7. gyakorlat

PRIMITÍV FÜGGVÉNY, HATÁROZATLAN INTEGRÁL 1.

Emlékeztető.

1. A primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma. Az alkalmazásokban gyakran felmerülnek olyan függvények, amelyeket a deriválás műveletének a „megfordításával” tudunk meghatározni.

Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}$ **nyílt intervallumon** értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a f **primitív függvénye**, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x) \ \ (x \in I)$.

Ha az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy F primitív függvénye, akkor végtelen sok is van, de azok F-től csak egy konstansban különböznek. Ez az állítás nem igaz, ha f értelmezési tartománya **nem intervallum**.

Az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük, és így jelöljük:

$$\int f := \int f(x)\,dx := \big\{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\big\}.$$

Ilyenkor f-re az **integrandus**, illetve az **integrálandó függvény** elnevezéseket is használjuk.

Ha $F \in \int f$, akkor ezt az alábbi formában fogjuk írni:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \big(x \in I\big).$$

Az adott f függvény értelmezési tartományát – vagyis az I intervallumot – mindig feltüntetjük, a $c \in \mathbb{R}$ feltételt a képletbe „beleértjük”, de azt sokszor nem írjuk ki.

2. Alapintegrálok. Az alapintegrálokat `ebben a táblázatban` soroltuk fel.

3. A határozatlan integrál linearitása. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx + \beta \cdot \int g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

Az ebbe a körbe tartozó, „elemi fogásokkal” megoldható feladatok sokszor nem egyszerűek, mert át kell alakítani az integrandust úgy, hogy fel tudjuk írni alapintegrálok lineáris kombinációjaként.

4. Az első helyettesítési szabály és speciális esetei. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást tanultunk. Az első a következő szabályt mondja ki:

Az első helyettesítési szabály. *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Az első helyettesítési szabály akkor használható, ha az $\int (f \circ g) \cdot g'$ integrált kell kiszámítanunk, és ismerjük f egy primitív függvényét. Igen gyakran előfordulnak az alábbi **speciális esetek**, ezért érdemes őket külön is kiemelni, begyakorolni:

- $\displaystyle\int \frac{f'}{f}$ **alakú integrálok**: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c \quad (x \in I)}.$$

- $\int \boldsymbol{f^\alpha \cdot f'}$ **alakú integrálok**: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $f \in D(I)$ és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor

$$\boxed{\int f^\alpha(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad (x \in I)}.$$

  Ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor az $f > 0$ feltétel nem szükséges.

- $\int \boldsymbol{f(ax+b)\,dx}$ **alakú integrálok (lineáris helyettesítés)**: Ha a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy $F : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\boxed{\int f(ax+b)\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad (ax+b \in I)}.$$

A fenti speciális eseteket úgy kapjuk meg az első helyettesítési szabályból, hogy az első esetben legyen $f(x) := 1/x \ \ (x > 0)$, a második esetben legyen $f(x) := x^\alpha \ \ (x > 0)$ (vagy $x \in \mathbb{R}$, ha $\alpha \in \mathbb{N}$), illetve a harmadik esetben legyen $g(x) := ax + b \ \ (ax + b \in I)$.

Úgy tudjuk ellenőrizni, hogy a kiszámított primitív függvény helyes, ha ezt deriváljuk és visszakapjuk az integrandust.

$\boxed{\textbf{5.}}$ **Parciális integrálás.** A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását” fejezi ki a következő állítás:

A parciális integrálás szabálya. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx \quad (x \in I).$$

A parciális integrálást akkor célszerű használni, ha a jobb oldalon álló $\int f'g$ integrált ki tudjuk valamilyen módszerrel számolni, akár egy újabb parciális integrálás alkalmazásával.

1. feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:*

(a) $f(x) := 6x^2 - 8x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$,

(d) $f(x) := \dfrac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} \quad \big(x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big)$.

Megoldás. Az integrandusok „alkalmas” átalakítása után a határozatlan integrál linearitására vonatkozó tételt felhasználva alapintegrálokat kapunk.

(a) $f(x) := 6x^2 - 8x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\int (6x^2 - 8x + 3)\, dx &= 6 \cdot \int x^2\, dx - 8 \cdot \int x\, dx + 3 \cdot \int 1\, dx = \\ &= 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + c = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 3x + c \quad \big(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\big).\end{aligned}$$

(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + c \quad (x,\ c \in \mathbb{R}).$$

(c) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$.

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int \left(x \cdot \left(x \cdot x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} dx = \int \left(x \cdot \left(x^{3/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} dx =$$

$$= \int \left(x \cdot x^{3/4}\right)^{1/2} dx = \int x^{7/8}\,dx = \frac{x^{7/8+1}}{7/8+1} + c =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \sqrt[8]{x^{15}} + c \quad \big(x \in (0,+\infty),\ c \in \mathbb{R}\big).$$

(d) $f(x) := \dfrac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} \quad \big(x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big)$.

$$\int \frac{\cos^2 x - 5}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 5}{\big(\sin^2 x + \cos^2 x\big) + \big(\cos^2 x - \sin^2 x\big)}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 5}{2\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{2} \cdot \operatorname{tg} x + c \qquad \big(|x| < \pi/2,\ c \in \mathbb{R}\big).$$

2. feladat. *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \big(x \in (1,+\infty)\big)$,

(d) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx \quad \Big(x \in \big(0, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$.

Megoldás. A feladatmegoldások során először általában az integrandust „alkalmas módon” át kell alakítanunk ahhoz, hogy az első helyettesítési szabály speciális eseteire vonatkozó képleteket használni tudjuk.

(a) $\underset{\sim\sim\sim}{\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})}$.

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \left(\int \frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = \int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx = \ln\left(x^2+3\right) + c \quad (x,\ c \in \mathbb{R}).$$

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^3 x \cdot (\sin x)'\,dx = \left(\int f^\alpha \cdot f' \text{ típus}\right) =$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} + c \quad (x,\ c \in \mathbb{R}).$$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \big(x \in (1, +\infty)\big)$.

Mivel $x \in (1, +\infty)$, ezért

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus és } \ln x > 0,\ \text{mert } x > 1\right) = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx =$$

$$= \ln\left(\ln x\right) + c \quad (x > 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés: Ha a feladat kitűzésében $x \in (0, 1)$ lenne, akkor:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus és } \ln x < 0,\ \text{mert } 0 < x < 1\right) = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx =$$

$$= \ln\left(-\ln x\right) + c \quad (0 < x < 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

(d) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

Az integrandus átalakításához a

$$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságot alkalmazzuk.

Ennek megfelően:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x\,dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \cdot \sin x\,dx =$$

$$= \int \left(\cos^4 x \cdot \sin x - \cos^6 x \cdot \sin x\right)\,dx = \int \left(\cos^6 x \cdot (\cos x)' - \cos^4 x \cdot (\cos x)'\right)\,dx =$$

$$= \left(\int f^\alpha \cdot f' \text{ típusok és } n \in \mathbb{N}\right) = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c \quad (x, c\ \in \mathbb{R}).$$

(e) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \quad (x\in\mathbb{R})\,.$

A már ismert linearizáló formulák segítségével (most csak az elsőre van szükség)

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

kapjuk, hogy:

$$\int \sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int\cos 2x\,dx=\Big(\text{lineáris helyettesítés}\Big)=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+c=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

(f) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx\quad\left(x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$

Ha $x\in(0,\pi/2)$, akkor $\cos x>0$ és $\operatorname{tg} x>0$, ezért

$$\int\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx=\int(\operatorname{tg} x)^{-3/2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int(\operatorname{tg} x)^{-3/2}\cdot(\operatorname{tg} x)'\,dx=$$

$$=\left(\int f^{\alpha}\cdot f'\ \text{típus és}\ f>0\right)=\frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{-1/2}+c=-\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}+c\quad(c\in\mathbb{R}).$$

3. feladat. *A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int(x^2+2x-1)\cdot e^{-2x}\,dx\quad(x\in\mathbb{R}),$

(b) $\displaystyle\int e^{2x}\cdot\sin x\,dx\quad(x\in\mathbb{R}),$

(c) $\displaystyle\int x^2\cdot\ln x\,dx\quad(x>0),$

(d) $\displaystyle\int\operatorname{arc\,tg}(3x)\,dx\quad(x\in\mathbb{R}).$

Megoldás.

(a) $\displaystyle\int (x^2+2x-1)\cdot e^{-2x}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})\,.$

Kétszer fogunk egymás után parciálisan integrálni. Mindkét esetben az exponenciális részt választjuk a deriváltnak:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+2x-1)\cdot e^{2x}\,dx &= \int (x^2+2x-1)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\,dx = (\text{parc.int.}) = \\
&= (x^2+2x-1)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int (x^2+2x-1)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \\
&= \frac{(x^2+2x-1)\cdot e^{2x}}{2} - \int (2x+2)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \\
&= \frac{(x^2+2x-1)\cdot e^{2x}}{2} - \int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx.
\end{aligned}$$

A kiszámolandó új integrál ismét egy polinom és egy exponenciális függvény szorzata, ezért újra parciálisan integrálunk:

$$\begin{aligned}
\int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx &= \int (x+1)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\,dx = (x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int (x+1)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \\
&= \frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}\,dx = \\
&= \frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c.
\end{aligned}$$

Visszaírva a kapott integrált:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+2x-1)\cdot e^{2x}\,dx &= \frac{(x^2+2x-1)\cdot e^{2x}}{2} - \int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx = \\
&= \frac{(x^2+2x-1)\cdot e^{2x}}{2} - \left[\frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right] + c = \\
&= \frac{(2x^2+2x-3)\cdot e^{2x}}{4} + c \quad (x,\ c\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A megoldott feladat az alábbi általános típus speciális esete:

$$\int P(x)\cdot G(ax+b)\,dx \qquad \big(x\in\mathbb{R},\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\big)$$

alakú határozatlan integrálok, ahol P egy tetszőleges polinom és $G\in\{\exp,\sin,\cos,\mathrm{sh},\mathrm{ch}\}$.

Ebben az esetben tekintsük az alábbi szereposztást:

$$f(x) := P(x) \quad \text{és} \quad g'(x) := G(ax+b) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A g függvényt mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni. Itt a P polinom fokszáma adja meg, hogy hányszor kell parciálisan integrálnunk.

(b) $\displaystyle\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

Ismét kétszer fogunk egymás után parciálisan integrálni, majd az ismeretlen integrálra kapunk egy egyenletet.

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \int e^{2x} \cdot (-\cos x)' \, dx = -e^{2x} \cdot \cos x - \int \left(e^{2x}\right)' \cdot (-\cos x) \, dx =$$

$$= -e^{2x} \cdot \cos x + \int 2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x \, dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \left[\int e^{2x} \cdot \cos x \, dx\right].$$

A kapott új határozatlan integrált újra parciálisan integráljuk (ismét a trigonometrikus részt választva a deriváltnak):

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \, dx = \int e^{2x} \cdot (\sin x)' \, dx = e^{2x} \cdot \sin x - \int \left(e^{2x}\right)' \cdot \sin x \, dx =$$

$$= e^{2x} \cdot \sin x - \int 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx = e^{2x} \cdot \sin x - 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx.$$

Visszaírva a szögletes zárójelben lévő integrált kapjuk, hogy:

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \left[e^{2x} \cdot \sin x - 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx\right] =$$

$$= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x - 4 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx.$$

A kapott egyenlet rendezve ki tudjuk fejezni a keresett integrált:

$$5 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = 2 \cdot e^{2x} \sin x - e^{2x} \cdot \cos x,$$

azaz

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x)}{5} + c \quad (x, c \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés: Hasonló módon oldhatóak meg az

$$\int e^{\alpha x + \beta} \cdot G(ax + b) \, dx \qquad \big(x \in \mathbb{R}, \;\; \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \text{ és } \alpha, a \neq 0\big)$$

alakú határozatlan integrálok, ahol $G \in \{\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}\}$. Ha $G \in \{\mathrm{sh}, \mathrm{ch}\}$, akkor azt is feltesszük, hogy $\alpha \neq a$.

Ebben az esetben tekinthetjük az alábbi szereposztást:

$$f(x) := e^{\alpha x + \beta} \quad \text{és} \quad g'(x) := G(ax + b) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

de vehetjük fordítva is. A g függvényt mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni. A kapott integrált újra parciálisan kell integrálni hasonló szereposztással. Ekkor visszakapjuk a kiinduló integrált. A kapott egyenletből ki tudjuk fejezni a keresett integrált.

(c) $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\displaystyle\int x^2 \cdot \ln x \, dx \quad (x > 0)}$.

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot \ln x \, dx = (\text{parc.int.}) = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot (\ln x)' \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + c \quad (x > 0, c \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés: Analóg módon kezelhetjük az

$$\int P(x) \cdot G^n(ax+b) \, dx \qquad \Big(ax + b \in \mathcal{D}_G,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0, n \in \mathbb{N}^+\Big)$$

alakú határozatlan integrálokat, ahol P egy tetszőleges polinom és $G \in \{\ln,\ \text{arc ...},\ \text{ar ...}\}$. Ebben az esetben legyen

$$f(x) := G^n(ax+b) \quad \text{és} \quad g'(x) := P(x) \quad (ax + b \in \mathbb{R}).$$

Az $f' \cdot g$ függvényt mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni. Itt n darab parciális integrálásra lesz szükség. Sajnos ez a módszer általában elég bonyolult integrálokhoz vezethet, de az egyszerűbb

$$\int G(a\,x+b) \, dx = \int 1 \cdot G(a\,x+b) \, dx = \int (x)' \cdot G(a\,x+b) \, dx$$

típusú integrálok könnyedén számolhatóak. Ilyen például a következő feladat.

(d) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg}(3x) \, dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

$$\int \operatorname{arc\,tg}(3x) \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} 3x \, dx = \int (x)' \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) \, dx = (\text{parc.int.}) =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \int x \cdot (\operatorname{arc\,tg}(3x))' \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \int x \cdot \frac{3}{1 + (3x)^2} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \int \frac{3x}{1 + 9x^2} \, dx = \left(\int \frac{f'}{f} \text{ típus}\right) =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6} \cdot \int \frac{18x}{1 + 9x^2} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6} \cdot \int \frac{(1 + 9x^2)'}{1 + 9x^2} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6} \cdot \ln\Big(1 + 9x^2\Big) + c \quad (x,\ c \in \mathbb{R}).$$

4. feladat. *Parciális integrálással számítsuk ki az*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrált!

Megoldás.

Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \int (x)' \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x.$$

A most kapott egyenlet rendezve ki tudjuk fejezni a keresett integrált:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az előadáson ezt a feladatot az $x = \sin t$ helyettesítéssel oldottuk meg. Vessük össze a két megoldást.