EXERCICE 1: EQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 1ER ORDRE

Soit le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}(t) & = -KN(t) \\ N(t=0) & = N_0 \end{cases} \qquad t \in [0; +\infty[$

1. Etudier l'existence et unicité de la solution
2. Trouver la solution exacte

   Pour la suite de l'exercice, on supposera que $K = 1$, $N_0 = 1000$ et $t \in [0; 10]$.
3. Résoudre le problème de Cauchy par
   (a) la méthode d'Euler avec $h = 1$
   (b) la méthode d'Euler avec $h = 0.5$
   (c) la méthode de Heun avec $h = 1$
4. Calculer l'erreur faite par chaque méthode et les comparer.
5. Étudier la stabilité des méthodes d'Euler et de Heun
6. **(Facultatif)** Donner le schéma de résolution par la méthode d'Euler implicite.

EXERCICE 2: EQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 2ND ORDRE

Soit le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) & = -\omega_0^2 x(t) \\ x(t=0) & = x_0 \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} & = v_0 \end{cases} \qquad t \in [0; +\infty[$

1. Calculer la solution exacte
2. Écrire l'équation du 2nd ordre comme un système d'équation du premier ordre
3. Donner le schéma de résolution par du problème de Cauchy par
   (a) la méthode d'Euler
   (b) la méthode de Heun
   (c) la méthode des différences finies

2) $N'(t) = -K N(t)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -K \Rightarrow \int_0^t \frac{N'(t)}{N(t)}\,dt = -\int_0^t K\,dt$$

$$\Big[\ln(N(t))\Big]_0^t = -Kt \Leftrightarrow \ln\frac{N(t)}{N_0} = -Kt$$

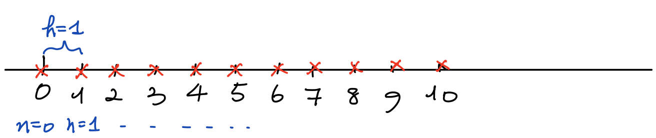
$$\Rightarrow \frac{N(t)}{N_0} = e^{-Kt} \Rightarrow \boxed{N(t) = N_0\, e^{-Kt}}$$ décharge condensateur

3)
$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = \underbrace{-K\,N(t)}_{g(t,N(t))} \\ N(t=0) = N_0 \end{cases}$$

$K = 1$, $N_0 = 1000$

V. exacte
$N(t) = 1000\, e^{-t}$

a) $h = 1$.



$$N_{n+1} = N_n + h \cdot g(t_n, N_n) \quad \text{Euler.}$$
$$t_i = h \cdot i$$

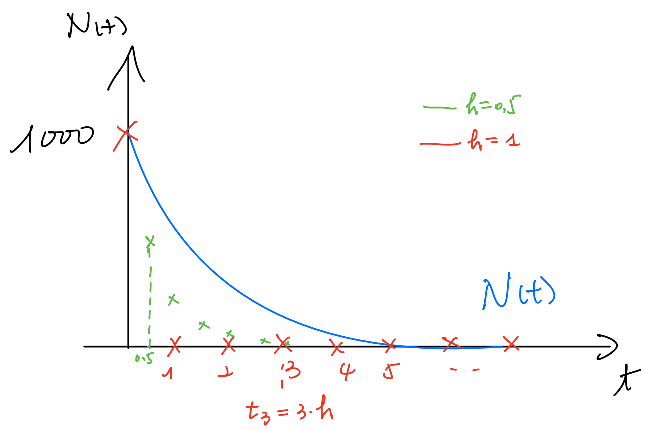
$t_0 = 0$	$N_0 = N_0$
$t_1 = h$	$N_1 = N_0 + h \cdot g(t_0, N_0) = N_0 + h(-KN_0) = N_0(1 - hK)$
$t_2 = 2h$	$N_2 = N_1 + h \cdot g(t_1, N_1) = N_1 + h(-KN_1) = N_1(1-hK) = N_0(1-hK)^2$
$\vdots$	
$t_m = mh$	$N_m = N_0(1 - hK)^m$

t	V. exacte	Euler $h=1$ $N_m = N_0(0)^m$ $1000 \to 0 \to 0 \ldots$	Euler $h=0{,}5$ $N_m = N_0 \cdot 0.5^m = N_0 \frac{1}{2^m}$
0	1000	1000	1000
0,5	606,5		500
1	367,88	0	250

$\leftarrow$ là $m = 1$! $\neq 0.5$.

$t_0 = 0 \cdot h = 0$
$t_1 = 1 \cdot h = \ldots$

1,5	223,13		125
2	135,34	0	62,5
2,5	82,09		31,25
3	40,8	0	15.625



b) Runge-Kuta 2 ou Hein. $\quad g(t, N(t)) = -KN(t)$ $\quad g(x,y) = -K \cdot y$

$$N_{n+1} = N_n + \frac{h}{2}\left[g(t_n, N_n) + g(\underbrace{t_n + h}_{t_{n+1}}, N_n + h g(t_n, N_n)) \right]$$

$$g(t_n, N_n) = -KN_n$$

$$g(t_{n+1}, \underbrace{N_n + h(-KN_n)}_{N_n(1-Kh)}) = -K \cdot N_n(1-Kh)$$

$$\hookrightarrow N_{n+1} = N_n + \frac{h}{2}\left[-KN_n - KN_n(1-Kh)\right]$$

$$= N_n + \frac{h}{2}\left[-KN_n(2-Kh)\right]$$

$$= N_n + \frac{h}{2}\left[-2KN_n + K^2 h N_n\right]$$

$$= N_n - hKN_n + \frac{K^2 h N_n}{2}$$

$$= N_n\left[1 - Kh + \frac{K^2 h}{2}\right]$$ → à coder dans une boucle for

$$N_1 = \frac{N_0}{2}$$
$$N_2 = \frac{N_1}{2} = \frac{N_0}{4}$$
$$\vdots$$
$$N_n = \frac{N_0}{2^n}$$

t	V. exacte	Euler $h=1$ $N_m = N_0 (0)^m$ $1000 \to 0 \to 0 \ldots$	Euler $h=0{,}5$ $N_m = N_0 \cdot 0{,}5^m = N_0 \frac{1}{2^m}$	RK2 $h=1$ $N_{n+1} = N_n [\frac{1}{2}]$
0	1000	1000	1000	1000
0,5	606,5		500	
1	367,88	0	250	500
1,5	223,13		125	
2	135,34	0	62,5	250
2,5	82,09		31,25	
3	40,8	0	15,625	125

$\Downarrow$

presque m̂ résultat en utilisant la moitié de calcul ($h=1$).

$\simeq h=0{,}5$ Euler

5) $N(t) = N_0 e^{-Kt}$ $\quad K>0.$

$\lim_{t \to +\infty} N(t) = 0$

Euler $\quad N_n = N_0 (1-Kh)^n$

Heun / RK2 $\quad N_{n+1} = N_n (1 - hK + \frac{h^2K^2}{2})$

$t = t_0 + n \cdot h$

Euler $\quad \lim_{n \to \infty} N_n = \lim_{n \to \infty} N_0 (1-Kh)^n$

$\Downarrow$

$= 0$ si $|1-Kh| < 1$

$-1 < 1 - Kh < 1 \Rightarrow 0 < Kh < 2$

on a $K=1$, donc $0 < h < 2$

RK2 $\quad N_1 = N_0 (1 - hK + \frac{h^2K^2}{2})$

$N_2 = N_1 (1 - hK + \frac{h^2K^2}{2})$

$= N_0 (1 - hK + \frac{h^2K^2}{2})^2$

$\vdots$

$N_n = N_0 (1 - hK + \frac{h^2K^2}{2})^n$

$\Downarrow$

$\lim_{n \to \infty} = \lim_{n \to \infty} N_0 (1 - hK + \frac{h^2K^2}{2})^n = 0$

si $|1 - hK + \frac{h^2K^2}{2}| < 1 \Rightarrow 0 < hK - \frac{h^2K^2}{2} < 2$

$0 < hK(1 - \frac{h}{2}K) < 2$

$\Updownarrow$ $h>0$, $K>0$

$0 < 1 - \frac{hK}{2} < \frac{2}{hK}$

$0 < 1 - \frac{h}{2} < \frac{2}{h}$ $\quad$ ici $0 < 1 - \frac{1}{2} < 2$ ✓

6) $\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Taylor $y(\bar{t}+\Delta) = y(\bar{t}) + \underbrace{y'(\bar{t})}_{g(\bar{t}, y(\bar{t}))} \cdot \Delta$ $\qquad f(x) = f(x+0) = f(0) + f'(0) \cdot x$

$\bar{t} = t+h$, $\Delta = -h$

$$y(\underbrace{t+h}_{\bar{t}} - h) = y(t+h) - h \cdot \overbrace{g(t+h, y(t+h))}^{y'(t+h)}$$

$t_n = n \cdot h \Rightarrow y(t) = y_n$

$t+h = n \cdot h + h = (n+1) \cdot h \Rightarrow y(t+h) = y_{n+1}$

$\hookrightarrow \boxed{y_n = y_{n+1} - h \cdot g(t+h, y_{n+1})}$

$$g(t, N(t)) = -KN(t)$$

$\Rightarrow N_n = N_{n+1} - h(-K \cdot N_{n+1}) = N_{n+1}(1 + Kh)$

$$\Rightarrow \boxed{N_{n+1} = \frac{N_n}{1+Kh}}$$

$N_0 = 1000$

$N_1 = \dfrac{N_0}{1+Kh}$

$N_2 = \dfrac{N_1}{1+Kh} = \dfrac{N_0}{(1+Kh)^2}$

$\vdots$

$N_n = \dfrac{N_0}{(1+Kh)^n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{N_0}{(1+Kh)^n} = 0 \quad \forall h$

Exo 2.

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega_0^2 x(t) \\ x(t=0) = x_0 \\ \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{x=0} = v_0 \end{cases}$$

1) $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ $\qquad x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t}$

- $x(0) = x_0 \iff A = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
- $x'(0) = v_0 \iff \overset{x'(t)}{=} -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$$B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

2)

x position
v vitesse

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) = -\omega_0^2 x(t) \end{cases}$$
$$\frac{d}{dt}v(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v(t) \\ -\omega_0 x(t) \end{bmatrix}}_{\vec{g}(t, \vec{y}(t))}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{g}(t, \vec{y}(t))$$

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\omega_0 y_1 \end{bmatrix}$$

3)

a) Euler
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{g}(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{y}(t=0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \cdot \vec{g}(t_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \begin{bmatrix} h \cdot y_n^{(2)} \\ -\omega_0^2 h \, y_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \cdot y_n^{(2)} \\ -\omega_0^2 h \, y_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_{n+1} = \begin{bmatrix} y_n^{(1)} + h \, y_n^{(2)} \\ y_n^{(2)} - \omega_0^2 h \, y_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

b) RK2

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}\left[\vec{g}(t, \vec{y}_n) + \vec{g}(t+h, \vec{y}_n + h\vec{g}(t, \vec{y}_n))\right]$$

$$\vec{g}(t, \vec{y}_n) = \begin{bmatrix} v_n \\ -\omega_0^2 x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_n + h\,\vec{g}(t, \vec{y}_n) = \begin{bmatrix} x_n + h v_n \\ v_n - h\omega_0^2 x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}(t+h, \vec{y}_n + h\vec{g}(t, \vec{y}_n)) = \begin{bmatrix} v_n - h\omega_0^2 x_n \\ -\omega_0^2 (x_n + h v_n) \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ v_n \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\begin{bmatrix} v_n + v_n - h\omega_0^2 x_n \\ -\omega_0^2 x_n - \omega_0^2 (x_n + h v_n) \end{bmatrix}$$