Programmation et Méthodes Numériques

Intégration numérique

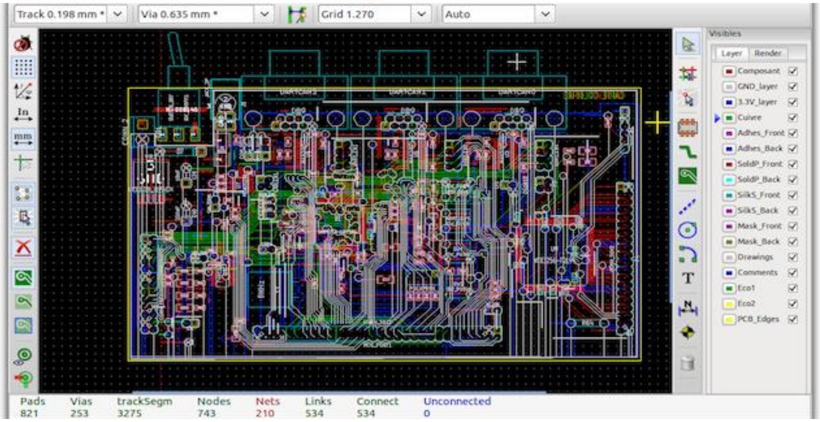
M. Casaletti (massimiliano.casaletti@upmc.fr)

Laboratoire d'Electronique et Electromagnétisme (L2E)
Université Pierre et Marie Curie

Électrostatique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')\,dV'$$

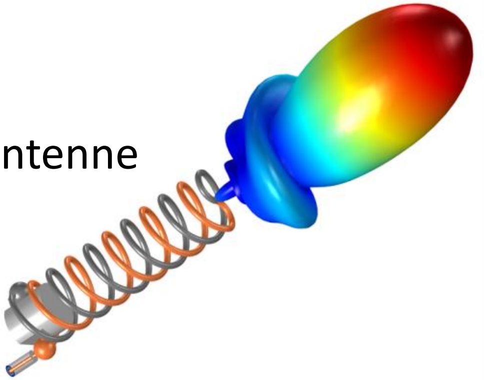
Circuits électriques linéaires



$$V(t) = V_{in}(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\zeta) V_{in}(\zeta)\, d\zeta$$

Électrodynamique

Antenne



$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \mathrm{Re}\left\{ e^{j\omega t} \iiint_V \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')\,dV' \right\}$$

Systèmes linéaires

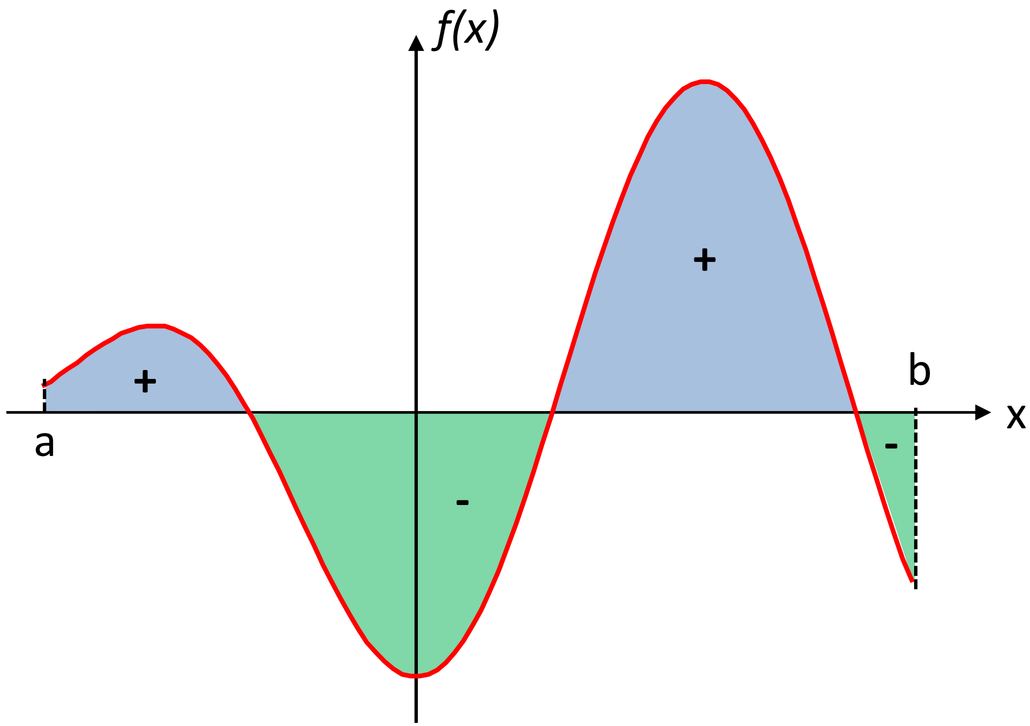
$$O(t) = I(t) \otimes G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\zeta) I(\zeta)\, d\zeta$$

Fonction de Green
(Réponse impulsionnelle)

Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Méthodes classiques
    - Méthode du rectangle (n=0)
    - Méthode du point milieu (n=0)
    - Méthode du trapèze (n=1)
    - Méthode de Simpson (n=2)
  - Méthodes classiques composées
  - Limites des méthodes classiques
  - Méthodes de quadrature de Gauss
- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

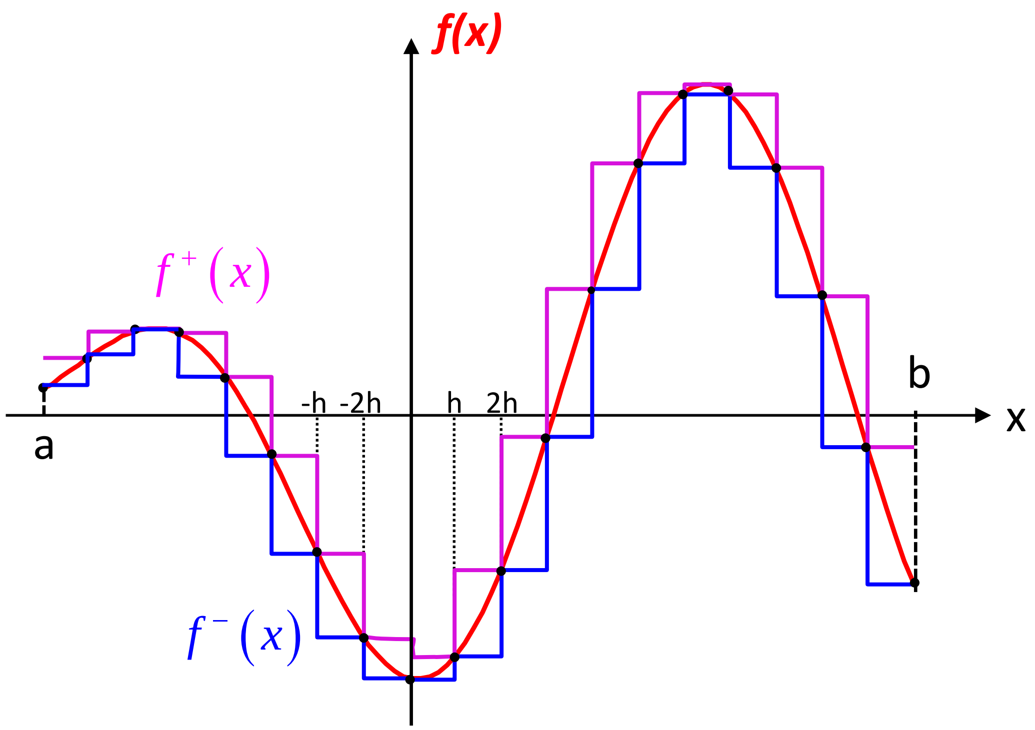


Nous devons **utiliser des méthodes numériques** :

- Pour évaluer les intégrales définies des fonctions n'ayant **pas de primitives**
- Quand l'expression de l'intégrande n'est pas connue (= quand **seulement quelques points de la fonction sont connus**, comme dans le cas d'une mesure)

Rappels de mathématique: intégrale de Riemann

- Echantillonner la fonction f avec un pas uniforme h
- Sur chaque intervalle, interpoler la fonction f avec un polynôme d'ordre 0 (attention, 2 solutions sont possibles: courbe rose ou courbe bleue)



- Calculer la surface entre la fonction interpolée et l'axe x

$$\int_a^b f^-(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \min_{x\in[a+(n-1)h,\,a+nh]} f(x)\cdot h$$

$$\int_a^b f^+(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \max_{x\in[a+(n-1)h,\,a+nh]} f(x)\cdot h$$

- Si $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b f^-(x)\,dx = \lim\limits_{h\to 0}\int_a^b f^+(x)\,dx = I \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = I$

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \boxed{r(x)}\,\boxed{w(x)}\,dx$$

  régulière **Intégrable et** $w(x) > 0,\ x \in [a,b]$

- **Interpolation** de la fonction r(x) en n+1 points $\{x_0,\dots,x_n\},\quad x_i \in [c,d]$

Polynôme d'interpolation

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\,\boxed{l_i(x)}$$

Fonction de Lagrange

Expression de l'erreur

$$e_n(x) = r[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\,\boxed{\psi_n(x)}$$

Fonction de Newton

$$r(x) = p_n(x) + e_n(x) = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\,l_i(x) + r[x_0,\dots,x_n,x]\prod_{j=0}^{n}(x - x_i)$$

Idée de base

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\underbrace{\int_a^b l_i(x)\,w(x)\,dx}_{W_i} + \int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,\psi_n(x)\,w(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} W_i\, r(x_i)}_{I_n} + \underbrace{\int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,\psi_n(x)\,w(x)\,dx}_{E_n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_n + E_n$$

- **Valeur approchée de l'intégrale**

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} W_i\, r(x_i) \qquad W_i = \int_a^b l_i(x)\,w(x)\,dx$$

- **Erreur d'intégration**

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,\psi_n(x)\,w(x)\,dx$$

Erreur d'intégration

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\psi_n(x)w(x)dx$$

- **Théorème de la moyenne**: Soient $a,b \in \Re$ avec $a<b$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\Re$. Alors, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que:

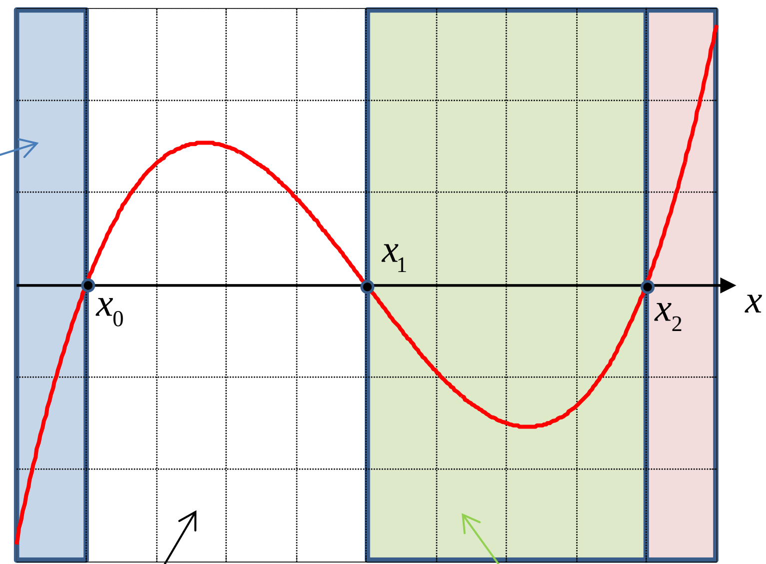
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

- **Second théorème de la moyenne**: Soient $a,b \in \Re$ avec $a<b$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\Re$, **g une fonction de signe constant** sur $[a,b]$ et intégrable sur $[a,b]$. Alors, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Base de Newton

$$\psi_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$



$x < x_0 < x_1 < x_2$

$$\begin{cases} (x - x_0) < 0 \\ (x - x_1) < 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

$\psi_2(x) < 0$, pour $x < x_0$

$x_0 < x < x_1 < x_2$

$$\begin{cases} (x - x_0) > 0 \\ (x - x_1) < 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

$x_0 < x_1 < x < x_2$

$$\begin{cases} (x - x_0) > 0 \\ (x - x_1) > 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

$x_0 < x_1 < x_2 < x$

$$\begin{cases} (x - x_0) > 0 \\ (x - x_1) > 0 \\ (x - x_2) > 0 \end{cases}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

3 changements de signe

$$\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

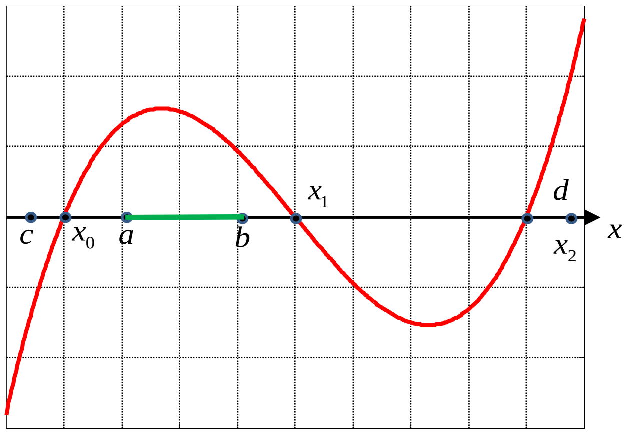
n changements de signe

Polynôme de degré n

Erreur d'intégration

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \psi_n(x) w(x)\, dx$$

- Si $\psi_n(x)$ est de signe constant sur [*a*,*b*]



$$E_n = \int_a^b \underbrace{r[x_0, x_1, \dots, x_n, x]}_{f(x)} \underbrace{\psi_n(x) w(x)}_{g(x)}\, dx$$

Second théorème de la moyenne

$$E_n = r[x_0, x_1, \dots, x_n, \gamma] \int_a^b \psi_n(x) w(x)\, dx \qquad \gamma \in [a,b]$$

- Si $r \in C^{n+1}[c,d], \quad \xi_x \in [c,d] \quad r[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

$$\boxed{E_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \int_a^b \psi_n(x) w(x)\, dx}$$

- Représentation d’un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- **Intégration numérique**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - **Méthodes classiques**
    - **Méthode du rectangle (n=0)**
    - **Méthode du point milieu (n=0)**
    - **Méthode du trapèze (n=1)**
    - **Méthode de Simpson (n=2)**
  - Méthodes classiques composées
  - Limites des méthodes classiques
  - Méthodes de quadrature de Gauss
- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

- $w(x) = 1 \Rightarrow r(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_n + E_n$$

$$I_n = \int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i) \qquad W_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$$

$$E_n = \int_a^b f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,\psi_n(x)\,dx$$

- $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ équirépartis $x_n = x_0 + hn$

⇓

Méthodes classiques

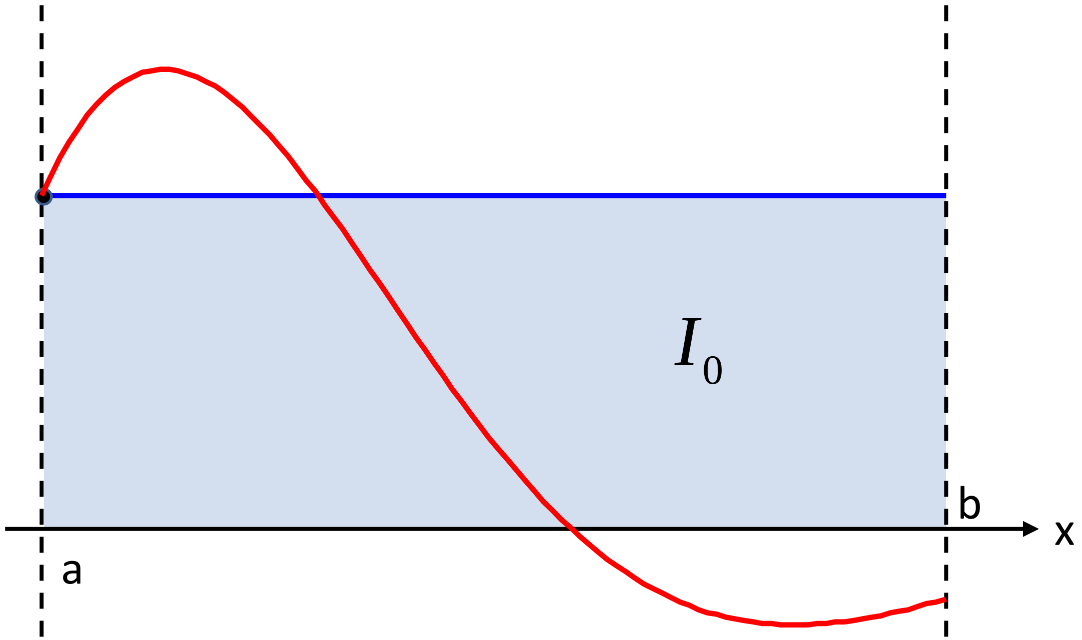
Méthode du rectangle (n=0)

- $n = 0,\ x_0 = a \qquad P_0(x) = f(x_0) = f(a)$

$$I_0 = \int_a^b P_0(x)\,dx = f(a)\int_a^b dx = f(a)(b-a)$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_0 = f(x_0)\cdot W_0 \qquad x_0 = a \quad W_0 = (b-a)$$



Méthode du rectangle (n=0) erreur d'intégration

- $n=0,\ x_0=a \qquad P_0(x)=f(x_0)=f(a)$

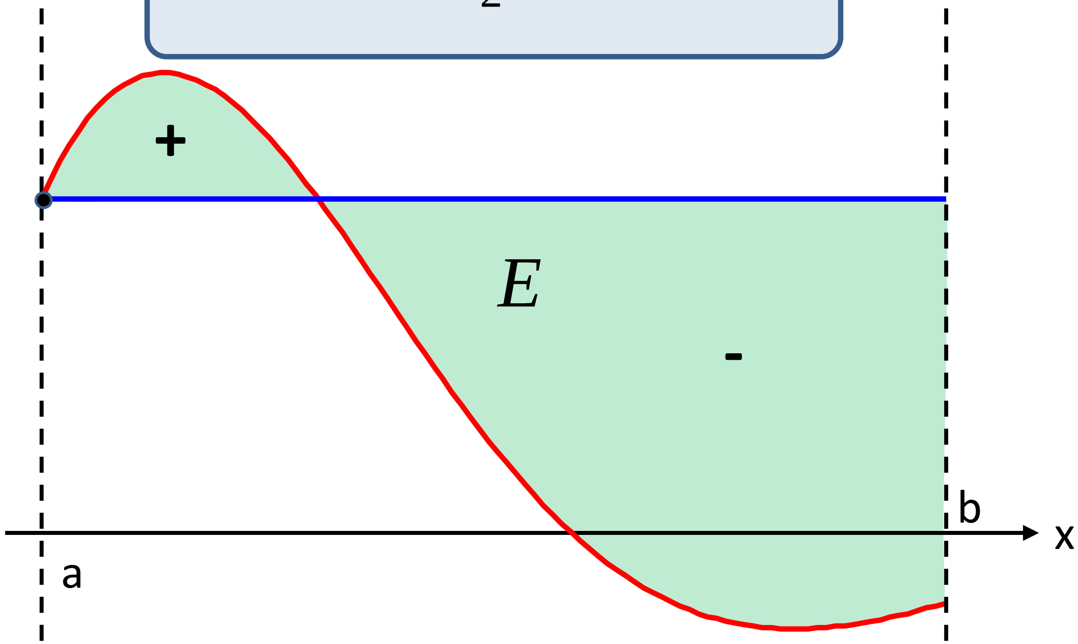
$$E_0=\int_a^b f[a,x]\psi_1(x)dx=\int_a^b \underbrace{f[a,x]}_{f(x)}\underbrace{(x-a)}_{g(x)}dx=f[a,\gamma]\int_a^b(x-a)dx=f^{(1)}(\xi_x)\int_a^b(x-a)dx$$

Second théorème de la moyenne

$$=f^{(1)}(\xi_x)\left[\frac{b^2-a^2}{2}-a(b-a)\right]=f^{(1)}(\xi_x)\frac{(b-a)^2}{2}$$

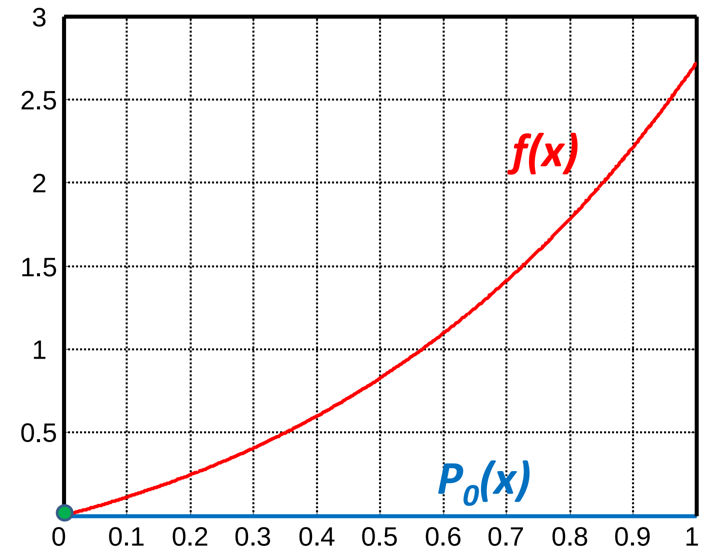
Erreur d'intégration

$$E=f^{(1)}(\xi_x)\frac{(b-a)^2}{2},\quad \xi_x\in[a,b]$$



Exemple

- Calculer l'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$



Valeur approchée de l'intégrale

$$I_0 = f(a)(b-a) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$
$$\leq e \quad x \in [0,1]$$

Erreur d'intégration

$$E_0 = f^{(1)}(\xi_x)\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{e^{\xi_x}(1+\xi_x)}{2} \leq e = 2.7183$$

$$E_0 = \int_0^1 xe^x dx - I_0 = 1 - 0 = 1$$

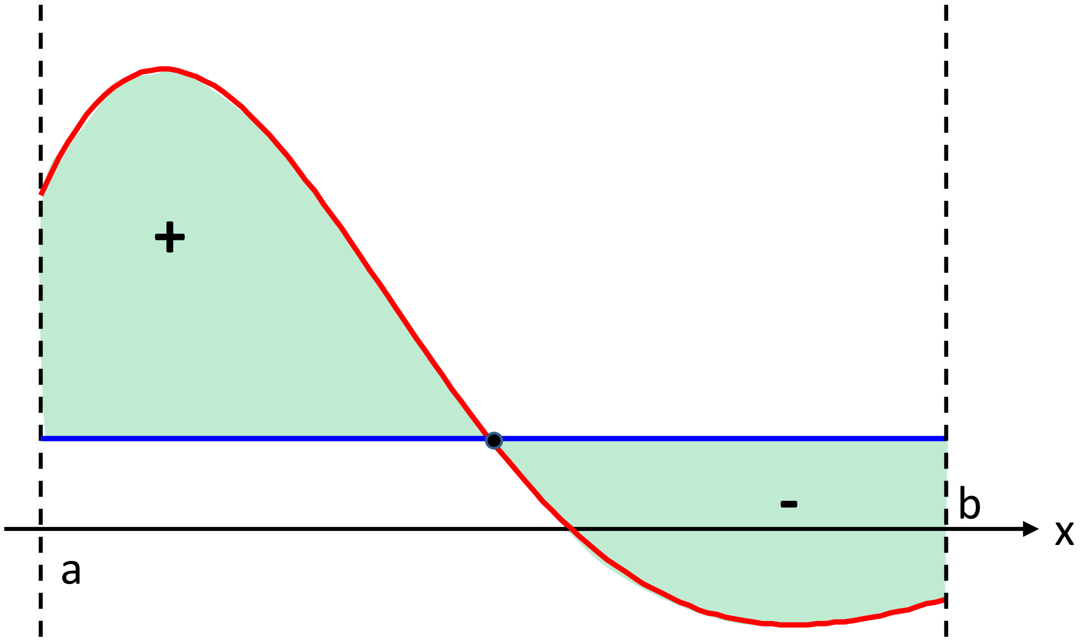
Méthode du point milieu (n=0)

- $n = 0,\ x_0 = \dfrac{a+b}{2} \qquad P_0 = f(x_0) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f(m)$

$$I_0 = \int_a^b f(m)\,dx = f(m)\int_a^b dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \qquad E_0 = \int_a^b f[m,x]\psi_1(x)\,dx = \int_a^b f[m,x](x-m)\,dx$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_0 = f(x_0)\cdot W_0 \qquad x_0 = \frac{a+b}{2} \qquad W_0 = (b-a)$$



Méthode du point milieu (n=0)

$$E_0 = \int_a^b f[m,x]\psi_1(x)\,dx$$

$$\psi_1(x) = (x-m)$$ **change de signe sur [*a*,*b*]**

$$f[m,x] = f[m,x,x_1](x-x_1) + f[m,x_1]$$

$$E_0 = \int_a^b f[m,x,x_1]\psi_1(x)(x-x_1)\,dx - f[m,x_1]\int_a^b \psi_1(x)\,dx$$

Si $x_1 = m$

$$\int_a^b f[m,x,x_1]\psi_1(x)(x-m)\,dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{f[m,x,m]}_{f(x)}\underbrace{(x-m)^2}_{g(x)}\,dx$$

Second théorème de la moyenne

$$\int_a^b \psi_1(x)\,dx = \int_a^b (x-m)\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} - m(b-a)$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b+a)}{2}(b-a) = 0$$

$$E_0 = f[m,\gamma,m]\int_a^b (x-m)^2\,dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\left[\frac{b^3-a^3}{3} - 2m\frac{b^2-a^2}{2} + m^2(b-a)\right] = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24}(b-a)^3$$

Erreur d'intégration

$$E_0 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24}(b-a)^3 \qquad \xi \in [a,b]$$

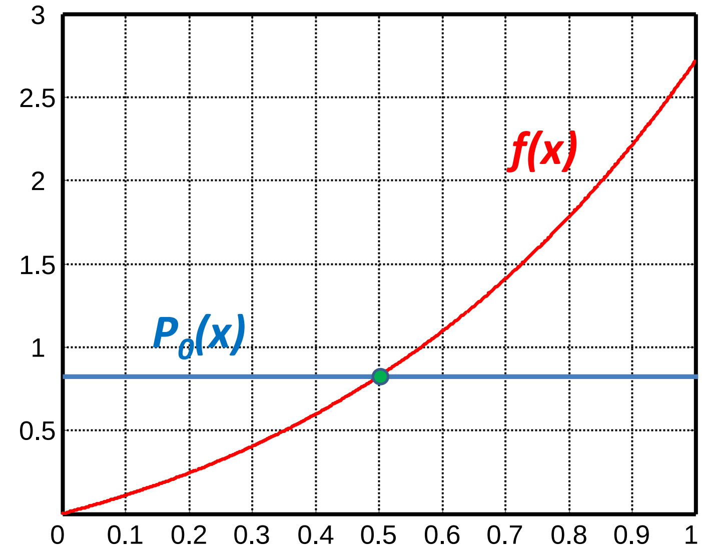
Méthode du point milieu (n=0)

- Calculer l'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_0 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

$$= 0.5e^{0.5} = 0.8244$$



$$f^{(1)}(x) = e^x(1+x)$$

$$f^{(2)}(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x) < 3e \quad x \in [0,1]$$

Erreur d'intégration

$$E_0 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24}(b-a)^3 = \frac{e^{\xi}(2+\xi)}{24} < \frac{3e}{24} = \frac{e}{8} = 0.3398$$

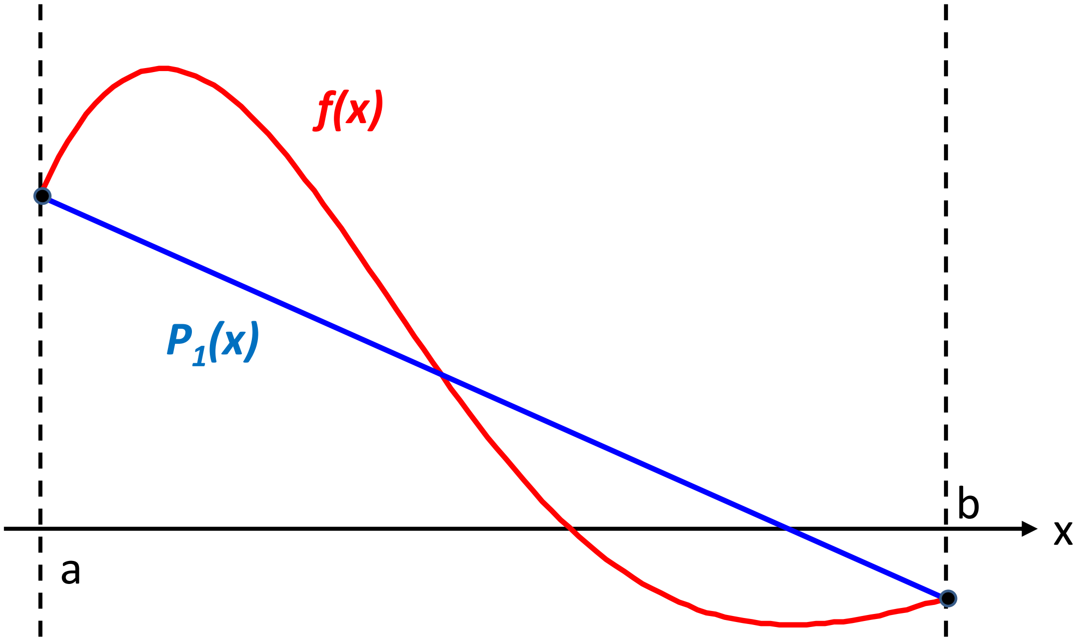
$$E_0 = \int_0^1 xe^x dx - I_0 = 1 - 0.8244 = 0.1756$$

- $n=1$ $\quad P_1(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1]\psi_1(x)$ $\qquad x_0 = a$, $x_1 = b$ $\qquad P_1(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a)$

$$I_1 = \int_a^b P_1(x)\,dx = f(a)\int_a^b dx + \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(f(b)+f(a))}{2}(b-a)$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_1 = \sum_{i=0}^{1} f(x_i)\cdot W_i \qquad x_0 = a \quad x_1 = b \quad W_0 = W_1 = \frac{b-a}{2}$$



Méthode du trapèze (n=1): erreur d'intégration

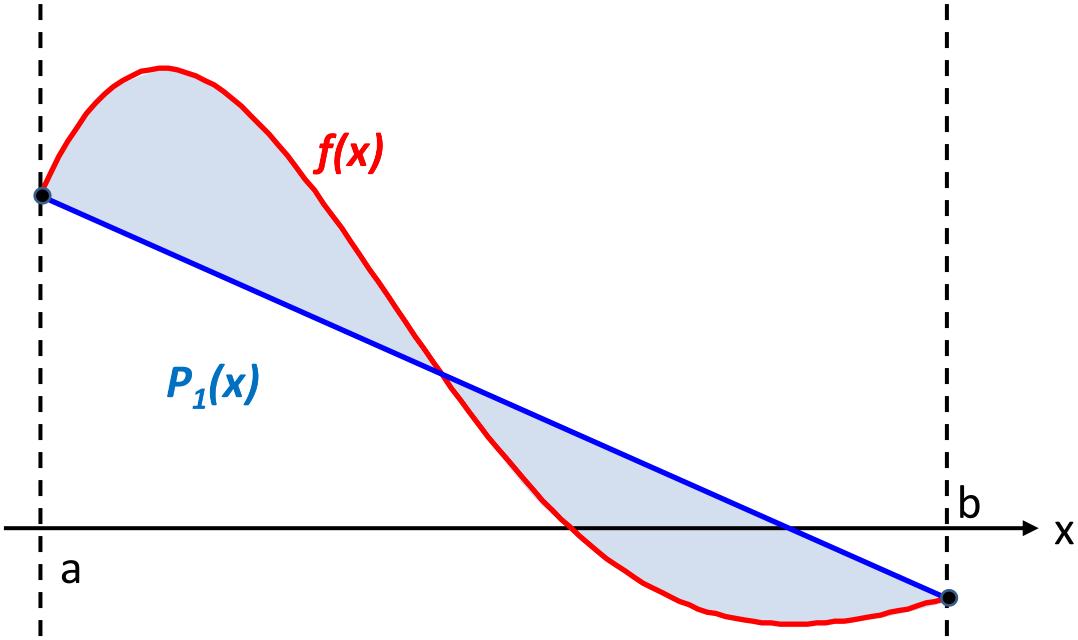
$$E_1 = \int_a^b f[a,b,x]\psi_2(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{f[a,b,x]}_{f(x)}\underbrace{(x-a)(x-b)}_{g(x)}\,dx = f[a,b,\eta]\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

Second théorème de la moyenne

$$= -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}h^3$$

Erreur d'intégration

$$E_1 = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 \qquad \xi \in [a,b]$$



Exemple

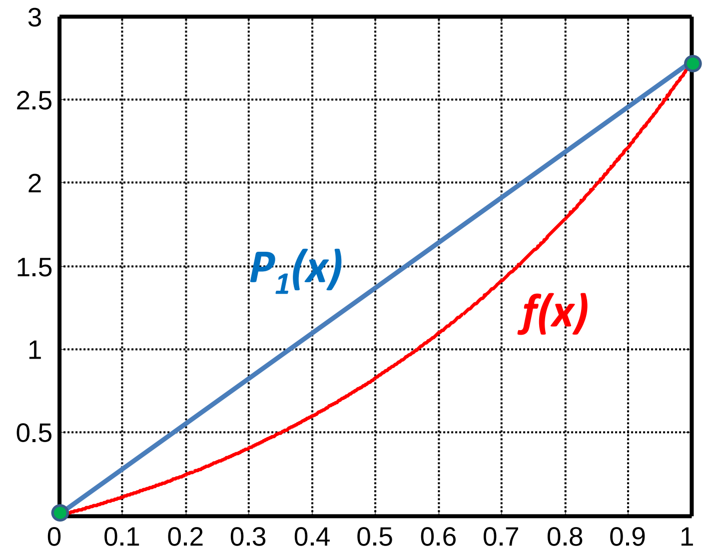
- Calculer l'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_1 = \frac{\left(f(b)+f(a)\right)}{2}(b-a) = \frac{e}{2} = 1.3591$$

$$f^{(1)}(x) = e^x(1+x)$$

$$f^{(2)}(x) = e^x(1+x)+e^x = e^x(2+x) < 3e \quad x\in[0,1]$$



Erreur d'intégration

$$E_1 = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}h^3 = -\frac{e^{\xi}(2+\xi)}{12}h^3 \le -\frac{3e}{12}h^3 = -\frac{e}{4} = -0.6796$$

$$E_1 = 1 - 1.3591 = -0.3591$$

Méthode de Simpson (n=2)

- $n=2$ $\quad P_2(x)=P_1(x)+f[x_0,x_1,x_2]\psi_2(x) \qquad x_0=a \;\; x_1=b \;\; x_2=\dfrac{a+b}{2}$

$$P_2(x)=P_1(x)+f[a,b,m](x-a)(x-b)$$

$$f[a,b,m]=f[a,m,b]=\frac{f[m,b]-f[a,m]}{b-a}=2\frac{f(b)-2f(m)+f(a)}{(b-a)^2}$$

$$I_2=\int_a^b P_2(x)\,dx=I_1+2\frac{f(b)-2f(m)+f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=(b-a)\frac{f(b)+f(a)+4f(m)}{6}$$

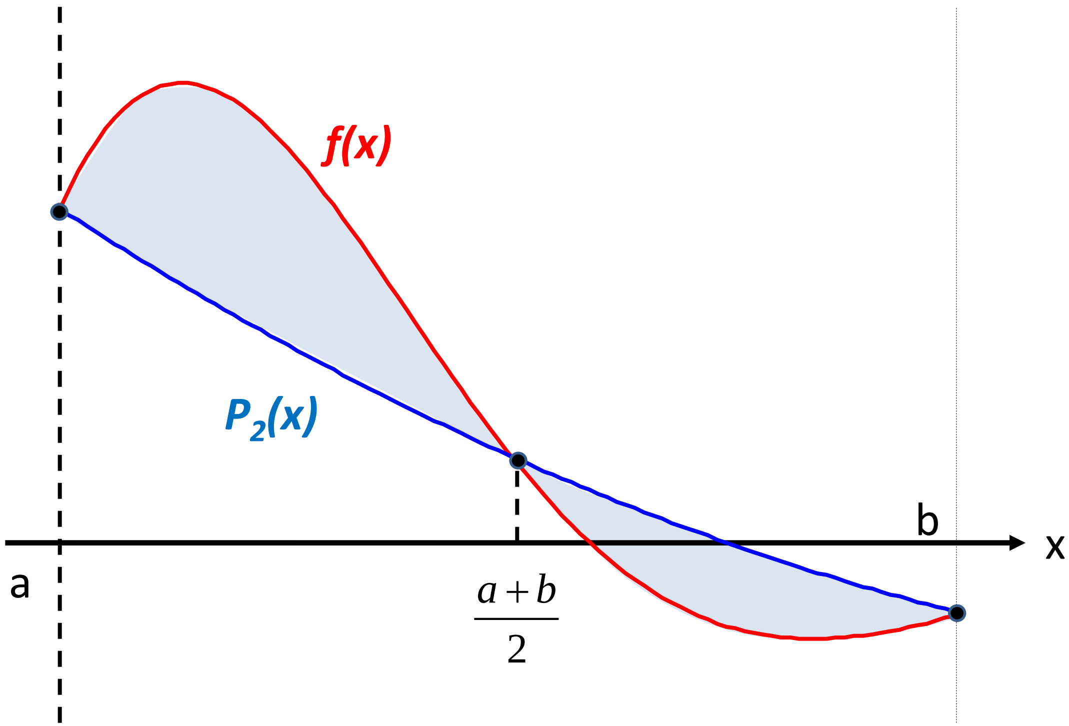
$$W_0=\frac{b-a}{6} \quad W_1=\frac{b-a}{6} \quad W_2=\frac{4(b-a)}{6}$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_2=\sum_{i=0}^{2} f(x_i)\cdot W_i \qquad W_0=W_1=\frac{b-a}{6} \quad W_2=\frac{4(b-a)}{6}$$

$$x_0=a \quad x_1=b \quad x_2=\frac{a+b}{2}$$

Méthode de Simpson (n=2)



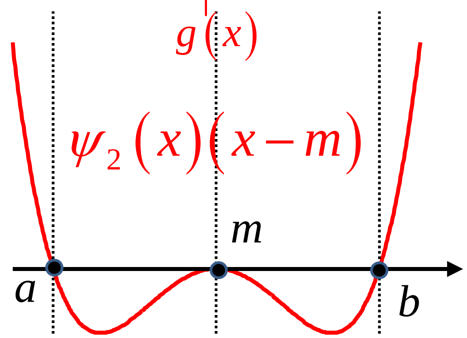
Méthode de Simpson (n=2): erreur d'intégration

$$E_2 = \int_a^b f[a,b,m,x]\psi_2(x)\,dx = \int_a^b f[a,b,m,x](x-a)(x-b)(x-m)\,dx$$

$$f[a,b,m,x] = f[a,b,m,x,x_1](x-x_1) + f[a,b,m,x_1] \qquad x_1 = m$$

$$E_2 = \int_a^b \underbrace{f[a,b,m,x,m]}_{f(x)}\underbrace{(x-m)^2(x-a)(x-b)}_{g(x)}\,dx + f[a,b,m,m]\underbrace{\int_a^b \psi_2(x)\,dx}$$

Second théorème de la moyenne



$$\int_a^b \psi_2(x)\,dx = \int_a^b (x-a)(x-b)(x-m)\,dx = 0$$

$$E_2 = f[a,b,m,x,\eta]\int_a^b (x-m)^2(x-a)(x-b)\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-m)^2(x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^5}{2280}f^{(4)}(\xi)$$

Erreur d'intégration

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{2280}f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

Exemple

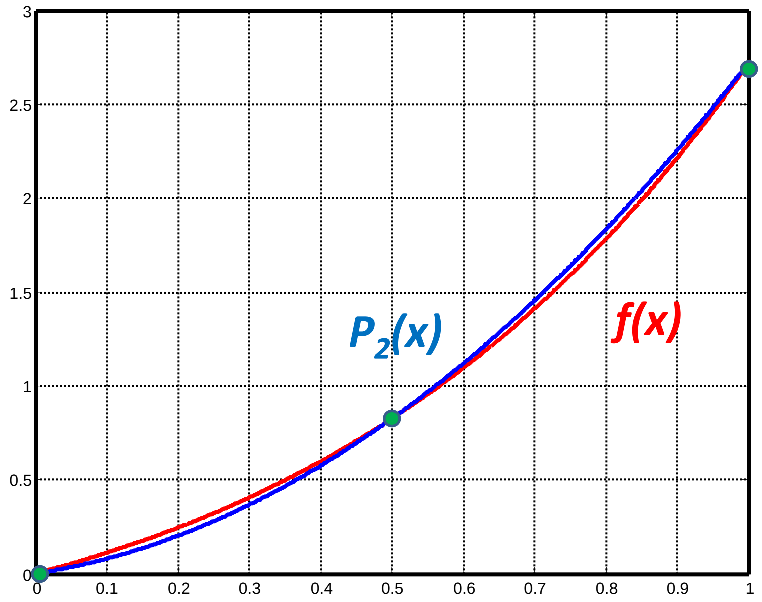
- Calculer l'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_2 = (b-a)\frac{f(b)+f(a)+4f(m)}{6}$$

$$= \frac{e+4\cdot 0.5e^{0.5}}{6} = 1.0026$$

$$f^{(4)}(x) = e^x(4+x) < 4e \quad x\in[0,1]$$



Erreur d'intégration

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{2280} f^{(4)}(\xi) = -\frac{e^{\xi}(4+\xi)}{2280} \le -\frac{5e}{2280} = -0.0060$$

$$E_2 = 1 - 1.0026 = -0.0026$$

Méthodes classiques

Valeur approchée de l'intégrale

$$I_N = \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i\right) \cdot W_i$$

Erreur d'intégration

$$E_n = \frac{f^{(K+1)}\left(\xi_x\right)}{c} h^2, \quad \xi_x \in [a,b], \quad c \in \mathbb{R}$$

Méthode	Ordre (K)	Nombre de points (N)
rectangle	0	1
milieu	1	1
trapèze	1	2
Simpson	3	3

Plan du cours

- Représentation d’un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Méthodes classiques
    - Méthode du rectangle (n=0)
    - Méthode du point milieu (n=0)
    - Méthode du trapèze (n=1)
    - Méthode de Simpson (n=2)
  - Méthodes classiques composées
  - Limites des méthodes classiques
  - Méthodes de quadrature de Gauss
- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

Méthode du rectangle composé

- On découpe [*A*,*B*] en N sous-intervalles à pas constant *h:* $x_i = A + ih \; , \; N = \dfrac{B-A}{h}$

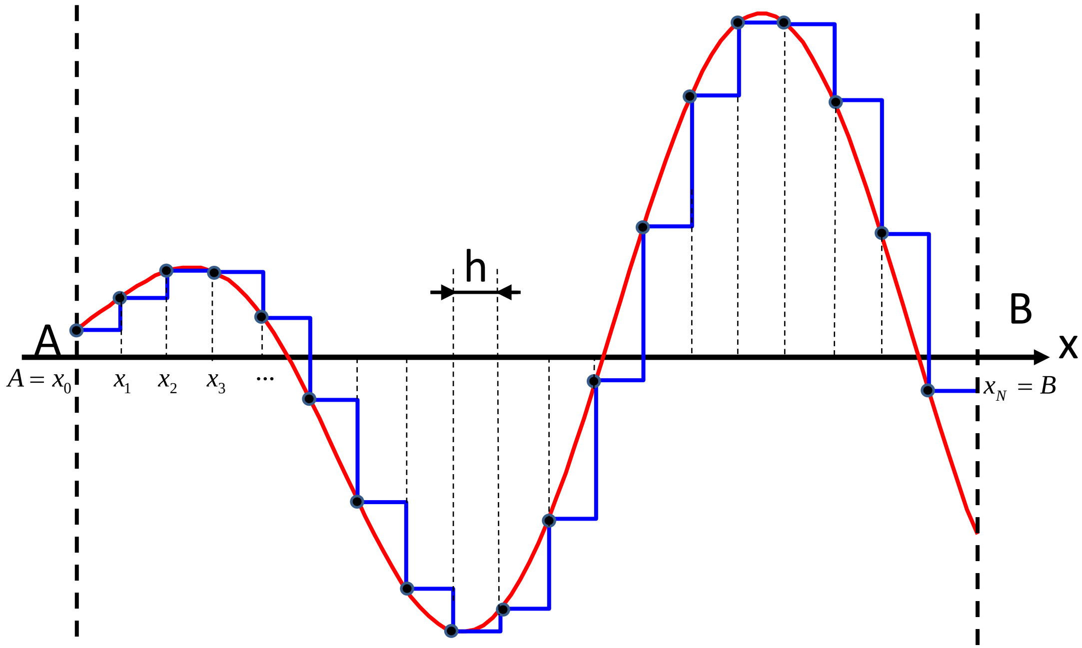
$$I = \int_A^B f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A+i\mathrm{h}}^{A+(i+1)h} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih)\cdot h$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\, w_i \qquad x_i = A + ih \qquad w_i = h$$

Erreur d'intégration

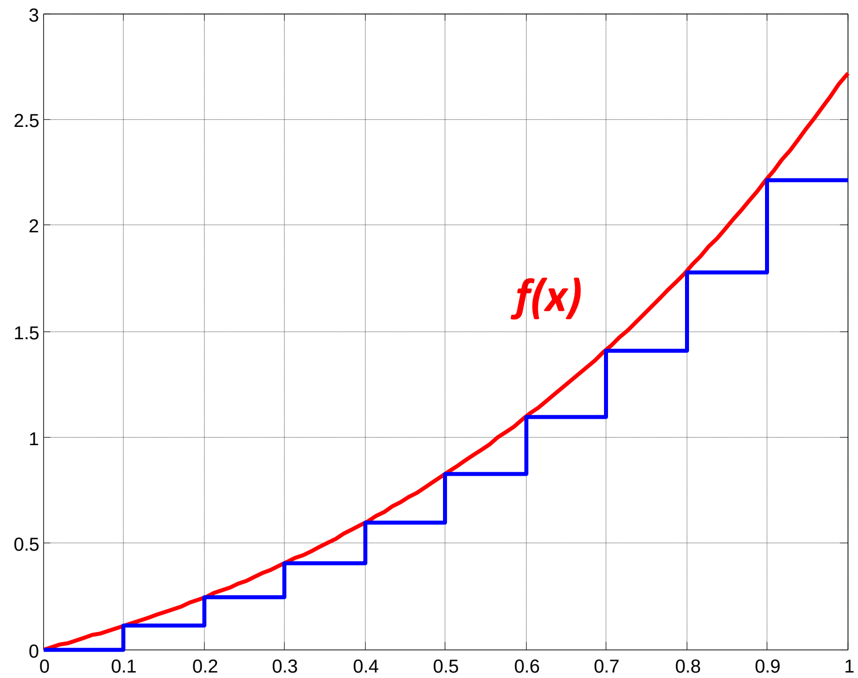
$$E = f^{(1)}(\xi)\frac{h(B-A)}{2}, \quad \xi \in [A,B]$$



Méthode du rectangle composé: exemple

- Calculer l'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$

$$N = 10 \qquad I = \sum_{i=0}^{9} \int_{A+i\,h}^{A+(i+1)h} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{9} f(i \cdot 0.1) \cdot 0.1 = \ 0.8678$$



- On découpe [*A*,*B*] en N sous-intervalles à pas constant *h:* $x_i = A + ih$, $N = \dfrac{B-A}{h}$

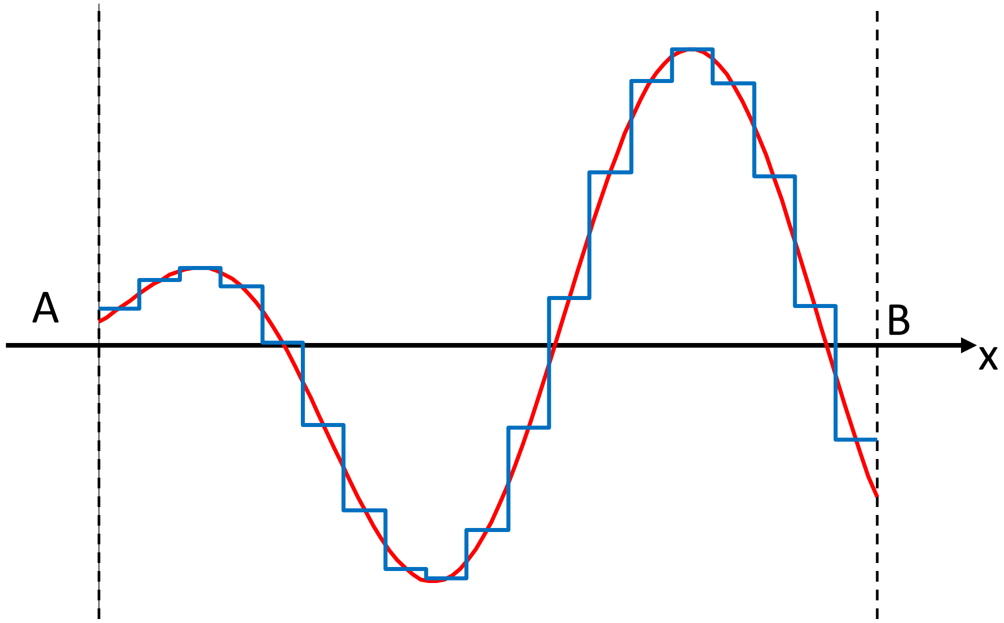
$$I = \int_A^B f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A+i\,h}^{A+(i+1)h} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} f(a+ih+h/2)\cdot h$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,w_i \qquad \begin{aligned} x_i &= A+ih+h/2 \\ w_i &= h \end{aligned}$$

Erreur d'intégration

$$E_0 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24} h^2 (B-A), \quad \xi \in [a,b]$$



Méthode du trapèze composé

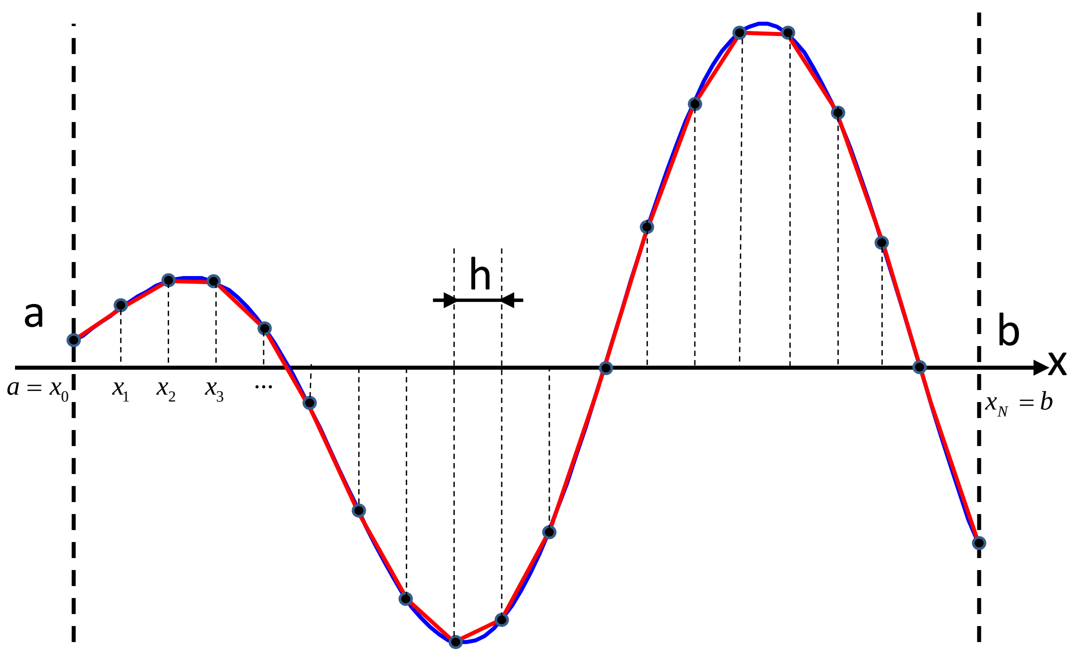
$$I_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A+i\,h}^{A+(i+1)h} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(f(a+ih)+f(a+(i-1)h)\right)}{2} h = \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right] h$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\, w_i \qquad \begin{aligned} x_i &= A + ih \\ w_0 &= w_{N-1} = h/2 \\ w_i &= h \end{aligned}$$

Erreur d'intégration

$$E = f^{(1)}(\xi)\frac{h(B-A)}{2}, \quad \xi \in [A,B]$$



Méthode de Simpson composé

- On découpe [*A*,*B*] en N sous-intervalles à pas constant *h:* $x_i = A + ih\ ,\ N = \dfrac{B-A}{h}$

$$I = \int_A^B f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A+i\,h}^{A+(i+1)h} f(x)\,dx$$

Valeur approchée de l'intégrale

$$I = \frac{h}{6}\left(\begin{array}{l} f(a) + f(b) \\ +2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \dfrac{h}{2}\right) \end{array} \right)$$

Erreur d'intégration

$$E = f^{(4)}(\xi)\frac{h^4(B-A)}{2880}, \quad \xi \in [A,B]$$

Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- Intégration numérique
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Méthodes classiques
    - Méthode du rectangle (n=0)
    - Méthode du point milieu (n=0)
    - Méthode du trapèze (n=1)
    - Méthode de Simpson (n=2)
  - Méthodes classiques composées
  - Limites des méthodes classiques
  - Méthodes de quadrature de Gauss
- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

- **intégrales généralisées**

f(x) n'est pas régulière

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Intervalle d'intégration quelconque

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y \to +\infty} \int_{0}^{y} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y \to +\infty} \int_{-y}^{y} f(x)\,dx$$

Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…
- Interpolation polynomiale
- **Intégration numérique**
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Méthodes classiques
    - Méthode du rectangle (n=0)
    - Méthode du point milieu (n=0)
    - Méthode du trapèze (n=1)
    - Méthode de Simpson (n=2)
  - Méthodes classiques composées
  - Limites des méthodes classiques
  - Méthodes de quadrature de Gauss
- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

Méthodes de quadrature de Gauss

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b r(x)\,w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i)$$

$$W_0, W_1, \ldots, W_N$$
$$x_0, x_1, \ldots, x_N$$

2(n+1) paramètres

Intégrer exactement un polynôme de ordre 2n+1 avec n+1 échantillons de la fonction r(x)

$$p_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

Base canonique $\mathbf{P}_{2n+1}$

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_2(x) = x \\ \vdots \\ f_{2n+1}(x) = x^{2n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{2n+1}^0(x) = 1 \\ p_{2n+1}^1(x) = x \\ \vdots \\ p_{2n+1}^{2n+1}(x) = x^{2n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b p_{2n+1}^0(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} W_i \\ \int_a^b p_{2n+1}^1(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b x \cdot w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} W_i x_i \\ \vdots \\ \int_a^b p_{2n+1}^{2n+1}(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b x^{2n+1} \cdot w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} W_i x_i^{2n+1} \end{cases}$$

Méthodes de quadrature de Gauss : exemple

- $n=1$, $w(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} r(x)\,dx = W_0 r(x_0) + W_1 r(x_1)$$

$W_0, W_1 = ?$
$x_0, x_1 = ?$

4 paramètres à déterminer

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} dx = \sum_{i=0}^{1} W_i \\ \int_{-1}^{1} x\,dx = \sum_{i=0}^{1} W_i x_i \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \sum_{i=0}^{1} W_i x_i^2 \\ \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \sum_{i=0}^{n} W_i x_i^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = W_0 + W_1 \\ 0 = W_0 x_0 + W_1 x_1 \\ \frac{2}{3} = W_0 x_0^2 + W_1 x_1^2 \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_0 = 2 - W_1 \\ 0 = 2x_0 - W_1 x_0 + W_1 x_1 \\ \frac{2}{3} = W_0 x_0^2 + W_1 x_1^2 \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ W_1 = -\frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ \frac{2}{3} = W_0 x_0^2 + W_1 x_1^2 \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ W_1 = -\frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ \frac{2}{3} = \left(2 + \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)}\right) x_0^2 - \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} x_1^2 \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ W_1 = -\frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ \frac{2}{3}(x_1 - x_0) = 2(x_1 - x_0)x_0^2 + 2x_0^3 - 2x_0 x_1^2 \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ W_1 = -\frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ \frac{2}{3}(x_1 - x_0) = 2x_1 x_0 (x_0 - x_1) \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ W_1 = -\frac{2x_0}{(x_1 - x_0)} \\ x_1 x_0 = -\frac{1}{3} \\ 0 = W_0 x_0^3 + W_1 x_1^3 \end{cases}$$

Méthodes de quadrature de Gauss : exemple

$$\begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \dfrac{2x_0}{(x_1 - x_0)} = 2 - \dfrac{\frac{2}{3x_1}}{\left(x_1 + \frac{1}{3x_1}\right)} = 2 - \dfrac{2(3x_1)}{3x_1(3x_1^2+1)} = 2 - \dfrac{2}{3x_1^2+1} = \dfrac{6x_1^2+2-2}{3x_1^2+1} = \dfrac{6x_1^2}{3x_1^2+1} \\ W_1 = -\dfrac{2x_0}{(x_1-x_0)} = \dfrac{2\frac{1}{3x_1}}{\left(x_1 + \frac{1}{3x_1}\right)} = \dfrac{2}{(3x_1^2+1)} \\ x_0 = -\dfrac{1}{3x_1} \\ 0 = \left(\dfrac{6x_1^2}{3x_1^2+1}\right)\left(-\dfrac{1}{27x_1^3}\right) + \dfrac{2}{(3x_1^2+1)}x_1^3 = \dfrac{-6x_1^2}{(3x_1^2+1)27x_1^3} + \dfrac{2x_1^3}{(3x_1^2+1)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} W_0 = 2 - W_1 = 2 + \dfrac{2x_0}{(x_1 - x_0)} = 2 - \dfrac{\frac{2}{3x_1}}{\left(x_1 + \frac{1}{3x_1}\right)} = 2 - \dfrac{2(3x_1)}{3x_1(3x_1^2+1)} = 2 - \dfrac{2}{3x_1^2+1} = \dfrac{6x_1^2+2-2}{3x_1^2+1} = \dfrac{6x_1^2}{3x_1^2+1} \\ W_1 = -\dfrac{2x_0}{(x_1-x_0)} = \dfrac{2\frac{1}{3x_1}}{\left(x_1 + \frac{1}{3x_1}\right)} = \dfrac{2}{(3x_1^2+1)} \\ x_0 = -\dfrac{1}{3x_1} \\ 0 = \left(\dfrac{6x_1^2}{3x_1^2+1}\right)\left(-\dfrac{1}{27x_1^3}\right) + \dfrac{2}{(3x_1^2+1)}x_1^3 = \dfrac{-6x_1^2}{(3x_1^2+1)27x_1^3} + \dfrac{2x_1^3}{(3x_1^2+1)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

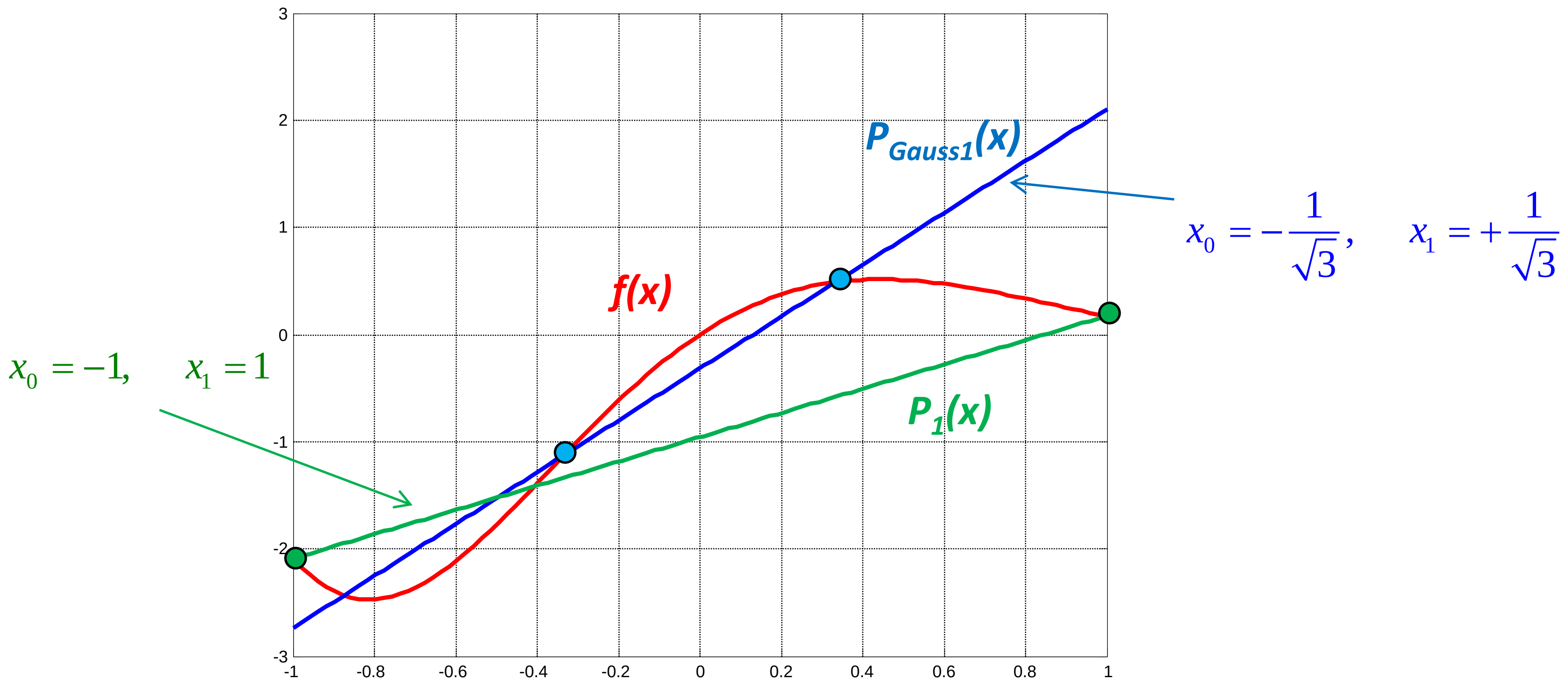
$$\begin{cases} W_0 = \dfrac{6x_1^2}{3x_1^2+1} \\ W_1 = \dfrac{2}{(3x_1^2+1)} \\ x_0 = -\dfrac{1}{3x_1} \\ 0 = -6x_1^2 + (54x_1^3)x_1^3 \Leftrightarrow 0 = -x_1^2 + 9x_1^6 \Leftrightarrow 0 = -1 + 9x_1^4 \Rightarrow x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} W_0 = \dfrac{6x_1^2}{3x_1^2+1} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ W_1 = \dfrac{2}{(3x_1^2+1)} = \dfrac{2}{1+1} = 1 \\ x_0 = -\dfrac{1}{3x_1} = -\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 = -6x_1^2 + (54x_1^3)x_1^3 \Leftrightarrow 0 = -x_1^2 + 9x_1^6 \Leftrightarrow 0 = -1 + 9x_1^4 \Rightarrow x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} W_0 = W_1 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}}$$

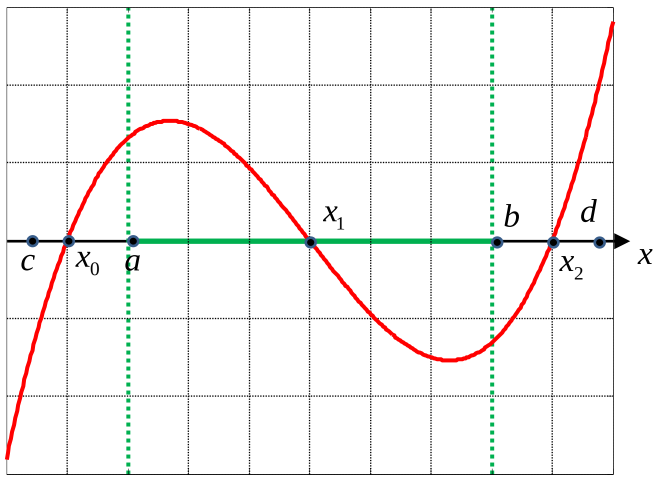
Méthodes de quadrature de Gauss : exemple



Méthodes de quadrature de Gauss

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\psi_n(x)w(x)dx$$

$\psi_n(x)$ de signe non-constant



$$r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x_0](x - x_0) + r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0]$$

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0, x]\psi_n(x)(x - x_0)w(x)dx + r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0]\int_a^b \psi_n(x)w(x)dx$$

- Si $\int_a^b \psi_n(x)w(x)dx = \int_a^b \psi_n(x)\psi_0(x)w(x)dx = 0$ $\quad E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_1, x]\psi_n(x)(x - x_0)w(x)dx$

Méthodes de quadrature de Gauss

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, ..., x_n, x_1, x]\psi_n(x)(x - x_0)w(x)dx = \int_a^b r[x_0, x_1, ..., x_n, x_1, x]\psi_n(x)\psi_1(x)w(x)dx$$

$$r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x] = r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x, x_1](x - x_1) + r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x_1]$$

$$\Downarrow$$

$$E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x_1, x]\psi_n(x)\psi_2(x)w(x)dx + r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x_1]\int_a^b \psi_n(x)\psi_1 w(x)dx$$

- Si $\int_a^b \psi_n(x)\psi_1 w(x)dx = 0$ $\Rightarrow$ $E_n = \int_a^b r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x_1, x]\psi_n(x)\psi_2(x)w(x)dx$

$\vdots$ N itérations

- Si $\int_a^b \psi_n(x)\psi_{n-1}(x)w(x)dx = 0$ $\Rightarrow$ $E_n = \int_a^b \underbrace{r[x_0, x_1, ..., x_n, x_0, x_1, ..., x_n, x]}_{f(x)}\underbrace{(\psi_n(x))^2 w(x)}_{g(x)}dx$

Second théorème de la moyenne

Erreur d'intégration

$$E_n = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\int_a^b (\psi_n(x))^2 w(x)dx$$

Méthodes de quadrature de Gauss: polynômes orthogonaux

$$\int_a^b p_a(x)\,p_b(x)\,w(x)\,dx = \Phi_w(p_a, p_b) = \langle p_a, p_b\rangle_w$$

- Si $\begin{cases} \int_a^b \psi_n(x)\psi_0(x)w(x)\,dx = 0 \\ \int_a^b \psi_n(x)\psi_1(x)w(x)\,dx = 0 \\ \vdots \\ \int_a^b \psi_n(x)\psi_{n-1}(x)w(x)\,dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \psi_n(x), \psi_0(x)\rangle_w = 0 \\ \langle \psi_n(x), \psi_1(x)\rangle_w = 0 \\ \vdots \\ \langle \psi_n(x), \psi_{n-1}(x)\rangle_w = 0 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$E_n = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\int_a^b (\psi_n(x))^2\, w(x)\,dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\langle \psi_n(x), \psi_n(x)\rangle_w = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\left\|\psi_n(x)\right\|_w^2$$

Méthodes de quadrature de Gauss

- **Théorème**: Soit (P, Φ_w) l'espace vectoriel des polynômes réels munis du produit scalaire Φ_w. Alors, il existe une suite des polynôme $\{q_n\}$ ayant les propriétés suivantes:
  1. q_n est de degré n
  2. q_n est orthogonal à q_j pour j<n: $\Phi_w\left(q_n, q_j\right) = \left\langle q_n, q_j \right\rangle_w = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n-1$

<u>Démonstration</u>: procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $1, x, x^2, \ldots$

- La suite finie $\{q_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base de P_n
- q_i est orthogonal à tout polynôme de degré $< i$

- **Théorème**: Pour tout $n \in N^+$, la fonction polynôme q_n admet n zéros réels distincts dans l'intervalle $]a, b[$.

Si $\psi_n = \lambda q_n \Rightarrow \left\langle \psi_n(x), \psi_i(x) \right\rangle_w = 0 \quad \forall i < n$

Méthodes de quadrature de Gauss

- ψ_n, q_n Polynômes de degré n

$\psi_n = \lambda q_n \Leftrightarrow \psi_n, q_n$ **ont les mêmes zéros.**

- Les zéros de ψ_n sont les points du support

Quadrature Gaussienne à n points:
les points du support sont les zéros du polynôme orthogonal q_n.

Méthodes de quadrature de Gauss

$$a=-1, b=1, w(x)=1 \qquad I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i)$$

Produit scalaire

$$\langle u,v\rangle=\int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx$$

Polynômes de Legendre

$$P_n(x)=\left(2^n n!\right)\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$$

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x \quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) \ \ldots$$

$$a=-1, b=1, w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{r(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i)$$

Produit scalaire

$$\langle u,v\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Polynômes de Tchebychev 1re espèce

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x$$

$$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$$

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x \quad P_2(x)=2x^2-1 \ \ldots$$

Méthodes de quadrature de Gauss

$$a=-\infty, b=+\infty, w(x)=e^{-x^2} \qquad I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} r(x)e^{-x^2}dx=\sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i)$$

Produit scalaire

$$\langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}dx$$

Polynômes d'Hermite

$$P_0(x)=1$$

$$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_n'(x)$$

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=2x \quad P_2(x)=4x^2-2 \quad P_3(x)=8x^3-12x \ \ldots$$

$$a=-1, b=1, w(x)=e^{-x}x^{\alpha} \qquad I=\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{\infty} r(x)e^{-x}x^{\alpha}dx=\sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i)$$

Produit scalaire

$$\langle u,v\rangle=\int_{0}^{\infty} u(x)v(x)e^{-x}x^{\alpha}dx$$

Polynômes de Laguerre généralises

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}-1\right)^n x^n$$

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=1-x \quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-4x-1\right)$$

Exemple

- Calculer l'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y+1}{2} \\ dx = \dfrac{dy}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 xe^x dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(y+1)e^{\frac{y+1}{2}} dy$$

Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4}(y+1)e^{\frac{y+1}{2}} dy = \sum_{n=1}^{N} f(x_i) w_i \qquad f(x) = \frac{1}{4}(x+1)e^{\frac{x+1}{2}}$$

N=1 x_1=0 w_1=2

N=2 x_1=-0.577350 w_1=1, x_2=0.577350 w_2=1

$$I_1 = f(x_1)w_1 = 0.8244 \qquad I_2 = f(x_1)w_1 + f(x_2)w_2 = 0.9983$$