LU3EE103 – ER2 **Programmation en C et Méthodes Numériques - 08/01/2020**

DUREE: 1h30 SUJET : A

EXERCICE 1: REPRESENTATION DES NOMBRES ET ERREURS NUMERIQUES **(5Pts)**

Un baromètre (capteur de pression utilisé pour mesurer l'altitude) mesure l'altitude d'un drone avec une erreur relative ((mesure - valeur réelle)/(valeur réelle)) de 10^{-9}. Les mesures sont codées en **virgule flottante avec 3 chiffres significatifs** pour être stockées en mémoire.

(1a) Quel est l'erreur relative des altitudes mémorisées ?

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2}\beta^{-r} = 5 \cdot 10^{-3}$$ **1Pt**

Le capteur a relevé les valeurs suivantes d'altitude :

T (sec)	5	10	15	20
Z (m)	700.10	1166.58	1199.65	1234.49

(1b) Quelles valeurs d'altitudes ont été écrites en mémoire ?

700 1170 1200 1230 **1Pt**

La trajectoire du drone est corrigée en utilisant la formule suivante (force verticale)

$$F_z(Z) = (1200 - Z) * 100 \qquad (1)$$

(1c) Pour quel instant l'erreur de correction relative est-elle maximale (erreur par rapport à la fonction F_z calculée à partir de l'altitude exacte) ? Justifier la réponse.

T=15 Erreur de cancellation (la cancellation amplifie les erreurs de calcul) **1Pt**

(1d) Calculer le nombre de conditionnement relatif de l'opération de correction (1).

$$\tilde{Z} = Z + \Delta Z$$

$$F_z(\tilde{Z}) = (1200 - Z - \Delta Z) * 100 = (1200 - Z) * 100 - \Delta Z * 100 = F_z(Z) + \Delta F_z$$ **2Pts**

avec $\Delta F_z = -\Delta Z * 100$.

$$K_r = \frac{|\Delta F_z| / |F_z|}{|\Delta Z| / |Z|} = \frac{|\Delta Z| * 100}{|1200 - Z| * 100} \frac{|Z|}{|\Delta Z|} = \frac{|Z|}{|1200 - Z|}$$

EXERCICE 2: INTERPOLATION DE LAGRANGE **(4Pts)**

En relevant toutes les 10 secondes la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique, on a obtenu

T (sec)	**0**	**10**	**20**	**30**
V (m/sec)	2.00	1.89	1.72	1 .44

(2a) Trouver une approximation de la vitesse en *t*=15 via un polynôme interpolant de Lagrange de degré 2

$$v(15) \simeq P_3(15) = 2\frac{(15-10)(15-20)}{-10(-20)} + 1.89\frac{(15)(15-20)}{10(10-20)} + 1.72\frac{15(15-10)}{20(20-10)}$$ **2Pts**

(2b) Répéter l'opération avec un polynôme de Lagrange de degré 3.

$$v(15) \simeq P_3(15) = 2\frac{(15-10)(15-20)(15-30)}{-10(-20)(-30)} + 1.89\frac{(15)(15-20)(15-30)}{10(10-20)(10-30)} + 1.72\frac{15(15-10)(15-30)}{20(20-10)(20-30)}$$

$$+1.44\frac{15(15-10)(15-20)}{30(30-10)(30-20)}$$

2Pts

Note: Il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression des polynômes de Lagrange.

EXERCICE 3: INTERPOLATION DE NEWTON (6Pts)

On considère la table de différences divisées suivante :

X_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1.9	0.94630			
1.5	0.99749			
2.3	0.74571			
2.7	0.42738			

(3a) Compléter la table.

	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1.9	0.94630			
1.5	0.99749	-0.127975		
2.3	0.74571	-0.314 725	-0.466875	
2.7	0.42738	-0.795824	-0.400917	0.082448

2 Pts

(3b) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de *f* (1,8) en utilisant le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.

$$p_2(x) = 0.94630 - 0.127975(x-1.9) - 0,466875(x-1.9)(x-1.5)$$ **1 Pt**

$$f(1.8) \simeq p_2(1.8) = 0.973104$$

(3c) Sachant que *f(x)*=sin(*x*), calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en *x*=1,8.

$$e = \left| f(1.8) - p_2(1.8) \right| = \left| f[1.9, 1.5, 2.3, 1.8](1.8-1.9)(1.8-1.5)(1.8-2.3) \right|$$

$$= \left| f[1.9, 1.5, 2.3, 1.8] \right| \left| (1.8-1.9)(1.8-1.5)(1.8-2.3) \right|$$

$$f[1.9, 1.5, 2.3, 1.8] = \frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!} \text{ avec } \zeta \in [1.5, 2.3]$$ **2 Pts**

$$e \le \frac{|\cos(2.3)|}{3!}\left|(1.8-1.9)(1.8-1.5)(1.8-2.3)\right|$$

(3d) Calculer une approximation de *f (*1,8) en utilisant le polynôme de Newton passant par les 4 points.

$$p_3(x) = p_2(x) + 0.082448(x-1.9)(x-1.5)(x-2.3)$$

$$f(1.8) \simeq p_3(1.8) = 1.0421$$

1 Pts

EXERCICE 4: **Intégration numérique** **(3 Pts)**

L'énergie mise en jeu lors d'une réaction chimique pour imprimer un circuit électrique peut être calculée par la formule suivante:

$$E = \int_0^2 \sin^2(x) T(x)\, dx \qquad (2)$$

où $T(x)$ est la température (°K) mesuré à la position x. On cherche une estimation de E en utilisant deux capteurs de température.

(4a) Quelle est la position optimale des capteurs ?

$-\sqrt{1/3}+1, \sqrt{1/3}+1$ **1Pt**

(4b) Donner une estimation de E en utilisant une méthode de quadrature de Gauss.

$$E = \int_0^2 \sin^2(x) T(x)\, dx = \int_{-1}^{-1} \sin^2(y+1) T(y+1)\, dy \simeq \sin^2\left(-\sqrt{1/3}+1\right) T\left(-\sqrt{1/3}+1\right) + \sin^2\left(\sqrt{1/3}+1\right) T\left(\sqrt{1/3}+1\right)$$

2Pts

EXERCICE 5: **Equation d'onde** **(4 Pts)**

La propagation d'une onde électromagnétique plane, de polarisation x dans la direction des z > 0 est décrite par l'équation différentielle aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Où la variable *t* représente le temps et *c* la célérité de la lumière.

(5a) Proposer un schéma de solution numérique pour l'équation (3).

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} \simeq \frac{E_x(z+\Delta z,t) - 2E_x(z,t) + E_x(z-\Delta z,t)}{\Delta z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} \simeq \frac{E_x(z,t+\Delta t) - 2E_x(z,t) + E_x(z,t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

1.5 Pts

$$\Rightarrow \frac{E_x(z+\Delta z,t) - 2E_x(z,t) + E_x(z-\Delta z,t)}{\Delta z^2} - \frac{E_x(z,t+\Delta t) - 2E_x(z,t) + E_x(z,t-\Delta t)}{c^2\Delta t^2} = 0$$

Dans le domaine fréquentiel, l'équation (3) devient

$$\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} - k^2 E_x(z) = 0 \qquad (4)$$

(5b) Ecrire l'équation (4) comme un système de deux équations du premier ordre.

$$\Psi(z)=\frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} E_x(z) \\ \Psi(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Psi(z) \\ k^2 E_x(z) \end{bmatrix}$$ **1 Pts**

(5c) Donner l'équation permettant de calculer E_x à en z sachant les positions précédents en utilisant une méthode de votre choix.

Par exemple avec la méthode d'Euler

$$\begin{bmatrix} E_x(z+\Delta z) \\ \Psi(z+\Delta z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_x(z) \\ \Psi(z) \end{bmatrix}+\Delta z\begin{bmatrix} \Psi(z) \\ k^2 E_x(z) \end{bmatrix}$$ **1.5 Pts**

Le tableau suivant donne l'ensemble des informations permettant de réaliser le calcul approché des intégrales avec la méthode de Gauss pour les formules à deux points.

$[a,b]$	$w(x)$	n	α_i	x_i
$[-1,1]$	1	2	1,1	$-\sqrt{1/3}\,,\sqrt{1/3}$
$]-1,1[$	$1/\sqrt{1-x^2}$	2	$\pi/2,\pi/2$	$-1/\sqrt{2}\,,1/\sqrt{2}$
$[0,+\infty[$	e^{-x}	2	0.853553, 0.146447	0.585786,3.41421
$]-\infty,+\infty[$	e^{-x^2}	2	$\sqrt{\pi}/2,\sqrt{\pi}/2$	$-1/\sqrt{2}\,,1/\sqrt{2}$