10. előadás
A határozott integrál 4.

Emlékeztető:

- Monoton függvények integrálhatósága.
- Egyenletes folytonosság.
- Folytonos függvények integrálhatósága.

A határozott integrál 4.

1. Az integrál kiszámítása

A határozott integrál kiszámítása még a legegyszerűbb függvények esetén is hosszadalmas és bonyolult feladat.

Most egy olyan alapvető tétellel ismerkedünk meg, amely ezt a feladatot lényegesen megkönnyíti.

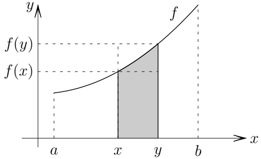
Az eredmény motiválásához az egyszerűség kedvéért t.f.h. $f \geq 0$, $\nearrow$ és folytonos az $[a, b]$ intervallumon. Jelöljük $T(x)$-szel az $[a, x]$ intervallum fölötti síkrész területét, azaz legyen

$$T(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \big(x \in [a, b]\big).$$

Ha $a \le x < y \le b$, akkor $T(y) - T(x)$ egy olyan síkidom területe, amely tartalmaz egy $y - x$ szélességű és $f(x)$ magasságú téglalapot, és amely lefedhető egy $y - x$ szélességű és $f(y)$ magasságú téglalappal, ezért

$$f(x)(y-x) \le T(y) - T(x) \le f(y)(y-x).$$

Ezt szemlélteti a következő ábra:



$$f(x) \le \frac{T(y)-T(x)}{y-x} \le f(y) \quad \Longrightarrow$$

$$f(x) \le \lim_{y\to x} \frac{T(y)-T(x)}{y-x} = T'(x) \le \lim_{y\to x} f(y) = f(x), \quad \Longrightarrow$$

$$T'(x) = f(x) \quad \big(x \in [a,b]\big).$$

Az előzőek szerint tehát **az integrál fogalma kapcsolatba hozható a derivált fogalmával** abban az esetben, ha a függvényre tett feltételek teljesülnek. Ezt az alapvetően fontos kapcsolatot a XVII. század végén egymástól fügetlenül **G. F. Leibniz** és **I. Newton** fedezték fel. Ennek révén az integrál értékét sokszor igen kevés fáradsággal meg lehet határozni.

Meg fogjuk mutatni azt, hogy az f-re tett feltételek lényegesen „gyengíthetők”.

Definíció. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$. *A* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény a* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény* ***primitív függvénye az*** $[a, b]$ ***intervallumon****, ha*

$$F \in C[a, b], \quad F \in D(a, b) \text{ és } F'(x) = f(x) \ \big(x \in (a, b)\big).$$

Newton–Leibniz-tétel. *Ha* $f \in R[a,b]$ *és a* f *függvénynek van primitív függvénye az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F *a* f *függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. A Lagrange-középértéktétel szerint $\forall\ i = 1, \ldots, n$ indexre $\exists\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ha ezeket az egyenlőségeket összeadjuk $\forall\ i = 1, \ldots, n$ indexre, akkor a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve a $F(x_n) = F(b)$ és $F(x_0) = F(a)$ tagokat. Így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, \tau, \xi),$$

ahol $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Mivel $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \le f(\xi_i) \le \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, ezért

$$s(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,\xi) = F(b) - F(a) \le S(f,\tau,\xi).$$

Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S(f,\tau,\xi) = I^*(f)$$

Mivel $f \in R[a,b]$, ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int\limits_a^b f$. Így

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Megjegyzés. A Newton–Leinbiz-tétel feltételei közül egyik sem hagyható el. Belátható, hogy a tételben szereplő két feltétel egymástól független (egyikből sem következik a másik).

Pl. a sign függvény integrálható $[-1,1]$-en, de itt nincs primitív függvénye.

Másrészt, ha

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } 0 \neq x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad \text{akkor } F \in D(\mathbb{R}) \text{ és}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } 0 \neq x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ha $f(x) := F'(x)$, $0 \leq x \leq 1$, akkor f **nem korlátos**, ezért $f \notin R[0,1]$. Viszont f-nek $F_{|_{[0,1]}}$ primitív függvénye a $[0,1]$ intervallumon.

Megjegyezzük, hogy ennél lényegesen bonyolultabb konstrukcióval meg lehet adni olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ **korlátos** függvényt is, aminek van primitív függvénye $[0,1]$-en, de $f \notin R[0,1]$ (**Volterra-függvény**). ∎

Példa. *Számítsuk ki a* $\int\limits_0^\pi \sin x\, dx$ *határozott integrált!*

Megoldás. A $\sin x$ $\big(x \in [0,\pi]\big)$ függvényre teljesülnek a Newton–Leibniz-tétel feltételei és $F(x) = -\cos x$ $\big(x \in [0,\pi]\big)$ a sin függvény egy primitív függvénye $[0,\pi]$-n. Így

$$\int\limits_0^\pi \sin x\, dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = \big(-\cos\pi\big) - \big(-\cos 0\big) = 2.$$

Ezzel megkaptuk a $\sin_{|\,[0,\pi]}$, függvény garfikonja alatti síkidom területét. ∎

Példa. *A π szám irracionális.*

Megjegyzés. A π számot a cos függvény legkisebb pozitív zérushelyének a kétszereseként definiáltuk. ∎

Megoldás. Indirekt. T.f.h. $\exists\, p, q \in \mathbb{N}^+ : \ \pi = \frac{p}{q}$. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, és tekintsük a következő polinomokat:

$$f(x) := \frac{x^n\,(p - q\,x)^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$f(x) := \sum_{k=n}^{2n} \frac{c_k}{n!} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ahol $c_k \in \mathbb{Z}$, ezért $f^{(k)}(0)$ is egész minden $k \in \mathbb{N}$-re. Másrészt $f(x) = f\left(\frac{p}{q} - x\right)$ $\Longrightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}\left(\frac{p}{q} - x\right) \Longrightarrow f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ is egész minden $k \in \mathbb{N}$-re. Így $F(0), F(\pi) \in \mathbb{Z}$ is igaz.

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\Big(F'(x)\cdot\sin x - F(x)\cdot\cos x\Big)' = F''(x)\cdot\sin x + F(x)\cdot\sin x = f(x)\cdot\sin x \quad \text{és}$$

$$(*)\quad \int_0^\pi f(x)\cdot\sin x\,dx = \big[F'(x)\cdot\sin x - F(x)\cdot\cos x\big]_0^\pi = F(\pi)+F(0)\in\mathbb{Z},$$

továbbá

$$0 < f(x)\cdot\sin x < \frac{\pi^n p^n}{n!}, \qquad \text{ha}\ \ 0<x<\pi.$$

Válasszuk meg $n\in\mathbb{N}$-et: $\pi^{n+1}p^n < n!$ legyen! Ekkor $(*) \Longrightarrow$

$$0 < \int_0^\pi f(x)\cdot\sin x\,dx < \pi\cdot\frac{\pi^n p^n}{n!} < 1,$$

ami ellentmondás, hiszen az integrál egész szám. ■

Megjegyzés. Az első bizonyítást erre az alapvető tulajdonságra *J. H. Lambert* adta 1766-ban. Ezt az elegáns bizonyítást *I. Niven* publikálta 1947-ben. További bizonyításokat illetően l. Wikipédia ■

A határozott integrál 4.

2. Az integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai

Definíció. *T.f.h. $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a*

$$F : [a,b] \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

függvényt a f függvény x_0-ban eltűnő ***integrálfüggvényének*** *nevezzük.*

Megjegyzés. Az „x_0-ban eltűnő" arra utal, hogy $F(x_0) = 0$. ■

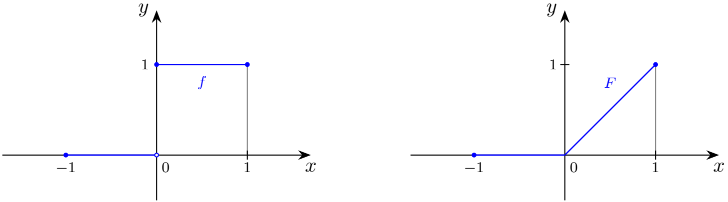
1. példa. Ha $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ és $x_0 = 0$, akkor

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ ■

2. példa. Ha

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{és} \quad x_0 := 0, \text{ akkor}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ x, & \text{ha } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$



A következő tételben az integrálfüggvény alapvető tulajdonságait soroljuk fel.

Tétel. *T.f.h.* $f \in R[a,b]$ *és* $x_0 \in [a,b]$. *Ekkor a*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \big(x \in [a,b]\big)$$

integrálfüggvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1º *A* F *függvény* ***folytonos*** *az* $[a,b]$ *intervallumon.*

2º *Ha egy* $d \in [a,b]$ *pontban* f ***folytonos***, *akkor ott a* F *integrálfüggvény* ***deriválható***, *és* $F'(d) = f(d)$.

3º *Ha* $f \in C[a,b]$, *akkor* $F \in D[a,b]$ *és* $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in [a,b]$ *pontban. Következésképpen,* ***ha*** f ***folytonos*** $[a,b]$***-n, akkor itt van primitív függvénye***.

Megjegyzés. Ha $d = a$ vagy $d = b$, akkor a jobb-, illetve a bal oldali deriváltról van szó. ■

Bizonyítás.

1° Tetszőleges $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén

$$\big|F(y) - F(x)\big| = \Big|\int_{x_0}^{y} f - \int_{x_0}^{x} f\Big| = \Big|\int_{x_0}^{y} f + \int_{x}^{x_0} f\Big| = \Big|\int_{x}^{y} f\Big| \leq$$

$$\leq \int_{x}^{y} |f| \leq M \cdot \int_{x}^{y} 1 = M \cdot (y - x),$$

ahol M a f függvény egy korlátja: $|f(x)| \leq M$ $\big(x \in [a, b]\big)$. (Mivel $f \in R[a, b]$, ezért f korlátos $[a, b]$-n.)

Ha tehát $\varepsilon > 0$, és $\delta > 0$: $M\delta < \varepsilon$, akkor $\forall\, x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$\big|F(y) - F(x)\big| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy F egyenletesen folytonos $[a, b]$-n, így folytonos is az $[a, b]$ intervallumon.

2^o Legyen $d \in (a,b)$, és t.f.h. $f \in C\{d\}$. Ez azt jelenti, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$:

$$\forall\, t \in [a,b],\ |t-d| < \delta \text{ esetén } |f(t) - f(d)| < \varepsilon.$$

T.f.h. h-ra $d+h \in (a,b)$ teljesül. Ekkor

$$F(d+h) - F(d) = \int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^{d} f = \int_{d}^{d+h} f.$$

Mivel $f(d) = \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} f(d)\,dt$, ezért

$$\frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) = \frac{1}{h} \int_d^{d+h} \big(f(t) - f(d)\big)\,dt.$$

Ha $0 < h < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| < \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} \left|f(t) - f(d)\right| dt \leq$$

$$< \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} \varepsilon \, dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h.$$

Ha $-\delta < h < 0$, akkor

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int\limits_{d+h}^{d} \left|f(t) - f(d)\right| dt < \varepsilon.$$

Az előzőek alapján tehát $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, |h| < \delta$-ra

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(d+h)-F(d)}{h}-f(d)\right)=0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(d+h)-F(d)}{h}=f(d),$$

vagyis $F\in D\{d\}$ és $F'(d)=f(d)$.

A végpontokban az előzőekhez hasonlóan kapjuk az egyoldali deriváltakra vonatkozó állításokat.

3^o A **2^o** állítás közvetlen következménye. ■

A határozott integrál 4.

3. Parciális integrálás

Tétel. *T.f.h.* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in D[a,b]$ *és* $f', g' \in R[a,b]$. *Ekkor*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Bizonyítás. Egyrészt $f \in D[a,b] \Longrightarrow f \in C[a,b] \Longrightarrow f \in R[a,b]$. Mivel $g' \in R[a,b]$, ezért $fg' \in R[a,b]$. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy $f'g \in R[a,b]$. Így $f'g + fg' \in R[a,b]$.

Másrészt fg primitív függvénye az $f'g + fg'$ függvénynek (ui. $(fg)' = f'g + fg'$). A Newton–Leibniz-tétel szerint tehát

$$\int_a^b (fg' + f'g) = \left[fg\right]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

A határozott integrál additivitását felhasználva rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b fg' = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b f'g. \blacksquare$$

Példa. *Bizonyítsuk be, hogy*

(1) $$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot\pi \quad (n\in\mathbb{N}^+),$$

(2) $$\int_0^{\pi} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\cdot 2 \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Bizonyítás. Legyen $I_k := \int_0^{\pi} \sin^k x\,dx$ $(k\in\mathbb{N})$. Ekkor

$$I_0 = \pi \quad \text{és} \quad I_1 = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2.$$

Ha $k\geq 2$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$I_k = \int_0^{\pi} \sin^{k-1} x\cdot(-\cos x)'\,dx = \left[\sin^{k-1} x\cdot(-\cos x)\right]_0^{\pi} -$$
$$-\int_0^{\pi}(k-1)\cdot\sin^{k-2} x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)\,dx = 0+$$
$$+(k-1)\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\sin^{k-2}\,dx = (k-1)\cdot\left(I_{k-2}-I_k\right) \quad\Longrightarrow$$
$$I_k = \frac{k-1}{k}\cdot I_{k-2}.$$

Így

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0,$$

ami éppen (1). Hasonlóan

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1,$$

ami éppen (2). ■

Példa: Wallis-formula. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{4^2}{3^2}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Megoldás. Mivel minden n természetes számra

$$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \qquad (x\in(0,\pi/2)),$$

ezért

$$I_{2n+2}\le I_{2n+1}\le I_{2n} \quad (n\in\mathbb{N}),$$

azaz

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{1}{2}\cdot\pi \le \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 2 \le$$
$$\le \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\pi.$$

Ebből

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\pi \le \frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{4^2}{3^2}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot 2 \le \pi. \ \blacksquare$$

A határozott integrál 4.

4. Helyettesítéssel való integrálás

Tétel. *T.f.h.* $f \in C[a,b]$ *és a* $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ *függvény folytonosan deriválható. Ekkor*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$F(x) := \int_{g(\alpha)}^{x} f \quad \big(x \in [a,b]\big), \qquad G(u) := \int_{\alpha}^{u} f \circ g \cdot g' \quad \big(x \in [\alpha,\beta]\big)$$

integrálfüggvényeket. Megmutatjuk, hogy

$$(*) \qquad \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F\big(g(\beta)\big) = G(\beta)} = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Egyrészt $f \in C[a,b] \Longrightarrow F' = f$, másrészt $f \circ g \cdot g' \in C[\alpha,\beta] \Longrightarrow$ $G' = f \circ g \cdot g'$.

Mivel $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$, ezért $(F \circ g - G)' = 0 \Longrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}: \; F \circ g - G = c$. Ugyanakkor $F\big(g(\alpha)\big) = 0 = G(\alpha) \Longrightarrow$ $c = 0$, következésképpen $F \circ g = G \Longrightarrow F\big(g(\beta)\big) = G(\beta)$.

A $(*)$ egyenlőség tehát valóban teljesül. $\blacksquare$

Példa. *Számítsuk ki a*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$$

határozott integrált!

Megoldás. Legyen

$$g(x) := 3x+1 \quad (0 \le x \le 1), \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1 \le x \le 4).$$

Ekkor $g \in D[0,1]$ és $g'(x) = 3$ $(0 \le x \le 4)$. Így az előző tétel szerint

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 (f\circ g)\cdot g' = \frac{1}{3}\cdot\int_1^4 f =$$

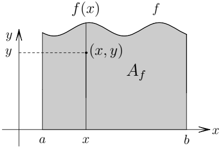
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{4}-2\sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}. \blacksquare$$

A határozott integrál 4.

5. Síkidom területe

Emlékeztetünk arra, hogy azt mondtuk, hogy az $f \in K[a, b]$, $f \geq 0$ függvény grafikonja alatti

$$A_f := \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$



síkidomnak **van területe**, ha $f \in R[a, b]$. Ekkor a

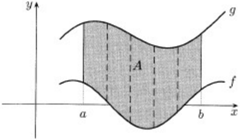
$$t(A_f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

valós számot az A_f síkidom **területének** neveztük.

Most kissé általánosabban definiált halmazok területét fogjuk értelmezni.

Definíció. *Legyen* $f, g \in K[a,b]$, *és t.f.h.* $f(x) \le g(x)$ *minden* $x \in [a,b]$*-re. A.m.h. az*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$



*síkidomnak **van területe**, ha* $f, g \in R[a,b]$. *Ekkor a*

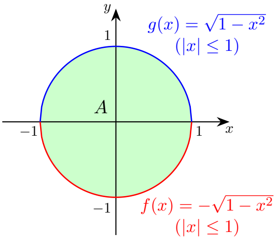
$$t(A) := \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

*valós számot az A síkidom **területének** nevezzük.*

Megjegyzés. Ez a definíció összhangban van a területtől elvárt tulajdonságokkal. Ezt $f \ge 0$ esetén könnyen meggondolhatjuk. Az ellenkező esetben toljuk fel A-t az x tengely fölé. ∎

Példa: Az egységsugarú körlap területe.

Helyezzük el a körlapot a koordináta-rendszerben úgy, hogy az origó legyen a körlap középpontja.



Mivel $f, g \in R[-1,1]$, ezért az A körlapnak van területe, és

$$t(A) = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

A Newton–Leibniz-tétel szerint

$$t(A) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 2 \cdot \left[\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \quad \blacksquare$$