DUREE: 2h

AUCUN DOCUMENT AUTORISE

EXERCICE 1: REPRESENTATION DES NOMBRES ET ERREURS NUMERIQUES (7pts)

A) ENCODAGE DES NOMBRES FLOTTANTS (3pts)

On considère la **base** $\beta = 10$.

1. Représenter les réels $x_1 = 154,721$, $x_2 = 154,737$ et $x_3 = 2,5$ en **virgule flottante avec 5 chiffres significatifs** (notés $fl(x_1)$, $fl(x_2)$ et $fl(x_3)$).
   fl(x1)=0,15472*10^3
   fl(x2)=0,15474*10^3 (1pt)
   fl(x3)=0,2500*10^1
2. Calculer **l'erreur relative** de représentation de x_1, x_2 et x_3.
   Er(x1)=(x1-fl(x1))/x1= 6.4632e-06
   Er(x2)=(x2- fl(x2))/x2=1.9388e-05 (1 pt)
   Er(x3)=0
3. Calculer l'expression suivante entre le deux représentations en virgule flottante:
   $fl(x_3) * [fl(x_2) - fl(x_1)]$.
   Quantifier **l'erreur relative** par rapport au calcul exact : $x_3 * [x_2 - x_1]$.
   2,5*(fl(x2)-fl(x1))= 0.05 (0,5 pts)
   x3*(x2-x1)= 0. 04
   Err=abs((0.04-0.05))/ (0.04))=0.25-> 25% (0,5 pts)

B) ERREURS NUMERIQUES (4pts)

1. Définir l'erreur de représentation et la précision machine ε du problème précèdent ($\beta = 10$, **codage sur 5 chiffres**).
   $$\varepsilon \geq \frac{|fl(x) - x|}{|x|} = \frac{\beta}{2}\beta^{-r} = \frac{10}{2}10^{-5} = 5*10^{-5}$$ (1 pt)
2. Calculer le nombre de conditionnement absolu et relatif du problème: $f : (x_1, x_2) \to 2,5*(x_2 - x_1)$.
   K=(1 pt), kr= (1 pt)
   $$f : (x_1, x_2) \to 2,5*(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1) = 2,5(x_2 - x_1) + 2,5(\Delta x_2 - \Delta x_1)$$
   $$\|\Delta y\| = \|2,5(\Delta x_2 - \Delta x_1)\| = |2,5| \|\Delta x_2 - \Delta x_1\| = 2,5 \|\Delta x_2 - \Delta x_1\|$$
   Norme 1
   $$k = \frac{\|\Delta y\|}{\|\mathbf{\Delta x}\|_1} = \frac{2,5|\Delta x_2 - \Delta x_1|}{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|} \leq 2,5 \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|} = 2,5$$
   $$k_r = \frac{\|\Delta y\| \|\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{\Delta x}\|_1 \|y\|} = \frac{2,5|\Delta x_2 - \Delta x_1|(|x_1| + |x_2|)}{(|\Delta x_1| + |\Delta x_2|) 2,5|x_1 + x_2|} \leq \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|}$$

Ou norme infinie

$$k=\frac{\|\Delta y\|}{\|\mathbf{\Delta x}\|_\infty}=\frac{2,5|\Delta x_2-\Delta x_1|}{\max\{|\Delta x_1|,|\Delta x_2|\}}\le\frac{2,5*2\max\{|\Delta x_1|,|\Delta x_2|\}}{\max\{|\Delta x_1|,|\Delta x_2|\}}=5,$$

$$k_r=\frac{\|\Delta y\|\|\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{\Delta x}\|_\infty\|y\|}=k\frac{\|\mathbf{x}\|_\infty}{\|y\|}=5\frac{\max\{|x_1|,|x_2|\}}{2,5|x_2-x_1|}=\frac{2\max\{|x_1|,|x_2|\}}{|x_2-x_1|}$$

3. Donner une estimation de l'erreur relative du calcul $x_3*[x_2-x_1]$ au point A **codés sur 6 chiffres** en base $\beta=10$.

$$Err=\varepsilon*\frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1+x_2|}=5*10^{-6}\frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1+x_2|}$$ (1pt)

EXERCICE 2: POLYNOMES ET INTERPOLATION DE LAGRANGE (3 pts)

Soit T_1 le nuage de points :

i	0	1	2
X_i	1	2	3
$Y_i=f(X_i)$	0	4	9

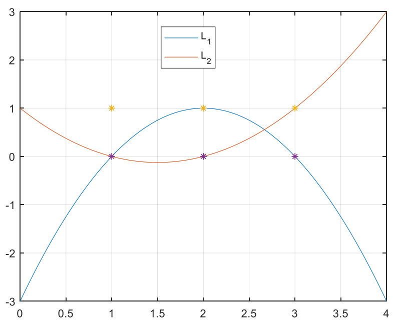
1. Calculer les polynômes de base de Lagrange $L_0(x),L_1(x),L_2(x)$ associés aux points x_0,x_1,x_2.

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=-(x-1)(x-3)$$ (1pt)

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

2. Tracer les courbes représentant les fonctions $L_1(x)$ et $L_2(x)$. (1pt)



3. Calculer le polynôme d'interpolation en base de Lagrange $p_2^L(x)$.

$p_2^L(x)=4L_1(x)+9L_2(x)$ (1pt)

EXERCICE 3: DIFFERENCES DIVISEES ET INTERPOLATION (5 points)

Soit T_2 le nuage des points:

i	0	1	2	3

X_i	0	1	2	3
$Y_i = f(X_i)$	1	5	13	17

1. Donner la formule récursive de calcul de f[x0,… xN] par les différences divisées (vue en cours)

$$f[x_0, x_1, ..., x_{N-1}, x_N] = \frac{f[x_1, ..., x_{N-1}, x_N] - f[x_0, x_1, ..., x_{N-1}]}{x_N - x_0}$$ (1pt)

2. Calculer les polynômes d'interpolations $p_2(x)$ et $p_3(x)$ en utilisant les différences divisées.

	Xi	fi			
X_0	0	1			
X_1	1	5	(f1-f0)/(x1-x0)=(5-1)/(1-0)=4		
X_2	2	13	(f2-f1)/(x2-x1)=(13-5)/(2-1)=8	(f12-f10)/(x2-x0)=(8-4)/(2-0)=2	
X_3	3	17	(f3-f2)/(x3-x2)=(17-13)/(3-2)=4	(f32-f21)/(x3-x1)=(4-8)/(3-1)=-2	(f321-f210)/(x3-x0)=(-2-2)/(3-0)= -4/3

(1pt)

$$p_2(x) = 1 + 4\psi_1(x) + 2\psi_2(x) = 1 + 4(x - x_0) + 2(x - x_0)(x - x_1) = 1 + 4x + 2x(x-1) =$$

$$= 1 + 4x + 2x^2 - 2x = 2x^2 + 2x + 1$$ (1pt)

$$p_3(x) = 1 + 4\psi_1(x) + 2\psi_2(x) - \frac{4}{3}\psi_3(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 1$$

3. Trouver l'expression de l'erreur d'interpolation d'ordre n en x : $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, ..., x_n, x]\psi(x_0, x_1, ..., x_n, x)$$ (1pt)

EXERCICE 4: Intégration numérique (5 pts)

A) Calculer par la méthode des trapèzes généralisés les intégrales :

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$, avec un pas constant $h = \frac{\pi}{8}$.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx = \left[0\sin(0) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{h}{2} + \left[h\sin(h) + (2h)\sin(2h) + (3h)\sin(3h)\right]h$$ (1pt)

$$= \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{16} + \left[\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{2\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{3\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]\frac{\pi}{8} = 1.013$$

$I_2 = \int_0^1 3x^2\sqrt{x}\,dx$, en décomposant l'intervalle d'intégration en 5 parties.

$h = 1/5$

$$I_2 = \int_0^1 3x^2\sqrt{x}\,dx = 3\int_0^1 x^2\sqrt{x}\,dx \simeq 3\left\{\left(0\sqrt{0} + 1\sqrt{1}\right)\frac{h}{2} + \left(h^2\sqrt{h} + (2h)^2\sqrt{2h} + (3h)^2\sqrt{3h} + (4h)^2\sqrt{4h}\right)h\right\}$$ (1pt)

$$= 3\left\{\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{25}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{4}{25}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{9}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{16}{25}\sqrt{\frac{4}{5}}\right)\frac{1}{5}\right\} = 1.1822$$

B) Calculer par les méthodes de quadrature gaussienne les intégrales

$$I_3=\int_{\infty}^{-\infty}\sin^2(x)e^{-x^2+1}dx$$

$$I_3=\int_{\infty}^{-\infty}\sin^2(x)e^{-x^2+1}dx=e\int_{\infty}^{-\infty}\sin^2(x)e^{-x^2}dx=-e\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2(x)e^{-x^2}dx\simeq-e\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=-\frac{e\sqrt{\pi}}{2}\left[\left(-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=-e\sqrt{\pi}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2.03$$

(1pt)

$$I_4=\int_{-2}^{0}\frac{x\sin(x)}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx$$

$x'=x+1 \qquad x=x'-1$

$$I_4=\int_{-2}^{0}\frac{x\sin(x)}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x'-1)\sin(x'-1)}{\sqrt{1-x'^2}}dx\simeq\frac{\pi}{2}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right]=2.7895$$

(1pt)

Le tableau suivant donne l'ensemble des informations permettant de réaliser le calcul approché des intégrales pour les formules à deux points.

$[a,b]$	$w(x)$	n	α_i	x_i
$[-1,1]$	1	2	1,1	$-\sqrt{1/3}\,,\sqrt{1/3}$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	2	$\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$
$[0,+\infty[$	e^{-x}	2	0.853553, 0.146447	0.585786,3.41421
$]-\infty,+\infty[$	e^{-x^2}	2	$\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$

EXERCICE 5: EQUATION DIFFERENTIELLE (3 points)

On considère un système mécanique vertical constitué de la terre et d'une masse placée à une distance x par rapport à la terre. L'équation régissant le déplacement de la masse en fonction du temps et en présence de frottement est donnée par :

$$\begin{cases} F_g+F_f=m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ x(0)=x_0,\quad \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=v_0 \end{cases} \quad avec \quad F_g=-\frac{GM_Tm}{x^2(t)},\quad F_f=-\gamma\frac{dx(t)}{dt}$$

1. Ecrire l'équation du 2nd ordre comme un système d´équations du premier ordre.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx(t)}{dt}-\frac{F_g}{m}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=v(t)\\ \dfrac{dv(t)}{dt}+\dfrac{\gamma}{m}v(t)-\dfrac{F_g}{m}=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=v(t)\\ \dfrac{dv(t)}{dt}=\dfrac{F_g}{m}-\dfrac{\gamma}{m}v(t)\end{cases}$$

(1.5 pts)

2. Donner le schéma de résolution du problème de Cauchy par la méthode d'Euler.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_n) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dfrac{F_g}{m} - \dfrac{\gamma}{m} v(t) \end{bmatrix}$$

(1.5 pts)

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \mathrm{h}\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_n)$$