2. előadás
Differenciálszámítás 2.

Emlékeztető:

- A derivált fogalma.
- Lineáris közelítés. Érintő.
- Deriválási szabályok ($+$, $\cdot$, $:$, $\circ$, h.s., inverz).
- Elemi függvények deriváltjai.

Megállapodás: Függvényen a továbbiakban mindig valós-valós (azaz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú) függvényt értünk.

Az óra anyaga

1. Egyoldali deriváltak
2. Magasabb rendű deriváltak
3. Lokális szélsőértékek. Elsőrendű szükséges feltétel
4. Középértéktételek
5. Monotonitás

Az óra anyaga

1. Egyoldali deriváltak

Definíció.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$. *T.f.h.* $\exists\, \delta > 0 :\ [a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. *A.m.h.* f *az* ***a* pontban jobbról deriválható** (*vagy* **differenciálható**), *ha*

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{határérték.}$$

Ezt az f *függvény* ***a* pontbeli jobb oldali deriváltjának** (*vagy* **differenciálhányadosának**) *nevezzük, és* $\boxed{f'_+(a)}$*-val jelöljük.*

Az ***a* pontbeli bal oldali deriváltat** hasonlóan értelmezzük, és $\boxed{f'_-(a)}$-vel jelöljük.

A definíciókból közvetlenül következik, hogy

$$f \in D\{a\} \iff \exists\ f'_+(a),\ \exists\ f'_-(a) \text{ és } f'_+(a) = f'_-(a)\ (= f'(a)).$$

Példa.

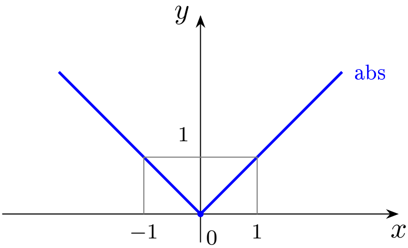
abs $\notin D\{0\}$,

de

$\text{abs}'_+(0) = 1$

és

$\text{abs}'_-(0) = -1$



Az óra anyaga

2. Magasabb rendű deriváltak

A magasabb rendű deriváltak fogalmát rekurzióval értelmezzük. Először a **kétszer deriválhatóság** fogalmát definiáljuk.

Definíció.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. A.m.h. f ***kétszer deriválható az*** *$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* ***pontban*** *(jelölése: $\boxed{f \in D^2\{a\}}$), ha*

- *a függvény deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében, azaz $\exists\, r > 0 : \ f \in D\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az f' deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

*az f függvény a-**beli második deriváltja**.*

Ha $H := \{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor

$$H \ni x \mapsto f''(x)$$

az f függvény **második deriváltfüggvénye**, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések a deriváltakra és a deriváltfüggvényekre:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(a) &:= f'(a) \quad \text{és} \quad f^{(1)} := f', \\ f^{(2)}(a) &:= f''(a) \quad \text{és} \quad f^{(2)} := f'', \\ f^{(0)}(a) &:= f(a) \quad \text{és} \quad f^{(0)} := f. \end{aligned}$$

Indukcióval értelmezzük az *n-szeri deriválhatóságot* és az *n-edik deriváltat*. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$-szer egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

Definíció.

T.f.h. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és egy* $n = 2, 3, \ldots$*-re* $\exists$ *az* $f^{(n-1)}$ *deriváltfüggvény. A.m.h.* f ***n-szer deriválható az*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***pontban*** *(jelölése:* $\boxed{f \in D^n\{a\}}$*), ha*

- $\exists\, r > 0: \;\; f \in D^{n-1}\big(K_r(a)\big)$, *és*
- *az* $f^{(n-1)}$ *függvény deriválható* a*-ban, azaz* $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \big(f^{(n-1)}\big)'(a)$$

az f *függvény* a***-beli*** n***-edik deriváltja.***

Ha $H := \{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor

$$H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$$

az f függvény n**-edik deriváltfüggvénye**, jelben: $f^{(n)}$.

Ha egy f-re minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor a.m.h. az f függvény a**-ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ezt így jelöljük: $f \in D^\infty\{a\}$.

Ha ez minden $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az f **függvény végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk: $\boxed{f \in D^\infty}$.

Példák.

1° $\exp \in D^\infty$ és $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x \ (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

2° $\sin,\ \cos \in D^\infty$ és $\forall\, x \in \mathbb{R}$ és $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\sin x\right)^{(2n)} = (-1)^n \cdot \sin x, \qquad \left(\sin x\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \cdot \cos x,$$

$$\left(\cos x\right)^{(2n)} = (-1)^n \cdot \cos x, \qquad \left(\cos x\right)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot \sin x.$$

3° Ha

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

akkor $f \in D^\infty$ és $f^{(n)}(0) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$.

Megjegyzés. A magasabb rendű deriváltak kiszámolása általában nem egyszerű feladat. ■

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

Tétel.

Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor

$$\mathbf{1^o}\ f+g \in D^n\{a\} \quad \textit{és} \quad \big(f+g\big)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a),$$

$$\mathbf{2^o}\ f \cdot g \in D^n\{a\} \quad \textit{és} \quad \big(f \cdot g\big)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

(*Ez a **Leibniz-szabály**.*)

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható. ■

Az óra anyaga

3. Lokális szélsőértékek. Elsőrendű szükséges feltétel

Eml. Abszolút szélsőérték(hely) fogalma (l. An. I., 11. ea). Célszerű bevezetni ezek **lokális** változatait.

Definíció. *Az f fv-nek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban **lokális maximuma van**, ha*

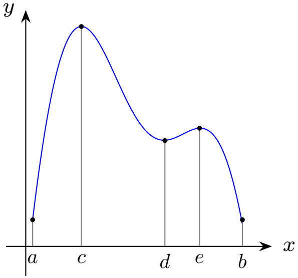
$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f, \ \textit{hogy}\ \forall\, x \in K(a): \ \ f(x) \le f(a).$$

*Az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont f **lokális maximumhelye**, $f(a)$ pedig f **lokális maximuma**.*

A lokális minimumhelyet és a **lokális minimumot** hasonlóan értelmezzük. A lokális maximum(hely), minimum(hely) közösen **lokális szélsőérték(hely)**.

Szigorú lokális szélsőérték(hely)ekről beszélünk akkor, ha „$\le$”, ill. „$\ge$” helyett „$<$”, ill. „$>$” teljesül.

Az abszolút és a lokális szélsőértékek kapcsolata.



- a és b abszolút és nem lokális minimumhelyek,
- c abszolút és lokális maximumhely,
- d lokális és nem abszolút minimumhely,
- e lokális és nem abszolút maximumhely.

Ha egy belső pont abszolút szélsőértékhely, akkor az egyúttal lokális szélsőértékhely is.

Tétel: Elsőrendű szükséges feltétel a lok. szé-re.

T.f.h. az f függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor

$$f'(a) = 0.$$

Biz. T.f.h. f-nek a-ban *lokális maximuma* van, azaz $\exists\, r > 0$:

$$\forall\, x \in (a-r, a+r): \; f(x) \le f(a) \implies f(x) - f(a) \le 0.$$

Tek. az f fv. a-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big).$$

Ha $a < x < a + r \implies x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \le 0 \implies$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0 \implies \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) \le 0.$$

Ha $a-r<x<a \implies x-a<0$ és $f(x)-f(a)\leq 0 \implies$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0 \implies \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_-(a)\geq 0.$$

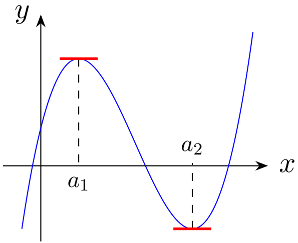
Mivel $f\in D\{a\}$, ezért

$$\underbrace{f'_-(a)}_{\geq 0}=\underbrace{f'_+(a)}_{\leq 0}=f'(a)=0.$$

A bizonyítás hasonló akkor is, ha f-nek a-ban *lokális minimuma* van. ∎

Megjegyzések.

1° Deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. Ezekben a pontokban az érintőegyenes vízszintes, azaz párhuzamos az x tengellyel.



A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

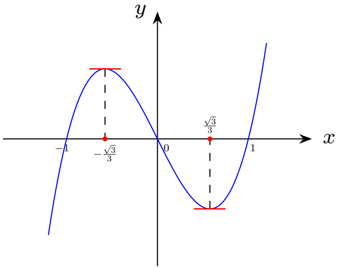
Példa. Legyen $f(x) := x^3 - x$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$f \in D, \qquad f'(x) = 3\,x^2 - 1 \ (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Így a lehetséges lokális szélsőértékhelyek: $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$$



2^o Az állítás visszafele **nem** igaz:

$$f'(a) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f\text{-nek } a\text{-ban lok. sz.é-e van.}$$

Például, ha $f(x) := x^3\ (x \in \mathbb{R}) \Longrightarrow\ f'(x) = 3x^2\ (x \in \mathbb{R})$ miatt $f'(0) = 0$, de f-nek 0-ban **nincs** lok. sz.é-e (ui. $f \uparrow \mathbb{R}$-en).
Így, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a) = 0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy f-nek a-ban lok. sz.é-e legyen.

Definíció.

*Az f függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ **stacionárius pontja**, ha $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$.*

Probléma: A stacionárius pontok közül hogyan választhatók ki a lok. sz.é. helyek.

Az óra anyaga

4. Középértéktételek

Tétel: A Rolle-féle k.é.t. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b), \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \exists\ \xi \in (a,b),\ \textit{hogy} \\ f'(\xi) = 0. \end{array}$$

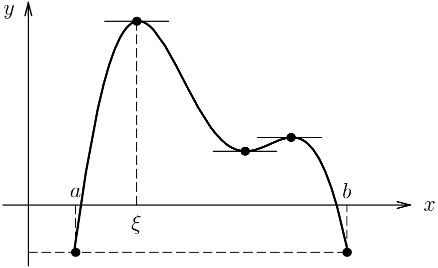
Biz. $f \in C[a,b] \implies$ (Weierstrass-tétel) $\exists\, \alpha,\ \beta \in [a,b]$:

$$f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

<u>1. eset: $m = M$.</u> Ekkor f állandó, így $\forall\ \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = 0$.

<u>2. eset: $m \neq M$</u>. Mivel $f(a) = f(b)$, ezért α és β közül legalább az egyik (pl. α) (a,b)-be esik. Ekkor $\xi := \alpha \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = (a,b)$, és f-nek ξ-ben lokális minimuma van. Mivel $f \in D\{\xi\} \implies$ (az elsőrendű szükséges feltétel) $f'(\xi) = 0$. ■

Megjegyzés. A Rolle-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az x-tengellyel:



Tétel: A Lagrange-féle k.é.t. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists\ \xi \in (a,b),\ \textit{hogy} \\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{array}$$

Biz. Az $\big(a, f(a)\big)$ és a $\big(b, f(b)\big)$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Igazoljuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad \big(x \in [a,b]\big)$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.

Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a,b]$-n és deriválhatók (a,b)-n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) + f(a) \right) = 0,$$

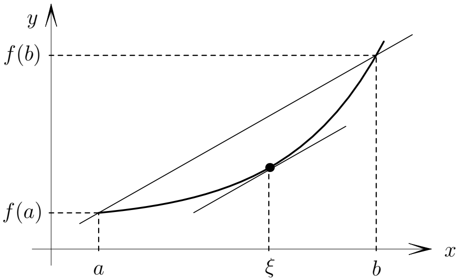
tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül. A Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a,b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a, b]$-n és deriválható (a, b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben húzott érintő párhuzamos az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ pontokon áthaladó szelővel:



Tétel: A deriváltak egyenlősége. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *T.f.h.* $f, g \in D(a, b)$. *Ekkor*

1° $f' \equiv 0$ (a, b)*-n* $\iff$ $f \equiv$ *állandó* (a, b)*-n.*

2° $f' \equiv g'$ (a, b)*-n* $\iff$ $\exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c\ \big(x \in (a, b)\big)$.

Bizonyítás.

1° $\boxed{\Longleftarrow}$ ✓, ui. a konstansfüggvény deriváltja 0.

$\boxed{\Longrightarrow}$ A Lagrange k.é.t. következménye. Valóban, ha $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ tetszőleges $\Longrightarrow f \in C[x_1, x_2]$, $f \in D(x_1, x_2) \Longrightarrow$

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2)\colon\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2).$$

2° Az $F := f - g$ függvényre alkalmazzuk az **1°** állítást. ■

Példa. *Igazoljuk az*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \quad (x > 0).$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás.

$\boxed{\ln(x+1) < x \ (x > 0)}$ Legyen $x > 0$ tetszőleges rögzített szám, $a := 1$ és $b = x+1$. Ha $f := \ln$, akkor $f \in C[a,b]$ és $f \in D(a,b)$, így a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $1 = a < \xi < b = x+1$, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

De $f'(\xi) = \dfrac{1}{\xi} < 1 \implies \dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1 \implies \ln(x+1) < x.$

$\boxed{x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) \ (x > 0)}$ Legyen $x > 0$, és alkalmazzuk az előző módszert az

$$f(t) := \ln t + \frac{(t-1)^2}{2} \ (t > 0)$$

függvénnyel. Ekkor van olyan $1 < \xi < x + 1$, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = \frac{\ln(x+1) + \frac{x^2}{2}}{x}.$$

Mivel $f'(t) = \frac{1}{t} + t - 1 \ (t > 0)$, ezért

$$f'(\xi) = \underbrace{\frac{1}{\xi} + \xi}_{>2} - 1 > 1,$$

amiből az igazolandó egyenlőtlenség következik. ■

Tétel: A Cauchy-féle k.é.t. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in C[a,b], \\[1em] \bullet\ f, g \in D(a,b), \\[1em] \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a,b),\ \textit{hogy} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \end{array}$$

Biz. A Rolle-tételből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$. Valóban, $g(a) = g(b)$-ből az következne, hogy g deriváltja nulla az (a, b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x) - g(a)\big) \quad \big(x \in [a,b]\big).$$

Az F függvény folytonos $[a, b]$-n, deriválható (a, b)-n és $F(a) = F(b) = 0$. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $F'(\xi) = 0$. Ekkor

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi) \neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy

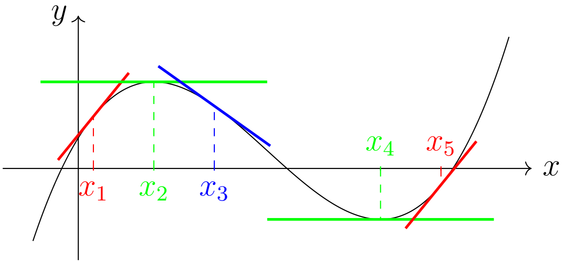
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \blacksquare$$

Az óra anyaga

5. Monotonitás

Eml. Monotonitási fogalmak: $\nearrow$, $\searrow$, $\uparrow$, $\downarrow$ (l. An. I., 10. ea)

Várható: ha a függvény deriválható egy intervallumon, akkor a monotonitás és a derivált között kapcsolat van.



Az érintő viselkedése

Tétel: A monotonitás és a derivált kapcsolata. *Legyen* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *egy* ***nyílt intervallum****. T.f.h.* $f \in D(a, b)$*. Ekkor*

1º $f \nearrow \ [\searrow] \ (a, b)$-*n* $\iff f' \geq 0 \ [\, f' \leq 0\,] \ (a, b)$-*n;*

2º *ha* $f' > 0 \ [\, f' < 0\,] \ (a, b)$-*n* $\Longrightarrow f \ \uparrow \ [\downarrow] \ (a, b)$-*n.*

Bizonyítás.

1º $\boxed{\Longrightarrow}$ Ha $f \nearrow \ (a, b)$-n és $t \in (a, b)$ egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0 \quad (t < x < b),$$

hiszen $x - t > 0$ és a monotonitás miatt $f(x) - f(t) \geq 0$. Mivel $f \in D\{t\}$, így

$$f'(t) = f'_+(t) = \lim_{x \to t+0} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ha $\forall x \in (a,b)\colon f'(x) \geq 0$, akkor legyen $x, y \in (a,b)$, $x < y$ két tetszőleges pont. Ekkor $f \in C[x,y]$, $f \in D(x,y)$, és így a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists\, \xi \in (x,y)\colon \ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \geq 0 \implies f(x) \leq f(y).$$

Ezért $f \nearrow (a,b)$-n.

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetében is.

$\mathbf{2^o}$ Alkalmazzunk „éles" egyenlőtlenségeket $\mathbf{1^o}$-ben a $\boxed{\Longleftarrow}$ irányban. ∎

Megjegyzések.

1° A derivált előjeléből következtethetünk a (szigorú) monotonitásra.

2° A tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \text{ akkor } f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \big(\forall\, x \in \mathcal{D}_f\big),$$

de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami **nem intervallum**. Világos, hogy $f \downarrow \mathbb{R}^-$-on és szintén $\downarrow \mathbb{R}^+$-on. ■

A **szigorú monotonitásra** vonatkozó elégséges feltételek nem szükségesek, azaz az állítások nem fordíthatók meg. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

fv. $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en, de a deriváltja 0 értéket is felvesz, ui. $f'(0) = 0$.

Tétel: Szüks. és elégs. felt. a szig. mon-ra.

Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *egy nyílt intervallum. T.f.h.* $f \in D(a, b)$.
Ekkor $f \uparrow [\downarrow]$ (a, b)*-n* $\iff$
$f' \geq 0$ $[\, f' \leq 0 \,]$ (a, b)*-n, és* (a, b)*-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen* f' *azonosan* 0.

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Feladat. Monotonitás szempontjából vizsgáljuk meg a következő függvényeket: exp, log, $\exp_a$, $\log_a$, x^α $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

Kiterjesztés tetszőleges korlátos intervallumra. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Ha f (szigorúan) monoton (a, b)-n és **folytonos** az intervallum egyik (vagy mindegyik) végpontjában, akkor a (szigorú) monotonitás kiterjeszthető végpontokkal bővített intervallumra. Például fennáll a következő állítás.

Tétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. T.f.h. $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

$$f \quad \nearrow \quad [\searrow] \quad [a, b]\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \geq 0 \quad [f' \leq 0] \quad (a, b)\text{-n}.$$

Bizonyítás. Az előzőek és a folytonosságra vonatkozó átviteli elv felhasználásával meggondolható. $\blacksquare$

Példa. *Igazoljuk az*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \quad (x > 0)$$

egyenlőtlenséget!

1. megoldás. A Lagrange-k.é.t-lel. ✓

2. megoldás.

$\boxed{\ln(x+1) < x \ (x > 0)}$. Legyen

$$f(x) := x - \ln(x+1) \ (x \geq 0).$$

Ekkor $f \in C\big(\mathbb{R}_0^+\big)$, $f \in D(\mathbb{R}^+)$ és

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0 \ \ (x > 0).$$

Tehát $f \uparrow \mathbb{R}_0^+$-on és $f(0) = 0 \Longrightarrow f(x) > 0 \ (\forall\, x > 0)$.

$\boxed{x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) \ (x > 0)}$. Legyen

$$g(x) := \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 0).$$

Ekkor $g \in C\big(\mathbb{R}_0^+\big)$, $g \in D(\mathbb{R}^+)$ és

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0 \quad (x > 0).$$

Tehát $g \uparrow \ \mathbb{R}_0^+$-on és $g(0) = 0 \Longrightarrow g(x) > 0 \ (\forall\, x > 0)$.