5. előadás
Differenciálszámítás 5.

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

Motivávió: Függvények (pl. inverzek) közelítő értékeinek a kiszámítása, függvények közelítése polinomokkal.

Eszköz: Hatványsorok.

Emlékeztető, motiváció: Analízis I., 8. előadás.

- A $\sum \alpha_n(x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ **hatványsor** (polinom általánosítása), konvergenciahalmazának és öszegfüggvényének a fogalma.

- Az összegfüggvény polinomok sorozatának a határértéke, ezért a helyettesítési értékeit nem tudjuk pontosan kiszámítani. A közelítő értékeit azonban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával.

- Az $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}\,, \mathrm{ch}$ fv-ek hatványsoros definíciói.

- Az inverzeik helyettesítési értékeit tetszőleges helyen a definíció alapján nem lehet kiszámolni.

Ezért (is) fontos a következő **kérdésfelvetés**.

Probléma:

Egy adott (bonyolult) függvényt vajon elő lehet-e állítani hatványsor összegfüggvényeként? Ha igen, akkor a függvény ismeretében hogyan lehet az együtthatókat meghatározni?

Induljunk ki a hatványsor összegfüggvényének a tagonkénti deriválhatóságára vonatkozó tételből.

Tétel.

T.f.h. hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív, és legyen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D\{x\}$ *és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

Teljes indukcióval igazolható a következő állítás:

Tétel. *T.f.h. a* $\sum_{k=0} \alpha_k(x-a)^k$ $(x \in \mathbb{R})$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív, és jelölje* f *az összegfüggvényét. Ekkor minden* $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D^\infty\{x\}$*, és bármely* $n \in \mathbb{N}^+$ *esetén*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha_k(x-a)^{k-n}.$$

Ha $x = a$*, akkor*

$$(*) \qquad \boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})}.$$

A tétel tehát azt is állítja, hogy egy hatványsor együtthatói és az összegfüggvénye között a $(*)$ alatti kapcsolat áll fenn. Ebből a formulából kiindulva minden $f \in D^\infty$ függvényhez egy hatványsort rendelünk.

Definíció. *Ha* $f \in D^{\infty}\{a\}$, *akkor a*

$$T_a f(x) := \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f *függvény* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *ponthoz tartozó* ***Taylor-sorának***, *a sor* n*-edik részletösszegét, azaz a*

$$T_{a,n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az f *függvény* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *ponthoz tartozó* n*-edik* ***Taylor-polinomjának*** *nevezzük.*

Az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozóTaylor-sorát f **Maclaurin-sorának** is nevezzük.

Megjegyzések.

1° Az előző tételt így is megfogalmazhatjuk: *Minden konvergens hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sorával egyenlő.* Ezek szerint, ha egy f függvény előállítható konvergens hatványsor összegfüggvényeként, akkor a szóban forgó sor szükségképpen f Taylor-sora.

2° Az $\exp, \sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ függvények definícióiban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai.

3° A $T_a f$ Taylor-sor felírása általában nem egyszerű feladat, mert ahhoz ismernünk kellene minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $f^{(n)}(a)$ függvényértékeket.

4° Legyen $n \in \mathbb{N}$, és t.f.h. $f \in D^n\{a\}$. Ekkor a

$$T_{a,n}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

Taylor-polinomra az alábbi **interpolációs tul-ok** teljesülnek:

$$(*) \qquad T_{a,n}f(a) = f(a),\ \big(T_{a,n}f\big)'(a) = f'(a), \\ \big(T_{a,n}f\big)''(a) = f''(a),\ \ldots, \big(T_{a,n}f\big)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).\ \checkmark$$

$T_{a,n}f$ az **egyetlen** ilyen tulajdonságú legfeljebb n-edfokú polinom. Valóban: T.f.h. egy ilyen P polinomra $(*)$ teljesül, és legyen $Q := P - T_{a,n}f$. Ekkor $Q(a) = Q'(a) = \cdots = Q^{(n)}(a) = 0$ $\Longrightarrow$ az a szám Q-nak legalább $(n+1)$-szeres gyöke $\Longrightarrow Q \equiv 0$ $\Longrightarrow P \equiv T_{a,n}f$. ■

Természetes módon vethetjük fel a következő kérdéseket.

A sorfejtés problémája. T.f.h. $f \in D^{\infty}\{a\}$.

1^o A konvergencia: *Hol konvergens a $T_a f$ Taylor-sor?*

2^o Az előállítás: *Ha a Taylor-sor konvergens egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor vajon fennáll-e az*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in I)$$

*egyenlőség? Ha ez igaz, akkor azt mondjuk, hogy **a Taylor-sor előállítja f-et az I intervallumon**.*

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy egy függvény Taylor-sora $\mathbb{R}$-en konvergens, de nem állítja elő a függvényt. **Igazolható**, hogy ha

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

akkor $f \in D^\infty(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. A $T_0 f$ Taylor-sor minden együtthatója 0, az összegfüggvénye az $\mathbb{R}$-en azonosan 0 függvény, ami f-et egyetlen $x \neq 0$ pontban sem állítja elő. ■

A sorfejtés problémáját néhány függvénynél „egyedi eszközökkel” vizsgálhatjuk. Ennek illusztrálására mutatunk most példákat.

Nevezetes sorfejtések

1° $$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)}.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{1+x}$ $(x > -1)$. Ekkor $f \in D^\infty$ és $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$ $(x > -1)$, így

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow$$

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0} (-1)^n x^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez $(-x)$ hányadosú geometriai sor, és konvergens $\Longleftrightarrow$ $|x| < 1$, és ekkor az összege:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1). \ \blacksquare$$

2° $$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)}.$$

Bizonyítás. **1°**-ben x helyett x^2-et írva kapjuk az állítást. ■

3^o $$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \quad (x \in (-1,1])}.$$

Ha $x = 1$, akkor

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots}.$$

Bizonyítás. (Vázlat.) Legyen $f(x) := \ln(1+x)$ $(x > -1)$. Ekkor $f \in D^\infty$ és $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$, így

$$f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \ (n \in \mathbb{N}^+) \quad \Longrightarrow$$

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A sor konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.

Az előállítás. Legyen g a $T_0 f$ sor összegfüggvénye:

$$g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \big(x \in (-1, 1]\big).$$

Ekkor $g \in D(-1, 1)$ és $\forall\, x \in (-1, 1)$ pontban

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Mivel $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $(x > -1) \implies f' = g'$ $(-1, 1)$-en $\implies$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$: $f(x) - g(x) = c$ $\big(x \in (-1, 1)\big)$. Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0 \implies c = 0$. Így $\forall\, x \in (-1, 1)$ pontban

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots .$$

Az $x = 1$ pontban az állítás f és g folytonosságából következik.

■

4° $$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots \qquad (x \in [-1, 1])}.$$

Ha $x = 1$, akkor

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}.$$

Megjegyzés. Az $f(x) := \operatorname{arc\,tg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény $T_0 f$ Taylor-sorának előállítása a definíció alapján nem egyszerű feladat. ■

Bizonyítás. (Vázlat.) **Ötlet:** Az $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény sorösszeg előállítását már ismerjük (l. a **2°** példát):

$$T_0 f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad \big(|x| < 1\big).$$

Vegyük észre azt, hogy ha

$$g(x) := x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \big(|x| < 1\big), \text{ akkor}$$

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad \big(|x| < 1\big).$$

A **3°** példában alkalmazott gondolatmenetet követve kapjuk, hogy

$$g(x) = f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \text{ha } x \in (-1, 1).$$

A ± 1 pontbeli előállítást is hasonlóan bizonyíthatjuk be. $\blacksquare$

5^o A binomiális sor

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \big(x \in (-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\big)},$$

ahol

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \text{ és } \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \text{ ha } n \in \mathbb{N}^+$$

a binomiális együtthatók.

Bizonyítás. (Vázlat.) Legyen

$$f(x) := (1+x)^\alpha \quad (x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

1. lépés. Az f függvény 0 pont körüli Taylor-sora:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ui. $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.

2. lépés. A $T_0 f$ sor konvergens a $(-1,1)$ intervallumon (l. a hányadoskritériumot). Legyen

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1).$$

3. lépés. $f \in D^\infty(-1,+\infty)$ és

$$(1+x) \cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x) \quad (x > -1).$$

$g \in D^\infty(-1,1)$, és **igazolható**, hogy

$$(1+x) \cdot g'(x) = \alpha \cdot g(x) \quad (|x| < 1).$$

4. lépés. Igazoljuk, hogy

$$(1+x)^\alpha = f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x|<1),$$

Valóban, minden $x \in (-1,1)$ pontban

$$\left(\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{g'(x)\cdot(1+x)^\alpha - g(x)\cdot\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$= \frac{(1+x)\cdot g'(x) - \alpha\cdot g(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0.$$

Ezért $\exists\, c \in \mathbb{R} : \dfrac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = c \ (|x|<1)$. Mivel $g(0) = \dbinom{\alpha}{0} = 1$, ezért $c=1$, tehát

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \big(x \in (-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\big). \ \blacksquare$$

6° A binomiális sorban $\alpha = -\frac{1}{2}$ esetén x helyett $(-x^2)$-et írva azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot x^{2n} \quad \big(|x|<1\big)},$$

ahol $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \cdot \binom{2n}{n} / 4^n$.

7° Ha $f(x) := \arcsin(x)$ $\big(x \in [-1,1]\big)$, akkor $f \in D(-1,1)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(|x|<1\big).$$

A **6°** példát, valamint a **3°** példa gondolatmenetét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \big(|x|<1\big)}. \quad \blacksquare$$

Az általános eset vizsgálata

A sorfejtés problémájának a vizsgálatához az általános esetben az

$$f(x) - T_{a,n}f(x)$$

különbséget kell tekinteni.

A következő tételben a szóban forgó különbséget egy jól kezelhető alakban állítjuk elő.

Tétel: Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, *és t.f.h.* $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. *Ekkor* $\forall\, x \in K(a)$ *ponthoz* $\exists$ *olyan* a *és* x *közé eső* ξ *szám, hogy*

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni. Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{a,n}f(x) \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

A $T_{a,n}f$ polinom definíciójából következik, hogy

$$F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - \big(T_{a,n}f\big)^{(i)}(a) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Továbbá, $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, hiszen $\big(T_{n,a}f\big)^{(n+1)} \equiv 0$, mert $T_{a,n}f$ egy legfeljebb n-edfokú polinom.

Másrészt, legyen $G(x) := (x-a)^{n+1}$ $\big(x \in K(a)\big)$. Ekkor minden $x \in K(a)$ esetén

$$G'(x) = (n+1)(x-a)^n, \quad G''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1}, \quad \dots ,$$
$$G^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

amiből következik, hogy $G^{(i)}(a) = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Tegyük fel, hogy $x \in K(a)$ és például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists \xi_1 \in (a, x)\colon\ \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)\colon \ \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a fenti gondolatmenetet n-szer megismételjük, akkor a k-dik lépésben $(k = 1, 2 \ldots, n)$:

$$\exists \xi_{k+1} \in (a, \xi_k) \subset (a, x)\colon$$
$$\frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)}.$$

Az n számú lépés során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-T_{a,n}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \\ = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!},$$

hiszen minden $x \in K(a)$ esetén $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. A konstrukcióból látható, hogy ξ_{n+1} az a pont és x között van, ezért a $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

Függvények egy fontos osztályára igaz, hogy egy rögzített a helyhez tartozó Taylor-polinomok sorozata egy $K(a)$ környezet bármely x helyén $f(x)$-hez tart, ha $n \to +\infty$. Az egyik legegyszerűbb, de fontos ilyen jellegű tétel a következő.

Tétel: Elégséges feltétel az előállításra.

Legyen $f \in D^\infty\big(K(a)\big)$, és tegyük fel, hogy

$$\exists\, M > 0: \quad \big|f^{(n)}(x)\big| \leq M \ \big(\forall\, x \in K(a),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\big).$$

Ekkor f-nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll az

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ \big(x \in K(a)\big)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $x \in K(a)$ egy tetszőleges pont. Ekkor az előző tétel alapján létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \le M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ebből a tétel állítása már következik, mert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \blacksquare$$