

Chap1 : Comprendre la mécanique

Paul Claudel : « Les choses qui existent sont importantes. »



Sommaire

*La dynamique a pour objet d'expliquer le mouvement, c'est-à-dire d'en identifier les causes ;
d'établir les lois qui le régissent.*

Les éléments de cours visitent les principes fondamentaux à maîtriser pour décrire correctement les mouvements d'objets solides. Il s'articule en 3 grandes parties.

- 1 Forces et lois de Newton**
- 2 Mouvement de rotation autour d'un point fixe**
- 3 Mouvement d'un solide (translation + rotation)**

1 Forces et lois de Newton

C'est à Newton que revint le mérite d'énoncer les 3 lois fondamentales qui constituent les bases de la mécanique classique dans « Philosophia naturalis principia mathematica » en 1686.



- ① **1^{ère} loi : Principe d'inertie**
- ② **2^{ème} loi : Principe fondamental**
- ③ **3^{ème} loi : Principe des actions réciproques**
- ④ **Construction d'une trajectoire**
- ⑤ **Forces de frottements : cône de frottement**

« Toute la difficulté de la philosophie paraît consister à trouver les forces qu'emploie la nature » Isaac Newton (1642 – 1727).

1^{ère} loi : Principe d'inertie

Enoncé :

Le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ d'un mobile reste constant tant que la résultante des forces extérieures s'exerçant sur lui est nulle.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \rightarrow mobile}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{cte}$$

Cadre :

Il existe des cadres particuliers, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels le principe d'inertie est vérifié.

Pour beaucoup d'expériences, la Terre peut être considérée comme un référentiel galiléen.

1^{ère} loi : Principe d'inertie

Conséquence :

Aucune force n'est nécessaire pour maintenir le mouvement :
c'est pour l'arrêter qu'il en faut une!

Sortie dans l'espace



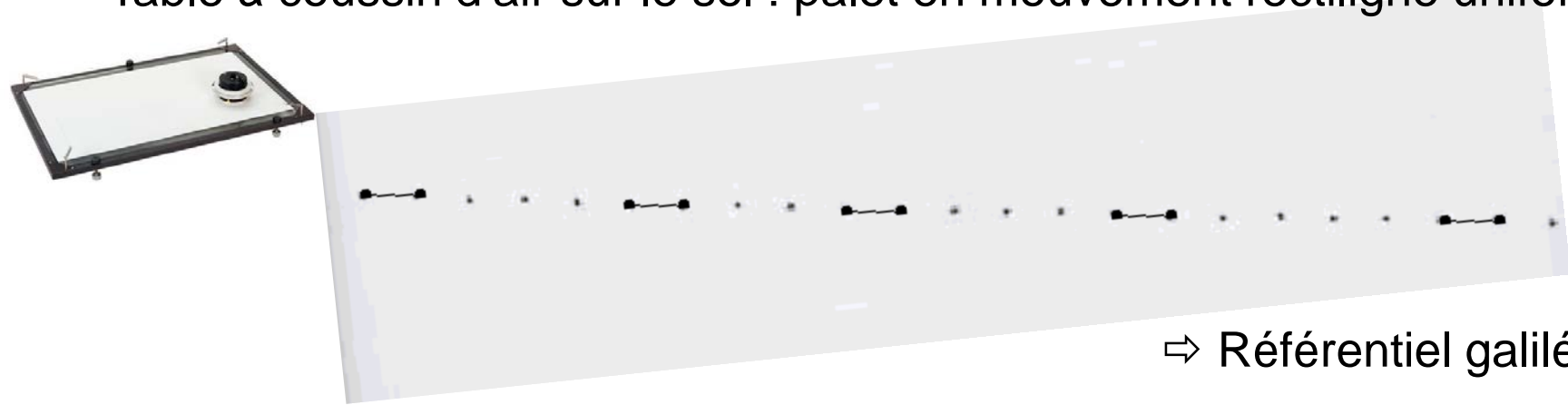
Palet sur la glace



1^{ère} loi : Principe d'inertie

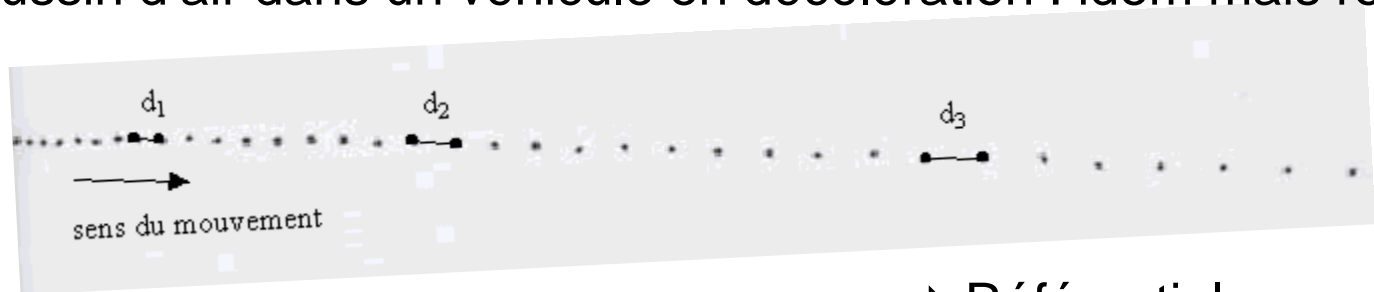
Exemple 1 :

- ♦ Table à coussin d'air sur le sol : palet en mouvement rectiligne uniforme



⇒ Référentiel galiléen

- ♦ Table à coussin d'air dans un véhicule en décélération : idem mais relevé \neq

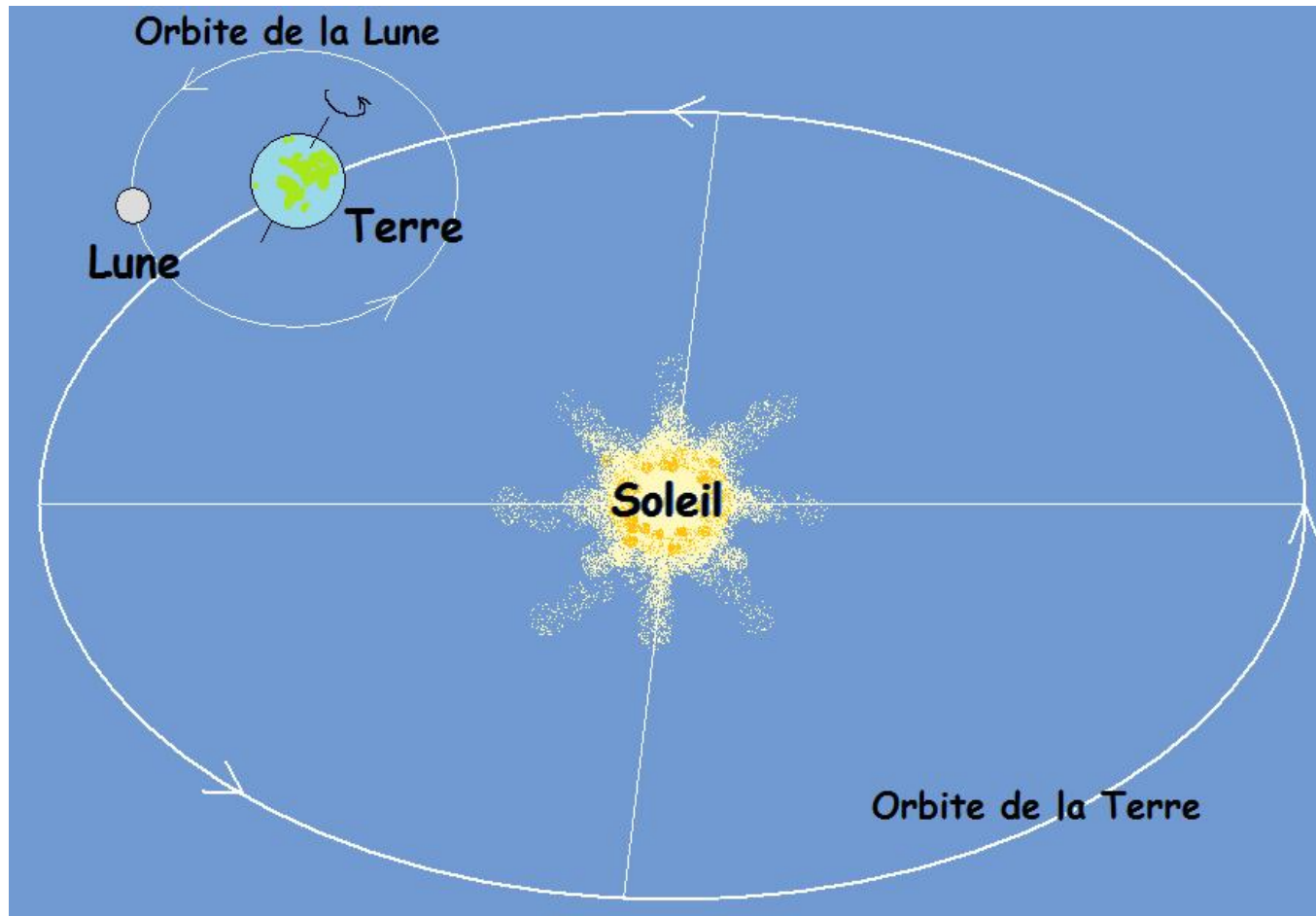


⇒ Référentiel non galiléen

1^{ère} loi : Principe d'inertie

Exemple 2 :

Pour certaines expériences (balistique, etc),
la Terre se révèle être un référentiel non galiléen.



pendule de Foucault

Mouvement de la Terre

- ♦ Autour du soleil;
- ♦ Autour d'elle-même.

2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

Enoncé :

Dans un référentiel galiléen, la force résultante $\sum \vec{F}$ exercée sur un corps est égale à la dérivée de sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Conséquence pour $m(t) = \text{constante}$:

Lorsque la masse du corps reste constante au cours du temps, la force résultante confère au corps une accélération (en m.s^{-2}).

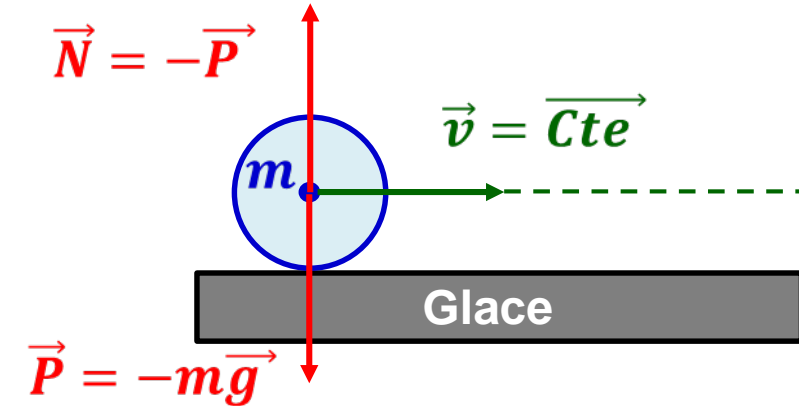
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

La masse (inertielle) s'oppose au changement du mouvement, c'est-à-dire au changement du vecteur vitesse.

⇒ La force, en Newton $[\text{N}] \equiv [\text{kg.m.s}^{-2}]$, est l'agent qui change le mouvt.

2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

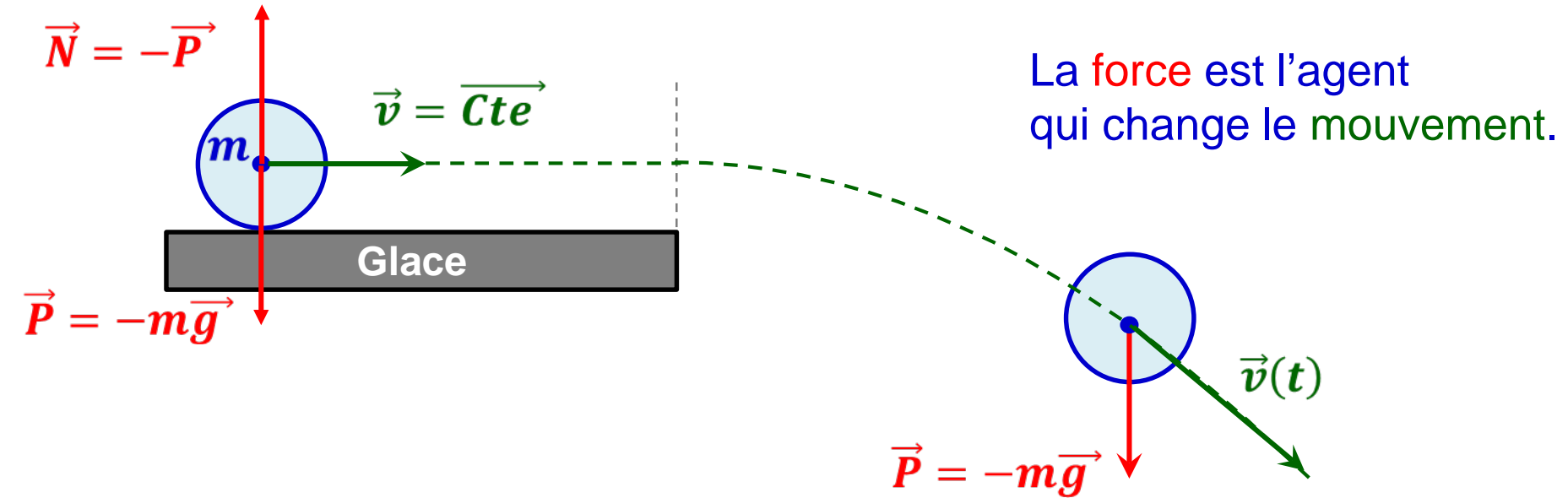
Exemple 1 :



1^{ère} loi : Principe d'inertie

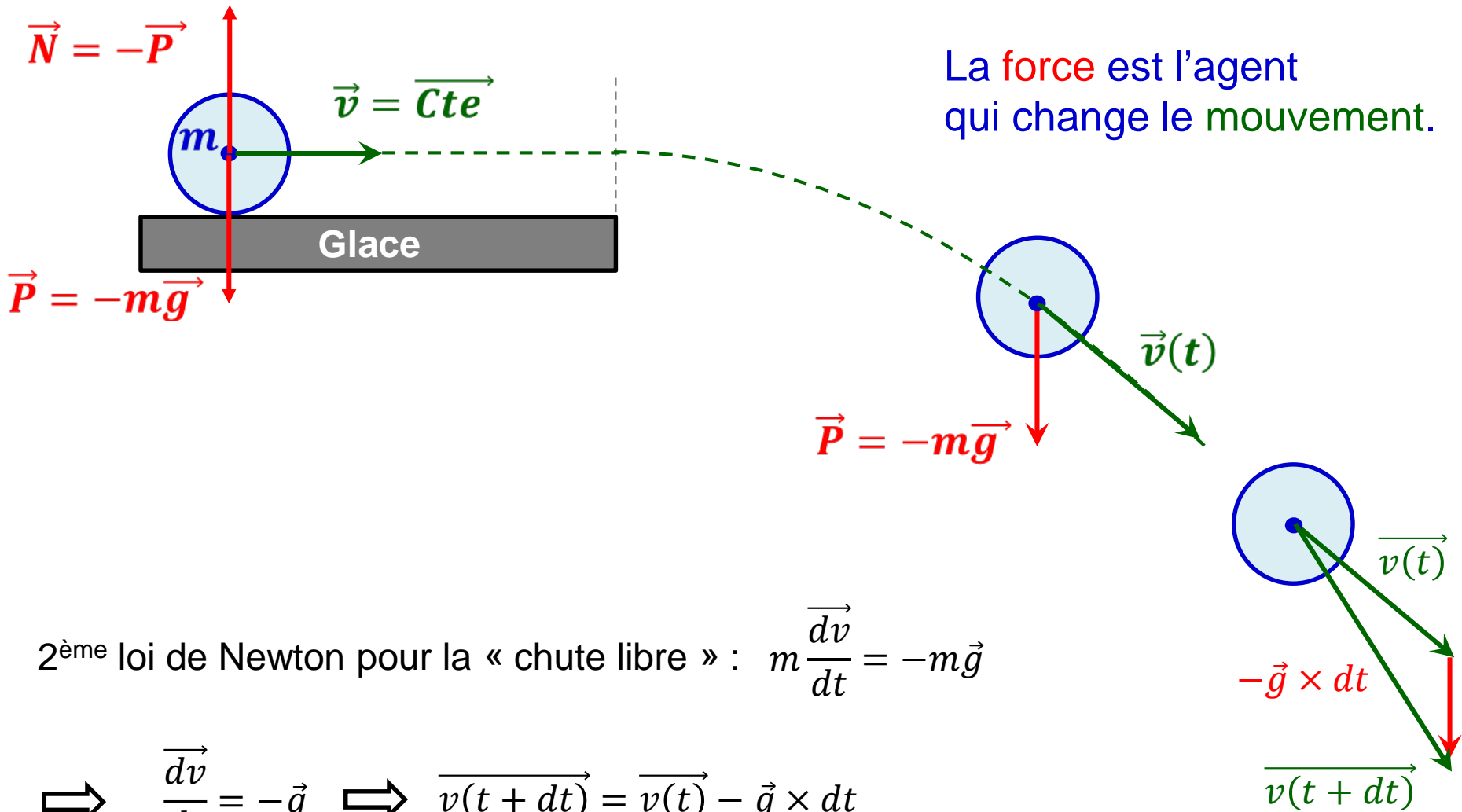
2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 1 :



2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

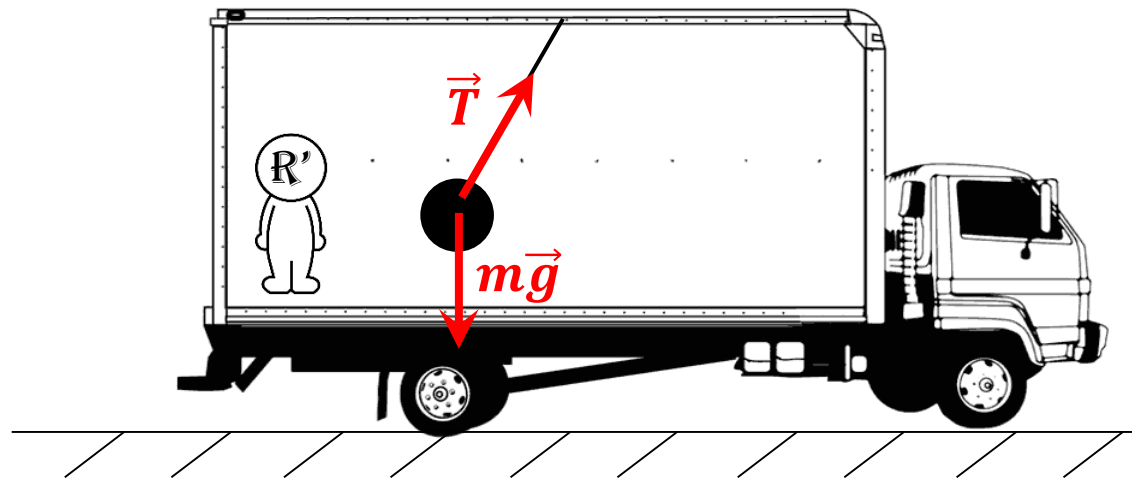
Exemple 1 :



2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 2 :

Masse m suspendue dans un véhicule animé d'un mouvement rectiligne **d'accélération uniforme** $\vec{a} = \overrightarrow{C^{te}}$.



Pour un observateur lié au **référentiel non galiléen (\mathcal{R}')**, le principe d'inertie ne s'applique pas. En effet:

$$\vec{T} + m\vec{g} \neq \vec{0}$$

alors que

$$\overrightarrow{v_{m/\mathcal{R}'}} = \vec{0}$$

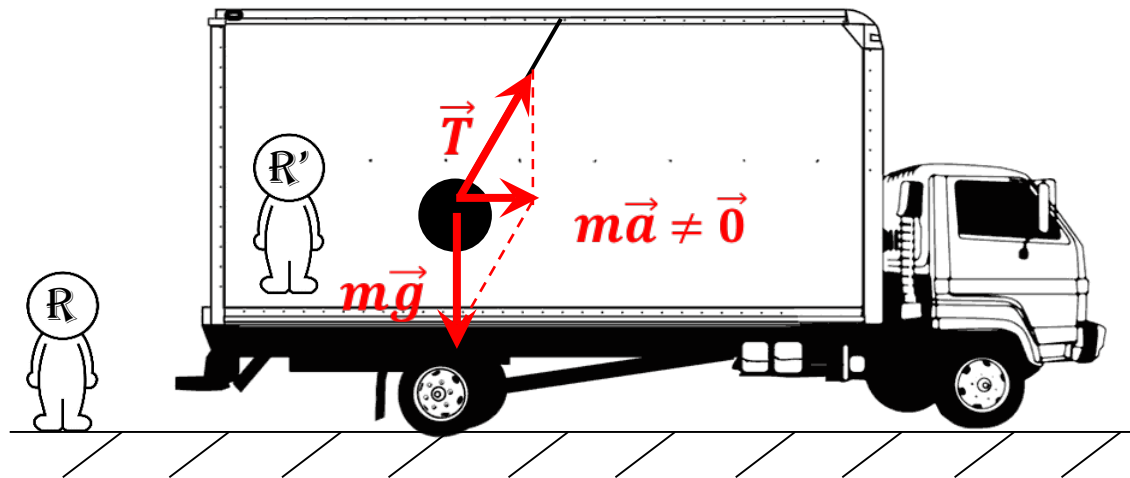
$$\Rightarrow \overrightarrow{a_{m/\mathcal{R}'}} = \vec{0}$$

12

2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 2 :

Masse m suspendue dans un véhicule animé d'un mouvement rectiligne d'accélération uniforme $\vec{a} = \vec{c}^{te}$.



Pour un observateur lié au **référentiel galiléen (\mathcal{R})**, la position du pendule s'explique par la relation fondamentale de la dynamique.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \neq \vec{0}$$



Pour un observateur lié au **référentiel non galiléen (\mathcal{R}')**, le principe d'inertie ne s'applique pas. En effet:

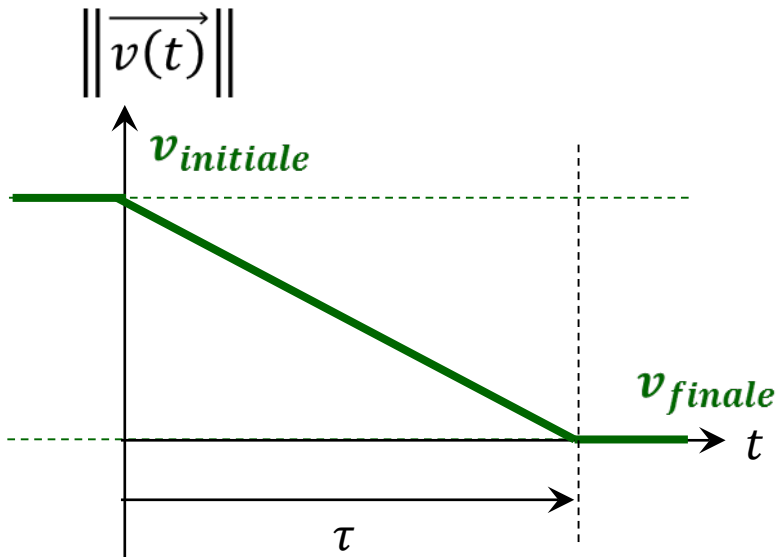
$$\vec{T} + m\vec{g} \neq \vec{0}$$

alors que

$$\vec{v}_{m/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 3 : Force moyenne $\langle \vec{F}(t) \rangle$ subie lors d'un choc.



Crash test d'une Renault Captur

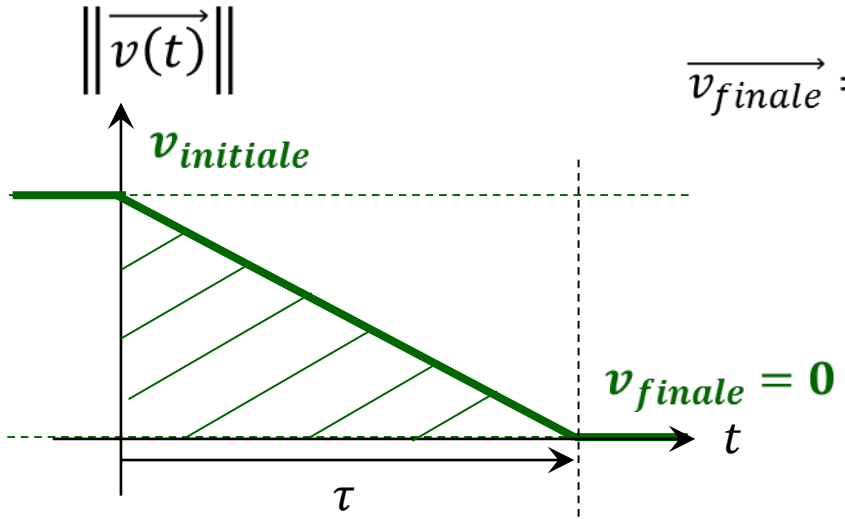
Schématiquement, lorsqu'un corps subit un choc, sa vitesse $v(t)$ change de $v_{initiale}$ à v_{finale} pendant un intervalle de temps assez bref τ .

⇒ Conformément au principe fondamental de la dynamique, la force moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ subie au cours de cette collision est définie par :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{(m\vec{v}_{finale}) - (m\vec{v}_{initiale})}{\tau}$$

2^{ème} loi : Principe fondamental de la dynamique

Exemple 2 : Force moyenne subie lors d'un choc.



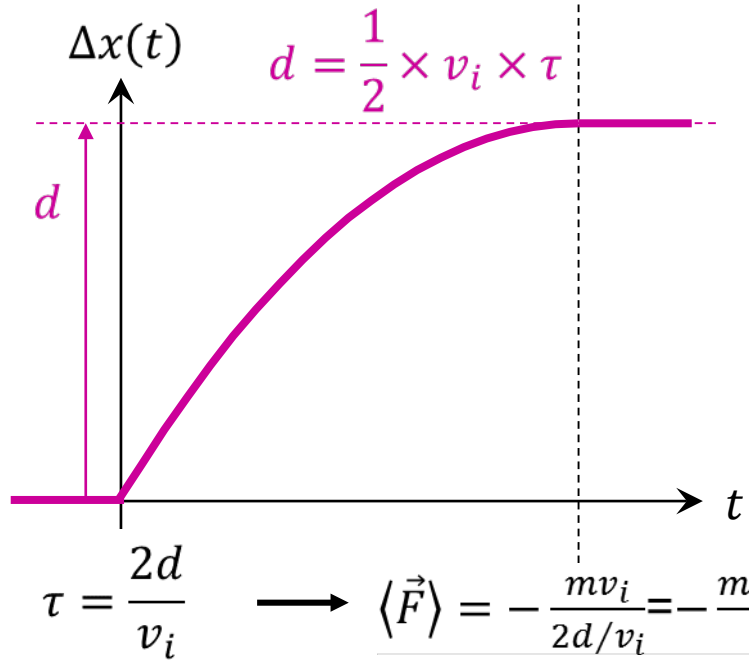
$$\vec{v}_{finale} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \langle \vec{F} \rangle = - \frac{m \vec{v}_{initiale}}{\tau}$$

\Downarrow

L'intensité moyenne de la force subie :

- ♦ Augmente avec la vitesse initiale;
- ♦ Diminue avec la durée du choc

($\tau_{matelas} \gg \tau_{carrelage}$)



Pour augmenter la durée du choc ($\tau \nearrow$), l'habitacle rigide d'un véhicule est encadré par des zones déformables susceptibles de se comprimer de 1 cm par km.h⁻¹ avant la collision.

⇒ Pour un choc frontal à 72 km.h⁻¹, l'avant du véhicule se raccourcit d'une longueur $d = 72$ cm!!!

A. N. $v_i = 20 \text{ m.s}^{-1}$

⇒

$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 0,072 \text{ s} \\ \langle \vec{F} \rangle = 280 \text{ m} = 28(mg) \text{ [N]} \end{array} \right.$	15
---	-----------

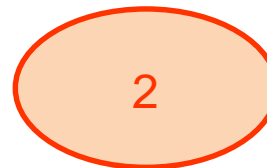
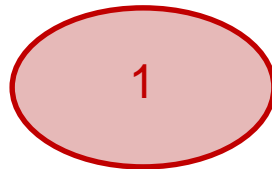
3^{ème} loi : Principe des actions réciproques

Enoncé :

L'action est toujours égale en intensité et opposée en direction à la réaction.

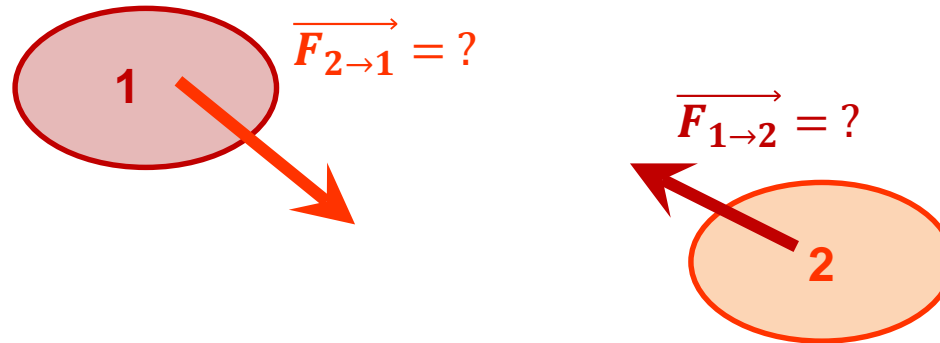
$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = - \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}$$

Système isolé constitué de deux objets en interaction (preuve - 1)



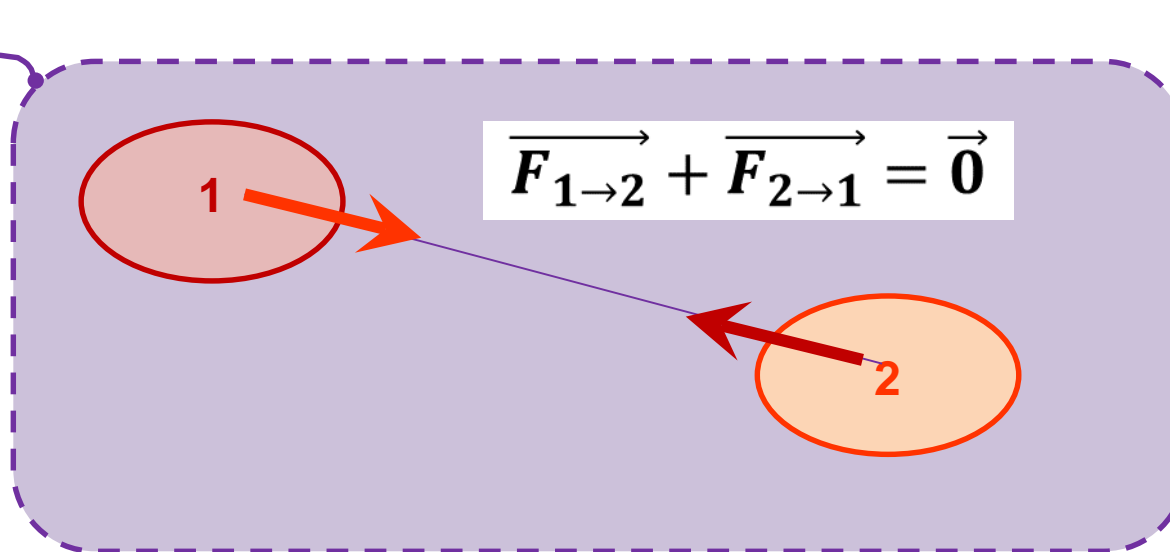
3^{ème} loi : Principe des actions réciproques

Systeme isolé constitué de deux objets en interaction (preuve - 2)



Systeme isolé constitué de deux objets en interaction (preuve - 3)

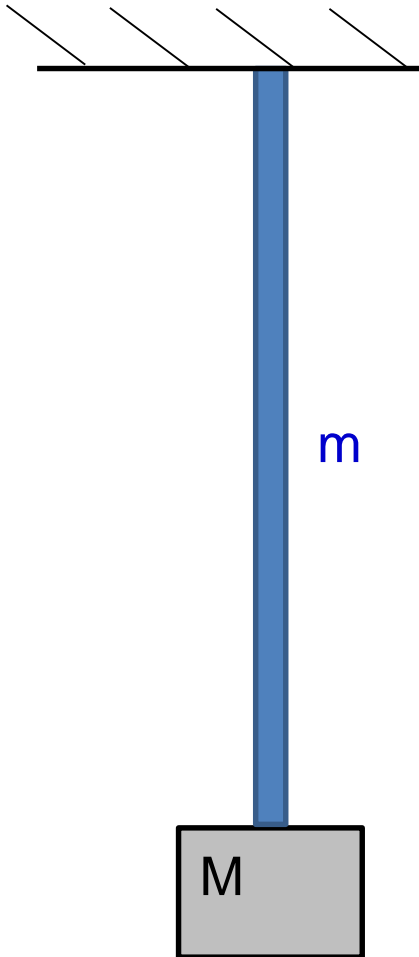
Systeme étudié



3^{ème} loi : Principe des actions réciproques

Exemple : Force exercée par la corde sur le point d'attache au plafond ?

(Bloc de masse M suspendu verticalement par une corde de masse m)

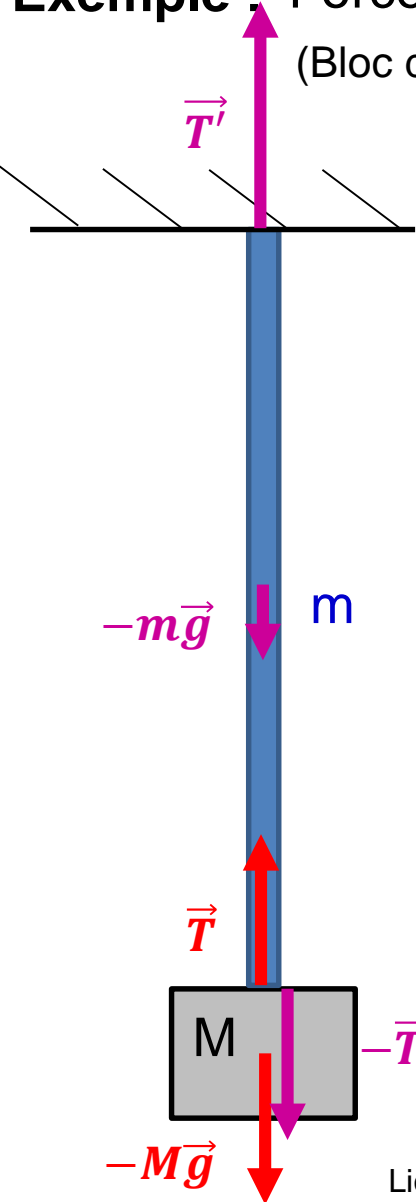


- ① Pour le **bloc suspendu**, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

- ② Pour la **corde** intermédiaire entre le bloc et le plafond, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

3^{ème} loi : Principe des actions réciproques

Exemple : Force exercée par la corde sur le point d'attache au plafond ?
(Bloc de masse M suspendu verticalement par une corde de masse m)



① Pour le **bloc suspendu**, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{T} + M\vec{g} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = -M\vec{g}$$

② Pour la **corde intermédiaire** entre le bloc et le plafond, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

Action - réaction

$$-\vec{T} + m\vec{g} + \vec{T}' = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{T}' = \vec{T} - m\vec{g} = -(M + m)\vec{g}$$

Construction d'une trajectoire



Etape 1 : Ecrire la relation fondamentale de la dynamique afin d'obtenir l'accélération $a(t)$.

$$\vec{a} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext \rightarrow syst}}}{m}$$

Etape 2 : Intégrer cette relation $a(t) = dv/dt$ en tenant compte de la condition initiale $v(t_0) = v_0$ afin d'obtenir la vitesse $v(t)$.

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t).dt$$

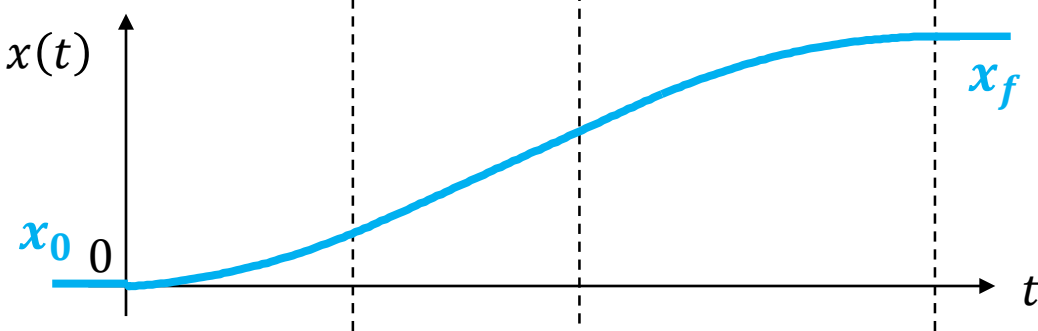
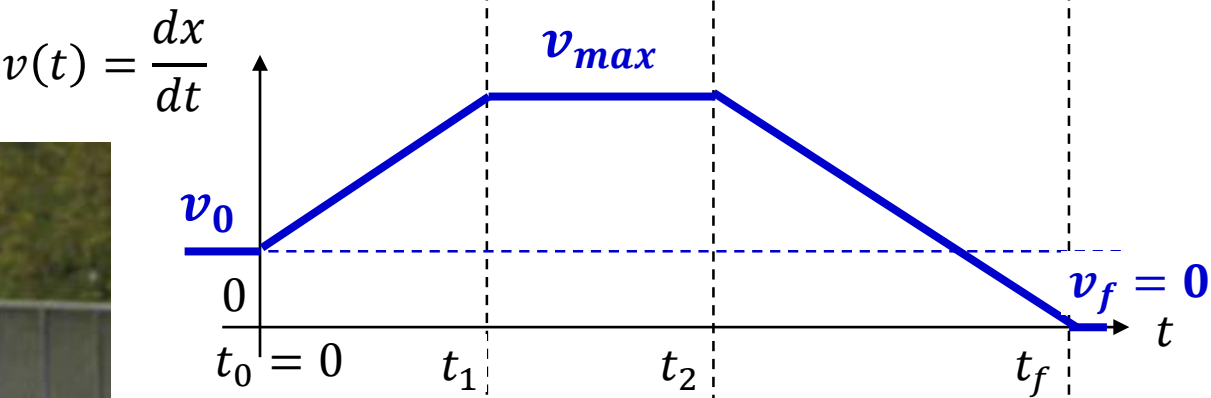
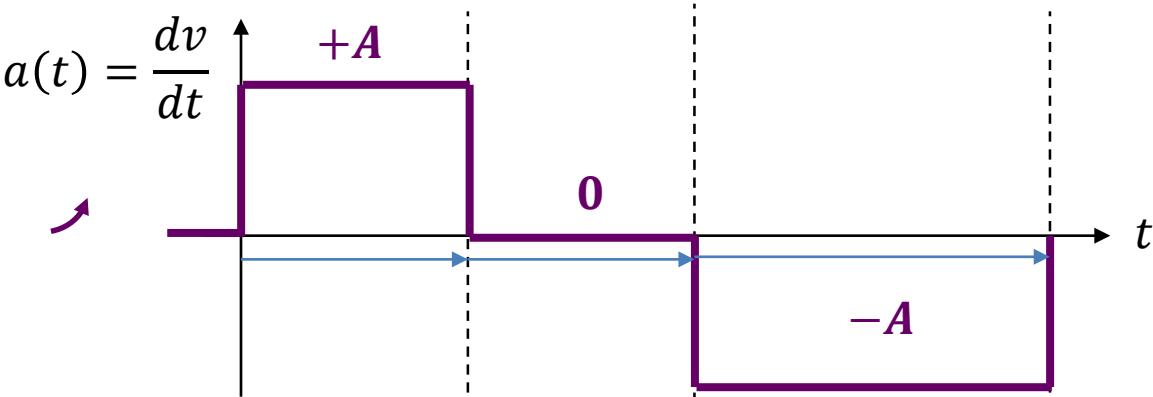
Etape 3 : Intégrer cette relation $v(t) = dx/dt$ en tenant compte de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ afin d'obtenir la position $x(t)$.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t).dt$$

Construction d'une trajectoire

Exemple : véhicule

$$\vec{F}_r = \sum \vec{F}_{ext \rightarrow syst} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_r}{m}$$



Forces de frottement

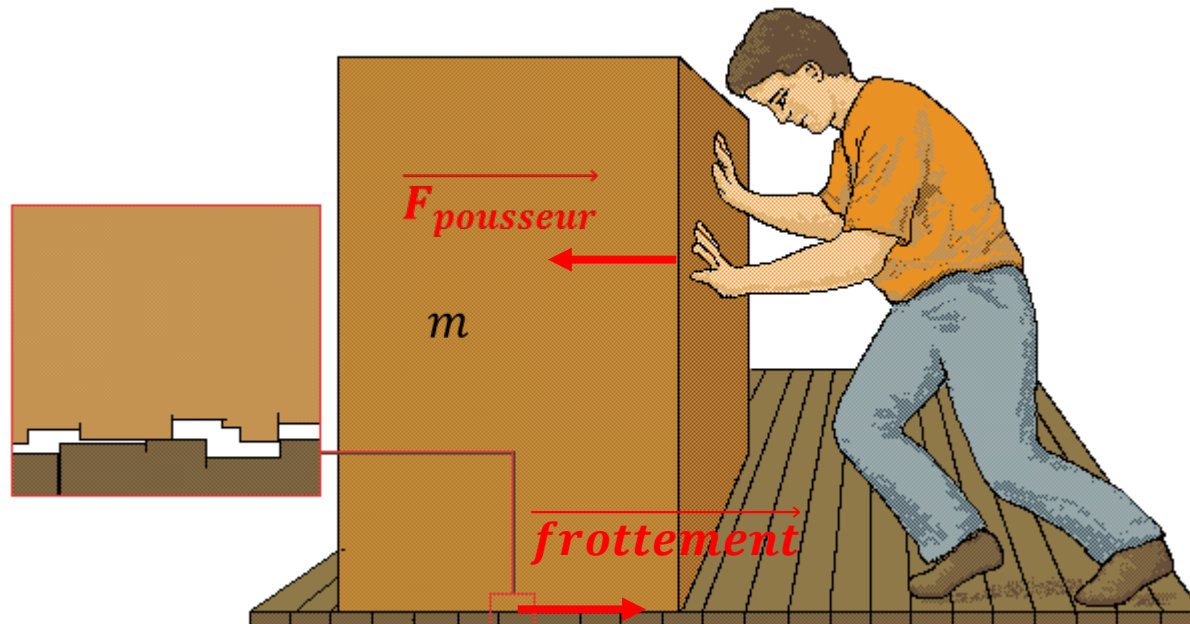
Expérience du pousseur :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sum \overrightarrow{F_{ext \rightarrow syst}}}{m} = \frac{\overrightarrow{F_{pousseur}} + \overrightarrow{frottement}}{m}$$

Pour mettre en mouvement un bloc initialement au repos il faut exercer une force suffisante.

Le principe fondamental de la dynamique prouve donc qu'il s'exerce une force au contact entre l'objet et le sol.

On parle de force de frottement statique (tant que l'objet ne bouge pas).



Forces de frottement

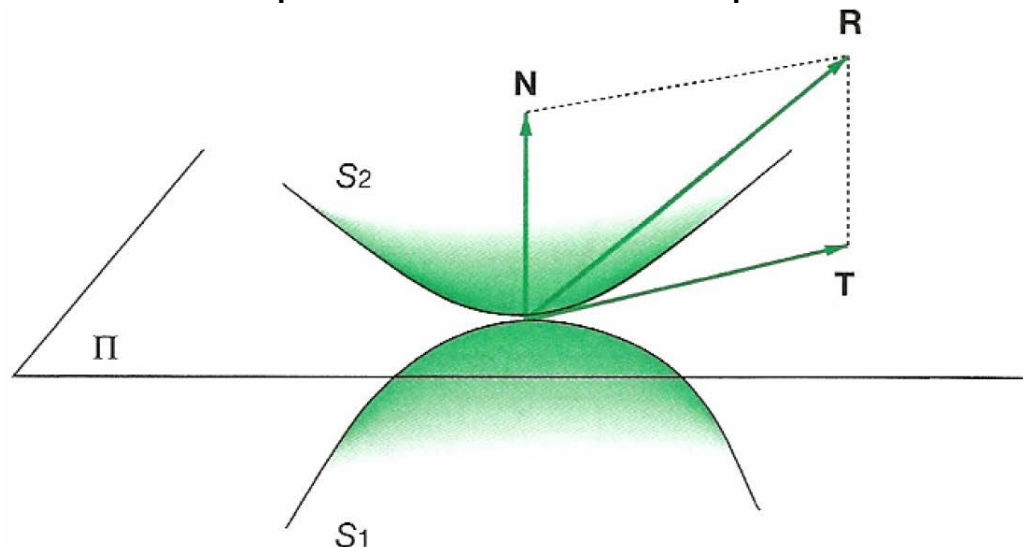
Actions mécaniques de contact :

On note \vec{R} la résultante des actions de contact du solide (1) sur le solide (2).

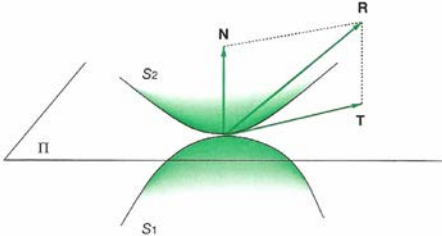
Elle se décompose selon :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

- ♦ \vec{T} est la composante appartenant au plan tangent.
C'est la force de frottement de glissement.
- ♦ \vec{N} est la composante normale à ce plan. Celle-ci est dirigée de (1) vers (2).
L'annuler revient à dire que le contact est rompu entre les deux solides.



Forces de frottement



Lois de Coulomb :

Au XVIII^{ème} siècle, Coulomb a énoncé des lois approchées .

On note : \vec{v}_g la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1).

♦ Si $\vec{v}_g = \vec{0}$, il n'y a pas glissement de (S_2) par rapport à (S_1), alors:

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \times \|\vec{N}\|$$

♦ Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$, il y a glissement de (S_2) par rapport à (S_1), alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{T}\| = \mu_d \times \|\vec{N}\| \\ \vec{T} \parallel \vec{v}_g \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$$

Le **coefficient de frottement cinétique** $\mu_d \leq$ au **coefficient de frottement statique** μ_s .
A l'échelle microscopique, les surfaces des solides s'interpénètrent plus lorsqu'il n'y a pas glissement.

Energie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2}MV^2$$

👉 Preuve :

① 2^{ème} loi de Newton :

$$\overrightarrow{F_{résultante}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

② Produit scalaire par la vitesse :

$$\underbrace{\overrightarrow{F_{résultante}} \cdot \vec{v}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$



Puissance mécanique de la force résultante

③ Or: $\frac{dv^2}{dt^2} = 2v \frac{dv}{dt}$

④ Donc, par intégration entre t_i ($\Leftrightarrow v_i = 0$) et t_f ($\Leftrightarrow v_f = V$), on a :

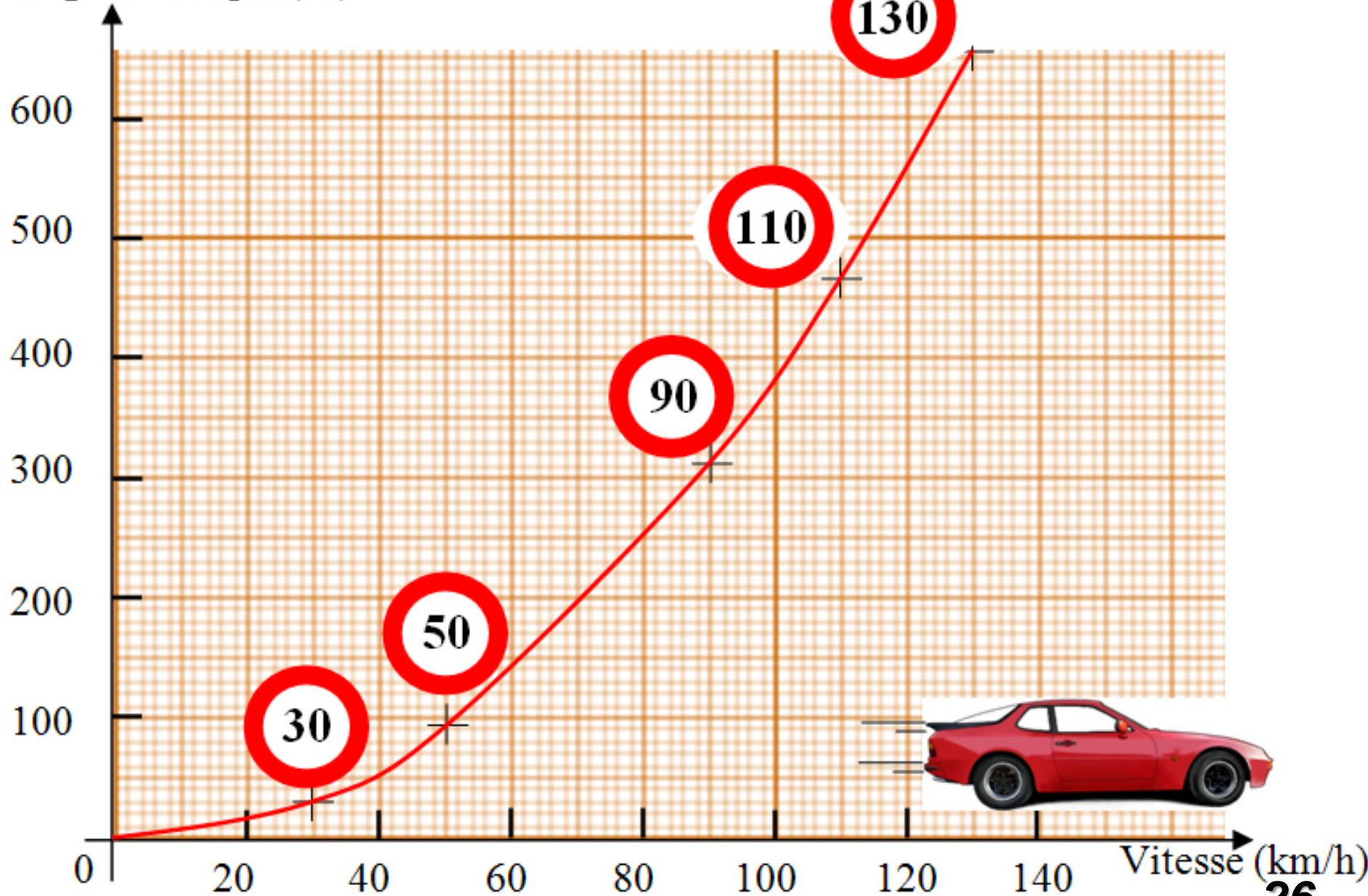
$$\int_{t_i}^{t_f} P_{méca}(t) \cdot dt = \frac{1}{2}m[V^2 - 0^2]$$



Energie cinétique

👉 Conséquence

Énergie cinétique (kJ)



Energie cinétique



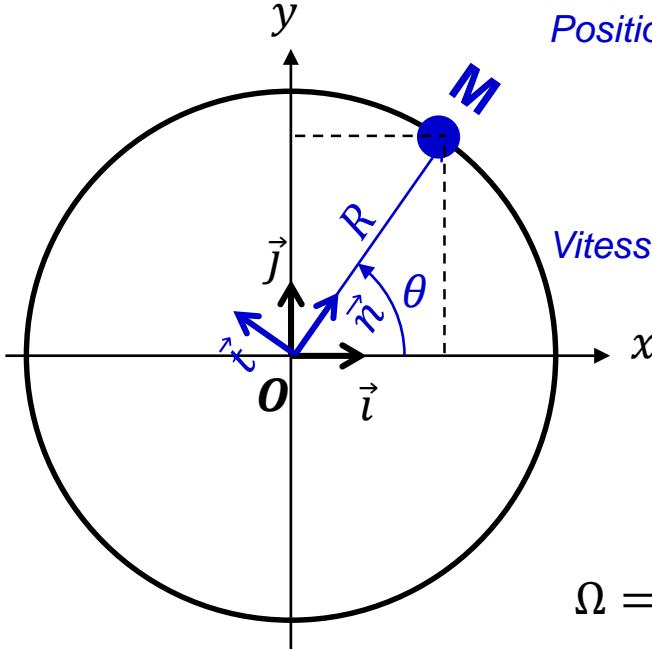
2 Mouvement de rotation autour d'un point fixe



- ① Cinématique
- ② Vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$
- ③ Dynamique d'un point matériel en rotation
- ④ Dynamique d'un solide en rotation
- ⑤ Moment d'un couple de forces
- ⑥ Energie cinétique d'un objet en rotation

Cinématique

Mouvement circulaire d'un **point matériel** autour de O fixe dans $\mathbf{R}_{\text{Galiléen}}$



Position : Vecteur radial

$$\overrightarrow{OM} = (R \cos \theta) \vec{i} + (R \sin \theta) \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = R((\cos \theta) \vec{i} + (\sin \theta) \vec{j}) = R \vec{n}$$

Vitesse : Vecteur ortho-radial

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(R \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta + \pi/2) \right) \vec{i} + \left(R \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta + \pi/2) \right) \vec{j}$$

$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} ((\cos(\theta + \pi/2)) \vec{i} + (\sin(\theta + \pi/2)) \vec{j}) = R \frac{d\theta}{dt} \vec{t}$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ Vitesse angulaire, avec : } \|\vec{v}\| = R \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \text{ et } \vec{v} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$$

Accélération : Vecteur radial uniquement dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ($\Omega = 0$)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(R \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{t} + \left(R \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\vec{t}}{dt} = \left(R \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{t} - \left(R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{n}$$

Accélération centripète : a_n

$$a_n = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{R} \left(R \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{v^2}{R}$$

Accélération tangentielle : a_t

$$a_t = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Car $R = \text{constante}$

Conséquence : exemple d'application

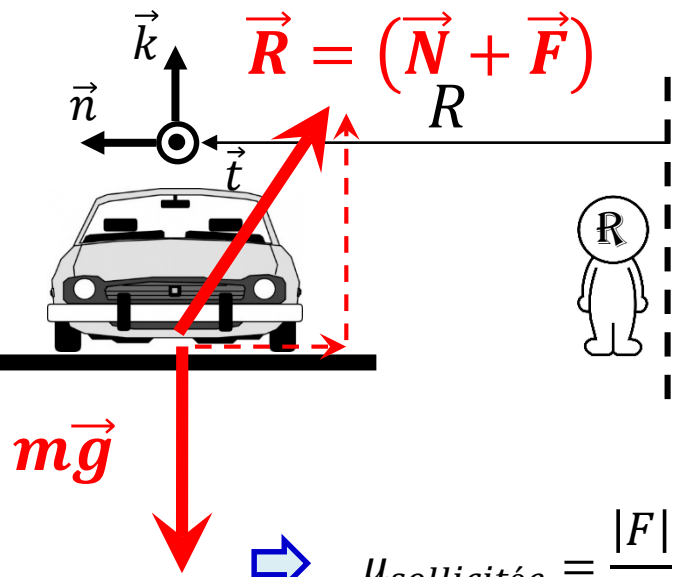


Quelle est la vitesse maximale v_{max} que peut prendre une voiture dans un virage à vitesse constante en fonction de son rayon de courbure $R = 10\text{ m}$ et du coefficient de friction statique $\mu_S = 0,8$?

La 2^{ème} loi de Newton s'écrit dans **R** :

$$(\vec{N} + \vec{F}) + (m\vec{g}) = m\vec{a}$$

Projetée sur le repère orthonormé lié au véhicule :



- ♦ Sur \vec{n} $F_n = ma_n = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$
- ♦ Sur \vec{t} $F_t = ma_t = m\left(R\frac{d\Omega}{dt}\right) = 0$
- ♦ Sur \vec{k} $N + (-mg) = m(0) = 0$

$\Rightarrow \mu_{sollicitée} = \frac{|F|}{N} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg} \leq \mu_S \Rightarrow$

$$v \leq \sqrt{\mu_S R g}$$

A.N. $v \leq 32,2\text{ km/h}$

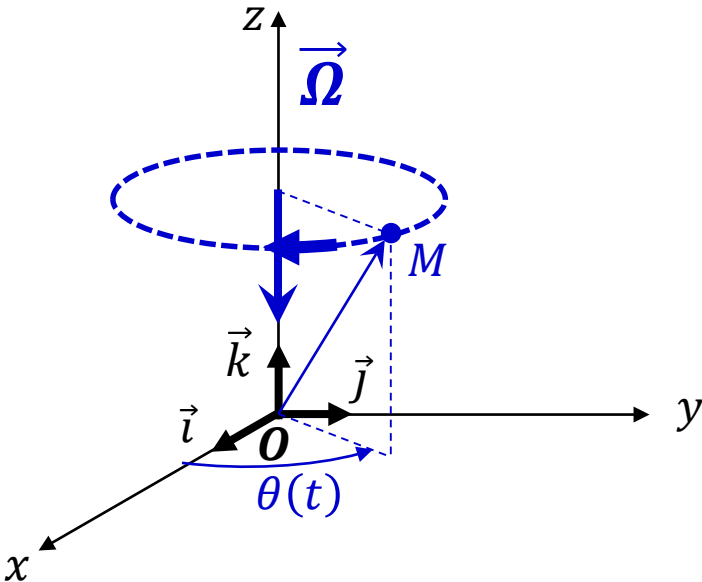
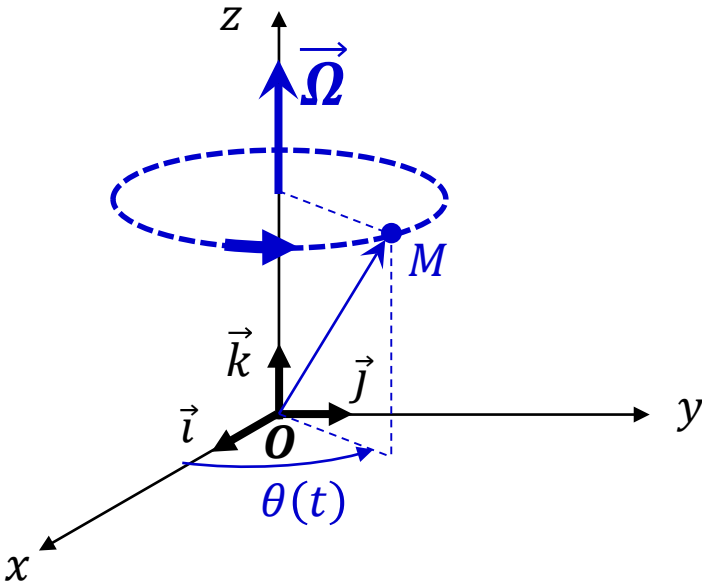
Vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

Le mouvement de rotation introduit une plus grande complexité que le mouvement de translation. Pour obtenir une écriture vectorielle plus simple, on **définit** le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Il contient les **3 informations** définissant la rotation.

- a) La direction du vecteur $\vec{\Omega}$ est la **direction de l'axe** autour duquel s'effectue la rotation.
- b) Le sens du vecteur $\vec{\Omega}$ est lié au **sens de rotation** dans le plan orthogonal à l'axe de rotation.

c) Le module du vecteur $\vec{\Omega}$ est la **vitesse angulaire**

$$\|\vec{\Omega}\| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

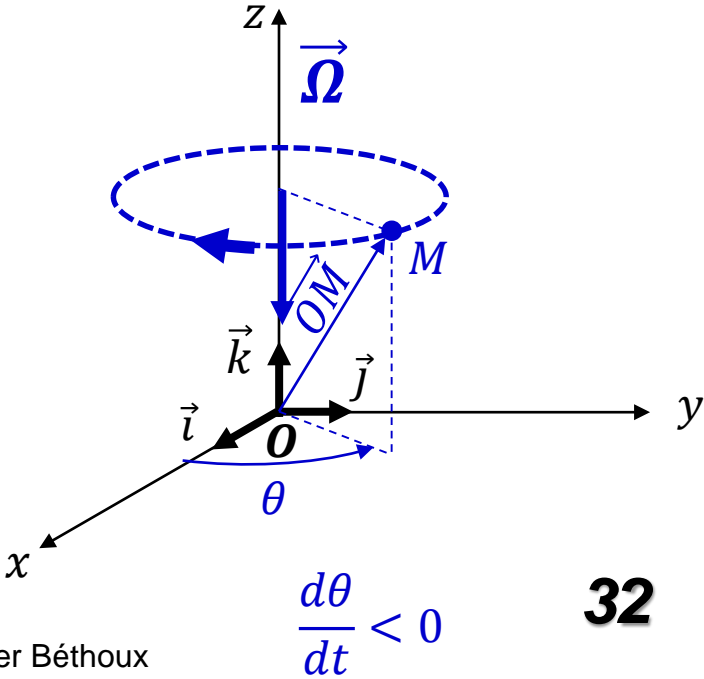
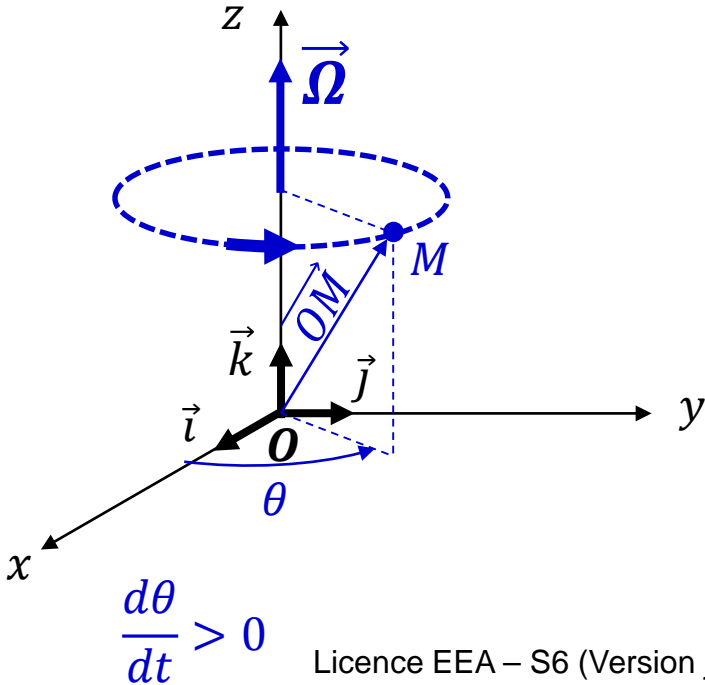


Vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

Le vecteur vitesse \vec{v} s'écrit en fonction

- du vecteur position \vec{OM}
- Et du vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$



Vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

Preuve

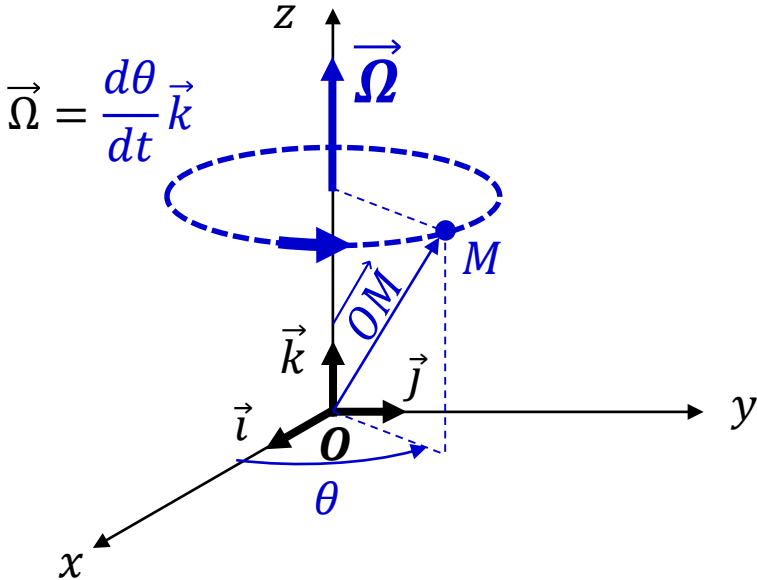
$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} ((\cos(\theta + \pi/2))\vec{i} + (\sin(\theta + \pi/2))\vec{j}) = R \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta + \pi/2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = R((\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}) = R \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

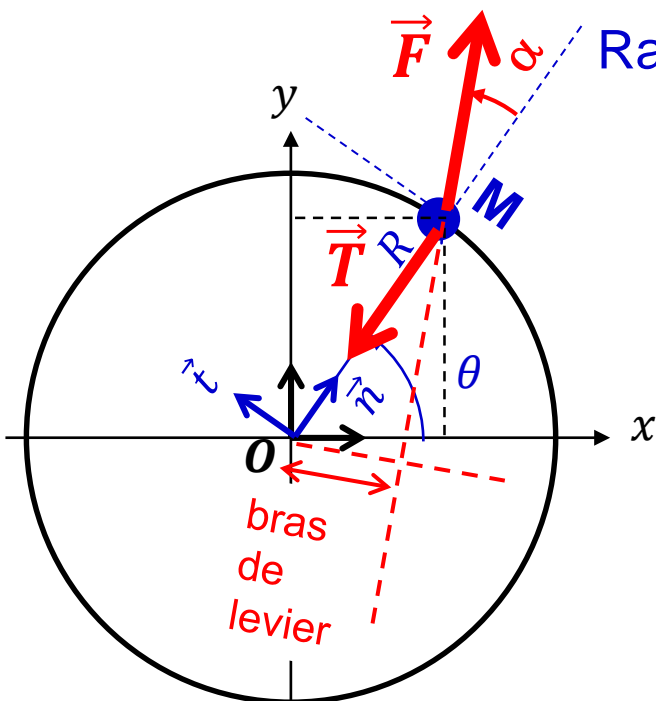
$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = R \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = R \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 - \sin(\theta) \\ \cos(\theta) - 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = R \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta + \pi/2) \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v}$$



Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire



Rappel : La force est l'agent qui change le mouvement.

① La 2^{ème} loi de Newton s'écrit:

$$\vec{F} + \vec{T} = m\vec{a} = m(\vec{a}_n + \vec{a}_t)$$

② \Rightarrow Composante tangentielle :

$$F \sin \alpha + 0 = ma_t = mR \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

③ Puis, multiplication par R :

$$F(R \sin \alpha) = (mR^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

④ Définitions :

- Bras de levier : $\ell = R \sin \alpha$
- Moment de la force : $\Gamma = F \ell$
- Moment d'inertie : $I = mR^2$

↓ Le théorème du moment cinétique est un corollaire de la 2^{ème} loi de Newton.

⑤ $\sum \Gamma = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$

Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire

Conséquences

$$\Gamma = I \frac{d\Omega}{dt}$$

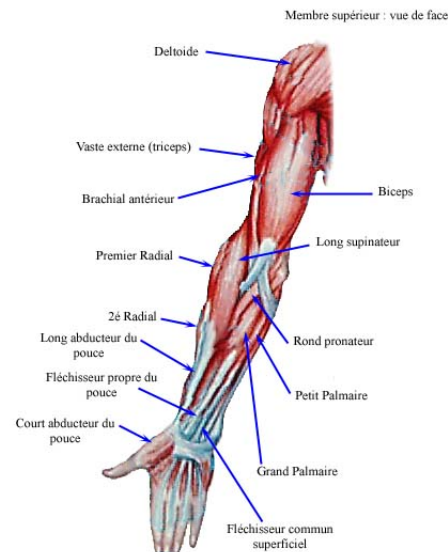
Un objet ayant un moment d'inertie I plus élevé est plus difficile à accélérer ($\gamma = d\Omega/dt = d^2\theta/dt^2$ dépend de $1/I$).

$$I = mR^2$$

La valeur du moment d'inertie I dépend de la distribution de la masse d'un objet.

Plus la masse est près de l'axe de rotation, plus l'objet sera facile à faire tourner.

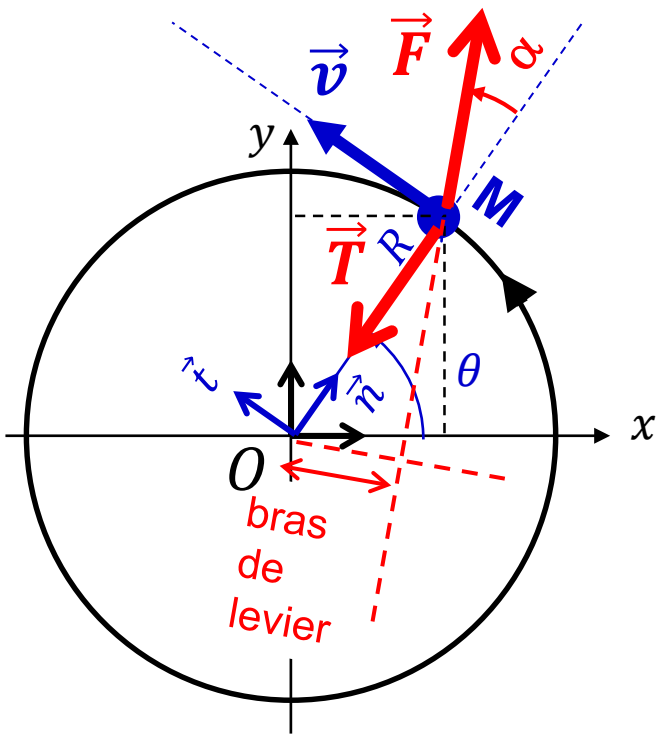
➡ Pour les membres articulés : muscles et tendons.



Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire

Expression vectorielle du théorème du moment cinétique

$$\Gamma_0 = I \frac{d\Omega}{dt}$$



Avec:

a) **Moment de la force** par rapport à l'axe Oz:

$$\Gamma_0 = FR \sin \alpha$$
$$\vec{\Gamma}_0 = (FR \sin \alpha) \vec{k} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

b) **Dérivé du moment cinétique** par rapport à l'axe Oz:

$$I \frac{d\Omega}{dt} = (mR^2) \frac{d\Omega}{dt} = R \left(mR \frac{d\Omega}{dt} \right) = R \left(m \frac{dv}{dt} \right)$$

La vitesse étant ortho-radiale, on a : $R \left(m \frac{dv}{dt} \right) \vec{k} = \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge m \vec{v})$

$\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
car

Donc :
$$\sum \vec{\Gamma}_{ext/O} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge m \vec{v})$$

Dynamique d'un point matériel en m^{vt} circulaire

Expression vectorielle du théorème du moment cinétique

$$\sum \vec{\Gamma}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Avec:

a) **Moment d'une force** par rapport à l'axe Oz: $\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

b) **Moment cinétique** par rapport à l'axe Oz: $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

☞ Conséquence : Un mobile (Terre) subissant exclusivement une force centrale (attraction gravitationnelle du soleil O) évolue dans un plan contenant O de normale $\vec{\Omega}$ à tout instant.

La trajectoire est une conique :

- ♦ ellipse,
- ♦ parabole
- ♦ ou hyperbole

