12. gyakorlat

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 3.

Emlékeztető. ***A pontbeli folytonosság fogalma.*** Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban***, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$. ***Fontos!*** A függvény pontbeli folytonosságát csak értelmezési tartománybeli pontokra értelmezzük! Ezért csak ilyen pontokban lehet vizsgálni a folytonosságot. Azokat az értelmezési tartománybeli pontokat, ahol a függvény nem folytonos ***szakadási helyeknek*** nevezzük.

A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk:

0. Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény ***megszüntethető szakadási helye***, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{véges határérték, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

1. Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény ***elsőfajú szakadási helye*** (vagy f-nek ***ugrása van*** a-ban), ha

$$\exists \lim_{a+0} f \ \text{ és } \ \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{ezek végesek, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

2. Minden más esetben, amikor a függvény nem folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen ***másodfajú szakadása van***.

Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *Ha $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}_f'$, azaz az a pont izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\}$,*
2. *Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, azaz az a pont torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \ \textit{ és } \ \lim_a f = f(a).$$

Tétel. **(A folytonosságra vonatkozó átviteli elv)** *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \textit{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

Tétel. **(Az algebrai műveletek és a folytonosság kapcsolata)** *Tegyük fel, hogy $f, g \in C\{a\}$. Ekkor a*

$$\lambda f \ \ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad f+g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \ \ (\textit{ha } g(a) \neq 0)$$

függvények is folytonosak a-ban.

Tétel. **(Hatványsor összegfüggvényének folytonossága)** *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a hatványsor teljes konvergenciahalmazán.*

Fontos! A hatványfüggvények, a polinomok és általánosan a racionális törtfüggvények, a gyökfüggvények, illetve az exponenciális, a szinusz- és a koszinuszfüggvény az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.

Tétel. **(Az összetett függvény folytonossága)** *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény „örökli” a belső- és a külső függvény folytonosságát.*

Tétel. **(Az összetett függvény határértéke)** *Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ két valós függvény, amire $R_g \subset \mathcal{D}_f$ teljesül, és $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy*

$$a \in \mathcal{D}_g',\ \exists \lim_a g =: b \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \textit{és} \qquad b \in \mathcal{D}_f',\ \exists \lim_b f =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. *ha $b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f \in C\{b\}$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és*

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = A,$$

azaz a kompozíció- és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.

2. *ha a g függvény nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és*
$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to b} f(y) = A.$$

A tétel mindkét állításának eredménye a

$$\boxed{\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to b} f(y) \qquad \big(y = g(x) \to b, \text{ ha } x \to a\big)}$$

módon is írható, ami úgy tekinthető, mint a $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big)$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés. A tétel értelmében ez a helyettesítés akkor alkalmazható, ha

- f folytonos a b pontban,

vagy

- g nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében (pl. ha g invertálható, mondjuk nem állandó, lineáris függvény).

Egy nevezetes határérték: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

1. Feladat. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy*

$$(*) \qquad \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall \varepsilon > 0 \text{ és } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \text{ esetén } \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Az f függvény milyen tulajdonságát fejezi ki ez az állítás?

Megoldás. A feladatban leírt függvénytulajdonság emlékeztet a pontbeli folytonosság definíciójához:

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Annyi változás történt „csupán”, hogy az ε és a δ számokra vonatkozó feltételek *sorrendjét felcseréltük*.

Vegyük észre, hogy $(*)$-ban ***minden*** $\varepsilon > 0$ számra és ***minden*** x számra előírtuk az $\big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$ feltételt. Világos, hogy ez csak úgy teljesülhet, ha

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = f(a).$$

A feladatban megfogalmazott feltétel tehát pontosan azt fejezi ki, hogy az f függvény az a pont δ-sugarú környezetében állandó.

2. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} & (x < 1) \\ \sqrt{x+3} & (1 \le x \le 6) \\ \dfrac{\sin(2x - 12)}{x - 6} & (x > 6) \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Megoldás. A megadott f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$f_1(x) := \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}\big),$$

$$f_2(x) := \sqrt{x+3} \quad \big(x \in [-3,+\infty)\big) \qquad \text{és} \qquad f_3(x) := \frac{\sin(2x-12)}{x-6} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}\big)$$

függvények értelmezhetők az f-ben szereplő intervallumokon. A polinomok, a gyök- és a szinuszfüggvény, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek (kivéve természetesen a kritikus műveletek) és a kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f_1, f_2 és f_3 folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban. Ha $x \neq 1$ és $x \neq 6$, akkor az x pontnak van olyan környezete, ahol az f függvény értéke kizárólag az f_1, az f_2 vagy az f_3 függvények egyikével kifejezhető. Ez azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{1,6\}$ halmazon.

$x = 1$ esetén

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x \to 1-0} \frac{x-3}{x-2} = \frac{1-3}{1-2} = 2,$$

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x \to 1+0} \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2 = f(1),$$

így f folytonos az $x = 1$ pontban.

$x = 6$ esetén az $y = 2x - 12$ helyettesítéssel

$$\lim_{6-0} f = \lim_{x \to 6-0} \sqrt{x+3} = \sqrt{6+3} = 3 = f(6),$$

$$\lim_{6+0} f = \lim_{x \to 6+0} \frac{\sin(2x-12)}{x-6} = 2 \lim_{x \to 6+0} \frac{\sin(2x-12)}{2x-12} = 2 \lim_{y \to 0+0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2,$$

így f nem folytonos az $x = 6$ pontban, hiszen a pont bal- és jobb oldali határértéke nem egyezik meg. Mivel mindkét határérték véges, ezért az f függvénynek elsőfajú szakadása van az $x = 6$ pontban.

3. Feladat. *Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesznek mindenütt folytonosak a következő függvények?*

$$a) \quad f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1 & (x \le 1) \\ -x + 3 & (x > 1), \end{cases} \qquad b) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{e^{x+\frac{1}{x}}} & (x > 0) \\ -2x + \alpha & (x \le 0). \end{cases}$$

Megoldás.

a) A megadott f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető, és a benne szereplő

$$f_1(x) := \alpha x^2 + 4x - 1 \quad (x \le 1) \qquad \text{és} \qquad f_2(x) := -x + 3 \quad (x > 1)$$

függvények polinomok, azaz folytonosak az f-ben szereplő intervallumokon, az α paramétertől függetlenül. Ha $x \neq 1$, akkor az x pontnak van olyan környezete, ahol az f függvény értéke kizárólag az f_1 vagy az f_2 függvények egyikével kifejezhető. Ez azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ halmazon minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

$x = 1$ esetén

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} (\alpha x^2 + 4x - 1) = \alpha + 4 - 1 = \alpha + 3 = f(1),$$

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} (-x + 3) = -1 + 3 = 2,$$

így f csak akkor folytonos az $x = 1$ pontban, ha $\alpha + 3 = 2$, azaz $\alpha = -1$ esetén.

b) A megadott f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$f_1(x) := \frac{1}{e^{x+\frac{1}{x}}} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad \text{és} \qquad f_2(x) := -2x + \alpha \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények értelmezhetők az f-ben szereplő intervallumokon, mivel az exponenciális függvény nem veheti fel a nulla értéket. A polinomok, az exponenciális függvény, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek (kivéve természetesen a kritikus műveletek) és a kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f_1 és f_2 folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban. Ha $x \neq 0$, akkor az x pontnak van olyan környezete, ahol az f függvény értéke kizárólag az f_1 vagy az f_2 függvények egyikével kifejezhető. Ez azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

$x = 0$ esetén

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{x+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^x e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^0} \cdot \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \Big(y = \tfrac{1}{x},\ y \to +\infty,\ \text{ha } x \to 0+0\Big) = 1 \cdot \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x\to 0-0} (-2x + \alpha) = \alpha = f(0),$$

így f csak akkor folytonos az $x = 0$ pontban, ha $\alpha = 0$.

4. Feladat. *Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozzuk meg az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \alpha x}{x^2} & (x < 0) \\ \alpha - \beta x^3 & (0 \le x \le 1) \\ \dfrac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1} & (x > 1) \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Megoldás. A megadott f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$f_1(x) := \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad f_2(x) := \alpha - \beta x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

illetve

$$f_3(x) := \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big)$$

függvények értelmezhetők az f-ben szereplő intervallumokon, az α, β paraméterektől függetlenül. A polinomok, a racionális tört- és a szinuszfüggvény, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek (kivéve természetesen a kritikus műveletek) és a kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f_1, f_2 és f_3 folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban. Ha $x \neq 0$ és $x \neq 1$, akkor az x pontnak van olyan környezete, ahol az f függvény értéke kizárólag az f_1, az f_2 vagy az f_3 függvények egyikével kifejezhető. Ez azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ halmazon minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.

$x = 0$ esetén, ha $\alpha = 0$, akkor $f_1(x) = 0$ $(x < 0)$, így $\lim\limits_{0-0} f = 0$. Ha $\alpha \neq 0$, akkor

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} = \lim_{x \to 0-0} \left(\alpha^2 \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \right)^2 \right) = \alpha^2 \cdot 1^2 = \alpha^2.$$

Másrészt

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x \to 0+0} (\alpha - \beta x^3) = \alpha - \beta \cdot 0^3 = \alpha.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén létezik az $x = 0$ pont bal- és jobboldali határértéke, és mindkettő véges. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az $x = 0$ pontban, ha mindkét határérték megegyezik. Ekkor $\alpha^2 = \alpha$, azaz $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$, és $\beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, akkor az f függvénynek elsőfajú szakadása van az $x = 0$ pontban a β értéktől függetlenül.

$x = 1$ esetén

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x \to 1-0} (\alpha - \beta x^3) = \alpha - \beta \cdot 1^3 = \alpha - \beta.$$

Másrészt

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x \to 1+0} \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{\alpha(x-1) + \alpha + \beta}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1+0} \left(\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\alpha + \beta}{(x-1)(x+1)} \right).$$

Ha $\alpha + \beta = 0$, akkor

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x \to 1+0} \left(\frac{\alpha}{x+1} \right) = \frac{\alpha}{1+1} = \frac{\alpha}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha + \beta = 0$ esetén létezik az $x = 1$ pont bal- és jobboldali határértéke, és mindkettő véges. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az $x = 0$ pontban, ha mindkét határérték megegyezik. Ekkor $\alpha - \beta = \alpha/2$, azaz $\beta = \alpha/2$. Ekkor az $\alpha + \beta = 0$ feltétel csak akkor teljesül, ha $\alpha = \beta = 0$. Ha $\alpha = -\beta \neq 0$, akkor az f függvénynek elsőfajú szakadása van az $x = 1$ pontban.

Ha $\alpha + \beta \neq 0$, akkor a

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x \to 1+0} \frac{\alpha}{x+1} + (\alpha + \beta) \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x+1} \cdot \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} + (\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & (\alpha + \beta > 0) \\ -\infty & (\alpha + \beta < 0). \end{cases}$$

határérték létezik, de nem véges. Így, ha $\alpha + \beta \neq 0$, akkor az f függvénynek másodfajú szakadása van az $x = 1$ pontban.

Emlékeztető.

Tétel. **(Bolzano tétele)** *Ha egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény az intervallum két végpontjában különböző előjelű, akkor a függvénynek legalább egy zérushelye van, azaz*

$$f \in C[a,b] \quad \textit{és} \quad f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (a,b) \colon f(\xi) = 0.$$

5. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a jelzett I intervallumon!*

a) $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0, \quad I := \mathbb{R},$ *b)* $e^x = 2 - x, \quad I := \mathbb{R},$

c) $x = \cos x, \quad I := (0,1),$ *d)* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} = e^{x^2}, \quad I := (0,2).$

Megoldás.

a) Legyen $f(x) = x^5 - x^2 + 2x + 3$ $(x \in \mathbb{R})$. Az f függvény egy polinom, így folytonos $\mathbb{R}$-en. Vegyük észre, hogy

$$f(0) = 3 > 0 \qquad \text{és} \qquad f(-1) = -1 < 0.$$

Ezért $f \in C[-1,0]$ és $f(-1) \cdot f(0) < 0$, így a Bolzano-tétel szerint $\exists \xi \in (-1,0) \colon f(\xi) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a megadott egyenletnek van megoldása $\mathbb{R}$-en.

b) Legyen $f(x) = e^x + x - 2$ $(x \in \mathbb{R})$. Az f függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, hiszen folytonos függvények összege. Vegyük észre, hogy

$$f(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 2 - 1 > 0.$$

Ezért $f \in C[0,1]$ és $f(0) \cdot f(1) < 0$. Így a Bolzano tétele szerint $\exists \xi \in (0,1) \colon f(\xi) = 0$, azaz

$$e^\xi + \xi - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^\xi = 2 - \xi.$$

Ez azt jelenti, hogy a megadott egyenletnek van megoldása $\mathbb{R}$-en.

c) Legyen $f(x) = \cos x - x$ $(x \in \mathbb{R})$. Az f függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, hiszen folytonos függvények különbsége. Vegyük észre, hogy

$$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = \cos 1 - 1 < 0,$$

hiszen

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1^n}{2n!} = 1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}\right)}_{<0} + \cdots < 1.$$

Ezért $f \in C[0,1]$ és $f(0) \cdot f(1) < 0$. Így a Bolzano tétele szerint $\exists \xi \in (0,1) \colon f(\xi) = 0$, azaz

$$\cos \xi - \xi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos \xi = \xi.$$

Ez azt jelenti, hogy a megadott egyenletnek van megoldása a $(0,1)$ intervallumon.

d) Legyen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - e^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}).$$

A polinomok, a racionális tört- és az exponenciális függvény, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek és a kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ halmazon. Vegyük észre, hogy

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - e^{x^2}\right) = +\infty + \frac{1}{-2} - e^0 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - e^{x^2}\right) = \frac{1}{2} + (-\infty) - e^4 = -\infty.$$

Így $\exists a \in (0, 1)\colon f(a) > 0$, és $\exists b \in (1, 2)\colon f(b) < 0$. Ezért $f \in C[a, b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$. Így a Bolzano tétele szerint $\exists \xi \in (a, b) \subset (0, 2)\colon f(\xi) = 0$, azaz

$$\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi-2} - e^{\xi^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi-2} = e^{\xi^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a megadott egyenletnek van megoldása a $(0, 2)$ intervallumon.

6. Feladat. *Lássuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke! Lényeges-e a polinom fokszámára tett feltétel?*

Megoldás. Legyen

$$p(x) := a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egy páratlan fokszámú, valós együtthatós polinom, így $a_{2n+1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Tegyük fel először, hogy a polinom főegyütthatója pozitív, azaz $a_{2n+1} > 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_1}{x^{2n+1}}\right) = (+\infty) \cdot a_{2n+1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_1}{x^{2n+1}}\right) = (-\infty) \cdot a_{2n+1} = -\infty,$$

hiszen

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{2n+1} = \pm\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^+).$$

Így $\exists a \in (-\infty, -1)\colon p(a) < 0$, ill. $\exists b \in (1, +\infty)\colon p(b) > 0$. Ezért $p(a) \cdot p(b) < 0$, illetve tudjuk, hogy $p \in C[a, b]$. Így a Bolzano tétele szerint $\exists \xi \in (a, b) \subset \mathbb{R}\colon p(\xi) = 0$.

Ha $a_{2n+1} < 0$, akkor $f(x) = -p(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ egy olyan páratlan fokszámú, valós együtthatós polinom, amelynek főegyütthatója pozitív. Így az előzőek szerint $\exists \xi \in \mathbb{R}\colon f(\xi) = 0$, azaz $p(\xi) = -f(\xi) = 0$.

A polinom fokszámára tett feltétel azért lényeges, mert több olyan páros fokszámú, valós együtthatós polinom van, amelynek nincs valós gyöke. Ilyen például a $p(x) = x^2+1$ $(x \in \mathbb{R})$ polinom.

7. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $x^3 + x - 1$ polinomnak pontosan egy valós gyöke van, és számítsuk ki ezt a gyököt 10^{-1} pontossággal!*

Megoldás. Az előző feladat állítása szerint a $p(x) = x^3 + x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomnak van valós gyöke. Egyetlen egy valós gyöke van, hiszen p szigorúan monoton növekvő, tudniillik minden $x < y$ valós számok esetén

$$p(x) - p(y) = x^3 + x - 1 - \Big(y^3 + y - 1\Big) = x^3 - y^3 + x - y = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) =$$

$$= \underbrace{(x-y)}_{<0} \cdot \underbrace{\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1\right)}_{>0} < 0,$$

és így $p(x) < p(y)$. Az egyetlen ξ zérushely a Bolzano tétele szerint a $(0, 1)$ intervallumon található, hiszen

$$p(0) = -1 < 0 \qquad \text{és} \qquad p(1) = 1 > 0.$$

A zérushely közelítő értékének kiszámítását a tanult intervallumfelezési eljárással fogjuk megvalósítani. Az eljárás lényege, hogy ha tudjuk, hogy az f folytonos függvénynek van egy ξ zérushelye az $[x_n, y_n]$ intervallum belsejében, mert $f(x_n) \cdot f(y_n) < 0$, akkor

$$|z_n - \xi| < h_n := z_n - x_n, \qquad \text{ahol} \qquad z_n := \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Így, ha $f(z_n) = 0$ vagy $h_n < \varepsilon$, ahol ε a megadott hibakorlát, akkor z_n a keresett közelítő érték. Ellenkező esetben folytatjuk az eljárást az $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ intervallummal, ahol

- ha $f(x_n)f(z_n) > 0$, akkor $x_{n+1} = z_n$ és $y_{n+1} = y_n$,
- ha $f(x_n)f(z_n) < 0$, akkor $x_{n+1} = x_n$ és $y_{n+1} = z_n$.

Mindkét esetben megtartjuk az $f(x_{n+1}) \cdot f(y_{n+1}) < 0$ tulajdonságot, de az intervallum hossza feleződött, azaz $h_{n+1} = h_n/2$.

Az $f(x) = x^3 + x - 1$ függvénnyel fogjuk az eljárást alkalmazni a megadott $\varepsilon = 0,1$ hibakorláttal. A kezdőintervallum az $[x_0, y_0] = [0, 1]$, hiszen $f(0) \cdot f(1) < 0$. Az eljárás részeredményei a következő táblázatban láthatók.

n	x_n	y_n	$z_n = \frac{x_n+y_n}{2}$	$h_n = z_n - x_n$	$f(x_n)f(z_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	0,5	+
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	0,25	−
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	0,125	+
3	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\boxed{\frac{11}{16}}$	0,0625	

Így a keresett közelítő érték $\underline{\underline{\xi \approx \frac{11}{16}}}$.

Emlékeztető.

Tétel. **(Weierstrass tétele)** *Egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye, azaz*

$$f \in C[a,b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha, \beta \in [a,b],\ \forall x \in [a,b] \colon f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha).$$

8. Feladat. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor f-nek létezik abszolút minimuma!

Megoldás. A Weierstrass-tételt fogjuk alkalmazni, azonban f értelmezési tartománya nem korlátos zárt intervallum, hiszen $D_f = \mathbb{R}$, ezért a Weierstrass-tétel közvetlenül nem alkalmazható.

i) Először azt fogjuk igazolni, hogy f alulról korlátos a teljes számegyenesen.
A $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ definíciójából a $P = 1$ választással azt kapjuk, hogy

$$\exists x_1 < 0,\ \forall x < x_1:\ f(x) > 1.$$

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ definíciójából a $P = 1$ választással azt kapjuk, hogy

$$\exists x_2 > 0,\ \forall x > x_2:\ f(x) > 1.$$

Tehát f alulról korlátos az $\mathbb{R}\setminus[x_1, x_2]$ halmazon. Azonban $f \in C[x_1, x_2]$, így f korlátos (alulról korlátos is) az $[x_1, x_2]$ intervallumon. Ezért összességében azt mondhatjuk, hogy f alulról korlátos a teljes számegyenesen.

ii) Legyen

$$m := \inf R_f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Mivel f alulról korlátos, így $m \in \mathbb{R}$. Alkalmazzuk i) gondolatmenetét $P = m + 1$-re! Ekkor azt kapjuk, hogy $\exists a < 0$ és $\exists b > 0$, hogy

$$f(x) > m + 1 \qquad \Big(x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)\Big).$$

Ebből következik, hogy

$$m = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in [a, b]\Big\}.$$

Azonban $f \in C[a, b]$, így a Weierstrass-tétel szerint $\exists \alpha \in [a, b]\colon f(\alpha) = m$. Ez azt jelenti, hogy α az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény abszolút minimumhelye, és $f(\alpha)$ a függvény abszolút minimuma.