6. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 5.

Emlékeztető.

• **L'Hospital szabályok.** *Legyen* $-\infty \leq a < b < +\infty$, *illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b) \colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \quad \textit{vagy} \quad \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \implies \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

A L'Hospital szabály átfogalmazható **bal oldali és (kétoldali) határértékre**, valamint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ **típusú határértékre**. A többi típusú **kritikus határértéket** (pl. $\boldsymbol{(+\infty) + (-\infty)}$, $\boldsymbol{0 \cdot (\pm\infty)}$, $\boldsymbol{0^0}$, $\boldsymbol{1^{+\infty}}$) vezessük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

A feladatmegoldások során először döntsük el, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó, ezután **ellenőrizzük** a L'Hospital-szabály feltételeit, ui. a L'Hospital-szabály „hagyja magát alkalmazni" akkor is, ha nem lehet (l. az előadást).

• **Taylor-polinomok és Taylor-sorok**

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Ha* $f \in D^{\infty}\{a\}$, *akkor a*

$$\begin{aligned} T_a(f,x) :&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots = \\ &= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

hatványsort az f ***függvény*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***ponthoz tartozó Taylor-sorának*** *nevezzük.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Ha* $n \in \mathbb{N}$ *és* $f \in D^n\{a\}$, *akkor a Taylor-sor* n*-edik részletösszegét, vagyis a*

$$\begin{aligned} T_{a,n}(f,x) :&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

polinomot az f ***függvény*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***ponthoz tartozó*** n***-edik Taylor-polinomjának*** *nevezzük.*

$\boxed{\textbf{3.}}$ Az előadáson felvetettük a **sorfejtés problémáját**. Láttuk, hogy minden konvergens hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sorával egyenlő. Ezek szerint, ha egy f függvény előállítható konvergens hatványsor összegfüggvényeként, akkor a szóban forgó sor szükségképpen f Taylor-sora, és ennek konvergenciahalmazán előállítja az f függvényt. Mivel az $\exp, \sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ függvények végtelen sokszor deriválhatók $\mathbb{R}$-en, ezért a definíciójukban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai. A Taylor-sorok szintén az egész $\mathbb{R}$-en konvergensek és előállítják a függvényeket.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Megismertük a sorfejtés általános problémájának vizsgálatánál alkalmazható alábbi fontos állítást:

Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, *és tegyük fel, hogy* $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. *Ekkor*

$$\forall\, x \in K(a) \setminus \{a\} \quad \textit{ponthoz} \quad \exists\, \xi \quad \textit{a és x között}:$$

$$f(x) - T_{a,n}(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Feladatok

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(xe^{1/x} - x\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x} \qquad (a, b, c > 0)$.

Megoldás.

(a) $\underset{\sim\sim\sim}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}}$

$\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. A L'Hospital-szabály feltételei teljesülnek, ezért a tétel alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \text{(L'Hospital)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cdot \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)\cdot \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{1} = 2,$$

tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2\,.$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a feladatot a L'Hospital-szabály többszöri „mechanikus" felhasználásával is megoldhatjuk. Az alkalmazott elemi átalakításokkal azonban a számításokat lényegesen leegyszerűsítettük.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

Az összeg egyik tagjának sincs határértéke a 0 pontban. Először alakítsuk át a kifejezést! Mivel

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

Ez már egy $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határérték 0-ban, és a L'Hospital-tétel feltételei is teljesülnek.

Így

$$\underset{\sim\sim\sim}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \quad (\text{L'Hospital}) \ =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \quad (\text{L'Hospital}) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+xe^x} = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}}\,.$$

(c) $\underset{\sim\sim\sim}{\lim_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)}$

Mivel $\ln\in C\{1\}$, ezért

$$\lim_{x\to 1-0}\ln x=\lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1-0}\ln(1-x)\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to 0+0}\ln y=-\infty,$$

ezért $0\cdot(-\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt először $\frac{-\infty}{-\infty}$ típusú kritikus határértékre alakítjuk át.

$$\underset{\sim\sim\sim}{\lim_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)} \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} (\text{L}'\text{Hospital}) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{1-x}\cdot\ln^2 x = \left(\lim_{x\to 1-0}x\right)\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln^2 x}{1-x} =$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln^2 x}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{=} (\text{L}'\text{Hospital}) = \lim_{x\to 1-0}\frac{2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{-1} = (-2)\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x} = (-2)\cdot\frac{0}{1} = \underset{\sim\sim}{0}\,.$$

(d) $\underset{\sim\sim\sim}{\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)}$

Mivel $\exp\in C\{0\}$, ezért

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}\overset{y=1/x}{=}\lim_{y\to 0+0}e^y=e^0=1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Tehát $(+\infty)-(+\infty)$ típusú határértékről van szó. Egyszerű átalakítás után a L'Hospital-szabályt már alkalmazhatjuk:

$$\underset{\sim\sim\sim}{\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)} = \lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(e^{1/x}-1\right) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} (\text{L}'\text{Hospital}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}e^{1/x} = \underset{\sim\sim}{1}\,.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x} \qquad (a,b,c>0)$

Olyan hatványról van szó, amelynél az alap és a kitevő is változik. Azt, a már bevált **ötletet** alkalmazzuk, hogy az

$$\alpha = e^{\ln\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

azonosság felhasználásával először az alapot e hatványaként írjuk fel:

$$\frac{a^x+b^x+c^x}{3} = e^{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}.$$

Így

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}.$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}.$$

Világos, hogy $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó, és a L'Hospital-szabály feltételei teljesülnek. Mivel

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\right)' &= \frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}\cdot\left(\frac{a^x\,\ln a+b^x\,\ln b+c^x\,\ln c}{3}\right) = \\ &= \frac{a^x\,\ln a+b^x\,\ln b+c^x\,\ln c}{a^x+b^x+c^x},\end{aligned}$$

ezért a kitevő határértéke:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x} &\overset{\frac{0}{0}}{=} (\text{L}'\text{Hospital}) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\,\ln a+b^x\,\ln b+c^x\,\ln c}{3} = \\ &= \frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3} = \ln\sqrt[3]{a\,b\,c}.\end{aligned}$$

Mivel az exp függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x} = \exp\left(\ln\sqrt[3]{a\,b\,c}\right) = \sqrt[3]{a\,b\,c}\,.$$

2. feladat. *Rendezzük át a $2x^3+5x^2+3x+1$ polinomot $(x+1)$ hatványai szerint! A feladat általánosításaként mutassuk meg, hogy ha P egy legfeljebb n-edfokú polinom és $a\in\mathbb{R}$ tetszőleges, akkor minden $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Megoldás. Legyen

$$P(x) := 2x^3 + 5x^2 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad a := -1.$$

Ekkor

$$P'(x) = 6x^2 + 10x + 3, \quad P''(x) = 12x + 10, \quad P'''(x) = 12, \quad P^{(4)}(x) = 0 \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Így

$$P^{(0)}(-1) = P(-1) = 1, \quad P'(-1) = -1, \quad P''(-1) = -2, \quad P'''(-1) = 12,$$
$$P^{(4)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktagos Taylor-formulára vonatkozó tételt az $n = 3$, az $f = P$ és az $a = -1$ szereposztással. Mivel $P \in D^4(\mathbb{R})$, ezért

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ ponthoz } \exists\, \xi \text{ az } a = -1 \text{ és } x \text{ között}:$$

$$P(x) - T_{-1,4}(P, x) = P(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = \frac{P^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)^4 = 0.$$

Tehát a

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = \\ &= P^{(0)}(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 = \\ &= 1 - (x+1) - (x+1)^2 + 2(x+1)^3 \end{aligned}$$

egyenlőség minden $x \in \mathbb{R}$ pontban teljesül. Így

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 1 - (x+1) - (x+1)^2 + 2(x+1)^3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Általánosítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy legfeljebb n-edfokú polinom. Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $P^{(n+1)}(x) = 0$. Így a Lagrange-féle maradéktagos Taylor-formulára vonatkozó tétel alapján bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$P(x) = T_{a,n}(P, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. feladat. *Legyen*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad (x > -1).$$

(a) *Írjuk fel az f függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\left(0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon legfeljebb mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.*

(b) *Számítsuk ki az $A := \dfrac{1}{\sqrt[3]{1,03}}$ szám egy közelítő értékét, és a közelítés hibáját.*

Megoldás.

(a) Az $f(x) = (1+x)^{-1/3}$ $(x > -1)$ függvény akárhányszor deriválható, és minden $x > -1$ pontban

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \tfrac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\tfrac{28}{27}(1+x)^{-10/3},$$

ezért

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -\frac{1}{3}, \qquad f''(0) = \frac{4}{9}, \qquad f'''(0) = -\frac{28}{27}.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$T_{0,3}(f,x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 .$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal. Legyen $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$. Ekkor létezik olyan ξ a 0 és az x pont között, hogy

$$f(x) - T_{0,3}(f,x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4.$$

Mivel

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{280}{81(1+\xi)^{13/3}} \quad \text{és} \quad 0 < \xi < x \leq \frac{1}{10}, \quad \text{ezért} \quad |f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{280}{81}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\Big| f(x) - T_{0,3}(f,x) \Big| \leq \frac{280}{81} \cdot \frac{1}{4!} \cdot 10^{-4} = \frac{7}{486\,000} \approx 0,000\,014\,4, \quad \text{ha} \;\; 0 < x \leq \tfrac{1}{10},$$

azaz

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} - \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3\right) \right| \leq \frac{7}{486\,000}, \quad \text{ha} \;\; 0 < x \leq \frac{1}{10} .$$

(b) Mivel

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{1+0,03}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = f\left(\frac{3}{100}\right),$$

ezért a fentiek alapján

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+0,03}} \approx T_{0,3}\left(f, \frac{3}{100}\right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 - \frac{14}{81} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^3 = \frac{1\,485\,293}{1\,500\,000} =$$
$$= 0,990\,195\,\dot{3}.$$

A hibabecsléshez a Lagrange-féle maradéktagos Taylor-formulát alkalmazzuk $x = \frac{3}{100}$ esetén. Létezik olyan $\xi \in \left(0, \frac{3}{100}\right]$, hogy

$$\left| f\left(\frac{3}{100}\right) - T_{3,0}\left(f, \frac{3}{100}\right) \right| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^4 \leq \frac{280}{81} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^4 = \frac{7}{6} \cdot 10^{-7}.$$

Így az $A = \frac{1}{\sqrt[3]{1,03}}$ szám egy közelítő értéke

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{\sqrt[3]{1,03}} \approx 0,990\,195\,\dot{3}\,,}$$

és a közelítés hibakorlátja

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left|\frac{1}{\sqrt[3]{1,03}} - 0,990\,195\,\dot{3}\right| \leq \frac{7}{6} \cdot 10^{-7}\,.}$$

Ebből az következik, hogy

$$0,990\,195\,21\dot{6} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1,03}} \leq 0,990\,195\,450.$$

A kapott közelítő értéknek tehát az első 6 tizedesjegye pontos érték.