7. előadás
A határozott integrál 1.

Emlékeztető:

- Problémafelvetés: a deriválás műveletének a megfordítása.
- A primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma.
- Primitív függvények meghatározásának módszerei (alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása, az első helyettesítési szabály, a parciális integrálás, a második helyettesítési szabály).

A határozott integrál 1.

A határozott integrál 1.

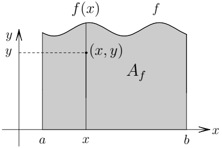
1. A határozott integrál motivációja

A határozott integrál fogalma számos, a matematikában, a fizikában és a természettudományok egyéb területein alkalmazott gondolatmenet általánosításaként született meg. A terület, a térfogat, az ívhossz, a felszín fogalma a határozott integrál segítségével értelmezhető. A fizikában többek között a munka, a nyomóerő, a tehetetlenségi nyomaték értelmezéséhez használják a határozott integrált. **A fogalom szükségességére** itt csak egy geometriai példát mutatunk.

Síkidom területének a problémája. Legyen $f \geq 0$ korlátos függvény az $[a, b]$ intervallumon, és tekintsük az f grafikonja alatti

$$A_f := \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidomot:



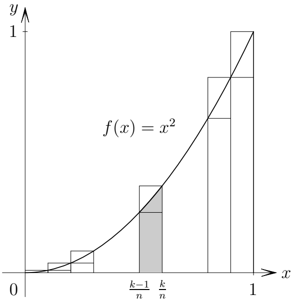
A következő kérdéseket vetjük fel:

*Hogyan lehet A_f területét **értelmezni**, milyen f esetén beszélhetünk az A_f halmaz területéről, hogyan lehet a $t(A_f)$-fel jelölt területet **kiszámolni**?*

Abból, a görög matematikusok által már alkalmazott, és számunkra már elég **természetes ötletből** indulunk ki, hogy a szóban forgó síkidom területét téglalapok területeinek az összegével **közelítjük**. Lássuk, hogyan határozta meg Arkhimédész a parabola alatti területet! A modern jelöléseket és a már megismert fogalmakat fogjuk használni.

Példa. Tekintsük az $f(x) := x^2$ $\big(x \in [0,1]\big)$ függvényt!

Rögzítsünk egy $1 \leq n \in \mathbb{N}$ számot, és osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot az $x_k := \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ osztópontokkal. Közelítsük az A_f halmazt az alábbi ábrán szemléltetett „beírt" és „körülírt" téglalapokkal:



Jelölje s_n, illetve S_n a szóban forgó téglalapok területeinek az összegét. Az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad (1 \leq m \in \mathbb{N})$$

képletből következik, hogy

$$s_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3},$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ha növeljük az osztópontok n számát, akkor a „lépcsősidomok” egyre jobban közelítenek az A_f halmazhoz. Világos, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n \leq t(A_f) \leq S_n.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{és}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3},$$

ezért a fenti egyenlőtlenségeket csak az $\frac{1}{3}$ szám elégíti ki. Kézenfekvő tehát azt mondani, hogy az A_f halmaznak van területe, és az legyen $1/3$. ■

Megjegyzés. Történeti utalások. (l. MacTutor History of Mathematics)
A matematikai analízis alapgondolatának a felfedezése – vagyis hogy a keresett mennyiséget tetszőleges pontossággal való megközelítések segítségével határozzuk meg – **Eudoxus** (i.e. 408–355) nevéhez fűződik, aki megalkotta a *kimerítés módszerét*.

Arkhimédész (i.e. 287–212) minden idők egyik legnagyobb, de az ókornak minden bizonnyal legnagyobb matematikusa volt. A kimerítés módszerét továbbfejlesztve kiszámította különböző görbevonalú idomok (pl. parabolaszelet) területét, meghatározta a gömb térfogatát és felszínét, bizonyos spirálok ívhosszúságát, vizsgálta a forgási paraboloidokat és hiperboloidokat. Munkásságának nagyobb része elveszett, de így is hatalmas művet hagyott hátra. Meg kell jegyezni azonban azt is, hogy gondolatai nagyon **sokáig nem találtak méltó folytatásra**.

Az analízis mint széles körben alkalmazható általános módszer, mint tudományág csak akkor született meg, amikor XVII. századi európai matematikusok kidolgoztak egy elméletet, az ún. **kalkulust** vagy a mai szóval **differenciálszámítást**. Ezt nagy matematikusok sora (*Barrow, Cavalieri, Fermat, Kepler* és sokan mások) fejlesztették ki, majd *Isaac **Newton*** (1643–1727) és *Gottfried Wilhelm **Leibniz*** (1646–1716) foglalták össze. Így a század végére már megérett az idő egy nagyszabású monográfia megírására. Ez ***L'Hospital*** (1661–1704) *Infinitézimál-számítás* (azaz végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás) című műve volt (1696), amely csaknem 100 évig a téma legfontosabb tankönyve maradt.

A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte – tegyük hozzá teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. Mert pl. mit jelent az, hogy végtelenül kicsiny mennyiség? A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig zajlott, és nemegyszer filozófiai síkra terelődött (Berkeley, Hegel).

Ezeket a belső problémákat végül mégis a matematikusok oldották meg a XIX. században, amennyiben a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették. A változó mennyiség fogalmát a függvény fogalmával, a differenciált a határértékkel, a differenciálhányadost pedig a deriválttal váltották fel. Ennek a tisztázási folyamatnak az eredményeképpen – amelyben *Augustin* ***Cauchy*** (1789–1857), *Karl* ***Weierstrass*** (1815–1897) és *Richard* ***Dedekind*** (1831–1916) vállaltak úttörő szerepet – a XIX. század végére a **differeciál- és integrálszámítás** (röviden **analízis**) elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel.

Az analízis precíz elméletének kidolgozása az újkori nyugati kultúra egyik legnagyobb szellemi teljesítménye volt. Ne csodálkozzunk hát, ha ezt az elméletet – főleg az alapjait, mindenekelőtt pedig annak centrális fogalmát, a határértéket – nehéznek találjuk. ■

A határozott integrál 1.

2. A határozott integrál értelmezése

A továbbiakban $[a,b]$ mindig egy **korlátos és zárt** $\mathbb{R}$-beli intervallumot jelöl, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$.

A határozott integrált **egyelőre** egy adott $[a,b]$-n értelmezett **korlátos** függvényekre értelmezzük. $K[a,b]$-vel jelöljük az ilyen függvények halmazát:

$$\boxed{\mathrm{K[a,b]}} := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos } [a,b]\text{-n} \Big\}.$$

Az $[a,b]$ intervallum egy **felosztásán** a

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

halmazt értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. A

$$\|\tau\| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

számot a τ felosztás **finomságának** nevezzük.

$\boxed{\mathcal{F}[a,b]}$ jelöli az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát.

- Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b] \implies \tau_1 \cup \tau_2,\ \tau_1 \cap \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. ✓

- Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor a.m.h. τ_2 egy **finomítása** τ_1-nek. τ_2 a τ_1-ből tehát újabb osztópontok hozzáadásával adódik.

Legyen $f \in K[a,b]$, $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$, továbbá

$$m_i := \inf \left\{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \right\} = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

$$M_i := \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre. A

$$s(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$S(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

számokat az f függvény τ felosztáshoz tartozó **alsó**, illetve **felső közelítő összegének** nevezzük.

Megjegyzések.

1^o Mivel f **korlátos** $[a, b]$-n, ezért a m_i-k és a M_i-k léteznek és **végesek**. Az inf, ill. a sup helyett általában nem vehetünk min-ot, ill. max-ot.

2^o Ha $f \geq 0$, akkor $s(f, \tau)$ (ill. $S(f, \tau)$) a beírt (ill. a körülírt) téglalapok területeinek az összege. ■

Most megvizsgáljuk a közelítő összegek halmazának a „szerkezetét”.

Tétel. *Legyen* $f \in K[a,b]$, *és t.f.h.* $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. *Ekkor*

1° *Ha* τ_2 *finomabb* τ_1*-nél (azaz* $\tau_1 \subset \tau_2$*), akkor*

$$s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2) \quad \textit{és} \quad S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2),$$

azaz egy felosztás finomításakor az alsó közelítő összeg nem csökkenhet, a felső közelítő összeg pedig nem nőhet.

2° *Ha* $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ *tetszőleges, akkor*

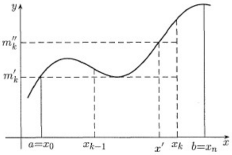
$$s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2),$$

azaz bármely felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg legfeljebb akkora, mint bármely (más) felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg.

Bizonyítás.

1^o Először t.f.h. τ_2 eggyel több pontot tartalmaz, mint τ_1, azaz $\tau_2 := \tau_1 \cup \{x'\}$, ahol $\tau_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ és $x_{k-1} < x' < x_k$.

Ha $m'_k := \inf_{[x_{k-1},x']} f$ és $m''_k := \inf_{[x',x_k]} f$, akkor $m'_k \geq m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$ és $m''_k \geq m_k$.



Mivel az x'-t nem tartalmazó $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok adaléka az $s(f, \tau_1)$ és $s(f, \tau_2)$ összegekben ugyanaz, ezért

$$s(f,\tau_2)-s(f,\tau_1) = m'_k(x'-x_{k-1})+m''_k(x_k-x')-m_k(x_k-x_{k-1}) \geq$$
$$\geq m_k(x'-x_{k-1}) + m_k(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Így $s(f,\tau_2) \geq s(f,\tau_1)$, tehát egy osztópont hozzávételével az alsó összeg nem csökkenhet.

Ha az osztópontokat egyenként vesszük hozzá τ_1-hez, akkor véges sok lépésben megkapjuk a τ_2 felosztást. Az alsó összeg minden lépésben nő vagy változatlan marad, ezért $s(f, \tau_2)$ legalább akkora, mint $s(f, \tau_1)$.
Hasonlóan látható be, hogy új osztópontok hozzávételével a felső összeg nem növekedhet.

2^o Legyen $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. Ekkor τ a τ_1 és a τ_2 felosztásnak is finomítása. Ezért az **1^o** állítást felhasználva azt kapjuk, hogy

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau) \leq S(f, \tau) \leq S(f, \tau_2). \blacksquare$$

Definíciók. *Legyen* $f \in K[a,b]$.

1° *Az* $\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \neq \emptyset$ *halmaz felülről korlátos, ezért* $\exists \sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} =: I_*(f) \in \mathbb{R}$ *(véges).*

Az $\boxed{I_*(f)}$ *számot az* f *függvény **Darboux-féle alsó integrál-jának** nevezzük.*

2° *Az* $\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \neq \emptyset$ *halmaz alulról korlátos, ezért* $\exists \inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} =: I^*(f) \in \mathbb{R}$ *(véges).*

$\boxed{I^*(f)}$ *az* f *függvény **Darboux-féle felső integrálja**.*

Világos, hogy $I_*(f)$ és $I^*(f)$ minden $f \in K[a,b]$ függvényre létezik és

$$I_*(f) \leq I^*(f) \quad \big(\forall\, f \in K[a,b]\big).$$

Definíció *A.m.h. az* $f \in K[a,b]$ *függvény* ***Riemann-integrálható az*** $[a,b]$ ***intervallumon*** *(röviden* ***integrálható*** $[a,b]$***-n****),* *ha* $I_*(f) = I^*(f)$*. Ezt a számot az* f *függvény* $[a,b]$ *intervallumon vett* ***Riemann-integráljának*** *(vagy más szóval* ***határozott integráljának****) nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int_a^b f \quad \textit{vagy} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\boxed{R[a,b]}$ *jelöli az* $[a,b]$ *intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát.*

Kérdések:

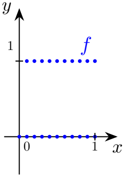
1° Milyen függvények integrálhatók?

2° Hogyan lehet az $\int\limits_a^b f$ integrált kiszámítani?

3° Mire lehet a határozott integrált alkalmazni?

Példa nem integrálható függvényre:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$



Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért $f \notin R[0,1]$.

Tétel. $\boxed{\textit{Ha } f \in C[a,b] \implies f \in R[a,b].}$

Bizonyítás. Később. ■

Az előzőekből következik, hogy bizonyos síkidomok területét a következőképpen **célszerű értelmezni**.

Definíció. *Legyen* $f \in K[a,b]$, *és t.f.h.* $f \geq 0$. *Ekkor az* f *grafikonja alatti*

$$A_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidomnak ***van területe***, *ha* $f \in R[a,b]$. *Ekkor a*

$$t(A_f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

valós számot az A_f *síkidom* ***területének*** *nevezzük.*

1. példa. *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. A definíció alapján mutassuk meg, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) := c \ (x \in [a,b])$ függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon, és $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$.*

Megoldás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ felosztását. Ekkor

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f = M_i = c$$

minden $i = 1, 2, \dots, n$ indexre. Mivel

$$s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b-a),$$

$$S(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b-a),$$

ezért

$$I_*(f) = \sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = c \cdot (b-a),$$
$$I^*(f) = \inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = c \cdot (b-a).$$

Így $I_*(f) = I^*(f) = c \cdot (b-a)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$, és $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$. ■

2. példa. *A definíció alapján mutasuk meg, hogy az* $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény integrálható* $[0,1]$*-en, és számítsuk ki a* $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ *határozott integrált, vagyis a parabola alatti területet!*

Megoldás. Tekintsük a $[0,1]$ **egyenletes felosztását**: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\tau_n := \left\{\frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n\right\}$. A bevezető példában láttuk, hogy

$$s_n(f,\tau_n) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad \text{és} \quad S_n(f,\tau_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Mivel

$$\frac{1}{3} \xleftarrow[n\to+\infty]{} s(f,\tau_n) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\tau_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3},$$

ezért $I_*(f) = I^*(f) = \frac{1}{3}$, tehát $f \in R[0,1]$ és $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. ■

Megjegyzés. Az integrálhatóság ténye, és az integrál kiszámítása általában nem egyszerű feladat. A fenti példában az volt a „szerencse”, hogy az egyenletes felosztás esetén az alsó-, ill. a felső közelítő öszegekre van zárt képlet, és a sorozatuk határértéke ugyanaz. ■

A határozott integrál 1.

3. Az integrálhatóság ekvivalens átfogalmazásai

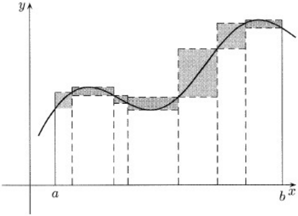
• Oszcillációs összegekkel

Definíció. *Ha $f \in K[a,b]$ és $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$, akkor*

$$\Omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$$

az f függvény τ felosztáshoz tartozó ***oszcillációs összege.***

Szemléletesen:



$\Omega(f,\tau)$ a jelölt téglalapok területeinek az összege.

Várható:

Tétel. $f \in R[a,b] \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-}hoz \quad \exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. $\boxed{\Longrightarrow}$ T.f.h. $f \in R[a,b]$: $I_*(f) = I^*(f) =: I(f)$.

$\sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I_*(f) = I(f) \implies$ (a sup def.)

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b]: \ I(f) - \tfrac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le I(f);$$

$\inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I^*(f) = I(f) \implies$ (az inf def.)

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]: \ I(f) \le S(f,\tau_2) < I(f) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor τ finomítása τ_1, τ_2-nek, ezért

$$I(f) - \tfrac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le s(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le$$
$$\le S(f,\tau) \le S(f,\tau_2) \le I(f) + \tfrac{\varepsilon}{2} \implies$$
$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\tau \in \mathcal{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$.

Mivel $s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\tau)$, ezért

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f,\tau) - s(f,\tau) = \Omega(f,\tau) < \varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-ra} \;\Longrightarrow$$

$$I^*(f) - I_*(f) = 0 \quad \Longrightarrow \quad I^*(f) = I_*(f) \quad \Longrightarrow \quad f \in R[a,b]. \;\blacksquare$$

• Sorozatokkal

Tétel. *Az* $f \in R[a,b]$ *és* $\int_a^b f = I \iff$

$$\exists\ (\tau_n) \text{ felosztássorozat: } \lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I.$$

Bizonyítás. $\boxed{\Longrightarrow}$ T.f.h. $f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = I$. Ekkor $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $\exists\ \tau_n \in \mathcal{F}[a,b]$: $I - \frac{1}{n} < s(f,\tau_n) \le I \le S(f,\tau_n) < I + \frac{1}{n}$.
Az $n \to +\infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ T.f.h. $\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I$. Ekkor

$$I \xleftarrow[n\to+\infty]{} s(f,\tau_n) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f,\tau_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$

Így $I_*(f) = I^*(f) \implies f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = I_*(f) = I^*(f) = I$. ■

Példa. *Legyen* $f(x) := \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$. *A definíció alapján mutasuk meg, hogy* $f \in R[1,2]$, *és számítsuk ki az* $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ *határozott integrált!*

Megoldás. Az egyenletes felosztás most nem lesz célravezető. (Miért?) **Ötlet:** Adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $q := \sqrt[n]{2}$ és tekintsük az $[1,2]$ intervallum $\tau_n := \{x_i := q^i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ felosztását.

Az ehhez tartozó alsó közelítő összeg ($f \downarrow [1,2]$-őn)

$$s(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{2i}}\left(q^i - q^{i-1}\right) = \quad (i = k+1)$$

$$= \frac{q-1}{q^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{q}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to \frac{1}{2}, \quad \text{ha} \;\; n \to +\infty.$$

Hasonlóan a τ_n felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg:

$$S(f,\tau_n)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{2i-2}}\left(q^i-q^{i-1}\right)=$$

$$=(q-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{q}\right)^{i-1}=\frac{1}{2}\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{2}\to\frac{1}{2},\quad \text{ha}\ \ n\to+\infty.$$

Mivel

$$s(f,\tau_n)\le I_*(f)\le I^*(f)\le S(f,\tau_n)\quad (\forall\ n\in\mathbb{N}^+)$$

és

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n)=\frac{1}{2}=\lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n),\ \ \text{ezért}$$

$I_*(f)=I^*(f)=\frac{1}{2}$, tehát $f\in R[1,2]$, és $\int\limits_1^2\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}$. ■

• A Riemann-féle közelítő összegekkel

Definíció.

Legyen $f \in K[a,b]$. *T.f.h.* $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *egy felosztása* $[a,b]$*-nek és* $\xi := \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, *ahol* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Ekkor a*

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

számot az f *függvény* τ *felosztáshoz és a* ξ *közbülső helyekhez tartozó* ***Riemann-féle közelítő összegének*** *nevezzük.*

Világos, hogy $s(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq S(f, \tau)$.

Tétel. *Az* $f \in R[a,b]$ *és* $\int_a^b f = I \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-}hoz \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, \tau \in \mathcal{F}[a,b],\;\; \|\tau\| < \delta \;\; eset\acute{e}n\;\; a$$

$$\left|\sigma(f,\tau,\xi) - I\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül a ξ *közbülső helyek tetszőleges megválasztása esetén.*

Bizonyítás. Nélkül. ■