Programtervező Informatikus BSC szak

Analízis2 , 1. zárthelyi dolgozat, 2021.10.22.

Vázlatos megoldások, eredmények

1. Adott az $f(x) := \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ $\quad (x \in (-1;+\infty))$ függvény.
   (a) A definíció segítségével határozzuk meg az $f'(0)$ deriváltat, ha az létezik. **(3 pont)**
   (b) Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét az $a = 3$ abszcisszájú pontban, ha az létezik. **(4 pont)**
   (c) Igazoljuk, hogy f invertálható. **(3 pont)**

   Megoldás :

   a) Világos, hogy $0 \in \operatorname{Int}(-1;+\infty)$, ezért a definíció alapján :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{0}{\sqrt{1+0}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{f \in D\{0\} \ \wedge \ f'(0) = 1}.$$

   b) A műveleti szabályok és a deriválhatóság kapcsolatát leíró tételek alapján könnyen meggondolható, hogy $f \in D(-1;+\infty)$, így $f \in D\{3\}$, ezért van érintő a szóbanforgó pontban, amelynek egyenlete :

$$y = f(3) + f'(3)\cdot(x-3) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   Mivel $f(3) = \dfrac{3}{2}$ és $\forall x \in (-1;+\infty)$ esetén :

$$f'(x) = \Big(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\Big)' = \frac{1\cdot\sqrt{x+1} - x\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}\cdot 1}{x+1} = \frac{(2x+2)-x}{2\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{x+2}{2\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x+1}},$$

   ezért :

$$f'(3) = \frac{x+2}{2\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x+1}}\Big|_{x=3} = \frac{5}{16}.$$

   A keresett érintő egyenlete :

$$y = \frac{3}{2} + \frac{5}{16}\cdot(x-3),$$

   vagy :

$$\underline{y = \frac{5}{16}\cdot x + \frac{9}{16}}.$$

   c) Az előző pont alapján az f deriváltfüggvénye :

$$f'(x) = \frac{x+2}{2\cdot(x+1)\cdot\sqrt{x+1}} > 0 \quad \forall x \in I := (-1;+\infty) \Longrightarrow$$

   az f szigorúan monoton nő az I intervallumon, tehát f invertálható.

---

2. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek értékét úgy, hogy alábbi függvény deriválható legyen és adjuk meg a deriváltfüggvényt.

$$f(x) = \begin{cases} a\cdot e^{2x} + b\cdot\cos x, & \text{ha } x \in (-\infty;0); \\ x^4 + 5x^2 - 4x + 1, & \text{ha } x \in [0;+\infty). \end{cases} \qquad (\mathbf{10}\ \text{pont})$$

   Megoldás :

(a) Ha $x \in (-\infty; 0) \Longrightarrow f \in D\{x\}$ és $f'(x) = (a \cdot e^{2x} + b \cdot \cos x)' = 2a \cdot e^{2x} - b \cdot \sin x$.

(b) Ha $x \in (0; +\infty) \Longrightarrow f \in D\{x\}$ és $f'(x) = (x^4 + 5x^2 - 4x + 1)' = 4x^3 + 10x - 4$.

(c) Az $x = 0$ pontban f pontosan akkor deriválható, ha :

$$f \in C\{0\} \ \wedge \ f_b'(0) = f_j'(0).$$

- Az első feltételhez :

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (a \cdot e^{2x} + b \cdot \cos x) = a + b;$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x^4 + 5x^2 - 4x + 1) = 1 = f(1).$$

Mindezek alapján :

$$f \in C\{0\} \Longleftrightarrow a + b = 1.$$

- Az egyoldali deriválak az alábbiak :

$$f_b'(0) = 2a \cdot e^{2x} - b \cdot \sin x \Big|_{x=0-0} = 2a;$$

$$f_j'(0) = 4x^3 + 10x - 4 \Big|_{x=0+0} = -4.$$

A deriválhatóságra tett második feltétel alapján :

$$2a = -4 \Longleftrightarrow a = -2.$$

A két feltétel pontosan akkor teljesül, ha

$$\underline{a = -2 \ \wedge \ b = 3.}$$

Ekkor a derivált 0−ban :

$$f'(0) = -4.$$

Összefoglalva a deriválható f és annak f' deriváltfüggvénye az alábbiak :

$$f(x) = \begin{cases} -2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot \cos x, & \text{ha } x \in (-\infty; 0); \\ x^4 + 5x^2 - 4x + 1, & \text{ha } x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

és

$$f'(x) = \begin{cases} -4 \cdot e^{2x} - 3 \cdot \sin x, & \text{ha } x \in (-\infty; 0); \\ 4x^3 + 10x - 4, & \text{ha } x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

---

3. Hogyan válasszuk meg egy henger alakú zárt tartály méreteit (alapkör sugara és magassága), hogy a térfogata 8000 m^3 legyen és az előállításához szükséges anyagfelhasználás (homogén az anyag mindenhol) minimális legyen ? (8 **pont**)

Megoldás : Jelölje $R > 0$ és $m > 0$ a henger alapkörének sugarát illetve magasságát. Ekkor a megadott tartály térfogata és teljes felszíne (palástfelszín, alapkör és fedőlap összterülete) az R és m függvényében :

$$V(R, m) = \pi \cdot R^2 m \ \wedge \ F(R, m) = 2\pi Rm + 2\pi R^2 \quad (R, m > 0).$$

A feltétel szerint :

$$V(R, m) = \pi R^2 m = 8000 \Longrightarrow m = \frac{8000}{\pi R^2}.$$

Helyettesítsük be a felszín képletébe az $m-$et és így kapjuk $R-$nek egyváltozós függvényét :

$$f(R) := 2\pi R \cdot \frac{8000}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{16000}{R} + 2\pi R^2 \quad (R > 0).$$

Ekkor $f \in D$ és

$$f'(R) = -\frac{16000}{R^2} + 4\pi R \quad (R > 0).$$

Világos, hogy :

$$f'(R) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{16000}{R^2} + 4\pi R = 0 \Longleftrightarrow R = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$

$$f'(R) > 0 \Longleftrightarrow -\frac{16000}{R^2} + 4\pi R > 0 \Longleftrightarrow R > 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$

$$f'(R) < 0 \Longleftrightarrow -\frac{16000}{R^2} + 4\pi R < 0 \Longleftrightarrow 0 < R < 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$

A határértékek a "végpontokban" :

$$\lim_{R\to 0+0} \left(\frac{16000}{R} + 2\pi R^2\right) = +\infty,$$

és

$$\lim_{R\to +\infty} \left(\frac{16000}{R} + 2\pi R^2\right) = +\infty.$$

Mivel f szigorúan monoton csökken a $\left(0, 10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right)$ intervallumon, szigorúan monoton nő a $\left(10\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}; +\infty\right)$ intervallumon és f folytonos, ezért abszolút minimumot kaptunk az

$$\underline{R = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}}$$

pontban. Abszolút maximum nincs. A henger magassága :

$$\underline{m = \frac{8000}{\pi R^2} = \frac{40}{\sqrt[3]{2\pi}}.}$$

A minimális felszín értéke :

$$\underline{f\left(10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right) = 1200 \cdot \sqrt[3]{2\pi}.}$$

– –

4. Végezzünk teljes tárgyalást (monotonitás, szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok, határértékek, aszimptoták) és ábrázoljuk a következő függvényt :

$$f(x) := \frac{x}{(x+3)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}). \quad (\mathbf{14}\text{ pont})$$

Megoldás :

(a) **Tengelymetszési pontok :** $f(0) = 0$ és $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x}{(x+3)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, tehát f a $(0, 0)$ pontban metszi mindkét tengelyt.

(b) f' **és előjele :** $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ esetén $f \in D\{x\}$ és :

$$\underline{f'(x)} = \left(\frac{x}{(x+3)^2}\right)' = \frac{1 \cdot (x+3)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+3)}{(x+3)^4} = \underline{\frac{3-x}{(x+3)^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}).}$$

Ekkor :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{3-x}{(x+3)^3} = 0 \iff x = 3;$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{3-x}{(x+3)^3} > 0 \iff x \in (-3;3);$$

$$f'(x) < 0 \iff \frac{3-x}{(x+3)^3} < 0 \iff x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty).$$

Tételeink alapján : f *szigorúan monoton fogy* a $(-\infty;-3)$ illetve a $(3;+\infty)$ intervallumonkon és *szigorúan monoton nő* a $(-3;3)$ intervallumon. Mivel a deriváltfüggvény előjelet vált az $x = 3$ helyen $(+ \to -)$ ezért itt *lokális maximum* van, melynek értéke :

$$\underset{\sim\sim\sim}{f(3) = \frac{1}{12}}.$$

(c) f'' **és előjele :** $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ esetén $f \in D^2\{x\}$ és :

$$\underset{\sim\sim}{f''(x)} = \left(\frac{3-x}{(x+3)^3}\right)' = \frac{-1 \cdot (x+3)^3 - (3-x) \cdot 3 \cdot (x+3)^2}{(x+3)^6} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2 \cdot (x-6)}{(x+3)^4} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\})}.$$

Ekkor, mivel a nevező az értelmezési tartomány pontjaiban pozitív, ezért :

$$f''(x) = 0 \iff \frac{2 \cdot (x-6)}{(x+3)^4} = 0 \iff x = 6;$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{2 \cdot (x-6)}{(x+3)^4} > 0 \iff x \in (6;+\infty);$$

$$f''(x) < 0 \iff \frac{2 \cdot (x-6)}{(x+3)^4} < 0 \iff x \in (-\infty;6) \setminus \{-3\}.$$

Tételeink alapján : f *konkáv* a $(-\infty;-3)$, illetve a $(-3;6)$ intervallumonkon és *konvex* a $(6;+\infty)$ intervallumon. Mivel a második derivált előjelet vált az $x = 6$ helyen $(-\ 0\ +)$ ezért itt *inflexiós* pontja van. Az itteni érték :

$$\underset{\sim\sim\sim}{f(6) = \frac{2}{27}}.$$

(d) **Határértékek, aszimptoták :**

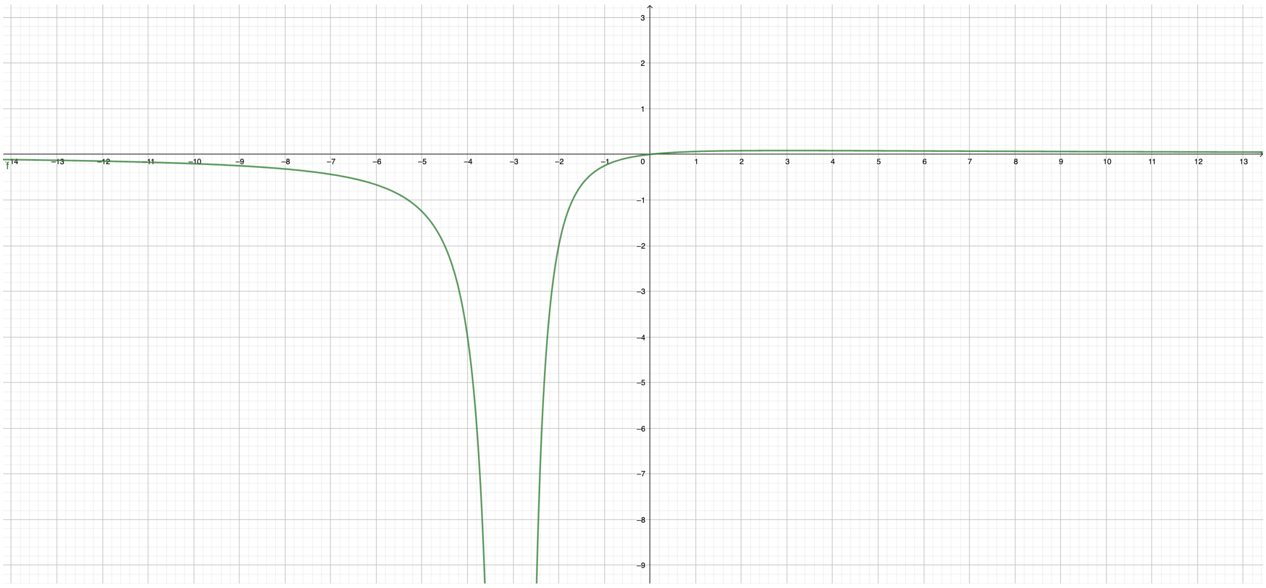
$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(\pm 0)^2} = \frac{-3}{+0} = -\infty,$$

ami azt jelenti, hogy az $x = -3$ egyenes függőleges aszimptota.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{(x+3)^2} = (L'H) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2 \cdot (x+3)} = \frac{1}{\pm\infty} = \pm 0,$$

azaz az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptota $\pm\infty-$ben.

(e) **Táblázat, grafikon :**



---

5. Írjuk fel az

$$f(x) := \operatorname{arctg}(\cos(x)) \ \ (x \in \mathbb{R})$$

függvény $a = 0$ ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomját. (8 **pont**)

Megoldás : A keresett polinom az alábbi :

$$T_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

A szükséges deriváltak léteznek minden x valós helyen, így 0−ban is, ezért :

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\cos(x)), \quad f(0) = \operatorname{arctg}(\cos(0)) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4};$$

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}, \quad f'(0) = -\frac{\sin 0}{1 + \cos^2 0} = 0;$$

$$f''(x) = \Big(-\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\Big)' = -\frac{\cos x \cdot (1 + \cos^2 x) + 2\sin^2 x \cdot \cos x}{(1 + \cos^2 x)^2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{2}.$$

Mindezek alapján a 0 körüli másodfokú Taylor-polinom az alábbi parabola :

$$T_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$