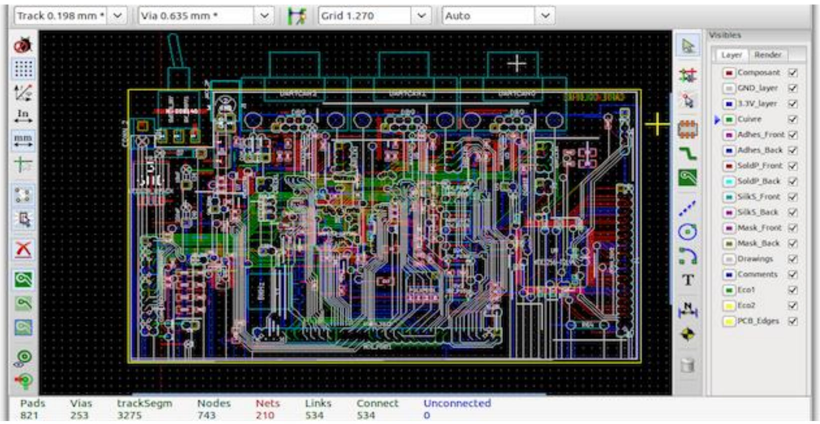
Programmation et Méthodes Numériques

Résolution numérique des équations différentielles

M. Casaletti (massimiliano.casaletti@upmc.fr)

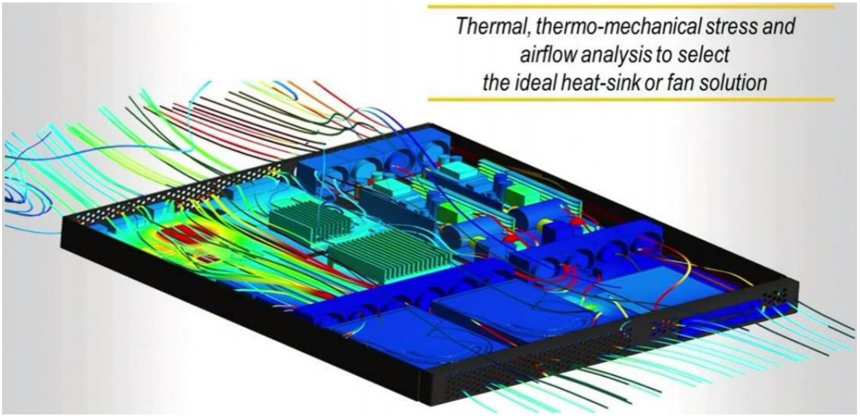
Laboratoire d'Electronique et Electromagnétisme (L2E)
Université Pierre et Marie Curie

Introduction générale



$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0.$$

Equation Différentielle Ordinaire (E.D.O.)



Circuits haute fréquence

Dissipation de la chaleur

$$\frac{\partial u(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u(\vec{\mathbf{r}},t) = f(\vec{\mathbf{r}},t)$$

Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mu_0 \mu_r(\vec{\mathbf{r}}) \dfrac{\partial \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}})}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{\mathbf{r}}) \dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})}{\partial t} + \mathbf{J}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{\rho(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{\mathbf{r}})} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \end{cases}$$

Equations de Maxwell

Plan du cours

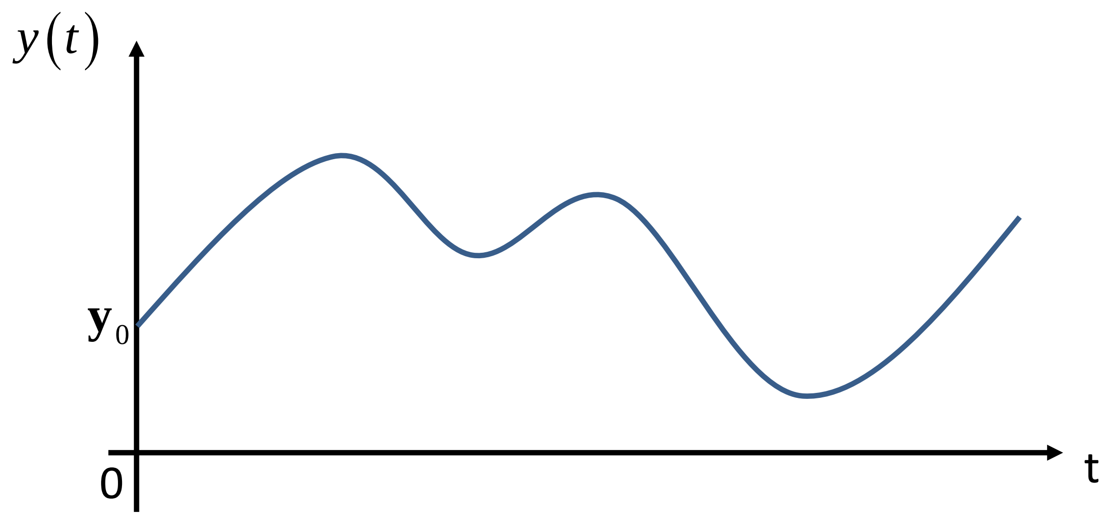
- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
- **Résolution numérique des équations différentielles**
- **Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O.)**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - Développements de Taylor de la solution (Euler, etc.)
  - Méthode de Runge-Kutta
  - Intégration numérique
  - Equation différentielles d'ordre supérieur à un
- Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)
  - Différences finies

Soient $\mathbf{y}(t)$ une fonction dérivable sur $[a, \mathrm{b}]$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$
et *f* une fonction de $[a, \mathrm{b}] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

- **Problème de Cauchy: P**

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f\left(t, \mathbf{y}(t)\right) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Condition initiale
(condition de Cauchy)



Résoudre le **problème de Cauchy** consiste à trouver une fonction $\mathbf{y}(t)$ solution de l'équation différentielle vérifiant la condition de Cauchy.

Rappels de mathématique: Exemples

- **Exemple 1:** $\begin{cases} y'(t) = -\alpha\left[y(t) - \sin(t)\right] + \cos(t) = f\left(t, y(t)\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ f fonction linéaire pour la variable y

Solution: $y(t) = e^{-\alpha t} + \sin(t)$ Solution unique continue avec dérivées continues

---

- **Exemple 2:** $\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \quad x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ f fonction non linéaire pour la variable y

Solution: $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ Solution unique, discontinue et non dérivable en t=0

$y(t)$ est solution en un intervalle [a,b] avec a>0

- **Exemple 3:** $\begin{cases} y'(t) = y^{1/3}(t) \quad x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ f fonction non linéaire pour la variable y

Solution: $y(t) = 0; \qquad y(t) = \left(\dfrac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}; \quad \ldots$

Soient Y une fonction dérivable sur $[a,\mathrm{b}]$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et *f* une fonction de $[a,\mathrm{b}]\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

Problème de Cauchy: P $\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f\left(t,\mathbf{y}(t)\right) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$ ← Condition initiale

- **Définition**: On dit que *f* est **lipchitzienne** par rapport à sa deuxième variable, uniformément en la première, s'il existe $L \in \mathbb{R}^+$ tel que:

$$\forall t \in [a,b], \qquad \forall \mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n, \qquad \left\| f\left(t,\mathbf{y}_1\right) - f\left(t,\mathbf{y}_2\right)\right\| \le L\left\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\right\|$$

- **Théorème**: Si *f* est continue sur $[a,\mathrm{b}]\times\mathbb{R}^n$ et lipchitzienne alors il existe <u>**une unique solution**</u> de P de classe C^1 sur $[a,\mathrm{b}]$.

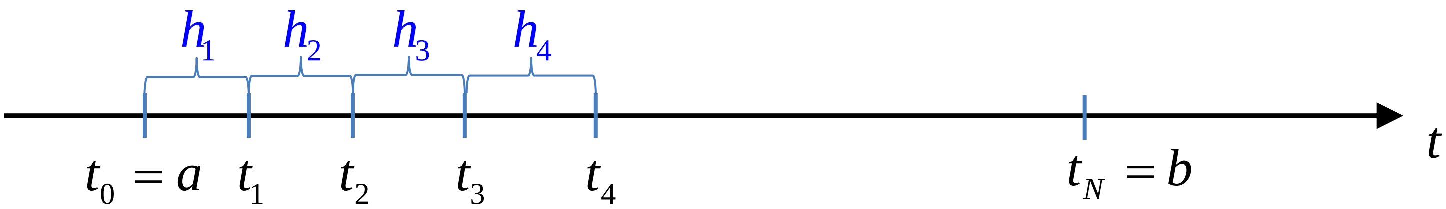
- Parfois la fonction est seulement localement **lipchitzienne**

↓

Seule l'**existence locale de la solution** de P est assurée

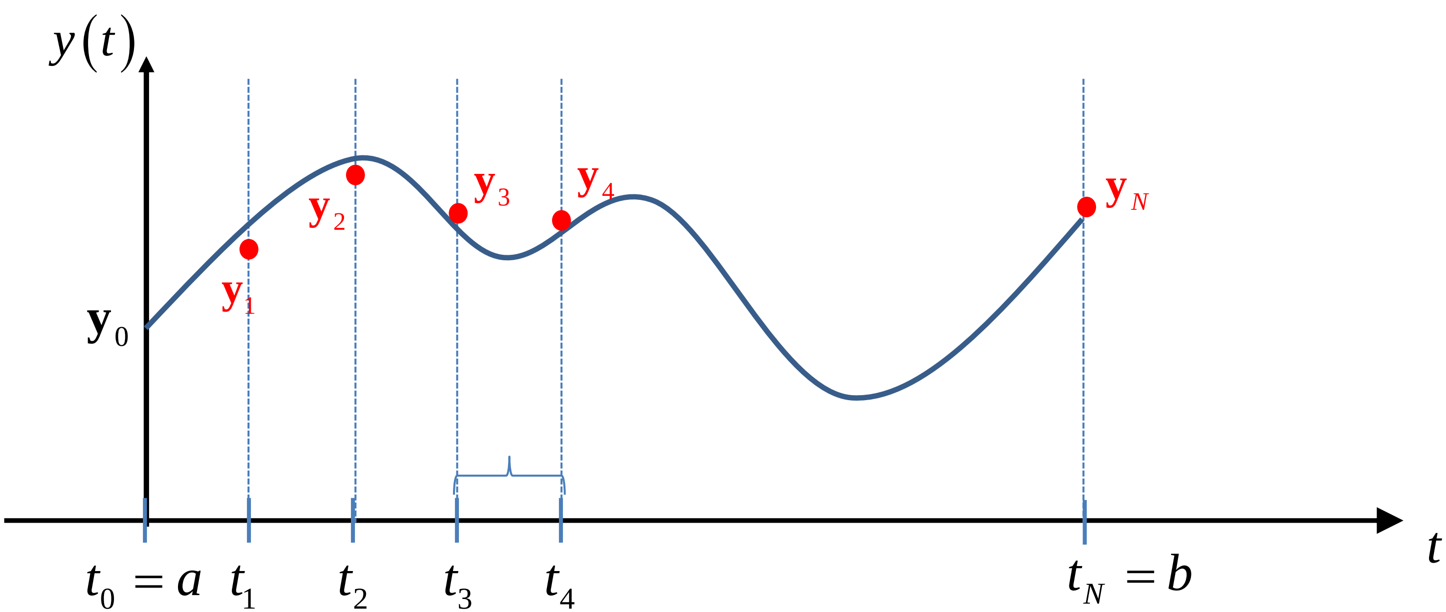
Méthodes numériques: Cadre général

- Discrétisation de la variable t : $t_i = t_{i-1} + h_i \quad i \in \{0,\dots,N\}$



Problème de Cauchy: **P** $\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f\left(t, \mathbf{y}(t)\right) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$

Discrétisation de $\mathbf{y}(t)$: $\mathbf{y}_i \simeq \mathbf{y}(t_i) \quad i \in \{0,\dots,N\}$



Méthodes numériques: Cadre général

Méthodes numériques

Schémas à un pas (one step)

y_{n+1} calculé à partir de y_n

Schéma numérique explicite

$$y_{n+1} = \Phi\left(t_n, y_n\right)$$

Schéma numérique implicite

$$\Phi\left(t_n, y_n, y_{n+1}\right) = 0$$

schémas multi-pas (multistep)

y_{n+1} calculé à partir de $y_n, \ldots, y_0$

Schéma numérique explicite

$$y_{n+1} = \Phi\left(t_0, t_1, \ldots, t_n, y_0, y_1, \ldots, y_n\right)$$

Schéma numérique implicite

$$\Phi\left(t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\right) = 0$$

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
- Résolution numérique des équations différentielles
- Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O.)
    - Introduction générale et rappels de mathématique
    - Développements de Taylor de la solution (Euler, etc.)
    - Méthode de Runge-Kutta
    - Intégration numérique
    - Equation différentielles d'ordre supérieur à un
- Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)
    - Différences finies

Développements de Taylor de la solution

Problème de Cauchy: P $\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ f **dérivable** sur [a,b]

- Discrétisation de la variable *t* avec un pas *h* constant.

- Développement de Taylor de la solution *y* dans l'intervalle $\left[t_0, t_1\right] = \left[t_0, t_0 + h\right]$:

Taylor-Lagrange

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t)\Big|_{t=t_0} h + \frac{1}{2}\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\Bigg|_{t=t_0} h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^{(n)} y(t)}{dt^n}\Bigg|_{t=t_0} h^n + \underbrace{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{(n+1)} y(t)}{dt^{n+1}}\Bigg|_{t=\xi_0}}_{\Omega_1^{(n)}}$$

Erreur locale

- $y'(t) = f\left(t, y(t)\right)$ $\qquad y^{(i)}(t) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f\left(t, y(t)\right)$

$$y(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f\left(t, y(t)\right)}{dt^2}\Bigg|_{t=t_0} h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^{(n)} f\left(t, y(t)\right)}{dt^n}\Bigg|_{t=t_0} h^n + \Omega_1^{(n)}$$

Développements de Taylor de la solution

- On néglige le reste $\Omega_1^{(n)} \quad \Rightarrow y_1 \simeq y(t_1)$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f(t, y(t))}{dt^2}\right|_{t=t_0} h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{d^{(n)} f(t, y(t))}{dt^n}\right|_{t=t_0} h^n$$

- Développement de Taylor de la solution *y* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{h^2}{2}\left.\frac{df(t, y(t))}{dt}\right|_{t=t_i} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\left.\frac{d^{(n-1)} f(t, y(t))}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_i} + \underbrace{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left.\frac{d^{(n+1)} y(t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=\xi_0}}_{\Omega_{i+1}^{(n)}}$$

- On néglige le reste $\Omega_{i+1}^{(n)} \quad \Rightarrow y_{i+1} \simeq y(t_{i+1})$

$$y_{i+1} = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{1}{2}\left.\frac{df(t, y(t))}{dt}\right|_{t=t_i} h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{d^{(n-1)} f(t, y(t))}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_i} h^n$$

- On remplace la valeur exacte $y(t_i)$ par la valeur approchée y_i

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{h^2}{2} f^{(1)}(t, y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t, y_i)}$$

Schéma numérique explicite

Développements de Taylor n=1 (méthode d'Euler)

Schéma numérique

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{i+1} = y_i + f\left(t_i, y_i\right)h \end{cases}$$

Schéma à un pas

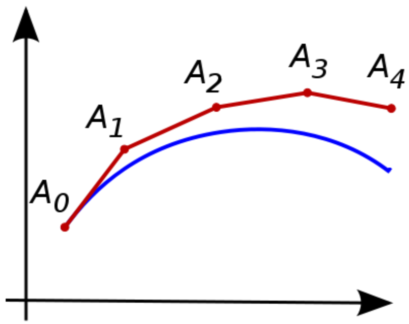
Algorithme

Entrées
réels: y_0, h
entier: N

$y[0] = y_0$
pour i=1 à N **faire**
$$y[i] = y[i-1] + hf\left(\left(i-1\right)h, y[i-1]\right)$$
fin pour
retourner y

- Interprétation géométrique

$f\left(t, y(t)\right)$ est le coefficient angulaire de la tangente à la solution exacte



n=1 (méthode d'Euler): exemple

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-t} y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \left(t_0 e^{-t_0} y_0\right) h = 1$$

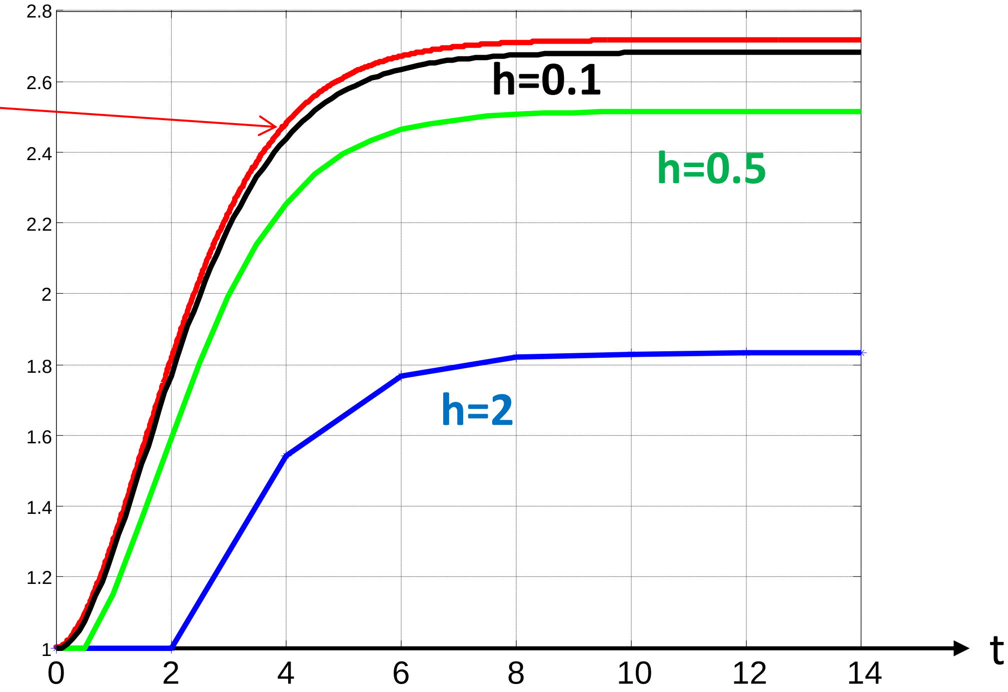
$$y_2 = y_1 + \left(t_1 e^{-t_1} y_1\right) h = 1 + \left(he^{-h}\right) h = 1 + h^2 e^{-h}$$

$$y_3 = y_2 + \left(t_2 e^{-t_2} y_2\right) h = 1 + h^2 e^{-h} + \left(2he^{-2h}\left(1 + h^2 e^{-h}\right)\right) h$$

$$\vdots$$

Solution exacte

$$y(t) = e^{1-(t+1)e^{-t}}$$



Développements de Taylor de la solution: erreur

$$e_1 = y(t_1) - y_1 = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left.\frac{d^{(n+1)} y(t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=\xi_0} = \Omega_1^{(n)}$$

$$e_2 = y(t_2) - y_2 = y(t_2) - y_2 - \left[y(t_1) + f\left(t_1, y(t_1)\right)h \right] + \left[y(t_1) + f\left(t_1, y(t_1)\right)h \right]$$

$$= \left\{ y(t_2) - \left[y(t_1) + f\left(t_1, y(t_1)\right)h \right] \right\} + y(t_1) + f\left(t_1, y(t_1)\right)h - y_2$$

$$= \Omega_2^{(n)} + y(t_1) + f\left(t_1, y(t_1)\right)h - y_2 = \Omega_2^{(n)} + y(t_1) + f\left(t_1, y(t_1)\right)h - \left(y_1 + f\left(t_1, y_1\right)h\right)$$

$$= \Omega_2^{(n)} + \left(y(t_1) - y_1\right) + h\left[f\left(t_1, y(t_1)\right) - f\left(t_1, y_1\right) \right]$$

$$= \Omega_2^{(n)} + e_1 + h\left[f\left(t_1, y(t_1)\right) - f\left(t_1, y_1\right) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left|e_2\right| = \left|\Omega_2^{(n)} + e_1 + h\left[f\left(t_1, y(t_1)\right) - f\left(t_1, y_1\right) \right]\right| \le \left|\Omega_2^{(n)}\right| + \left|e_1\right| + h\left| f\left(t_1, y(t_1)\right) - f\left(t_1, y_1\right) \right|$$

$$\le \left|\Omega_2^{(n)}\right| + \left|e_1\right| + hL\left|y(t_1) - y_1\right| = \left|\Omega_2^{(n)}\right| + \left|e_1\right| + hL\left|e_1\right| = \left|\Omega_2^{(n)}\right| + \left|e_1\right|\left(1 + hL\right)$$

Pour le point n+1

$$\left|e_{n+1}\right| \le \left|\Omega_{n+1}^{(n)}\right| + \left|e_n\right|\left(1+hL\right) = \left|e_n\right|\left(1+hL\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left|\left.\frac{d^{(n+1)}y(t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=\xi}\right| h^{n+1} \qquad \xi \in \left[t_n, t_{n+1}\right]$$

$$C^{(n)} = \frac{1}{(n+1)!}\max_{[t_0,t_n]}\left|\left.\frac{d^{(n+1)}y(t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=\xi}\right|$$

$$\left|e_{n+1}\right| \le \left|e_n\right|\left(1+hL\right) + C^{(n)}h^{n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad \Rightarrow \quad 1 + x = e^x - \frac{x^2}{2} - \dots < e^x \qquad \text{si } x>0$$

$$\left|e_{n+1}\right| \le \left|e_n\right| e^{hL} + C^{(n)}h^{n+1}$$

Développements de Taylor de la solution: erreur

$$\left|e_{n+1}\right| \le \left|e_n\right| e^{hL} + C^{(n)} h^{n+1}$$

$$e_0 = 0$$

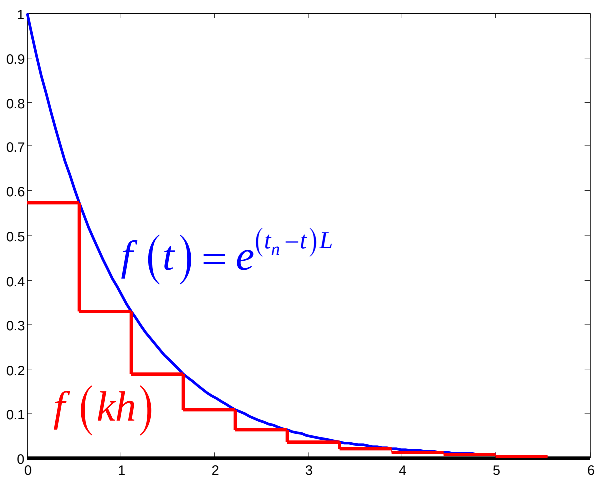
$$\left|e_1\right| \le \left|e_0\right| e^{hL} + C^{(n)} h^{n+1} = C^{(n)} h^{n+1}$$

$$\left|e_2\right| \le \left|e_1\right| e^{hL} + C^{(n)} h^{n+1} = C^{(n)} h^{n+1} e^{hL} + C^{(n)} h^{n+1}$$

$$\left|e_3\right| \le \left|e_2\right| e^{hL} + C^{(n)} h^{n+1} = C^{(n)} h^{n+1} e^{2hL} + C^{(n)} h^{n+1} e^{hL} + C^{(n)} h^{n+1} = C^{(n)} \left[e^{2hL} + e^{hL} + 1\right] h^{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\left|e_n\right| \le C^{(n)} \left[e^{(n-1)hL} + e^{(n-2)hL} + \ldots + e^{2hL} + e^{hL} + 1\right] h^{n+1} = C^{(n)} \left[\sum_{k=1}^{n} e^{(n-k)hL}\right] h^{n+1} = C^{(n)} h^n \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} h e^{(t_n - t_k)L}\right]}_{\text{Méthode des rectangles à droite}}$$



$$\sum_{k=1}^{n} h e^{(t_n - t_k)L} \le \int_{t_0}^{t_n} e^{(t_n - t)L} dt$$

Méthode des rectangles à droite

$$I = \sum_{i=1}^{N} f(kh) h$$

$$f(t) = e^{(t_n - t)L}$$

Développements de Taylor de la solution: erreur

$$|e_n| \le C^{(n)} h^n \int_{t_0}^{t_n} e^{(t_n - t)L} dt = C^{(n)} h^n e^{t_n L} \int_{t_0}^{t_n} e^{-tL} dt = C^{(n)} h^n e^{t_n L} \left[\frac{e^{-tL}}{-L} \right]_{t_0}^{t_n}$$

$$= -C^{(n)} h^n \frac{e^{t_n L}}{L} \left[e^{-Lt_n} - e^{-Lt_0} \right] = C^{(n)} \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L} h^n$$

$$\boxed{|e_n| \le C^{(n)} \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L} h^n}$$

- $$\lim_{h \to 0} |e_n| \le \frac{C^{(n)}}{L} \lim_{h \to 0} \left(e^{L(t_n - t_0)} - 1 \right) h^n = \frac{C^{(1)}}{L} \lim_{h \to 0} \left(e^{Lhn} - 1 \right) h^n = 0$$

Développements de Taylor n=2

$$y_{i+1} = y_i + f\left(t_i, y(t_i)\right)h + \frac{h^2}{2}\left.\frac{df\left(t, y(t)\right)}{dt}\right|_{t=t_i}$$

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right)$$

$$\frac{df\left(t,y(t)\right)}{dt} = \frac{df\left(t,y(t)\right)}{dt} + \frac{df\left(t,y(t)\right)}{dy}\boxed{\frac{dy(t)}{dt}} = \frac{df\left(t,y(t)\right)}{dt} + \frac{df\left(t,y(t)\right)}{dy} f\left(t,y(t)\right) = \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy} f\right)\left(t,y(t)\right)$$

Schéma numérique

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i, y_i\right) + \dfrac{h^2}{2}\left(\dfrac{df\left(t_i, y_i\right)}{dt} + \dfrac{df\left(t_i, y_i\right)}{dy} f\left(t_i, y_i\right)\right) \end{cases}$$

Algorithme

Entrées

réels: y_0, h

entier: N

$y[0] = y_0$

pour i=1 à N **faire**

$$y[i] = y[i-1] + h * f\left((i-1)h, y[i-1]\right)$$
$$+\frac{h^2}{2}\left(\frac{df}{dt}\left((i-1)h, y[i-1]\right) + \frac{df\left((i-1)h, y[i-1]\right)}{dy} f\left((i-1)h, y[i-1]\right)\right)$$

fin pour

retourner y

Développements de Taylor n=2 : exemple

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-t}y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \left(t_0 e^{-t_0} y_0\right) h + \frac{h^2}{2} y_0 e^{-t_0}\left(1 - t_0 + t_0^2 e^{-t_0}\right) = y_0\left(1 + \frac{h^2}{2}\right)$$

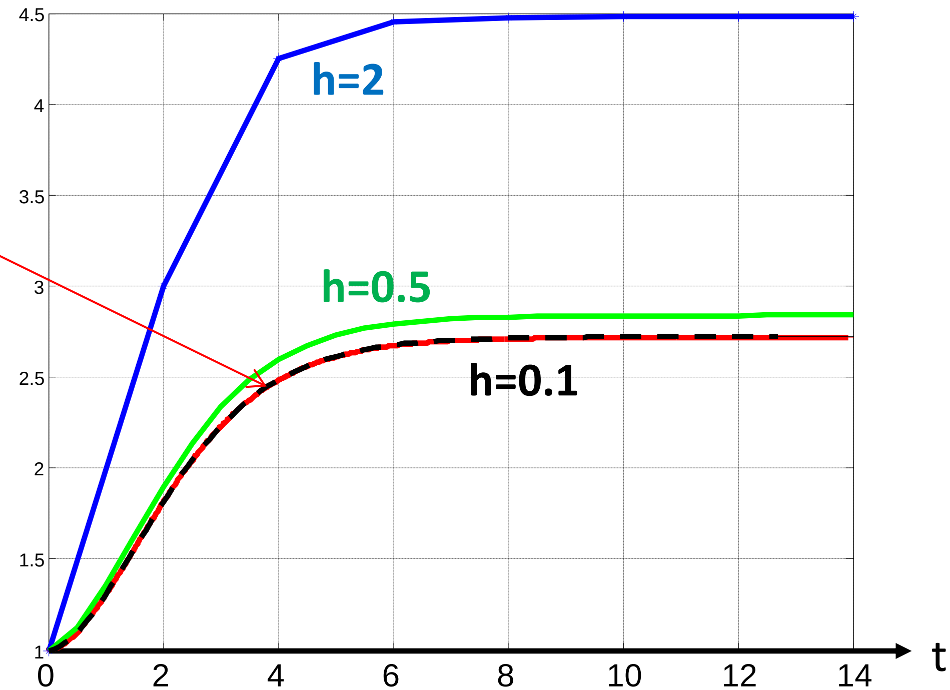
$$y_2 = y_1 + \left(t_1 e^{-t_1} y_1\right) h + \frac{h^2}{2} y_1 e^{-t_1}\left(1 - t_1 + t_1^2 e^{-t_1}\right)$$

Solution exacte

$$y(t) = e^{1-(t+1)e^{-t}}$$

$$|e_n| \leq C^{(2)} \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L} h^2$$

$$C^{(2)} = \frac{1}{3!} \max_{[t_0, t]} \left| y'''(\xi) \right|$$



Développements de Taylor n=3

$$\frac{d^{(2)} f(y(t),t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{df(y(t),t)}{dy} f(y(t),t)\right\} = \left[\frac{d^2 f(y(t),t)}{dtdy} + \frac{d^2 f(y(t),t)}{dy^2}\frac{dy}{dt}\right] f(y(t),t) + \frac{df(y(t),t)}{dy}\left[\frac{df(y(t),t)}{dt} + \frac{df(y(t),t)}{dy}\frac{dy}{dt}\right]$$

$$= \frac{d^2 f(y(t),t)}{dtdy} f(y(t),t) + \frac{d^2 f(y(t),t)}{dy^2}\frac{dy}{dt} f(y(t),t) + \frac{df(y(t),t)}{dy}\frac{df(y(t),t)}{dt} + \frac{df(y(t),t)}{dy}\frac{df(y(t),t)}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{d^2 f(y(t),t)}{dtdy} f(y(t),t) + \frac{d^2 f(y(t),t)}{dy^2} f^2(y(t),t) + \frac{df(y(t),t)}{dy}\frac{df(y(t),t)}{dt} + \frac{df(y(t),t)}{dy}\frac{df(y(t),t)}{dy} f(y(t),t)$$

$$= \left[\frac{d^2 f}{dtdy} f + \frac{d^2 f}{dy^2} f^2 + \frac{df}{dy}\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{df}{dy} f\right](y(t),t)$$

Schéma numérique

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy} f\right)(t_i, y_i) + \frac{h^3}{6}\left[\frac{d^2 f}{dtdy} f + \frac{d^2 f}{dy^2} f^2 + \frac{df}{dy}\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{df}{dy} f\right](t_i, y_i) \end{cases}$$

Algorithme

Entrées

réels: y_0, h

entier: N

$y[0] = y_0$

pour i=1 à N **faire**

$$y[i] = y[i-1] + hf((i-1)h, y[i-1]) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy} f\right)((i-1)h, y[i-1])$$

$$+ \frac{h^3}{6}\left[\frac{d^2 f}{dtdy} f + \frac{d^2 f}{dy^2} f^2 + \frac{df}{dy}\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{df}{dy} f\right]((i-1)h, y[i-1])$$

fin pour

retourner y

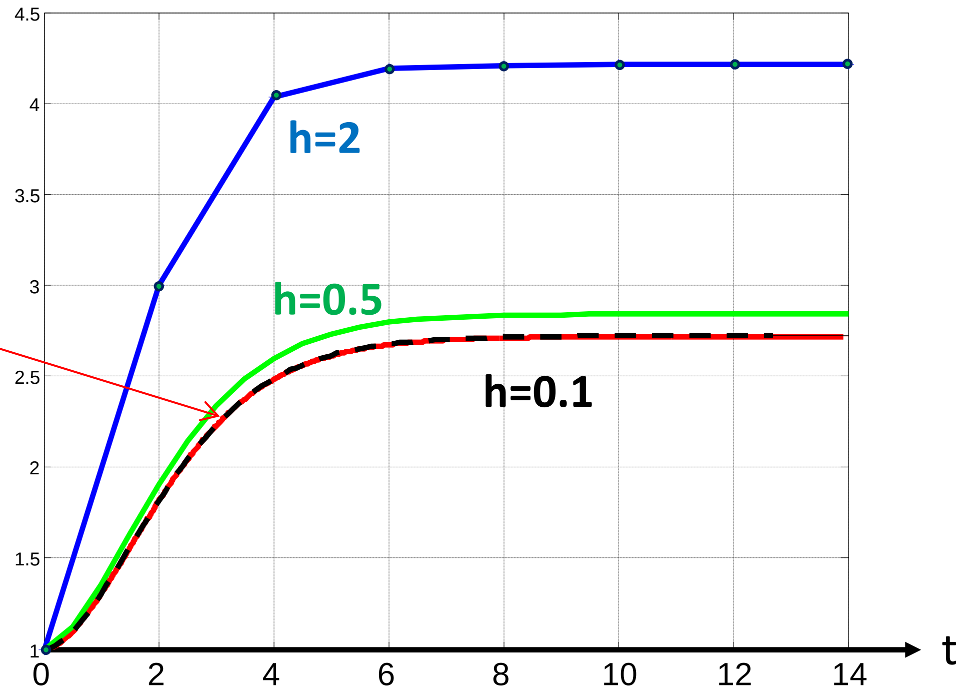
Développements de Taylor n=3 : exemple

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-t}y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution exacte

$$y(t) = e^{1-(t+1)e^{-t}}$$

$$|e_n| \le C^{(3)} \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L} h^3$$



calcul en précision finie

$$\hat{y}_0 = y_0 + \zeta_0$$
$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + f\left(t_n, \hat{y}_n\right)h + \zeta_{n+1}$$

$$\left|\hat{e}_n\right| = \left|y\left(t_n\right) - \hat{y}_n\right| \le e^{L\left(t_n - t_0\right)}\left(\left|\zeta_0\right| + \frac{\zeta}{L} + \frac{h^n C^{(n)}}{L}\right) \qquad \zeta = \max_{1 \le n \le N-1}\left|\zeta_{n+1}\right|$$

- $$\lim_{h\to 0}\left|\hat{e}_n\right| \le \lim_{h\to 0} e^{L\left(t_n - t_0\right)}\left(\left|\zeta_0\right| + \frac{\zeta}{L} + \frac{h^n C^{(n)}}{L}\right) = \left|\zeta_0\right| + \frac{\zeta}{L} \ne 0$$

Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
- **Résolution numérique des équations différentielles**
- **Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O.)**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - **Développements de Taylor de la solution (Euler, etc.)**
  - **Méthode de Runge-Kutta**
  - Intégration numérique
  - Equation différentielles d'ordre supérieur à un
- Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)
  - Différences finies

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\Phi\left(t_n, y(t_n)\right)$$

$$\Phi\left(t_n, y(t_n)\right) = c_1 k_1 + c_2 k_2$$
$$k_1 = f\left(t_n, y(t_n)\right)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \alpha h, y(t_n) + \beta h k_1\right)$$

- Développement de Taylor de la solution *y:*

$$y(t_n + h) = y_n + hf\left(t_n, y(t_n)\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy} f\right)\left(t_n, y(t_n)\right) + o\left(h^2\right)$$

- Développement de Taylor de la fonction k_2:

$$f\left(t_n + \alpha h, y(t_n) + \beta h k_1\right) \simeq f\left(t_n, y(t_n)\right) + \beta h k_1 \frac{\partial}{\partial y} f\left(t_n + \alpha h, y(t_n) + \beta k_1\right) + \alpha h \frac{\partial}{\partial t} f\left(t_n + \alpha h, y(t_n) + \beta k_1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi\left(t_n, y(t_n)\right) = c_1 f\left(t_n, y(t_n)\right) + c_2 f\left(t_n + \alpha h, y(t_n) + \beta h k_1\right)$$
$$\simeq (c_1 + c_2) f\left(t_n, y(t_n)\right) + c_2 \beta h \left(\frac{\partial f}{\partial y} f\right)\left(t_n, y(t_n)\right) + c_2 \alpha h \frac{\partial}{\partial t} f\left(t_n, y(t_n)\right)$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

- On impose que $y(t_n)+h\cdot\Phi(t_n,y(t_n)) = y_n + hf(t_0,y(t_0)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{df}{dt}+\frac{df}{dy}f\right)(t_n,y(t_n))$

$$y(t_n)+h\cdot\Phi(t_n,y(t_n)) \simeq y(t_n)+h(c_1+c_2)f(t_n,y(t_n)) + c_2h^2\left(\beta\frac{\partial f}{\partial y}f+\alpha\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t_n,y(t_n))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_2\alpha = c_2\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Méthode de Heun

$$\begin{cases} c_1=c_2=\frac{1}{2} \\ \alpha=\beta=1 \end{cases}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)+\frac{h}{2}f(t_n,y(t_n))+\frac{h}{2}f(t_n+h,y(t_n)+hf(t_n,y(t_n)))$$

Algorithme

Entrées
réels: y_0, h
entier: N

$y[0]=y_0$
pour i=1 à N **faire**

$$y[i]=y[i-1]+\frac{h}{2}f((i-1)h,y[i-1]) + \frac{h}{2}f(y[i-1]+hf(y[i-1],(i-1)h),ih)$$

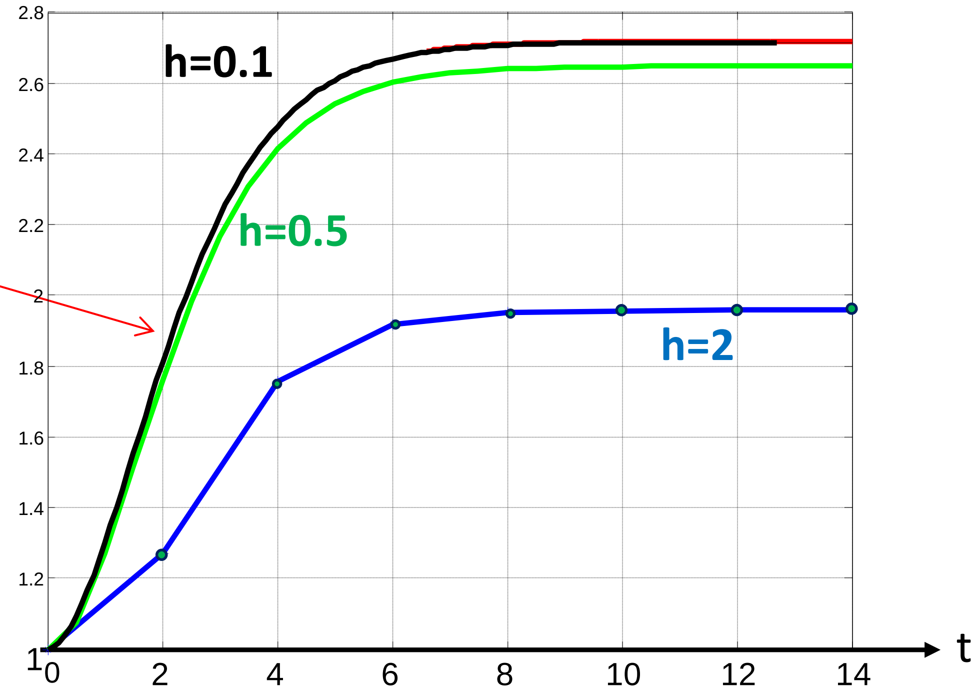
fin pour
retourner y

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 : exemple

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-t} y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution exacte

$$y(t) = e^{1-(t+1)e^{-t}}$$



Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Schéma numérique

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

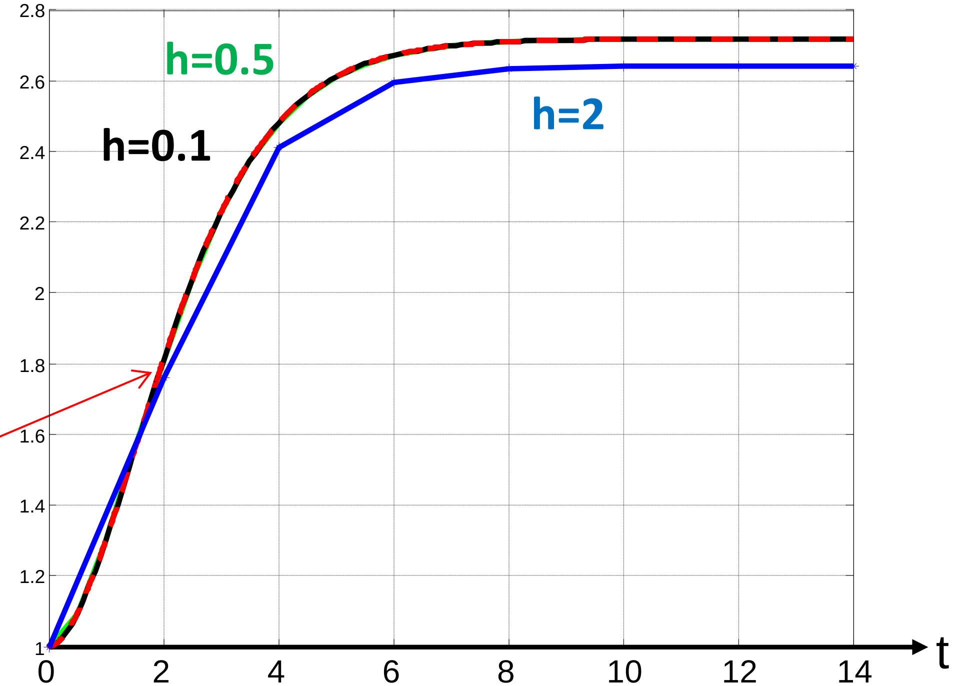
$$k_1 = hf\left(t_i, y_i\right)$$
$$k_2 = hf\left(t_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(t_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(t_i + h, y_i + k_3\right)$$

Exemple

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-t}y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution exacte

$$y(t) = e^{1-(t+1)e^{-t}}$$



Méthodes de Runge-Kutta: erreur

$$C^{(n)} = \frac{1}{(n+1)!} \max_{[t_0, t_n]} \left| \left. \frac{d^{(n)}\Phi}{dt^n} \right|_{t=\xi} \right|$$

$$\boxed{|e_n| \le C^{(n)} \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L} h^n}$$

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
- Résolution numérique des équations différentielles
- Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O.)
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Développements de Taylor de la solution (Euler, etc.)
  - Méthode de Runge-Kutta
  - Intégration numérique
  - Equation différentielles d'ordre supérieur à un
- Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)
  - Différences finies

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \int_{t_0}^{t_0+h} y'(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_0+h} f\left(x, y(x)\right) dx$$

Formulation faible

$$y(t_0+h) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f\left(x, y(x)\right) dx \simeq y_0 + \sum_{n=0}^{N-1} f\left(x_i, y(x_i)\right)$$

- **Méthode du rectangle**

$$y(t_0+h) = y_0 + hf\left(t_0, y_0\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n, y_n\right)$$

méthode d'Euler

- **Méthode du trapèze**

$$y(t_0+h) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(t_0, y_0\right) + f\left(t_0+h, y_0 + hf\left(t_0, y_0\right)\right)\right]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(t_n, y_n\right) + f\left(t_n+h, y_n + hf\left(t_n, y_n\right)\right)\right]$$

Runge-Kutta d'ordre 2

Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
- Résolution numérique des équations différentielles
- Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O.)
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Développements de Taylor de la solution (Euler, etc.)
  - Méthode de Runge-Kutta
  - Intégration numérique
  - Equation différentielles d'ordre supérieur à un
- Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)
  - Différences finies

Equation différentielles d'ordre supérieur à un

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

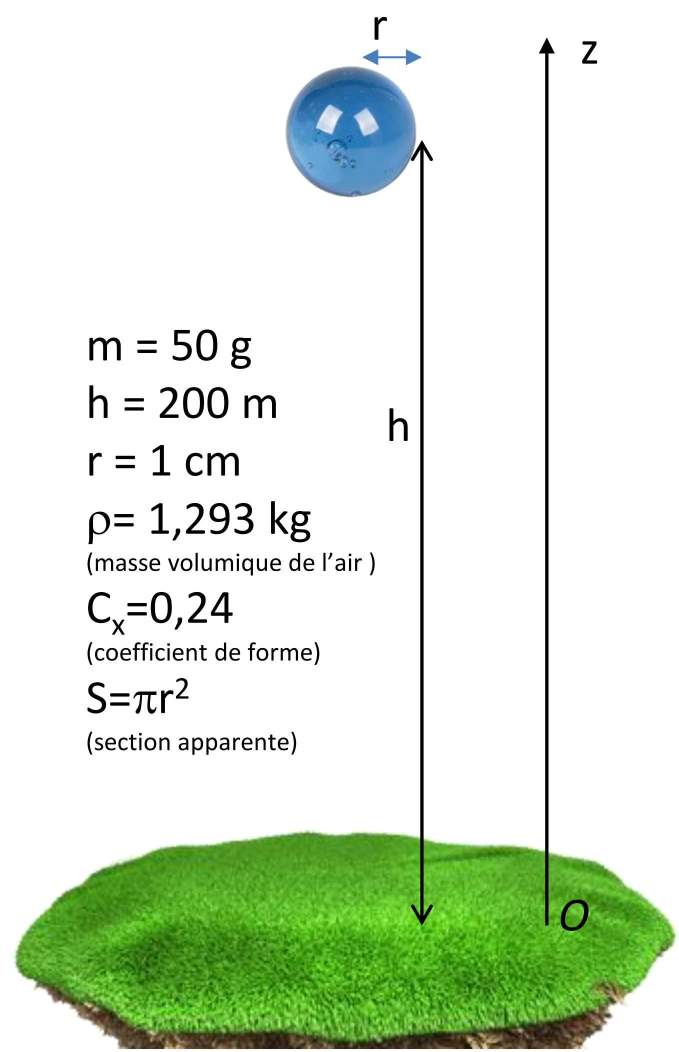
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(t_0) = y_0 \\ y_2(t_0) = y_0^{(1)} \\ y_3(t_0) = y_0^{(2)} \\ \vdots \\ y_n(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ \vdots \\ f\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ F_2\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ F_3\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ \vdots \\ F_n\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t_0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-3)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{y}'(t)\right) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}}$$

Equation différentielles d'ordre supérieur à un

Exemple



m = 50 g

h = 200 m

r = 1 cm

ρ= 1,293 kg

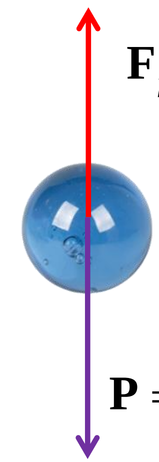
(masse volumique de l'air)

C_x=0,24

(coefficient de forme)

S=πr^2

(section apparente)



$$\mathbf{F}_{frot} = \frac{1}{2}\rho S C_x v_z^{\ 2}$$

$$\mathbf{P} = mg$$

$$\mathbf{F}_{frot} - \mathbf{P} = m\mathbf{a} \qquad \frac{1}{2}\rho S C_x \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2 - mg = m\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 z(t)}{dt^2} = \dfrac{\rho S C_x}{2m}\left(\dfrac{dz(t)}{dt}\right)^2 - g \\ z(t_0) = h \\ z'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Equation différentielles d’ordre supérieur à un

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 z(t)}{dt^2} = \dfrac{\rho S C_x}{2m}\left(\dfrac{dz(t)}{dt}\right)^2 - g \\ z(t_0) = h \\ z'(t_0) = 0 \end{cases}$$

- $$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}$$

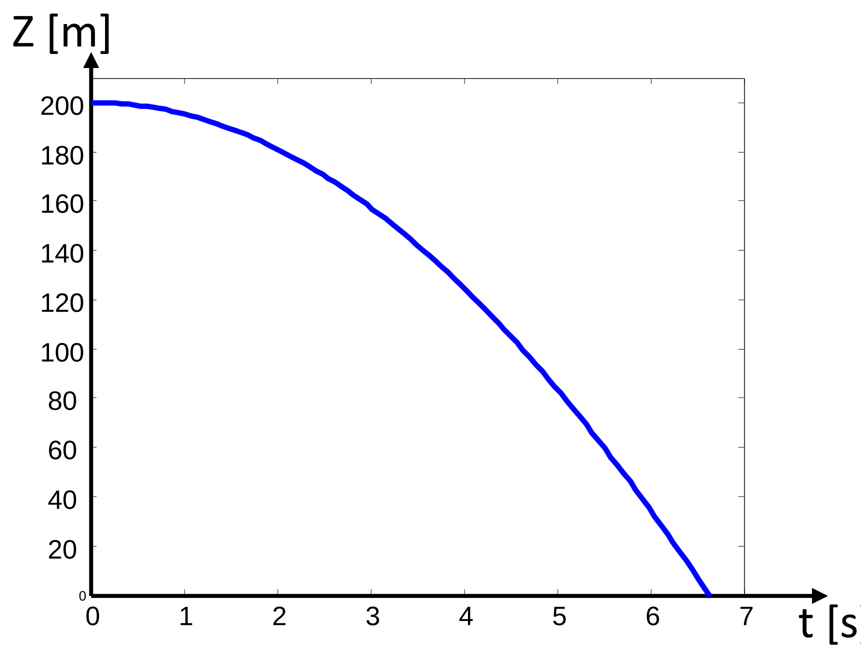
$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dz(t)}{dt} \\ \dfrac{d^2 z(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \dfrac{\rho S C_x}{2m}\left(\dfrac{dz(t)}{dt}\right)^2 - g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \dfrac{\rho S C_x}{2m}\left(y_2(t)\right)^2 - g \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}'(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \qquad \mathbf{F}(t, \mathbf{y}'(t)) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \dfrac{\rho S C_x}{2m}\left(y_2(t)\right)^2 - g \end{bmatrix}$$

méthode d’Euler

$$\begin{bmatrix} y_1(t_1) \\ y_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} h \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} y_2(t_i) \\ \dfrac{\rho S C_x}{2m}\left(y_2(t_i)\right)^2 - g \end{bmatrix}$$



Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
- **Résolution numérique des équations différentielles**
  - Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O.)
    - Introduction générale et rappels de mathématique
    - Développements de Taylor de la solution (Euler, etc.)
    - Méthode de Runge-Kutta
    - Intégration numérique
    - Equation différentielles d'ordre supérieur à un
  - Equations Différentielles aux dérivées Partielles (E.D.P.)
    - Différences finies

Méthode des différences finies

- Discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation

Formule de Taylor

(A) $f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+\Delta t f^{(1)}\left(t_0\right)+\frac{\Delta t^2}{2}f^{(2)}\left(t_0\right)+\frac{\Delta t^3}{6}f^{(3)}\left(t_0\right)+\frac{\Delta t^4}{4!}f^{(4)}\left(t_0\right)+\frac{\Delta t^5}{5!}f^{(5)}\left(t_0\right)+O\left(\Delta t^6\right)$

(B) $f\left(t_0-\Delta t\right)=f\left(t_0\right)-\Delta t f^{(1)}\left(t_0\right)+\frac{\Delta t^2}{2}f^{(2)}\left(t_0\right)-\frac{\Delta t^3}{6}f^{(3)}\left(t_0\right)+\frac{\Delta t^4}{4!}f^{(4)}\left(t_0\right)-\frac{\Delta t^5}{5!}f^{(5)}\left(t_0\right)+O\left(\Delta t^6\right)$

Discrétisation dérivée première

$$f^{(1)}\left(t_0\right)=\frac{f\left(t_0\right)-f\left(t_0-\Delta t\right)+O\left(\Delta t^2\right)}{\Delta t}=\frac{f\left(t_0\right)-f\left(t_0-\Delta t\right)}{\Delta t}+O\left(\Delta t\right)$$

Différenciation décentrée avancée

(B) $$f^{(1)}\left(t_0\right)=\frac{f\left(t_0\right)-f\left(t_0-\Delta t\right)+O\left(\Delta t^2\right)}{\Delta t}=\frac{f\left(t_0\right)-f\left(t_0-\Delta t\right)}{\Delta t}+O\left(\Delta t\right)$$

Différenciation décentrée retardée

(A)-(B) $$f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0-\Delta t\right)=2\Delta t f^{(1)}\left(t_0\right)+O\left(\Delta t^3\right)$$

$$f^{(1)}\left(t_0\right)=\frac{f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0-\Delta t\right)}{2\Delta t}+O\left(\Delta t^2\right)$$

Différenciation centrée

Formule de Taylor

(A) $$f(t_0+\Delta t)=f(t_0)+\Delta t f^{(1)}(t_0)+\frac{\Delta t^2}{2}f^{(2)}(t_0)+\frac{\Delta t^3}{6}f^{(3)}(t_0)+\frac{\Delta t^4}{4!}f^{(4)}(t_0)+\frac{\Delta t^5}{5!}f^{(5)}(t_0)+O\left(\Delta t^6\right)$$

(B) $$f(t_0-\Delta t)=f(t_0)-\Delta t f^{(1)}(t_0)+\frac{\Delta t^2}{2}f^{(2)}(t_0)-\frac{\Delta t^3}{6}f^{(3)}(t_0)+\frac{\Delta t^4}{4!}f^{(4)}(t_0)-\frac{\Delta t^5}{5!}f^{(5)}(t_0)+O\left(\Delta t^6\right)$$

Discrétisation dérivée seconde

(A)+(B) $$f(t_0+\Delta t)+f(t_0-\Delta t)=2f(t_0)+\frac{2\Delta t^2}{2}f^{(2)}(t_0)+2\frac{\Delta t^4}{4!}f^{(4)}(t_0)+\dots$$

$$f^{(2)}(t_0)=\frac{f(t_0+\Delta t)-2f(t_0)+f(t_0-\Delta t)+O\left(\Delta t^4\right)}{\Delta t^2}$$

$$=\frac{f(t_0+\Delta t)-2f(t_0)+f(t_0-\Delta t)}{\Delta t^2}+O\left(\Delta t^2\right)$$

Méthode des différences finies: E.D.P.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Équation de d'Alembert 1D

(Équation des ondes 1D)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} - \frac{u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{c^2\Delta t^2} = 0$$

$$\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} - \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n} + u_j^{n-1}}{c^2\Delta t^2} = 0$$

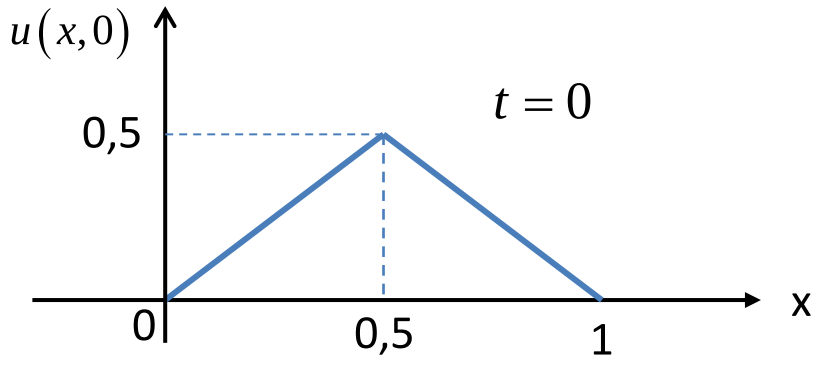
$$u_j^{n+1} = 2u_j^{n} - u_j^{n-1} + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left[u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}\right]$$

$$u_j^{n+1} = 2u_j^{n}(1-s) - u_j^{n-1} + s\left[u_{j+1}^{n} + u_{j-1}^{n}\right] \qquad s = \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}$$

Schéma numérique explicite

Méthode des différences finies

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0.5 \\ 1-x & \text{si } x > 0.5 \end{cases} \end{cases}$$



$$\Delta x = 0{,}1 \qquad u(x,0) = u^0 = \begin{array}{ccccccccccc} [0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 1] \\ u_0^0 & u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_4^0 & u_5^0 & u_6^0 & u_7^0 & u_8^0 & u_9^0 & u_{10}^0 \end{array}$$

$$u_0^i = u_{10}^i = 0$$

$$\Delta t = 0{,}1 \quad c = 1 \quad s = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = 1 \qquad u_j^{n+1} = 2u_j^n(1-s) - u_j^{n-1} + s\left[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right]$$

$$u_1^1 = 2u_1^0(1-s) - u_1^{-1} + s\left[u_2^0 + u_0^0\right] = -u_1^{-1} + u_2^0 = -u_1^0 + u_2^0 = 0{,}1$$

$$u_2^1 = 2u_2^0(1-s) - u_2^{-1} + s\left[u_3^0 + u_1^0\right] = -u_2^{-1} + u_3^0 = -u_2^0 + u_3^0 = 0{,}1$$

$$\vdots$$