8. gyakorlat

PRIMITÍV FÜGGVÉNY, HATÁROZATLAN INTEGRÁL 2.

Racionális törtfüggvények primitív függvényei

Racionális törtfüggvénynek nevezzük két polinom hányadosát, azaz a $\dfrac{P}{Q}$ alakú függvényeket, ahol P és $Q \not\equiv 0$ algebrai polinomok. Mivel minden racionális törtfüggvény *folytonos*, így van primitív függvénye bármely olyan *nyílt intervallumon*, ahol a függvény értelmezett. Látni fogjuk, hogy „legalább is elvben” ki lehet számítani ezeket a primitív függvényeket. Tehát a kitűzött cél az alábbi típusú integrálok meghatározása:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \quad (x \in I \subset \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}),$$

ahol P, Q az említett polinomokat jelölik és I egy olyan nyílt intervallum, amelyben nincsenek Q-nak zérushelyei.

Sokszor elemi fogásokkal és az első helyettesítési szabály alkalmazásával ki tudunk integrálni néhány racionális törtfüggvényt. Ezek a módszerek gyors eredményhez vezethetnek, és ha észrevesszük, hogy a feladatunk ilyen módon oldható meg, akkor célszerű ezt az utat választani. Például az:

$$\int \frac{2x^7+x^3}{x^8+x^4+1}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{8x^7+4x^3}{x^8+x^4+1}\, dx = \left(\int \frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(x^8+x^4+1\right) + c \quad (x, c \in \mathbb{R}).$$

integrálnak ez a legegyszerűbb kiszámítási módja. De ha ezt nem vesszük észre, vagy olyan a feladat, hogy nem tudjuk rögtön alkalmazni az elemi módszereket, akkor látni fogjuk, hogy van olyan algoritmikus megoldás, ami elvben mindig alkalmazható racionális törtek integrálására.

Az eljárás alapját a racionális törtek parciális (rész)törtekre való felbontása és a kapott úgynevezett elemi/alap törtek integrálása képezi. A módszer elvben mindig használható, de esetenként igen bonyolult és hosszadalmas számolást igényel. Kezdjük először is az elemi törtek integrálásával.

Alaptípusok (elemi törtek)

1. alaptípus: Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$ adott számok, illetve $I := \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ vagy $I := \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\, dx \qquad (x \in I).$$

Lineáris helyettesítéssel rögtön igazolható, hogy:

$$\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c \qquad (x \in I),$$

illetve, ha $n > 1$, akkor:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\, dx = \int (ax+b)^{-n}\, dx = \frac{(ax+b)^{1-n}}{a \cdot (1-n)} + c \qquad (x \in I).$$

Példák: Ha $x \in \left(-\text{‘}\infty, \frac{7}{3}\right)$, akkor

$$\int \frac{1}{3x-7}\,dx = \frac{\ln|3x-7|}{3} + c = \frac{\ln(7-3x)}{3} + c \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{1}{(3x-7)^2}\,dx = \int (3x-7)^{-2}\,dx = \frac{(3x-7)^{-1}}{3\cdot(-1)} + c = \frac{1}{21-9x} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

2. alaptípus: Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ adott számok, és I olyan nyílt intervallum, amire $ax^2+bx+c \neq 0$ teljesül, ha $x \in I$. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x \in I).$$

A nevező tehát állandó előjelű az I intervallumon, és az integrandus $\dfrac{f'}{f}$ alakú. Ezért

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C \qquad (x \in I,\ C \in \mathbb{R}).$$

Példák:

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2-4\right) + c, \qquad \text{ha } x \in (-\infty,-2) \text{ vagy } x \in (2,+\infty) \text{ és } c \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(4-x^2\right) + c, \qquad \text{ha } x \in (-2,2) \text{ és } c \in \mathbb{R}.$$

3. alaptípus: Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ olyan számok, amelyekre $b^2-4ac < 0$ teljesül. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A nevezőben lévő másodfokú polinomnak nincs valós gyöke, hiszen a diszkriminánsa negatív a $b^2-4ac<0$ feltétel miatt. Az integrandus tehát valóban értelmezhető az egész $\mathbb{R}$-en. Teljes nézetté alakítással:

$$ax^2+bx+c = a\cdot(x+\alpha)^2+\beta,$$

alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\beta > 0$ (mert a másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) számokkal. Ekkor lineáris helyettesítéssel:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a\cdot(x+\alpha)^2+\beta}\,dx = \frac{1}{\beta}\cdot\int \frac{1}{\left(\sqrt{a/\beta}\cdot(x+\alpha)\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{a/\beta}\cdot(x+\alpha)\right)}{\sqrt{a/\beta}} + c = \frac{1}{\sqrt{a\beta}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{a/\beta}\cdot(x+\alpha)\right) + c \qquad (x,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa: Ha $x, c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

4. alaptípus: Legyenek $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olyan számok, amelyekre $b^2 - 4ac < 0$ teljesül. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebben az esetben célszerű a γ és δ egyértelműen létező számokat megkeresni, amivel a számlálót felírhatjuk az:

$$Ax + B = \gamma \cdot (2ax + b) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

alakban. Ezzel a keresett integrált fel tudjuk írni két integrál lineáris kombinációjaként, ahol az egyik integrál a 2. alaptípusból és a másik integrál a 3. alaptípusból való.

5. alaptípus: Legyenek $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, és $1 < n \in \mathbb{N}$ olyan számok, amelyekre $b^2 - 4ac < 0$ teljesül és tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az ilyen integrálok kiszámítása egy $f' \cdot f^{-n}$ típus leválasztása után lineáris helyettesítéssel visszavezethető az alábbi integrálra, amire érvényes a megadott rekurzív formula (ennek igazolása parciális integrálással történik) :

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A fenti formula alkalmazása adott esetben sok számolással jár, ezért a mostani keretek között nem fogunk olyan feladatokat megoldani, amelyek ilyen alaptípusra vezetnek.

Az általános eset (a parciális törtekre bontás módszere)

Tetszőleges $\dfrac{P}{Q}$ racionális törtfüggvény integrálását az teszi lehetővé, hogy *minden ilyen tört felírható egy polinomnak és elemi törteknek (az ún.* ***parciális törteknek****) az összegeként.*

Az eljárás egyes lépései a következők:

$\boxed{\textbf{1. lépés.}}$ **A polinomiális rész leválasztása (maradékos osztás).**

Legyenek P, Q polinomok és Q nem az azonosan 0 polinom. Ekkor egyértelműen léteznek olyan T és R polinomok, hogy az R polinom vagy azonosan 0, vagy a fokszáma kisebb, mint a Q polinom fokszáma, és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_Q).$$

A felbontást *polinomosztással*, de néhány esetben egyszerű átalakításokkal is megkaphatjuk. Például:

$$\frac{2x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} = \frac{2x^4 + 2x + x^2 + 1}{x^3 + 1} = \frac{2x(x^3+1) + x^2 + 1}{x^3 + 1} = 2x + \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}.$$

Erre a lépésre akkor van szükség, ha P foka $\geq$ Q foka. Ha $R \equiv 0$, akkor készen vagyunk, ui.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int T(x)\, dx.$$

A következő két lépésre akkor van szükség, ha R nem azonosan 0.

2. lépés. **A nevező szorzattá alakítása (Q faktorizálása).**

A nevezőben levő Q polinomot (ameddig a valós számtest felett lehetséges) valós együtthatós polinomok szorzatára bontjuk. Például:

$Q(x) = x^2 - 5x + 4 = (x-1) \cdot (x-4),$

$Q(x) = x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1),$

$Q(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3,$

$Q(x) = x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1) \cdot (x^2+1) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1),$

$Q(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$

Figyeljük meg, hogy a felbontásban elsőfokú tényezők, illetve olyan másodfokú tényezők szerepelnek, amelyeknek nincsenek valós gyökei. Ez általánosan is igaz. Bebizonyítható, hogy minden Q valós együtthatós polinom felírható valós együtthatós első- és másodfokú tényezők (vagy ilyenek magasabb hatványainak) szorzataként, ahol a másodfokú tényezőknek már nincsenek valós gyökeik.

Ez a lépés a módszer legkényesebb része, hiszen ilyen szorzatrabontás általánosan „csak elvben" létezik. Ti. ilyen felbontásból könnyedén megkapjuk a polinom valós és komplex gyökeit, azonban tudjuk, hogy az öt vagy annál nagyobb fokszámú polinomok gyökeinek meghatározására nincs megoldóképlet.

3. lépés. **Elemi törtek összegére bontásának a módszere.**

Itt már csak az olyan $\dfrac{P}{Q}$ alakú törteket tekintünk, amelyeknél a **számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma**, és sikerült ***Q szorzatrabontását*** elvégezni, azaz túl vagyunk az első két lépésen. Az ilyen törtek a nevezőtől függően elemi törtek összegére bonthatóak. A felbontást *határozatlan együtthatókkal* keressük. Példákon keresztül szemléltetve a módszert:

$$\frac{1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-4}, \qquad \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+x+1},$$

$$\frac{x+1}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}, \qquad \frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{B_1x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2},$$

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy az elsőfokú tényezők esetén a számlálóban egy *állandót*, a másodfokú tényezők esetén pedig a számlálóban egy *elsőfokú polinomot* kell venni. Azt is vegyük észre, hogy ha a nevezőben az elsőfokú tényező egynél nagyobb kitevővel szerepel, akkor *minden* alacsonyabb kitevőjű tagot is „be kell vennünk". Ugyanez a helyzet a másodfokú tényezők esetében is.

Az A_i, B_i, C_i együtthatók meghatározásakor a következő módon járunk el: a jobb oldalon hozzunk közös nevezőre, és ekkor az így adódó tört számlálója egyenlő a bal oldalon levő tört számlálójával minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (még olyan pontokban is, ahol a nevező nulla, hiszen a számlálóban lévő polinomok folytonos függvények). Ekkor kétféle módon tudunk folytatni:

a) A jobb oldali tört számlálóját x hatványai szerint rendezzük. Két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatói megegyeznek. A két oldal számlálójában az együtthatók egyenlőségéből a határozatlan együtthatókra egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Ennek megoldásai a keresett A_i, B_i, C_i együtthatók.

b) Alkalmas x értékeket behelyettesítünk a két tört számlálójában, amelyekről tudunk, hogy egyenlőek minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel egyszerű egyenleteket kapunk, amelynek megoldásai szintén a keresett A_i, B_i, C_i együtthatók.

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \quad \big(x \in (-\infty,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n = 1,2,3,\dots\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx \quad \big(x \in (-3,+\infty)\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Most *elemi törteket* kell integrálnunk.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \quad \big(x \in (-\infty,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n = 1,2,3,\dots\big).$

A nevezőben az n-től függően két esetet különböztetünk meg:

i) Ha $n = 1$, akkor a logaritmusfüggvényre vezető lineáris helyettesítésünk van:

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \int \frac{(x-\alpha)'}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + c = (x-\alpha<0) =$$
$$= \ln(\alpha - x) + c \quad (x<\alpha,\ c \in \mathbb{R}).$$

ii) Ha $2 \le n \in \mathbb{N}$, akkor az $\int f' \cdot f^\alpha$ típussal van dolgunk:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \int (x-\alpha)' \cdot (x-\alpha)^{-n}\,dx = \frac{(x-\alpha)^{1-n}}{1-n} + c =$$
$$= \frac{1}{(1-n)\cdot(x-\alpha)^{n-1}} + c \quad (x<\alpha,\ c \in \mathbb{R}).$$

(b) $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx \quad \big(x \in (-3,+\infty)\big).$

$$\int \frac{3}{2x+6}\,dx = 3 \cdot \int \frac{1}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{(2x+6)'}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \ln|2x+6| + c =$$
$$= (x > -3 \Longrightarrow 2x+6>0) =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \ln(2x+6) + c \quad (x > -3, c \in \mathbb{R}).$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

Vegyük észre, hogy a számlálóban könnyen kialakíthatjuk a nevező deriváltját és így az $\displaystyle\int \frac{f'}{f}$ típust kapjuk:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx &= \left((x^2+2x+5)' = 2x+2\right) = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+2x+5| + c = (x\in\mathbb{R} \Longrightarrow x^2+2x+5>0) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+2x+5) + c \quad (x, c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

Alakítsuk ki a számlálóban ismét a nevező deriváltját és válasszuk le az $\displaystyle\int \frac{f'}{f}$ típust. A maradék az arkusztangensre vezethető 3. alaptípus lesz. Mindezeknek megfelelően, mivel $(x^2+2x+5)' = 2x+2$ kapjuk, hogy:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Az itt kapott első integrál a 2. alaptípushoz tartozik (lásd előző feladat):

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \left(\int \frac{f'}{f}\ \text{típus}\right) = \ln\left(x^2+2x+5\right) + c \qquad (x, c \in \mathbb{R}).$$

A fenti második integrál pedig a 3. alaptípus. Itt az integrandus nevezőjét teljes négyzetté alakítva az

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c \quad (x,\ c \in \mathbb{R})$$

alapintegrál lineáris helyettesítését kapjuk. Ha $x, c \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + c.
\end{aligned}$$

Visszaírva a kapott eredményeket:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + c \quad (x, c \in \mathbb{R}).$$

2. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx \quad \big(x\in(2,4)\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad \big(x\in(-1,+\infty)\big),$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big),$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big),$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+9x-9}{x^4+9x^2}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$

Megoldás. A parciális törtekre bontás módszerét fogjuk alkalmazni.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx \quad \big(x\in(2,4)\big).$

A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma. Alakítsuk szorzattá a nevezőt. Ehhez határozzuk meg a nevező zérushelyeit:

$$x^2-6x+8=0 \iff x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 8}}{2} \iff x_1=4,\ x_2=2.$$

A jól ismert gyöktényezős alak (ha vannak valós gyökök) az alábbi:

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

tehát most:

$$x^2-6x+8=(x-4)\cdot(x-2).$$

Mindezeket beírva, jöhet a parciális törtekre bontás az alábbiak szerint:

$$\frac{1}{x^2-6x+8}=\underline{\frac{1}{(x-2)(x-4)}}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\underline{\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}}.$$

A aláhúzott törtek számlálója megegyezik. Említettük, hogy az A és B számokat kétféle módon számíthatjuk ki:

i) A jobb oldali tört számlálóját x hatványai szerint rendezés után, a két számláló egyenlőségből:

$$1=(A+B)x-4A-2B \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik megegyeznek, azaz:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B=1 \end{cases} \implies -2A=1 \implies A=-\frac{1}{2} \text{ és } B=\frac{1}{2}.$$

ii) A két számlaló egyenlőségből
$$1 = A(x-4) + B(x-2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ha $x = 2$, akkor $1 = A \cdot (-2) + B \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -1/2$.
Ha $x = 4$, akkor $1 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad B = 1/2$.

Következésképpen:
$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-4}.$$
Így, ha $2 < x < 4$, akkor:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-4}\,dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \ln|x-2| + \frac{1}{2} \cdot \ln|x-4| + c = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \ln(x-2) + \frac{1}{2} \cdot \ln(4-x) + c = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \Big(\ln(4-x) - \ln(x-2)\Big) + c = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{4-x}{x-2} + c = \\ &= \ln\sqrt{\frac{4-x}{x-2}} + c \quad (c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$
Tehát:
$$\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx = \ln\sqrt{\frac{4-x}{x-2}} + c \quad (x \in (2,4),\ c \in \mathbb{R}).$$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad \Big(x \in (-1,+\infty)\Big)$.

Vegyük észre, hogy $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. A parciális törtekre bontás
$$\frac{3x-5}{x^2+2x+1} = \frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}.$$
A bal és jobb oldali tört számlálója megegyezik minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor:
Ha $x = -1$, akkor $3 \cdot (-1) - 5 = A \cdot 0 + B \quad \Longrightarrow \quad B = -8$.
Ha $x = 0$, akkor $3 \cdot 0 - 5 = A \cdot 1 + B \quad \Longrightarrow \quad -5 = A - 8 \quad \Longrightarrow \quad A = 3$.
Ezért, ha $x > -1$, akkor:
$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}\right) dx = 3 \cdot \ln(x+1) + \frac{8}{x+1} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \Big(x \in (-1,1)\Big).$

A számláló fokszáma most **nagyobb**, mint a nevező fokszáma, ezért először maradékos osztást kell végeznünk:

$$(*) \qquad \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1} = \frac{x\Big(x^2-1\Big)+\Big(x^2-1\Big)+4}{x^2-1} = x+1+\frac{4}{x^2-1}.$$

A fennmaradó törtet parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

A bal és jobb oldali tört számlálója megegyezik minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
Ha $x=1$, akkor $4 = A\cdot 2 + B\cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 2.$
Ha $x=-1$, akkor $4 = A\cdot 0 + B\cdot(-2) \quad \Longrightarrow \quad B = -2.$
Ezért:

$$(**) \qquad \frac{4}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

$(*)$ és $(**)$ alapján azt kapjuk, hogy ha $-1<x<1$, akkor:

$$\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+2\cdot\ln(1-x)-2\cdot\ln(x+1)+c =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^2+c \ \ (c\in\mathbb{R}).$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx \quad \Big(x \in (0,+\infty)\Big).$

A számláló fokszáma **kisebb**, mint a nevező fokszáma, a nevező pedig kiemeléssel könnyen szorzattá alakítható, ezért a parciális törtekre bontás az alábbiak szerint alakul:

$$\frac{1}{x^3+4x} = \frac{1}{x\cdot(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A\cdot(x^2+4)+x\cdot(Bx+C)}{x\cdot(x^2+4)} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x\cdot(x^2+4)} = \frac{(A+B)\cdot x^2+Cx+4A}{x\cdot(x^2+4)}.$$

Az együtthatók egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 4\,A=1.$$

Így

$$C=0, \quad A=1/4, \quad B=-1/4.$$

Ezért, ha $x > 0$, akkor

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\cdot\int\frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{8}\cdot\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\ln x - \frac{1}{8}\cdot\ln(x^2+4) + c =$$

$$= \ln\sqrt[8]{\frac{x^2}{x^2+4}} + c \quad (x>0,\ c\in\mathbb{R}).$$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+9x-9}{x^4+9x^2}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$

A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, a nevező pedig itt is kiemeléssel könnyen szorzattá alakítható, ezért a parciális törtekre bontás ebben az esetben az alábbi:

$$\frac{x^3+9x-9}{x^2\cdot(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9} =$$

$$= \frac{A\cdot x\cdot(x^2+9) + B\cdot(x^2+9) + x^2\cdot(Cx+D)}{x^2\cdot(x^2+9)} \Longrightarrow$$

$$\frac{x^3+9x-9}{x^2\cdot(x^2+9)} = \frac{(A+C)\cdot x^3 + (B+D)\cdot x^2 + 9Ax + 9B}{x^2\cdot(x^2+9)}.$$

Az együtthatók egyenlőségéből azt kapjuk, hogy:

$$A+C=1,\ B+D=0,\ 9A=9 \text{ és } 9B=-9,$$

azaz

$$A=1, B=-1, C=0 \text{ és } D=1.$$

Mindezek alapján, ha $x > 0$, akkor:

$$\int \frac{x^3+9x-9}{x^2\cdot(x^2+9)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+9}\right)dx =$$

$$= \int\frac{1}{x}\,dx - \int\frac{1}{x^2}\,dx + \int\frac{1}{x^2+9}\,dx =$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{9}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx =$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + c \quad (x>0,\ c\in\mathbb{R}).$$