DURÉE: 2h, AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ

EXERCICE 1: POLYNÔMES D'INTERPOLATION (3 POINTS)

Soit T_1 le nuage de points :

i	0	1	2	3
x_i	2	-1	4	5
y_i	1	2	-2	0

1. Calculer les polynômes de base de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ et $L_3(x)$ associés aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.
2. Tracer les courbes représentant les polynômes L_0 et L_1.
3. Donner l'expression du polynôme d'interpolation $p_3^L(x)$ en fonction des polynômes $L_i(x)$.

EXERCICE 2: ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (4 POINTS)

On considère l'équation 1D de propagation d'une vague d'un tsunami :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{1}$$

où h représente la hauteur d'eau, t le temps, x la distance à la plage. α et β sont des constantes.
On cherche à résoudre cette équation par la méthodes des différences finies.

1. À partir du développement de Taylor d'une fonction f en $x + \Delta x$ et en $x - \Delta x$, démontrer les expressions des dérivées centrées d'ordre 1 et 2 par différences finies
2. Donner le schéma de résolution de l'équation (1)

EXERCICE 3: CALCUL D'INTÉGRALES (13 POINTS)

On s'intéresse dans cette exercice au calcul de l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

1. **Méthodes des trapèzes**
   (a) Déterminer α et β pour que la forme $I = \alpha f(a) + \beta f(b)$ soit exacte pour de polynôme de dégré $n \leq 1$.
   (b) En utilisant le résultat de la question 1.a et en décomposant (2) en n parties, redémontrer la formule des trapèzes généralisées :
   $$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right) \tag{3}$$
2. **Quadrature gaussienne :** On souhaite maintenant calculer I par quadrature gaussienne (Gauss-Legendre, $w(x) = 1$).
   (a) Quelle condition doit satisfaire $f(x)$ pour que l'intégrale (2) puisse être calculée de cette manière ?
   (b) Effectuer un changement de variable pour mettre l'équation (2) sous la forme $I = c_1 \int_{-1}^{1} f(c_2 y + c_3)dy$ où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes que vous déterminerez
   On admettra que
   $$I \approx c_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(c_2 x_i + c_3) \tag{4}$$
   où α_i et x_i sont les coefficients et noeuds de Gauss-Legendre.
   (c) Application numérique : Calculer la valeur de I par la formule (4) avec $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \sin(x)$ et $n = 2$.

   Le tableau suivant donne l'ensemble des informations permettant de réaliser le calcul approché des intégrales pour les formules à 1, 2 ou 3 points.

$[a;b]$	$w(x)$	n	α_i	x_i
$[-1;1]$	1	1	2	0
		2	1, 1	$-\sqrt{1/3}$, $\sqrt{1/3}$
$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	2	$\pi/2$, $\pi/2$	$-\sqrt{1/2}$, $\sqrt{1/2}$
		3	$\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/3$	0, $-\sqrt{3/2}$, $\sqrt{3/2}$
$[0;+\infty[$	e^{-x}	2	0.853553, 0.146447	0.585786, 3.41421
		3	0.711093, 0.278518, 0.0103893	0.415775, 2.29428, 6.28995
$]-\infty;+\infty[$	e^{-x^2}	2	$\sqrt{\pi}/2$, $\sqrt{\pi}/2$	$-\sqrt{1/2}$, $\sqrt{1/2}$
		3	1.18164, 0.295409, 0.295409	0, -1.22474, 1.22474

3. **Implémentation :** On souhaite maintenant implémenter les équations (3) et (4) afin de pouvoir calculer l'intégrale (2). Pour ce faire, on a créé une bibliothèque `integrale.h` où est déclaré la structure ci-contre qui modélise les données d'une intégrale (bornes a et b ainsi que le nombre de parties ou de points n).

```
typedef struct {
  double a, b;
  int n;
} Integrale;
```

Dans ce fichier header, on a aussi déclaré les constantes suivantes (qui sont expliquées dans la suite) :

```
#define N_MAX 50
#define FNAME_X "data/intGL_X.txt"
#define FNAME_A "data/intGL_Alpha.txt"
```

On suppose aussi qu'une fonction `double f( double x )` existe et permet de calculer $f(x)$. On pourra donc l'utiliser sans donner son implémentation.

(a) Implémenter une fonction `double intTrapeze( Integrale I )` qui calcule la valeur de l'intégrale I par la méthode des trapèzes (3).

(b) Pour le calcul de l'intégrale par Gauss-Legendre, les valeurs de x_i et α_i sont stockées dans 2 fichiers texte dont les noms sont définis dans les constantes `FNAME_X` et `FNAME_A`. Chaque fichier contient `N_MAX` lignes et la $i^{\text{ème}}$ ligne correspond aux i valeurs de x_i ou α_i.
En vous aidant de l'algorithme incomplet ci-contre, implémenter une fonction `double* lireXouAlpha( char* nomFichier, int n )`

Variables : fTxt : Fichier (texte)
i, n : entier
xA : tableau de n réels
pour $i = 0$ *à* $n - 1$ **faire**
  Lire $i + 1$ réels dans fTxt
pour $i = 0$ *à* n **faire**
  xA[i] $\leftarrow$ Lire 1 réel dans fTxt
retourner *xA*

(c) Implémenter une fonction `double intGL( Integrale I )` qui calcule la valeur de l'intégrale I par la méthode de quadrature de Gauss (4). Elle appellera la fonction `lireXouAlpha` pour récupérer les valeurs de x_i et α_i.

(d) Écrire le programme principal. Il devra :
- déclarer les bibliothèques nécessaires à son fonctionnement,
- demander à l'utilisateur le nombre n de parties et de points de quadrature tant que la valeur n'est pas comprise entre 1 et `N_MAX`
- calculer et afficher la valeur de l'intégrale par la méthode des trapèzes et par quadrature gaussienne.

On supposera que toutes les fonctions écrites aux questions précédentes sont regroupées dans la bibliothèque nommée `integrale`.