. alignées (même ligne d'action)
2. opposées.

Graphique Statique : système subissant 3 forces



$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_3}\right) = \vec{0} \qquad \forall A \end{cases}$$

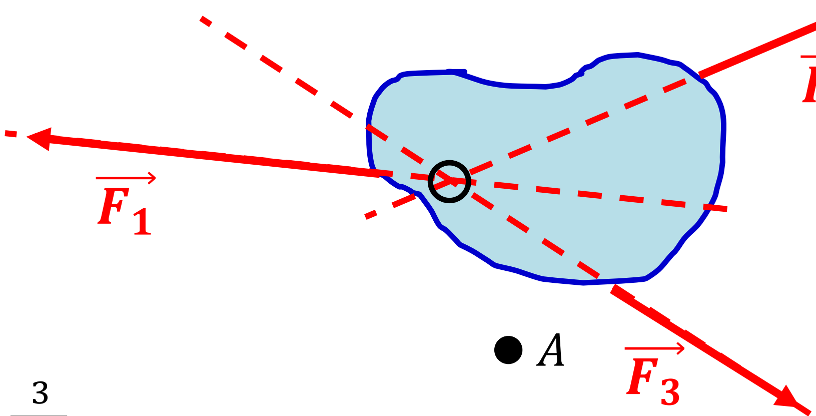
$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_i}\right) = \vec{0}$$

- **Hypothèse 1 :** les lignes d'action des trois forces ne sont pas //.
- Donc en particulier pour un point A sur l'intersection des lignes d'action de $\overrightarrow{F_1}$ et de $\overrightarrow{F_2}$.

Et donc : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) = \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \vec{0}$

Par conséquent, le point A est également sur la ligne d'action de $\overrightarrow{F_3}$.

Graphique Statique : système subissant 3 forces



$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_3}\right) = \vec{0} \qquad \forall A \end{cases}$$

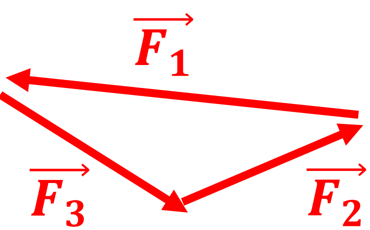
$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_i}\right) = \vec{0}$$

➪ **Hypothèse 1 :** les lignes d'action des trois forces ne sont pas //.

➪ Donc en particulier pour un point A sur l'intersection des lignes d'action de $\overrightarrow{F_1}$ et de $\overrightarrow{F_2}$.

Et donc : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) = \overrightarrow{\Gamma_{/A}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \vec{0}$

Par conséquent, le point A est également sur la ligne d'action de $\overrightarrow{F_3}$.

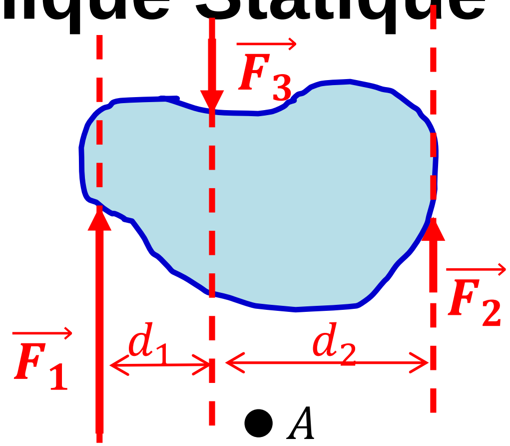


Les trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$

1. sont donc concourantes (et dans un même plan)
2. forment un triangle.

➔ la connaissance d'une intensité et d'une direction permet de trouver graphiquement les 3 forces.

Graphique Statique : système subissant 3 forces



$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_2}) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_3}) = \vec{0} \qquad \forall A \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_i}) = \vec{0}$$

➪ **Hypothèse 2 :** les lignes d'action des trois forces sont parallèles (//)

➪ Donc en particulier pour un point A la ligne d'action de $\overrightarrow{F_3}$

Et donc : $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_2}) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{\Gamma_{/A}}(\overrightarrow{F_3}) = \vec{0}$

$$d_1 F_1 = d_2 F_2$$

Les trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$

1. sont donc toutes parallèles (et dans un plan)
2. répondent à la règle du « bras de levier » pour 2 .

➔ la connaissance d'une intensité et d'une direction permet de trouver graphiquement les 3 forces.

3 Mouvement d’un solide (translation + rotation)

① **Contexte**

② **Cinématique**

③ **Centre de masse**

④ **Mouvement du centre de masse**

⑤ **Théorème du moment cinétique :**
Point d’appli A fixe ($v_A = 0$) ou centre de masse (G)

Contexte

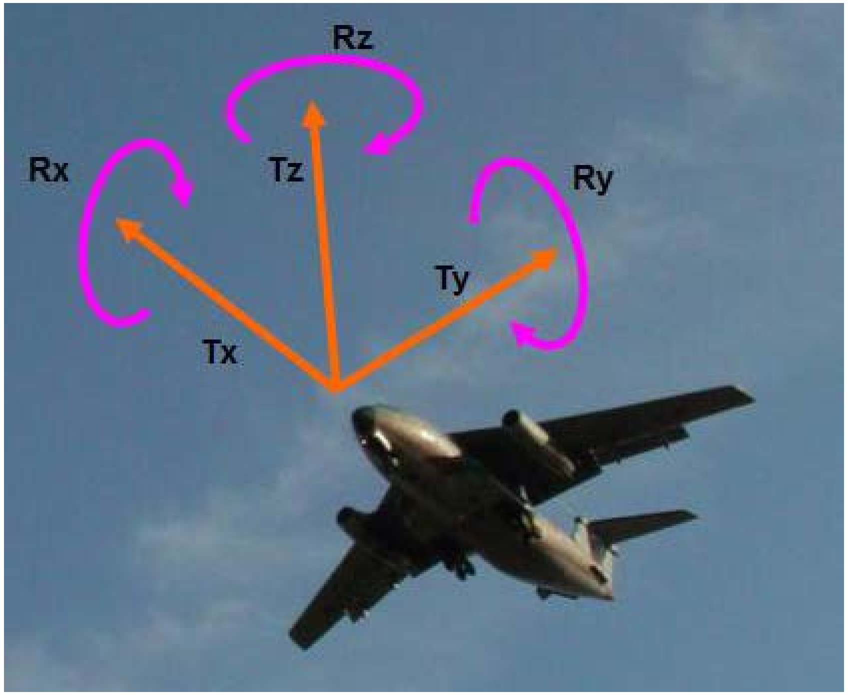
Mouvements très complexes,
et pas toujours facile à comprendre !

Cinématique

Pour un **solide** (objet rigide indéformable), le mouvement résulte de la **composition de deux mouvements**

- Mouvement de son **centre de masse** qui est décrit par 3 coordonnées

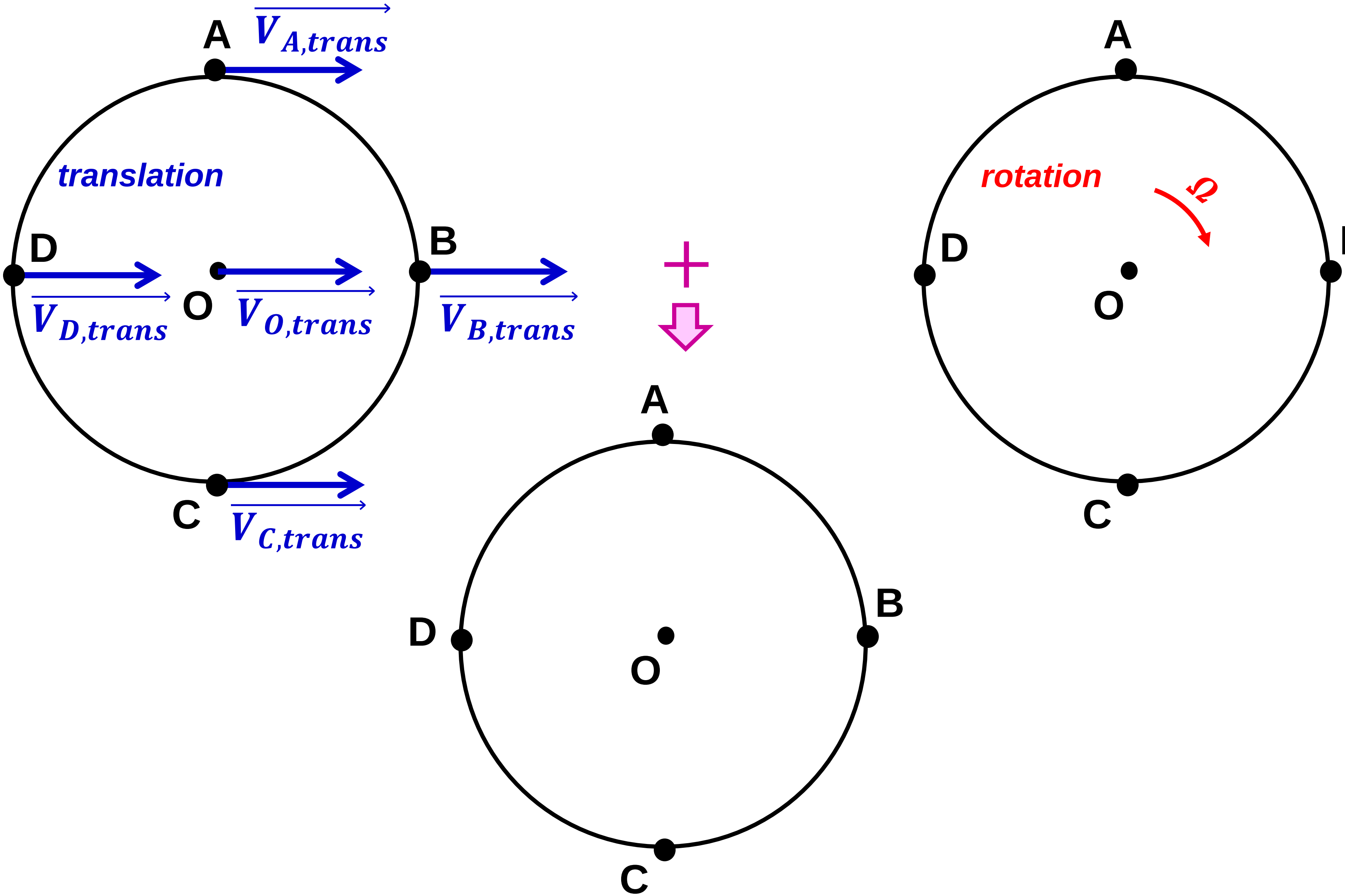
- Mouvement de **rotation** autour de son centre de masse (également décrit par 3 autres coordonnées).



*Un solide possède **6 degrés de liberté***

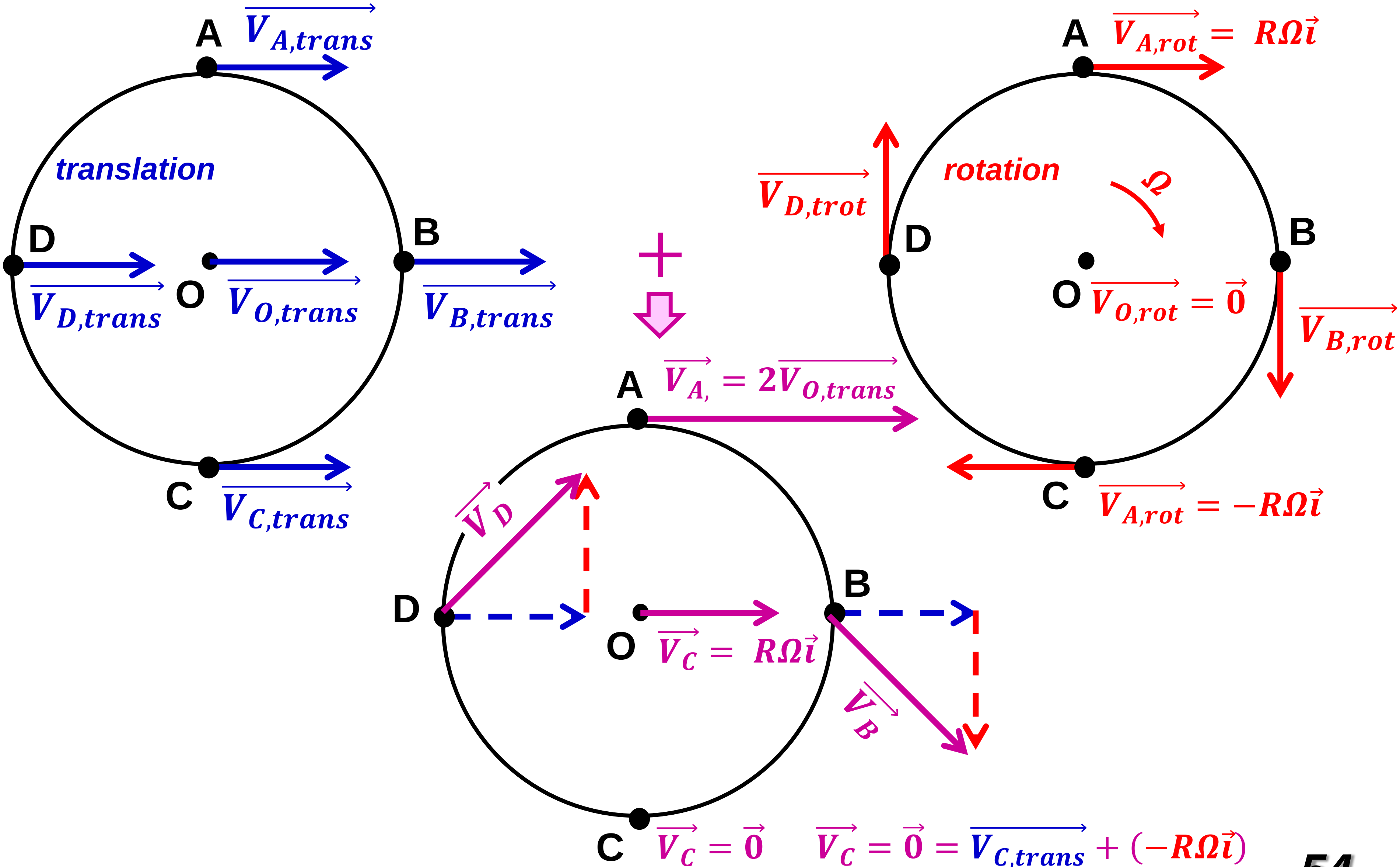
Cinématique

Translation simple + Rotation simple : la roue de vélo



Cinématique

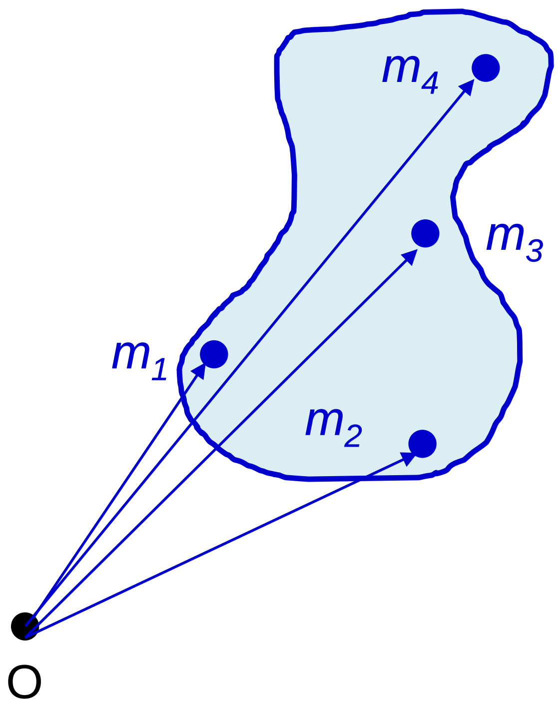
Translation simple + Rotation simple : la roue de vélo



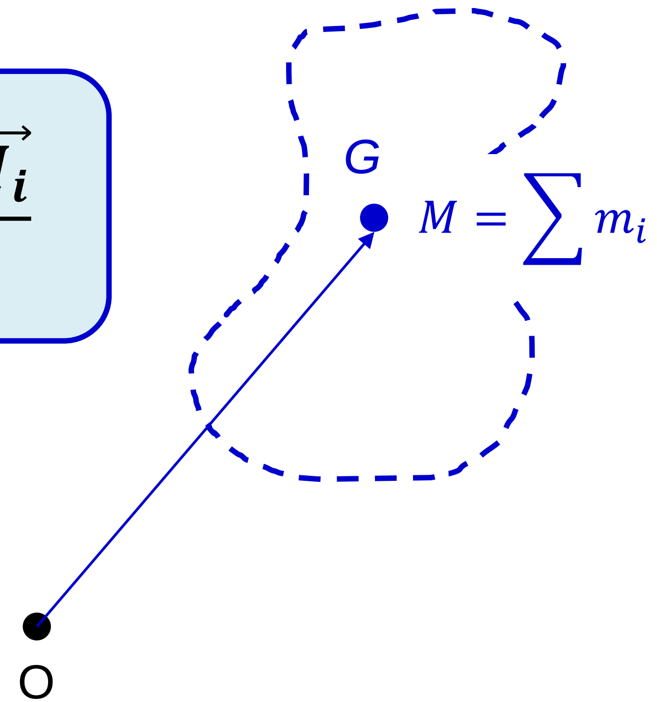
Centre de masse

On cherche à **simplifier** l’étude du système en revenant à une **masse ponctuelle M**

- ayant la même évolution $\frac{d\vec{p}}{dt}$ de sa quantité de mouvement $\vec{p}$
- quand elle est soumise aux mêmes forces extérieures $\sum \vec{F}$.



$$\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum m_i}}$$

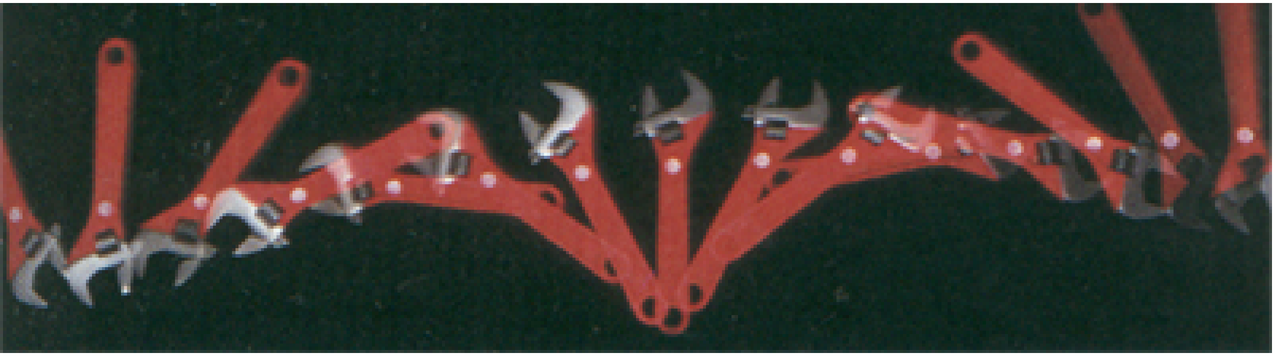


$$\vec{p} = \sum \boldsymbol{m_i \vec{v_i}} = \sum \boldsymbol{m_i} \frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM_i}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\sum \boldsymbol{m_i \overrightarrow{OM_i}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OG} \sum \boldsymbol{m_i}\right) = \left(\sum \boldsymbol{m_i}\right)\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OG}\right) = \overrightarrow{p_G}$$

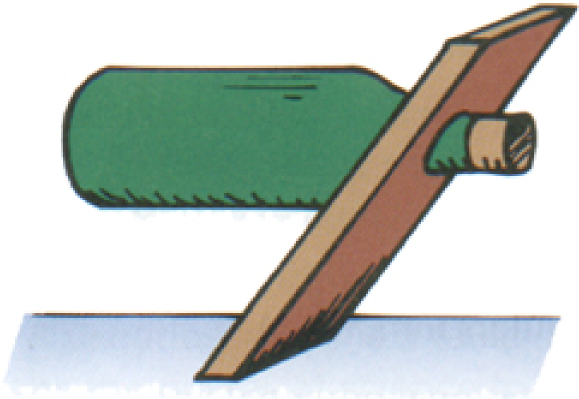
Centre de masse

Les forces internes étant opposées deux à deux (3ème loi de Newton), le mouvement du centre de masse est celui d'une masse ponctuelle $M = \sum m_i$ soumise à la résultante des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = M_{totale} \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$$



Centre de masse de la clé suit une parabole (alors que la clé a un mouvement complexe!



Bouteille immobile !

Théorème du moment cinétique : à appliquer en G !!!

Théo du moment cinétique par rapport à un point O fixe % à $R_{\text{Galiléen}}$

rappel

$$\sum \overrightarrow{\Gamma_{ext/O}} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}$$

avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Gamma_{ext/O}} = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \\ \overrightarrow{L_O} = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}_i \end{cases}$$

Théo du moment cinétique par rapport à un point A quelconque

$$\overrightarrow{L_A} = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_A}}{dt} = \sum (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_A}}{dt} = -\vec{v}_A \wedge \sum m_i \vec{v}_i + \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \Rightarrow \boxed{\frac{d\overrightarrow{L_A}}{dt} = \underbrace{-\vec{v}_A \wedge \left(\sum m_i\right) \vec{v}_G}_{☹} + \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F_i}}$$

$$-\vec{v}_A \wedge \vec{v}_G = \vec{0} \Leftrightarrow$$ Pour deux points A particuliers

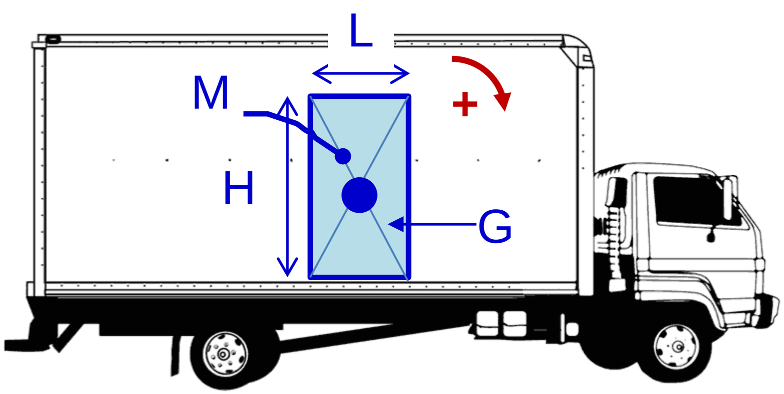
① A est un point à vitesse instantanée nulle

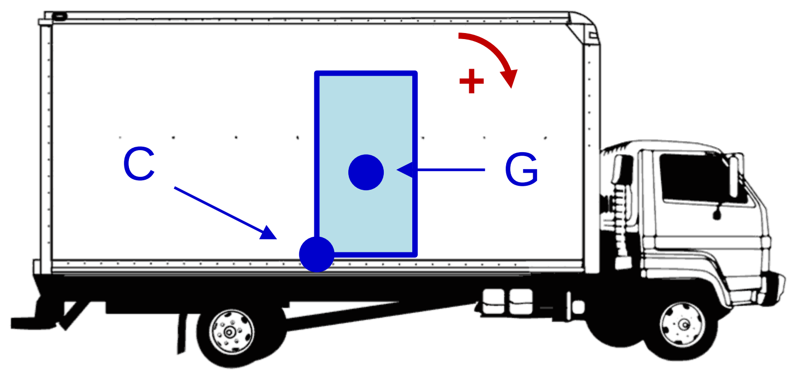
☺ ② La vitesse de A est à la vitesse de G comme pour A = G !!!

Théorème du moment cinétique : à appliquer en G !!!

Application au basculement dans les virages

On considère une caisse installée dans un camion. On se place dans le cas où le coefficient de frottement statique est suffisamment grand pour que la caisse puisse suivre le camion en toutes circonstances.
Quelle est l’accélération maximale que peut avoir le camion pour que la caisse ne bascule pas?



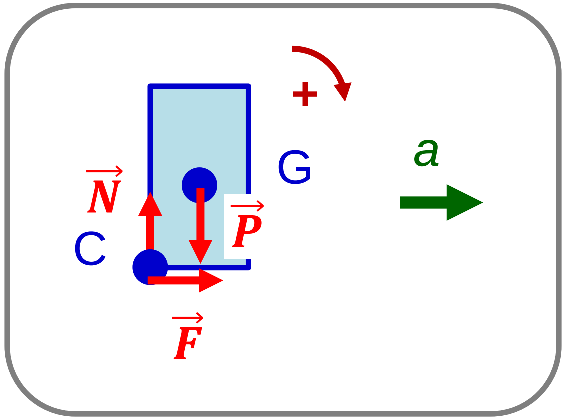


On se place dans la situation limite de la caisse uniquement en équilibre sur son coin arrière droit.

- 2ème loi de Newton appliquée au centre de masse (G , M) subissant l’accélération *a*.
- Moment des forces, appliqué au centre de masse G. (💣 C est en mvt !!!)

Théorème du moment cinétique : à appliquer en G !!!

Application au basculement dans les virages



① 2ème loi de Newton

$$\begin{cases} F = Ma \\ N - Mg = M0 = 0 \end{cases} \longrightarrow N = Mg$$

② Moment des forces appliqué en G

$$\left(+N\frac{L}{2}\right) - \left(+F\frac{H}{2}\right) + (Mg0) = I_G 0 = 0$$

$$NL - FH = 0 \longrightarrow NL = FH$$

③ Bilan :

$$MgL = MaH \longrightarrow \boxed{a = g\frac{L}{H}}$$

⟶ L'accélération limite *a* est d'autant plus grande que
- la caisse est basse (H <<) ;
- la caisse est large (L >>).

3- Mouvement d'un solide (translation + rotation)

L'application à la conduite automobile est le basculement de la caisse dans des virages serrés pris à vitesse constante. La vitesse limite v (cf accélération centripète a_n) est d'autant plus grande que

- la caisse est basse (H <<) ;
- l'empattement est large (L >>).

$$|a_n| = \left|-\frac{v^2}{R}\right| < g\,\frac{D}{H}$$

Energie cinétique : translation + rotation autour de G

$$\boxed{E = \frac{1}{2} M {V_G}^2 + \frac{1}{2} I_G \Omega^2}$$

Preuve :

① $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum m_i} = \dfrac{\sum m_i \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}\right)}{\sum m_i} = \overrightarrow{OG} + \dfrac{\sum m_i \overrightarrow{GM_i}}{\sum m_i}$ ⇨ $\boxed{\sum m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$

② Par dérivation, on obtient : $\sum m_i \overrightarrow{v_{i/R^*}} = \vec{0}$ ⇨ $\overrightarrow{p_{système/R^*}} = \vec{0}$

C'est-à-dire que, dans le référentiel $\mathfrak{R}^*$ attaché à son centre de masse, la quantité de mouvement d'un système est nulle.

③ Par définition, l'énergie cinétique du système dans le référentiel galiléen est :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i {v_i}^2$$

Energie cinétique

④ Composition des vitesses: $\overrightarrow{v_{i/R}} = \overrightarrow{v_{i/R^*}} + \overrightarrow{v_{G/R}}$

⑤ L'énergie cinétique devient:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(v_i^{*2} + {v_G}^2 + 2\overrightarrow{v_G}\cdot\overrightarrow{v_i^*}\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2} + \frac{{v_G}^2}{2}\sum m_i + \overrightarrow{v_G}\cdot\sum m_i\overrightarrow{v_i^*}$$

Or, on a vu en ② que : $\sum m_i\left(\overrightarrow{v_i^*}\right) = \vec{0}$ Donc $\boxed{E_C = \frac{1}{2}M{v_G}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2}}$

⑤ Donc, dans le cas particulier d'un solide faisant un mouvement de translation en même temps qu'il tourne sur lui-même autour de son centre de masse, on a :

$$E_C = \frac{1}{2}M{v_G}^2 + \frac{1}{2}I_G\Omega^2$$

Comprendre la mécanique

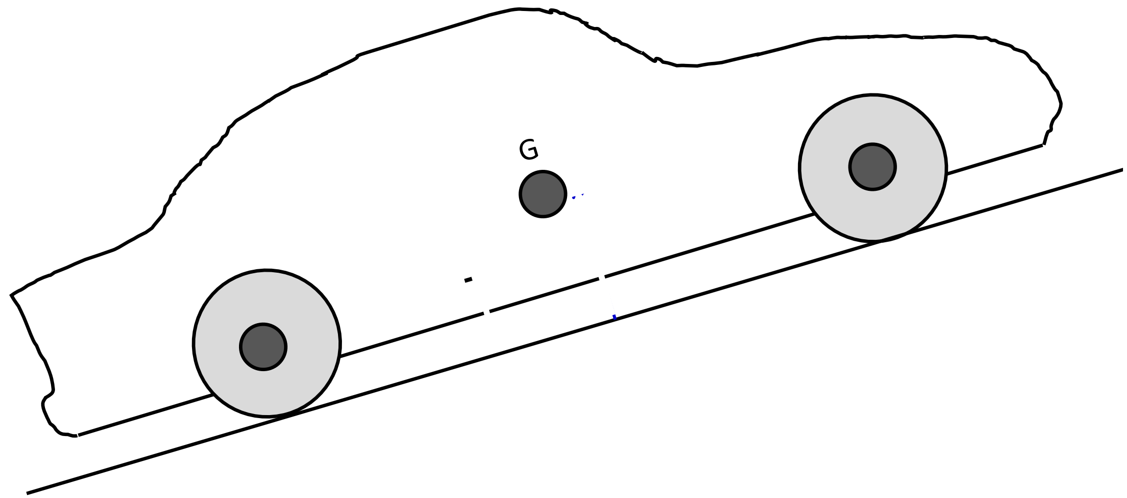
Licence EEA – S6 (Version janvier 2022)

Olivier Béthoux

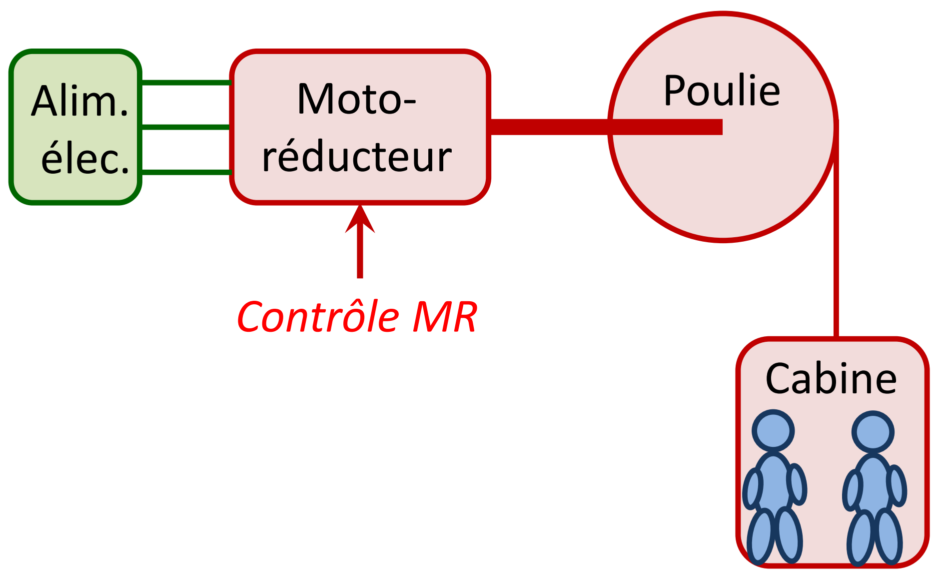
SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Comprendre la mécanique

① Cas d'étude 1



② Cas d'étude 2



Olivier Béthoux

Produit vectoriel

① Définition

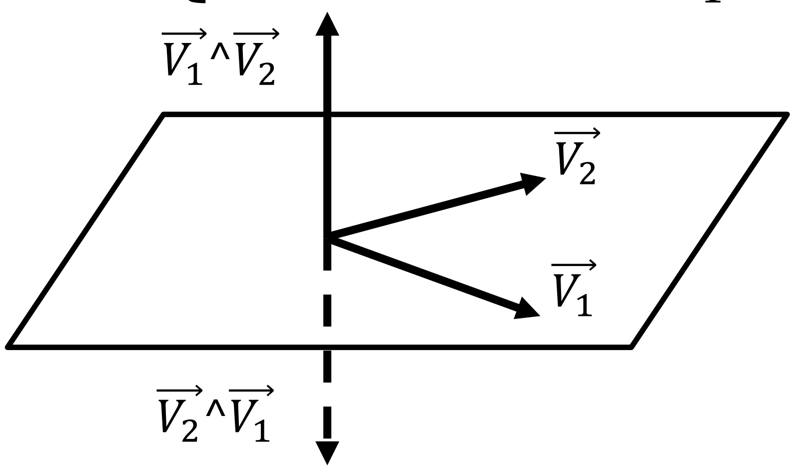
Le produit scalaire $\overrightarrow{W}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est un **vecteur**.

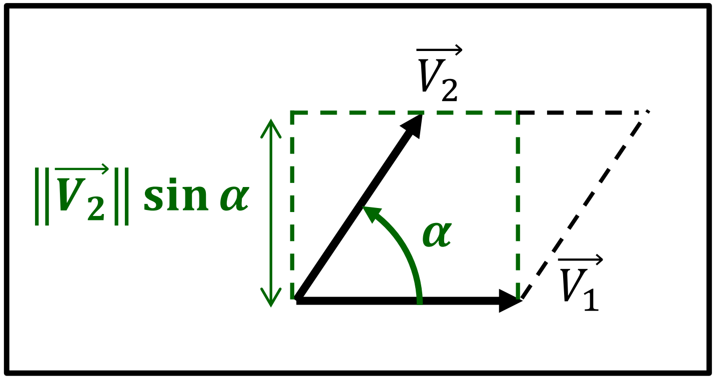
- Sa direction est orthogonale au plan défini par ces deux vecteurs.
- Son sens est tel que $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{W}$ forment un trièdre direct.

! Le produit vectoriel est donc anticommutatif.

! Le produit vectoriel est de deux vecteurs colinéaires est donc nul.

! Le module de $\left\|\overrightarrow{W}\right\|$ est à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.



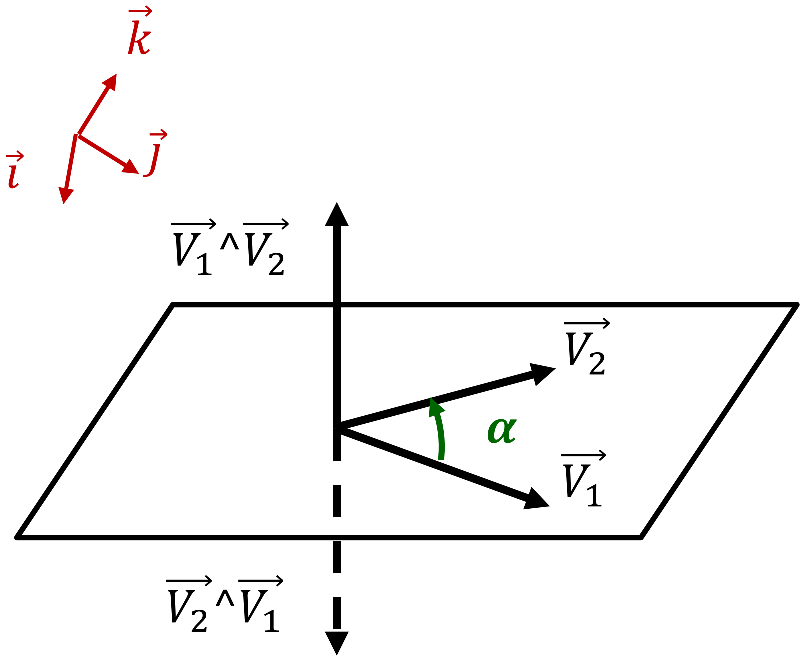


Produit vectoriel

② Expression dans un repère orthonormé

Le produit scalaire $\overrightarrow{W}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ définis par leurs coordonnées (dans un repère orthonormé).

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{W} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

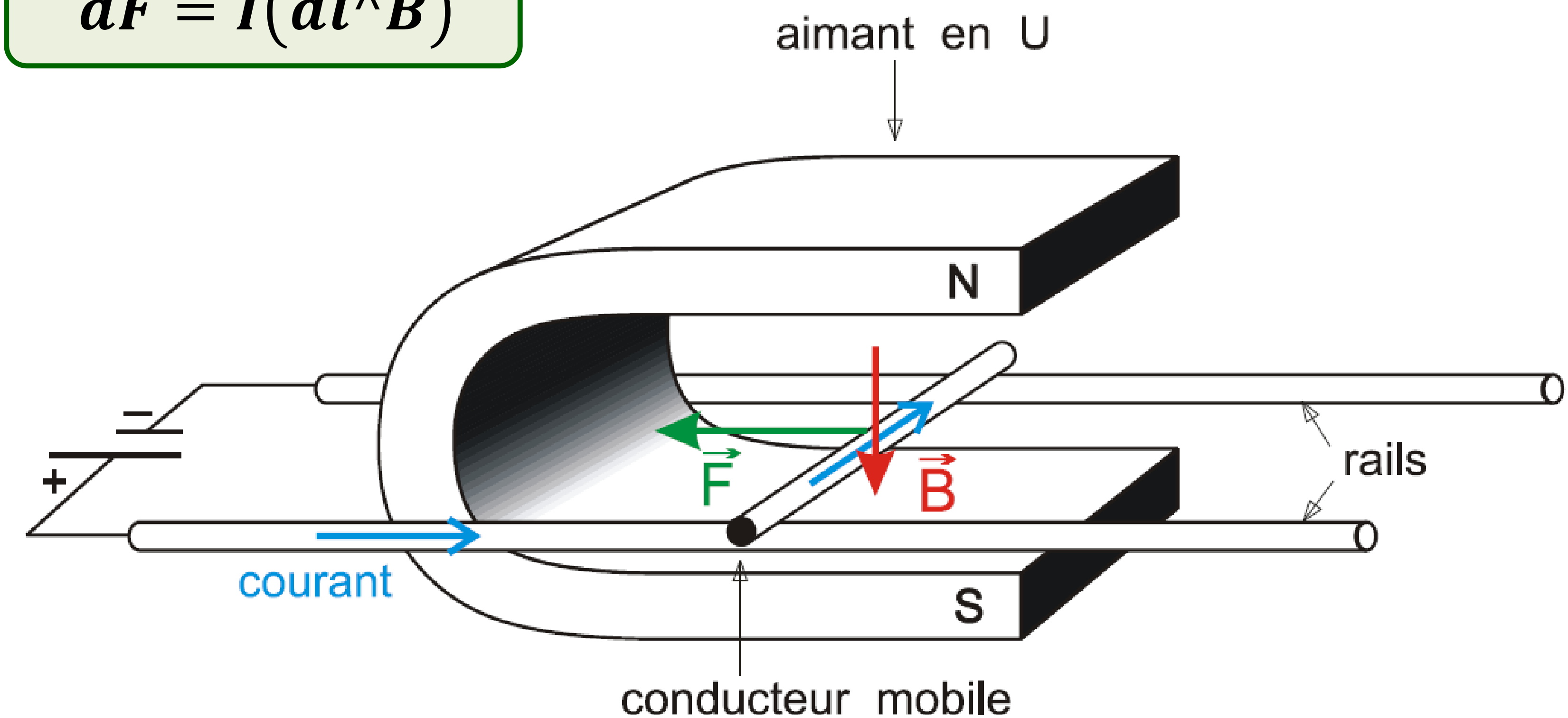


Produit vectoriel

③ Exemple 1 : force de Laplace

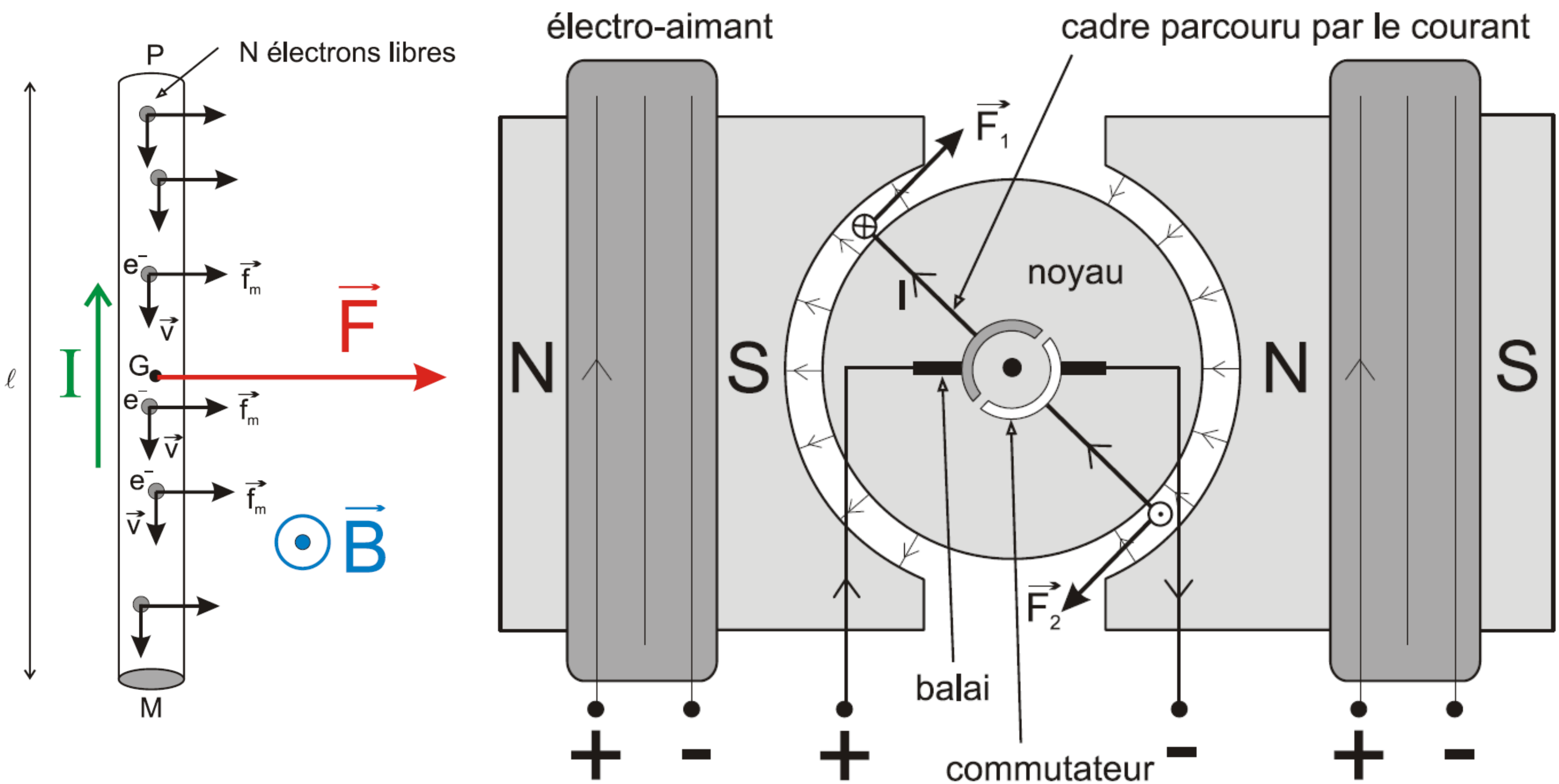
Une portion (dl) d'un conducteur parcouru par un courant (I), et plongée dans un champ magnétique d'induction (B), subit une force (dF) déterminée par :

$$\boxed{\overrightarrow{dF} = I\left(\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}\right)}$$



Produit vectoriel

③ Exemple 1 : force de Laplace – application au moteur : couple de forces

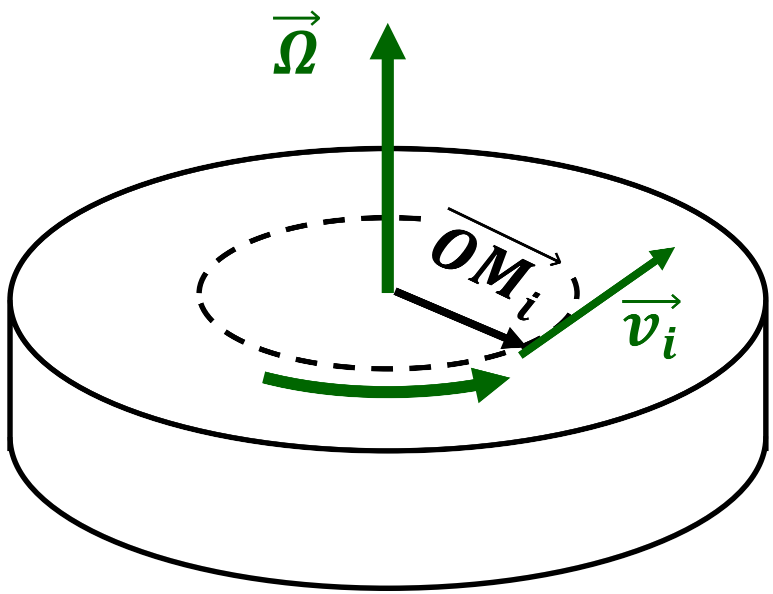


Produit vectoriel

④ Exemple 2 : moment cinétique

Pour un solide animé d'un mouvement de rotation autour d'un point O défini par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, le vecteur vitesse $\vec{v_i}$ de chacun de ses points M_i s'exprime à l'aide d'un produit vectoriel.

$$\boxed{\vec{v_i} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM_i}}$$



Produit vectoriel

⑤ Exemple 3: moment d'une force

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O est un produit vectoriel.

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\Gamma}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}}$$

L'unité du moment de force est le Newton·mètres.

Moment d'inertie

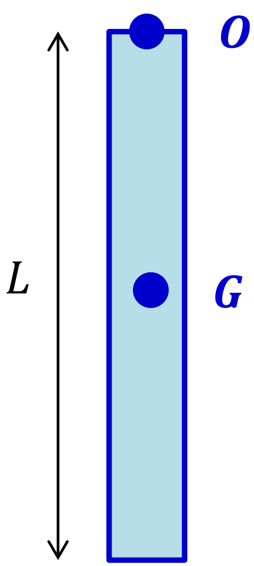
Exemple : la barre homogène

Le moment d'inertie J par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre est donné par :

$$J_{Gz} = \frac{ML^2}{12}$$

$$J_{Oz} = \frac{ML^2}{3}$$

L'unité du moment d'inertie est le kilogramme·mètres^2.



Par définition, le moment d'inertie J est donné par

$$J = \sum m_i {r_i}^2$$

Ici, les points situés à la distance r sont ceux compris entre (r) et (r+dr).
Leur masse est dm = ρ . dr, où ρ est la densité linéique de la barre.

Donc :

$$J = \int_{r_{initial}}^{r_{final}} \rho . r^2 . dr = \rho . \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r_{initial}}^{r_{final}}$$

avec : $\rho = \frac{M}{L}$

Moment d'inertie

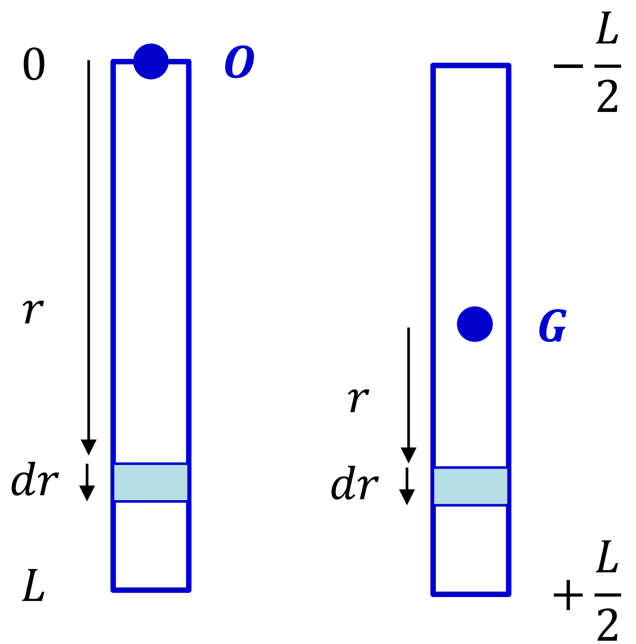
Exemple : la barre homogène

Le moment d'inertie J par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre est donné par :

$$J_{Gz} = \frac{ML^2}{12}$$

$$J_{Oz} = \frac{ML^2}{3}$$

L'unité du moment d'inertie est le kilogramme.mètres^2.

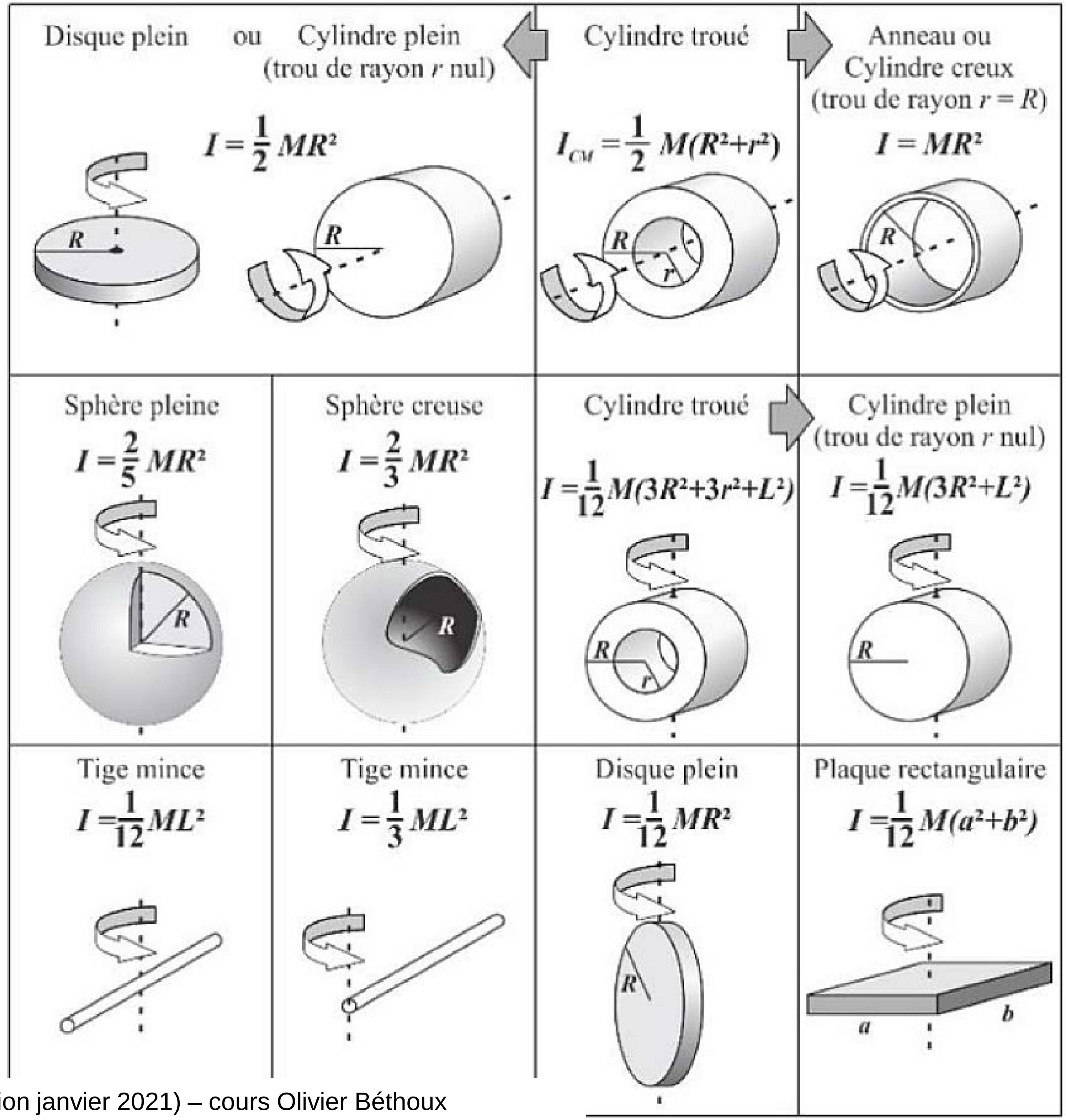


$$J_{Oz} = \frac{M}{L}.\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{M}{L}.\frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

$$J_{Gz} = \frac{M}{L}.\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{M}{L}.\frac{2.\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3} = \frac{ML^2}{12}$$

Annexe -

Moment d’inertie



Axe horizontal

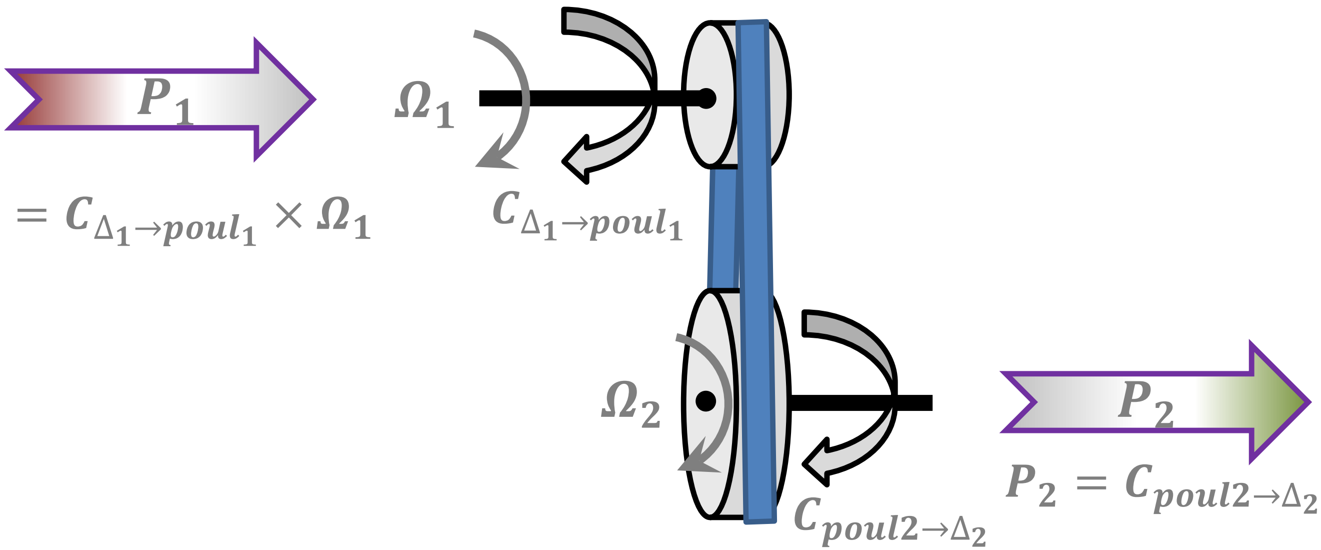
Axe vertical

Réducteur

Rapport de transformation : r

① Cas sans pertes ($\eta = 1$)

- Equation des vitesses $\quad \boldsymbol{\Omega_2 = \Omega_1 \times \mathrm{r}}$



$$P_1 = C_{\Delta_1 \to poul_1} \times \Omega_1$$

$$P_2 = C_{poul2 \to \Delta_2} \times \Omega_2$$

- Equation des couples $\quad \boldsymbol{C_{\Delta_1 \to poul_1} = C_{poul2 \to \Delta_2} \times \mathrm{r}}$

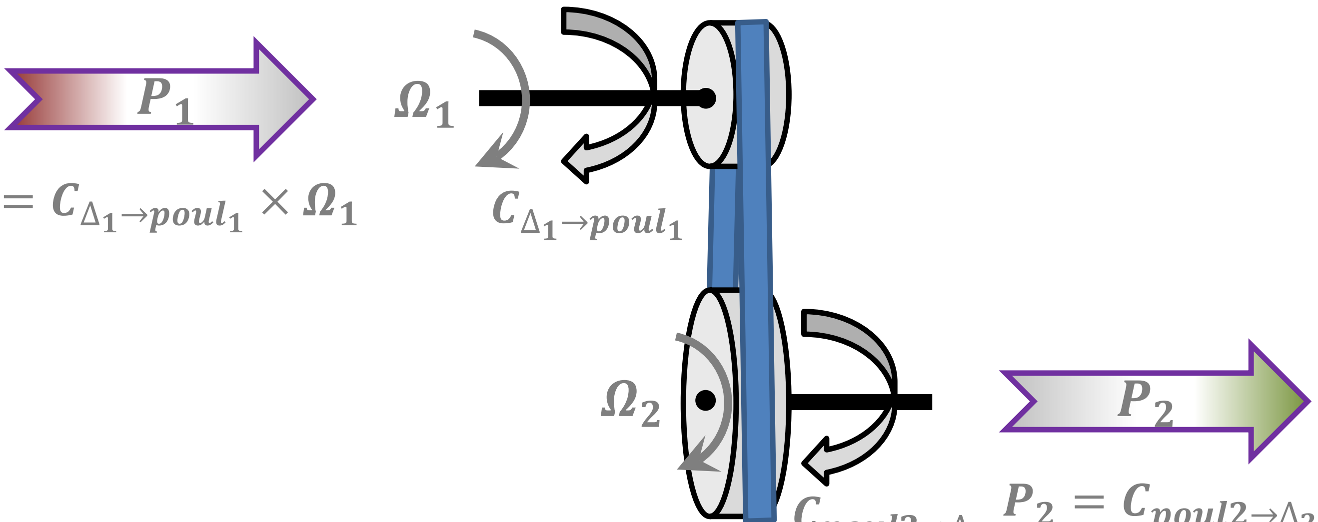
☺ Car $P_1 = P_2$ c-à-d: $\left[\begin{array}{l} C_{\Delta_1 \to poul_1} \times \Omega_1 = C_{poul2 \to \Delta_2} \times \Omega_2 \\ \Omega_2 / \Omega_1 = \mathrm{r} \end{array}\right.$

Réducteur

Rapport de transformation : r

① Cas avec pertes ($\eta \neq 1$)

- Equation des vitesses $\boldsymbol{\Omega_2 = \Omega_1 \times r}$ inchangée



$P_1 = C_{\Delta_1 \to poul_1} \times \Omega_1$

$P_2 = C_{poul2 \to \Delta_2} \times \Omega_2$

- Equation des couples $\boldsymbol{C_{\Delta_1 \to poul_1} = C_{poul2 \to \Delta_2} \times r \times \frac{1}{\eta}}$ modifée

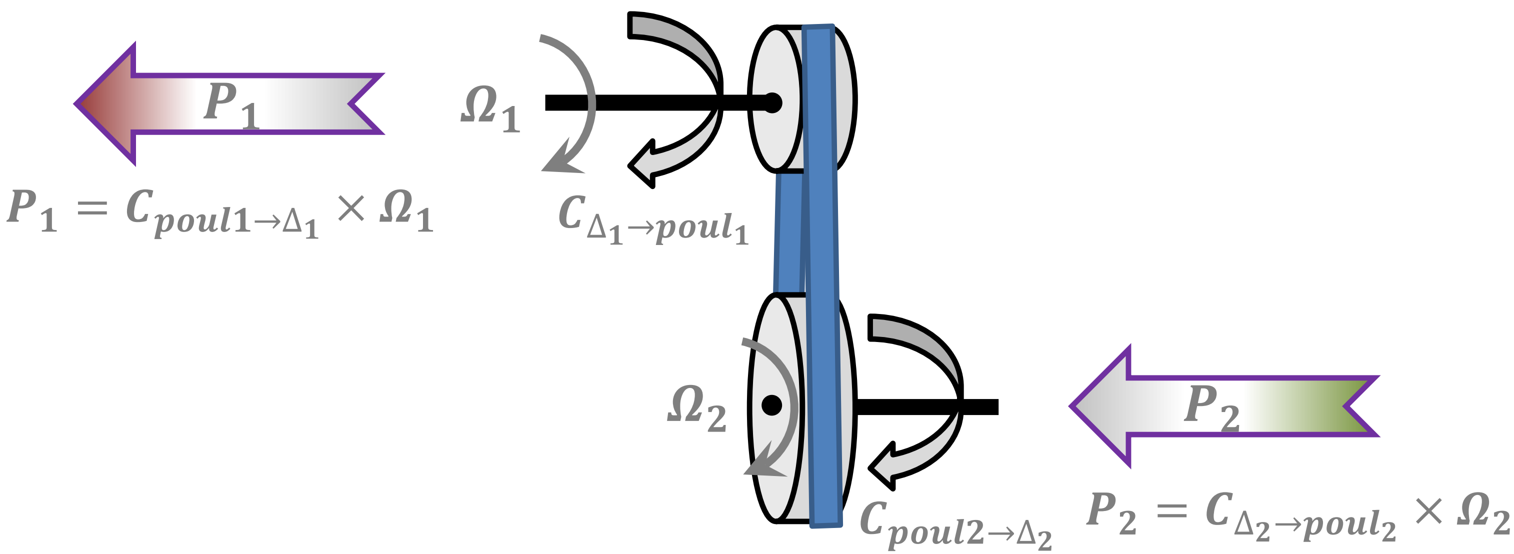
☺ Car $P_2 = P_1 \times \eta$ pour un transfert de puissance de Δ_1 vers Δ_2 !!!

Réducteur

Rapport de transformation : r

① Cas avec pertes ($\eta \neq 1$)

➢ Equation des vitesses $\boldsymbol{\Omega_2 = \Omega_1 \times r}$ inchangée



➢ Equation des couples $\boldsymbol{C_{\Delta_1\to poul_1} = C_{poul2\to\Delta_2} \times r \times \eta}$ modifée

☺ Car $P_1 = P_2 \times \eta$ pour un transfert de puissance de Δ_2 vers Δ_1 !!!

Fin de l'annexe