Analízis II. A-B, 1. zárthelyi, 2023.10.26.

1. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{\dfrac{1+4x}{1+2x}} \quad \left(x \in \left(-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)\right)$ függvényt.

a) A definíció alapján bizonyítsa, hogy $f \in D\{0\}$, és számítsa ki az $f'(0)$ deriváltat! **3 pont**

b) Írja fel az érintőegyenes egyenletét az $a = 12$ abszcisszájú pontban, ha létezik! **3 pont**

Megoldás:

a) Nyilván $0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tekintsük a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ határértéket:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{\frac{1+4x}{1+2x}} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+2x}}{x\sqrt{1+2x}} = \frac{2x}{x\sqrt{1+2x}\left(\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+2x}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2x}\left(\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+2x}\right)} \quad \xrightarrow[x \to 0]{} \quad \frac{2}{1 \cdot (1+1)} = 1.$$

A határérték létezik és véges, tehát $f \in D\{0\}$, és $f'(0) = 1$.

b) A műveleti szabályok és a deriválhatóság kapcsolatát leíró tételek alapján $f \in D\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$, így $f \in D\{12\}$. A függvénynek tehát létezik érintője a $(12, f(12))$ pontban, melynek egyenlete:

$$y = f'(12) \cdot (x - 12) + f(12).$$

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+4x}{1+2x}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1+4x}{1+2x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1+4x}} \cdot \frac{4(1+2x) - 2(1+4x)}{(1+2x)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2x}{1+4x}} \cdot \frac{1}{(1+2x)^2} = \frac{1}{(1+2x)\sqrt{(1+4x)(1+2x)}} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{1}{4}, +\infty\right)\right).$$

Tehát $f(12) = \dfrac{7}{5}$, $f'(12) = \dfrac{1}{25 \cdot 7 \cdot 5} = \dfrac{1}{875}$, az érintőegyenes egyenlete pedig

$$y = f'(12) \cdot (x - 12) + f(12) = \frac{x - 12}{875} + \frac{7}{5}.$$

---

2. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az alábbi függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható legyen, és adja meg a deriváltfüggvényt!

$$f(x) := \begin{cases} x^{2023} + a \cdot (x + \cos x) - 2, & \text{ha } x < 0, \\ b \cdot (e^{2x} + \ln(1+x)) + 4x, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

8 pont

Megoldás:

i. $x \in (-\infty, 0)$ esetén $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = 2023 \cdot x^{2022} + a \cdot (1 - \sin x)$,

ii. $x \in (0, +\infty)$ esetén $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = b \cdot \left(2 \cdot e^{2x} + \dfrac{1}{1+x}\right) + 4$,

iii. $x = 0$ esetén $f \in D\{0\} \iff f \in C\{0\} \wedge f'_-(0) = f'_+(0)$.

- Folytonosság:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = x^{2023} + a\cdot(x+\cos x) - 2\Big|_{x=0} = a-2,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = b\cdot\left(e^{2x} + \ln(1+x)\right) + 4x\Big|_{x=0} = b = f(0).$$

Tehát $f \in C\{0\} \iff f(0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) \iff a-2=b.$

- Egyoldali deriváltak:

$$f'_-(0) = 2023\cdot x^{2022} + a\cdot(1-\sin x)\Big|_{x=0} = a,$$

$$f'_+(0) = b\cdot\left(2\cdot e^{2x} + \frac{1}{1+x}\right) + 4\Big|_{x=0} = 3b+4.$$

Tehát $f'_-(0) = f'_+(0) \iff a = 3b+4$

- $f \in D\{0\} \iff \begin{cases} a-2=b \\ a=3b+4 \end{cases} \iff a=1$ és $b=-1.$

Tehát $f\in D \iff a=1$ és $b=-1$, és ekkor a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \begin{cases} 2023\cdot x^{2022} + 1 - \sin x, & \text{ha } x<0, \\ 1, & \text{ha } x=0, \\ -\left(2\cdot e^{2x} + \dfrac{1}{1+x}\right) + 4, & \text{ha } x>0. \end{cases}$$

---

3. Számítsa ki a következő határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{x\cdot\sin x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. **4+4 pont**

Megoldás:

a) A L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{x\cdot\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - x - \cos x)'}{(x\cdot\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \sin x}{\sin x + x\cdot\cos x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1 + \sin x)'}{(\sin x + x\cdot\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \cos x}{2\cos x - x\cdot\sin x} = 1.$$

b) Átalakítás e alapú hatvánnyá:

$$(1+x)^{1/x} = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \qquad (-1<x).$$

A kitevő határértéke a L'Hospital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Az exp függvény folytonos, így a határérték:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e.$$

---

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után (monotonitás, szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok, határértékek, aszimptoták) vázolja az alábbi függvény grafikonját!

$$f(x) := x^4 \cdot e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

10 pont

Megoldás:

1) **Kezdeti vizsgálatok:** $f \in D^\infty$. $f \geq 0$. $f(x) = 0 \iff x = 0$.

2) **Monotonitás:** $f \in D$, a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 4x^3 \cdot e^{-x} - x^4 \cdot e^{-x} = (4x^3 - x^4) \cdot e^{-x} = -x^3 \cdot (x-4) \cdot e^{-x}.$$

Monotonitási intervallumok és lokális szélsőértékek:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
f'	$\ominus$	0	$\oplus$	0	$\ominus$
f	$\downarrow$	0 lok. min.	$\uparrow$	$256/e^4$ lok. max.	$\downarrow$

3) **Konvexitás:** $f \in D$, a második deriváltfüggvény:

$$f''(x) = (12x^2 - 4x^3) \cdot e^{-x} - (4x^3 - x^4) \cdot e^{-x} =$$
$$= (x^4 - 8x^3 + 12x^2) \cdot e^{-x} = x^2(x-2)(x-6) \cdot e^{-x}.$$

Konvexitási intervallumok és inflexiós pontok:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,6)$	6	$(6,+\infty)$
f''	$\oplus$	0	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
f	konvex			$16/e^2$ inflexió	konkáv	$1296/e^6$ inflexió	konvex

4) **Határértékek:** $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \{\pm\infty\}$.

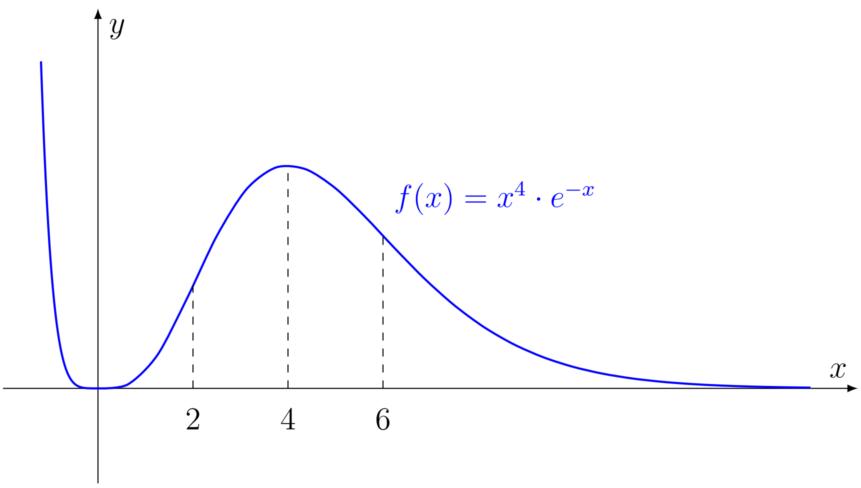
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot e^{-x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

5) **Aszimptoták:**

$(-\infty)$-ben: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot e^{-x} = -\infty \implies$ nem létezik aszimptota.

$(+\infty)$-ben: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ miatt $y = 0$ aszimptota.

6) **Grafikon:**



5. Írja fel az alábbi függvény 0 középpontú másodfokú Taylor-polinomját, és becsülje meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

$$f(x) := \sqrt[3]{1+3x} \qquad \left(x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)\right).$$

8 pont

Megoldás:

- **Taylor-polinom:**
  $f \in D^2$. A függvény és deriváltjai, valamint értékük 0-ban:
  $$f(x) = (1+3x)^{1/3}, \qquad f(0) = 1;$$
  $$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (1+3x)^{-2/3} = (1+3x)^{-2/3}, \qquad f'(0) = 1;$$
  $$f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot (1+3x)^{-5/3} = -2 \cdot (1+3x)^{-5/3}, \qquad f''(0) = -2.$$
  Tehát a 0 középpontú másodfokú Taylor-polinom:
  $$T_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x - x^2.$$

- **Hibabecslés:**
  $f \in D^3$, a hibabecsléshez alkalmazható a Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal:
  $$\forall\, x \in \left(0, \frac{1}{10}\right] : \ \exists \xi \in (0, x) : \ f(x) - T_{2,0}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot x^3.$$
  A harmadik deriváltfüggvény:
  $$f'''(x) = -2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 3 \cdot (1+3x)^{-8/3} = 10 \cdot (1+3x)^{-8/3} = \frac{10}{\sqrt[3]{(1+3x)^8}}.$$
  Ha $0 < x \le \dfrac{1}{10}$ és $0 < \xi < x$, akkor $0 < \xi \le \dfrac{1}{10}$, és
  $$|f'''(\xi)| = \frac{10}{\sqrt[3]{(1+3\xi)^8}} \le \frac{10}{\sqrt[3]{(1+3\cdot 0)^8}} = 10.$$
  Tehát a hibabecslés a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon:
  $$|f(x) - T_{2,0}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!} \cdot |x|^3 \le \frac{10}{6} \cdot \left|\frac{1}{10}\right|^3 = \frac{1}{600}.$$