1. előadás

$\boxed{1.}$ A tantárgy honlapja:

https://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/index_okt_2020-21-22-23.htm

A honlapon van:

- a követelményrendszer (gyakorlati jegy, vizsgajegy),
- ajánlott irodalmak,
- zárthelyi időpontok,
- az előadások, illetve a gyakorlatok tematikája heti felbontásban,
- részletes előadás-, illetve gyakorlatanyagok,
- egyéb segédanyagok.

$\boxed{2.}$ Előismeretek:

- Matematikai alapok: a középiskolai ismeretek ismétlése, kiegészítése.

$\boxed{3.}$ Előzetes megjegyzések az analízisről:

- Az analízis feladata.
- Az analízis centrális fogalmai (határérték, folytonosság, derivált, integrál).
- Történeti utalások.

$\boxed{4.}$ A félév anyaga:

- A valós számok struktúrája.
- Valós sorozatok.
- Végtelen sorok.
- Függvények határértéke és folytonossága.

$\boxed{5.}$ Az 1. előadás anyaga:

- Néhány függvényekre vonatkozó fogalom felidézése.
- A valós számokkal kapcsolatos ismeretek kibővítése.
  (Az axiomatikus módszerről.)

FÜGGVÉNYEK 1.

Előzetes megjegyzés

Emlékeztetünk a középiskolában megismert függvényfogalomra. *Legyen A és B nemüres halmaz. Ha A minden eleméhez hozzárendeljük B valamelyik elemét, akkor azt mondjuk, hogy megadtunk egy A-n értelmezett B-beli értékeket felvevő **függvényt**.* Itt a **„hozzárendelést”** (tehát magát a függvény fogalmát is) alapfogalomnak kell tekintenünk. Ezt a fogalmat a halmazelmélet fogalmai segítségével már definiálni lehet.

A függvény fogalma

Tetszőleges a, b „objektum” esetén az

$$(a,b) := \big\{\{a\}, \{a,b\}\big\}$$

halmazt **rendezett párnak** nevezzük.

A nemüres A és B halmazok **Descartes-szorzatát** így értelmezzük:

$$A \times B := \big\{(a,b) \mid a \in A \ \text{ és } \ b \in B\big\}.$$

Ennek a halmaznak nemüres r részhalmazait **relációknak** hívjuk. Ha $(a,b) \in r \subset A \times B$, akkor azt mondjuk, hogy az *a elem az r relációban van b-vel.* A

$$\mathcal{D}_r := \big\{a \in A \mid \exists\, b \in B\colon (a,b) \in r\big\},$$

halmazt az r reláció **értelmezési tartományának**, az

$$\mathcal{R}_r := \big\{b \in B \mid \exists\, a \in A\colon (a,b) \in r\big\}$$

halmazt pedig az r reláció **értékkészletének** nevezzük.

1. definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

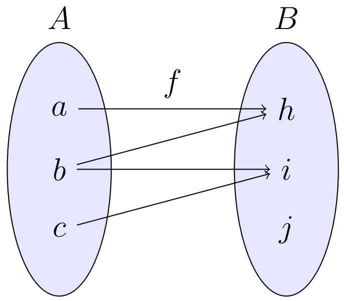
$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

*relációt **függvénynek** nevezzük, ha*

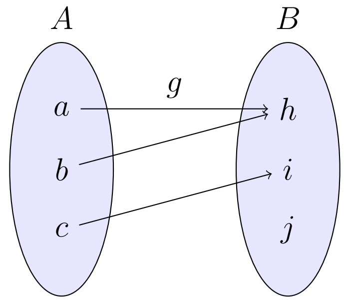
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f \ \text{ esetén } \ \exists!\ y \in \mathcal{R}_f\colon (x,y) \in f.$$

*Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvényértéket **rendeli**.*

Példa. Legyen $A = \{a,\, b,\, c\}$, $B = \{h,\, i,\, j\}$, és tekintsük az alábbi relációkat:



$$f := \Big\{(a, h),\ (b, h),\ (b, i),\ (c, i)\Big\}$$



$$g := \Big\{(a, h),\ (b, h),\ (c, i)\Big\}$$

Az f reláció **nem függvény**, hiszen $(b, h) \in f$, $(b, i) \in f$, de $h \neq i$. Ezzel szemben a g reláció már **függvény**.

Megjegyzés. Az előző definíció azt fejezi ki, hogy a függvény nem más, mint két halmaz közötti egyértelmű hozzárendelés, hiszen minden értelmezési tartománybeli elem egyetlen egyszer szerepelhet a hozzárendelés elemeinek (rendezett párjainak) első komponensében. Más szavakkal, ha a hozzárendelés minden rendezett párját „nyílnak” tekintjük, akkor az értelmezési tartomány minden eleméből egyetlen nyíl indul. ■

A halmazok egyenlőségére vonatkozó megállapodásból következik, hogy az $f \subset A \times B$ és a $g \subset C \times D$ függvények pontosan akkor **egyenlők** (jelben $f = g$), ha

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \qquad \text{és} \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g\colon\ f(x) = g(x).$$

Jelölések:

$$\boxed{f \in A \to B} \quad :\iff \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f \subset A.$$

$$\boxed{f : A \to B} \quad :\iff \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f = A.$$

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy $\mathcal{R}_f = B$, és azt is, hogy $\mathcal{R}_f \subsetneq B$. B-t a függvény **képhalmazának** nevezzük. ■

2. definíció. *Legyen A, B, C adott halmazok, $C \subset A$, továbbá $f\colon A \to B$ és $g\colon C \to B$ úgy, hogy $f(x) = g(x)$ minden $x \in C$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy a g függvény az **f függvény C halmazra való leszűkítése**. Jele: $f_{|C}$.*

Függvények inverze

Ha egy $r \subset A \times B$ relációban szereplő minden rendezett pár komponenseit felcseréljük, azaz minden nyíl irányát megváltoztatjuk, akkor általában más relációt kapunk. Ezt fogjuk **inverz relációnak** nevezni, nevezetesen

$$r^{-1} := \Big\{(b, a) \in B \times A\colon (a, b) \in r\Big\}.$$

Előfordulhat, hogy az r reláció függvény, de az r^{-1} inverz reláció már nem függvény. Ez látható az előző

$$g := \Big\{(a, h),\ (b, h),\ (c, i)\Big\}$$

példában, hiszen a $g^{-1} = \Big\{(h, a),\ (h, b),\ (i, c)\Big\}$ reláció nem függvény. Akkor mondjuk, hogy egy f **függvény invertálható**, ha az f^{-1} inverz reláció függvény. Ez a fogalom az inverz reláció fogalmának bevezetése nélkül is megadható.

3. definíció. *Az $f : A \to B$ függvényt* ***invertálhatónak*** *(**egy-egyértelműnek** vagy **injektívnek**) nevezzük akkor, ha a $\mathcal{D}_f = A$ értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, azaz*

$$(\triangle) \qquad \forall\, x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

Gyakran használjuk a $(\triangle)$ alábbi ekvivalens átfogalmazásait:

- $\boxed{f \text{ invertálható} \iff \forall\, x, t \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } \quad f(x) = f(t) \implies x = t,}$
- f invertálható $\iff$ $\forall\, y \in \mathcal{R}_f$-hez $\exists!\ x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y$.

4. definíció. *Legyen f egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall\, y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists!\ x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y.$$

Ekkor az f ***inverz függvényét*** *(vagy röviden **inverzét**) így értelmezzük:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre} \quad f(x) = y.$$

A definícióból látható, hogy $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, és könnyű meggondolni, hogy $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

5. definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : A \to B$ invertálható függvény* ***bijektív*** *vagy* ***kölcsönösen egyértelmű****, ha $B = \mathcal{R}_f$.*

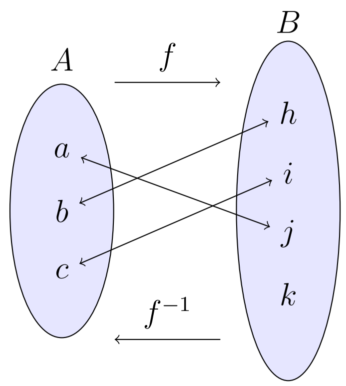
Példa: Az ábrán látható

$$f := \{(a, j),\ (b, h),\ (c, i)\}$$

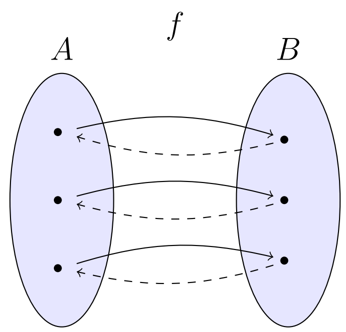
függvény invertálható, és inverze az

$$f^{-1} := \{(j, a),\ (h, b),\ (i, c)\}$$

függvény, de az $f : A \to B$ függvény nem bijektív.



Megjegyzés. Egy $f : A \to B$ bijektív leképezés párba állítja az A és B halmaz elemeit, ami azt sugallja, hogy a két halmaz elemszáma megegyezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **azonos számosságú**. ■



A VALÓS SZÁMOK STRUKTÚRÁJA

A számfogalom fejlődéséről

• A számfogalom kialakulása igen hosszú fejlődési folyamat eredményeként a XIX. század végére alakult ki.

• Jelentős lépés volt az **irracionális számok** felfedezése, ami i.e. V. század környékén a görög tudósok nevéhez fűződik.

• Azt már tudjuk, hogy a **racionális számok** és a **valós számok** sok hasonló tulajdonsággal rendelkeznek. *De mi a meghatározó különbség a* ***racionális*** *és az* ***irracionális*** *számok között?* A válasz megtalálása tette lehetővé a valós számok **axiomatikus megalapozását**. A számfogalom egzakt módon a halmazelmélet alapján is felépíthető. Érdekes matematikatörténeti tény az, hogy „csak” az 1860-as évektől kezdve jelentek meg ilyen egymással ekvivalens felépítések (axiómarendszerek), többek között *Karl Weierstrass* (1815–1897) 1863-ban, *Richard Dedekind* (1831–1916) 1872-ben és *Georg Cantor* (1845–1918) szintén 1872-ben közölt dolgozataikban. *A valós számok fogalma tehát 1870 körül érte el a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel.*

A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere

Megjegyzés. Axiomatikus módszer a matematikában.

A módszer szükségessége: i.e. IV. században az ókori görög matematikusok; a geometria axiomatikus megalapozása, *Euklidész Elemek* című könyve.

A módszer lényege:

- alapfogalmak, axiómák;
- új fogalmak (definíciók) bevezetése;
- új állítások, tételek megfogalmazása és bizonyítása. ■

Az alábbiakban a **valós számok axiomatikus megalapozását** fogjuk követni. Ebben a felépítésben nem tisztázzuk, hogy *mik* a valós számok, csak azt soroljuk fel, hogy azok *milyen tulajdonságokat* elégítenek ki. A **valós szám** fogalmát tehát *alapfogalomnak* tekintjük. Azokat a tulajdonságokat, amelyeket a felépítés során elfogadunk, a valós számok *axiómáinak* nevezzük.

Megjegyzés. A valós számok struktúrája a halmazelmélet alapján – meglehetősen hosszú, matematikailag egzakt – **konstruktív módon** is felépíthető. ■

Elfogadjuk, hogy létezik a valós számok – $\mathbb{R}$ szimbólummal jelölt – halmaza, amelyet az alábbi tulajdonságok jellemeznek.

$\boxed{\text{I.}}$ Testaxiómák:

$\mathbb{R}$-en értelmezve van az összeadás és a szorzás művelete, és ezekre nézve $\mathbb{R}$ testet alkot. Ez azt jelenti, hogy:

I.1. értelmezve van egy

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad +(x, y) =: x + y$$

függvény (az **összeadás művelete**), amelyre a következők teljesülnek:

i) *kommutativitás*: $x + y = y + x$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

ii) *asszociativitás*: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$;

iii) *nullelem létezése*: létezik olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + 0 = x$;

iv) *ellentett létezése*: minden x valós számhoz létezik olyan $\tilde{x}$ valós szám úgy, hogy $x + \tilde{x} = 0$, ezt $-x$-szel fogjuk jelölni;

I.2. értelmezve van továbbá egy

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cdot(x, y) =: x \cdot y =: xy$$

függvény (a **szorzás művelete**), amelyre a következők teljesülnek:

i) *kommutativitás*: $x \cdot y = y \cdot x$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

ii) *asszociativitás*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$;

iii) *egység létezése*: létezik olyan $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ elem, hogy $1 \cdot x = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén;

iv) *reciprok létezése*: minden nullától különböző x valós számhoz létezik olyan $\hat{x}$ valós szám, hogy $x \cdot \hat{x} = 1$, ezt $\frac{1}{x}$-szel fogjuk jelölni.

I.3. *Disztributivitás*: Minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

$\boxed{\text{II.}}$ **Rendezési axiómák:**

$\mathbb{R}$-en értelmezve van egy $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (**kisebb-egyenlőnek** nevezett) reláció, amelyre a következők teljesülnek:

II.1. A $\leq$ reláció teljes lineáris rendezés $\mathbb{R}$-en, azaz

i) *reflexív*: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$;

ii) *antiszimmetrikus*: ha $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$;

iii) *tranzitív*: ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$;

iv) *dichotóm*: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

II.2. A $\leq$ rendezést a műveletekkel az alábbi szabályok kapcsolják össze:

i) $x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$,

ii) $0 \leq x$ és $0 \leq y \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**):

Tegyük fel, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

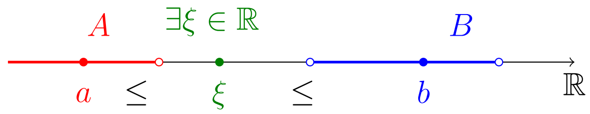
- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$,
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R} : \quad \forall\, a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén } \ a \leq \xi \leq b.$$

Megjegyzések.

1ᵒ A „szétválasztási axióma” elnevezést támasztja alá az alábbi ábra:



Azt is mondhatjuk, hogy a ξ valós szám „szétválasztja” az A és a B halmazt. A „teljességi axióma” szóhasználatot hamarosan megindokoljuk.

2ᵒ Mindhárom axióma szükséges a valós számok egyértelmű értelmezésére. Pl. a testaxiómák nem elegendőek a valós számok struktúrájának pontos megadására, hiszen tudunk olyan testet megadni, amelynek csak két eleme van. Ehhez vegyük az $F := \{0, 1\}$ halmazt az alábbi műveletekkel:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Továbbá, a $\mathbb{Q}$ racionális számok halmaza olyan test, amire igazak a rendezési axiómák, de nem igaz a teljességi axióma. Ezt később látni fogjuk.

3ᵒ Röviden azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}$ **egy rendezett teljes test**. Igazolható, hogy „lényegében” egy olyan struktúra van, amelyre a fenti axiómák teljesülnek.

4ᵒ Az testaxiómákból olyan ismert tulajdonságok levezethetők, mint a nevezetes azonosságok, a nullelem, egység, ellentett és reciprok egyértelmű létezése, $-x = (-1) \cdot x$ $(x \in \mathbb{R})$, és a zérusosztómentesség vagyis

$$xy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ vagy } \ y = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

A rendezési axiómáknak köszönhetően tudjuk a valós számokat egy számegyenesen ábrázolni és az egyenlőtlenségekre vonatkozó, ismert szabályokat igazolni. A teljességi axióma garantálni fogja, hogy a számegyenesen történő ábrázoláskor a számegyenes egyik pontja sem maradjon ki.

5ᵒ Az összeadás és a szorzás mellett további műveleteket is értelmezhetünk: A **kivonás** művelete az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y := x + (-y)$$

függvény. Az $x - y$ számot x és y **különbségének** nevezzük. Az **osztás** művelete a következő függvény:

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}.$$

Az $\frac{x}{y}$ számot x és y **hányadosának** mondjuk.

A műveleti axiómákban megfogalmazott tulajdonságokból a valós számok jól ismert és sokszor alkalmazott tulajdonságai mind **levezethetők**.

6ᵒ A $\leq$ rendezési reláció mellett további relációkat is értelmezhetünk:

$<$ („kisebb”): $x \leq y$ és $x \neq y$,

$\geq$ („nagyobb vagy egyenlő”): $x \geq y \iff y \leq x$,

$>$ („nagyobb”): $x > y \iff x \geq y$ és $x \neq y$.

A rendezés egyéb jól ismert tulajdonságait is ismertnek tekintjük. ■

A test- és a rendezési axiómák következményei

A test- és a rendezési axiómák felhasználásával **definiálhatjuk** $\mathbb{R}$ jól ismert részhalmazait.

A természetes számok halmaza

6. definíció. *A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz **induktív halmaz**, ha*

- $0 \in H$,
- *minden $x \in H$ esetén $x + 1 \in H$.*

Nem nehéz igazolni, hogy

1^o $\mathbb{R}$ induktív halmaz,

2^o induktív halmazok közös része is induktív halmaz.

7. definíció. *Az $\mathbb{R}$ halmaz összes induktív részhalmazának a közös részét a **természetes számok halmazának** nevezzük, és az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük, azaz*

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{H \subset \mathbb{R} \\ H \text{ induktív}}} H\,.$$

A rendezési axiómákból igazolható, hogy $0 < 1$. Ebből következik, hogy a megszokott tízes számrendszerben alkalmazott

$$2 := 1 + 1, \qquad 3 := 1 + 1 + 1, \qquad 4 := 1 + 1 + 1 + 1, \quad \text{stb.}$$

jelölés mindig különböző számokat generál. Tehát $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

A pozitív egész számok halmaza az $\mathbb{N}^+ := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ halmazt jelenti.

Most megmutatjuk azt, hogy a valós számok axiómarendszeréből hogyan vezethető le a teljes indukciós bizonyítási módszernek a „létjogosultsága”.

1. tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) *$A(0)$ igaz,*

(ii) *ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n + 1)$ is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Bizonyítás. Legyen

$$S := \big\{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ igaz}\big\}.$$

Ekkor $\underline{S \subset \mathbb{N}}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n + 1)$ is igaz, ezért $n + 1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\underline{\mathbb{N} \subset S}$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz.

Teljes indukcióval igazolható, hogy két természetes szám összege is természetes szám. Valóban, ha az $A(n)$ állítás azt jelenti, hogy $n+m \in \mathbb{N}$ minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

i) $A(0)$ igaz, mert $0+m=m \in \mathbb{N}$.

ii) Ha $A(n)$ igaz, azaz $n+m \in \mathbb{N}$ minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $A(n+1)$ is igaz, mert $(n+1)+m=n+(m+1) \in \mathbb{N}$, mivel $m+1 \in \mathbb{N}$, hiszen $\mathbb{N}$ induktív halmaz.

Így $A(n)$ igaz minden n természetes számra, tehát $n+m \in \mathbb{N}$ minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

Hasonlóan igazolható, hogy két természetes szám szorzata is természetes szám. Azonban két természetes szám különbsége nem biztos, hogy természetes szám.

$\mathbb{R}$ további részhalmazai

A „szokásos módon” értelmezzük a következő halmazokat:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\right\}$ az **egész** számok halmaza,

$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$ a **racionális** számok halmaza,

$\mathbb{Q}^* := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ nem racionális}\right\}$ az **irracionális** számok halmaza.

A test- és a rendezési axiómákból levezethetők az ezekben a halmazokban értelmezett műveletekre és a rendezésre vonatkozó ismert szabályok.

A valós számok kibővített struktúrája

Több szempontból is hasznos, ha a valós számokat kibővítjük a $+\infty$ (plusz végtelen) és a $-\infty$ (mínusz végtelen) szimbólumokkal. Ezt a halmazt a **kibővített valós számok halmazának** nevezzük, és így jelöljük:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ is egy összetett struktúra. Ki fogjuk terjeszteni az $\mathbb{R}$-beli műveleteket és a rendezést a kibővített valós számokra megőrizve az $\mathbb{R}$-en értelmezett struktúrát. A műveletekről csak később lesz szó. A $<$ relációt az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazra úgy terjesztjük ki, hogy

$$-\infty < x < +\infty$$

legyen igaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha hangsúlyozni akarjuk a különbséget a valós számok, valamint a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumok között, akkor az előbbieket **végesnek** nevezzük. Ezt az elnevezést nem szabad összetéveszteni a **véges halmaz** fogalmával. Azt mondjuk, hogy egy **halmaz véges** (másként fogalmazva a **halmaz véges számosságú**, ha a halmaz üres, vagy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám, hogy létezik egy bijekció a halmaz és az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz között. Ekkor n-et a halmaz elemszámának nevezzük. Ha egy halmaz nem véges, akkor **végtelennek** vagy **végtelen számosságúnak** mondjuk. Egyszerű meggondolni pl. azt, hogy az $\mathbb{N}$ egy végtelen halmaz.

A teljességi axióma következményei

A szuprémum elv

8. definíció.

1° *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak **van maximuma** vagy **van legnagyobb eleme**, ha*

$$\exists\, \alpha \in H, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } x \leq \alpha.$$

*Ekkor α-t a H **maximumának** vagy **legnagyobb elemének** nevezzük, és a* $\boxed{\max H}$ *szimbólummal jelöljük.*

2° *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak **van minimuma** vagy **van legkisebb eleme**, ha*

$$\exists\, \beta \in H, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } \beta \leq x.$$

*Ekkor β-t a H **minimumának** vagy **legkisebb elemének** nevezzük, és a* $\boxed{\min H}$ *szimbólummal jelöljük.*

Nem minden nemüres H halmaznak van legnagyobb vagy legkisebb eleme. Világos, hogy

$$\boxed{\nexists \max H} \iff \begin{cases} \forall \alpha \in H\text{-hoz } \ \exists x \in H: \ x > \alpha \\ (\text{„bármely } H\text{-beli } \alpha \text{ elemnél van nagyobb } H\text{-beli } x \text{ elem”}), \end{cases}$$

$$\boxed{\nexists \min H} \iff \begin{cases} \forall \beta \in H\text{-hoz } \ \exists x \in H: \ \beta > x \\ (\text{„bármely } H\text{-beli } \beta \text{ elemnél van kisebb } H\text{-beli } x \text{ elem”}). \end{cases}$$

Például, ha $H := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$, akkor $\max H = 1$, hiszen $1 \in H$ és $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\frac{1}{n} \leq 1$, de

$$\nexists \min H, \quad \text{mert } \forall x \in H\text{-hoz } \exists n \in \mathbb{N}^+ \colon x = \tfrac{1}{n} > \tfrac{1}{n+1} \in H.$$

Hasonlóan, ha $H := \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$, akkor $\min H = 0$, de $\nexists \max H$.

9. definíció.

1° *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz **felülről korlátos**, ha*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } x \leq K.$$

*Az ilyen K számot a H halmaz egy **felső korlátjának** nevezzük.*

2° *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz **alulról korlátos**, ha*

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } k \leq x.$$

*Az ilyen k számot a H halmaz egy **alsó korlátjának** nevezzük.*

3° *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz **korlátos**, ha alulról is, felülről is korlátos azaz*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } |x| \leq K.$$

Megjegyzés. Ha K a H halmaznak felső korlátja, akkor $\forall K' > K$ valós szám is felső korlát lesz. Hasonlóan, ha k a H-nak alsó korlátja, akkor $\forall k' < k$ valós szám is alsó korlát lesz. ■

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy egy nemüres felülről korlátos halmaz felső korlátjai között van legkisebb, vagyis a **felső korlátok halmazának van minimuma**.

2. tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

(i) *$H \neq \emptyset$ és*

(ii) *H felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \colon a \leq \xi \leq K \qquad (\forall a \in A, \ \forall K \in B).$$

Erre a ξ-re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H-nak, hiszen $a \leq \xi$ minden $a \in A$ esetén,
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja.

A fenti bizonyítás értelemszerű módosításával megkapjuk az előző tételnek az alsó korlátokra vonatkozó párját.

3. tétel. *Minden nemüres és alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja.*

10. definíció.

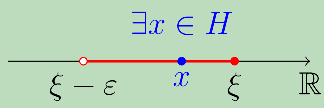
1° *A felülről korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját H* ***szuprémumának*** *nevezzük, és a $\boxed{\sup H}$ szimbólummal jelöljük.*

2° *Az alulról korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját H* ***infimumának*** *nevezzük, és az $\boxed{\inf H}$ szimbólummal jelöljük.*

A szuprémum és infimum fogalmát egyenlőtlenségekkel is ki tudjuk fejezni

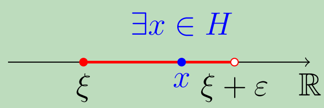
4. tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \ \textit{felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ x \leq \xi; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \ \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



5. tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \ \textit{alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ \xi \leq x; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \ \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



A szuprémum és az infimum értelmezését kiterjesztjük **nem korlátos** halmazokra is:

- ha a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a **szuprémuma plusz végtelen**, és ezt úgy jelöljük, hogy

$$\sup H := +\infty.$$

- ha a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy az **infimuma mínusz végtelen**, és ezt úgy jelöljük, hogy

$$\inf H := -\infty.$$

Megjegyzés. A fentiek alapján tehát minden nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz estén beszélhetünk szuprémumról és infimumról. Világos, hogy

- $\boxed{\exists \max H \quad \Longleftrightarrow \quad \sup H \in H \ \text{ és ekkor } \ \sup H = \max H}$,

- $\boxed{\exists \min H \quad \Longleftrightarrow \quad \inf H \in H \ \text{ és ekkor } \ \inf H = \min H}$.

A szuprémum a maximum általánosításaként fogható fel. Láttuk, hogy egy $\mathbb{R}$-beli halmaznak általában nincsen maximuma. Ilyenkor ennek szerepét a szuprémum veszi át. Hasonló érvényes a minimum általánosításának tekinthető infimumra. ∎

A szuprémum elvet a teljességi axióma alapján bizonyítottuk be, azaz a szuprémum elv a teljességi axiómából következik. Ez az állítás megfordítható abban az értelemben, hogy ha egy struktúra rendelkezik a test- és a rendezési axiómákkal, illetve igaz még a szuprémum elv, akkor a teljességi axiómában szereplő tulajdonság szintén teljesül. Ez utóbbi fordított állítást nem fogjuk igazolni.

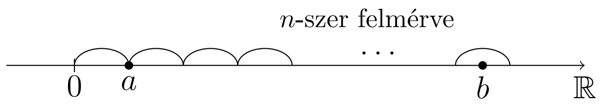
6. tétel. *A teljességi axióma ekvivalens a szuprémum elvvel.*

Az arkhimédészi tulajdonság és a Cantor-tulajdonság

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor egy szám n-szerese úgy tekinthető, mint a szám önmagával vett n-szeres összege. Ha $a > 0$, akkor a számegyenesen ábrázolva látható, hogy az

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-szer}}$$

alakú számok nagyon nagy értékek vehetnek fel, amelyek bármely b valós számnál is nagyobbak.



Ezt állítja az arkhimédészi tulajdonság.

7. tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall\, a > 0 \quad \textit{és} \quad \forall\, b \in \mathbb{R} \quad \textit{esetén} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \ \textit{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists\, a > 0 \ \text{ és } \ \exists\, b \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, n \in \mathbb{N}: \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv szerint

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ n_0 \cdot a > \xi - a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(n_0 + 1) \cdot a \in H$, tehát $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$, hiszen ξ felső korlátja a H halmaznak. Így ellentmondáshoz jutottunk.

Következmények.

1^o $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$. $\qquad (\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $1 < n \cdot \varepsilon)$

2^o Az $\mathbb{N}$ halmaz felülről nem korlátos, $\qquad (\forall\, b \in \mathbb{R}$-hez $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $b < n \cdot 1 = n)$. ■

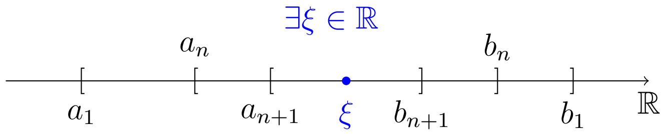
Az **intervallumokat** a „szokásos” módon fogjuk értelmezni és jelölni. Pl. ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor az a és b számok által határolt zárt intervallum:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

a nyílt intervallum pedig:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

A következő, ún. Cantor-tulajdonságot úgy szoktuk szavakba foglalni, hogy *egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok közös része nem üres.* Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



8. tétel (A Cantor-tulajdonság). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Először belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R}: \; a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \in [a_n, b_n] \;\; \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

9. tétel. *Az arkhimédészi- és a Cantor-tulajdonság együtt ekvivalens a teljességi axiómával.*

Bizonyítás.

$\boxed{\Longleftarrow}$ A teljességi axióma $\Longrightarrow$ az arkhimédészi + a Cantor-tulajdonság. ✓

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nem bizonyítjuk.

10. tétel. *A teljességi axióma* $\iff$ *A szuprémum elv* $\iff$
$\iff$ *Az arkhimédészi- + Cantor-tulajdonság.*

A gyökvonás

A valós számok axiómarendszeréből már **bebizonyítható**, hogy minden $A \geq 0$ valós számnak **létezik** n-edik gyöke ($\mathbb{N} \ni n \geq 2$).

11. tétel (Gyökvonás). *Minden $A \geq 0$ valós számhoz és minden $n \geq 2$ természetes számhoz létezik egyetlen olyan $\alpha \geq 0$ valós szám, amelyre $\alpha^n = A$. Ezt a nemnegatív α számot az A nemnegatív szám* ***n-edik gyökének*** *nevezzük, és az $\sqrt[n]{A}$ vagy az $A^{\frac{1}{n}}$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.*

Bizonyítás. Egy nemnegatív A szám n-edik gyökének létezését csak később fogjuk igazolni, ahol egy konstruktív eljárást is adunk az $\sqrt[n]{A}$ közelítő kiszámítására. Az egyértelműség abból következik, hogy

$$(**) \qquad 0 \leq \alpha < \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha^n < \beta^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Így ha $\alpha, \beta \geq 0$ és $\alpha^n = \beta^n = A$, akkor $\alpha = \beta$. $(**)$ könnyen igazolható teljes indukcióval a rendezési axiómák segítségével.

A racionális és az irracionális számok halmaza

12. tétel. *$\mathbb{Q}$ az $\mathbb{R}$-beli műveletekkel és rendezéssel*

1º *rendezett test, azaz teljesülnek benne a test- és a rendezési axiómák,*

2º *$\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, mert van irracionális szám,*

3º *$\mathbb{Q}$-ban a teljességi axióma nem teljesül.*

Bizonyítás. (Vázlat.)

1º Elég azt igazolni, hogy bármely két racionális szám összege is és szorzata is racionális szám. ✓

2º Például $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ és $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ✓

3º Megmutatjuk, hogy a $\boxed{\text{III.}}$ axiómában megfogalmazott tulajdonság nem igaz, ha abban $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$-t írunk.

Az állítást indirekt módon igazoljuk. Legyen

$$A := \left\{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \text{ és } a^2 < 2\right\} = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid 0 < a < \sqrt{2}\right\},$$

$$B := \left\{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \text{ és } b^2 > 2\right\} = \left\{b \in \mathbb{Q} \mid b > \sqrt{2}\right\}.$$

Ekkor $\forall a \in A$ és $\forall b \in B$ esetén $a \leq b$. Most $\sqrt{2}$ az egyetlen olyan valós szám, amelyik szétválasztja az A és a B halmazt, és $\sqrt{2}$ nem racionális.

A következő állítást úgy szokás kifejezni, hogy a racionális, illetve az irracionális számok halmaza **„mindenütt sűrűn”** helyezkednek el a számegyenesen.

13. tétel.

1^o *Bármely két valós szám között van racionális szám.*

2^o *Bármely két valós szám között van irracionális szám.*

3^o *Minden nemelfajuló $\mathbb{R}$-beli intervallum végtelen sok racionális számot és végtelen sok irracionális számot tartalmaz.*

Szemléltessük a számegyenesen a racionális számokat. Az a tény, hogy $\mathbb{Q}$-ban a $\boxed{\text{III.}}$ axiómában megfogalmazott tulajdonság nem teljesül azt jelenti, hogy a számegyenesen a racionális számok között bizonyos „hézagok” vannak, annak ellenére, hogy bármely két racionális szám között van racionális szám. Az irracionális számok kitöltik ezeket a „hézagokat”. A $\boxed{\text{III.}}$ axiómát ezért nevezzük **„teljességi axiómának”**.

Megjegyzés. **Halmazok számosságáról.** Fontos különbség a racionális és az irracionális számok között az, hogy az utóbbiakból „lényegesen több” van. Első hallásra ez a kijelentés meglepőnek tűnik, hiszen könnyű meggondolni, hogy mindkettőből végtelen sok van, és a korábbi tanulmányaikban „általában” racionális számokkal találkoztak, továbbá csak „néhány” irracionális számot (pl. $\sqrt{2}$-őt) ismertek meg.

A halmazelmélet megalapozója *Georg Cantor* (1845–1918) német matematikus fedezte fel azt, hogy végtelen elemszámú halmazok között is értelmezhetők az ugyanakkora, a kisebb, ill. a nagyobb fogalmak. (Cantor előtt a matematika azt az álláspontot követte, hogy a végtelenek között nem lehet értelmesen különbséget tenni.) Elsőként azt a gondolatot vetette fel, hogy **két halmaz azonos számosságú** (más szóval **ekvivalens**), *ha a két halmaz között bijekció létesíthető*, vagyis az elemeik párba állíthatók.

Azonban a halmazok ekvivalenciájának van egy furcsának tűnő tulajdonsága. Minden végtelen halmaz ekvivalens egy valódi részhalmazával. Nem nehéz meggondolni pl., hogy a természetes számok halmaza ekvivalens a P nemnegatív páros számok halmazával, hiszen $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in P$ egy bijekció. A végtelen halmazok ilyen „viselkedése” olyan paradoxonokhoz vezet, mint a híres Hilbert szállodája (lásd https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY). A $\mathbb{Q}^+$ és az $\mathbb{N}^+$ halmazok is ekvivalensek, hiszen az a leképzés, ami minden p/q pozitív racionális számhoz rendeli a $2p(2q+1)$ természetes számot, egy bijekció $\mathbb{Q}^+$ és $\mathbb{N}^+$ között. Nem nehéz meggondolni, hogy a $\mathbb{Q}$ és az $\mathbb{N}^+$ halmazok is ekvivalensek.

Az $\mathbb{N}^+$ halmazzal ekvivalens halmazokat **megszámlálhatóan végtelen halmaznak** nevezzük. Ez azt jelenti, hogy van olyan eljárás, ami előállítja a halmaz elemeit úgy, hogy egy tetszőleges halmazbeli elem véges sok lépés után sorra kerül. Ezzel szemben Q^* nem megszámlálhatóan végtelen halmaz, és természetesen nem is véges. Igazolható, hogy a Q^* és az $\mathbb{R}$ halmazok között bijekció létesíthető. Az $\mathbb{R}$-rel ekvivalens halmazokat **kontinuum számosságúnak** nevezzük. ■