2. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 1.

Emlékeztető

Definició. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban **differenciálható** (vagy **deriválható**), ha*

$$\text{létezik és véges a} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{határérték.}$$

*Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és **az f függvény a pontbeli deriváltjának** (vagy **differenciálhányadosának**) nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boxed{f \in D\{a\}}$.

Jegyezzük meg, hogy a derivált definíciójában $f \in C\{a\}$ esetén $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről (ez, mint tudjuk bármi lehet) van szó.

Világos, hogy

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Definició. *Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor az*

$$\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

*függvényt az f **deriváltfüggvényének** (vagy **differenciálhányados-függvényének**) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük.*

Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata. *Tegyük fel, hogy $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int} \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$ pontban. Ekkor*

1° $c \cdot f \in D\{a\}$ *és* $\big(c \cdot f\big)'(a) = c \cdot f'(a) \quad (c \in \mathbb{R})$,

2° $f + g \in D\{a\}$ *és* $\big(f + g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

3° $f \cdot g \in D\{a\}$ *és* $\big(f \cdot g\big)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,

4° *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Az összetett függvény deriválása. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ és egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és*

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)\,.$$

Sokszor többszörösen összetett függvényt kell deriválni. Az ilyen esetekben a fenti tételt többször egymás után „kívülről befele haladva” alkalmazzuk.

Elemi függvények deriváltjai. L. az 1. előadást.

1. feladat. *A definíció alapján lássuk be, hogy az*

$$f(x) := \sqrt{x^2-1} \quad \big(x \in [1,+\infty)\big)$$

függvény deriválható minden $a \in (1,+\infty)$ pontban, és számítsuk ki $f'(a)$-t!

Megoldás. Világos, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ feltétel teljesül. Mivel

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \\
&\quad \Big(\text{mivel} \ \ (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2-\beta^2\Big) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x^2-1)-(a^2-1)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x+a}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \frac{a+a}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \frac{\cancel{2}\,a}{\cancel{2}\sqrt{a^2-1}} = \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2-1}},
\end{aligned}$$

ezért

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{x-a} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2. feladat. *Számítsuk ki $f'(x)$-et, ha*

(a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad (x > 0)$,

(c) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5\,x^5} \quad \big(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$,

(d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \quad \big(x > 0\big)$, $a > 0$ *paraméter,*

(e) $f(x) := x^2 \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := \dfrac{x^3+2}{x^2+x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $f(x) := (5x^2+3x)^{2023} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(h) $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad (x > 0)$,

(i) $f(x) := \sin \dfrac{x^2+1}{x+3} \quad (x > -3)$,

(j) $f(x) := \sin^2\Big(\ln\sqrt{1+\cos^2 x} + 1\Big) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. A megadott függvények a megadott x pontokban deriválhatók (l. az elemi függvények deriváltjait, az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára, valamint az összetett függvény deriválására vonatkozó tételeket).

(a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})\,,$

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = \left(4x^3 - 2x^2 + 5x - 3\right)' = 4 \cdot \left(x^3\right)' - 2 \cdot \left(x^2\right)' + 5 \cdot (x)' - 3' =$$
$$= 4 \cdot 3\,x^2 - 2 \cdot 2\,x + 5 \cdot 1 + 0 = 12\,x^2 - 4\,x + 5.$$

(b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \;\; (x > 0)\,,$

A hatványazonosságok felhasználásával először átalakítjuk $f(x)$-et:

$$\sqrt{x\,\sqrt{x\,\sqrt{x}}} = \sqrt{x\,\sqrt{x \cdot x^{1/2}}} = \sqrt{x \cdot \left(x^{3/2}\right)^{1/2}} = \left(x \cdot x^{3/4}\right)^{1/2} = \left(x^{7/4}\right)^{1/2} = x^{7/8}.$$

Így

$$f'(x) = \left(\sqrt{x\,\sqrt{x\,\sqrt{x}}}\right)' = \left(x^{7/8}\right)' = \frac{7}{8} \cdot x^{7/8-1} = \frac{7}{8} \cdot x^{-1/8} = \frac{7}{8\,\sqrt[8]{x}}\,.$$

(c) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5\,x^5} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right),$

Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$f'(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5\,x^5}\right)' = \left(x^3\right)' + \left(x^{-2}\right)' - \frac{1}{5} \cdot \left(x^{-5}\right)' =$$
$$= 3\,x^2 + (-2) \cdot x^{-3} - \frac{1}{5} \cdot (-5) \cdot x^{-6} = 3\,x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}\,.$$

(d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \;\; \left(x > 0\right), \;\; a > 0 \;\; \text{paraméter}\,,$

Tetszőleges $a > 0$ paraméter esetén minden $x > 0$ pontban

$$f'(x) = \left(x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)' = (x^a)' + (a^x)' + a \cdot (x)' + \frac{1}{a} \cdot (x)' + a \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$
$$= a\,x^{a-1} + a^x \cdot \ln a + a + \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\,.$$

(e) $f(x) := x^2 \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R})\,,$

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2\,x \sin x + x^2 \cdot \cos x\,.$$

(f) $\underset{\sim\sim\sim}{f(x) := \dfrac{x^3+2}{x^2+x+5} \quad (x \in \mathbb{R})}$,

A nevezőnek nincs valós gyöke ($D = 1^2 - 4 \cdot 5 < 0$), ezért az idézett eredmények alapján $f \in D\{x\}$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\underset{\sim\sim}{f'(x)} = \left(\frac{x^3+2}{x^2+x+5}\right)' = \frac{\left(x^3+2\right)' \cdot \left(x^2+x+5\right) - \left(x^3+2\right) \cdot \left(x^2+x+5\right)'}{\left(x^2+x+5\right)^2} =$$

$$= \frac{3\,x^2 \cdot \left(x^2+x+5\right) - \left(x^3+2\right) \cdot \left(2\,x+1\right)}{\left(x^2+x+5\right)^2} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{x^4+2x^3+15x^2-4x-2}{\left(x^2+x+5\right)^2}}.$$

(g) $\underset{\sim\sim\sim}{f(x) := (5x^2+3x)^{2023} \quad (x \in \mathbb{R})}$,

Az f függvény a $h(t) := t^{2023}$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := 5x^2 + 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^{2023} = \left(5x^2+3x\right)^{2023} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 10x + 3$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = 2023t^{2022}$ $(\forall\, t \in \mathbb{R})$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek. Így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f = h \circ g \in D\{x\}$ és

$$\underset{\sim\sim}{f'(x)} = \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 2023\,\big(g(x)\big)^{2022} \cdot g'(x) =$$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{2023\left(5x^2+3x\right)^{2022} \cdot \big(10x+3\big)}.$$

(h) $\underset{\sim\sim\sim}{f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad (x > 0)}$,

Az f függvény a $h(t) := \sqrt{t}$ $(t > 0)$ külső és a $g(x) := x + \sqrt{x}$ $(x > 0)$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Mivel $\forall\, x > 0$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ $(\forall\, t > 0)$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei ezekben a pontokban teljesülnek. Így minden $x > 0$ esetén $f = h \circ g \in D\{x\}$ és

$$\underset{\sim\sim}{f'(x)} = \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) =$$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}.$$

(i) $f(x) := \sin \dfrac{x^2+1}{x+3} \quad (x > -3)\,,$

Az f függvény a $h(t) := \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := \dfrac{x^2+1}{x+3}$ $(x > -3)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f \in D\{x\}$ $\forall\, x > -3$ esetén, és a deriváltfüggvény

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sin \frac{x^2+1}{x+3}\right)' = \left(\cos \frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)' = \\
&= \left(\cos \frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{\left(x^2+1\right)' \cdot (x+3) - \left(x^2+1\right) \cdot \left(x+3\right)'}{(x+3)^2} = \\
&= \left(\cos \frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{2x \cdot (x+3) - \left(x^2+1\right) \cdot 1}{(x+3)^2} = \left(\cos \frac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}\,.
\end{aligned}$$

(j) $f(x) := \sin^2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x} + 1\right) \quad (x \in \mathbb{R})\,.$

Többszörösen összetett függvényről van szó. Az elemi függvények deriváltjait, valamint az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt többször egymás után (kívülről befelé haladva) alkalmazva azt kapjuk, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sin^2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' = \\
&= 2\left(\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right) \cdot \left(\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' = \\
&= 2\left(\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right) \cdot \left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)' = \\
&= \left(\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)' = \\
&= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot (1+\cos^2 x)' = \\
&= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = \\
&= -\frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{2\left(1+\cos^2 x\right)} \cdot \sin 2x\,.
\end{aligned}$$

3. feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket:*

(a) $f(x) := \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1-x} \qquad (x>0)$,

(b) $f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \qquad (x>1)$.

Megoldás.

Megjegyzés. Olyan hatványokról van szó, amelyeknél az alap és a kitevő is változik, vagyis az f függvény

$$f(x) = \left(g(x)\right)^{h(x)}$$

alakú, ahol a $g(x)$ alap pozitív. Az ilyen esetekben az átalakításhoz célszerű felhasználni a következő ötletet: *írjuk fel a $g(x)$ alapot e hatványaként* az

$$a = e^{\ln a} \quad (a>0)$$

azonosság felhasználásával. Így azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \left(g(x)\right)^{h(x)} = \left(e^{\ln g(x)}\right)^{h(x)} = e^{h(x)\cdot \ln g(x)}.$$

Az f függvényt összetett függvényként fogjuk fel. Nevezetesen f az exp külső és a $h\cdot(\ln\circ g)$ belső függvény kompozíciója.

(a) $f(x) := \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1-x} \quad (x>0)$,

Az $a = e^{\ln a}$ $(a>0)$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x} = \left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^{1-x} = e^{(1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \exp\left((1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Az f függvény tehát az exp külső és az $(1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények minden $x>0$ pontban deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint f valóban deriválható minden $x>0$ pontban, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'\left((1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left((1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \\ &= \exp\left((1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot \\ &\cdot\left((-1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (1-x)\cdot\ln'\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'\right) = \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x}\cdot\left(-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1-x}{x\,(x+1)}\right). \end{aligned}$$

(b) $f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \quad (x>1)$,

Mivel minden $x>1$ pontban

$$f(x) = \left(\ln x\right)^{x+1} = \left(e^{\ln(\ln x)}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\cdot\ln(\ln x)} = \exp\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big),$$

ezért az elemi függvények deriváltjainak és a deriválási szabályoknak a felhasználásával azt kapjuk, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x>1$ pontban, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)\cdot\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)' = \\ &= \exp\Big((x+1)\cdot\ln(\ln x)\Big)\cdot\Big(1\cdot\ln(\ln x) + (x+1)\cdot\ln'(\ln x)\cdot\ln' x\Big) = \\ &= \left(\ln x\right)^{x+1}\cdot\left(\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\right). \end{aligned}$$

Megjegyzés. A logaritmikus deriválás. Egy *pozitív* f függvény deriváltjának kiszámolását időnként leegyszerűsíthetjük azzal, hogy az f deriváltja helyett a logaritmusának, vagyis az $\ln f$ függvénynek a deriváltját határozzuk meg, és alkalmazzuk az

$$\left(\ln f\right)' = \frac{f'}{f}$$

egyenlőséget. (Ez a helyzet pl. akkor, ha $(\ln f)'$-t egyszerűbb kiszámítani, mint f'-t.)

Ezzel a módszerrel az

$$f(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)} \qquad (g(x) > 0)$$

alakú függvények deriváltját így számoljuk ki:

$$\ln\big(f(x)\big) = h(x)\ln\big(g(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ln\big(g(x)\big) + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\ln\big(g(x)\big) + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right).$$