12. előadás

Improprius integrál

Improprius integrál

Improprius integrál

1. Az improprius integrál motivációja

A Riemann-integrál értelmezésénél a kiindulópontunk az volt, hogy csak olyan $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket tekintettünk, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

(a) f értelmezési tartománya egy **korlátos és zárt** $[a, b]$ **intervallum**,

(b) az f függvény **korlátos** $[a, b]$-n.

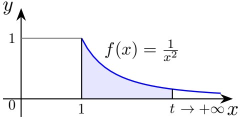
Röviden ezt úgy fejeztük ki, hogy $f \in K[a, b]$. Az eddigiekben bizonyos $K[a, b]$-beli f függvényekhez hozzárendeltünk egy, az $\int\limits_a^b f$ szimbólummal jelölt valós számot. Ezt az f függvény $[a, b]$-vett *Riemann-integráljának* vagy *határozott integráljának* neveztük.

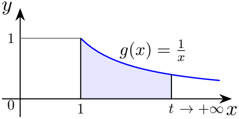
Az (a) és (b) megszorítások néha túl szigorúnak bizonyulnak. Felvethető tehát az a **probléma**, hogy ezeket a feltételeket nem kielégítő függvényekre vajon értelmezhető-e az integrál fogalma. **Egyfajta** kiterjesztést teszik lehetővé az ún. **improprius integrálok**.

A következő példákon „érzékeltetjük”, hogy ezt a kiterjesztést „elég természetes” módon meg tudjuk tenni.

$\boxed{\text{A}}$ Az integrandus értelmezési tartománya nem korlátos intervallum

Ha pl. $f(x) := \frac{1}{x^2}$ és $g(x) := \frac{1}{x}$ $\big(x \in [1, +\infty)\big)$, akkor





Ekkor

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} - (-1)\right) = 1,$$

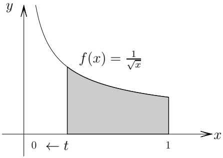
ugyanakkor

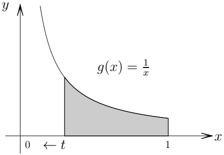
$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \big[\ln x\big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \big(\ln t - \ln 1\big) = +\infty.$$

Azt fogjuk mondnai, hogy az $\int_1^{+\infty} f$ improprius integrál **konvergens**, és $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$, az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ pedig **divergens**. ■

B Az integrandus nem korlátos, de az ÉT-a korlátos

Ha pl. $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ és $g(x) := \frac{1}{x}$ $\big(x \in (0,1]\big)$, akkor





Ugyanakkor

$$\lim_{t\to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0+0} \Big[2\sqrt{x}\Big]_t^1 = \lim_{t\to 0+0} \big(2 - 2\sqrt{t}\big) = 2,$$

$$\lim_{t\to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+0} \Big[\ln x\Big]_t^1 = \lim_{t\to 0+0} \big(\ln 1 - \ln t\big) = +\infty.$$

Azt fogjuk mondnai, hogy a $\int_0^1 f$ improprius integrál **konvergens**,

és $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$, a $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ pedig **divergens**. ■

Improprius integrál

2. Az improprius integrál értelmezése

$\boxed{\text{A}}$ Az integrandus ÉT-a nem korlátos intervallum

Definíció.

1° *Legyen* $a \in \mathbb{R}$. *T.f.h.* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *és* $f \in R[a, t]$ *minden* $t > a$*-ra. Ha a*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx =: I$$

határérték létezik és véges, akkor a.m.h. az f *függvény* $[a, +\infty)$*-beli* ***improprius integrálja konvergens és értéke*** I *(jelben* $\int_a^{+\infty} f = I$*). Egyéb esetekben az* $\int_a^{+\infty} f$ ***improprius integrál divergens****.*

2° *A.m.h. az* $\int_a^{+\infty} f$ *improprius integrál* ***létezik*** *(vagy* f ***impropriusan integrálható*** $[a, +\infty)$***-n****), ha konvergens vagy pedig a fenti* I *határérték* $+\infty$ *vagy* $-\infty$.

Példa. *Mutassuk meg, hogy*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & ha\ \alpha \in (1,+\infty) \\ +\infty, & ha\ \alpha \in (-\infty,1]. \end{cases}$$

Megoldás. Ha $\alpha \neq 1$ valós, akkor

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right).$$

Mivel

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha \in (1,+\infty) \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \in (-\infty,1), \end{cases}$$

ezért $\alpha \neq 1$ esetben az állítás igaz. Másrészt láttuk azt, hogy

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty,$$

ezért az állítás $\alpha = 1$ esetén is igaz. ■

Az értelemszerű módosításokkal értelmezzük a $\int\limits_{-\infty}^{a} f$ improprius integrál konvergenciáját, divergenciáját, valamint a létezését akkor, ha $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ és $f \in R[t, a]$ minden $t < a$ esetén.

Az improprius integrál fogalmát a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon értelmezett függvényekre is kiterjeszthetjük.

Definíció. *T.f.h.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$ *esetén* $f \in R[u, v]$, *továbbá* $z \in \mathbb{R}$ *egy tetszőleges pont. A.m.h. az* f *függvény* ***impropriusan integrálható*** $(-\infty, +\infty)$***-n***, *ha*

$$a \int_{-\infty}^{z} f \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad a \int_{z}^{+\infty} f \in \overline{\mathbb{R}}$$

improprius integrálok léteznek és az összegük értelmezve van. Ekkor az f *függvény* ***improprius integrálján*** *a szóban forgó összeget értjük:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^{z} f(x)\, dx + \int_{z}^{+\infty} f(x)\, dx \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy a definícó fügetlen a z pont megválasztásától. ■

Példa. *Mutassuk meg, hogy*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Megoldás. Legyen az előző definícióban szereplő z pont (például) 0. Ekkor

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \big[\operatorname{arc\,tg} x\big]_0^t =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \big(\operatorname{arc\,tg} t - \operatorname{arc\,tg} 0\big) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

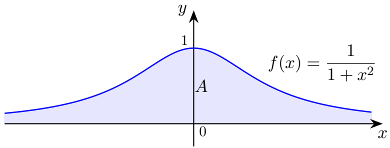
Ugyanígy adódik az, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ezért a szóban forgó improprius integrál konvergens, és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \blacksquare$$

Az előzőek alapján bizonyos **nem korlátos síkidomok területét** is értelmezhetjük. Tekintsük például az alábbi ábrán szemléltetett A síkidomot:



Mivel a $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ improprius integrál konvergens, ezért célszerű azt mondani, hogy A-nak **van területe, és az egyenlő** a szóban forgó improprius integrállal:

$$T(A) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

$\boxed{\text{B}}$ Az integrandus nem korlátos, de az ÉT-a korlátos

Definíció.

1° *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$. *T.f.h.* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *és* $f \in R[t,b]$ *minden* $t \in (a,b)$ *esetén. Ha a*

$$\lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)\,dx =: I$$

határérték létezik és véges, akkor a.m.h. az f *függvény improprius integrálja* ***konvergens*** *és értéke* I *(jelben* $\int_a^b f = I$*). Egyéb esetekben az* $\int_a^b f$ *improprius integrál* ***divergens***.

2° *A.m.h. az* $\int_a^b f$ *improprius integrál* ***létezik*** *(vagy* f ***improprius integrálható*** $(a,b]$***-n****), ha konvergens vagy pedig a fenti* I *határérték* $+\infty$ *vagy* $-\infty$.

Példa. *Mutassuk meg, hogy*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & ha\ \alpha \in (-\infty, 1) \\ +\infty, & ha\ \alpha \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Megoldás. Ha $\alpha \neq 1$ valós, akkor

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0+0} \int_t^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0+0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0+0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Mivel

$$\lim_{t\to 0+0} t^{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha \in (-\infty, 1) \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \in (1, +\infty), \end{cases}$$

ezért $\alpha \neq 1$ esetben az állítás igaz. Másrészt

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+0} [\ln x]_t^1 = \lim_{t\to 0+0} (\ln 1 - \ln t) = +\infty,$$

ezért az állítás $\alpha = 1$ esetén is igaz. ■

Az értelemszerű módosításokkal értelmezzük az $\int\limits_a^b f$ improprius integrál konvergenciáját, divergenciáját, valamint a létezését akkor, ha $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ és $f \in R[a, t]$ minden $t \in (a, b)$ esetén. Ekkor előfordulhat, hogy az f függvény a b pont környezetében nem korlátos.

Az is lehetséges, hogy a függvény mindkét végpont környezetében nem korlátos.

Definíció. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$. *T.f.h.* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *és* $\forall\, u, v \in (a,b)$, $u < v$ *esetén* $f \in R[u,v]$, *továbbá* $z \in (a,b)$ *egy tetszőleges pont. A.m.h. az* f *függvény* ***impropriusan integrálható*** (a,b)***-n***, *ha*

$$\text{az } \int_a^z f \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és a } \int_z^b f \in \overline{\mathbb{R}}$$

improprius integrálok léteznek és az összegük értelmezve van. Ekkor az f *függvény* ***improprius integrálján*** *a szóban forgó összeget értjük:*

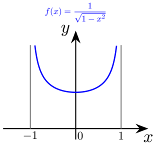
$$\int_a^b f := \int_a^z f + \int_z^b f \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy a definícó fügetlen a z pont megválasztásától. ■

Példa. *Mutassuk meg, hogy*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$) integrandus **nem korlátos**, de $f \in R[u,v]$ minden $-1 < u < v < 1$ esetén. Legyen $z := 0$. Ekkor



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1-0} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1-0} \big[\arcsin x\big]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1-0} \big(\arcsin t - \arcsin 0\big) = \arcsin 1 - 0 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Hasonlóan (vagy az integrandus párosságára hivatkozva) kapjuk azt, hogy

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \tfrac{\pi}{2}.$$

Így f impropriusan integrálható $(-1,1)$-en és

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} = \pi. \quad \blacksquare$$

Példa. *Bizonyítsuk be, hogy a* tg *függvény impropriusan nem integrálható a* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *intervallumon.*

Megoldás. A tg függvény **nem korlátos** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en, de $\mathrm{tg} \in R[u, v]$ minden $-\frac{\pi}{2} < u < v < \frac{\pi}{2}$ esetén. Legyen $z := 0$. Ekkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\, x\, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} - \int_0^t \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \left[\ln \cos x\right]_0^t =$$

$$= -\lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \left(\ln \cos t - \ln \cos 0\right) = -(-\infty - 0) = +\infty.$$

Hasonlóan kapjuk azt, hogy

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \mathrm{tg}\, x\, dx = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2} + 0} - \int_t^0 \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\lim_{t \to -\frac{\pi}{2} + 0} \left(\ln 0 - \ln \cos t\right) = -\infty.$$

Mivel a $(+\infty) + (-\infty)$ összeg nincs értelmezve, ezért a tg függvény nem impropriusan integrálható a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. ∎

Megjegyzés. Ha $f \in R[a,b]$, akkor az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

szimbólumot egyrészt az f függvény $[a,b]$**-n vett Riemann-integrálját**, másrészt f-nek az (a,b)**-n vett improprius integrálját** jelöli. Könnyű meggondolni, hogy ezek a valós számok megegyeznek, vagyis az improprius integrál fogalma a Riemann-integrál fogalmának a kiterjesztése. ■

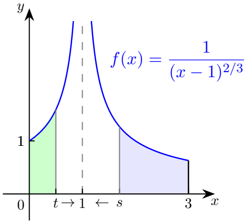
Az improprius integrál fogalmát olyan függvényekre is értelmezhetjük, amelyek az (a,b) intervallum egy belső pontjának a környezetében nem korlátosak.

Példa. Tekintsük a

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx$$

integrált!

Világos, hogy a $c = 1 \in (0,3)$ pont környezetében az $f(x) := \dfrac{1}{(x-1)^{2/3}}$ $(1 \neq x \in \mathbb{R})$ integrandus nem korlátos:



Ezért improprius integrálról van szó.

Egyrészt

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{t\to 1-0} \int_0^t (x-1)^{-2/3}\,dx = \lim_{t\to 1-0} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1-0} \left(\frac{(t-1)^{1/3}}{1/3} - \frac{(-1)^{1/3}}{1/3}\right) = 0 + 3 = 3.$$

Másrészt

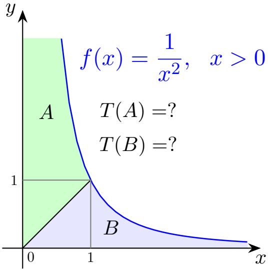
$$\int_1^3 f(x)\,dx = \lim_{s\to 1+0} \int_s^3 (x-1)^{-2/3}\,dx = \lim_{s\to 1+0} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_s^3 =$$

$$= \lim_{s\to 1+0} \left(\frac{2^{1/3}}{1/3} - \frac{(s-1)^{1/3}}{1/3}\right) = 3 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Így

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = 3 + 3 \cdot \sqrt[3]{2}. \blacksquare$$

Példa: Nem korlátos síkidom területe.



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t}+1\right) = 0+1 = 1 \implies$$

$$T(B) := \frac{1}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\ .$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to0+0} \int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to0+0} \left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to0+0} \left(-1+\frac{1}{t}\right) = -1+\infty = +\infty \implies$$

$$T(A) := \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{2} = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty. \ \blacksquare$$

Improprius integrál

3. Az improprius integrálra vonatkozó alapvető tételek

A Riemann-integrálokra vonatkozó alapvető tulajdonságok csaknem változtatás nélkül érvényesek az improprius integrálokra is. Ebben a szakaszban végig feltesszük, hogy $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, továbbá $f, g \in R[u, v]$ minden $a < u < v < b$ esetén.

A továbbiakban az $\int_a^b f$ és az $\int_a^b g$ **konvergens** improprius integrálokra vonatkozó alapvető eredményeket soroljuk fel.

Megjegyzés. Az improprius integrálok alkalmazása során a legfontosabb kérdés az, hogy az adott integrál konvergens-e vagy sem; a konvergencia esetén az integrál pontos meghatározása gyakran csak másodlagos (vagy eleve reménytelen). ■

Tétel. *Ha az* $\int_a^b f$ *és az* $\int_a^b g$ *iproprius integrálok konvergensek, akkor minden* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *esetén az* $\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ *iproprius integrál is konvergens, és*

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_a^b f + \lambda_2 \int_a^b g.$$

Tétel: Összehasonlító kritériumok. *T.f.h.* $0 \le f \le g$ *az* (a, b) *intervallumon. Ekkor:*

1^o ***Majoráns kritérium:*** *ha az* $\int_a^b g$ *improprius integrál* ***konvergens*** $\Longrightarrow$ $\int_a^b f$ *is* ***konvergens***.

2^o ***Minoráns kritérium:*** *ha az* $\int_a^b f$ *improprius integrál* ***divergens*** $\Longrightarrow$ $\int_a^b g$ *is* ***divergens***.

Példa. *Mutassuk meg, hogy a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

improprius integrál konvergens!

Megoldás. A $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ egyenlőség alapján elég megmutatni azt, hogy a második tag konvergens.

Mivel

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-x^2}\,dx \leq \lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-x}\,dx =$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^t = -\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e},$$

ezért az $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ improprius integrál a majoráns kritérium szerint valóban konvergens. ■

Megjegyzés. Az integrandusnak van primitív függvénye (ui. folytonos), de az nem elemi függvény. Ezért az integrál értékét a definícióból a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával nem tudjuk meghatározni. ■

Megjegyzés. Igazolható, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ezt az állítást később igazolni fogjuk. ■

Definíció. *Az* $\int_a^b f$ *improprius integrál* ***abszolút konvergens***, *ha az* $\int_a^b |f|$ *improprius integrál konvergens.*

Tétel. *Ha az* $\int_a^b f$ *improprius integrál abszolút konvergens, akkor konvergens is, és*

$$\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|.$$

Megjegyzés. Igazolható, hogy például az

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

improprius integrál konvergens, de nem abszolút konvergens. ∎

A Newton–Leibniz-tétel kis módosításokkal alkalmazható improprius integrálok kiszámítására is.

Tétel. *Legyen* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, *és t.f.h.*

(a) $f \in R[u, v]$ *minden* $a < u < v < b$ *esetén, továbbá*

(b) f*-nek van primitív függvénye* (a, b)*-n, és*

legyen $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ *az* f *egy primitív függvénye.*

Az $\int_a^b f$ *improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha a* $\lim\limits_{a+0} F$ *és* $\lim\limits_{b-0} F$ *véges határértékek léteznek, és ekkor*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{b-0} F - \lim_{a+0} F =: \big[F(x)\big]_a^b.$$

Például

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 1+0}\left(-\frac{1}{x}\right) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

viszont

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

divergens, mert

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty. \quad \blacksquare$$

Improprius integrál

4. Végtelen sorokra vonatkozó integrálkritérium

Tétel. *T.f.h. az* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *függvény* $\searrow$ *és* ≥ 0 *a* $[0,+\infty)$ *intervallumon. Legyen* $a_k := f(k)$ $(k \in \mathbb{N})$. *Ekkor*

$$\sum_{k=0} a_k \ \ \textit{konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \ \ \textit{konvergens.}$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\tau_n := \{0, 1, \ldots, n\} \in \mathcal{F}[0, n]$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ T.f.h. a $\sum_{k=0} a_k$ végtelen sor konvergens. Ekkor a részlet-összegek $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata korlátos, azaz

$$\exists\, M > 0 : \ 0 \leq s_n \leq M \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $f \searrow [0,n]$-en, ezért minden $k=1,\dots,n-1$ indexre
$$f(x) \leq f(k-1) = a_{k-1} \ \big(x \in [k-1,k]\big).$$
Így
$$\int\limits_0^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{k-1}^k f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^n a_{k-1} = s_{n-1} \leq M \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$
Ugyanakkor $f \geq 0$ a $[0,+\infty)$-n $\Longrightarrow$ a $t \mapsto \int_0^t f \ (t \geq 0)$ függvény $\nearrow$, és az előzőek miatt felülről korlátos. Ezért a
$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^t f(x)\,dx$$
határérték létezik és véges. Ez azt jelenti, hogy a $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens.

$\boxed{\Longleftarrow}$ T.f.h. a $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens. Ebből következik, hogy a

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^n f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\int\limits_{k-1}^k f(x)\,dx =: I$$

határérték létezik és véges. Ugyanakkor $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$ indexre

$$a_k = f(k) \le f(x) \quad \big(x \in [k, k+1]\big), \quad \text{ezért}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n - a_0 \le \int\limits_0^n f(x)\,dx \le I \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ebből következik, hogy az (s_n) sorozat korlátos. Mivel (s_n) monoton növekedő is, ezért konvergens. ■

Tétel. *Legyen* $M \in \mathbb{Z}$ *tetszőleges. T.f.h. az* $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ *függvény* $\searrow$ *és* ≥ 0 *az* $[M, +\infty)$ *intervallumon. Legyen* $a_k := f(k)$ $(M \leq k \in \mathbb{Z})$*. Ekkor*

$$\sum_{k=M} a_k \quad \textit{konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \quad \textit{konvergens.}$$

Példa. *Mutassuk meg, hogy ha* $\alpha \in \mathbb{R}$*, akkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

hiperharmonikus sor *akkor és csak akkor konvergens, ha* $\alpha > 1$*.*

Megoldás. Az előző tétel az $M = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(x \geq 1)$, $a_n = f(n)$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ szereposztással alkalmazható, és azt már korábban igazoltuk, hogy az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.
$\blacksquare$

Megjegyzés. Ezt az állítást az Analízis I. kurzus 6. előadásán (más módszerrel) már igazoltuk. $\blacksquare$