EXERCICE 1: POLYNÔME D'INTERPOLATION

Soit T_1 le nuage de points :

i	0	1	2
x_i	5	-7	0
y_i	1	-13	-221

3 pts → jusqu'à degré 2

1. Calculer le polynôme d'interpolation $p_2(x) = ax^2+bx+c$ en utilisant les conditions d'interpolation : $p_2(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, 2$.
2. Calculer la fonction p_2 en $x = 2$.
3. Tracer la courbe représentant la fonction $p_2(x)$.

EXERCICE 2: POLYNÔMES ET INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soit T_2 le nuage de points :

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$y_i = f(x_i)$	$-5/2$	0	1	0	0

1. Calculer les polynômes de base de Lagrange $L_0(x)$, $L_2(x)$ associés aux points x_0, x_2.
2. Calculer les polynômes $L_j(x)$ en $\{x_i\}_{i=0,\dots,4}$
3. Tracer les courbes représentant les fonctions $L_0(x)$ et $L_2(x)$.
4. Calculer le polynôme d'interpolation $p_4^L(x)$.

EXERCICE 3: UNICITÉ DU POLYNÔME D'INTERPOLATION

On considère le nuage de points T_1 de l'exercice 1.

1. Calculer le polynôme d'interpolation $p_2^L(x)$ en utilisant les polynômes de Lagrange.
2. Calculer le polynôme d'interpolation de degré 0 ($p_0^N(x)$) qui interpole le premier point du nuage, puis le polynôme de degré 1 ($p_1^N(x)$), . . . en utilisant la forme de Newton.
3. Calculer les polynômes d'interpolation $p_2^L(x)$ et $p_2^N(x)$ en $x = 2$. Comparer les résultats avec le résultat de l'exercice 1 (question 2).
4. Démontrer l'unicité du polynôme d'interpolation.

EXERCICE 4: DIFFÉRENCES DIVISÉES ET ERREUR D'INTERPOLATION

Soit T_3 le nuage de points :

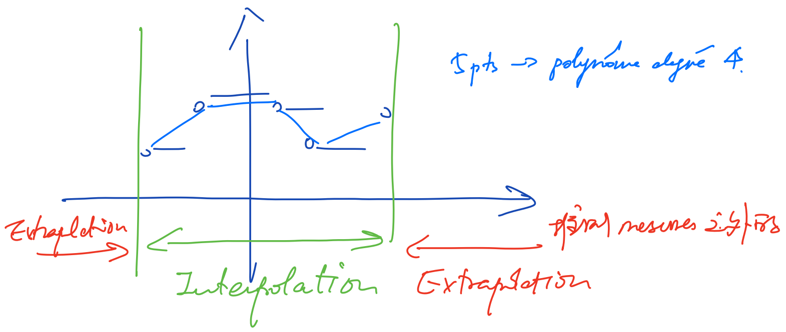
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$y_i = f(x_i)$	0	0.2042	-0.2189	0.1676	-0.1076	0.0603	-0.0292	0.0115	-0.0027	-0.0009

1. Calculer les polynômes d'interpolation $p_3(x)$ et $p_9(x)$ en utilisant les différences divisées.
2. Trouver l'expression de l'erreur d'interpolation d'ordre n en x : $e_n = f(x) - p_n(x)$.
3. Soit $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-0.1x}$. Calculer l'erreur d'ordre 3 en $x = 25$.
4. (facultatif) Trouver une majoration de l'erreur d'interpolation d'ordre 3 $e_3(x)$ pour $x \in [0; 10]$ en utilisant la formule donnée en cours.

EXERCICE 5: INTERPOLATION D'HERMITE

Soit T_4 le nuage de points :

i	0	1	2	3	4
x_i	0	2.5	5	7.5	10
$f(x_i)$	0	1.4183	-2.0029	2.5998	-8.3907
$f'(x_i)$	1	-2.2973	5.0783	-6.6884	4.6011



5pts → polynôme degré 4.

Exo 1.

1. $$\begin{cases} P(0) = a\,0^2 + b0 + c = \quad c = -221 \\ P(5) = 25a + 5b + c = 1 \\ P(-7) = 49a + 7b + c = -13 \end{cases}$$

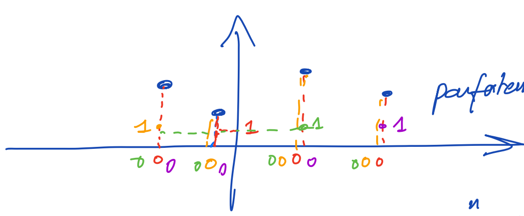
$$\begin{cases} 25a + 5b = 222 \\ 49a - 7b = 208 \\ c = -221 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{225}{5} - 5a \\ 49a + 35a - \frac{222\times 7}{5} = 208 \\ c = -221 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{208\times 5 + 222\times 7}{5\times 84} = 6{,}18 \\ b = \frac{212}{5} - 5a = 13{,}52 \\ c = -221 \end{cases}$$

D'où $P(x) = 6{,}18\cdot x^2 + 13{,}52x - 221$

un nouveau pt qui arrive → recommencer les calculs !

Exo2.



parfaitement interpoler les pts.

Σ des 4.

$$L_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Garanti que $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$

Garanti que $L_i(x_i) = 1$

$$L_1 = \cancel{(x-x} \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

1)

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$y_i = f(x_i)$	$-5/2$	0	1	0	0

5 mesures

L. polynôme
garder sous la forme factorisée.
ne pas développer

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq 0}^{n} (x-x_j)}{\prod_{j=0, j\neq 0}^{n} (x_0-x_j)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

i

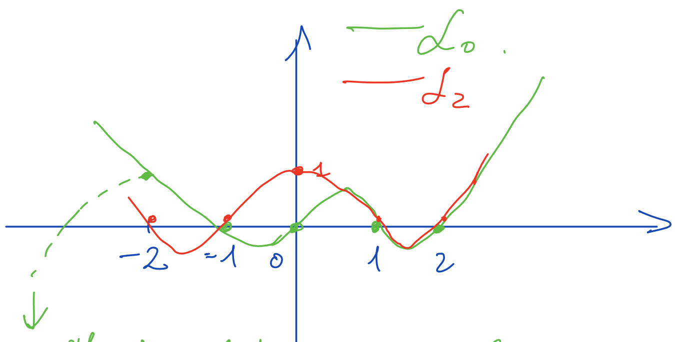
$$= \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2)(-2-1)(-2-2)} = \frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{24}.$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{4}$$

2). $\mathcal{L}_i(x_j) = \delta_{ij}$

$$\mathcal{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3)



pas possible sinon + 1 pt (zéro) donc degré 5.

4) $P_4^L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x) = \sum_{i=0}^{4} y_i \mathcal{L}_i(x) = y_0\mathcal{L}_0(x) + y_2\mathcal{L}_2(x) + 0\ldots$

$$= -\frac{5}{2}\mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_2(x)$$

$y_0 \mathcal{L}_0 \to$ interpole parfaitement le 1er pt.
$y_2 \mathcal{L}_2 \to$ - - - - - - le 3e pt.

✓.

mais si + 1 pt, recommencer.
↳ un polynôme de plus à déterminer

Exo 3.

Unicité ? 2 méthodes

4.) Soient p et q 2 polynômes de degré n.

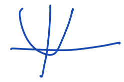
interpolant le nuage de points

$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_n, y_n)\}$

$p(x_i) = y_i \quad \forall i \in [0; n]$

$q(x_i) = y_i \quad \forall i \in [0, n]$.

$(p-q)(x_i) = 0 \quad \forall i \in [0, n]$



3 fois par 0 ? X

Un polynome de degré n avec $n+1$ racines est le polynôme nul $\Rightarrow p = q$

$\rightarrow$ unicité polynôme d'interpolation

Exo 4.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$y_i = f(x_i)$	0	0.2042	−0.2189	0.1676	−0.1076	0.0603	−0.0292	0.0115	−0.0027	−0.0009

$P_n(x) = P_{n-1}(x) + ?$

$$P_n(x) = \underbrace{P_{n-1}(x)}_{} + a_n \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}_{\text{garanti que } P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) = y_i}$$

$\downarrow$

polynôme d'interpolation de degré $n-1$ en $\{(x_0, y_0)(x_1, y_1), \dots (x_{n-1}, y_{n-1})\}$

$P_n(x_n) = y_n$ si $\dots (x - x_n)$, $P_n(x_n) = 0$ X

a_n sur la diagonale.

i	x_i	y_i		
0	5	0 (a_0)		
1	10	0,2042	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0 x_1] = 0{,}04084$ (a_1)	
2	15	0,2189	$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -0{,}08462$	$f[x_0, x_1 x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -0{,}012546$ (a_2)

3	20
4	25
5	30
6	35
7	40
8	45
9.	50

matrice triangulaire inférieure.

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$= \frac{0{,}016192 - (-0{,}012546)}{20-5}$$

$$= 1{,}9158 \cdot 10^{-3}$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 0{,}04084$

$a_2 = -0{,}012546$

$a_3 = 1{,}9158 \cdot 10^{-3}$

$a_4 = -1{,}9388 \cdot 10^{-4}$

$a_5 = 1{,}4625 \cdot 10^{-5}$

$a_6 = -8{,}7695 \cdot 10^{-7}$

$a_7 = 4{,}3531 \cdot 10^{-8}$

$a_8 = -1{,}8393 \cdot 10^{-9}$

$a_9 = 6{,}7502 \cdot 10^{-11}$

$$P_3^N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

$$P_9^N(x) = P_3^N(x) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \cdots a_9 \prod_{i=0}^{8}(x-x_i)$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \cdots x_{j-1}, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

Erreur d'interpolation

$$e(x) = f(x) - P_n^N(x)$$

On considère P_{n+1}^N qui interpole f en $\{x_0, x_1, \ldots x_n, x\}$

On a alors $P_{n+1}^N(x) = f(x)$ $\quad$ $n+1$ correspond à x ajouté.

$$e(x) = f(x) - \cancel{P_n^N(x)} \; P_{n+1}^N(x) - P_n^N(x)$$

$$e(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$\prod$ $(x-x_{n+1})$

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{-0{,}1x}$$

erreur d'ordre 3 en $x = 25$:

$$e_3(25) = f[x_0, x_1, x_2, x_3, 25] \prod_{i=0}^{3}(x - x_i)$$

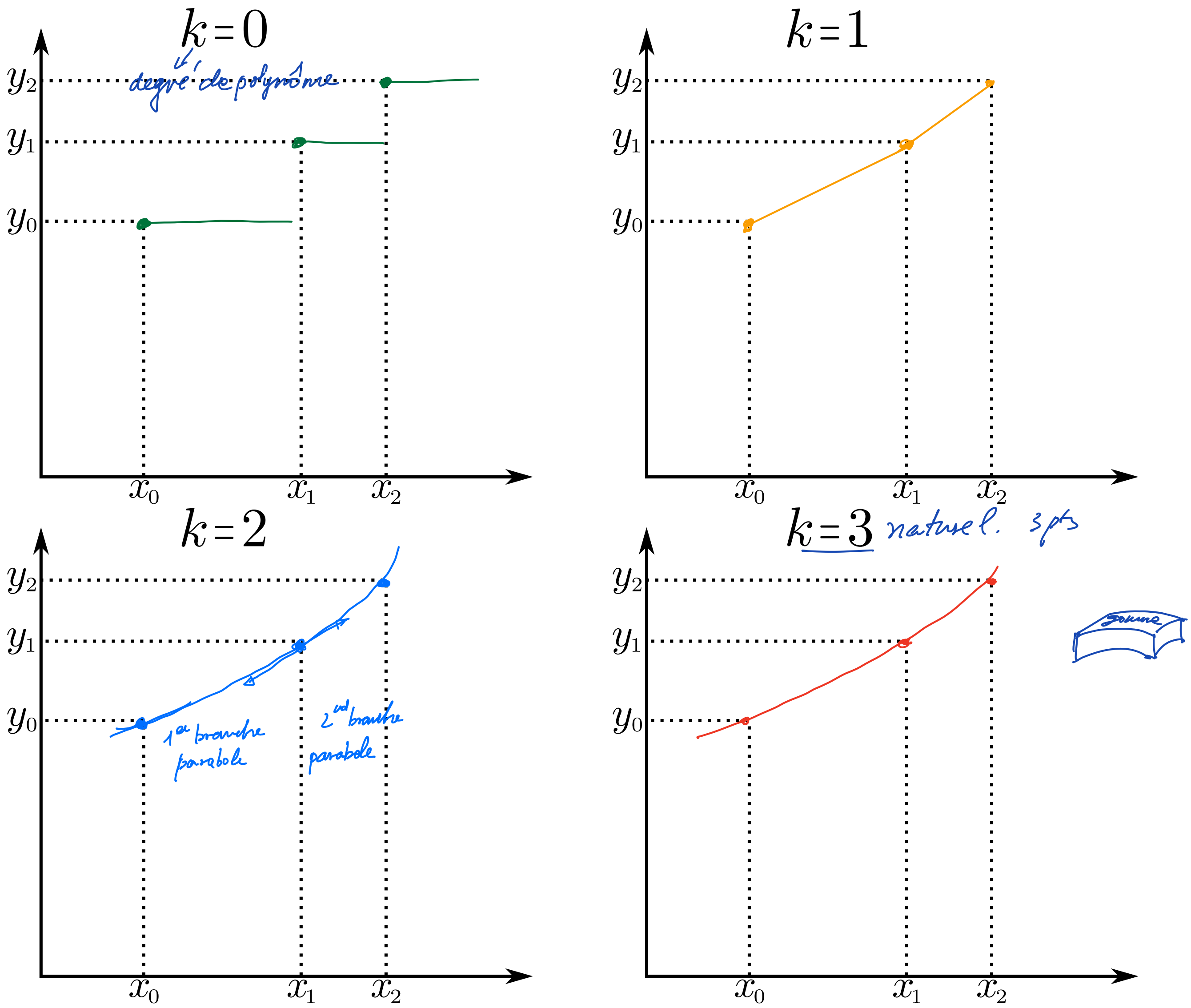
$$= a_4 \prod_{i=0}^{3}(25 - x_i)$$

$$= 2{,}9082$$

1. Calculer le polynôme d'interpolation de Hermite pour les points x_1, x_2 (noté p_1^H et de degré ≤ 3) en utilisant les conditions : $p_1^H(x_i) = f(x_i)$, $p_1'^H(x_i) = f'(x_i)$, $i = 1, 2$.

Exercice 6: Spline

1. Tracer les splines d'ordre $k = 0, 1, 2, 3$ relatifs aux nœuds des figures suivantes :



Spline de degré n est $\mathcal{C}^{n-1}$

– $k = 0$ → discontinue

– $k = 1$ → $\mathcal{C}^0$ ⇒ continu

$C^0 \Leftarrow \lim\limits_{a\to 0} f(x-a) = \lim\limits_{a\to 0} f(x+a)$

– $k = 2$ → $\mathcal{C}^1$ ⇒ dérivée continue

$\lim\limits_{a\to 0} f'(x-a) = \lim\limits_{a\to 0} f'(x+a)$

– $k = 3$ ⇒ C^2 ⇒ dérivée 2nd continue

encore plus lisse