13. előadás

A Banach-féle fixponttétel (Egyenletek közelítő megoldása)

Feladat:

Adott *egy* $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény.*

Keressünk *olyan* $x^* \in \mathcal{D}_g$ *pontot, amelyre* $g(x^*) = 0$.

Ekkor x^* *a* $g(x) = 0$ *egyenlet* ***megoldása*** *vagy* ***gyöke****.*

Problémák:

1^o Van-e a $g(x) = 0$ egyenletnek megoldása, és ha van, akkor hány megoldás van?

2^o Hogyan lehet a megoldás(oka)t kiszámolni?

Bizonyos speciális esetekben a megoldásokat **explicit képlettel** számíthatjuk ki. A megoldások előállításához azonban sokszor valamilyen **közelítő módszerre** van szükségünk. Ez azt jelenti, hogy keresünk olyan $(x_n) \subset \mathcal{D}_g$ sorozatot, amelyik valamely megoldáshoz konvergál.

Miért van szükség közelítő módszerekre?

- Mert a pontos képlet nehézkes:

  $x^2 - x - 8 = 0,\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2};$

  $x^3 - x - 8 = 0$ (`Cardano- vagy Tartaglia-képlet`)

  $$x = \sqrt[3]{(\cdots) + \sqrt{\cdots}} + \sqrt[3]{(\cdots) - \sqrt{\cdots}}\ .$$

- Mert nincs pontos képlet: (l. `Wikipédia`)

  $$x^5 - x - 8 = 0, \quad x = ?\ .$$

- Egy meglévő közelítésből csinálunk egy jobbat **rekurzióval**.

A megoldás(ok) létezése.

A megoldás(ok) **létezésének** a vizsgálatához alkalmazhatjuk a

Bolzano-tételt (l. Analízis I. kurzus, 11. előadás):

Ha $g \in C[a,b]$ *és* $g(a) \cdot g(b) < 0$, *akkor* $\exists\, x^* \in [a,b] : \; g(x^*) = 0.$

A tétel a megoldások számáról semmit nem mond. Nyilván előfordulhat, hogy a $g(x) = 0$ egyenletnek több megoldása is van.

Ennek felhasználásával **kereshetünk** olyan intervallumo(ka)t, amely(ek)ben biztosan van megoldása az egyenletnek.

Például, ha $g(x) := x^5 - x^2 + 2x + 3$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $g'(x) = 5x^4 - 2x + 2 > 0$ $(x \in \mathbb{R}) \implies g \uparrow \mathbb{R}$-en, ezért az

$$x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$$

egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mivel $g \in C(\mathbb{R})$, $g(-1) = -1 < 0$ és $g(0) = 3 > 0$, ezért a gyök a $[-1, 0]$ intervallumban van.

Közelítő módszerek

- **Intervallumfelezési eljárás:**

Ha már tudjuk azt, hogy a $g(x) = 0$ egyenletnek az $[a, b]$ intervallumban (g folytonos) pontosan egy gyöke van, akkor Bolzano-tétel bizonyításánál (l. az Analízis I. kurzus 11. előadását) alkalmazott módszerrel konstruálhatunk olyan (x_n) sorozatot, amelyik a szóban forgó gyökhöz konvergál.

• A Newton-módszer speciális esete:

Tekintsük a $g(x) := x^2 - 5 = 0$ egyenletet! Ennek egyetlen pozitív gyöke a $\sqrt{5}$.

Az Analízis I. kurzus 5. előadásán megmutattuk azt, hogy az

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{x_n} + x_n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett sorozat konvergens, és a határértéke $\sqrt{5}$.

- **A fixpont-iteráció:**

Ha egy $g(x) = 0$ egyenlet megoldását szeretnénk megkeresni, akkor megtehetjük azt is, hogy a feladatot először átírjuk egy vele ekvivalens

$$x = f(x)$$

fixpontalakba, és tekinthetjük az

$$x_0, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

rekurzióval definiált ún. **iterációs sorozatot**, ha $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{R}_f$.

Világos, hogy ekkor az f függvényt többféleképpen is előállíthatjuk. Például, $g(x) = x^2 - x - 2 = 0 \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow$

$$x = x^2 - 2 \ (x \in \mathbb{R}), \quad \text{tehát } f(x) = x^2 - 2 \ (x \in \mathbb{R})$$

vagy

$$x = \sqrt{x+2} \ (x \geq -2), \quad \text{tehát } f(x) = \sqrt{x+2} \ (x \geq -2).$$

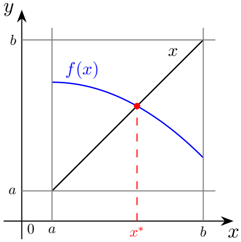
Tegyük fel, hogy $f, g \in C$ és az (x_n) iterációs sorozat konvergens. Legyen $x^* := \lim (x_n)$. Ekkor az

$$x^* = f(x^*)$$

egyenlőség teljesül, és azt mondjuk, hogy x^* az f **függvény fixpontja**. Világos, hogy x^* a $g(x) = 0$ egyenlet megoldása.

Most csak az $x = f(x)$ **fixpontegyenlet** legegyszerűbb esetével foglalkozunk. Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

Ebben az esetben geometriai jelentést tudunk hozzárendelni a fixpontokhoz: az f függvény fixpontja a függvény grafikonja és az identikus függvény grafikonja metszéspontjának az x koordinátája.



Feladat:

Adott *egy* $f : [a,b] \to [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ *függvény.*

Keressünk *olyan* $x^* \in [a,b]$ *pontot, amelyre* $x^* = f(x^*)$.

Ekkor x^* *az* f ***függvény fixpontja***.

Problémák:

1° A fixpont létezése.

2° Az (x_n) iterációs sorozat konvergenciája.

A fixpont létezése.

Egy elégséges feltétel.

Tétel. *Ha az* $f : [a,b] \to [a,b]$ *függvény folytonos, akkor* f*-nek az* $[a,b]$ *intervallumon van fixpontja.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $f(a) > a$ és $f(b) < b$, hiszen egyenlőség esetén maga az a, illetve b fixpont lenne.

Legyen $h(x) := f(x) - x \ \big(x \in [a,b]\big)$. Ekkor $f \in C[a,b]$, továbbá $h(a) > 0$ és $h(b) < 0$. Ezért a Bolzano-tétel szerint a h függvénynek van $x^* \in (a,b)$ gyöke, azaz $h(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$. Így $x^* = f(x^*)$, és ez azt jelenti, hogy x^* az f függvény fixpontja. ■

Az (x_n) iterációs sorozat konvergenciája.

Példa. *Vizsgáljuk fixpont-iterációval a* $g(x) := x^2 - x - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ *egyenlet pozitív gyökét!*

Megoldás. Mivel $g(x) = (x-2)(x+1)$, ezért az egyenletnek $x = 2$ az egyetlen pozitív gyöke. Írjuk át az egyenletet az $x = f(x)$ fixpontalakba!

1. lehetőség. $x = x^2 - 2 = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Az f függvénynek $x^* = 2$ az egyetlen pozitív fixpontja. Ekkor az iterációs sorozat:

$$x_0 > 0 \text{ adott}, \quad x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 - 2 \ (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $x_0 = 2 \implies x_n = 2 \ (n \in \mathbb{N}) \implies (x_n)$ konvergens, és az $x^* = 2$ fixpont a határértéke.

Ha $x_0 = 2 + \varepsilon > 2 \ (\varepsilon > 0)$, akkor $(x_n) \uparrow$ és $x_n > 2 + n\varepsilon \ (n \in \mathbb{N}^+) \implies \lim (x_n) = +\infty$.

Így előfordulhat, hogy f-nek van fixpontja, de az (x_n) iterációs sorozat **nem konvergál** a fixponthoz.

2. lehetőség. Tekintsük most a $g(x) = 0$ egyenlettel a $[-2, +\infty)$ intervallumon ekvivalens $x = \sqrt{x+2}$ egyenletet! Legyen

$$f(x) := \sqrt{x+2} \quad \big(x \in [-2, 4]\big).$$

Ekkor $f : [-2, 4] \to [-2, 4]$, és a függvénynek $x^* = 2$ az egyetlen (pozitív) fixpontja. Tekintsük az

$$x_0 \in [-2, 4], \quad x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{x_n + 2} \ (n \in \mathbb{N})$$

iterációs sorozatot!

Könnyű megmutatni, hogy *az $x_0 \in [-2, 4]$ kezdőérték tetszőleges megválasztása esetén az iterációs sorozat az $x^* = 2$ fixponthoz konvergál.*

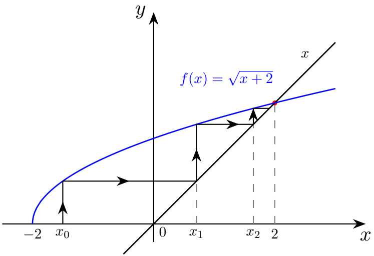
Valóban:

(i) Ha $x_0 = 2$, $\Longrightarrow x_n = 2 \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \lim (x_n) = 2 = x^* = f(x^*)$. ✓

(ii) Ha $-2 \le x_0 < 2$, $\Longrightarrow (x_n) \uparrow$ és $x_n < 2 \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (x_n)$ konvergens, és $\lim (x_n) = 2 = x^* = f(x^*)$. ✓

(iii) Ha $2 \le x_0 \le 4$, $\Longrightarrow (x_n) \downarrow$ és $2 < x_n \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (x_n)$ konvergens, és $\lim (x_n) = 2 = x^* = f(x^*)$. ✓

Az (ii) esetet szemlélteti az alábbi ábra:



Megjegyzés. Az $f : [a, b] \to [a, b]$ függvény folytonossága garantálja a fixpont létezését. Az előző példa azonban azt mutatja, hogy a folytonosság nem elegendő az iterációs sorozat konvergenciájához. Ehhez a folytonosságnál erősebb feltétel kell. Ezzel kapcsolatos a következő fogalom. ∎

Definíció. *Az* $f : [a,b] \to [a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ *függvény* ***kontrakció*** *az* $[a,b]$ *intervallumon, ha*

$$\exists\, 0 \leq \alpha < 1 : \quad \forall\, x,y \in [a,b] : \ \big|f(x) - f(y)\big| \leq \alpha\,|x-y|.$$

Egy elégséges feltétel a kontrakcióra.

Tétel. *Ha az* $f : [a,b] \to [a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ *függvény folytonosan deriválható az* $[a,b]$ *intervallumon és*

$$\alpha := \max_{x\in[a,b]} \big|f'(x)\big| < 1,$$

akkor f *kontrakció* $[a,b]$*-n.*

Bizonyítás. A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\forall\, x,y \in [a,b]$, $x < y$ esetén $\exists\, \xi \in (x,y)$: $f(x) - f(y) = f'(\xi)\cdot(x-y)$. Mivel $f' \in C[a,b]$, ezért

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \big|f'(\xi)\big| \cdot |x-y| \leq \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \cdot |x-y| = \alpha\cdot|x-y|. \ \blacksquare$$

Tétel: A Banach-féle fixponttétel. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *T.f.h.* $f : [a, b] \to [a, b]$ *és* f ***kontrakció***, *azaz*

$$\exists\ 0 \leq \alpha < 1 : \quad \forall\ x, y \in [a, b] : \ \big|f(x) - f(y)\big| \leq \alpha\, |x - y|.$$

Ekkor:

1° $\exists$ *egyetlen olyan* $x^* \in [a, b]$*:* $x^* = f(x^*)$*;*

2° *bármely* $x_0 \in [a, b]$ *esetén az*

$$\begin{cases} x_0, \\ x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

rekurzióval definiált ún. ***iterációs sorozat*** *konvergens, és*

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^*$*;*

3° *az* (x_n) *sorozatra az alábbi* ***hibabecslés*** *érvényes:*

$$\big|x_n - x^*\big| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot \big|x_1 - x_0\big| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bizonyítás. **1^o** és **2^o**

1. lépés. Igazoljuk, hogy f folytonos $[a,b]$-n.

Legyen $x \in [a,b]$ és $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel f kontrakció, ezért $\forall\ x, y \in [a,b]$ esetén

$$\big|f(y) - f(x)\big| \leq \alpha\,|y - x| \quad \text{és ez } < \varepsilon,$$

ha $|y - x| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Ez azt jelenti, hogy az x-beli folytonosság definíciója a $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ választással teljesül, így $f \in C\{x\}$. Mivel x tetszőleges, azért $f \in C[a,b]$ valóban igaz. ✓

2. lépés. Megmutatjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat.

Először azt látjuk be, hogy

$$|x_{n+1} - x_n| \le \alpha^n \, |x_1 - x_0| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Valóban, ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \big|f(x_n) - f(x_{n-1})\big| \le \\ \le \alpha\,|x_n - x_{n-1}| &= \alpha\,\big|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\big| \le \\ &\le \alpha^2\big|x_{n-1} - x_{n-2}\big| \le \cdots \le \alpha^n\big|x_1 - x_0\big|. \;\; \checkmark \end{aligned}$$

Legyen most $n, m \in \mathbb{N}^+$ és $m > n$. Ekkor

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \le \\ &\le \alpha^{m-1}|x_1 - x_0| + \alpha^{m-2}|x_1 - x_0| + \cdots + \alpha^n|x_1 - x_0| = \\ &= \alpha^n \cdot \big(\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \cdots + 1\big) \cdot |x_1 - x_0| \le \\ &\le \; \big(0 \le \alpha < 1 \implies 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots = \tfrac{1}{1-\alpha}\big) \; \le \tfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Mivel $0 \le \alpha < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = 0$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \text{ha} \;\; n, m \in \mathbb{N} \text{ és } m > n > N.$$

Ez azt jelenti, hogy (x_n) valóban Cauchy-sorozat. $\checkmark$

3. lépés. A sorozatokra vonatkozó *Cauchy-féle konvergenciakritérium* szerint az (x_n) Cauchy-sorozat konvergens. Legyen

$$x^* := \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

Mivel $x_n \in [a, b]$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, ezért $x^* \in [a, b]$ is igaz (ez az állítás indirekt módon egyszerűen igazolható).

4. lépés. Most azt látjuk be, hogy x^* az f függvény fixpontja, azaz $x^* = f(x^*)$.

Az (x_n) sorozatra vonatkozó rekurzív képletből, az f függvény x^*-beli folytonosságából, valamint a folytonosságra vonatkozó átviteli elvből következik, hogy

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = f(x_n) & & \\ \downarrow \qquad \quad \downarrow & & \text{ha } n \to +\infty \\ x^* \quad = f(x^*) & & \end{array}$$

Az x^* tehát valóban fixpontja f-nek. ✓

5. lépés. Most a fixpont egyértelműségét igazoljuk.

Ha az $x^{**} \in [a, b]$ pontra is igaz, hogy $x^{**} = f(x^{**})$, akkor

$$\left|x^* - x^{**}\right| = \left|f\left(x^*\right) - f\left(x^{**}\right)\right| \leq \alpha \left|x^* - x^{**}\right|,$$

más szóval $(1 - \alpha)\left|x^* - x^{**}\right| \leq 0$. Itt $1 - \alpha > 0$, ezért

$$(\, 0 \leq \,)\left|x^* - x^{**}\right| \leq 0,$$

azaz $\left|x^* - x^{**}\right| = 0$. Tehát $x^* = x^{**}$.

Így az $\mathbf{1^o}$ és a $\mathbf{2^o}$ állításokat bebizonyítottuk.

A 3^o hibabecslés igazolása. Tekintsük az előzőekben bebizonyított

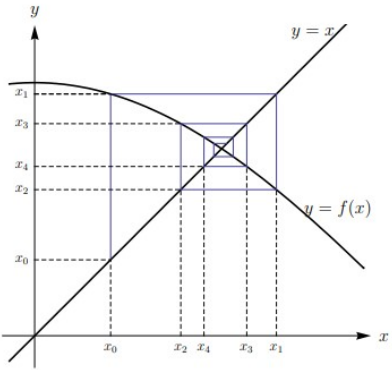
$$|x_m - x_n| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_1 - x_0| \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m > n)$$

egyenlőtlenségeket. Rögzítsük az $n \in \mathbb{N}^+$ indexet, és vegyük az $m \to +\infty$ határátmenetet. Mivel $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = x^*$, ezért azt kapjuk, hogy

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_1 - x_0| \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ezzel a 3^o állítást, és így a **Tétel** minden állítását bebizonyítottuk. ∎

A fixpont-iterációs sorozatot szemlélteti az alábbi ábra:



Példa. *Mutassuk meg, hogy az*

$$x = \cos x$$

egyenletnek pontosan egy pozitív valós gyöke van! Fixpont-iterációval keressük meg ezt a gyököt!

Megoldás. Ha $x \geq \frac{\pi}{2}$, akkor $x > \cos x$, ezért a $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ intervallumon az egyenletnek nincs megoldása. Legyen

$$F(x) := x - \cos x \quad \text{ha} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ekkor $F \in C^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(0) = -1 < 0$, $F\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} > 0$ és $F'(x) = 1 + \sin x > 0$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tehát $F \uparrow$, ezért az $F(x) = 0$, vagyis az $x = \cos x$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

Az $f(x) := \cos x$ $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ választással a szóban forgó egyenlet

$$x = f(x) = \cos x$$

alakú fixpontegyenlet. Ekkor $f \in C^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és

$$\max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f'(x)| = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |-\sin x| = 1,$$

ezért f **nem kontrakció** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**-en.**

Ezt az intervallumot **leszűkítve** azonban már kontrakciót kapunk. Tekintsük például a $[0,1]$-et! Könnyű meggondolni, hogy ez az intervallum is tartalmazza a fixpontot.

Másrészt $f(x) \in [0,1]$, ha $x \in [0,1]$, továbbá

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \max_{x\in[0,1]} |-\sin x| = \sin 1 < 0,8415 =: \alpha < 1$$

miatt f **kontrakció** $[0,1]$**-en** az $\alpha < 1$ kontrakciós együtthatóval.

A Banach-féle fixponttétel szerint f-nek pontosan egy fixpontja van $[0,1]$-en, és (például) az $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n) = \cos x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ iterációs sorozat a keresett x^* fixponthoz tart. A konvergencia „sebességére" az

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0| \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

hibabecslés teljesül. Ezt felhasználva kiszámíthatjuk, hogy adott pontosság eléréséhez hány iterációs lépést kell alkalmaznunk. ■

Megjegyzések az egyenletek közelítő megoldásairól

1^o Miért kellenek hibabecslések?

2^o Miért kell több különböző közelítő eljárás?

3^o A Banach-féle fixponttételt messzemenően általánosítani lehet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekről más típusú függvényekre. Ezek felhasználásával állíthatjuk elő lineáris, illetve nemlineáris egyenletrendszerek, sőt differenciálegyenlet-rendszerek közelítő megoldásait.