

11. gyakorlat

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 2.

Emlékeztető. Az *exponenciális*, a *szinusz*- és a *koszinuszfüggvényt* a teljes \mathbb{R} -en konvergens hatványsorok összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin(x) := \sin x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(x) := \cos x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. (Hatványsor összegfüggvényének a határértéke) Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Jelölje

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad (x \in K_R(a))$$

az összegfüggvényét. Ekkor $\forall b \in K_R(a)$ pontban létezik a $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ határérték, és

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(b-a)^n.$$

Tehát, egy hatványsor összegfüggvényének van határértéke a konvergenciahalmaza minden belső pontjában, és a határérték megegyezik a pont behelyettesítésével kapott sor összegével.

Egy nevezetes határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

A pontbeli folytonosság fogalma. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban**, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x-a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jelölés: $f \in C\{a\}$.

Fontos! A hatványfüggvények, a polinomok és általában a racionális törtfüggvények, a gyökfüggvények, illetve az exponenciális, a szinusz- és a koszinuszfüggvény az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.

Tétel. (Az összetett függvény határértéke) Legyen $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ két valós függvény, amire $R_g \subset \mathcal{D}_f$ teljesül, és $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy

$$a \in \mathcal{D}'_g, \exists \lim_a g =: b \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad b \in \mathcal{D}'_f, \exists \lim_b f =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. ha $b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f \in C\{b\}$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = A,$$

azaz a kompozíció- és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.

2. ha a g függvény nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y) = A.$$

A tétel mindkét állításának eredménye a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y) \quad (y = g(x) \rightarrow b, \text{ ha } x \rightarrow a)$$

módon is írható, ami úgy tekinthető, mint a $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés. A tétel értelmében ez a helyettesítés akkor alkalmazható, ha

- f folytonos a b pontban,

vagy

- g nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében (pl. ha g invertálható, mondjuk nem állandó, lineáris függvény).

1. Feladat. A „gyöktelenítés technikájával” számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Megoldás. Mivel a gyökfüggvények folytonosak, ezért az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel szerint a gyökvonás és a határérték képzés sorrendje felcserélhető, így

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (g \geq 0).$$

Elegendő tehát a belső függvény határértékét kiszámolni, és utána gyököt vonni.

a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. A számlálót „gyöktelenítve” azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \quad (x \in [-1, +\infty) \setminus \{0\}).$$

A határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételek szerint

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan most is $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Először a számlálót, utána pedig a nevezőt gyöktelenítjük. Ha $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(1+x) - (1-x^2)}{\sqrt{1+x} - 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x(1+x)}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x(1+x)(\sqrt{1+x} + 1)}{(1+x) - 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} \cdot (1+x) \cdot (\sqrt{1+x} + 1). \end{aligned}$$

A műveleti tételeket alkalmazva

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} \cdot (1+0) \cdot (\sqrt{1+0} + 1) = \underline{\underline{1}}.\end{aligned}$$

c) $(+\infty) - (+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó. A következő átalakítások lesznek célravezetőek:

Ha $x < -1$, akkor

$$\begin{aligned}&(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \frac{-x + 2}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}} = \frac{-x + 2}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \\ &= (\text{Vigyázzni! Mivel } x < -1, \text{ ezért } \sqrt{x^2} = |x| = -x.) = \\ &= \frac{-x + 2}{-x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}.\end{aligned}$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, így a műveleti tételeket alkalmazva

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{-1 + 0}{-\sqrt{1 - 0 + 0} - \sqrt{1 - 0}} = \frac{-1}{-1 - 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy létezik a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right)$$

határérték, ahol $[\alpha]$ jelöli az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám egész részét. Mivel egyenlő ez a limesz?

Megoldás. Vegyük észre, hogy a 0-ban az első tényezőnek 0 a határértéke, a második tényezőnek pedig nincs határértéke.

Az egész rész definíciója alapján

$$\left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x} \right] + 1 \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Ha $x > 0$, akkor x -szel szorozva, majd átrendezve kapjuk, hogy:

$$1 - x < x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1 \quad (x > 0).$$

A függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv értelmében a jobb oldali határérték létezik, és

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right) = 1.$$

Az $x < 0$ esetben hasonló módon azt kapjuk, hogy:

$$1 \leq x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x \quad (x < 0).$$

Így a bal oldali határérték is létezik, és

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right) = 1.$$

Mivel a bal és a jobb oldali határértékek megegyeznek, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right) = 1.$$

3. Feladat. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \cdot \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

Megoldás. A \sin , \cos függvény folytonossága miatt az összetett függvény határértéke szerint

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha x = \sin \left(\lim_{x \rightarrow 0} \alpha x \right) = \sin(\alpha \cdot 0) = \sin 0 = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Hasonlóan $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \alpha x = 1$. Ezért mindegyik határérték $\frac{0}{0}$ -típusú kritikus határérték.

a) Először azt igazoljuk, hogy

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 \quad (\alpha \neq 0).$$

Ezt helyettesítéssel könnyen megkapjuk a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes határértékből:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = (y = \alpha x \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

A helyettesítés azért alkalmazható, mert $g(x) := \alpha x \neq 0$ bármilyen

$$\dot{K}_r(0) = (-r, 0) \cup (0, r)$$

pontozott környezetben. Így már $(*)$ miatt a műveleti tétel szerint

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \frac{\sin ax}{ax}}{b \frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}.$$

b) Három különböző megoldást mutatunk.

1. megoldás. Szorzunk, osztunk $(1 + \cos x)$ -szel.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}\right) = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

2. megoldás. Trigonometrikus azonosságokat felhasználva a számlálót $x/2$ segítségével fejezzük ki:

$$1 - \cos x = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) - \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Ekkor $(*)$ miatt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

3. megoldás. Írjuk be a \cos függvényt definiáló hatványsort, majd az összevonások után osszuk x^2 -tel: ha $x \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}{x^2} \right) = \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \left(\frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2} \right) = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right). \end{aligned}$$

Az előző hatványsor az $x = 0$ pontban is konvergens, hiszen ekkor a sor összege $1/2$. Ezért a hatványsor az egész \mathbb{R} -en konvergens, azaz konvergenciasugara $R = +\infty$. A hatványsor összegfüggvényének a határértéke szerint a hatványsor a 0 pontban vett határértéke megegyezik az $x = 0$ pont behelyettesítésével kapott sor összegével:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

c) Alkalmazhatjuk az előző feladatnál bemutatott megoldásokat. Például az 1. megoldást követve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \right) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

De az előző feladat végeredményét is tudnánk közvetlenül alkalmazni a műveleti tételek szerint:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

d) Gyöktelenítsük a nevezőt, majd osszuk el a számlálót is és a nevezőt is x^2 -tel. Így már nevezetes határértékeket tudunk kialakítani:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{1-\cos x}{x^2}}$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \frac{\sqrt{1+0} + \sqrt{1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{\underline{\underline{3}}}.$$

4. Feladat. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Megoldás.

a) $\frac{0}{0}$ -típusú kritikus határértékről van szó. A definíció szerint

$$e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért, ha $x \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \frac{e^x - 1}{x} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \left(\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) - 1}{x} \right) = \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \left(\frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{x} \right) = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots \right). \end{aligned}$$

A fenti hatványsor az $x = 0$ pontban is konvergens, hiszen ekkor a sor összege nyilvánvalóan 1. Ezért a hatványsor az egész \mathbb{R} -en konvergens, azaz konvergenciasugara $R = +\infty$. Így a hatványsor összegfüggvényének a határértéke szerint

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots \right) = 1,$$

hiszen a hatványsor a 0 pontban vett határértéke megegyezik az $x = 0$ pont behelyettesítésével kapott sor összegével, ami 1-gyel egyenlő.

b) $\frac{0}{0}$ -típusú kritikus határértékről van szó. A következő képleteket fogjuk alkalmazni:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \dots = \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Vizsgáljuk meg külön-külön a határértékben szereplő kifejezés számlálóját és nevezőjét.

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} - 2x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - 2x = \\ &= \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^7}{7!} + \dots = x^3 \left(\frac{2}{3!} + \frac{2x^2}{5!} + \frac{2x^4}{7!} + \dots\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ebből már a szokott módon azt tudjuk igazolni, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3!} + \frac{2x^2}{5!} + \frac{2x^4}{7!} + \frac{2x^6}{9!} - \dots\right) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} x - \sin x &= x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \dots = \\ &= x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!} + \dots\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

és így

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!} + \dots\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Ekkor a műveleti tétel miatt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}}{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \frac{1/3}{1/6} = 2.$$

5. Feladat. Számítsuk ki a következő paraméteres határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{\alpha x^2 + 1} - 1} \quad (\alpha > 0), \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} \quad (\alpha, \beta \neq 0).$$

Megoldás.

a) $\frac{0}{0}$ -típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítéssel:

$$\frac{x \sin x}{\sqrt{\alpha x^2 + 1} - 1} = \frac{x \sin x (\sqrt{\alpha x^2 + 1} + 1)}{\alpha x^2 + 1 - 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{\alpha x^2 + 1} + 1)$$

Ezért a műveleti tétel szerint

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{\alpha x^2 + 1} - 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\alpha x^2 + 1} + 1) \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot 1 \cdot (\sqrt{0 + 1} + 1) = \frac{2}{\alpha}.$$

b) $\frac{0}{0}$ -típusú kritikus határértékről van szó. Induljunk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

nevezetes határértékből. Helyettesítéssel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\gamma x} - 1}{\gamma x} = (y = \gamma x \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1. \quad (\gamma \neq 0).$$

Ebből a műveleti tétel szerint

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\alpha x} - 1) - (e^{\beta x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} - 1}{x} = \\ &= \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} - \beta \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} - 1}{\beta x} = \alpha \cdot 1 - \beta \cdot 1 = \underline{\underline{\alpha - \beta}}. \end{aligned}$$