4. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 3.

Emlékeztető.

A monotonitás és a derivált kapcsolata. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$. Ekkor*

1° $f \nearrow$ *[illetve* $\searrow$ *]* (a,b)*-n* $\iff$ $f' \geq 0$ *[illetve* $f' \leq 0$ *]* (a,b)*-n;*

2° $f' > 0$ *[illetve* $f' < 0$ *]* (a,b)*-n* $\implies$ $f \uparrow$ *[illetve* $\downarrow$ *]* (a,b)*-n.*

Fontos megjegyezni, hogy a tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha $f(x) := 1/x \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \big(\forall\, x \in \mathcal{D}_f\big)$, de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami *nem intervallum.*

Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor $f'(a) = 0$.*

Jegyezzük meg, hogy az $f'(a) = 0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen (tekintsük például az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt és az $a = 0$ pontot). A tétel azt állítja, hogy lokális szélsőértékhelyek csak olyan a pontokban lehetnek, ahol $f'(a) = 0$. Ezek az f függvény **stacionárius pontjai**.

Elsőrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre. *Tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$ és egy $c \in (a,b)$ pontban $f'(c) = 0$, továbbá az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely, és*

- *ha f'-nek c-ben $(-,+)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális minimumhelye,*
- *ha f'-nek c-ben $(+,-)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális maximumhelye.*

Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre. *Tegyük fel, hogy egy $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban $f \in D^2\{c\}$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) \neq 0$. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely, és*

- *ha $f''(c) > 0$, akkor c az f függvény lokális minimumhelye,*
- *ha $f''(c) < 0$, akkor c az f függvény lokális maximumhelye.*

Az abszolút szélsőértékek létezésére vonatkozó Weierstrass-tétel. *Korlátos és zárt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett folytonos f függvénynek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy $f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha) \ \big(\forall\, x \in [a,b]\big)$.*

Abszolút szélsőértékhelyek keresése. Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor a Weierstrass-tétel szerint f-nek van legnagyobb és legkisebb értéke. Ha f ezek valamelyikét egy c pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a,b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó. Ha feltesszük még azt is, hogy $f \in D(a,b)$, akkor $f'(c) = 0$. Ha tehát megkeressük az összes olyan $c \in (a,b)$ pontot, amelyben f' eltűnik, akkor biztos, hogy az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, vagy az a és a b végpontok közül kerülnek ki. Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk f értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az a és b végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben f értéke a legnagyobb.

1. feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit:*

(a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}\big)$.

Megoldás.

(a) Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = 12\,x^3 - 12\,x^2 - 24\,x = 12\,x\,(x^2 - x - 2) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Alkalmazzuk a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt, tehát $f'(x)$ előjelét kell meghatároznunk. Mivel f' folytonos $\mathbb{R}$-en, így f' csak a zérushelyein tud előjelet váltani. Világos, hogy

$$f'(x) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -1,\ x = 0 \text{ vagy } x = 2.$$

Ezzel négy részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2) \quad \text{és} \quad (2, +\infty).$$

Nem nehéz meghatározni f' előjeleit ezeken az intervallumokon, hiszen ehhez elegendő kiszámolni f' értékét az intervallumok egyik pontján. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

Az $x \in \{-1, 0, 2\}$ pontokban lehetnek lokális szélsőértékek (hiszen itt $f' = 0$).

Mivel f' a -1 pontban negatívból pozitívba vált, ezért az $x = -1$ pontban f-nek lokális minimuma van és $f(-1) = -3$.

Az $x = 0$ pontban f' pozitívból negatívba vált, ezért itt f-nek lokális maximuma van és $f(0) = 2$.

Végül az $x = 2$ pontban f' ismét negatívból pozitívba vált, tehát itt f-nek lokális minimuma van és $f(2) = -30$.

(b) Mivel $x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$, ezért a tört valóban értelmezhető a megadott halmazon. Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R} \setminus \{2, 8\})$ és

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 10x + 16) - x(2x - 10)}{\left(x^2 - 10x + 16\right)^2} = \frac{16 - x^2}{\left(x^2 - 10x + 16\right)^2} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}\right).$$

Mivel f' folytonos minden $x \neq 2$ és $x \neq 8$ pontban, így csak az $x = 2$, $x = 8$ és az f' zérushelyei olyan pontok, ahol eltérhet f' előjele a pont bal és jobb oldali környezetében. Világos, hogy

$$f'(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{\left(x^2 - 10x + 16\right)^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -4 \text{ vagy } x = 4.$$

Ezzel öt részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele:

$$(-\infty, -4), \quad (-4, 2), \quad (2, 4), \quad (4, 8) \quad \text{és} \quad (8, +\infty).$$

A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x<-4$	-4	$-4<x<2$	$2<x<4$	4	$4<x<8$	$x>8$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$

Lokális szélsőérték csak az $x=\pm 4$ pontokban lehet. Mivel f' a -4 pontban negatívból pozitívba vált, ezért az $x=-4$ pontban f-nek lokális minimuma van és $f(-4)=-\frac{1}{18}$. Végül az $x=4$ pontban f' pozitívból negatívba vált, ezért itt f-nek lokális maximuma van és $f(4)=-\frac{1}{2}$.

2. feladat. *Számítsuk ki a következő függvények abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit:*

(a) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad \big(x \in [-1,4]\big)$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1} \quad \big(x \in [-\frac{3}{2}, 2]\big)$.

Megoldás.

(a) Mivel $f \in C[-1,4]$, ezért *Weierstrass tétele* szerint f-nek léteznek abszolút szélsőértékei.

A lokális szélsőértékhelyek meghatározása. A $g(x) := x^4 - 4x^3 + 10$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény deriválható, és

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \ \text{ vagy } \ x_2 = 3.$$

A g függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyei $x_1=0$ vagy $x_2=3$.

Mivel $g'(x)<0$, ha pl. $x \in (-1,1)\setminus\{0\}$, továbbá $g'(0)=0$, ezért $g \downarrow$ a $(-1,1)$ intervallumon, így az $x_1=0$ pont nem lokális szélsőértékhelye a g függvénynek.

A g' függvénynek $x_2=3$-ban $(-,+)$ előjelváltása van, ezért $x_2=3$ a g függvénynek lokális minimumhelye.

A függvényértékek összehasonlítása. Mivel

$$f(-1)=15, \quad f(3)=-17, \quad f(4)=10,$$

ezért

f abszolút minimumhelye 3, és abszolút minumuma -17,

f abszolút maximumhelye -1, és abszolút maximuma 15.

(b) Mivel $f \in C\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$, ezért *Weierstrass tétele* szerint f-nek léteznek abszolút szélsőértékei.

A lokális szélsőértékhelyek meghatározása. A $g(x) := \dfrac{x}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény deriválható, és

$$g'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1 \cdot \left(x^2+1\right) - x \cdot 2\,x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -1 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 1.$$

A g függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyei $x_1 = -1$ vagy $x_2 = 1$.

A g' függvénynek (-1)-ben $(-,+)$ előjelváltása van, ezért $x_1 = -1$ a g függvénynek lokális minimumhelye.

A g' függvénynek 1-ben $(+,-)$ előjelváltása van, ezért $x_2 = 1$ a g függvénynek lokális maximumhelye.

A függvényértékek összehasonlítása. Mivel

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{13}, \quad f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{2}{5},$$

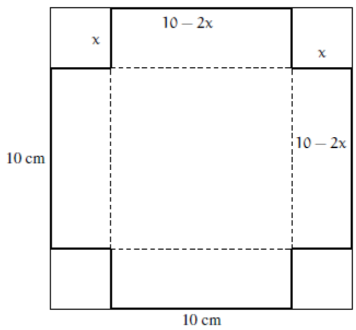
ezért

f abszolút minimumhelye -1, és abszolút minumuma $-1/2$,

f abszolút maximumhelye 1, és abszolút maximuma $1/2$.

3. feladat. *Egy* 100 cm^2 *területű, négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk belőle. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?*

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az ábrából látható, hogy a doboz alapja egy $10 - 2x$ cm oldalú négyzet, és magassága x cm, ahol $x \in (0, 5)$. A doboz térfogata tehát:

$$V(x) := (10 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x \quad \big(x \in (0,5)\big).$$

Ennek a függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. Weierstrass tétele közvetlenül most nem alkalmazható, hiszen az értelmezési tartomány nem zárt intervallum.

A deriválási szabályokat felhasználva azt kapjuk, hogy $V \in D\big((0,5)\big)$ és

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25) \quad \big(x \in (0,5)\big).$$

Mivel $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$3x^2 - 20x + 25 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 25}}{6} = \frac{10 \pm 5}{3} \iff x_1 = 5,\ x_2 = \frac{5}{3},$$

ezért

$$3x^2 - 20x + 25 = (x-5)(3x-5) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$V(x) = 0 \iff x = \frac{5}{3} \quad \big(\text{ui. } x \in (0,5)\big).$$

Legyen $x_0 := \frac{5}{3}$. Mivel

$$\begin{aligned} V'(x) > 0,\ \text{ha } x \in (0, x_0) &\implies V \uparrow \text{ a } (0, x_0) \text{ intervallumon,} \\ V'(x) < 0,\ \text{ha } x \in (x_0, 5) &\implies V \downarrow \text{ az } (x_0, 5) \text{ intervallumon,} \end{aligned}$$

ezért x_0 a V függvény abszolút maximumhelye.

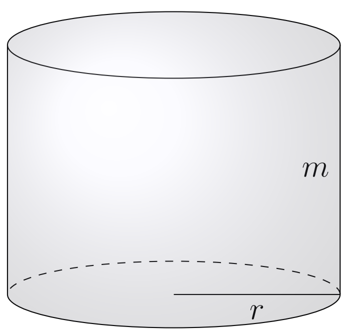
A levágott négyzet oldala tehát $\dfrac{5}{3}$ cm.

4. feladat. *Hogyan kell megválasztani az 1 liter térfogatú, mindkét végén zárt, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy az anyagköltség minimális legyen? Az anyagköltség a doboz felszínével egyenesen arányos.*

Megoldás. Jelölje $r > 0$ a henger alapkörének sugarát és $m > 0$ a henger magasságát. Mindegyik méretet cm-ben keressük.

A gyártási költség egyik részét az anyagköltség adja. Ezt azzal tudjuk minimalizálni, ha a legkisebb felületű konzervdobozt gyártjuk. A henger felülete

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r m.$$



Az r és m változók nem függetlenek egymástól, mert a henger térfogata 1 liter, azaz 1000 cm^3. A henger térfogata

$$V = \pi r^2 m = 1000 \implies m = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Ebből felírhatjuk a henger felszínét az r sugár függvényeként

$$A(r) := 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (r > 0).$$

Ennek a függvénynek keressük az abszolút minimumhelyét. Weierstrass tétele közvetlenül most nem alkalmazható, hiszen az értelmezési tartomány nem korlátos intervallum.

A deriválási szabályokat felhasználva azt kapjuk, hogy $A \in D\left((0,+\infty)\right)$ és

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \quad (r > 0).$$

Így

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Legyen $r_0 := \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$. Mivel

$$\begin{array}{llll} A'(r) < 0, & \text{ha } r \in (0, r_0) & \Longrightarrow & A \downarrow \text{ a } (0, r_0) \text{ intervallumon,} \\ A'(r) > 0, & \text{ha } r \in (r_0, +\infty) & \Longrightarrow & A \uparrow \text{ az } (r_0, +\infty) \text{ intervallumon,} \end{array}$$

ezért r_0 az A függvény abszolút minimumhelye.

Ekkor

$$m_0 := \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{10}\right)^2 = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

A keresett konzervdoboz méretei tehát a következők:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\text{a konzervdoboz alapkörének sugara } \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ cm és magassága } \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ cm.}}$$

Vegyük észre, hogy az optimális esetben $m_0 = 2r_0$, vagyis a henger pontosan olyan széles, mint amilyen magas.