6. előadás
INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

- **A határozatlan integrál (primitív függvények).**
- **A határozott integrál.**

A határozatlan integrál (primitív függvények)

A határozatlan integrál (primitív függvények)

1. A primitív függvény fogalma

Kiderült, hogy fontos feladat megvizsgálni a deriválás műveletének a „megfordítását": egy adott függvényhez keresni olyan függvényt, hogy ez utóbinak a deriváltja a kiindulási függvény legyen.

Probléma (a deriválás műveletének a megfordítása)

Adott: *egy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény.*

Kérdés: *Van-e olyan $F : I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre*

$$F \in D(I) \quad \textit{és} \quad F' = f$$

teljesül?

A keresendő függvényre érdemes külön elnevezést bevezetni.

Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy adott függvény. A.m.h. a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f* ***primitív függvénye****, ha*

$$F \in D(I) \quad \text{és} \quad F'(x) = f(x) \ (\forall\, x \in I).$$

Kérdések:

1^o Milyen f függvénynek **van** primitív függvénye?

2^o Ha f-nek van primitív függvénye, akkor hogyan lehet azt meghatározni?

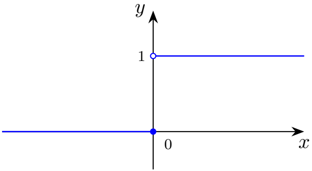
Az `elemi függvények deriváltjaira` gondolva számos függvény `primitív függvényeit` meg tudjuk már határozni. Pl.

- ha $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ $(x \in \mathbb{R})$;
- ha $f(x) := \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $F(x) = -\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Van olyan függvény, aminek nincs primitív függvénye.

Példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$



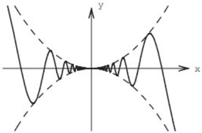
Tegyük fel, hogy F a f függvény primitív függvénye. Ekkor $x < 0$ esetén $F'(x) = 0$, tehát $F(x) = c$, ha $x \le 0$. Ha $x > 0$, akkor $F'(x) = 1$, tehát $F(x) = x + a$, ha $x \ge 0$. Így $F'_-(0) = 0$ és $F'_+(0) = 1$, tehát $F \notin D\{0\}$, ezért f-nek nincs primitív függvénye. ■

Igazolni fogjuk, hogy primitív függvény létezésének legfontosabb **elégséges** feltétele a **folytonosság**. Azaz, ha f *folytonos az* I *intervallumon, akkor van primitív függvénye.*

A következő példa azt mutatja, hogy a **folytonosság nem szükséges feltétele** a primitív függvény létezésének.

Példa. Legyen

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 \neq x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$



Ekkor $F \in D(\mathbb{R})$. Valóban, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$F'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{és}$$

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

A $\cos \frac{1}{x}$ határértéke nem létezik a 0-ban. Tehát az $f := F'$ függvény nem folytonos, de van primitív függvénye. ∎

Primitív függvény létezésére **szükséges feltétel** is megadható. Ehhez szükségünk lesz a deriváltfüggvény alábbi érdekes tulajdonságára.

Darboux-tétel. *Legyen I nyílt intervallum, és t.f.h. $h \in D(I)$. Ekkor a h' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú I-n, azaz tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ és bármely $h'(a)$ és $h'(b)$ közé eső c esetén van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $h'(\xi) = c$.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\varphi(x) := h(x) - cx \quad (x \in I)$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in D(I)$ és $\varphi'(x) = h'(x) - c$ $(x \in I)$. Igazoljuk, hogy φ-nek egy $\xi \in (a, b)$ pontban lokális szélsőértéke van, így $\varphi'(\xi) = h'(\xi) - c = 0$, azaz $h'(\xi) = c$.

Mivel $\varphi \in C[a,b]$, ezért a φ függvénynek vannak abszolút szélsőértékei (l. a Weierstrass-tételt).

A lokális szélsőérték létezésének igazolásához tegyük fel, hogy

$$h'(a) < c < h'(b), \text{ azaz}$$

$$\varphi'(a) = h'(a) - c < 0 \quad \text{és} \quad \varphi'(b) = h'(b) - c > 0.$$

Így a φ függvény a-ban szigorúan fogy, b-ben pedig szigorúan nő, ezért ezek egyike sem lehet abszolút minimumhely. φ-nek az abszolút minimumhelye tehát valóban az (a,b) intervallum egy belső pontja. ■

Az eddigieket összefoglalva az 1^o kérdésre az alábi válaszokat kaptuk:

Elégséges feltétel primitív függvény létezésére.
Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ ***folytonos*** *függvény, akkor f-nek* ***van*** *primitív függvénye.*

Szükséges feltétel primitív függvény létezésére.
Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek ***van*** *primitív függvénye, akkor f* ***Darboux-tulajdonságú*** *az I intervallumon.*

Megjegyzés. Primitív függvény **létezésének** a folytonosság *elégséges*, a Darboux-tulajdonság pedig *szükséges* feltétele. Jelenleg nem ismeretes olyan egyszerűen megfogalmazható, a függvény belső tulajdonságain alapuló feltétel, amelyik **szükséges és elégséges** feltételt ad arra, hogy az adott függvénynek legyen primitív függvénye. ■

Tétel. *Legyen I nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény.*

1^o *Ha $F : I \to \mathbb{R}$ a f függvény egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.*

2^o *Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei a f függvénynek, akkor*

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad F_1(x) = F_2(x) + c \quad (x \in I),$$

azaz a primitív függvények csak konstansban különböznek egymástól.

Bizonyítás. 1^o ✓

2^o A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tétel közvetlen következménye. ■

Megjegyzés. **2^o^**-ben lényeges, hogy f **intervallumon** értelmezett függvény. Tekintsük például a következő függvényt:

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{ha } x \in (2,3), \end{cases} \quad \text{és legyen}$$

$$F_1(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x \in (2,3), \end{cases} \quad F_2(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{ha } x \in (2,3). \end{cases}$$

Ekkor $F_1' = f = F_2'$, de F_1 és F_2 nem csak egy konstansban különböznek egymástól, mert

$$F_1(x) - F_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x \in (2,3). \end{cases} \quad \blacksquare$$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

2. A határozatlan integrál fogalma

Definíció. *Az I nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f := \int f(x)\, dx := \left\{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \ \text{és}\ F' = f\right\}.$$

*f az **integrandus**, ill. az **integrálandó függvény**.*

Ha $F \in \int f$, akkor az $\int f = \left\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\right\}$ egyenlőséget rövidebben (és kevésbé precízen) az alábbi formában fogjuk jelölni:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \quad \left(x \in I\right).$$

Például $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + c \quad \left(x \in \mathbb{R}\right).$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

3. Primitív függvények meghatározásának módszerei

Primitív fv keresése a deriválás műveletének a „megfordítása” (inverze). Deriválni „könnyű”, mert ehhez elég ismerni néhány alapfüggvény deriváltját, valamint a deriválási szabályokat. Talán nem meglepő, hogy az inverz művelet (a primitív függvény keresése) már jóval bonyolultabb feladat (gondoljunk például az inverz függvény kiszámításának a problémájára).

Amikor egy függvény primitív függvényeit keressük, akkor először is szükségünk van egy listára, amely megadja a legegyszerűbb függvények primitív függvényeit. Ezek az ún. **alapintegrálok**. Ezen kívül ismernünk kell a deriválási szabályok „megfordításaiból” adódó **integrálási szabályokat**.

A továbbbiakban felsoroljuk a primitív függvények meghatározásához használható **alapvető** módszereket.

A határozatlan integrál (primitív függvények)

4. Alapintegrálok

Az alapintegrálokat ebben a táblázatban soroltuk fel.

Például

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad \big(x \in (-\infty,0)\big),$
- $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \big(x \in (0,+\infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big).$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

5. A határozatlan integrál linearitása

Tétel. *Legyen I nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx \quad (x \in I).$$

Például $\displaystyle\int \big(6x^2 - 8x + 3\big)\, dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (x \in \mathbb{R}).$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

6. Az első helyettesítési szabály

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást fogunk megmutatni. Az egyiket most, a másikat pedig hamarosan ismertetjük.

Tétel. *Legyenek adottak az I, J nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. T.f.h. $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és a f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $F \in \int f$. Ekkor $F \in D(J)$ és $F' = f$. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint ekkor $F \circ g \in D(I)$ és

$$(F \circ g)' = \big(F' \circ g\big) \cdot g' = f \circ g \cdot g',$$

és ez azt jelenti, hogy $F \circ g \in \int f \circ g \cdot g'$. ■

Ez a tétel akkor használható, ha az $\int f \circ g \cdot g'$ integrált kell kiszámítanunk, és ismerjük f egy primitív függvényét.

Példa: Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) =: I$, akkor

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx = \int (\operatorname{tg} x)^{-3/2} \cdot (\operatorname{tg} x)'\,dx =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{-1/2} + c = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$ ■

Speciális esetek:

- Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}.$$

- Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $f \in D(I)$ és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor

$$\boxed{\int f^{\alpha}(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}.$$

- Ha a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy $F : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}.$$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

7. A parciális integrálás szabálya

A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását” fejezi ki a következő állítás.

Tétel. *Legyen I nyílt intervallum. T.f.h. $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

Bizonyítás. Ha $F \in \int f'g$, akkor $F \in D(I)$ és $F' = f'g$. Mivel $fg \in D(I)$ és $(fg)' = f'g + fg'$, ezért $(fg - F) \in D(I)$ és $(fg-F)' = f'g + fg' - f'g = fg'$. Így $(fg - F) \in \int fg'$ valóban fennáll. ■

A parciális integrálás tételét akkor célszerű használni az fg' primitív függvényének a meghatározására, ha $f'g$ egy primitív függvényét már ismerjük.

Példák. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

1° $\displaystyle\int x \sin x \, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

Megoldás. $\displaystyle\underbrace{\int x \cdot \sin x \, dx} = \int x \cdot (-\cos x)' \, dx =$

$$= -x \cos x - \int (x)' \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$= \underbrace{-x \cos x + \sin x + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})} . \ \blacksquare$$

$$\mathbf{2^o}\quad \int \ln x\,dx \qquad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

Megoldás. $\displaystyle \int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = \int (\ln x)\cdot (x)'\,dx =$

$$= (\ln x)\cdot x - \int (\ln x)'\cdot x\,dx = x\;\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx =$$

$$= x\,(\ln x - 1) + c \qquad (x > 0,\;\; c\in\mathbb{R})\,.\ \blacksquare$$

$$\mathbf{3^o} \quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Megoldás. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx =$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int x\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Következésképpen

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad \big(x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}\big)}.$$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

8. A második helyettesítési szabály

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel másik „megfordítása” az alábbi állítás:

Tétel.

T.f.h. $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ ***bijekció****, $g \in D(J)$, $g'(x) \neq 0$ $(\forall\, x \in J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. A Darboux-tétel szerint $0 \notin \mathcal{R}_{g'} \implies g$ szigorúan monoton J-n, tehát $\exists\, g^{-1}$. ■

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ határozatlan integrált, vagyis f egyelőre ismeretlen primitív függvényét akarjuk kiszámítani. Ekkor a „régi” x változó helyett vezessük be az $x = g(t)$ egyenlőségből adódó $t = g^{-1}(x)$ „új” változót. Ha **sikerül (!)** a g függvényt úgy megválasztani, hogy $f \circ g \cdot g'$ primitív függvényét (vagyis az $\int f \circ g \cdot g'$ határozatlan integrált) már ki tudjuk számítani, akkor a képlettel megkapjuk f primitív függvényeit. ■

Példa. *Számítsuk ki az*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrált!

Megoldás. Ötlet: alkalmazzuk az

$$x = \sin t =: g(t) \quad \Big(t \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$$

helyettesítést! $g'(t) = \cos t > 0 \;\; \Big(t \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\Big) \implies g \uparrow \implies g$ invertálható, és $t = g^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sin} x \;\; \big(x \in (-1,1)\big)$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$
$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c\Big|_{t=\arcsin x} =$$
$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c.$$

Mivel

$$\sin(2\arcsin x) = 2\,\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) =$$
$$= 2\,x\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = 2\,x\sqrt{1-x^2},$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\underset{\sim\sim\sim}{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\cdot\arcsin x + \tfrac{1}{2}\cdot x\sqrt{1-x^2} + c \quad (x\in(-1,1))}\,. \blacksquare$$

A határozatlan integrál (primitív függvények)

9. További módszerek

A gyakorlatokon fogunk **vázolni** olyan további módszereket, amelyek segítségével lényegesen lehet bővíteni a kiszámítható primitív függvények körét. Az alábbi két eljárásról lesz szó:

- Racionális törtfüggvények primitív függvényei.
- Racionális törtfüggvények integrálására vezető helyettesítések.

A határozatlan integrál (primitív függvények)

10. Megjegyzések a primitív függvényekről

1^o **Primitív függvény létezésének** a folytonosság *elégséges*, a Darboux-tulajdonság pedig *szükséges* feltétele. Jelenleg nem ismeretes olyan egyszerűen megfogalmazható, a függvény belső tulajdonságain alapuló feltétel, amelyik *szükséges és elégséges* feltételt ad arra, hogy az adott függvénynek legyen primitív függvénye.

2^o Sok esetben primitív függvényeket **különböző módszerekkel** is meghatározhatunk, és esetenként kaphatunk (formai szempontból) különböző képleteket is. Az egyenlőségük igazolásához vegyük két különböző alakú primitív függvény különbségét, és lássuk be, hogy ennek a deriváltja a megadott intervallumon azonosan nulla.

3^o **Elemi függvények primitív függvényei.** Könnyű meggondolni azt, hogy egy elemi függvény deriváltja mindig elemi függvény. Talán első hallásra meglepőnek tűnhet, de *vannak olyan elemi függvények, amelyeknek a primitív függvénye nem elemi függvény*. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a deriválás inverz művelete (az integrálás) kivezet az elemi függvények köréből. Ez jelentős különbség a deriválás és az integrálás között. A szóban forgó állítás precíz bizonyítása meglehetősen nehéz. *Joseph Liouville* (1809–1882) francia matematikus volt az első, aki megmutatta, hogy léteznek ilyen elemi függvények.

Bebizonyítható, hogy pl. az alábbi (folytonos) elemi függvények primitív függvényei nem elemi függvények:

$$e^{\pm x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \cos x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \qquad \frac{\cos x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \qquad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$$

$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \qquad \sqrt{x^3 + 1} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

4^o **Az „ügyeskedésekről”.** A gyakorlatokon látni fogjuk, hogy sok integrandustípus esetén vannak olyan általános módszerek, amelyekkel a primitív függvényeket meg tudjuk határozni. Ezek alkalmazásai azonban időnként meglehetősen sok számolást igényelnek. Bizonyos esetekben az integrálandó függvény alkalmas („ügyes”) átalakításával jóval egyszerűbben is célhoz érhetünk. A gyakorlatokon mutatunk majd ilyen példákat is.

5^o Szimbolikus programcsomagok (kompteralgebrai renszerek).

Mathematica (Wolfram Research), Maple (University of Waterloo), Matlab (Symbolic Math Toolbox), Maxima (MIT Project MAC), SageMath.

Ezen általános célú programcsomagok mellett vannak olyan programok, amelyek segítségével a matematika egy adott részterületén felvetődő, már speciális igényeket kielégítő számolások is elvégezhetők (pl. CAYLEY, GAP, LiE, CoCoA, R).

Online elérhető pl. a „WolframAlpha” és a „MathWorld” (matematkai enciklopédia).