Analízis2, 2. Zárthelyi dolgozat, 2023. December 14.

Vázlatos megoldások

1. *(5+5 pont)* Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat :

a) $\displaystyle\int (x+1)\cdot\sin(2x)\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)-\cos^5 x}{\cos^2 x}\,dx \quad (x\in(-\pi/2,\pi/2)).$

Megoldás :

a)

$$\underline{\int (x+1)\cdot\sin(2x)\,dx} = \int (x+1)\cdot\Big(-\frac{\cos(2x)}{2}\Big)'\,dx = (\text{parc.int.}) =$$

$$= -(x+1)\cdot\frac{\cos(2x)}{2} + \int (x+1)'\cdot\frac{\cos(2x)}{2}\,dx = -(x+1)\cdot\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\int\cos(2x)\,dx =$$

$$= \underline{-(x+1)\cdot\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cdot\sin(2x) + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).}$$

b)

$$\underline{\int \frac{\sin(2x)-\cos^5 x}{\cos^2 x}\,dx} = \int \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x-\cos^5 x}{\cos^2 x}\,dx = 2\cdot\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx - \int\cos^3 x\,dx =$$

$$= -2\cdot\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx - \int\cos x\cdot\cos^2 x\,dx = -2\cdot\ln|\cos x| - \int(\sin x)'\cdot(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (|x|<\pi/2 \Longrightarrow \cos x>0) = -2\cdot\ln(\cos x) - \int(\sin x)'\,dx + \int(\sin x)'\cdot\sin^2 x\,dx =$$

$$= \underline{-2\cdot\ln(\cos x) - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (|x|<\pi/2,\ c\in\mathbb{R}).}$$

2. *(6 pont)* Számítsa ki a következő határozatlan integrált :

$$\int\Big(\frac{1}{x}+\sqrt{\ln x}\Big)^2\,dx \quad (x>1).$$

Megoldás :

$$\int\Big(\frac{1}{x}+\sqrt{\ln x}\Big)^2\,dx = \int\frac{1}{x^2}\,dx + 2\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln x}\,dx + \int\ln x\,dx = (\star).$$

Az itt szereplő integrálok :

$$\int\frac{1}{x^2}\,dx = \underline{-\frac{1}{x} + c \quad (c\in\mathbb{R}),}$$

$$2\cdot\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln x}\,dx = 2\cdot\int(\ln x)'\cdot(\ln x)^{1/2}\,dx = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{4}{3}\cdot(\ln x)^{3/2}+c\ \ (c\in\mathbb{R})},$$

és végül :

$$\int \ln x\,dx = \int (x)'\cdot\ln x\,dx = (\text{parc. int.}) = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\cdot\ln x - \int 1\,dx = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x\cdot\ln x - x + c\ \ (c\in\mathbb{R})}.$$

A fenti eredményeket beírva kapjuk, hogy :

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\ln x}\right)^2 dx = -\frac{1}{x}+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\ln^3 x}+x\cdot\ln x - x + c\ \ (x>1, c\in\mathbb{R})}.$$

3. *(8 pont)* Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált :

$$\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+4e^x+7}\,dx\ \ (x\in\mathbb{R}).$$

Megoldás :

Tekintsük az $e^x := t > 0$ helyettesítést, tehát a $g(t) := \ln t\ \ (t>0)$ helyettesítő függvényt. Ekkor $g'(t) = \dfrac{1}{t} > 0\ \ (t>0)$, tehát g szigorúan monoton nő a $(0,+\infty)$ intervallumon és lévén folytonos függvény, értékkészlete $\mathcal{R}_g = (-\infty,+\infty)$. Létezik tehát $g^{-1}(x) = e^x\ \ (x\in\mathbb{R})$. Teljesülnek a 2. helyettesítési tétel feltételei, ezért :

$$\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+4e^x+7}\,dx = \int\frac{t^2}{t^2+4t+7}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int\frac{t}{t^2+4t+7}\,dt\Big|_{t=e^x}.$$

A kapott új integrál :

$$\int\frac{t}{t^2+4t+7}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2t+4}{t^2+4t+7}\,dt - 2\cdot\int\frac{1}{t^2+4t+7}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\frac{(t^2+4t+7)'}{t^2+4t+7}\,dt - \frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{t+2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+4t+7) - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t+2}{\sqrt{3}} + c}.$$

Visszahelyettesítve a t helyére e^x-et, kapjuk, hogy :

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+4e^x+7}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(e^{2x}+4e^x+7) - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{e^x+2}{\sqrt{3}} + c.\ \ (x,c\in\mathbb{R})}.$$

4. *(8 pont)* Határozza meg az alábbi egyenletekkel megadott görbék által közrefogott korlátos és zárt síkrész területét :

$$y = x^2-1,\ \ y = x - x^2.$$

Megoldás :

Legyenek $f(x) := x^2 - 1 \ \ (x \in \mathbb{R})$ és $g(x) := x - x^2 \ \ (x \in \mathbb{R})$. A parabolák metszéspontjainak a meghatározásához oldjuk meg az alábbi egyenletet :

$$x^2 - 1 = x - x^2 \iff 2x^2 - x - 1 = 0 \iff x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1.$$

Figyelembe véve a grafikonokat (felső függvény, alsó függvény), a keresett terület az alábbi integrállal számolható :

$$T = \int_{-1/2}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1/2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1/2}^{1} ((x - x^2) - (x^2 - 1))\, dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1} (-2x^2 + x + 1)\, dx = \Big[-\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1/2}^{1} = \frac{5}{6} + \frac{7}{24} = \frac{9}{8}.$$

5. *(8 pont)* Forgassa meg az x tengely körül az alábbi függvénynek a grafikonját :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 + x - 2}} \ \ (x \in [3, 4]).$$

Számítsa ki az így kapott forgástest térfogatát.

Megoldás :

Világos, hogy $f \in C[3,4]$ (a nevező zérushelyei -2 és 1), így integrálható is és $f \geq 0$, tehát alkalmazható a forgástest térfogatának a kiszámolására vonatkozó formula :

$$V = \pi \cdot \int_3^4 f^2(x)\, dx = \pi \cdot \int_3^4 \frac{2x^2 - 3x - 5}{(x-1)\cdot(x+2)}\, dx.$$

A kapott racionális törtfüggvény esetében végezzük el először az alábbi leosztást :

$$\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 + x + 1} = \frac{2 \cdot (x^2 + x - 2) - 5x - 1}{x^2 + x - 2} = 2 - \frac{5x + 1}{x^2 + x - 2},$$

maj bontsuk fel parciális törtekre a kapott valódi törtet az alábbiak szerint :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} : \frac{5x + 1}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \iff$$

$$\iff 5x + 1 = A \cdot (x + 2) + B \cdot (x - 1) \iff 5x + 1 = (A + B) \cdot x + (2A - B) \iff$$

$$\iff A + B = 5, \ \ 2A - B = 1 \iff A = 2, \ B = 3.$$

Tehát :

$$V = \pi \cdot \int_3^4 \Big(2 - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}\Big)\, dx = \Big[2x - 2 \cdot \ln|x - 1| - 3 \cdot \ln|x + 2| \Big]_3^4 =$$

$$= \Big(8 - 2 \cdot \ln 3 - 3 \cdot \ln 6\Big) - \Big(6 - 2 \cdot \ln 2 - 3 \cdot \ln 5\Big) = 2 + 2 \cdot \ln\frac{2}{3} + 3 \cdot \ln\frac{5}{6}.$$

Bizonyítással kért tétel : A Newton$-$Leibniz tétel.