# Programmation et Méthodes Numériques

Interpolation polynomiale

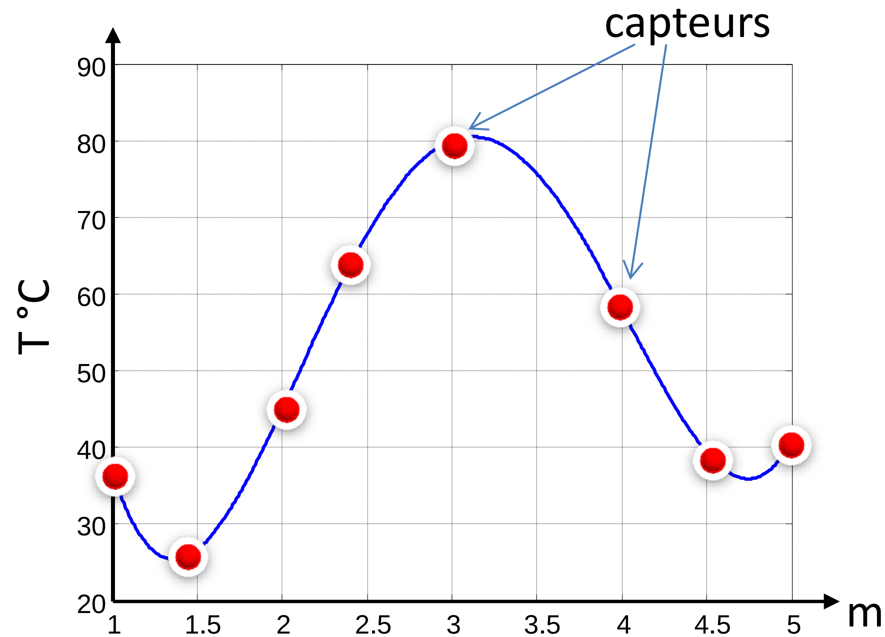
M. Casaletti (massimiliano.casaletti@upmc.fr)

Laboratoire d'Electronique et Electromagnétisme (L2E)
Université Pierre et Marie Curie

## Le problème de l'interpolation

L'interpolation traite de l'approximation d'une fonction dont on ne connaît les valeurs **exactes** qu'en certains points.

Source: LMS corp.




Quelques exemples d'interpolation :

**Interpolation polynomiale**.

**Approximation trigonométrique** (polynôme trigonométrique).

**Splines (**Interpolation polynomiale par morceaux).

# Plan du cours

- Représentation d’un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

- **Interpolation polynomiale**
  - **Rappels de mathématique**
  - Polynôme d’interpolation: calcul en base canonique
  - Polynôme d’interpolation: calcul en base de Lagrange
  - Polynôme d’interpolation: calcul en base de Newton
  - Erreur d’interpolation
  - Interpolation d’Hermite
  - Limites de l’interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

## Espace vectoriel $P_n$ des fonctions polynômes à coefficients réels

$$p^{(1)}(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + a_2^{(1)}x^2 + \ldots + a_N^{(1)}x^N \quad p^{(2)}(x) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + a_2^{(2)}x^2 + \ldots + a_N^{(2)}x^N$$

$$p_1(x) + p_2(x) = \left(a_0^{(1)} + a_0^{(2)}\right) + \left(a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\right)x + \left(a_2^{(1)} + a_2^{(2)}\right)x^2 + \ldots + \left(a_N^{(1)} + a_N^{(2)}\right)x^N$$

$$\alpha p_1(x) = \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \ldots + (\alpha a_N)x^N \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- **Espace vectoriel de dimension N+1**

- **Base de $P_n$ formée par N+1 fonctions polynômes**
- **Isomorphisme avec l'espace $\mathbb{R}^{N+1}$**

$p(x) \equiv$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | $b_1$ | … | $b_N$ | $b_{N+1}$ |

### Produit scalaire

$$\left\langle p^{(1)}, p^{(2)} \right\rangle_2 = \sum_{i=0}^{N} b_i^{(1)} b_i^{(2)}$$

$$\left\langle p^{(1)}, p^{(2)} \right\rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b p^{(1)}(x), p^{(2)}(x)\,dx$$

### Norme

$$\|p\|_2 = \sum_{i=0}^{N} b_i^2$$

$$\|p\|_{L_2[a,b]} = \int_a^b p^2(x)\,dx$$

### Distance

$$d_2\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) = \sum_{i=0}^{N} \left(b_i^{(1)} - b_i^{(2)}\right)^2$$

$$d_{L_2[a,b]}\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) = \sqrt{\int_a^b \left(p^{(1)}(x) - p^{(2)}(x)\right)^2 dx}$$

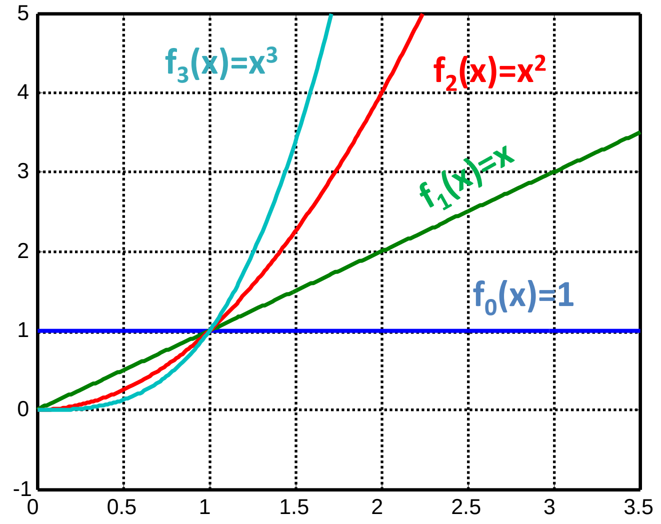
# Espace $P_n$: base canonique

## Base canonique

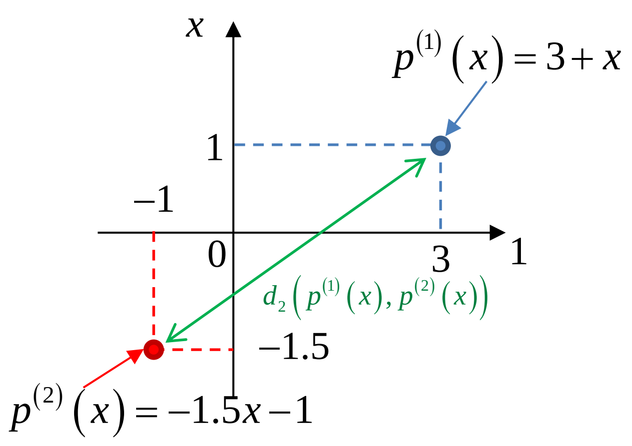
$$\{f_n(x)\} = \{x^n\}_{n=0,1,..,\mathrm{N}}$$

$$f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x, \ \dots \quad \mathrm{f}_N(x)=x^N$$

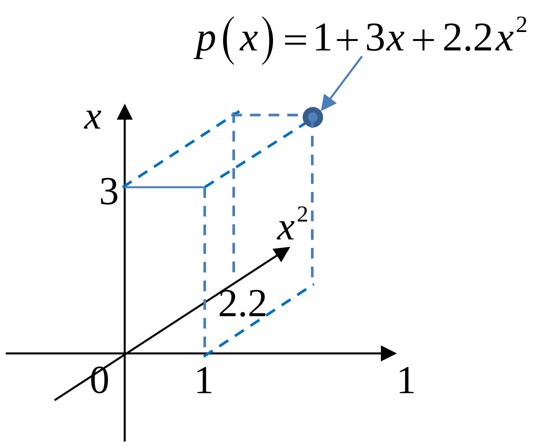
$$p_N(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_N g_N(x)$$
$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$$




### Espace $P_1$




### Espace $P_2$



## Base canonique centrée:

$$\left\{g_n(x)\right\}_{n=0,1,..,N} = (x-c_n)^n \quad \Rightarrow \quad p_N(x) = a_0^g g_0(x) + a_1^g g_1(x) + a_2^g g_2(x) + \ldots + a_N^g g_N(x)$$

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x - c_1, \ \ldots \quad g_N(x) = (x-c_N)^N \qquad = a_0^g + a_1^g (x-c_1) + \ldots + a_N^g (x-c_N)^N$$

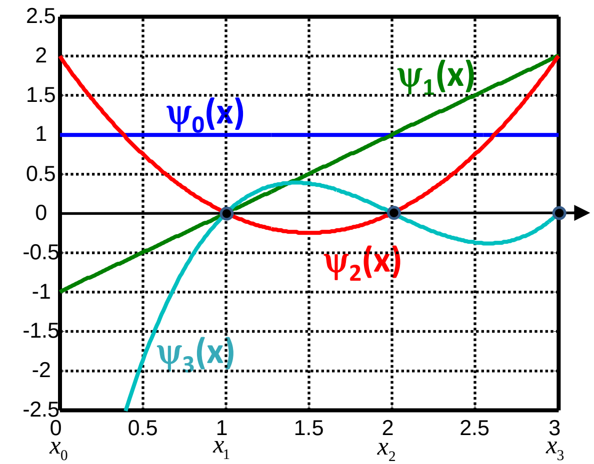
## Base de Newton

$$\left\{\psi_n(x)\right\}_{n=0,1,..,N} = \prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$$

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = x - x_0, \quad \psi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1), \quad \psi_N(x) = \prod_{j=0}^{N-1}(x-x_j)$$

$$\Downarrow$$

$$p_N(x) = a_0^h + a_1^h (x-x_0) + a_2^h (x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_N^h \prod_{j=0}^{N-1}(x-x_j)$$



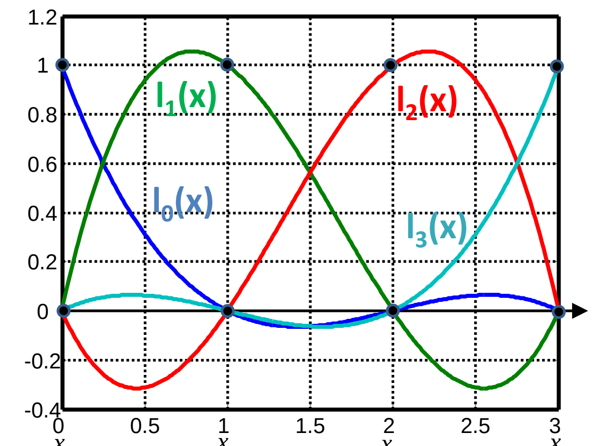

## Base de Lagrange

$$\left\{l_n^{(N)}(x)\right\}_{n=0,1,..,N} = \prod_{\substack{j\neq n \\ j=0}}^{N} \frac{(x-x_j)}{(x_n - x_j)} \qquad l_1^{(N)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_N)}$$

$\left\{x_j\right\}_{j=0,1,..,N}$ support

$$\Downarrow$$

$$p_N(x) = a_0^l l_0^{(N)}(x) + a_1^l l_1^{(N)}(x) + a_2^l l_2^{(N)}(x) + \ldots + a_N^l l_N^{(N)}(x)$$



## Base canonique centrée:

$$p(x) = a_0^g + a_1^g (x - c_1) + \ldots + a_N^g (x - c_N)^N \qquad \mathbf{A} = \left[ a_0^g, a_1^g, \ldots a_N^g \right] \qquad \mathbf{C} = \left[ 0, c_1, \ldots a_N \right]$$

## Base de Newton

$$p(x) = a_0^h \prod_{\substack{j \neq 0 \\ j=0}}^{N} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)} + \ldots + a_N^h \prod_{\substack{j \neq N \\ j=0}}^{N} \frac{(x - x_j)}{(x_N - x_j)} \qquad \mathbf{A} = \left[ a_0^h, a_1^h, \ldots a_N^h \right] \qquad \mathbf{C} = \left[ x_0, \ldots x_{N-1}, 0 \right]$$

## Base de Lagrange

$$p(x) = a_0^l + a_1^l (x - x_0) + \ldots + a_N^l \prod_{j=0}^{N-1} (x - x_j) \qquad \mathbf{A} = \left[ a_0^l, a_1^l, \ldots a_N^l \right] \qquad \mathbf{C} = \left[ x_0, \ldots x_{N-1}, 0 \right]$$

```
typedef struct {
int degre;
double* A;
double* C;
} Polynome;
```

double* A; ← Coefficients $a_i$ du polynôme

double* C; ← Centres $c_i$ ou $X_i$ du polynôme

# Espace $P_n$: implémentation en C

## Méthode créant un polynôme nul

```
Polynome creerPolynome( int N ) {
Polynome p = { N,
calloc( N+1, sizeof( double ) );
calloc( N+1, sizeof( double ) ) };
 return p;
}
```

Coefficients

Centres

On a un coefficient et centre de plus que le degré car on va de 0 a N

## Méthode de libération de la mémoire occupée par un polynôme

```
void freePolynome( Polynome* p ){
free( p->A );
p->A = NULL;
free( p->C );
p->C = NULL;
p->degre = 0;
}
```

On détruit les coefficients

On détruit les centres

- Représentation d’un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

- **Interpolation polynomiale**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - **Polynôme d’interpolation: calcul en base canonique**
  - Polynôme d’interpolation: calcul en base de Lagrange
  - Polynôme d’interpolation: calcul en base de Newton
  - Erreur d’interpolation
  - Interpolation d’Hermite
  - Limites de l’interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

# Polynôme d'interpolation: base canonique

- **Définition:** Une fonction polynôme $p_N \in P_N$ interpole f aux points $x_0, x_1, \dots, x_N$ si et seulement si

$$\forall i \in \{0,..,N\} \quad p_N(x_i) = f(x_i)$$

**Interpolation de Lagrange**

$$p_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\begin{cases} p_N(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ p_N(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ p_N(x_1) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}}_{\text{matrice de Vandermonde}} \overbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} = \overbrace{\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \\ f(x_n) \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right) = \prod_{1<i<j\le n} (x_j - x_i)$$

- si les points $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ sont distingués: $\det\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right) \neq 0$ ⇒ $\mathbf{A} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\mathbf{F}$

- **Remarque:** Besoin d'une inversion de matrice. $O(n^3)$
  Le calcul pour *n-1* points devient obsolète pour *n* points.

# Exemples

- **Polynôme d'ordre 1** $\{x_0, x_1\}$

$$\begin{bmatrix}1 & x_0\\ 1 & x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_0\\ 1 & x_1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{bmatrix}x_1 & -x_0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\end{bmatrix}$$

$$a_0=\frac{x_1 f(x_0)-x_0 f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$a_1=\frac{-f(x_0)+f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$\Rightarrow \quad p_1(x)=a_0+a_1x=\frac{x_1 f(x_0)-x_0 f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x$$

$$p_1(x)=f(x_0)\frac{x_1-x}{x_1-x_0}+f(x_1)\frac{-x_0+x}{x_1-x_0}x=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{-x_0+x}{x_1-x_0}x$$

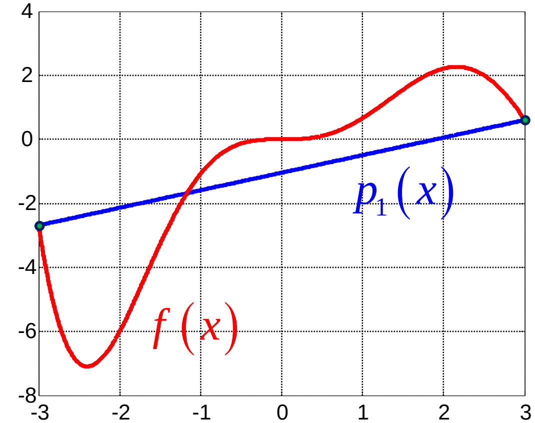
$$=f(x_0)l_0^{(1)}(x)+f(x_1)l_1^{(1)}(x)$$ (Représentation en base de Lagrange)

---

- $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{4}}\sin(x)$ $\qquad \{x_0=-3, x_1=3\}$

$$a_0=\frac{3f(-3)+3f(3)}{6}=\frac{9}{2}\left(e^{\frac{3}{4}}\sin(-3)+e^{-\frac{3}{4}}\sin(3)\right)=\frac{9}{2}\sin(3)\left(-e^{\frac{3}{4}}+e^{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$a_1=\frac{-f(-3)+f(3)}{6}=\frac{9}{6}\left(-e^{\frac{3}{4}}\sin(-3)+e^{-\frac{3}{4}}\sin(3)\right)=\frac{3}{2}\sin(3)\left(e^{\frac{3}{4}}+e^{-\frac{3}{4}}\right)$$



# Exemples

- **Polynôme d'ordre 2** $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$\begin{bmatrix}1&x_0&x_0^2\\1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\f(x_2)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x_0&x_0^2\\1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\f(x_2)\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right)}cof\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right)\begin{bmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\f(x_2)\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right)=\begin{vmatrix}1&x_0&x_0^2\\1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3-x_0C_2}{=}\begin{vmatrix}1&x_0&0\\1&x_1&x_1^2-x_0x_1\\1&x_2&x_2^2-x_0x_2\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2-x_0C_1}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&x_1-x_0&x_1^2-x_0x_1\\1&x_2-x_0&x_2^2-x_0x_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&x_1-x_0&x_1(x_1-x_0)\\1&x_2-x_0&x_2(x_2-x_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1-x_0&x_1(x_1-x_0)\\x_2-x_0&x_2(x_2-x_0)\end{vmatrix}$$

$$=(x_1-x_0)\begin{vmatrix}1&x_1\\x_2-x_0&x_2(x_2-x_0)\end{vmatrix}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$cof\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right)=cof\left(\begin{bmatrix}1&x_0&x_0^2\\1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}x_1&x_1^2\\x_2&x_2^2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&x_1^2\\1&x_2^2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}x_0&x_0^2\\x_2&x_2^2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&x_0^2\\1&x_2^2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&x_0\\1&x_2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}x_0&x_0^2\\x_1&x_1^2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&x_0^2\\1&x_1^2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&x_0\\1&x_1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1x_2^2-x_1^2x_2&-(x_2^2-x_1^2)&x_2-x_1\\-(x_0x_2^2-x_0^2x_2)&x_2^2-x_0^2&-(x_2-x_0)\\x_0x_1^2-x_0^2x_1&-(x_1^2-x_0^2)&x_1-x_0\end{bmatrix}$$

# Exemples

## Polynôme d'ordre 2 $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\right)} \begin{bmatrix} x_1x_2^2 - x_1^2x_2 & -\left(x_2^2 - x_1^2\right) & x_2 - x_1 \\ -\left(x_0x_2^2 - x_0^2x_2\right) & x_2^2 - x_0^2 & -\left(x_2 - x_0\right) \\ x_0x_1^2 - x_0^2x_1 & -\left(x_1^2 - x_0^2\right) & x_1 - x_0 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \begin{bmatrix} x_1x_2^2 - x_1^2x_2 & -\left(x_0x_2^2 - x_0^2x_2\right) & x_0x_1^2 - x_0^2x_1 \\ -\left(x_2^2 - x_1^2\right) & x_2^2 - x_0^2 & -\left(x_1^2 - x_0^2\right) \\ x_2 - x_1 & -\left(x_2 - x_0\right) & x_1 - x_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\left(x_2 - x_1\right)x_1x_2}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{\left(x_2 - x_0\right)\left(-x_0x_2\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{\left(x_1 - x_0\right)x_0x_1}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \\ \dfrac{\left(x_2 - x_1\right)\left(-x_2 - x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 + x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{\left(x_1 - x_0\right)\left(-x_1 - x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \\ \dfrac{x_2 - x_1}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{-\left(x_2 - x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{x_1 - x_0}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1x_2}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)} & \dfrac{-x_0x_2}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{x_0x_1}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \\ \dfrac{\left(-x_2 - x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)} & \dfrac{\left(x_2 + x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{\left(-x_1 - x_0\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \\ \dfrac{1}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)} & \dfrac{-1}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} & \dfrac{1}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \underbrace{\left[\frac{x_1x_2 f\left(x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)} - \frac{x_0x_2 f\left(x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} + \frac{x_0x_1 f\left(x_2\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)}\right]}_{a_0} \\ & + \underbrace{\left[\frac{\left(-x_2 - x_1\right) f\left(x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)} + \frac{\left(x_2 + x_0\right) f\left(x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} + \frac{\left(-x_1 - x_0\right) f\left(x_2\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)}\right]}_{a_1} x \\ & + \underbrace{\left[\frac{f\left(x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)} - \frac{f\left(x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)} + \frac{f\left(x_2\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)}\right]}_{a_2} x^2 \end{aligned}$$

# Exemples

## Polynôme d'ordre 2 $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$P_2(x) = f(x_0)\left[\frac{x_1x_2 + (-x_2 - x_1)x + x^2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}\right] + f(x_1)\left[\frac{-x_0x_2 + (x_2 + x_0)x - x^2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}\right] + f(x_2)\left[\frac{x_0x_1 + (-x_1 - x_0)x + x^2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right]$$

$$= f(x_0)\left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}\right] + f(x_1)\left[\frac{(x_2 - x)(x - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}\right] + f(x_2)\left[\frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right]$$

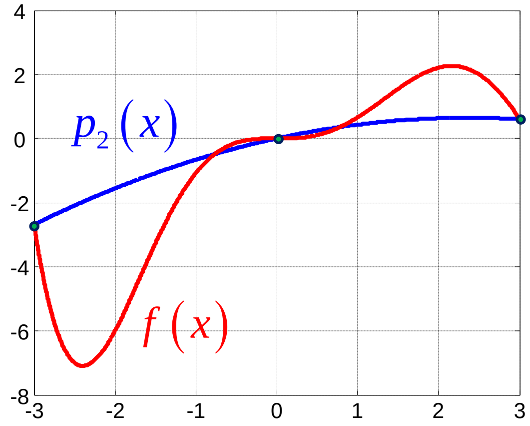
$$= f(x_0)\left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{(x - x_2)(x - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right] + f(x_2)\left[\frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right]$$

$$= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x)$$

(Représentation en base de Lagrange)

---

- $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{4}} \sin(x)$ $\quad \{x_0 = -3, x_1 = 3\}$

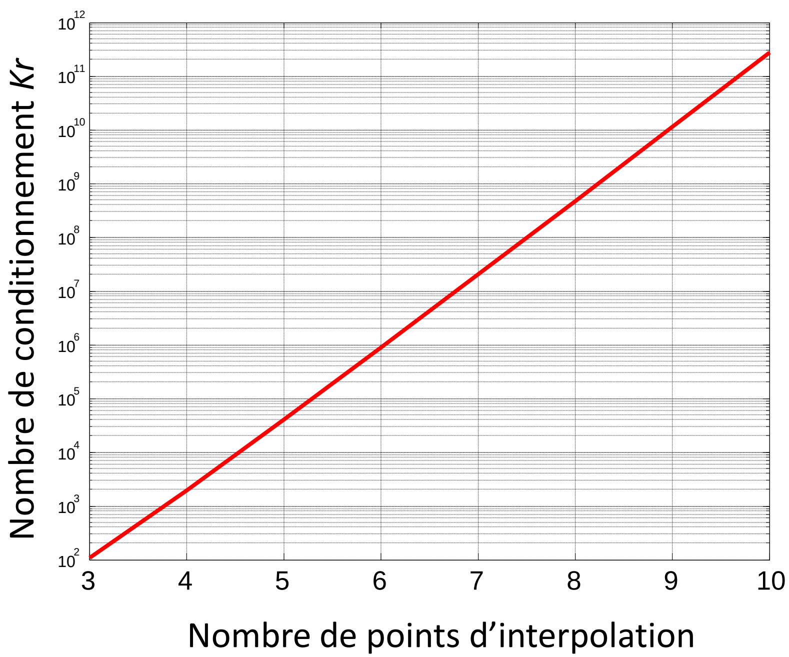


# Polynôme d'interpolation: base canonique

**matrice de Vandermonde**

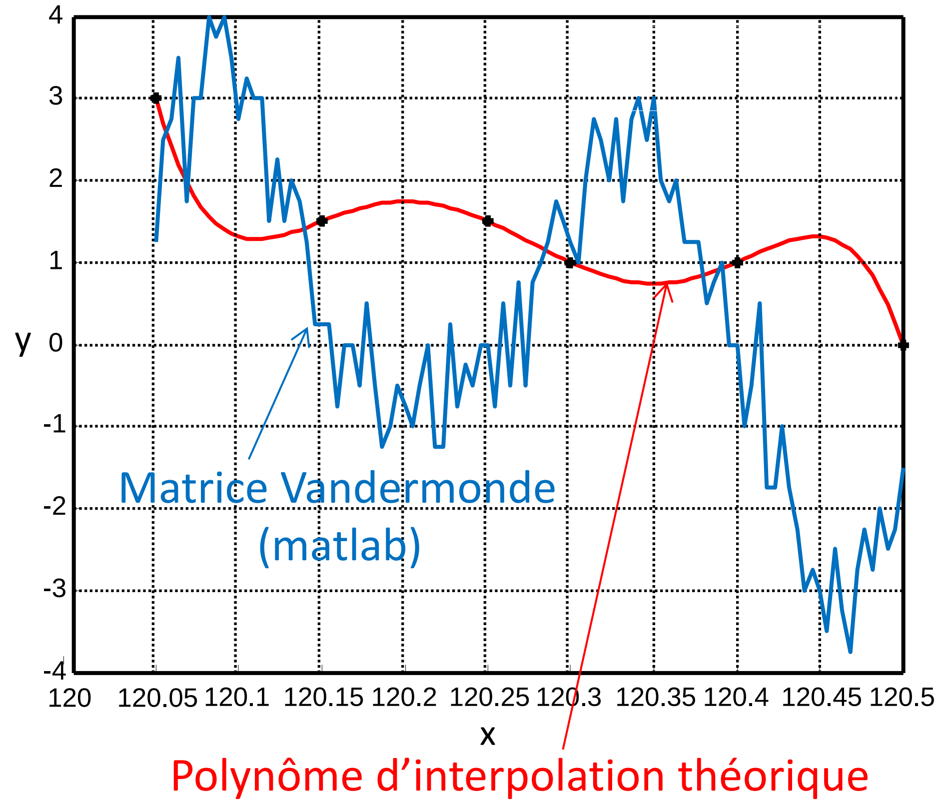
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

**matrice mal conditionnée!**




Exemple: N=6

| **x** | 120.05 | 120.15 | 120.25 | 120.3 | 120.4 | 120.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 3 | 1.5 | 1.5 | 1 | 1 | 0 |




Problème mal conditionnée. Calcul numérique *très difficile voire impossible.*

# Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

- **Interpolation polynomiale**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base canonique**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base de Lagrange**
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Newton
  - Erreur d'interpolation
  - Interpolation d'Hermite
  - Limites de l'interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

# Espace $P_n$: base de Lagrange

**Définition:** On considère un ensemble de points $\{x_j\}_{j=0,1,..,N}$ . La base de Lagrange $\{l_i\}$ associée au support est définie par les propriétés suivantes:

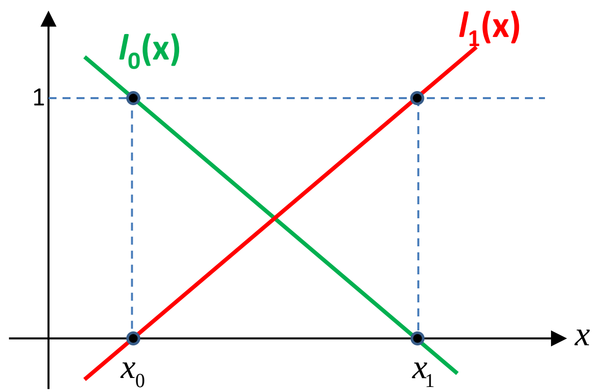
- $l_i^{(N)}(x)$ est de degré N $\forall i \in \{0, N\}$
- $l_i^{(N)}(x_k) = \delta_{i,k} \quad \forall i \in \{0, N\} \quad \forall k \in \{0, N\}$

## Espace $P_1$

On considère 2 points $\{x_0,x_1\}$ et on cherche deux polynômes de degré 1 (droites) qui passent respectivement par les points suivants:

$$\{(x_0,1),(x_1,0)\} \quad \Rightarrow l_0^{(1)}(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$\{(x_0,0),(x_1,1)\} \quad \Rightarrow l_1^{(1)}(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$



# Espace $P_n$: base de Lagrange

## Espace $P_2$

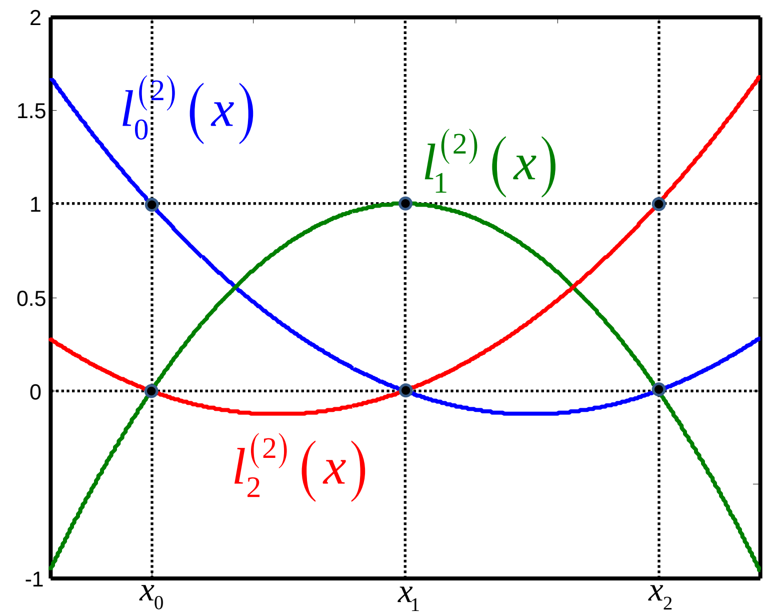
On considère 3 points $\{x_0,x_1,x_2\}$ et on cherche trois polynômes de degré 2 qui passent respectivement par les points suivants:

$$\{(x_0,1),(x_1,0),(x_2,0)\} \Rightarrow l_0^{(2)}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_0^{(2)}(x)=\frac{x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=ax^2+bx+c$$

$$\{(x_0,0),(x_1,1),(x_2,0)\} \Rightarrow l_1^{(2)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$\{(x_0,0),(x_1,0),(x_2,1)\} \Rightarrow l_2^{(2)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_1)}$$




## Espace $P_N$

$$\left\{l_n^{(N)}(x)\right\}_{n=0,1,..,N}=\prod_{\substack{j\neq n\\ j=0}}^{N}\frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)}$$

# Polynôme d'interpolation: base de Lagrange

- **Définition:** Une fonction polynôme $p_N \in P_N$ interpole f aux points $x_0, x_1, \dots, x_N$ si et seulement si

$$\forall i \in \{0,..,N\} \quad p_N(x_i) = f(x_i)$$

**Interpolation de Lagrange**

- On considère les fonctions de Lagrange $l_0^{(N)}, l_1^{(N)}, \dots, l_N^{(N)}$ associés aux point $x_0, x_1, \dots, x_N$. Alors:

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^{N} l_i^{(N)}(x)\, f(x_i)$$

- **Théorème: Existence et unicité du polynôme d'interpolation**
Soit f une fonction définie sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et N+1 points distincts de I : $x_0, x_1, \dots, x_N$ .
Alors, il existe une unique fonction polynôme de $P_N$ qui interpole aux points $x_0, x_1, \dots, x_N$.

# Exemples

- **Polynôme d'ordre 1** $\{x_0, x_1\}$

$$l_0^{(1)}(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad l_1^{(1)}(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = f(x_0)\,l_0^{(1)}(x) + f(x_1)\,l_1^{(1)}(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

---

- **Polynôme d'ordre 2** $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$l_0^{(2)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \qquad l_1^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \qquad l_2^{(2)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)}$$

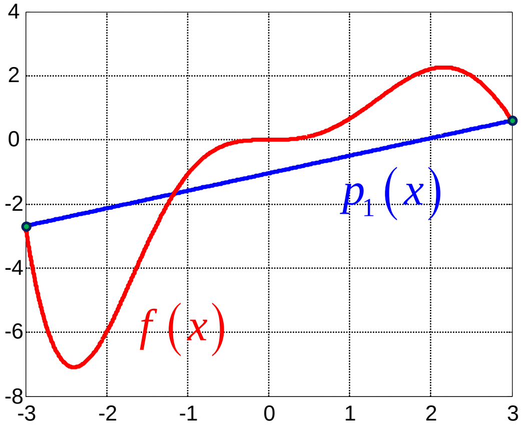
$$p_2(x) = f(x_0)\,l_0^{(2)}(x) + f(x_1)\,l_1^{(2)}(x) + f(x_2)\,l_2^{(2)}(x)$$

$$= f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)}$$

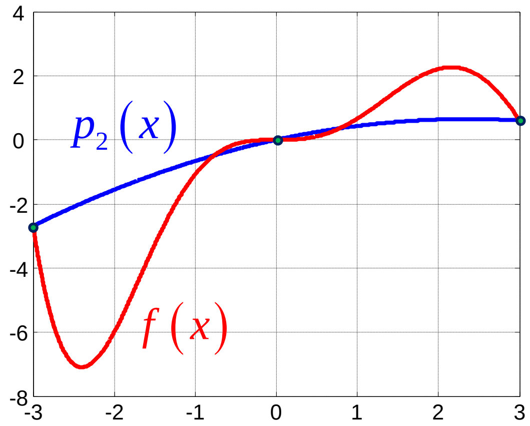
# Exemples

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{4}} \sin(x)$$

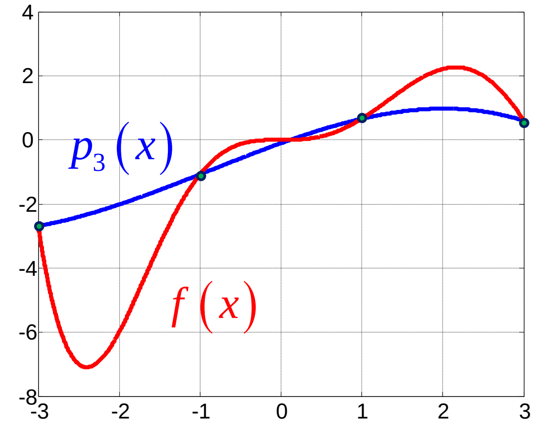
## Polynôme d'ordre 1



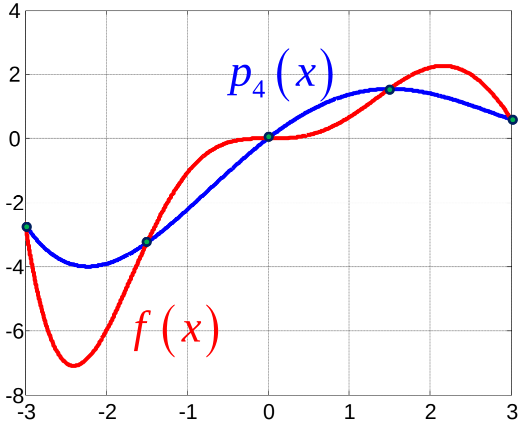

## Polynôme d'ordre 2



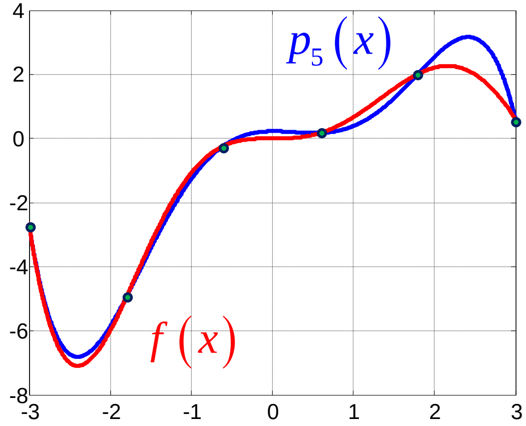

## Polynôme d'ordre 3



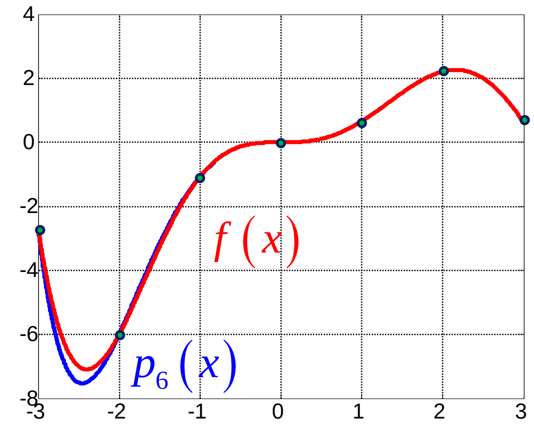

## Polynôme d'ordre 4




## Polynôme d'ordre 5




## Polynôme d'ordre 6




**Remarque:** Calculs simplifiés: pas besoin d'inversion de matrices.
Le calcul pour *n-1* points devient obsolète pour *n* points.

# Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

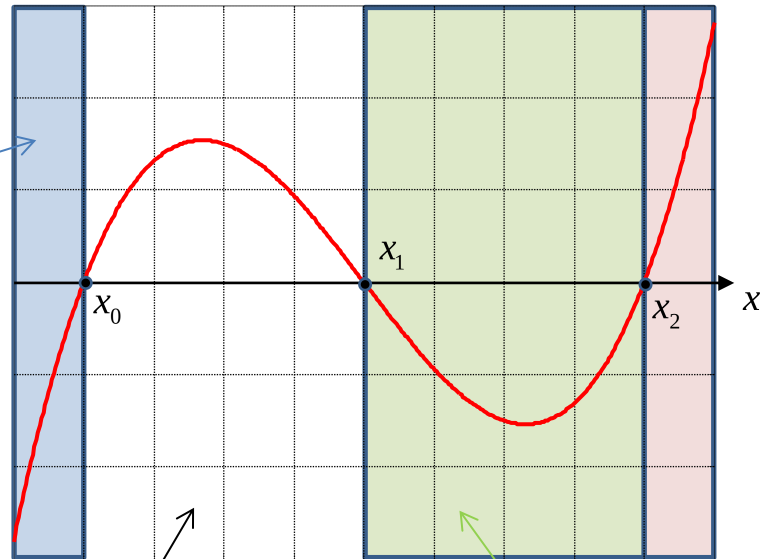
- **Interpolation polynomiale**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base canonique**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base de Lagrange**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base de Newton**
  - Erreur d'interpolation
  - Interpolation d'Hermite
  - Limites de l'interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

# Polynôme d'interpolation: base de Newton

$$\psi_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$




$x < x_0 < x_1 < x_2$

$$\begin{cases} (x - x_0) < 0 \\ (x - x_1) < 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) < 0$

$\psi_2(x) < 0$, pour $x < x_0$

$x_0 < x_1 < x_2 < x$

$$\begin{cases} (x - x_0) > 0 \\ (x - x_1) > 0 \\ (x - x_2) > 0 \end{cases}$$

$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$x_0 < x < x_1 < x_2$

$$\begin{cases} (x - x_0) > 0 \\ (x - x_1) < 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$x_0 < x_1 < x < x_2$

$$\begin{cases} (x - x_0) > 0 \\ (x - x_1) > 0 \\ (x - x_2) < 0 \end{cases}$$

$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) < 0$

3 changements de signe

$$\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

**Polynôme de degré n**

**n changements de signe**

# Polynôme d'interpolation: base de Newton

- **Polynôme d'ordre 0** $\{x_0\}$ $\quad p_0(x) = f(x_0) = a_0^h \psi_0(x) \quad a_0^h = f(x_0)$

- **Polynôme d'ordre 1** $\{x_0, x_1\}$

$$p_1(x) = p_0(x) - p_0(x_1) l_1^{(1)}(x) + f(x_1) l_1^{(1)}(x) = p_0(x) + \left(f(x_1) - p_0(x_1)\right) l_1^{(1)}(x)$$

$$= \left(f(x_1) - p_0(x_1)\right) \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} = p_0(x) + \frac{f(x_1) - p_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = p_0(x) + a_1^h \psi_1(x)$$

$$\boxed{a_1^h = \frac{f(x_1) - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_0}}$$

- **Polynôme d'ordre 2** $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$p_2(x) = p_1(x) + \left(-p_1(x_2) + f(x_2)\right) l_2^{(2)}(x) = p_1(x) + \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= p_1(x) + a_2^h \psi_2(x) \qquad \boxed{a_2^h = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$$

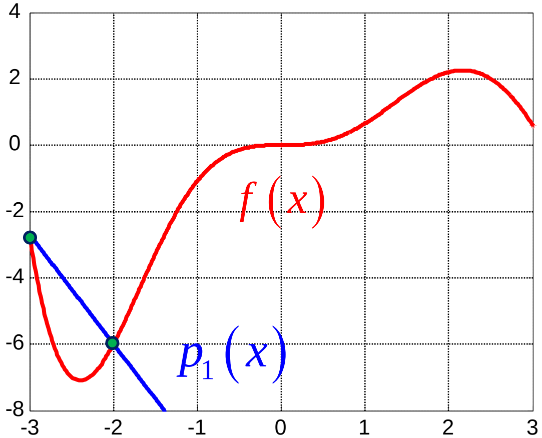
- **Polynôme d'ordre N** $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

$$p_N(x) = p_{N-1}(x) + \frac{f(x_N) - p_{N-1}(x_N)}{(x_N - x_0)\ldots(x_N - x_{N-1})}(x - x_0)\ldots(x - x_{N-1})$$

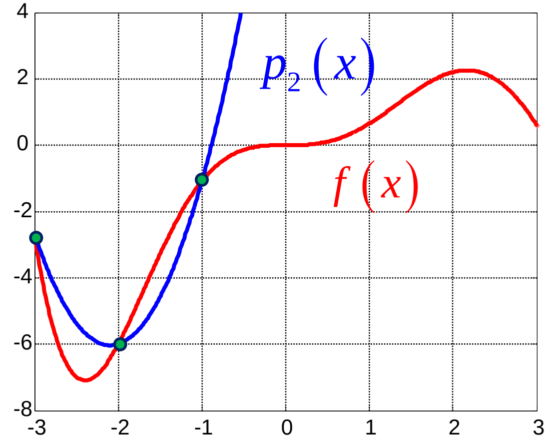
$$= \sum_{i=0}^{N} a_i^h \psi_i(x) \qquad \boxed{a_N^h = \frac{f(x_N) - p_{N-1}(x_N)}{(x_N - x_0)\ldots(x_N - x_{N-1})}}$$

# Polynôme d'interpolation: base de Newton

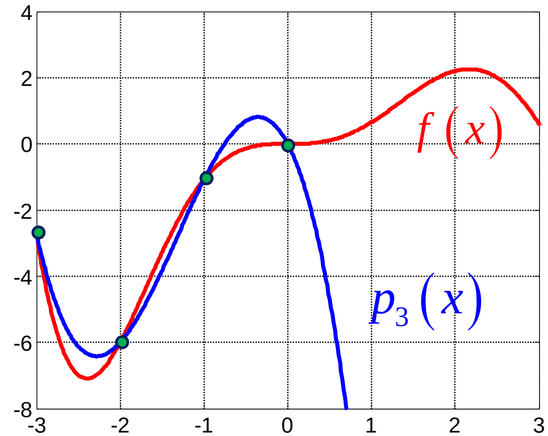
$p_1(x) = f(x_0) + a_1^h \psi_1(x)$



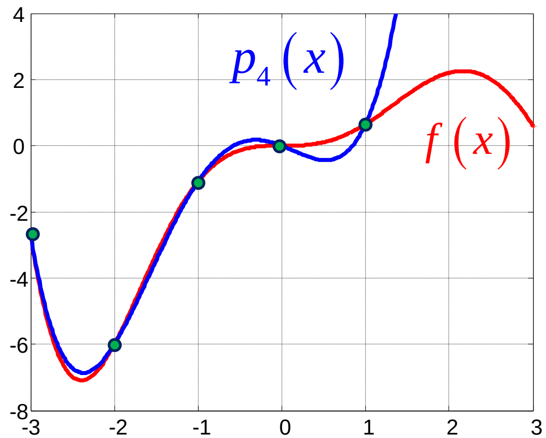

$p_2(x) = p_1(x) + a_2^h \psi_2(x)$



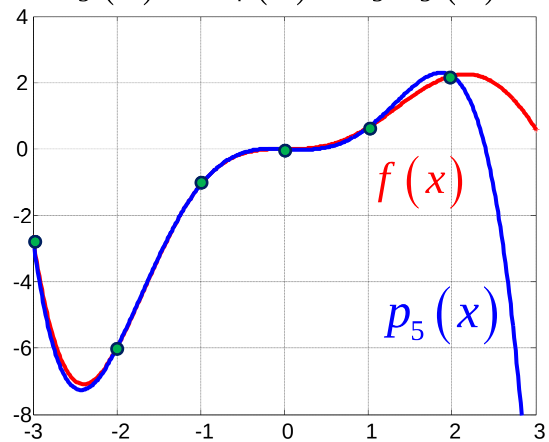

$p_3(x) = p_2(x) + a_3^h \psi_3(x)$



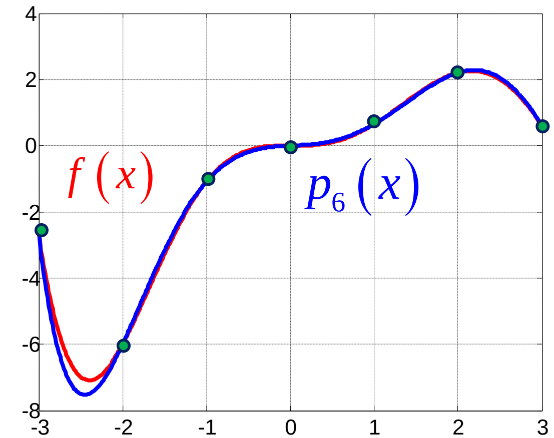

$p_4(x) = p_3(x) + a_4^h \psi_4(x)$




$p_5(x) = p_4(x) + a_5^h \psi_5(x)$




$p_6(x) = p_5(x) + a_6^h \psi_6(x)$




**Remarque:** Soit $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^h h_i(x)$ la fonction polynôme qui interpole *f* sur $\{x_0, .., x_k, .., x_n\}$

Alors le polynôme d'interpolation sur $\{x_0, .., x_k\}$ est $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i^h h_i(x)$

# Polynôme d'interpolation: différences divisée

$$p_N(x) = p_{N-1}(x) + a_N^h \psi_N(x)$$

Coefficient dominant de $P_N$ $a_N^h = \dfrac{f(x_N) - p_{N-1}(x_N)}{(x_N - x_0)\ldots(x_N - x_{N-1})} \triangleq f[x_0, \ldots, x_N]$ **Différences divisées relatives à** $\{x_0, \ldots, x_N\}$

**Propriété:** La différence divisée est indépendante de l'ordre des points de support

$$p_0(x) = a_0^h \psi_0(x) = a_0^h \quad \Rightarrow \quad f[x_0] = f(x_0)$$

$$p_1(x) = p_0(x) + \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)\psi_1(x) \quad \Rightarrow \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = g\left(f[x_0, x_1], f[x_1, x_2]\right) = ?$$

***On cherche une expression récursive pour f[ ]***

# Polynôme d'interpolation: différences divisée

$$p_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} p_{1\to k}(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_0} p_{0\to k-1}(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_0 \\ \dfrac{x_i - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) & \text{si } x = x_i \neq x_0, x_k \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \end{cases} + \quad = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x = x_0 \\ \dfrac{x_k - x_i}{x_k - x_0} f(x_i) & \text{si } x = x_i \neq x_0, x_k \\ 0 & \text{si } x = x_k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x = x_0 \\ \dfrac{x_k - x_i}{x_k - x_0} f(x_i) + \dfrac{x_i - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) = \dfrac{x_k - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) = f(x_i) & \text{si } x = x_i \neq x_0, x_k \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \end{cases}$$

Coefficient dominant $\underbrace{\phantom{x}}_{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]}$

$$= \left(\frac{x - x_0}{x_k - x_0}\right) \underbrace{coefdom\left[p_{1\to k}(x)\right]}_{f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]} + \left(\frac{x_k - x}{x_k - x_0}\right) \underbrace{coefdom\left[p_{k-1}(x)\right]}_{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}$$

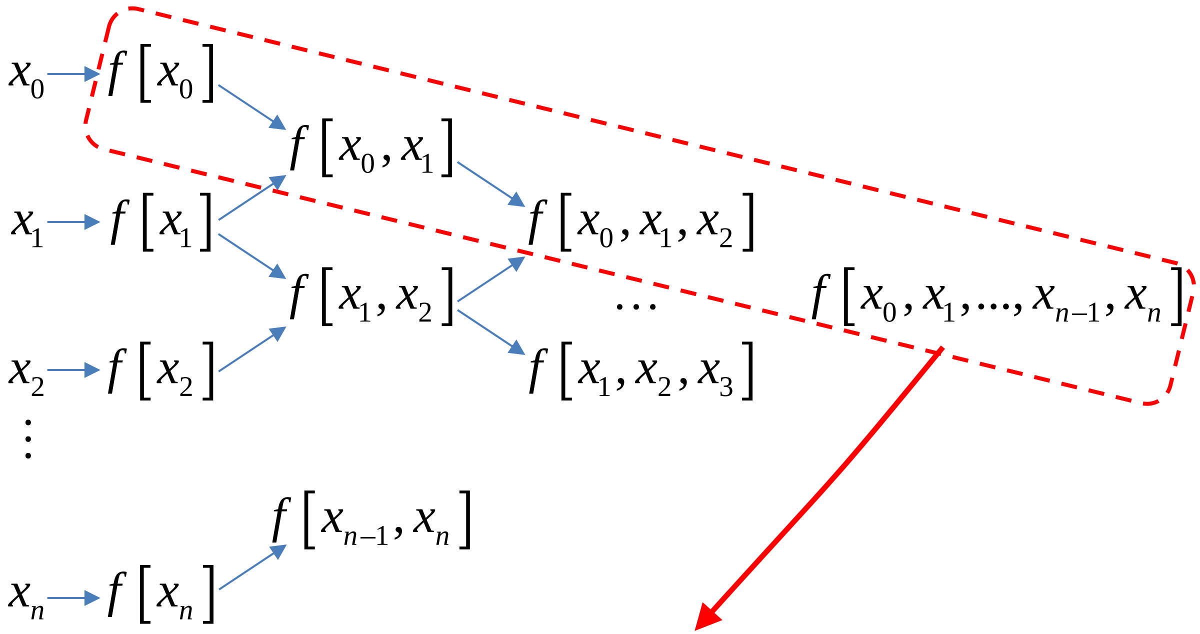
$$\boxed{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}}$$

# Polynôme d'interpolation: différences divisée

## Expression récursive

$$f\left[x_i\right] = f\left(x_i\right)$$

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\right] = \frac{f\left[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\right]}{x_k - x_0}$$




$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left[x_0, \ldots, x_i\right] \psi_i(x)$$

# Polynôme d'interpolation: différences divisée

## Expression récursive

$$f\left[x_i\right] = f\left(x_i\right)$$

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\right] = \frac{f\left[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\right]}{x_k - x_0}$$

## Algorithme

**pour** i=0 à n **faire**

$$\mathrm{Df}\left(\mathrm{i,0}\right) \leftarrow \mathrm{f}\left(i\right)$$

**fin pour**

**pour** colonne=1 à n **faire**

**pour** ligne=colonne à n **faire**

$$\mathrm{Df}\left(\mathrm{ligne,colonne}\right) \leftarrow \frac{\mathrm{Df}\left(\mathrm{ligne+1,colonne\text{-}1}\right) - \mathrm{Df}\left(\mathrm{ligne,colonne\text{-}1}\right)}{\mathrm{x}\left(\mathrm{ligne}\right) - \mathrm{x}\left(\mathrm{ligne\text{-}colonne}\right)}$$

**fin pour**

**fin pour**

**pour** i=0 à n **faire**

$$\mathrm{sortie}\left(i\right) \leftarrow \mathrm{Df}\left(\mathrm{i,i}\right)$$

**fin pour**

# Polynôme d'interpolation: différences divisée

## On crée un tableau des x et des y (par simplicité)

$$\mathbf{X} = \left[x_0, x_1, x_2, \ldots, y_N\right] \qquad \mathbf{Y} = \left[y_0, y_2, y_2, \ldots, y_N\right]$$

```
double* x = calloc( N, sizeof(double) );
double* y = calloc( N, sizeof(double) );
l = 0;
for( nPts.points->current = nPts.points->root; hasNext( nPts.points ); getNext(
nPts.points ) ) {
Point* pt = ((Point*)(nPts.points->current->data));
        // On met les valeurs de x et y
        x[l] = pt->x;
        y[l] = pt->y;
        l++;
}
```

## On crée une matrice triangulaire et on met les valeurs de y dans la 1ère colonne

```
double **matDF = malloc( N * sizeof(double*) );
for( l = 0; l < N; l++ )
        matDF[l] = calloc( l+1, sizeof(double) );
matDF[l][0] = y[l];
}
```

$$MatDF = \left.\begin{bmatrix} y_0 & & & \\ y_1 & 0 & & \\ y_2 & 0 & 0 & \\ y_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} N$$

# Polynôme d’interpolation: différences divisée

## On calcule les valeurs de f[x0, ..., xN]

```
for( l = 0; l < N; l++ ) {
        for( c = 1; c <= l; c++ )
                matDF[l][c] = ( matDF[l][c-1] - matDF[l-1][c-1] ) / ( x[l] - x[l-c] );
}
```

## On crée un polynome

```
Polynome pDF = creerPolynome( N );
```

## On complète le polynôme d'interpolation

```
for( l = 0; l < N; l++ ) {
        pDF.A[l] = matDF[l][l];
        pDF.C[l] = x[l];
}
```

← **Les coefficients sont les valeurs de la diagonale de matDF**

← **Les centres sont les valeurs de x0 a xN**

$$MatDF = \left.\begin{bmatrix} y_0 & & & \\ y_1 & * & & \\ y_2 & * & * & \\ y_N & * & * & * \end{bmatrix}\right\} N$$

**Polynôme d'ordre 1** $\{x_0, x_1\}$

$$x_0 \quad f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$x_1 \quad f[x_1] = f(x_1)$$

$$p_1(x) = f[x_0]\psi_0 + f[x_0, x_1]\psi_1 = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)x_1 - f(x_0)x_0 - x_0 f(x_1) + x_0 f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}x$$

$$= \underbrace{\left(\frac{f(x_0)x_1 - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}\right)}_{a_0} + \underbrace{\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)}_{a_1} x$$

(représentation en base canonique)

# Exemples

- **Polynôme d'ordre 2** $\left\{x_0, x_1, x_2\right\}$

$$x_0 \quad f\left[x_0\right] = f\left(x_0\right)$$

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

$$x_1 \quad f\left[x_1\right] = f\left(x_1\right)$$

$$f\left[x_0, x_1, x_2\right] = \frac{\dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}}{\left(x_2 - x_0\right)}$$

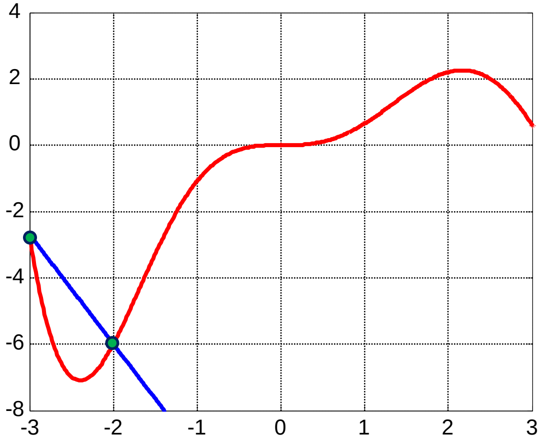
$$f\left[x_1, x_2\right] = \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$$

$$x_2 \quad f\left[x_2\right] = f\left(x_2\right)$$

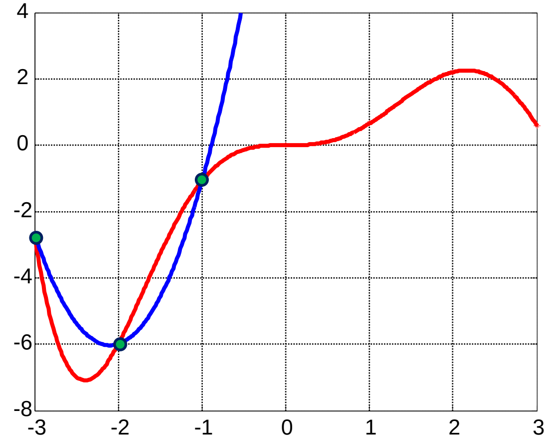
$$p_2\left(x\right) = f\left[x_0\right]\psi_0 + f\left[x_0, x_1\right]\psi_1 + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\psi_2 = p_1\left(x\right) + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\psi_2\left(x\right)$$

# Polynôme d'interpolation: base de Newton

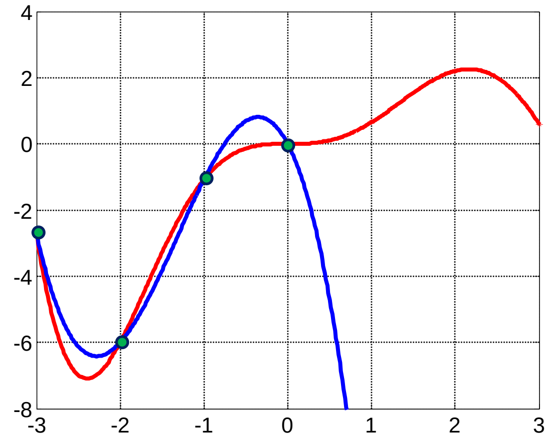
$$p_1(x) = f(x_0) + a_1^h \psi_1(x)$$



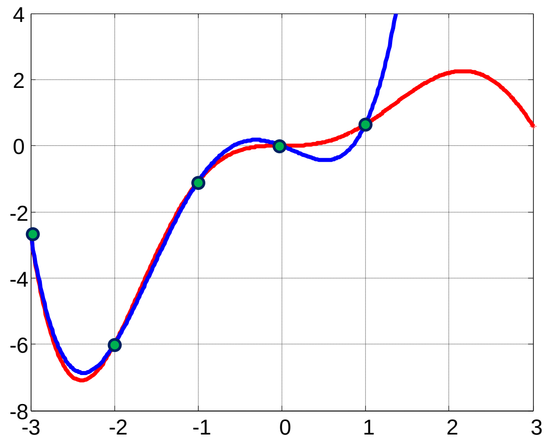

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2^h \psi_2(x)$$



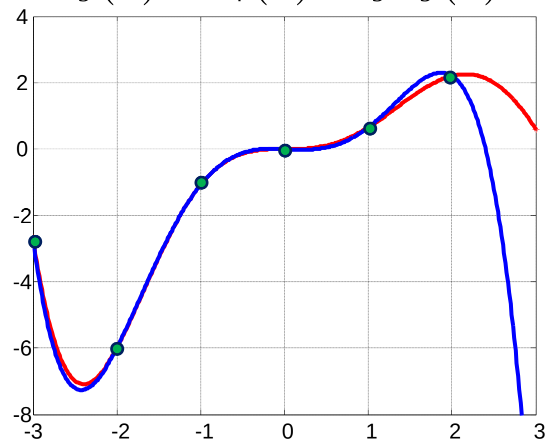

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3^h \psi_3(x)$$



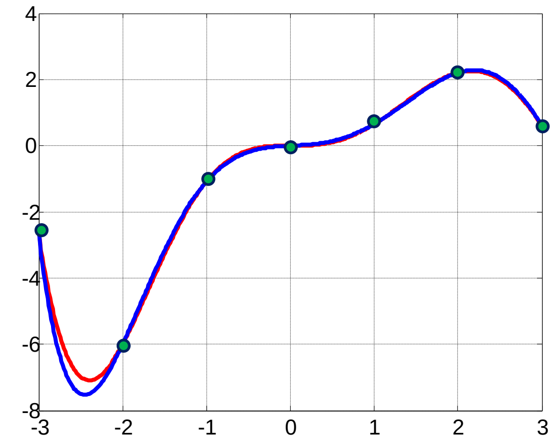

$$p_4(x) = p_3(x) + a_4^h \psi_4(x)$$




$$p_5(x) = p_4(x) + a_5^h \psi_5(x)$$




$$p_6(x) = p_5(x) + a_6^h \psi_6(x)$$




**Remarque:** Soit $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^h \psi_i(x)$ la fonction polynôme qui interpole *f* sur $\{x_0, .., x_k, .., x_n\}$

Alors le polynôme d'interpolation sur $\{x_0, .., x_k\}$ est $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i^h \psi_i(x)$

# Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

- **Interpolation polynomiale**
  - **Introduction générale et rappels de mathématique**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base canonique**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base de Lagrange**
  - **Polynôme d'interpolation: calcul en base de Newton**
  - **Erreur d'interpolation**
  - Interpolation d'Hermite
  - Limites de l'interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

# Polynôme d'interpolation: erreur

$$f : \mathrm{I} = [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \{x_0,\dots,x_n\} \qquad \bar{x} \in [a,b]$$

- **Erreur d'interpolation** $$e_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = f[x_0,\dots,x_n,\bar{x}]\,h_{n+1}(\bar{x})$$
$$= \underbrace{f[x_0,\dots,x_n,\bar{x}]}_{\text{Fonction interpolé}} \underbrace{\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)}_{\text{Points du support}}$$

- **Théorème:** Si f est de classe $C^k$ sur I et $\{x_0,\dots,x_k\}$ des points distincts de $[a,b]$.

  Alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que:
$$f[x_0,\dots,x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

$$e_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)$$

**Le calcul de l'erreur d'interpolation demande la connaissance de la fonction!**

# Polynôme d'interpolation: erreur

$$\left|e_n(\bar{x})\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)\right| \qquad f \in C^{(n+1)}[a,b] \Rightarrow \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le M^{(n)} \quad \text{avec} \quad M^{(n)} = \max_{x\in[a,b]} f^{(n+1)}(x)$$

$$\left|e_n(\bar{x})\right| = \frac{M^{(n)}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)\right|$$

- $$\left|\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)\right| \le (b-a)^{n+1} = h^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left|e_n(\bar{x})\right| \le M^{(n)}\frac{h^n}{(n+1)!}$$

$$\lim_{h\to 0}\left|e_n(\bar{x})\right| = 0$$

- **Minimisation de l'erreur**

$$\min_{x_i}\left|e_n(\bar{x})\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\min_{x_i}\left|\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)\right| \qquad \min\left|\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow x_i \quad \text{Zéros polynôme Tchebychev}$$

$$x_i^{(n)} \in [\mathrm{a},b] \qquad x_i^{(n)} = \frac{(b-a)}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{a+b}{2} \qquad i = 0,1,\dots,n$$

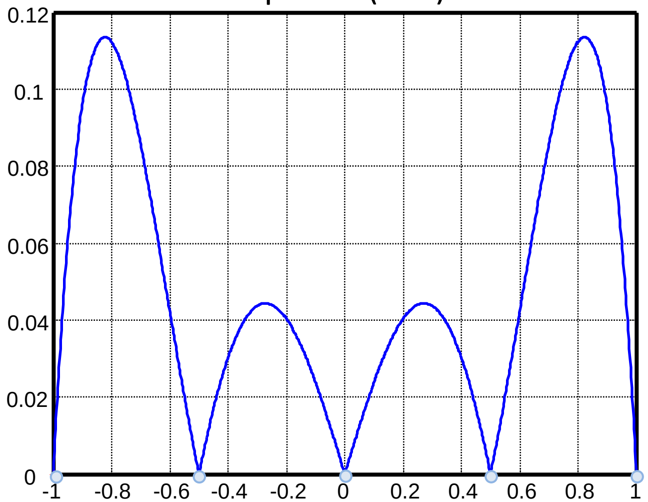
**Choix optimal des points d'interpolation**

# Polynôme d'interpolation: erreur

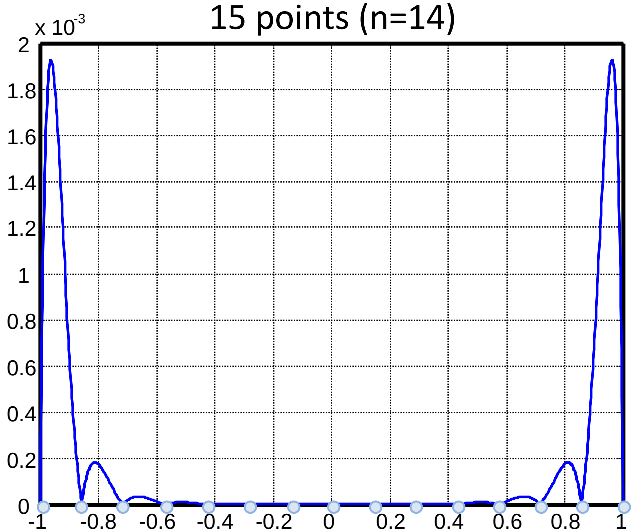
$$\left|\prod_{i=0}^{n}\left(\bar{x}-x_i\right)\right|$$

## nœuds équirépartis

5 points (n=4)

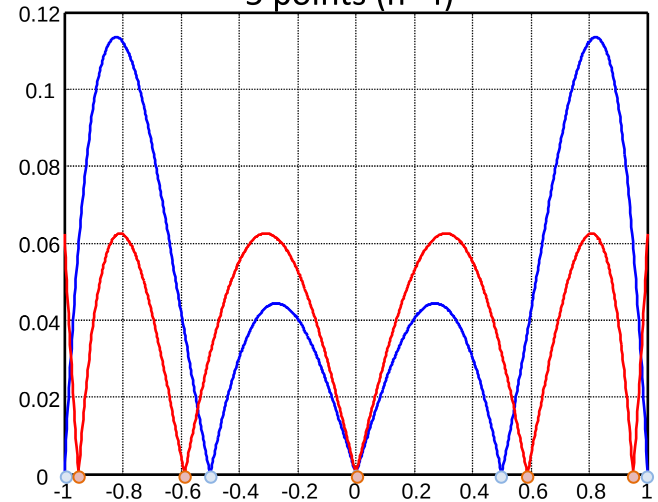



15 points (n=14)

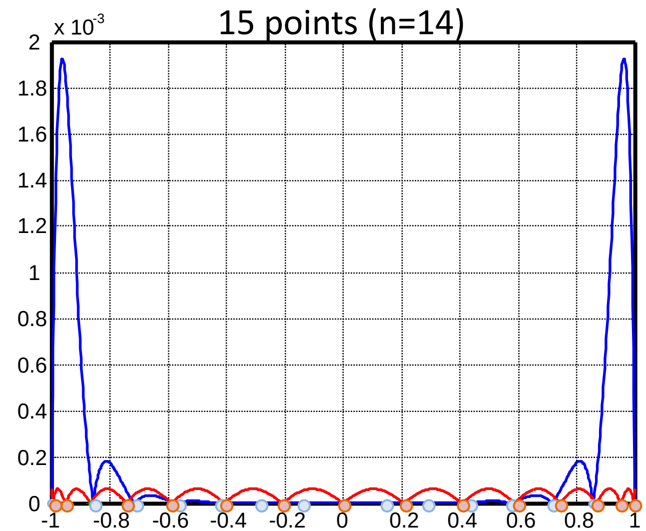



## Choix optimal des points d'interpolation

5 points (n=4)



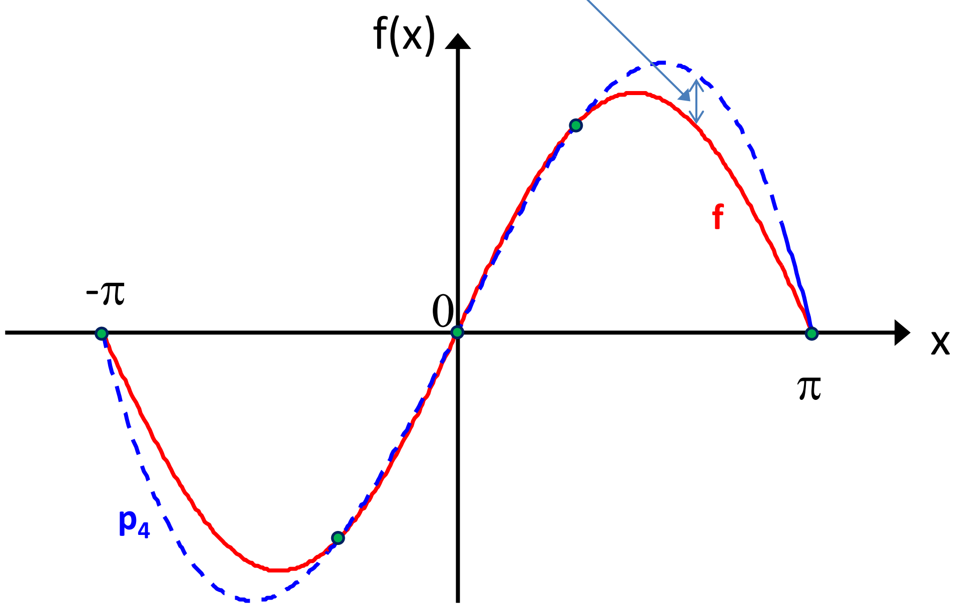

15 points (n=14)



# Polynôme d'interpolation: erreur

$$I=[-\pi,\pi] \qquad f(x)=\sin(x) \qquad f^{(n+1)}(x)=\pm\begin{cases}\sin(x)\\ \cos(x)\end{cases}$$

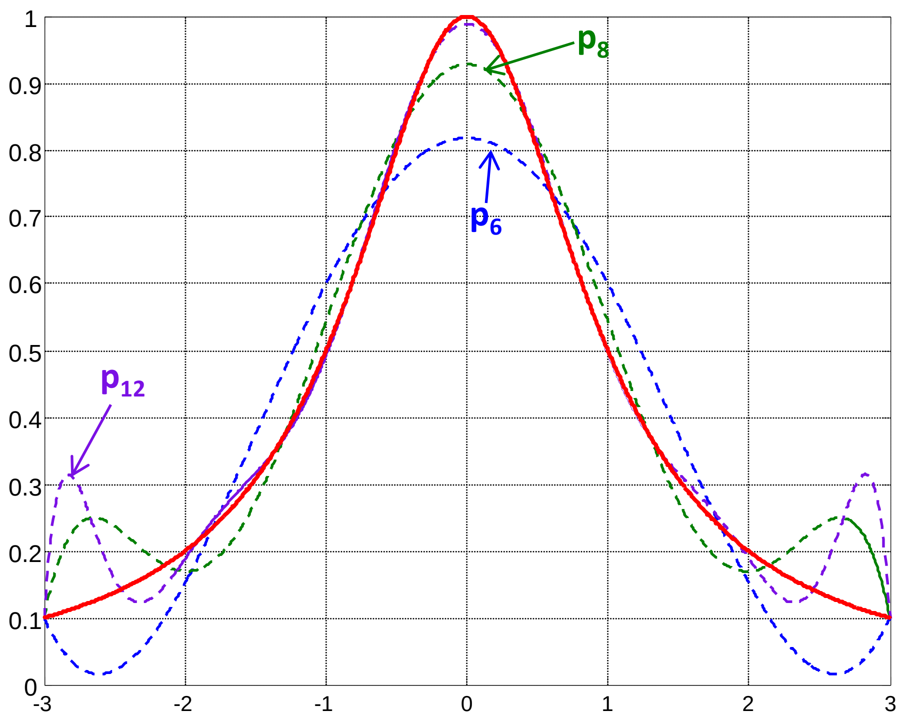
$$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\le 1 \qquad \left|e_n(x)\right|\le\frac{(\pi+\pi)^n}{(n+1)!}=\frac{(2\pi)^n}{(n+1)!}$$




$$d_\infty(f,p_n)=\sup_{x\in I}\left|f(x)-p_n(x)\right|\le\frac{1}{(n+1)!}\left|\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right|\le\frac{(2\pi)^n}{(n+1)!}$$

# Polynôme d'interpolation: erreur

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$ Fonction de Runge




$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} - \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{384x^4}{\left(1+x^2\right)^5} - \frac{288x^2}{\left(1+x^2\right)^4} + \frac{24}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{3.7\cdot 10^9 x^{10}}{\left(1+x^2\right)^{11}} - \frac{8.4\cdot 10^9 x^8}{\left(1+x^2\right)^{10}} + \frac{6.5\cdot 10^9 x^6}{\left(1+x^2\right)^9} - \frac{2\cdot 10^9 x^4}{\left(1+x^2\right)^8} + \frac{2.2\cdot 10^8 x^2}{\left(1+x^2\right)^7} - \frac{3.6\cdot 10^6}{\left(1+x^2\right)^6}$$

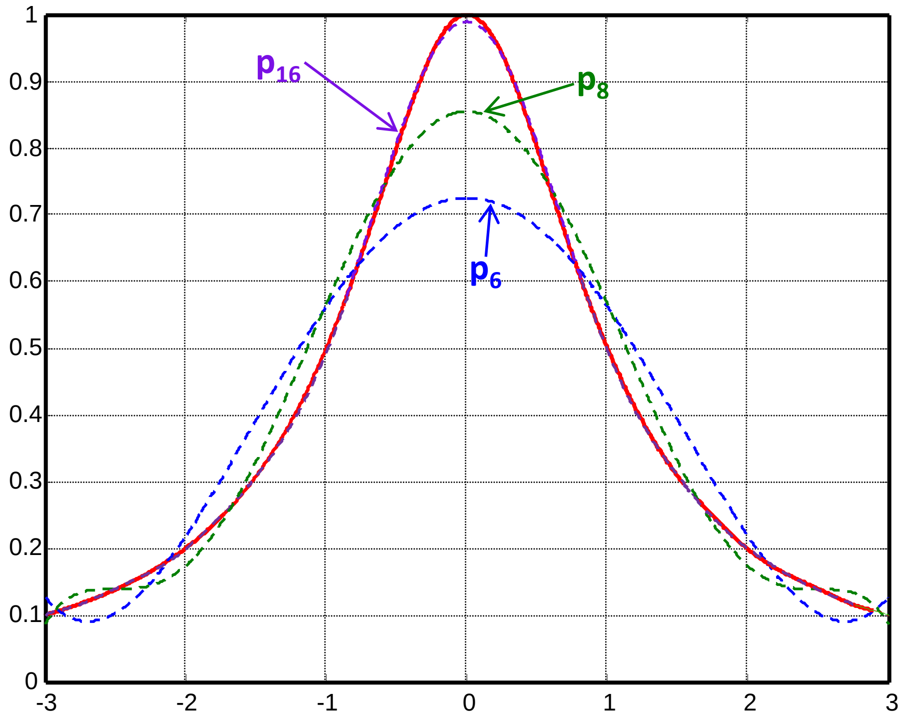
$$\vdots$$

**nœuds équirépartis**

Les polynômes d'interpolation présentent des oscillations qui augmentent avec le degré du polynôme.

# Polynôme d'interpolation: erreur

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$ Fonction de Runge




$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} - \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{384x^4}{\left(1+x^2\right)^5} - \frac{288x^2}{\left(1+x^2\right)^4} + \frac{24}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{3.7\cdot 10^9 x^{10}}{\left(1+x^2\right)^{11}} - \frac{8.4\cdot 10^9 x^8}{\left(1+x^2\right)^{10}} + \frac{6.5\cdot 10^9 x^6}{\left(1+x^2\right)^9} - \frac{2\cdot 10^9 x^4}{\left(1+x^2\right)^8} + \frac{2.2\cdot 10^8 x^2}{\left(1+x^2\right)^7} - \frac{3.6\cdot 10^6}{\left(1+x^2\right)^6}$$

$$\vdots$$

**Choix optimal des points d'interpolation**

# Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

- **Interpolation polynomiale**
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base canonique
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Lagrange
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Newton
  - Erreur d'interpolation
  - Interpolation d'Hermite
  - Limites de l'interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

- Soit $N \in \mathbb{N}^+$ et $\{x_0,\ldots,x_N\}$ des points distincts de $[a,b]$. Le **polynôme d'interpolation d'Hermite** est un polynôme *p* de degré inferieur ou égal à 2(N+1) tel que

$$\left.\begin{cases} p_N^H(x_i) = f(x_i) & \forall i \in \{0,..,N\} \\ p_N^H{}'(x_i) = f'(x_i) & \end{cases}\right\} \text{2(N+1) équations}$$

- **Remarque:** $p_N^H(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2N} x$ avec 2(N+1) constantes à déterminer

$\Downarrow$

**Existence et unicité du polynôme d'interpolation d'Hermite**

- Soit $N \in \mathbb{N}^+$ et $\{x_0,\ldots,x_N\}$ des points distincts de $[a,b]$. Le **polynôme d'interpolation d'Hermite généralisé** est un polynôme *p* de degré inferieur ou égal à K tel que

$$\left.\begin{cases} p(x_i) = f(x_i) & \forall i \in \{0,..,N\} \\ p^{(s)}(x_i) = f^{(s)}(x_i) & \forall s \in \{0,..,P\} \end{cases}\right\} \text{K=N(P+1) équations}$$

# Interpolation d'Hermite: exemple

- **Polynôme d'ordre 1** $\{x_0\}$ $\quad p_1^H(x_i) = a_0 + a_1 x$

$$\begin{cases} p_1^H(x_0) = f(x_0) \\ p_1^H{}'(x_0) = f'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$$

$$p_1^H(x_i) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x$$

---

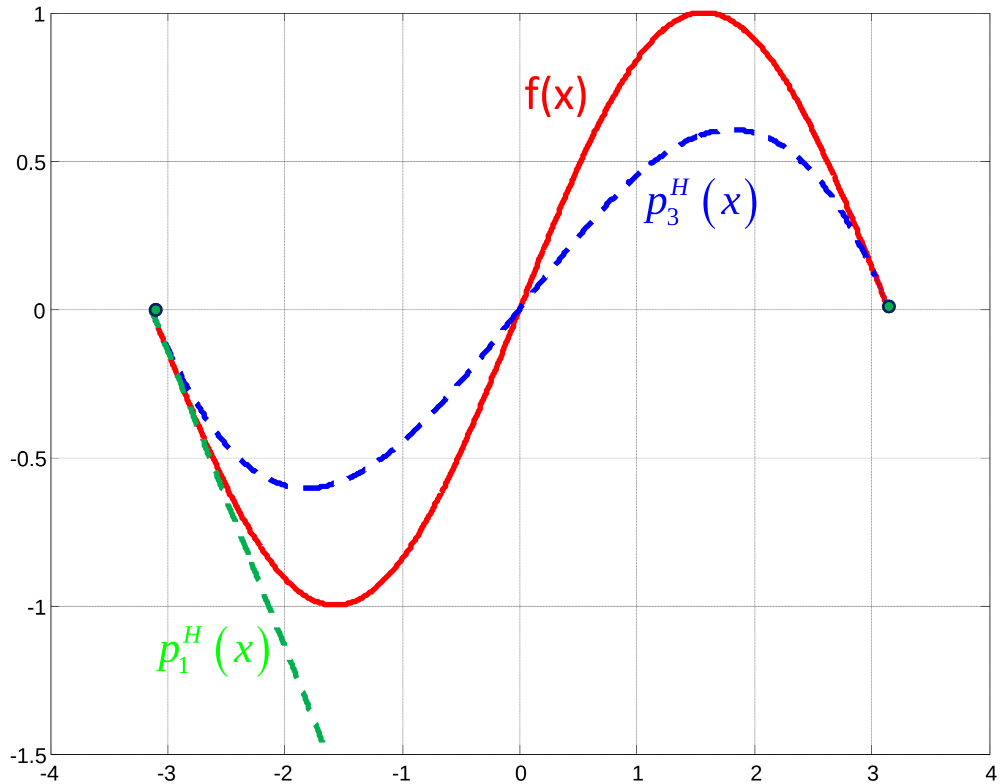
- **Polynôme d'ordre 3** $\{x_0, x_1\}$ $\quad p_3^H(x_i) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\begin{cases} p_3^H(x_0) = f(x_0) \\ p_3^H(x_1) = f(x_1) \\ p_3^H{}'(x_0) = f'(x_0) \\ p_3^H{}'(x_1) = f'(x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = f(x_1) \\ a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2 = f'(x_0) \\ a_1 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2 = f'(x_1) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f'(x_0) \\ f'(x_1) \end{bmatrix}$$

# Interpolation d'Hermite: exemple

$$f(x) = \sin(x) \quad x_0 = -\pi \quad x_1 = \pi$$



# Interpolation d'Hermite: différence finies

$$\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) = f[x_0, x_0]$$

$$f[x_0, \dots, x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\begin{array}{llll}
x_0 & f[x_0] & & \\
 & & f[x_0, x_0] & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0, x_0, x_0, x_1] \\
 & & f[x_0, x_1] & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_1, x_1] \quad \dots \\
 & & f[x_1, x_1] & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1, x_1, x_1, x_2] \\
 & & f[x_1, x_2] & \\
\vdots & & & \\
x_N & & &
\end{array}$$

$$f[x_1, x_1] = f'(x_1)$$

$$\boxed{p_n^H(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i]\, \psi_i(x)}$$

# Interpolation d'Hermite: exemple

- **Polynôme d'ordre 1** $\{x_0\}$

$$x_0 \quad f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$$

$$x_0 \quad f[x_0] = f(x_0)$$

$$p_1^H(x) = f(x_0) - f'(x_0)\psi_1(x) = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

- **Polynôme d'ordre 3** $\{x_0, x_1\}$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0,x_0] = f'(x_0) & & & \\
x_0 & f(x_0) & & f[x_0,x_0,x_1] & & \\
 & & f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & & \ldots & f[x_0,x_0,x_1,x_1] \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_1] & & \\
 & & f[x_1,x_1] = f'(x_1) & & & \\
x_1 & f(x_1) & & & &
\end{array}$$

# Plan du cours

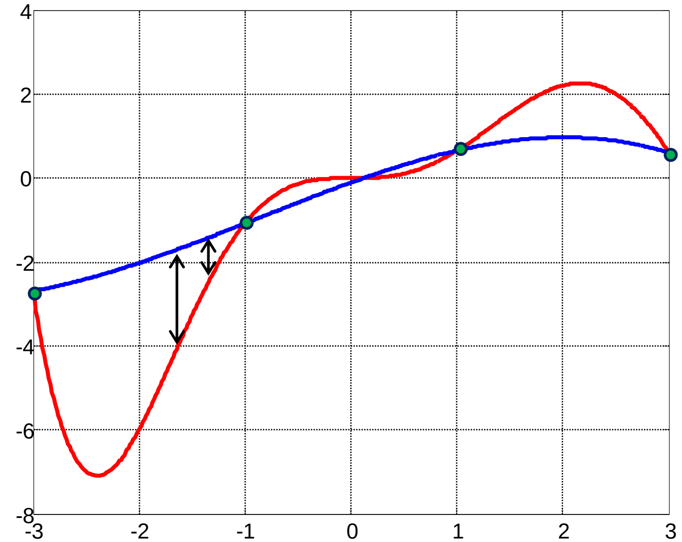
- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

- Interpolation polynomiale
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base canonique
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Lagrange
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Newton
  - Erreur d'interpolation
  - Interpolation d'Hermite
  - Limites de l'interpolation polynomiale
  - Spline

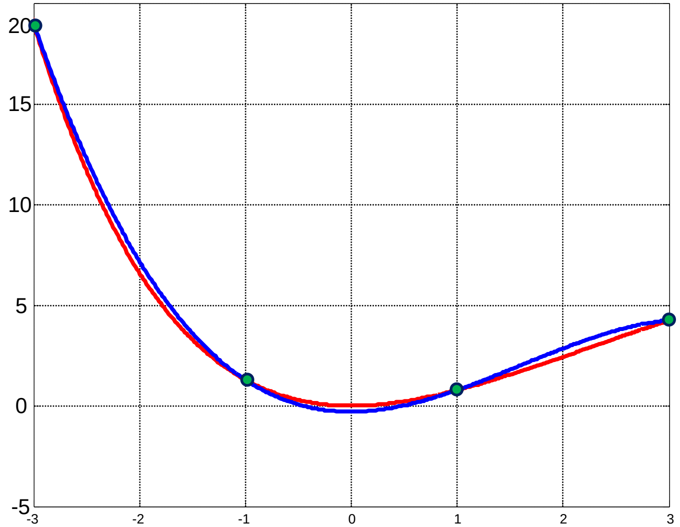
- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

- **L'erreur est petite près d'un point du support.**

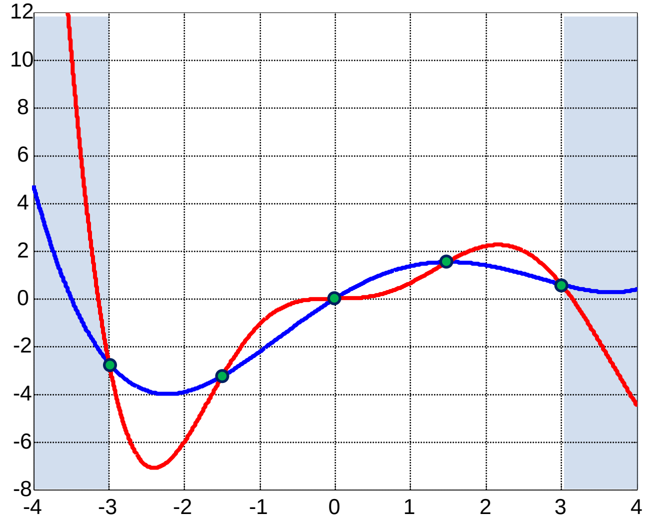



- **L'erreur est d'autant plus petite que la fonction est lisse.**

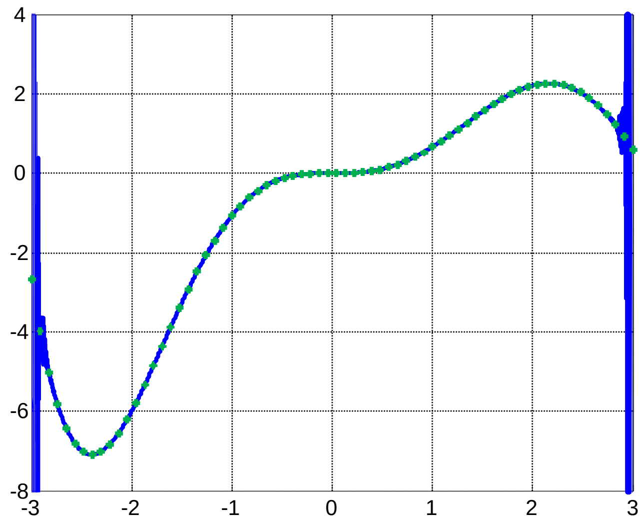



**Remarque**: si f est un polynôme de degré <=n, l'erreur est nulle.

- **L'erreur d'extrapolation est typiquement supérieure à celle d'interpolation**



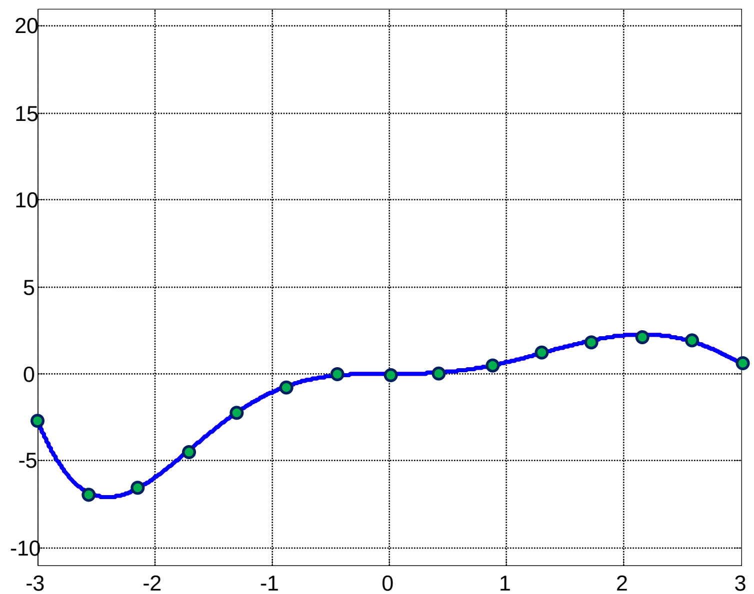

- **La suite $p_n(x)$ ne converge pas nécessairement vers *f*: même avec des fonctions de classe $C^{\infty}(I)$**

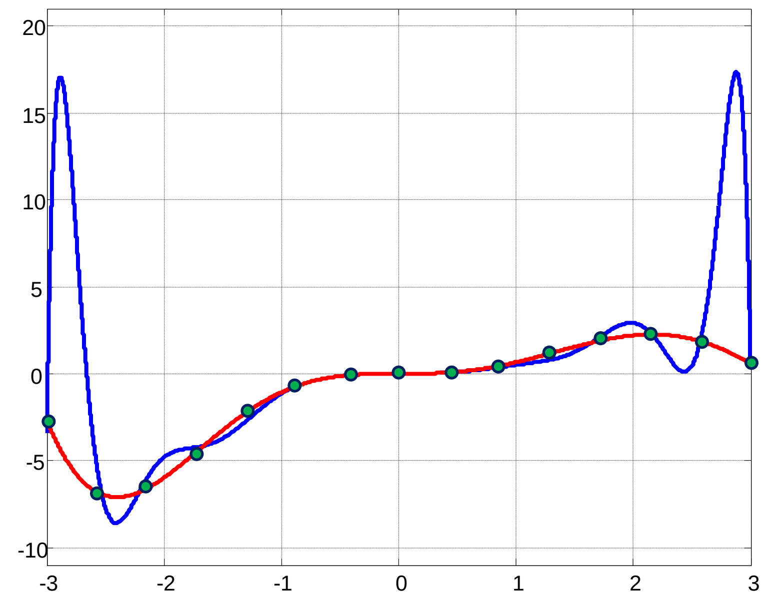



**Remarque**: Il ne convient pas d'augmenter trop le degré du polynôme d'interpolation

## Instabilité de l'interpolation

Une petite variation des données, pour des nœuds équirépartis, cause une large variation de l'approximation.



# Plan du cours

- Représentation d'un nombre en machine, erreurs numériques, etc…

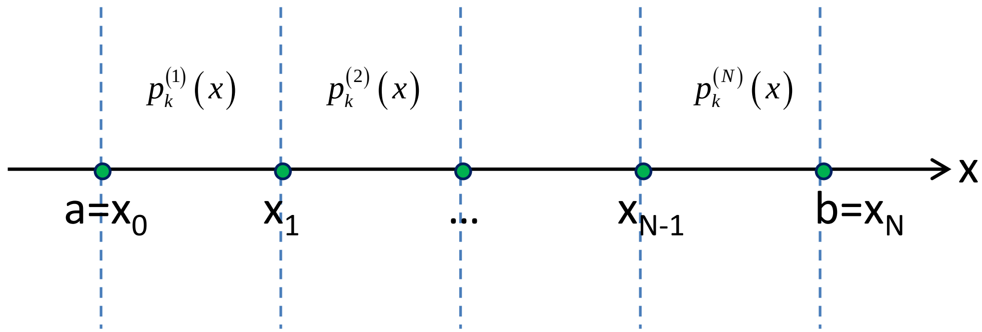
- **Interpolation polynomiale**
  - Introduction générale et rappels de mathématique
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base canonique
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Lagrange
  - Polynôme d'interpolation: calcul en base de Newton
  - Erreur d'interpolation
  - Interpolation d'Hermite
  - Limites de l'interpolation polynomiale
  - Spline

- Intégration numérique

- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

# Spline

Découpage de l'intervalle I=[a,b] in N sous intervalles




- La **spline** s(x) est une fonction définie par morceaux par des polynômes d'ordre K,

$$s(x) = \begin{cases} p_k^{(1)}(x) & \text{si} \quad x_0 \le x < x_1 \\ p_k^{(2)}(x) & \text{si} \quad x_1 \le x < x_2 \\ & \vdots \\ p_k^{(N)}(x) & \text{si} \quad x_{N-1} \le x < x_N \end{cases}$$

tel que

$$s(x_i) = f(x_i) \qquad \forall i = 0, \dots, N$$

# Spline

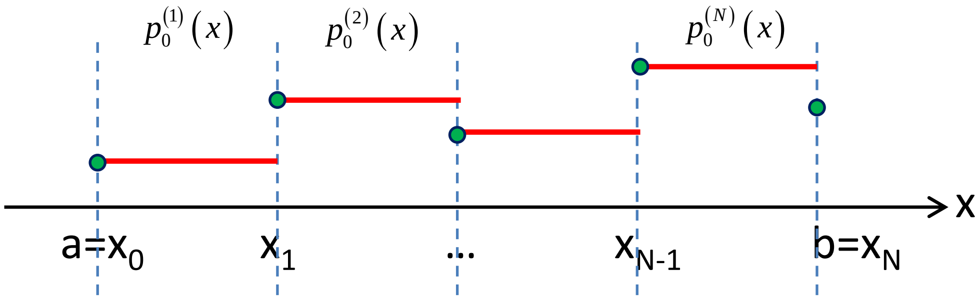
- **ordre K=0**

N+1 équations

$$s(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0,\dots,N \quad \Rightarrow \quad p_0^{(i)}(x) = f(x_{i-1})$$

$$p_0^{(i)}(x) = a_0^{(i)} \quad \forall i = 1,\dots,N$$

N coefficients
à déterminer




La **spline** s(x) est discontinue

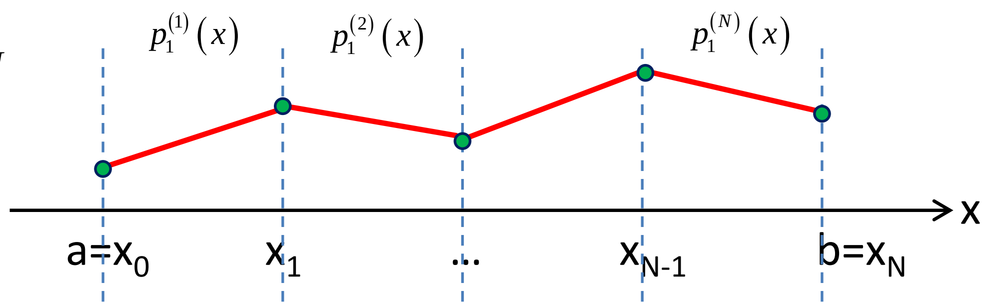
- **ordre K=1** : On impose la continuité de s

(N+1)+(N-1)=2N équations

$$\left.\begin{array}{l} s(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0,\dots,N \\ p_0^{(i)}(x_i) = p_0^{(i+1)}(x_i) \quad \forall i = 1,\dots,N-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p_1^{(i)}(x) = \frac{f(x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_i)} + \frac{f(x_i)(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}$$

$$p_1^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x \quad \forall i = 1,\dots,N$$

2N coefficients
à déterminer




La dérivé de la **spline** s'(x) est discontinue

- **ordre K=2**: On impose la continuité de la dérivé première de s

3N coefficients à déterminer

$$p_2^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x + a_2^{(i)} x^2 \quad \forall i = 1,\dots,N$$

(N+1)+2(N-1)=3N-1 équations

$$\left.\begin{aligned} s(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i = 0,\dots,N \\ p_0^{(i)}(x_i) &= p_0^{(i+1)}(x_i) \quad \forall i = 1,\dots,N-1 \\ \frac{d}{dx} p_0^{(i)}(x_i) &= \frac{d}{dx} p_0^{(i+1)}(x_i) \quad \forall i = 1,\dots,N-1 \end{aligned}\right\}$$

1 degré de liberté

On peux imposer une condition sur la dérivé de s(t)

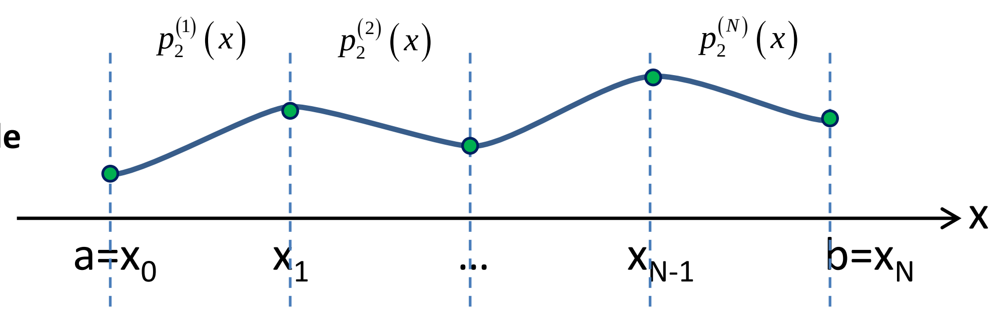
**Spline périodique**

$$\frac{d}{dx} s(a) = \frac{d}{dx} s(b) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} p_2^{(i)}(x_0) = \frac{d}{dx} p_2^{(i+1)}(x_N)$$

**Spline naturelle**

$$\frac{d}{dx} s(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} p_2^{(i)}(x_0) = 0$$

**Spline naturelle**




La dérivé seconde $s^{(2)}(x)$ de la **spline** est discontinue

# Spline

- **ordre K=3 (spline cubique)**: On impose la continuité de la dérivé seconde de s

4N coefficients à déterminer

$$p_3^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + a_2^{(i)}x^2 + a_3^{(i)}x^2 \qquad \forall i = 1,\dots,N$$

(N+1)+3(N-1)=4N-2 équations

$$\left.\begin{aligned} s(x_i) &= f(x_i) \qquad \forall i = 0,\dots,N \\ p_3^{(i)}(x_i) &= p_3^{(i+1)}(x_i) \qquad \forall i = 1,\dots,N-1 \\ \frac{d}{dx}p_3^{(i)}(x_i) &= \frac{d}{dx}p_3^{(i+1)}(x_i) \qquad \forall i = 1,\dots,N-1 \\ \frac{d^2}{dx^2}p_3^{(i)}(x_i) &= \frac{d^2}{dx^2}p_3^{(i+1)}(x_i) \qquad \forall i = 1,\dots,N-1 \end{aligned}\right\}$$

2 degrés de liberté

On peux imposer deux condition sur les dérivé de s(t)

**Spline périodique**

$$\frac{d}{dx}s(a) = \frac{d}{dx}s(b) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}p_3^{(i)}(x_0) = \frac{d}{dx}p_3^{(i+1)}(x_N)$$

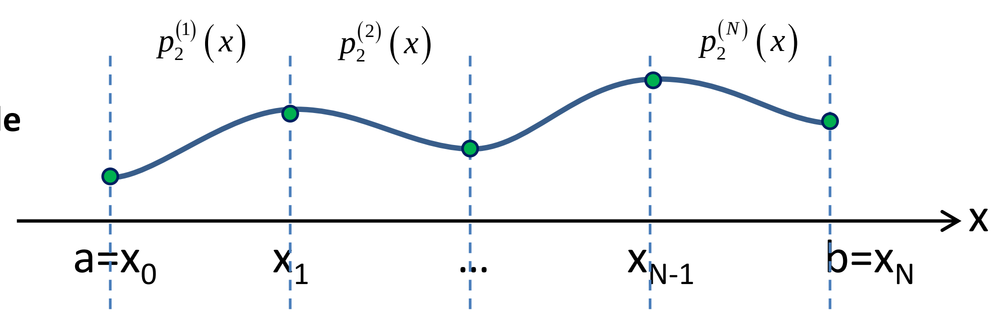
$$\frac{d^2}{dx^2}s(a) = \frac{d^2}{dx^2}s(b) \Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2}p_3^{(i)}(x_0) = \frac{d^2}{dx^2}p_3^{(i+1)}(x_N)$$

**Spline naturelle**

$$\frac{d}{dx}s(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}p_3^{(i)}(x_0) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}s(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2}p_3^{(i)}(x_0) = 0$$

**Spline naturelle**




La dérivé seconde $s^{(2)}(x)$ de la **spline** est discontinue