10. gyakorlat

PRIMITÍV FÜGGVÉNY, HATÁROZATLAN INTEGRÁL 4.

Emlékeztető.

1. A második helyettesítési szabály.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in J)$, továbbá az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

2. Linearizáló formulák.

Az úgynevezett „linearizáló formulákat” a $\cos(2x)$ függvény alábbi átalakításaiból vezettük le:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

$$= 1 - 2\sin^2(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}.$$

A linearizáló formulákat az integrálszámításban korábban a $\sin^2$ illetve $\cos^2$ függvények primitív függvényeinek meghatározásához használtuk. Például:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int 1 - \cos(2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Trigonometrikus helyettesítő formulák.

Ebben a fejezetben főként a sin és cos függvények racionális törtfüggvényeinek integrálásával foglalkozunk. Az integrálást a második helyettesítési szabály segítségével végezzük majd el - az előző fejezetben látottakhoz hasonló módon, polinomok racionális függvényeire való visszavezetéssel. Ehhez fel fogjuk használni a sin és cos függvények tangens függvénnyel való kifejezéseit.

A formulákat félszögekre való áttéréssel és a négyzetes összefüggés alkalmazásával kapjuk meg:

$$\boxed{\sin(x)} = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \boxed{= \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}},$$

valamint ezzel analóg módon:

$$\boxed{\cos(x)} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \boxed{= \frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

Figyeljük meg, hogy a törtek $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$-el való egyszerűsítése miatt a fenti formulák pontosan akkor értelmezettek, ha $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, vagyis minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + k \cdot 2\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ esetén.

1. feladat. $\displaystyle\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\, dx}$ ***alakú integrálok***, *ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a*

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

helyettesítést, azaz az $x = 2\operatorname{arc\,tg} t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazva a feladatot racionális törtfüggvény integráljára vezetjük vissza.

Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\, dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big)$.

Megoldás.

(a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big)}$

A leírás szerint a $g : J \to I$, $g(t) := 2\operatorname{arc\,tg}(t)$ függvény értékeivel szeretnénk az x változó értékeit helyettesíteni. A következő megfigyeléseket tesszük:

- $x \in I = (0,\pi)$, így olyan $J \subset \mathbb{R}$ intervallumot keresünk, melyre $\mathcal{D}_g = J$ esetén $\mathcal{R}_g = I$ teljesül. Az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény szigorúan monoton növő kölcsönösen egyértelmű függvény, és minden $x \in I$ esetén $\frac{x}{2} \in (0,\pi/2)$, így $g(t) = 2\operatorname{arc\,tg}(t) = x \Leftrightarrow t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ teljesül valamilyen $t \in (0,+\infty)$ valós értékre.
  Tehát legyen $J = (0,+\infty)$, ekkor $g : J \to I$ **bijekció**.
- A helyettesítéshez a bevezetőben levezetett trigonometrikus heyettesítő formulát használjuk:
$$I = (0,\pi) \ni x = 2\operatorname{arc\,tg}(t) \quad \big(t \in (0,+\infty) = J\big),$$
$$\sin(x) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$
- A helyettesítő függvény deriváltja:
$$g'(t) = (2\operatorname{arc\,tg}(t))' = \frac{2}{1+t^2} \neq 0 \quad \big(t \in (0,+\infty) = J\big).$$

Mindezek alapján a második helyettesítési szabály alkalmazásával a feladatot racionális törtfüggvény integráljára vezetjük vissza:

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{t}\, dt\,.$$

Mivel $t > 0$, ezért a határozatlan integrál értéke

$$\int \frac{1}{t}\, dt = \ln t + c,$$

így a keresett integrál

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = (\ln t + c)\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c \quad \big(x \in (0,\pi)\big).$$

(b) $\boxed{\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big)}$

Ismét a $g : J \to I$, $g(t) := 2\operatorname{arc\,tg}(t)$ függvény értékeivel szeretnénk helyettesíteni. Az előző feladathoz hasonlóan ezúttal is $x \in I = (0,\pi)$, így a $J = (0,+\infty)$ választással $g : J \to I$ bijekció.

A $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ összefüggés alapján a sin függvény értékeit ezúttal is a

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

törtfüggvény értékei adják. Mellette

$$\cos(x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

tehát a cos függvény értékeit is racionális törtek helyettesítik.

Végül a helyettesítő függvény deriváltja ismét $g'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, így a második helyettesítési szabály alkalmazásával:

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\cdot 2}{(1+t^2)-(1-t^2)}\,dt =$$
$$= \int \frac{(1+t^2)+2t}{t^2(1+t^2)}\,dt = \int \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t(1+t^2)}\,dt = \int \frac{1}{t^2} + \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}\,dt.$$

Tehát a második tört parciális törtes alakját keressük:

$$\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2)+t(Bt+C)}{t(1+t^2)} = \frac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(1+t^2)} = \frac{2}{t(1+t^2)} \quad (\forall t > 0)$$

teljesüléséhez az $A + B = 0$, $C = 0$ és $A = 2$ feltételek teljesülése szükséges. Vagyis $B = -2$ értékkel megkapjuk a kívánt felbontást:

$$\int \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t(1+t^2)}\,dt = \int \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + 2\ln(t) - \ln(1+t^2) + c \quad (\forall t > 0).$$

Vagyis a határozatlan integrál értéke

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \left(-\frac{1}{t} + 2\ln(t) - \ln(1+t^2) + c\right)\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$
$$= -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c \quad \big(x \in (0,\pi)\big).$$

2. feladat. *Számítsuk ki az*

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big)$$

határozatlan integrált az integrandus alábbi átalakításaival:

(a) *az integrálandó függvényt* $\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = 1$*-gyel megszorozzuk,*

(b) *félszögekre térünk át!*

Hasonlítsuk össze a háromféleképpen kapott eredményt!

Megjegyzés. *Az integrandus a* $(0, 2\pi)$ *intervallumon folytonos, ezért van primitív függvénye. A* (b) *átalakítással ezen az intervallumon is megkapjuk a primitív függvényt.*

Megoldás.

(a) Az előírt átalakítással
$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx \qquad \big(x\in(0,\pi)\big).$$
A nevezőben $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ található, így az integrál az alábbi négytagú összegre esik szét:
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int -\frac{-1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}+\cos x\cdot\sin^{-2}x+\cos x\cdot\sin^{-1}x\,dx.$$
Itt az első tag alapintegrál, a második tag primitív függvényeit az előző feladatban meghatároztuk, az utolsó két tag pedig az első helyettesítési szabállyal kiszámítható, $\int f^\alpha\cdot f'$ alakú integrálok:
$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = -\operatorname{ctg} x+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\sin x}+\ln(\sin x)+c \qquad \big(x\in(0,\pi)\big).$$

(b) Félszögekre áttérve
$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}\,dx = \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx,$$
amit az előző megoldáshoz hasonló alaptípusokra visszavezetve számolhatunk ki:
$$= \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)+c \qquad \big(x\in(0,\pi)\big).$$

Végül vessük össze a három módszerrel kapott eredményeket! Az ebben a feladatban az (a) és (b) pontokban kapott határozatlan integrálok ekvivalenciája a következő átalakításokból látható: minden $x\in(0,\pi)$ esetén
$$\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = \ln\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right) = \ln 2+2\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right),$$
valamint
$$-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin x} = -\frac{1+\cos x}{\sin x} = -\frac{1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$
Látjuk tehát, hogy a levezetés során az (a) és (b) részben kapott primitív függvények csak az $\ln 2$ konstansban különböznek, tehát a két határozatlan integrál valóban egyenlő.

Mutassuk meg az ekvivalenciát az **1. feladat** (b) részében kapott eredménnyel, vagyis a
$$-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+c \qquad \big(x\in(0,\pi)\big)$$
primitív függvényekkel.

Ehhez vegyük észre, hogy minden $x\in(0,\pi)$ esetén
$$2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = 2\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)-2\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right),$$
ahol
$$-2\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = -\ln\left(\cos^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) = -\ln 1 = 0.$$

Tehát
$$-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+c=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)+c\quad\big(x\in(0,\pi)\big),$$
vagyis az **1. feladat** (b) részében kapott eredmény valóban megegyezik ennek a feladatnak a (b) részében kapott eredménnyel.

Ahogy arra a **Megjegyzés** is rávilágít, a három számítási mód közül a **2. feladat** (b) részében alkalmazott módszer alkalmas arra, hogy az
$$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx\qquad\big(x\in(0,2\pi)\big)$$
határozatlan integrált esetekre bontás nélkül kiszámítsuk. Ennél a megközelítésnél nem használtuk ki a feladatban eredetileg szereplő $x\in(0,\pi)$ megkötést - az egyetlen tisztázatlan lépés a $\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ tag integrálása, ahol $x\in(0,2\pi)$ esetén $\frac{x}{2}\in(0,\pi)$, így a nevező pozitív vagyis a bővebb intervallumon is $2\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)$ egy primitív függvény.

Ezzel szemben az **1. feladat**ban trigonometrikus helyettesítést alkalmaztunk, amely a bevezetésben leírtak alapján kizárja az $x=\pi$ értéket, így az a módszer a bővebb intervallumon nem működik. A **2. feladat** (a) részében a bővítéshez használt függvény nem értelmezett a $\cos x=-1$ esetben, tehát az $x=\pi$ érték annál a megközelítésnél sem megengedett.

3. feladat. *Számítsuk ki az*

(a) $\displaystyle\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\,dx\quad(x\in\mathbb{R})$,

(b) $\displaystyle\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx\quad(x\in\mathbb{R})$

határozatlan integrálokat!

Megoldás.

Figyeljük meg, hogy ezek az integrandusok is felfoghatók a sin és cos függvények racionális törtfüggvényeiként, így az eddig tárgyalt trigonometrikus helyettesítés elvileg ebben a feladatban is alkalmazható. Azonban ekkor több dologra is figyelnünk kell:

- Egyrészt a teljes $x\in\mathbb{R}$ intervallumra nem tudjuk alkalmazni a második helyettesítési szabályt a „szokásos" $g(t)=2\operatorname{arc\,tg}(t)$ függvénnyel. Helyette az intervallumot le kellene szűkíteni egy megfelelő intervallumra, mondjuk $x\in I=(-\pi,\pi)$-re, ahol létezik megfelelő $J\subset\mathbb{R}$ intervallum (esetünkben $J=\mathbb{R}$), ahol $g:J\to I$ a feltételeknekmegfelelő bijekció. Ha ezen a szűkebb intervallumon megoldjuk a feladatot, onnan meggondolható, mik lehetnek a teljes valós halmazon értelmezett primitív függvények.

- Másrészt a trigonometrikus függvények magas hatványai miatt a helyettesítés után kapott racionális törtfüggvényekben a polinomok fokszáma magas lesz, ami nagyon nehézzé teszi a kézi számolást. Például az (a) feladatban a $(-\pi,\pi)$ intervallumra leszűkített integrál esetén a következő adódik:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3 \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt \Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} .$$

Így inkább más fajta módszert keresünk a feladat megoldására.

(a) $\boxed{\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx \quad (x \in \mathbb{R})}$

Csökkentsük a cos fokszámát 1-re a négyzetes azonosság alkalmazásával:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx =$$
$$= \int \left(\sin^2 x \cdot \cos x \;\; - \sin^4 x \cdot \cos x\right) dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Most mindkét tag $\int f^\alpha \cdot f'$ típusú és az első helyettesítési szabállyal integrálható:

$$\int \left(\sin^2 x \cdot \cos x \;\; - \sin^4 x \cdot \cos x\right) dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Általában is meggondolhatjuk, hogy ez a módszer alkalmas

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

alakú integrálok kiszámítására, feltéve, hogy legalább az egyik trigonometrikus tényező fokszáma **páratlan**. Ha ez nem teljesül, akkor a négyzetes azonossággal nem tudjuk visszavezetni az integrált az első helyettesítési szabály alaptípusára. Erre ad példát a következő feladat.

(b) $\boxed{\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx \quad (x \in \mathbb{R})}$

Ebben az esetben az előző feladatban mutatott módszer nem működik. Két lehetséges megoldást is mutatunk.

Első megoldás. Hasonlóan járunk el, mint a korábban tárgyalt, szintén páros fokszámú trigonometrikus hatványoknál: a $\sin^2$ illetve a $\cos^2$ függvények integrálásánál a linearizáló formulákat alkalmaztuk a hatványkitevő csökkentésére.

Itt hasonló módszerrel

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

adódik, ami beszorzás után az eredetihez hasonló, de alacsonyabb (fele akkora) fokszámú trigonometrikus szorzatokat eredményez:

$$= \frac{1}{8} \int \left(\sin^2(2x) + \sin^2(2x) \cdot \cos(2x)\right) dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az első tag a bevezetőben is szereplő $\sin^2$ integráljának lineáris helyettesítésével kezelhető, a második tagnál alkalmazhatjuk az előző feladat technikáját. Így

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin^3(2x)}{3 \cdot 2} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Második megoldás. Alkalmazzuk a négyzetes azonosságot:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx = \int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^4 x\, dx = \int \cos^4 x - \cos^6 x\, dx.$$

Kérdés, hogyan tudjuk most kezelni ezeket a koszinusz hatványokat. Egy, az előbbitől eltérő lehetőség a fokszám csökkentésére a parciális integrálás tételének alkalmazása. Nézzük meg ennek a módját egy általános $n \geq 2$ egész értékre:

$$\int \cos^n x\, dx = \int \cos x \cdot \cos^{n-1} x\, dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x \cdot (n-1) \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x)\, dx.$$

A jobb oldalon kapott integrálban a $\sin^2$ tagra alkalmazzuk a négyzetes összefüggést:

$$\int \cos^n x\, dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \cos^n x\, dx.$$

Láthatjuk, hogy ebből az egyenlőségből $\cos^n$ integrálja kifejezhető és így rekurzív képlettel számolható a fokszám folyamatos csökkentése mellett:

$$\boxed{\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx.}$$

A sin függvény hatványaira ehhez hasonló formula adható, lásd még a **8. gyakorlat** anyagában a **További feladatok** rész 1. feladatát.

Alkalmazzuk most ezt az összefüggést a feladatunk megoldására. Egyrészt $n = 6$ esetén

$$\int \cos^6 x\, dx = \frac{1}{6} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x\, dx,$$

amiből a keresett integrál

$$\int \cos^4 x - \cos^6 x\, dx = -\frac{1}{6} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{1}{6} \int \cos^4 x\, dx.$$

Ismételve alkalmazzuk a rekurzív összefüggést $n = 4$ majd $n = 2$ esetben:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x\, dx &= \frac{1}{4} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x\, dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \int 1\, dx \right] = \\ &= \frac{1}{4} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} x + c. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ez utóbbit megkapjuk a keresett integrált:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx = -\frac{1}{6} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{1}{24} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{1}{16} \sin x \cdot \cos x + \frac{1}{16} x + c.$$