5. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 4.

Emlékeztető.

• Trigonometrikus függvények és inverzeik. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\cos x = \cos y \quad &\Longleftrightarrow \quad x - y \in \{2k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \ \text{ vagy } \ x + y \in \{2k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \{2k\pi + y \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2l\pi - y \in \mathbb{R} :\ l \in \mathbb{Z}\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x = \sin y \quad &\Longleftrightarrow \quad x - y \in \{2k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \ \text{ vagy } \ x + y \in \{(2k+1)\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \{2k\pi + y \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2l+1)\pi - y \in \mathbb{R} :\ l \in \mathbb{Z}\};
\end{aligned}$$

továbbá

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \quad \text{vagy} \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in \{k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Az

$$\operatorname{arc}\cos := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc}\sin := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1},$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc}\operatorname{ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}\right)^{-1}$$

függvényeket rendre **arkuszkoszinusz-függvény**nek, **arkuszszinusz-függvény**nek, **arkusztangens-függvény**nek, **arkuszkotangens-függvény**nek nevezzük.

• Teljes függvényvizsgálat. Az alábbiakban összefoglaljuk a teljes függvényvizsgálat menetét. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény vizsgálatakor az alábbi lépéseken célszerű végigmenni.

1. **Kezdeti vizsgálatok.** Előjelviszonyok, paritás, periodikusság, folytonosság, deriválhatóság megállapítása.
2. **Monotonitási intervallumok, lokális szélsőértékek.** Megkeressük f stacionárius helyeit, valamint azokat az intervallumokat, amelyeken f monoton, majd azonosítjuk f lokális szélsőértékhelyeit, ill. szélsőértékeit.
3. **Konvexitási, konkávitási intervallumok. Inflexiós pontok**. Megkeressük f'' stacionárius helyeit, valamint azokat az intervallumokat, amelyeken f konvex, ill. konkáv, majd azonosítjuk f inflexiós helyeit.
4. **Határértékek.** A $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f$ halmaz pontjaiban kiszámítjuk f határértékét.
5. **Aszimptoták.** Nem korlátos $\mathcal{D}_f$ esetén meghatározzuk f aszimptotáit (ha léteznek).
6. **Grafikon.** Vázoljuk f grafikonját.

• L'Hospital szabályok. *Legyen* $-\infty \leq a < b < +\infty$*, illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ f, g \in D(a,b), \\
\bullet\ \forall x \in (a,b) \colon g'(x) \neq 0, \\
\bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \quad \textit{vagy} \quad \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty, \\
\bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.
\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

A L'Hospital szabály átfogalmazható **bal oldali és (kétoldali) határértékre**, valamint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ **típusú határértékre**. A többi típusú **kritikus határértéket** (pl. $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, 0^0, $1^{+\infty}$) vezessük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

A feladatmegoldások során először döntsük el, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó, ezután ellenőrizzük a L'Hospital-szabály feltételeit.

■ Feladatok

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:*

$$\arcsin\frac{1}{2}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\operatorname{arc\,tg} 1, \quad \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}.$$

Megoldás.

- $\underset{\sim\sim\sim}{\arcsin\frac{1}{2}}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\arcsin := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ definícióból és a sin függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{\left(x\in[-1,1]\right)}{\arcsin x} = \underset{\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{y} \iff \sin y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \frac{1}{2} \iff (y = 30^0) \quad y = \frac{\pi}{6}.$$

Így

$$\underset{\sim\sim\sim}{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}\,.$$

- $\underset{\sim\sim\sim}{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Világos, hogy ha $x \in [-1, 1]$ és $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x,$$

ezért

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff y = -\frac{\pi}{3},$$

ahonnan

$$\underset{\sim\sim\sim}{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}}$$

következik.

• $\underset{\sim\sim\sim}{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\arccos := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1}$ definícióból és a cos függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{\left(x\in[-1,1]\right)}{\arccos x} = \underset{\left(y\in[0,\pi]\right)}{y} \iff \cos y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \in [0,\pi] \iff \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff (y = 135^0)\ \ y = 3\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Így

$$\underset{\sim\sim\sim}{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}}\,.$$

• $\underset{\sim\sim\sim}{\operatorname{arc\,tg} 1}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$ definícióból és a tg függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{\left(x\in\mathbb{R}\right)}{\operatorname{arc\,tg} x} = \underset{\left(y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)}{y} \iff \operatorname{tg} y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = y \in \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \iff \operatorname{tg} y = 1 \iff (y = 45^0)\ \ y = \tfrac{\pi}{4}.$$

Így

$$\underset{\sim\sim\sim}{\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}}\,.$$

• $\underset{\sim\sim\sim}{\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\operatorname{arc\,tg} x = y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \iff \operatorname{tg} y = x,$$

ezért

$$\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \iff \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iff (y = -30^0)\ \ y = -\frac{\pi}{6},$$

ahonnan

$$\underset{\sim\sim\sim}{\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}}\,.$$

következik.

• $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}}$

Emlékeztetünk arra, hogy az $\operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}\right)^{-1}$ definícióból és a ctg függvény tulajdonságaiból következik, hogy

$$\underset{\left(x\in\mathbb{R}\right)}{\operatorname{arc\,ctg} x} = \underset{\left(y\in(0,\pi)\right)}{y} \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ctg} y = x, \quad \text{ezért}$$

$$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3} = y \in (0,\pi) \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ctg} y = \sqrt{3} \quad\Longleftrightarrow\quad (y = 30^0)\ \ y = \frac{\pi}{6}.$$

Így

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}}.$$

2. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az*

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ **Kezdeti vizsgálatok**. f polinomfüggvény, ezért $f \in D^{\infty}(\mathbb{R})$. f zérushelyei nehezen meghatározhatók, ezért nem fogunk előjelvizsgálatot végezni. A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

$\boxed{2.}$ **Monotonitás, lokális szélsőértékek.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 3.$$

Azokat az intervallumokat kell meghatározni, amelyeken f' állandó előjelű. Most világos, hogy ezek a következők:

	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$x>3$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	10	$\downarrow$	-17	$\uparrow$
lok.		$-$		min	

Vegyük észre, hogy 0 nem lokális szélsőértékhely, mert f szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, 3]$ intervallumon.

$\boxed{3.}$ **Konvexitás.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 2.$$

	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	10	$\frown$	-6	$\smile$
		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ **Határértékek.** Mivel

$$\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{+\infty, -\infty\},$$

ezért a határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben kell megvizsgálni:

$(+\infty)$-ben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^4 - 4x^3 + 10\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty\,,$$

$(-\infty)$-ben

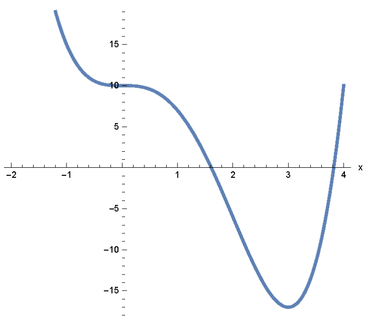
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^4 - 4x^3 + 10\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty\,.$$

$\boxed{5.}$ **Aszimptoták.** Mivel a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = (-\infty)\cdot 1 = -\infty$$

határértékek léteznek, de nem végesek, ezért f-nek nincs aszimptotája sem $(+\infty)$-ben, sem $(-\infty)$-ben.

$\boxed{6.}$ **A függvény grafikonja:**



3. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az*

$$f(x) := \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ **Kezdeti vizsgálatok.** Világos, hogy $f(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ pontban, így a függvény grafikonja a felső félsíkban van. Mivel f racionális törtfüggvény, ezért $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén $f \in D^\infty\{x\}$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ **Monotonitás, lokális szélsőértékek.** A deriválási szabályok alapján tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - (x^2+1) \cdot 2\,(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x \cdot (x+1) - 2\,(x^2+1)}{(x+1)^3} = \frac{2\,(x-1)}{(x+1)^3},$$

ezért

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$
			$f(1) = \frac{1}{2}$	

$\boxed{3.}$ **Konvexitás.** Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x+1)^3 - 2\,(x-1) \cdot 3\,(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2\,(x+1) - 6\,(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{4\,(2-x)}{(x+1)^4},$$

ezért

	$x < -1$	$-1 < x < 2$	2	$x > 2$
f''	$+$	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$\smile$	inflexió	$\frown$
			$f(1) = \frac{5}{9}$	

$\boxed{4.}$ **Határértékek.** Mivel

$$\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \setminus \big(\mathbb{R} \setminus \{-1\}\big) = \{-\infty,\ -1,\ +\infty\},$$

ezért a határértékeket most $(\pm\infty)$-ben és (-1)-ben kell megvizsgálni.

$(-\infty)$-ben

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 1\,,$$

$(+\infty)$-ben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 1\,,$$

(-1)-ben

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \left(\lim_{x\to-1} (x^2+1)\right) \cdot \left(\lim_{x\to-1} \frac{1}{(x+1)^2}\right) = 2 \cdot (+\infty) = +\infty\,.$$

$\boxed{5.}$ **Aszimptoták.** Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\Big(\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\Big)=0=:A,$$

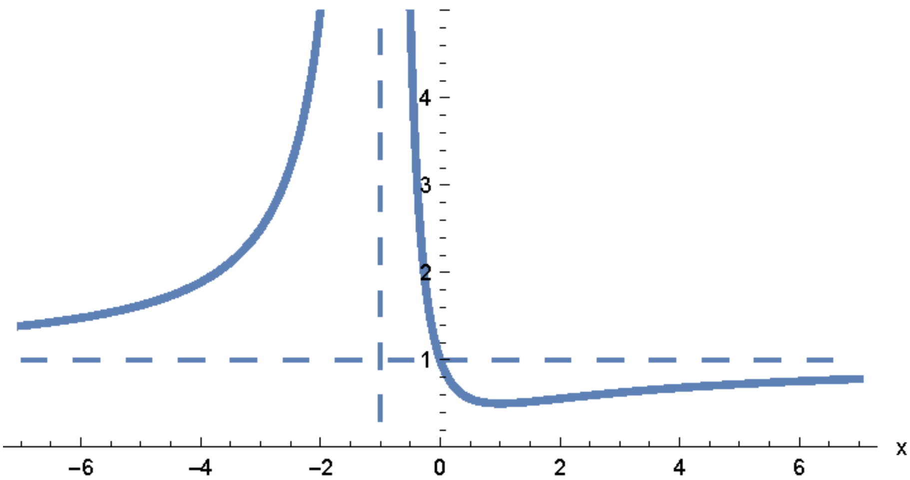
$$\lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x)-A\cdot x\Big)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=1=:B,$$

ezért az

$$l(x):=A\cdot x+B=1\qquad(x\in\mathbb{R})$$

egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

$\boxed{6.}$ **A függvény grafikonja:**



4. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az*

$$f(x):=x\cdot\ln^2 x\qquad(x>0)$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ **Kezdeti vizsgálatok.** Világos, hogy

$$f(x)\ge 0,\quad\text{ha}\quad x>0\qquad\text{és}\qquad f(x)=0\iff x=1,$$

ezért az f függvény grafikonja a felső zárt félsíkban van.

Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f\in D^\infty(\mathbb{R}^+)$.

$\boxed{2.}$ **Monotonitás, lokális szélsőértékek.** Mivel $f\in D(\mathbb{R}^+)$, ezért tetszőleges $x\in\mathbb{R}^+$ esetén

$$f'(x)=1\cdot\ln^2 x+x\cdot 2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\ln^2 x+2\cdot\ln x=\Big(\ln x\Big)\cdot\Big(\ln x+2\Big).$$

Most meghatározzuk azokat az intervallumokat, amelyeken f' állandó előjelű. Világos, hogy $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 0 \iff \ln x + 2 = 0, \text{ azaz } x_1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ vagy } \ln x = 0, \text{ azaz } x_2 = 1.$$

Ugyanakkor

$$\ln x + 2 < 0, \text{ ha } 0 < x < x_1 \quad \text{és} \quad \ln x + 2 > 0, \text{ ha } x_1 < x < +\infty;$$

$$\ln x < 0, \text{ ha } 0 < x < x_2 \quad \text{és} \quad \ln x > 0, \text{ ha } x_2 < x < +\infty.$$

A keresett intervallumok tehát a következők:

$$(0, x_1) = \left(0, \frac{1}{e^2}\right), \quad (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{e^2}, 1\right), \quad (x_2, +\infty) = (1, +\infty).$$

Ezeken az intervallumokon f' előjelei:

	$0 < x < \frac{1}{e^2}$	$x_1 = \frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e^2} < x < 1$	$x_2 = 1$	$1 < x < +\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$
		$f(x_1) = \frac{4}{e^2}$		$f(1) = 0$	

$\boxed{3.}$ **Konvexitás.** Bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\ln x + 2\right) + \left(\ln x\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \cdot \left(\ln x + 1\right)}{x}.$$

Mivel $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\ln x + 1 < 0, \text{ ha } 0 < x < \frac{1}{e} \quad \text{és} \quad \ln x + 1 > 0, \text{ ha } \frac{1}{e} < x < +\infty,$$

ezért az f'' függvény a

$$\left(0, \frac{1}{e}\right), \quad \text{valamint az} \quad \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

intervallumokon állandó előjelű. Így

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$x = \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x < +\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$

$\boxed{4.}$ **Határértékek.** Mivel

$$\mathcal{D}_f' \setminus \mathcal{D}_f = [0, +\infty] \setminus (0, +\infty) = \{0, +\infty\},$$

ezért a határértékeket most $(+\infty)$-ben és 0-ban kell megvizsgálni.

$(+\infty)$-ben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln^2 x\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\ln x\right)^2 = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,.$$

0-ban a határértéket a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazásával határozzuk meg:

$$\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0}\left(x\cdot(\ln x)^2\right) \overset{0\,\cdot\,(+\infty)}{=} \lim_{x\to0+0}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \text{(L'Hospital-szabály)} =$$

$$= \lim_{x\to0+0}\frac{2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = (-2)\cdot\lim_{x\to0+0}\left(x\cdot\ln x\right) \overset{0\,\cdot\,(-\infty)}{=} (-2)\cdot\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \text{(L'Hospital-szabály)} = (-2)\cdot\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cdot\lim_{x\to0+0} x = 2\cdot0 = 0,$$

tehát

$$\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0}\left(x\cdot\ln^2 x\right) = 0\,.$$

$\boxed{5.}$ **Aszimptota** $(+\infty)$**-ben.** Mivel tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\cdot\ln^2 x}{x} = \ln^2 x \to +\infty, \quad \text{ha } x\to+\infty,$$

ezért az f függvénynek nincs aszimptotája $(+\infty)$-ben.

$\boxed{6.}$ **A függvény grafikonja:**