9. gyakorlat

PRIMITÍV FÜGGVÉNY, HATÁROZATLAN INTEGRÁL 3.

Emlékeztető.

$\boxed{1.}$ **A második helyettesítési szabály.**

Tétel. *Tegyük fel, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in J)$, továbbá az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Megjegyzések.

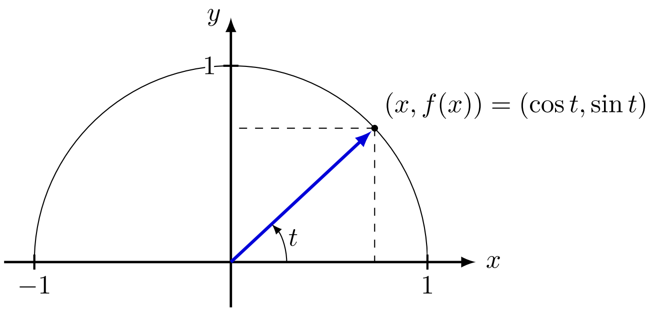
- Mivel $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in J)$, ezért a Darboux-tétel alapján g' állandó előjelű a J-n, így g szigorúan monoton. Tehát $\exists g^{-1} : I \to J$.
- A tételt egy $f(x)$, $(x \in I)$ függvény ismeretlen primitív függvényének megkereséséhez az alábbi módon tudjuk felhasználni: az $x \in I$ változót helyettesítjük egy (a feltételeknek megfelelő) $g : J \to I$ **bijekció** értékeivel, vagyis bevezetjük az $x = g(t)$ egyenlőséggel ekvivalens $t := g^{-1}(x)$ „új” változót. Ezután az f primitív függvényeit megkaphatjuk az $f \circ g \cdot g'$ függvény primitív függvényeiből.
- A tétel alkalmazásakor a fő nehézséget a g függvény alkalmas megválasztása jelenti, hiszen a helyettesítés után még szükségünk van az $f \circ g \cdot g'$ függvény primitív függvényeinek meghatározására. A g függvény megválasztását két eltérő nézőpont is motiválhatja:
  - az $x = g(t)$ egyenlőség mentén próbálunk olyan „helyettesítő függvényt” bevezetni az x változó helyett, ami leegyszerűsíti számunkra az integrandusban szereplő f integrálását, vagy
  - az integrandusban fedezünk fel olyan alkalmas $g^{-1}(x)$ függvényt, melyet egy t változóval helyettesítve látjuk, hogy az integrandus alakja az integrálás szempontjából kedvezőbbé válik.
- A következő fejezetekben olyan speciális alakú integrandusokkal foglalkozunk, ahol a második helyettesítési szabály megfelelő alkalmazásával racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza az eredeti integrál kiszámítása.

$\boxed{2.}$ **Példa.**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált:

$$\int f(x)\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad (x \in (-1,1)).$$

Az f függvény grafikonja az alábbi ábrán látható egység sugarú félkör.



Ez motiválja az x változó $g(t) = \cos t$, $(t \in (0,\pi))$ függvénnyel való helyettesítését, hiszen ekkor az $f(x)$ függvényértékek éppen az $f(x) = f(g(t)) = f(\cos t) = \sin t$ függvény értékei lesznek, míg $\mathcal{R}_g = (-1,1)$ és $g : (0,\pi) \to (-1,1)$ kölcsönösen egyértelmű. A helyettesítő függvény deriváltja $g'(t) = -\sin t$.

Vagyis a helyettesítés után

$$\int f(x)\,dx = \int \sin t \cdot (-\sin t)\,dt = -\int \sin^2 t\,dt$$

ahol $t = g^{-1}(x) = \arccos x$, $(x \in (-1,1))$.

A $\sin^2$ függvény primitív függvényeit a korábbi fejezetekben több különböző módszerrel (linearizáló formulával, parciális integrálással) is meghatároztuk:

$$\int f(x)\,dx = -\int \sin^2 t\,dt_{\big|t=\arccos x} = \left(\frac{\sin t\cos t - t}{2} + c\right)_{\big|t=\arccos x} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + c$$

Megjegyzések.

- Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy a vizsgált $t \in (0,\pi)$ intervallumon $\sin t > 0$, így

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

- Az előző fejezet végén ugyanerre az integrálra parciális integrálással az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c$$

  eredmény adódott. Vegyük észre, hogy ez utóbbi az $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ azonosság alapján ekvivalens a mostani, helyettesítési szabállyal kapott eredményünkkel.

1. feladat. $\int$ ***S*** (e^x) ***dx alakú integrálok****, ahol $S(u)$ egyváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a*

$$\boxed{t = e^x}$$

helyettesítést, azaz az $x = \ln t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazva a feladatot racionális törtfüggvény integráljára vezetjük vissza.

Ezt felhasználva számítsuk ki az

(a) $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx \quad (x > \ln 2)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$

határozatlan integrálokat!

Megoldás.

(a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx \quad (x > \ln 2)}$

Mivel $e^{2x} = (e^x)^2$, így az integrandus $S(e^x)$ alakú, ahol $S(u) = \dfrac{4}{u^2-4}$, $(u \neq \pm 2)$. A leírásnak megfelelően próbáljuk meg alkalmazni a $t := e^x$ helyettesítést. Ekkor a $t = e^x = g^{-1}(x)$, $(x \in I = (\ln 2, +\infty))$ függvényt választottuk meg, vagyis a tétel alkalmazásához szükségünk van az $x = g(t)$, $(t \in J)$ függvényre és ellenőriznünk kell a feltételek teljesülését is.

Most $t = e^x$, $(x > \ln 2) \Leftrightarrow \ln t = x$, $(t > 2)$, így a $g(t) = \ln t$, $(t \in J = (2,+\infty))$ függvényre alkalmazzuk a helyettesítési szabályt. Mivel $g \in D(J)$ és $g'(t) = \dfrac{1}{t} > 0$, így g injektív. Figyeljük meg, hogy $\mathcal{R}_g = I$, ezért g bijekció I és J közt, tehát a g-re vonatkozó feltételek teljesülnek. Így f határozatlan integrálja az

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx = \int \frac{4}{t^2-4}\cdot\frac{1}{t}\,dt_{\big|t=e^x}$$

racionális törtfüggvény integrálásával megkapható.

Parciális törtekre bontással és a $t>2$ feltételt kihasználva:

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx = \int \frac{4}{t(t-2)(t+2)}\,dt = \int \frac{-1}{t}+\frac{1/2}{t-2}+\frac{1/2}{t+2}\,dt =$$

$$= \left(-\ln t+\frac{1}{2}\ln(t-2)+\frac{1}{2}\ln(t+2)+c\right)_{\big|t=e^x} = -x+\frac{1}{2}\ln(e^x-2)+\frac{1}{2}\ln(e^x+2)+c,$$

ha $x>\ln 2$.

Általánosítás. Vegyük észre, hogy a feladat elején végzett vizsgálat jórészt független S-től. Tekintsük az $\int S(e^x)\,dx$, $(x\in I)$ integrált, ahol I nyílt intervallum. Ekkor a $t:=e^x$, $(x\in I)$ új változó bevezetéséhez az $x=g(t)=\ln t$, $(t\in J=\mathcal{R}_{\exp_{|I}})$ helyettesítő függvényt használjuk, ami kölcsönösen egyértelmű és a megadott J esetén az értékkészlete éppen I lesz. Tehát g teljesíti a feltételeket és $g'(t)=\dfrac{1}{t}>0$.

Az integrál így racionális törtfüggvény integráljára vezethető vissza:

$$\int S(e^x)\,dx = \int S(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt_{\big|t=e^x}.$$

(b) $\boxed{\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})}$

Alkalmazzuk a $t=e^x$ helyettesítést, vagyis legyen $x=g(t)=\ln t$, ahol $x\in I=\mathbb{R}$ miatt legyen $J=\mathcal{R}_{\exp}=(0,+\infty)$: ekkor minden $x\in I$ esetén létezik $t\in J$ amire $g(t)=x$, így g bijekció.

Így f határozatlan integrálja az alábbi racionális törtfüggvényre vezethető vissza:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt_{\big|t=e^x} = \int \frac{t^2}{t+2}\,dt_{\big|t=e^x}.$$

Mivel a számláló fokszáma nagyobb a nevezőjénél:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{t^2}{t+2}\,dt = \int \frac{(t+2)(t-2)+4}{t+2}\,dt = \int t-2+\frac{4}{t+2}\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2}-2t+4\ln(t+2)+c\right)_{\big|t=e^x} = \frac{e^{2x}}{2}-2e^x+4\ln(e^x+2)+c \quad (x\in\mathbb{R}).$$

2. feladat. $\displaystyle\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}}\right) \boldsymbol{dx}$ ***alakú integrálok***, *ahol* $R(u,v)$ *kétváltozós polinomok hányadosa. Ezekben a gyökös kifejezést egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk. Pontosabban: legyen*

$$\boxed{t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}.$$

A $x = g(t)$ *helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből* x*-et kifejezzük, majd a második helyettesítési szabályt alkalmazzuk.*

Ezt felhasználva számítsuk ki az

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0)$,

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{5x+3}\,dx \quad (x > -\tfrac{3}{5})$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx \quad (x>0)$.

határozatlan integrálokat!

Megoldás.

Általánosan a következőket gondoljuk meg:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ (x\in I) \ \Leftrightarrow\ t^n(cx+d) = ax+b \ \Leftrightarrow\ x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a} =: g(t),\ (t\in J),$$

így ha $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^+$ és $I, J\subset\mathbb{R}$ olyanok, hogy $g: J\to I$ differenciálható bijekció és g' állandó előjelű, akkor alkalmazható a második helyettesítési szabály és g, valamint g' egyaránt racionális törtfüggvények.

Következésképpen a helyettesítés racionális törtfüggvény integráljára vezet:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(g(t), t\right)\cdot g'(t)\,dt_{\Big|t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}.$$

A helyettesítés részleteit minden esetben az adott feladatnak megfelelően dolgozzuk ki.

(a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0)}$

Alkalmazzuk a $t=\sqrt{x}$, $(x\in I=(0,+\infty))$ helyettesítést. Átrendezés után a helyettesítő függvényre $x := g(t) = t^2$ adódik, ahol $t\in J=(0,+\infty)$ választással $\mathcal{R}_g = I$. Következésképpen $g\in D(J)$ és $g'(t) = 2t > 0$ $(\forall t>0)$ feltételek is teljesülnek és a g függvény bijekció.

A helyettesítési szabály alkalmazásával:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt_{\Big|t=\sqrt{x}} = \int \frac{2(t+1)-2}{t+1}\,dt = \int 2 - \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= \left(2t - 2\ln(t+1) + c\right)_{\Big|t=\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c \quad (x>0).$$

Megjegyzés. Ez a példa is jól szemlélteti a második helyettesítési szabályban rejlő lehetőségeket, feltéve, hogy sikeresen tudjuk alkalmazni: a helyettesítés után kapott racionális törtet „standard" lépésekkel, viszonylag könnyen tudtuk integrálni.

Ezzel szemben a helyettesítési szabály használata nélkül az imént elvégzett lépéseink az alábbi, igen nehezen észrevehető átalakításokkal lettek volna azonosak:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}\,dx - 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int \frac{(\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c \quad (x>0).$$

(b) $\boxed{\int x\sqrt{5x+3}\,dx \quad (x > -\frac{3}{5})}$

Alkalmazzuk a $t=\sqrt{5x+3}$, $(x \in I = (-\frac{3}{5}, +\infty))$ helyettesítést. Átrendezés után a helyettesítő függvényre $x := g(t) = \dfrac{t^2-3}{5}$ adódik, ahol $t \in J = (0,+\infty)$ választással $\mathcal{R}_g = I$. Következésképpen $g \in D(J)$ és $g'(t) = \dfrac{2t}{5} > 0$ $(\forall t > 0)$ feltételek teljesülnek, a g függvény bijekció.

A helyettesítési szabály alkalmazásával:

$$\int x\sqrt{5x+3}\,dx = \int \frac{t^2-3}{5}\cdot t\cdot \frac{2t}{5}\,dt\Big|_{t=\sqrt{5x+3}} = \frac{1}{25}\int 2t^4-6t^2\,dt =$$

$$= \left(\frac{2}{125}t^5 - \frac{2}{25}t^3 + c\right)\Big|_{t=\sqrt{5x+3}} = \frac{2}{125}\sqrt{(5x+3)^5} - \frac{2}{25}\sqrt{(5x+3)^3} + c \quad (x > -\tfrac{3}{5}).$$

(c) $\boxed{\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx \quad (x>0)}$

Alkalmazzuk a $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$, $(x \in I = (0,+\infty))$ helyettesítést. Átrendezés után a helyettesítő függvényre $x := g(t) = \dfrac{1}{t^3-1}$ adódik, ahol

$$x = \frac{1}{t^3-1} > 0 \Leftrightarrow t^3-1>0 \Leftrightarrow t>1,$$

így $t \in J = (1,+\infty)$ választással $\mathcal{R}_g = I$. Ekkor $g \in D(J)$ és $g'(t) = \dfrac{-3t^2}{(t^3-1)^2} < 0$ $(\forall t > 0)$ feltételek teljesülnek, a g függvény szigorúan monoton csökken és bijekció.

A helyettesítési szabály alkalmazásával:

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^3-1}\right)^2}\cdot t\cdot\frac{-3t^2}{(t^3-1)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = \int -3t^3\,dt =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}t^4 + c\right)\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + c \quad (x>0).$$

3. feladat. *Számítsuk ki az*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx \quad (x>0)$$

határozatlan integrált!

Megoldás.

Ez a feladat ugyan nem tartozik bele a korábban tárgyalt típusokba, de az eddigi tapasztalataink alapján találhatunk praktikus változóhelyettesítést. Ha a célunk ezúttal is a jól ismert racionális törtekre való visszavezetés, akkor olyan $x=g(t)$ függvényt kellene találnunk, aminek deriváltja törtfüggvény és a helyettesítés után az integrandus is törtfüggvény lesz, vagyis eltűnik a négyzetgyök és a köbgyök a kifejezésből.

Egy ezeknek megfelelő választás az $x=g(t)=t^6$ helyettesítés $t\in J=(0,+\infty)$ mellett, mert ekkor $g(J)=(0,+\infty)=I$ teljesül, valamint $\sqrt{x}=\sqrt{t^6}=t^3$ és $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2$ egyaránt polinom lesz és $g'(t)=6t^5$ is polinom. Mivel $g'(t)>0$, $(t\in J)$, így teljesülnek a második helyettesítési szabály feltételei.

A helyettesítési szabályt alkalmazva:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)=\sqrt[6]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt$$

A számlálóban $t^3=(t^3+1)-1=(t+1)(t^2-t+1)-1$, így

$$6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt = \Big(2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c\Big)\Big|_{t=\sqrt[6]{x}},$$

vagyis a keresett határozatlan integrál:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+c \quad (x>0).$$

Megjegyezés. Jelen esetben $J=(-\infty,0)$ is megfelelő választás lett volna ugyanehhez a g függvényhez, mert g értékkészlete ebben az esetben is az $I=(0,+\infty)$ halmaz és $g'(t)=6t^5<0$ miatt g szigorúan monoton csökkenő bijekció, ami megfelel a helyettesítési szabály feltételeinek.

Ebben az esetben azonban egyrészt $\sqrt{x}=\sqrt{t^6}=|t|^3=-t^3$ (miközben $\sqrt[3]{x}=t^2$ változatlan), másrészt $t=g^{-1}(x)=-\sqrt[6]{x}$ adódik, így a helyettesítési szabály alkalmazásával

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{-t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)=-\sqrt[6]{x}} = -6\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$$

integrálhoz jutunk. Ennek a kiszámítása végül a korábbi eredményünkhöz vezet:

$$-6\int \frac{t^3}{t-1}\,dt = -6\int t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\,dt = \Big(-2t^3-3t^2-6t-6\ln(-t+1)+c\Big)\Big|_{t=-\sqrt[6]{x}} =$$
$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+c.$$

Itt kihasználtuk, hogy $t<0$ miatt $t-1<0$, vagyis $\frac{1}{t-1}$ egy primitív függvénye $\ln(-t+1)$.