# 3. előadás
# Differenciálszámítás 3.

**Emlékeztető:** Függvénytulajdonságokat a deriválttal jellemezni lehet.

- Lokális szélsőértékek. Elsőrendű szükséges feltétel.
- Középértéktételek.
- Monotonitás.

# Az óra anyaga

1. Szélsőértékek (lokális és abszolút)
2. Konvex és konkáv függvények

# Az óra anyaga

1. Szélsőértékek (lokális és abszolút)
2. Konvex és konkáv függvények

# 1. Szélsőértékek (lokális és abszolút)

## A Lokális szélsőértékek

**Emlékeztető:** A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel:

*Ha* $f \in D\{a\}$ *és* $a$*-ban az* $f$ *függvénynek lokális szélsőértéke van, akkor* $f'(a) = 0$.

**Láttuk:** A feltétel csak szükséges, de nem elégséges. Például $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ és $a = 0$.

**Kell:** A stacionárius pontok közül kiválasztani a lokális szélsőértékhelyeket. Ezeket **elégséges** feltételekkel fogjuk kiválasztani. Ehhez bevezetjük **függvény előjelváltásának** a fogalmát.

**Definíció.**

*Azt mondjuk, hogy a $h$ függvény a $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$ pontban* ***negatívból pozitívba megy át*** *(röviden $h$-nak $c$-ben $(-,+)$* ***előjelváltása van****), ha $h(c) = 0$ és $\exists\, \delta > 0$ úgy, hogy*

$$h(x) < 0, \text{ ha } x \in (c-\delta, c) \quad \text{és } h(x) > 0, \text{ ha } x \in (c, c+\delta).$$

A $h$ függvény $c$-beli $(+,-)$ előjelváltását hasonlóan értelmezzük. Ekkor $h$ a $c$ pontban pozitívból negatívba megy át.

Azt mondjuk, hogy a $h$ **függvény $c$-ben előjelet vált**, ha $h$-nak $c$-ben $(-,+)$ vagy $(+,-)$ előjelváltása van.

**Tétel: Elsőrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékekre.**

*Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy*

- $f \in D(a,b)$,
- *egy* $c \in (a,b)$ *pontban* $f'(c) = 0$ *és*
- *az* $f'$ *deriváltfüggvény előjelet vált* $c$*-ben.*

*Ekkor,*

**1°** *ha az* $f'$ *függvénynek* $c$*-ben* $(-,+)$ *előjelváltása van, akkor* $c$ *az* $f$ *függvénynek szigorú* ***lokális minimumhelye****;*

**2°** *ha az* $f'$ *függvénynek* $c$*-ben* $(+,-)$ *előjelváltása van, akkor* $c$ *az* $f$ *függvénynek szigorú* ***lokális maximumhelye****.*

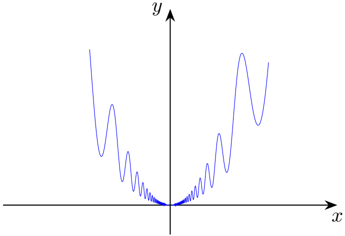
**Bizonyítás.** Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből, hiszen ha az $f$ függvénynek $c$-ben $(-,+)$ előjelváltása van, akkor $\exists\,\delta > 0$ úgy, hogy $f' < 0$ $(c-\delta, c)$-n és $f' > 0$ $(c, c+\delta)$-n. Ezért $f \downarrow$ $(c-\delta, c]$-n és $f \uparrow$ $[c, c+\delta)$-n. Emiatt $\forall\, x \in (c-\delta, c+\delta)\colon f(x) > f(c)$, tehát $c$ az $f$ függvénynek szigorú lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható $(+,-)$ előjelváltás esetén. ■

**Megjegyzés.** A deriváltfüggvény előjelvátása elégséges, de **nem szükséges** feltétele a lokális szélsőértéknek. Például az

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény deriválható $\mathbb{R}$-en, $c = 0$-ban abszolút, így lokális minimuma van, de az $f'$ deriváltfüggvény nem vált előjelet $c$-ben.



Kétszer deriválható függvények esetén a második derivált **előjeléből** kapunk elégséges feltételt a lokális szélsőértékekre.

**Tétel: Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékekre.**

*Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy*

- $f$ *kétszer deriválható egy* $c \in (a,b)$ *pontban,* $f \in D^2\{c\}$,
- $f'(c) = 0$,
- $f''(c) \neq 0$.

*Ekkor* $c$ *szigorú lokális szélsőértékhelye az* $f$ *függvénynek;*

**1º** *ha* $f''(c) > 0$*, akkor* $c$ *az* $f$ *függvénynek szigorú* ***lokális minimumhelye****;*

**2º** *ha* $f''(c) < 0$*, akkor* $c$ *az* $f$ *függvénynek szigorú* ***lokális maximumhelye****.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $f''(c) > 0$. Mivel

$$0 < f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c},$$

így a $c$ pontnak van olyan bal oldali környezete, ahol $f' < 0$ és van olyan jobb oldali környezete, ahol $f' > 0$. Tehát $f'$-nek a $c$ pontban $(-, +)$ előjelváltása van, ami az elsőrendű elégséges feltétel alapján azt jelenti, hogy a $c$ pont az $f$ függvénynek szigorú lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható akkor, ha $f''(c) < 0$. $\blacksquare$

## Megjegyzések.

**1°** A feltétel **nem szükséges**. Például az $f(x) := x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek a $c := 0$ pontban abszolút (így lokális) minimuma van, de $f''(0) = 0$.

**2°** Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ akkor, sem arra nem következtethetünk, hogy $f$-nek van, sem arra, hogy nincs lokális szélsőértéke $c$-ben. A különböző lehetőségeket mutatják például az

$$f(x) := x^3, \quad f(x) := x^4, \quad f(x) := -x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek.

**3°** A magasabb rendű deriváltak értékeiből lehet elégséges feltételeket nyerni arra, hogy az $a$ pont $f$-nek lokális szélsőértékhelye legyen. ■

**Tétel.**

**1°** *T.f.h.* $1 \le k \in \mathbb{N}$ *és* $f \in D^{2k}\{a\}$. *Ha*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2k-1)}(a) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(2k)}(a) > 0,$$

*akkor* $f$*-nek* $a$*-ban szigorú* ***lokális minimuma*** *van. Ha*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2k-1)}(a) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(2k)}(a) < 0,$$

*akkor* $f$*-nek* $a$*-ban szigorú* ***lokális maximuma*** *van.*

**2°** *T.f.h.* $1 \le k \in \mathbb{N}$ *és* $f \in D^{2k+1}\{a\}$. *Ha*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2k)}(a) = 0 \ \text{és} \ f^{(2k+1)}(a) \neq 0,$$

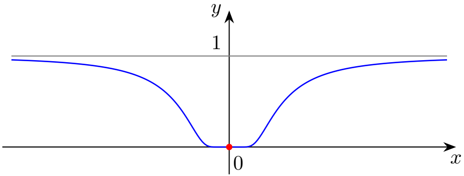
*akkor* $f$ *szigorúan monoton* $a$*-nak egy környezetében, tehát* $a$*-ban nincs lokális szélsőértéke.*

**Bizonyítás.** Meggondolható. ■

**Megjegyzés.** Előfordulhat, hogy ezeket az elégséges feltételeket sem tudjuk alkalmazni. Például az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

függvénynek az $a = 0$ pont nyilván szigorú abszolút (lokális) minimumhelye. Igazolható azonban az, hogy $f \in D^\infty$ és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.



**Példa.** *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

*függvény monotonitási intervallumait és lokális szélsőértékeit!*

**Megoldás.** Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján $f \in D$ és

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

A monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tétel szerint azokat az **intervallumokat** kell meghatároznunk, amelyeken $f'$ azonos **előjelű**.

Világos, hogy $f'(x) = 0 \implies x = -2$, és

$$f'(x) \gtrless 0 \quad \implies \quad -\frac{x+2}{x^3} \gtrless 0.$$

Így három olyan intervallumot kapunk, amelyeken $f'$ azonos előjelű.

Ezek a következők:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0) \quad \text{és} \quad (0, +\infty).$$

Nem nehéz meghatározni $f'$ előjeleit ezeken az intervallumokon. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek $f$-re vonatkozó következményeit:

| | $x < -2$ | $-2$ | $-2 < x < 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | $\downarrow$ | $-1/4$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
| lok. | | min | | |

A táblázatból rögtön leolvashatjuk $f$ monotonitási intervallumait, illetve azt, hogy $f$-nek lokális minimumhelye van az $x = -2$ pontban, és a lokális minimuma $f(-2) = -1/4$. $\blacksquare$

## $\boxed{B}$ Abszolút szélsőértékek

Az abszolút szélsőértékek **létezésére** a következő alapvető eredményt ismertük meg.

**Weierstrass-tétel.** *Korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos $f$ függvénynek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz*

$$\exists\ \alpha,\ \beta \in [a, b] \quad \textit{úgy, hogy}$$

$$f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha) \quad \big(\forall\, x \in [a, b]\big).$$

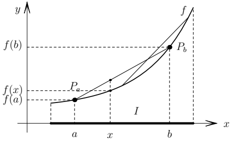
**Abszolút szélsőértékhelyek keresése.** Ha $f \in C[a,b]$, akkor van legnagyobb és legkisebb értéke. Ha $f$ ezek valamelyikét egy $c$ pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a,b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó. Ha feltesszük még azt is, hogy $f \in D(a,b)$, akkor $f'(c) = 0$. Ha tehát megkeressük az összes olyan $c \in (a,b)$ pontot, amelyben $f'$ eltűnik, akkor biztos, hogy az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, valamint az $a$ és a $b$ végpontok közül kerülnek ki. Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk $f$ értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az $a$ és $b$ végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben $f$ értéke a legnagyobb.

# Az óra anyaga

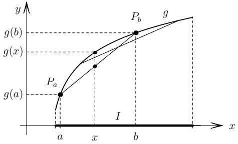
## 2. Konvex és konkáv függvények

Az Analízis I. kurzusban (l. a 12. és a 13. ea) a szemléletre támaszkodva vezettük be ezeket a fogalmakat, és a definíció alapján beláttuk néhány függvény szóban forgó tulajdonságait.

**Szemléletesen:**




**$f$ konvex $I$-n**




**$f$ konkáv $I$-n**

Ha $f$ konvex (konkáv), akkor $\forall\, a, b \in I,\ a < b$ esetén $f$ grafikonjának az $(a, b)$ intervallumhoz tartozó része a $P_a$ és $P_b$ pontokat összekötő húr alatt (felett) van. Ezek egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \text{ vagy } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

**Megállapodás:** $I$ mindig tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt) **intervallumot** jelöl.

**Definíció.** *A.m.h. az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény **konvex az $I$ intervallumon**, ha*

$$\forall\ a, b \in I,\ \ a < b \ \textit{esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

*Ha $(*)$-ban $\leq$ helyett $<$ áll, akkor $f$-et $I$**-n szigorúan konvexnek**, ha $\geq$, illetve $>$ áll, akkor $f$-et $I$**-n konkávnak**, illetve **szigorúan konkávnak** nevezzük.*

## Megjegyzések.

**1º** $f$ konkáv $I$-n $\iff -f$ konvex $I$-n.

**2º** Az abs függvény konvex, de nem szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.

**3º** Az $f(x) := cx + d$ $(x \in \mathbb{R},\ c, d \in \mathbb{R})$ függvény egyszerre konvex és konkáv is $\mathbb{R}$-en, de nem szigorú értelemben.

**4º** A definíció alapján a konvexitás-konkávitás vizsgálata általában nem egyszerű feladat. A differenciálszámítás a gyakorlatban jól használható módszert ad a szóban forgó függvénytulajdonágok vizsgálatához. ■

Az alkalmazások szempontjából érdemes a konvexitást jellemző egyenlőtlenséget más formában is megadni.

**Tétel.** *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor konvex az* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallumon, ha*

$$\forall\, a, b \in I,\ \ a < b \quad \textit{és} \quad \forall\, \lambda \in (0,1) \quad \textit{esetén}$$

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

**Bizonyítás.** L. Analízis I. 12. előadás. ■

**Megjegyzés.** Szigorúan konvex, konkáv és szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek. ■

Teljes indukcióval igazolható az alábbi állítás.

**Tétel: A Jensen-egyenlőtlenség.**

*Az $f$ függvény akkor és csak akkor konvex az $I$ intervallumon, ha bármely $n \in N^+$ mellett tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in I$ esetén fennáll az*

$$f\big(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\big) \leq \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n)$$

*egyenlőtlenség minden olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ számokra, amelyekre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.*

*Ha $f$ szigorúan konvex, akkor szigorú egyenlőtlenség áll, feltéve, hogy az $a_k$-k nem mind egyenlők.*

**Alkalmazás.** *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$(*) \qquad \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

*Ez az ún.* ***számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség****.*

**Bizonyítás.** Az $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény (szigorúan) konvex $\mathbb{R}$-en (l. An. I., 12. ea). A Jensen-egyenlőtlenséget a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ választással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

Ebből négyzetgyököt vonva adódik a $(*)$ egyenlőtlenség. ■

**Megjegyzés.** A tételből az is következik, hogy (*)-ban egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \cdots = a_n$. ■

## A konvexitás kapcsolata a deriválttal.

**Szemléletesen mi várható?** (L. An. II., 2. ea, Monotonitás.)

Az, hogy ha $f \in D(I)$ és $f$ konvex $I$-n $\Longrightarrow$ $f' \nearrow$ $I$-n. Ez az állítás igaz, sőt a megfodítása is igaz.

**Tétel.** *T.f.h. $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f \in D(I)$. Ekkor*

$$f \ \ \textit{konvex} \ \ I\textit{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \ \nearrow \ I\textit{-n}.$$

**Megjegyzés.** „$\nearrow$" helyett szigorúan konvex esetben „$\uparrow$", konkáv esetben „$\searrow$" és szigorúan konkáv esetben pedig „$\downarrow$" áll. ■

**Bizonyítás.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Legyen $u, v \in I,\ u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges. T.f.h. $f$ konvex $I$-n. Ekkor

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \quad \text{és}$$

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v).$$

Egyszerű átrendezésekkel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}.$$

Vegyük itt az $x \to u$, ill. az $x \to v$ határátmenetet:

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v).$$

Tehát $f'$ monoton növekedő $I$-n.

$\boxed{\Longleftarrow}$ T.f.h. $f'$ monoton növekedő $I$-n. Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges. Ekkor a Lagrange-féle k.é.t. szerint $\exists\, \xi_1 \in (u, x)$ és $\exists\, \xi_2 \in (x, v)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \text{ és } f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}.$$

Mivel $f' \nearrow$ $I$-n, ezért $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \le \frac{f(v) - f(x)}{v - x}.$$

Ezt átrendezve (a részleteket mellőzve) azt kapjuk, hogy

$$f(x) \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u).$$

Ez azt jelenti, hogy az $f$ függvény konvex $I$-n. ■

Ha $f \in D^2(I)$, akkor az $f'$ függvényre alkalmazzuk a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt. Ekkor a következő fontos állítást kapjuk.

**Tétel.** *T.f.h. $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f \in D^2(I)$. Ekkor*

**1°** *$f$ konvex $I$-n $\iff$ $f'' \geq 0$ $I$-n.*

*$f$ konkáv $I$-n $\iff$ $f'' \leq 0$ $I$-n.*

**2°** *Ha $f'' > 0$ $I$-n $\implies$ $f$ szigorúan konvex $I$-n.*

*Ha $f'' < 0$ $I$-n $\implies$ $f$ szigorúan konkáv $I$-n.*

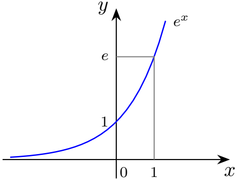
## Példák.

**1°** $\boxed{f(x) := e^x \ (x \in \mathbb{R})}$

Ekkor $f \in D^2$ és

$f''(x) = e^x > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$,

tehát $f$ szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.

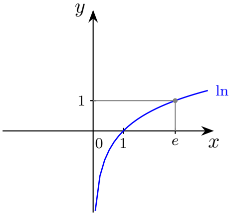



**2°** $\boxed{f(x) := \ln x \ (x > 0)}$

Ekkor $f \in D^2$ és

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \ (x > 0)$,

tehát $f$ szigorúan konkáv $\mathbb{R}^+$-on.



$\boldsymbol{3^o}$ $\boxed{f(x) := a^x \ (x > 0,\ a > 0)}$

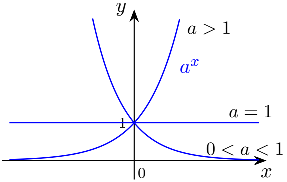
Ekkor $f \in D^2$ és

$$f''(x) = a^x \cdot \ln^2 a \overset{?}{\gtrless} 0.$$

Mivel $f''(x) > 0$ $(x > 0)$,

ha $0 < a \neq 1$, ezért

$f$ szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en, ha $0 < a \neq 1$.




Ha $a = 1$, akkor $f$ egyszerre konvex és konkáv $\mathbb{R}$-en, de nem szigorú értelemben.

**4º** $\boxed{f(x) := \log_a x \ (x > 0,\ 0 < a \neq 1)}$

Ekkor $f \in D^2$ és

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln a} \overset{?}{\gtrless} 0.$$

Mivel $f''(x) > 0$ $(x > 0)$,

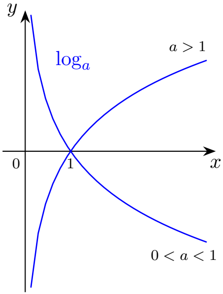
ha $0 < a < 1$, ezért

$f$ szigorúan konvex $\mathbb{R}^+$-on.

Mivel $f''(x) < 0$ $(x > 0)$,

ha $a > 1$, ezért

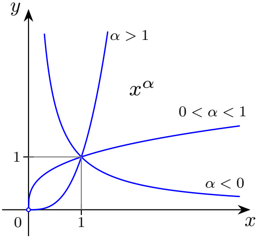
$f$ szigorúan konkáv $\mathbb{R}^+$-on.



**5°** $\boxed{f(x) := x^\alpha \ (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})}$

Ekkor $f \in D^2$ és

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2} \overset{?}{\gtrless} 0.$$




Mivel $f''(x) > 0$ $(x > 0)$, ha $\alpha < 0$ vagy $\alpha > 1$, ezért $f$ szigorúan konvex $\mathbb{R}^+$-on, ha $\alpha < 0$ vagy $\alpha > 1$.

Mivel $f''(x) < 0$ $(x > 0)$, ha $0 < \alpha < 1$, ezért $f$ szigorúan konkáv $\mathbb{R}^+$-on, ha $0 < \alpha < 1$.

Ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$, akkor $f$ egyszerre konvex és konkáv $\mathbb{R}^+$-on, de nem szigorú értelemben.

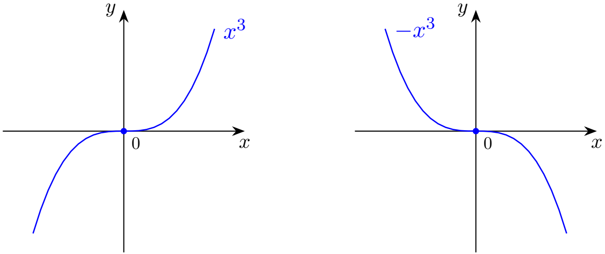
## Inflexiós pont.

**Definíció.** *Legyen $I$ nyílt intervallum, és t.f.h. $f \in D(I)$. A.m.h. a $c \in I$ pont az $f$ függvénynek **inflexiós pontja**, ha*

$$\exists\, \delta > 0\text{: } f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c+\delta)\text{-n},$$

*vagy fordítva.*

**Például** az $x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $-x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek a $c = 0$ pont inflexiós pontja.



**Tétel.** *Legyen $I$ nyílt intervallum, és t.f.h. $f \in D^2(I)$. Annak, hogy $c \in I$-ben $f$-nek inflexiós pontja legyen*

**1°** ***szükséges feltétele***, *hogy $f''(c) = 0$ teljesüljön;*

**2°** ***elégséges feltétele***, *hogy $f''$ előjelet váltva legyen $0$ a $c$ pontban.*

## A konvexitás és az érintő kapcsolata.

Emlékeztetünk arra, hogy $f \in D\{a\}$ esetén az

$$e_{f,a}(x) := f'(a)(x-a) + f(a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenest neveztük az $f$ függvény $a$-beli **érintőjének**.

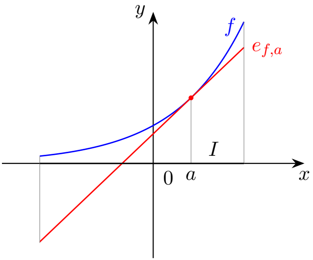
**Tétel.** *T.f.h. $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f \in D(I)$. Ekkor*

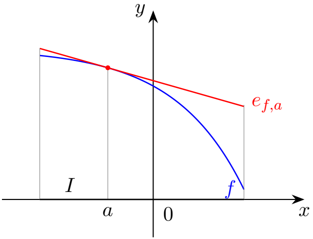
$$f \quad \textit{konvex} \quad [\textit{konkáv}] \quad I\text{-}n \quad \iff$$

$$\forall\, a \in I: \;\; f(x) \geq e_{f,a}(x), \quad [f(x) \leq e_{f,a}(x)] \;\; (x \in I),$$

*vagyis $f$ grafikonja egy tetszőleges pontjában húzott érintője felett [alatt] halad.*

## Szemléletesen:



**Bizonyítás.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ T.f.h. $f$ konvex $I$-n. Azt már tudjuk, hogy ekkor $f' \nearrow$ $I$-n. Legyen $a \in I$ és

$$\varphi(x) := f(x) - e_{f,a}(x) \ (x \in I).$$

Ekkor $\varphi \in D(I)$ és $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ $(x \in I)$. Mivel $\varphi'(a) = 0$ és $f' \nearrow$ $I$-n, ezért

$$\varphi'(x) \leq 0 \leq \varphi'(t) \quad (x, t \in I, \ x \leq a \leq t).$$

Így $\varphi \searrow$ $I \cap (-\infty, a]$-n és $\varphi \nearrow$ $I \cap [a, +\infty)$-n $\Longrightarrow$ $\varphi$-nek $a$-ban abszolút minimuma van. $\varphi(a) = 0$ miatt tehát $\varphi \geq 0$ $I$-n, azaz

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{f(x) \geq e_{f,a}(x) \quad (x \in I)}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Azt mutatjuk meg, hogy $f' \nearrow$ $I$-n. Korábban már láttuk, hogy ebből már következik, hogy $f$ konvex $I$-n.

Legyen $a, b \in I$, $a < b$ tetszőleges. A feltétel szerint

$$f(b) \geq e_{f,a}(b) = f'(a)(b-a) + f(a),$$

$$f(a) \geq e_{f,b}(a) = f'(b)(a-b) + f(b).$$

Az egyenlőtlenségeket összeadva azt kapjuk, hogy

$$f(a) + f(b) \geq f(a) + f(b) + \big(f'(a) - f'(b)\big) \cdot \underbrace{(b-a)}_{>0}.$$

Innen egyszerűsítés után $f'(a) \leq f'(b)$ adódik $\Longrightarrow$ $f'$ valóban monoton növekedő $I$-n.

A konkáv eset ugyanígy igazolható. $\blacksquare$

## A konvexitás, a folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata.

A következő tétel azt állítja, hogy a konvexitás a folytonosság és a deriválhatóság fogalma „között” van abban az értelemben, hogy a konvexitás fogalma a folytonosságnál „erősebb”, a deriválhatóságnál pedig „gyengébb” fogalom.

**Tétel.** *Tegyük fel, hogy az $f$ függvény konvex* $[$*konkáv*$]$ *az $I$ nyílt intervallumon. Ekkor*

**1°** *$f$ folytonos $I$-n.*

**2°** $\forall\, a \in I$ *pontban* $\exists\, f'_-(a)$ *és* $\exists\, f'_+(a)$.

**Bizonyítás.** Nélkül. ■