3. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

Emlékeztető.

Az inverz függvény deriválási szabálya. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f\colon I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

(a) *f szigorúan monoton és folytonos I-n,*

(b) *egy $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.*

Ekkor az f^{-1} inverz függvény deriválható a $b := f(a)$ pontban, és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A differenciálhatóságból következik a folytonosság: $\quad f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$.

A szigorú monotonitás megállapítható a függvény deriváltjával: Ha $f \in D(a,b)$, akkor

$$\text{ha } f' > 0 \ \ [\text{illetve } \ f' < 0\,] \ \ (a,b)\text{-n} \quad \Longrightarrow \quad f \ \uparrow \ [\text{illetve } \downarrow\,] \ \ (a,b)\text{-n}.$$

Lineáris közelítés. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \ \text{ és } \ \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ \lim\limits_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \left(x \in \mathcal{D}_f\right). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Az f függvény a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az a pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnyel. Ezt így is jelölhetjük:

$$f(x) - f(a) \approx f'(a) \cdot (x-a) \quad (\text{ha } x \approx a).$$

Ez motiválja az érintő definícióját.

Az érintő értelmezése. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban **van érintője**, ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli **érintőjén** az*

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

Egyoldali deriváltak. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $\exists\, \delta > 0 :\ [a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f az **a pontban jobbról deriválható** (vagy **jobbról differenciálható**), ha*

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{határérték.}$$

*Ezt az f függvény **a pontbeli jobb oldali deriváltjának** (vagy **jobb oldali differenciálhányadosának**) nevezzük, és $\boxed{f'_+(a)}$-val jelöljük.*

*Az **a pontbeli bal oldali deriváltat** hasonlóan értelmezzük, és $\boxed{f'_-(a)}$-val jelöljük.*

A definíciókból közvetlenül következik, hogy

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ f'_+(a),\ \exists\ f'_-(a) \ \text{ és } \ f'_+(a) = f'_-(a) \ (= f'(a)).$$

1. feladat. *Igazoljuk, hogy az*

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1}+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, inverze differenciálható és határozzuk meg $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$*-t!*

Megoldás. A feladatra két megoldást is adunk.

1^o Az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel alkalmazása.

A deriválási szabályok szerint $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x-1}+1}} \cdot \left(e^{2x-1}+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x-1}+1}} \cdot 2\,e^{2x-1} =$$
$$= \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x-1}+1}} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért f szigorúan monoton növekedő függvény $\mathbb{R}$-en, és így invertálható. Világos, hogy $\sqrt{2} \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\ (= \mathcal{R}_f)$, hiszen

$$\sqrt{2} = \sqrt{e^{2x-1}+1} \quad\iff\quad x = \tfrac{1}{2}, \quad \text{azaz } f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Mivel $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, ezért az inverz függvény deriválhatóságára vonatkozó tétel minden feltétele teljesül. Így $f^{-1} \in D\{\sqrt{2}\}$ és

$$\underbrace{\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{e^{2\cdot\frac{1}{2}-1}+1}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \underbrace{\sqrt{2}}.$$

2^o Az inverz függvény explicit képletének alkalmazása.

A jelen példában az inverz függvény egyszerű formulával adható meg (általában nem ez a helyzet).

Mivel minden $x, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{e^{2x-1}+1} < \sqrt{e^{2t-1}+1} \quad\iff\quad x < t,$$

ezért f szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, így invertálható. Ugyanakkor, f folytonos $\mathbb{R}$-en (hiszen ott deriválható), ezért

$$\mathcal{R}_f = \left(\inf_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{e^{2x-1}+1},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{e^{2x-1}+1}\right) = (1, +\infty),$$

következésképpen

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = (1, +\infty),$$

tehát $\sqrt{2} \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ valóban teljesül. Ha $y \in (1 + \infty)$, akkor

$$y = f(x) = \sqrt{e^{2x-1}+1} \quad\iff\quad e^{2x-1} = y^2 - 1 \quad\iff\quad 2x - 1 = \ln\left(y^2-1\right) \quad\iff$$
$$\iff\quad x = \tfrac{1}{2}\ln\left(y^2-1\right) + \tfrac{1}{2}.$$

Az inverz függvény tehát

$$f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}\ln\left(y^2-1\right) + \tfrac{1}{2} \qquad \big(y \in (1+\infty)\big).$$

A deriválási szabályok szerint $f^{-1} \in D\big((1,+\infty)\big)$ és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2-1} \cdot 2y = \frac{y}{y^2-1} \qquad \big(y \in (1,+\infty)\big).$$

Végül, ha $y = \sqrt{2}$, akkor

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\,.$$

2. feladat. *Legyen*

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \qquad (x > -1).$$

(a) *Vizsgáljuk meg deriválhatóság szempontjából az f függvényt, és határozzuk meg az f' deriváltfüggvényét!*

(b) *Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $\big(0, f(0)\big)$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét!*

Megoldás.

(a) Az elemi függvények deriválhatóságából és a deriválási szabályokból következik, hogy minden $x > -1$ pontban $f \in D\{x\}$, ezért $\mathcal{D}_{f'} = (-1,+\infty)$. $f'(x)$-et az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva számítjuk ki.

Vegyük észre azonban azt, hogy kevesebb számolással kapjuk meg az eredményt, ha először a logaritmusazonosságokkal átalakítjuk $f(x)$-et:

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} = \ln\sqrt{1+x} - \ln\left(x^2+1\right)^5 = \frac{1}{2}\ln(1+x) - 5\ln\left(x^2+1\right) \qquad (x > -1).$$

Így a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2\,x = \frac{1}{2\,(1+x)} - \frac{10\,x}{x^2+1} \qquad (x > -1)\,.$$

(b) Mivel $f \in D\{0\}$, tehát a függvény grafikonjának a $(0, f(0))$ pontban *van érintője*. Ugyanakkor

$$f(0) = \ln 1 = 0 \quad \text{és} \quad f'(0) = \frac{1}{2},$$

ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(0)\cdot(x-0) + f(0) = \frac{x}{2}.$$

3. feladat. *Hol deriválható az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsuk ki a deriváltat!

Megoldás.

Legyen $\boxed{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ tetszőlegesen rögzített pont. Ekkor az elemi függvényekre, az alapműveletekre, valamint az összetett függvényre vonatkozó deriválhatósági tételek alapján $f \in D\{a\}$, és

$$f'(a) = \frac{1 \cdot \left(1+e^{1/a}\right) - a \cdot \left(-\frac{1}{a^2} \cdot e^{1/a}\right)}{\left(1+e^{1/a}\right)^2} = \frac{1+e^{1/a}+\frac{1}{a} \cdot e^{1/a}}{\left(1+e^{1/a}\right)^2} =$$

$$= \frac{a+(1+a) \cdot e^{1/a}}{a \cdot \left(1+e^{1/a}\right)^2}.$$

Legyen $\boxed{a := 0}$. A pontbeli derivált definíciója szerint most az

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+e^{1/x}} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

függvény 0 pontbeli határértékét kell megvizsgálni.

Azt már tudjuk, hogy $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$. Nézzük a $(*)$ függvény bal-, ill. jobb oldali határértékét a 0 pontban, azaz az f függvény bal-, ill. jobb oldali deriváltját a 0 pontban!

Mivel

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{y \to -\infty} e^y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0-0} e^{1/x} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0+0} e^{1/x} = +\infty,$$

ezért egyrészt

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

másrészt

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+\infty} = 0.$$

Így

$$f'_-(0) \neq f'_+(0),$$

és ez azt jelenti, hogy az f függvény nem deriválható a 0 pontban.

4. feladat. *Legyenek a, b és c valós paraméterek. Határozzuk meg az*

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + bx + c, & ha \in (-\infty, 0) \\ e^x, & ha \in [0, +\infty) \end{cases}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás. Ha $\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ tetszőlegesen rögzített pont, akkor a megfelelő deriválhatósági tételek alapján létezik $f'(x)$ és

$$\underbrace{f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \\ e^x, & \text{ha } x \in (0, +\infty), \end{cases}}$$

az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paraméterek tetszőleges megválasztása mellett.

Az esetszétválasztási pontban, azaz $\boxed{x = 0}$-ban, $f'(0)$ létezése a paraméterek választásától függ.

Először vegyük észre, hogy ha létezik $f'(0)$, akkor f a 0-ban folytonos is. Mivel

$$\lim_{x \to 0-0} \left(ax^2 + bx + c\right) = c \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} e^x = 1,$$

ezért

$$f \in C\{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad c = 1 \ \text{ és } \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Tehát,

$$\underbrace{\text{ha} \quad c \neq 1 \ \text{ és } \ a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{akkor} \quad f \notin D\{0\}.}$$

A továbbiakban tehát elég a $\boxed{c = 1}$ esettel foglalkoznunk. Ekkor

$$f \in D\{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, f'_+(0),\ \exists\, f'_-(0) \ \text{ és } \ f'_+(0) = f'_-(0) \ = f'(0).$$

Az egyoldali deriváltak létezése nyilvánvaló (hiszen a paraboláknak ($a \neq 0$), egyeneseknek ($a = 0$) és az exponenciális függvénynek minden pontban létezik mindkét oldali deriváltja).

Legyen $g(x) := ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbb{R}$), azaz f bal ágának kiterjesztése. Figyeljük meg, hogy ekkor

$$f'_-(0) = g'_-(0) = g'(0) = b.$$

Hasonlóan, legyen $h(x) := e^x$ ($x \in \mathbb{R}$), azaz f jobb ágának kiterjesztése. Ekkor

$$f'_+(0) = h'_+(0) = h'(0) = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\underbrace{f \in D\{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad c = 1, \quad b = 1 \text{ és } a \in \mathbb{R},}$$

és ekkor $f'(0) = 1$.