

4. előadás

Differenciálszámítás 4.

Emlékeztető: Függvénytulajdonságokat a deriválttal jellemezni lehet.

- A monotonitási intervallumok meghatározása.
- Lokális és abszolút szélsőértékek meghatározása.
- A konvexitási és a konkávitási intervallumok, valamint az inflexiós pontok meghatározása.

Az óra anyaga

- 1 Aszimptoták
- 2 L'Hospital-szabályok
- 3 Teljes függvényvizsgálat
- 4 Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

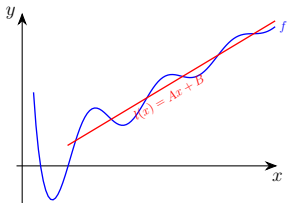
Az óra anyaga

- 1 Aszimptoták
- 2 L'Hospital-szabályok
- 3 Teljes függvényvizsgálat
- 4 Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

1. Aszimptoták

Szemléletesen:

ha x „nagy”, akkor $f(x)$ „közel”
van valamilyen egyeneshez.



Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. A.m.h. f -nek
van **aszimptotája** $(+\infty)$ -ben, ha

$$\exists \quad l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l(x)) = 0.$$

Ekkor az $l(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) egyenes az f **aszimptotája** $(+\infty)$ -ben.

Megjegyzés. A $(-\infty)$ -beli aszimptota def-ja hasonló. ■

Probléma: Hogyan lehet A, B -t meghatározni?

Tétel. Az $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$ -ben, ha léteznek és végesek az alábbi határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$ -ben.

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$ -beli aszimptoták meghatározására. ■

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy $l(x) = Ax + B$ aszimptota $(+\infty)$ -ben, azaz $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax - B) = 0$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ miatt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - Ax - B}{x} = 0 \text{ is igaz. Így}$$

$$\frac{f(x) - Ax - B}{x} = \underbrace{\frac{f(x)}{x} - A}_{\text{ez is } \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{B}{x}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax) = B.$$

\Leftarrow Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l(x)) = 0$, tehát az $l(x) = Ax + B$ egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$ -ben. ■

Példa. Van-e az

$$f(x) := \frac{2x^2 + 3x - 5}{4x + 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\})$$

függvénynek aszimptotája $(+\infty)$ -ben? Ha igen, akkor határozzuk meg!

Megoldás. Mivel

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 + 3x - 5}{4x^2 + x} = \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} =: A \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned} f(x) - Ax &= f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2x^2 + 3x - 5}{4x + 1} - \frac{1}{2}x = \\ &= \frac{4x^2 + 6x - 10 - 4x^2 - x}{2(4x + 1)} = \frac{5x - 10}{8x + 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{8} =: B, \end{aligned}$$

ezért a két határérték létezik és véges $\implies f$ -nek van aszimptotája $(+\infty)$ -ben, és az az $l(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$ egyenes. ■

Az óra anyaga

- 1 Aszimptoták
- 2 **L'Hospital-szabályok**
- 3 Teljes függvényvizsgálat
- 4 Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

2. L'Hospital-szabályok

Emlékeztetünk arra, hogy függvények határértékével kapcsolatban **kritikus határértékeknek** neveztük azokat az eseteket, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$ -beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

Eddig azt az „elvet” követtük, hogy egy kritikus határértéket igyekeztünk nem kritikus határértékké átalakítani (például *szorzatra bontással, gyöktelenítéssel vagy leosztással*.) ■

Most egy hatékony módszert ismerünk meg kritikus határértékek kiszámolására.

Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$. T.f.h.

$$(a) \exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0,$$

$$(b) g(x) \neq 0 \text{ és } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b),$$

$$(c) \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás. 1. eset: $a > -\infty$ (véges).

Legyen $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$, azaz

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0 : \forall y \in (a, a+\delta) \subset (a, b) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A)$.

Azt kell igazolni, hogy

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A)$.

Értelmezzük f -et és g -t az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

Ekkor a $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a, a + \delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle közéértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a, x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a, x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\lim_{a+0} \frac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

2. eset: $a = -\infty$. Nem bizonyítjuk. ■

Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ esetben.

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$. T.f.h.

$$(a) \exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty,$$

$$(b) g(x) \neq 0 \text{ és } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b),$$

$$(c) \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Megjegyzések.

1° A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt az a pontbeli **jobb oldali határértékre** fogalmaztuk meg. Hasonló állítások érvényesek (az értelemszerű módosításokkal) a **bal oldali határértékre**, valamint a (kétoldali) **határértékre**, sőt a $(+\infty)$ -ben vett határértékre is (ekkor $a = +\infty$).

2° A $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$ kritikus határértékekre, a bal oldali határértékre, valamint a (kétoldali) határértékre, sőt a $(+\infty)$ -ben vett határértékre hasonló állítások érvényesek.

3° A többi típusú kritikus határértéket gyakran vissza lehet vezetni $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

4° Vigyázat! A feltételeket ellenőrizni kell, ui. „hagyja magát alkalmazni” akkor is, ha nem lehet.

Pl., ha $a = 0$ és $f(x) := \cos x$, $g(x) := x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1, \quad \text{de}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g}.$$

5° Sok esetben a L'Hospital-szabályt többször egymás után kell alkalmazni. Például

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

6° A L'Hospital-szabály nem mindig alkalmazható. Előfordulhat, hogy $\exists \lim_a \frac{f}{g}$, de $\nexists \lim_a \frac{f'}{g'}$. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = 0, \text{ de}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \implies \nexists \lim_0 \frac{f'}{g'}.$$

7° Olyan eset is van, amikor a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazásával **mindig** kritikus határértéket kapunk. Például

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Ha még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, akkor a kiinduló kifejezést kapjuk, ugyanakkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1. \blacksquare$$

Példák

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x \stackrel{0^0}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} (e^{\ln x})^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^0 = 1.$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

4^o Ha $a > 1$ és $1 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n -szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &\stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln a) \cdot a^x}{n \cdot x^{n-1}} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \dots \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \\ &\stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln a)^{n-1} \cdot a^x}{n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot x} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln a)^n \cdot a^x}{n(n-1) \cdot \dots \cdot 1} = +\infty. \end{aligned}$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy *ha $a > 1$, akkor $x \rightarrow +\infty$ esetén az a^x ($x \in \mathbb{R}$) függvény gyorsabban tart $(+\infty)$ -hez, mint x bármelyik pozitív kitevőjű hatványa*; és ezt szokás így is jelölni:

$$\boxed{x^n \ll a^x, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy}.}$$

5° Hasonlóan, ha $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n -szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \ln^{n-1} x}{m \cdot x^m} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \dots \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{m^n \cdot x^m} = 0,$$

azaz x bármely pozitív kitevőjű hatványa gyorsabban tart $(+\infty)$ -hez $x \rightarrow +\infty$ esetén, mint $\ln x$ bármely pozitív kitevőjű hatványa. Röviden: minden $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boxed{(\ln x)^n \ll x^m, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy}}. \quad \blacksquare$$

Az óra anyaga

- 1 Aszimptoták
- 2 L'Hospital-szabályok
- 3 Teljes függvényvizsgálat
- 4 Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

3. Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény **teljes függvényvizsgálatán** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

- 1° Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása.)
- 2° Monotonitási intervallumok. Lokális szélsőértékek.
- 3° Konvexitási, konkávitási intervallumok. Inflexiós helyek.
- 4° A határértékek a $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.
- 5° Aszimptota $(\pm\infty)$ -ben.
- 6° A függvény grafikonjának felrajzolása.

Példa. Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az

$$f(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. „Gauss-görbét”).

Megoldás. $f > 0$ \mathbb{R} -en, páros (azaz $f(x) = f(-x)$ ($x \in \mathbb{R}$)),
 $f \in D^2(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = 0 \iff x = 0;$$

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f''(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatokat és azoknak f -re vonatkozó következményeit:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$
f'	+			0	-		
f''	+	0	-			0	+
f	\uparrow			lok. (absz.) max.	\downarrow		
	\cup	infl. pont	\cap			infl. pont	\cup

Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ és $\mathcal{D}'_f = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a függvény **határértékét** a $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{\pm\infty\}$ helyeken kell megvizsgálni.

$(+\infty)$ -ben a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$(-\infty)$ -ben is 0 a függvény határértéke.

Aszimptota $(+\infty)$ -ben. Mivel

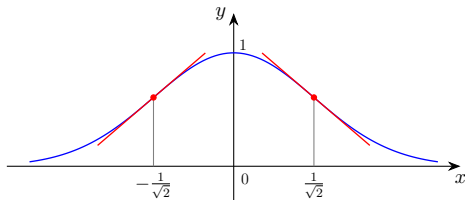
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 =: A \quad \text{és}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - A \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 =: B,$$

ezért az $y = A \cdot x + B = 0$ egyenletű egyenes (az x -tengely) f aszimptotája $(+\infty)$ -ben.

Hasonlóan: $(-\infty)$ -ben is ez egyenes f aszimptotája.

A függvény grafikonja:



Megjegyzés. További példák: [Teljes függvényvizsgálat](#) ■

Az óra anyaga

- 1 Aszimptoták
- 2 L'Hospital-szabályok
- 3 Teljes függvényvizsgálat
- 4 Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

4. Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

Az Analízis I. kurzusban bevezetett függvények

(l. a 13. előadást):

- az \exp és az \ln ,
- az \exp_a és a \log_a ,
- az általános hatványfüggvények (x^α , $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$),
- a \sin és a \cos .

Összefoglalás és kiegészítés

Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

További függvények:

- Az \exp_a és a \log_a függvények alaki tulajdonságai.
- tg , ctg .
- A trigonometrikus függvények alaki tulajdonságai.
- Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények):
 $\operatorname{arc\,sin}$, $\operatorname{arc\,cos}$, $\operatorname{arc\,tg}$, $\operatorname{arc\,ctg}$.
- Hiperbolikus függvények (sh , ch , th , cth).
- Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények):
 $\operatorname{ar\,sh}$, $\operatorname{ar\,ch}$, $\operatorname{ar\,th}$, $\operatorname{ar\,cth}$.