8. előadás
A határozott integrál 2.

Emlékeztető:

- A határozott integrál motivációja. Történeti megjegyzések.
- A határozott integrál értelmezése.
- Két példa az integrál kiszámolására a definíció alapján.
- Az integrálhatóság ekvivalens átfogalmazásai (oszcillációs összegekkel, sorozatokkal, Riemann-féle közelítő összegekkel).

A határozott integrál 2.

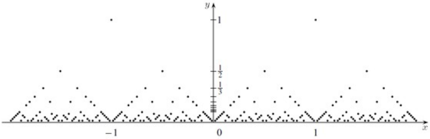
1. A Riemann-függvény

Az Analízis I. kurzus 11. gyakorlatán mutattuk meg az

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N}^+,\ (p,q) = 1 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Riemann-függvény alábbi érdekes tulajdonságait:

- R periodikus és periódusa 1. A függvény grafikonja:



- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{a} f = 0$,
- R minden irracionális helyen folytonos,
- a racionális pontok R megszüntethető szakadási helyei.

Példa. *A definíció alapján mutassuk meg, hogy az R Riemann-függvény integrálható $[0,1]$-en, és $\int_0^1 R(x)\,dx = 0$.*

Megoldás. Tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}[0,1]$ felosztás esetén $s(R,\tau) = 0$ (ui. minden intervallumban van irracionális szám) $\Longrightarrow$ $I_*(R) = 0$.

Azt kell még belátni, hogy $I^*(R) = 0$, azaz

$$(*) \qquad \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\,\tau \in \mathcal{F}[0,1]: \; S(R,\tau) < \varepsilon.$$

Adott $\varepsilon > 0$-hoz egy ilyen τ felosztást a következőképpen adhatunk meg. Legyen $m \in \mathbb{N}^+ : \; \frac{3}{m} < \varepsilon$. Vegyük észre, hogy a függvény $\frac{1}{m}$-nél nagyobb értéket csak véges sok $x \in [0,1]$ pontban vehet fel. Ha ugyanis $R(x) > \frac{1}{m}$, akkor $x = \frac{p}{q}$, ahol $q < m$ kell, hogy legyen, márpedig minden $q < m$-hez csak véges sok olyan p egész van, amelyre $\frac{p}{q} \in [0,1]$.

Legyenek $c_1, \dots, c_N$ azon $[0,1]$-beli pontok, amelyekben R értéke nagyobb, mint $\frac{1}{m}$. Legyen továbbá $\tau = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ egy $\frac{1}{m \cdot N}$-nél finomabb felosztása $[0,1]$-nek, azaz $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{m \cdot N}$.
Azon i indexek száma, amelyekre $[x_{i-1}, x_i]$ tartalmazza a c_j pontok valamelyikét legfeljebb $2N$, hiszen mindegyik c_j pont legfeljebb két osztóintervallumnak lehet eleme. A $S(R,\tau)$ összegben az ilyen indexekhez tartozó tagok értéke $M_i(x_i - x_{i-1}) \leq 1 \cdot \frac{1}{m \cdot N}$, a tagok öszege tehát legfeljebb $2N \cdot \frac{1}{m \cdot N} = \frac{2}{m}$. A többi tagra $M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{m} \cdot (x_i - x_{i-1})$ teljesül, ezek összege tehát legfeljebb

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{m} \cdot 1.$$

E két becslést összeadva $S(R,\tau) \leq \frac{2}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m} < \varepsilon$ adódik. Így $(*)$-ot, vagyis az $I^*(R) = 0$ egyenlőséget igazoltuk. ■

A határozott integrál 2.

2. Műveletek integrálható függvényekkel

Tétel. *T.f.h.* $f, g \in R[a,b]$, *és legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1° $\lambda \cdot f \in R[a,b]$ *és* $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int_a^b f;$

2° $f + g \in R[a,b]$ *és* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g;$

3° $f \cdot g \in R[a,b]$ *(csak ennyi!);*

4° *ha* $|g(x)| \geq m > 0$ $\big(\forall\, x \in [a,b]\big)$, *akkor*

$$\frac{f}{g} \in R[a,b] \qquad (\textit{csak ennyi!}).$$

Bizonyítás.

1° Az állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy ha $\lambda \geq 0$, akkor $\forall\ \tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra

$$s(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot s(f, \tau) \quad \text{és} \quad S(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot S(f, \tau),$$

ha pedig $\lambda < 0$, akkor

$$s(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot S(f, \tau) \quad \text{és} \quad S(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot s(f, \tau).$$

2° Legyen $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ és

$$f_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \qquad F_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

$$g_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g, \qquad G_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g.$$

Mivel

$$f_i + g_i \le f(x) + g(x) \le F_i + G_i, \ \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i],$$

ezért

$$f_i + g_i \le \inf_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \le \sup_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \le F_i + G_i.$$

Ebből $(x_i - x_{i-1})$-gyel való szorzás és összegzés után az adódik, hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le S(f+g,\tau) \le S(f,\tau) + S(g,\tau).$$

T.f.h. $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, és legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor

$$s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \leq s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq I_*(f+g).$$

Innen – először a $\tau_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, majd a $\tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokra a bal oldal felső határát véve – következik, hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g).$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g). \text{ Így}$$

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g).$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$, ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$ és $I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g$, ezért $I_*(f+g) = I^*(f+g)$, tehát $f+g \in R[a,b]$ és $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

3° **Ötlet:** az **oszcillációs összegek** alkalmazása.

(i) T.f.h. $f, g \geq 0$, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$.

A **2°**-ben bevezetett jelölésekkel:

$$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \Longrightarrow$$

$$f_i \cdot g_i \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \Longrightarrow$$

$$\Omega(f \cdot g, \tau) = S(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \Big(F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Mivel f és g korlátos, ezért $\exists\, M:\ |f|, |g| \le M\ \ [a,b]$-n. Így

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\Omega(f\cdot g,\tau)} \le \sum_{i=1}^{n}\Big[F_i\cdot(G_i-g_i)+(F_i-f_i)\cdot g_i\Big]\cdot(x_i-x_{i-1}) \le$$

$$\le M\cdot\sum_{i=1}^{n}(G_i-g_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) + M\cdot\sum_{i=1}^{n}(F_i-f_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) =$$

$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{M\cdot\big(\Omega(g,\tau)+\Omega(f,\tau)\big)}.$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$, ezért $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\,\tau:\ \Omega(f,\tau), \Omega(g,\tau) < \varepsilon$.

Tehát $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\,\tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás:

$$\Omega(f\cdot g,\tau) \le 2\cdot M\cdot\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{f\cdot g \in R[a,b]}.$$

(ii) T.f.h. f, g tetszőleges, és legyen

$$m_f := \inf_{[a,b]} f, \quad m_g := \inf_{[a,b]} g.$$

Ekkor $f - m_f \geq 0$ és $g - m_g \geq 0$ $[a,b]$-n integrálható függvények.
Tehát (i) szerint

$$(f - m_f) \cdot (g - m_g) = f \cdot g \underbrace{- m_f \cdot g - f \cdot m_g + m_f \cdot m_g}_{\in R[a,b]} \in R[a,b],$$

következésképpen $f \cdot g \in R[a,b]$.

4º A **3º** állítás miatt elég azt igazolni, hogy a g-re tett feltétel esetén $\frac{1}{g} \in R[a,b]$.

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. Ekkor $\forall\ x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ pontban

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1},x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}.$$

$(x_i - x_{i-1})$-gyel való szorzás és összegzés után azt kapjuk, hogy

$$\Omega\left(\tfrac{1}{g}, \tau\right) \leq \tfrac{1}{m^2} \cdot \Omega(g, \tau).$$

Mivel $g \in R[a,b]$, ezért $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \tau:\ \Omega(g,\tau) < \varepsilon$. Így

$$\Omega\left(\tfrac{1}{g}, \tau\right) < \tfrac{\varepsilon}{m^2} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\tfrac{1}{g} \in R[a,b]}. \quad \blacksquare$$

A határozott integrál 2.

3. A Riemann-integrál további tulajdonságai

• A függvényértékek megváltoztatása véges sok helyen

A Riemann-integrál „érzéketlen” a függvény **véges** halmazon való „viselkedésére”. Más szóval, ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott „új” függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé.

Tétel. *T.f.h. $f, g \in K[a,b]$. Ha $f \in R[a,b]$ és az*

$$A := \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ halmaz } \textbf{\textit{véges}},$$

akkor $g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Elég azt az esetet megmutatni, amikor az f függvényt csak egy pontban változtatjuk meg, azaz f és g csak egy pontban különbözik. Tehát: $f \in R[a,b]$ és $\exists\, \alpha \in [a,b]$:

$$f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in [a,b],\ x \neq \alpha \quad \text{és} \quad f(\alpha) \neq g(\alpha).$$

Legyen $h := g - f$. Mivel $g = f + h$, ezért elég megmutatni azt, hogy $h \in R[a,b]$, és $\int\limits_a^b h = 0$ (l. az integrál additivitását). Ekkor

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [a,b] \text{ és } x \neq \alpha \\ g(\alpha) - f(\alpha), & \text{ha } x = \alpha \end{cases} \quad \text{és} \quad h(\alpha) \neq 0.$$

Legyen $\varepsilon > 0$. T.f.h. $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$: $\alpha \in \tau$ és $\|\tau\| < \frac{\varepsilon}{2|h(\alpha)|}$. Ekkor α legfeljebb két részintervallumhoz tartozik (osztópont esete). A többi részintervallumban $h \equiv 0 \Longrightarrow$ a sup és az inf is 0 ezeken az intervallumokon.

Ha $h(\alpha) > 0$, akkor

$$S(h,\tau) < 2h(\alpha) \cdot \frac{\varepsilon}{2h(\alpha)} \quad \Longrightarrow \quad I^*(h) = 0.$$

Másrészt

$$\forall \tau \in \mathcal{F}[a,b] \text{ esetén } s(h,\tau) = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_*(h) = 0.$$

Tehát $h \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b h = 0$.

A $h(\alpha) < 0$ eset hasonlóan igazolható. ■

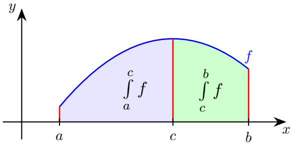
Megjegyzés. Az integrálhatóság fogalmának és az integrál értelmezésének **kiterjesztése** olyan függvényekre, amelyek az $[a,b]$ intervallum véges sok pontjában nincsenek értelmezve. Legyen f egy ilyen függvény. Ha $\exists\ g \in R[a,b]\ :\ \ g(x) = f(x)$ legfeljebb véges sok $[a,b]$-beli pont kivételével, akkor azt mondjuk, hogy f **integrálható**, és

$$\int_a^b f := \int_a^b g.$$

Ha ilyen g nem létezik, akkor f **nem integrálható**. Az előző tételből következik, hogy az integrálhatóság ténye és az integrál értéke független a g függvény megválasztásától. ■

• Az integrál intervallum szerinti additivitása

Szemléletesen:



Tétel. *T.f.h.* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos, és legyen* $c \in (a, b)$*. Ekkor*

1° $f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c]$ *és* $f \in R[c, b]$,

2° *ha* $f \in R[a, c]$ *és* $f \in R[c, b]$ (*vagy* $f \in R[a, b]$), *akkor*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Megjegyzés. $f \in R[a, c]$ azt jelenti, hogy $f_1 := f_{|_{[a,c]}} \in R[a, c]$.
$f \in R[c, b]$ azt jelenti, hogy $f_2 := f_{|_{[c,b]}} \in R[c, b]$. ■

Bizonyítás.

1^o $\boxed{\Longrightarrow}$ Ha $f \in R[a,b] \Longrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\ \tau \in \mathcal{F}[a,b]:\ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Feltehetjük, hogy $c \in \tau$, különben τ-t kicserélve $\tau \cup \{c\}$-re azt kapjuk, hogy $\Omega(f,\tau \cup \{c\}) \leq \Omega(f,\tau) < \varepsilon$.

Legyen $\tau_1 := \tau \cap [a,c] \in \mathcal{F}[a,c]$ és $\tau_2 := \tau \cap [c,b] \in \mathcal{F}[c,b]$. Ekkor

$$\Omega(f_1,\tau_1) + \Omega(f_2,\tau_2) = \Omega(f,\tau) < \varepsilon \text{ miatt}$$

$$\Omega(f_1,\tau_1),\quad \Omega(f_2,\tau_2) \leq \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $f_1 \in R[a,c]$ és $f_2 \in R[c,b]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ha $f_1 \in R[a,c]$ és $f_2 \in R[c,b]$, $\Longrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\ \tau_1 \in \mathcal{F}[a,c], \quad \tau_2 \in \mathcal{F}[c,b]:$$

$$\Omega(f_1,\tau_1) < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \quad \Omega(f_2,\tau_2) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, továbbá

$$\Omega(f,\tau) = \Omega(f_1,\tau_1) + \Omega(f_2,\tau_2) < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$.

2^o T.f.h. $f \in R[a,c]$ és $f \in R[c,b]$. Legyen

$$I_1 := \int_a^c f = I_*(f_1) = I^*(f_1), \quad I_2 := \int_c^b f = I_*(f_2) = I^*(f_2).$$

Tekintsük a $\tau_1 \in \mathcal{F}[a,c]$, $\tau_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ és $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokat. Ekkor

$$s(f_1,\tau_1) + s(f_2,\tau_2) = s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq$$
$$\leq S(f,\tau) = S(f_1,\tau_1) + S(f_2,\tau_2).$$

Így

$$I_*(f_1) + I_*(f_2) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq I^*(f_1) + I^*(f_2).$$

Mivel $f_1 \in R[a,c] \implies I_*(f_1) = I^*(f_1) = I_1$ és $f_2 \in R[c,b] \implies I_*(f_2) = I^*(f_2) = I_2$, ezért

$$I_*(f) = I^*(f) = I_1 + I_2 \implies f \in R[a,b] \text{ és } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \blacksquare$$

Az $\int\limits_a^b f$ jelölés használatánál eddig feltettük, hogy $a < b$.

Az $\int\limits_a^b f$ szimbólumnak $a = b$ és $a > b$ esetén is célszerű értelmet tulajdonítani. Megállapodunk abban, hogy

$$\int\limits_a^a f := 0, \quad \text{és} \quad \int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f, \quad \text{ha} \quad a > b.$$

Tétel. *Ha $f \in R[A, B]$, akkor minden $a, b, c \in [A, B]$ esetén*

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

Bizonyítás. Az állítás az összes lehetséges eset végiggondolásával azonnal következik az előzőekből. Ha pl. $a < b < c$, akkor

$$\int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f,$$

akkor átrendezéssel adódik az állítás. A többi eset hasonlóan igazolható. ■

A határozott integrál 2.

4. Egyenlőtlenségek

Megjegyzés. A határozott integrál kiszámolása általában nehéz feladat, viszont az integrál értékére egyszerűen kaphatunk becsléseket. Ezek még olyankor is fontosak lehetnek, amikor az illető integrál pontos kiszámolására is van lehetőség, hiszen a gyakorlatban egy jó becslés hasznosabb lehet, mint egy bonyolult, nehezen igazolható képlet. ■

Tétel. *T.f.h.* $f, g \in R[a,b]$. *Ekkor:*

1° $f \geq 0$ $[a,b]$-*n* $\Longrightarrow$ $\int\limits_a^b f \geq 0$

(*az integrál előjeltartó*),

2° $f \leq g$ $[a,b]$-*n* $\Longrightarrow$ $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

(*az integrál az integrandusban monoton*).

Bizonyítás.

1° $f \geq 0 \Rightarrow \forall\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]:\ s(f,\tau) \geq 0\ \Rightarrow 0 \leq I_*(f) = \int\limits_a^b f.$

2° $f \leq g\ \Rightarrow g - f \geq 0\ \Rightarrow \int\limits_a^b (g-f) \geq 0\ \Rightarrow \int\limits_a^b g \geq \int\limits_a^b f.$ $\blacksquare$

Tétel. *T.f.h.* $f \in R[a,b]$. *Ekkor:*

1° $|f| \in R[a,b]$,

2° $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$.

Bizonyítás.

1° $f \in R[a,b] \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]:\ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$

Mivel $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)|$, ezért

$$\Omega\big(|f|,\tau\big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} |f| - \inf_{[x_{i-1},x_i]} |f| \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} \big||f(x)| - |f(y)|\big| \cdot (x_i - x_{i-1}) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)| \cdot (x_i - x_{i-1}) = \Omega(f,\tau),$$

azaz $\Omega\big(|f|\big) \le \Omega(f,\tau) < \varepsilon \Longrightarrow |f| \in R[a,b]$.

2^o Mivel $-|f| \leq f \leq |f| \Longrightarrow -\int\limits_a^b |f| \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$, ezért

$$\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|. \blacksquare$$

Megjegyzés. Az **1^o** állítás megfordítása **nem igaz**. Ha pl.

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & \text{ha } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$$

akkor $|f| \in R[0,1]$, de $f \notin R[0,1]$. $\blacksquare$

Tétel: Az intergrálszámítás első középértéktétele.

T.f.h. $f, g \in R[a,b]$ *és* $g \geq 0$. *Ekkor:*

1º *az* $m := \inf\limits_{[a,b]} f$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f$ *jelölésekkel*

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g,$$

2º *ha még* $f \in C[a,b]$ *is teljesül, akkor* $\exists\ \xi \in [a,b]$*:*

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Bizonyítás.

1° Tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{és} \quad g(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x).$$

Mivel $m \cdot g,\ f \cdot g,\ M \cdot g \in R[a, b]$, ezért

$$(*) \qquad m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int\limits_a^b g.$$

2° Ha $\int\limits_a^b g = 0$, akkor **1°** miatt bármelyik $\xi \in [a,b]$ választás megfelelő. Ha viszont $\int\limits_a^b g > 0$, akkor $(*) \implies$

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f \cdot g}{\int\limits_a^b g} \leq M.$$

Ha $f \in C[a,b] \implies$ (l. a Bolzano–Darboux-tételt) az f függvény minden m és M közötti értéket felvesz. Van tehát olyan $\xi \in [a,b]$:

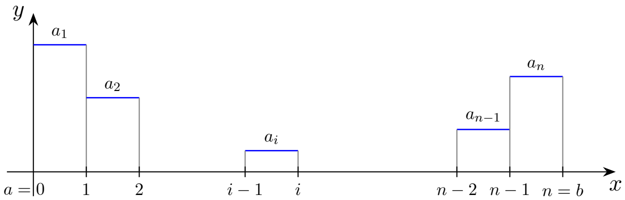
$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f \cdot g}{\int\limits_a^b g}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzések.

1^o Ha az **1^o** állításban $g(x) = 1 \ \big(x \in [a,b]\big)$, akkor

$$m = \inf_{[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f}_{\textbf{integrálközép}} \leq \sup_{[a,b]} f = M.$$

2^o Legyen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ és f **lépcsősfüggvény**: $a := 0$, $b := n$, $f(x) := a_i$ $\big(x \in (i-1, i),\ i = 1, \ldots, n\big)$. ($i$-ben f tetszőleges.)



Ekkor az integrál intervallum szerinti additivitásából, valamint a **2^o** állításból következik, hogy

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{i-1}^{i} a_i\, dx = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Az intergrálközepet tehát a számtani közép általánosításának tekinthetjük. (Az integrál: „átlagolás”.) ∎

Tétel: A Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség.

Tetszőleges $f, g \in R[a,b]$ függvények esetén

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Bizonyítás. Ha $\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0$, akkor az

$$|f(x)g(x)| \le \tfrac{1}{2}\big(f^2(x)+g^2(x)\big) \quad \big(x\in[a,b]\big)$$

egyenlőtlenségből

$$0 \le \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le$$

$$\le \tfrac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx\right] = 0$$

következik, tehát ekkor igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy $\int_a^b f^2$ és $\int_a^b g^2$ közül legalább az egyik 0-tól különböző, például $\int_a^b f^2 > 0$. Minden λ valós paraméter esetén az $F := (\lambda f + g)^2$ függvény integrálható $[a, b]$-n, és az integrálja nemnegatív, azaz

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{R}).$$

A jobb oldal λ-nak egy másodfokú polinomja, és ez a polinom minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív, ami csak úgy lehetséges, ha a diszkriminánsa ≤ 0, azaz

$$\Big(2 \int_a^b fg\Big)^2 - 4\Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b g^2\Big) \leq 0,$$

amiből már következik az állítás. ■

Hasonló ötlettel igazolható az előző állítás „diszkrét” változata.

Tétel: A Cauchy-egyenlőtlenség. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor minden* $a_1, \ldots, a_n$ *és* $b_1, \ldots, b_n$ *valós számra*

$$(*) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Megjegyzések.

1° A $(*)$-ot Cauchy 1821-ben, az integrálokra vonatkozó változatot Bunyakovszkij 1859-ben, Schwarz pedig 1885-ben közölte. (l. Wikipédia)

2° $(*)$ geometriai tartalma, ha $n = 2$: tekintsük az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ síkbeli vektorokat. Ezek hossza $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, skaláris szorzata pedig $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$ (γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög), amit koordinátákkal így fejezhetünk ki: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Mivel $|\cos\gamma| \le 1$, ezért ebből $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \le |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$, azaz

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

következik. ■