*Programtervező informatikus szak I. évfolyam*
*Matematikai alapok javító zárthelyi* $\boxed{\textit{a 3. zh anyagából}}$
*2023. január 3.*

*Minden feladathoz kérjük: indoklás, levezetés, a számítások bemutatása.*

1. *(7 pont)* Gauss-Jordan-módszerrel határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét (csak a Gauss-Jordan módszerrel való meghatározás fogadható el):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. *(10 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

3. Adott az alábbi lineárisan független vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektortérben:

$$b_1 = (-1,\, 0,\, 1,\, 2), \quad b_2 = (-2,\, -1,\, 2,\, 1), \quad b_3 = (-1,\, 1,\, 3,\, 1),$$

továbbá legyen $W = \operatorname{Span}(b_1,\, b_2,\, b_3)$.

a) *(7 pont)* Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a $W$ altérben.

b) *(5 pont)* Bontsuk fel az $x = (1,\, 0,\, 0,\, 1)$ vektort a $W$ altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

4. *(7 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú $f$ függvény:

$$f(x) = x^2 + 6x + 2 \qquad (x \in [\,1\,,\,+\infty)\,)$$

Igazoljuk, hogy $f$ invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

(FIGYELEM: itt a "rajzos" megoldás nem fogadható el.)

5. *(7 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{2x^3 - x^2 - x + 3} = \frac{1}{2}$$