9. előadás
A határozott integrál 3.

Emlékeztető:

- A Riemann-függvény integrálhatósága.
- Műveletek integrálható függvényekkel (számszoros, összeg, szorzat, hányados).
- A Riemann-integrál további tulajdonságai:
  a függvényértékek megváltoztatása véges sok helyen,
  az integrál intervallum szerinti additivitása.
- Egyenlőtlenségek: az integrál előjeltartó,
  az integrál az integrandusban monoton,
  az intergrálszámítás első középértéktétele,
  a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség.

A határozott integrál 3.

1. Monoton függvények integrálhatósága
2. Egyenletes folytonosság
3. Folytonos függvények integrálhatósága

A határozott integrál 3.

1. Monoton függvények integrálhatósága

A következő tétel azt állítja, hogy a **monotonitás** az integrálhatóság egy **elégséges** feltétele.

Tétel. *Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény **monoton** az $[a, b]$ intervallumon, akkor **integrálható** $[a, b]$-n.*

Bizonyítás. Az integrálhatóság oszcillációs összegekkel való jellemzésére vonatkozó állítást alkalmazzuk. Azt igazoljuk:

$$(*) \qquad \forall\ \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\ \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \ \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Legyen pl. $f \nearrow$. Ha $f(a) = f(b)$, akkor f állandó, ezért ebben az esetben az állítás igaz.

Ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, \tau = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_{i-1})$ és $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i)$, ezért

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $n \in \mathbb{N}^+$: $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, valamint τ az $[a,b]$ egyenletes felosztása. Ekkor $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ minden $i = 1, \ldots, n$ indexre, és

$$\Omega(f,\tau) < \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \Big(\big(\cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)}\big) + \big(\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}\big) + \cdots + \big(\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})}\big) \Big) = \varepsilon.$$

Ezzel $(*)$-ot igazoltuk $\implies f \in R[a,b]$. $\blacksquare$

Definíció. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *A.m.h. az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény* ***szakaszonként monoton****, ha*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}^+ \text{ és } \tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ *index esetén*

(i) *az* $f_{|(x_{i-1}, x_i)}$ *függvény monoton,*

(ii) f *korlátos* $[a, b]$*-n.*

Megjegyzés. A (ii) feltétel garantálja az osztópontokban az egyoldali véges határértékek létezését. ■

Tétel. *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *egy szakaszonként monoton függvény, és* $\tau = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ *az előző definícióban szereplő halmaz. Ekkor* $f \in R[a, b]$ *és*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

A határozott integrál 3.

1. Monoton függvények integrálhatósága
2. Egyenletes folytonosság
3. Folytonos függvények integrálhatósága

2. Egyenletes folytonosság

A következő pontban megmutatjuk, hogy ha egy függvény **folytonos** $[a, b]$-n, akkor **integrálható** is az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez a címben jelzett fogalom megismerésére van szükségünk.

T.f.h. az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos a** $H \subset \mathcal{D}_f$ **halmazon**, azaz $\forall\, a \in H$ esetén $f_{|_H} \in C\{a\}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall\, a \in H \text{ pontban} \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \delta > 0, \text{ hogy}$$
$$\forall\, x \in H,\ |x - a| < \delta\colon\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Itt a δ szám tehát a-tól és ε-tól is függ. Nézzük, hogy adott $\varepsilon > 0$ esetén δ hogyan függ az a pont megválasztásától!

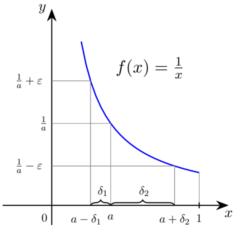
1. példa. Ha $f(x) := x^2 \ \big(x \in (0,1)\big)$, akkor minden $a \in (0,1)$ esetén $f \in C\{a\}$. Mivel

$$\big|f(x) - f(a)\big| = \big|x^2 - a^2\big| = \big|(x-a)(x+a)\big| \leq 2\,|x-a| < \varepsilon,$$

ha $x \in (0,1)$, ezért δ-t $\frac{\varepsilon}{2}$-nek választva $|x-a| < \delta$ esetén $\big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$ teljesül.

Ebben az esetben tehát adott $\varepsilon > 0$-hoz δ-t a-tól függetlenül meg lehet választani. ■

2. példa. Ha $f(x) := \frac{1}{x}$ $\big(x \in (0,1)\big)$, akkor minden $a \in (0,1)$ esetén $f \in C\{a\}$.



$$\delta_1 : \frac{1}{a-\delta_1} = \frac{1}{a} + \varepsilon \Rightarrow \delta_1 = \frac{\varepsilon}{1+a\varepsilon} \cdot a^2$$
$$\delta_2 : \frac{1}{a+\delta_2} = \frac{1}{a} - \varepsilon \Rightarrow \delta_2 = \frac{\varepsilon}{1-a\varepsilon} \cdot a^2$$
$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} = \frac{\varepsilon}{1+a\varepsilon} \cdot a^2$$

Ebben az esetben $\delta \to 0$, ha $a \to 0$, vagyis nem létezik olyan δ, amelyik a $(0,1)$ itervallum bármely helyén jó lenne. ■

Ha $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (a-tól független) $\delta > 0$ szám, amelyre $|x - a| < \delta$, $a, x \in H$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **egyenletesen folytonos a H halmazon**.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **egyenletesen folytonos a $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon**, ha*

$$\forall\ \varepsilon > 0\text{-}hoz \quad \exists\ \delta > 0,\ hogy$$

$$\forall\ x, y \in H,\ |x - y| < \delta : \ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

*Ha csak azt mondjuk, hogy f **egyenletesen folytonos**, akkor ezen azt értjük, hogy f egyenletesen folytonos a $\mathcal{D}_f$ halmazon.*

Megjegyzés. Szemléletesen fogalmazva azt is mondhatjuk, hogy f egyenletesen folytonos H-n, ha „H tetszőlegesen közeli pontjaiban a függvényértékek is tetszőlegesen közel vannak egymáshoz”. ■

A következő tétel azt állítja, hogy az egyenletes folytonosság fogalma „erősebb” a folytonosság fogalmánál.

Tétel. *Ha az f függvény egyenletesen folytonos a H halmazon, akkor f folytonos H-n.*

Bizonyítás. Legyen $a \in H$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az egyenletes folytonosság definíciója alapján

$$\forall\ \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\ \delta > 0, \text{ hogy}$$

$$\forall\ x, y \in H,\ |x - y| < \delta : \ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

Ezzel a δ választással a fentit $y = a$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x - a| < \delta \quad \text{esetén} \quad \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon,$$

ami éppen az $f_{|H}$ függvény a-beli folytonosságát jelenti. ■

3. példa. *Legyen* $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. *Mutassuk meg, hogy*

(a) f *egyenletesen folytonos a* $[0, 1]$ *intervallumon,*

(b) f *nem egyenletesen folytonos az* $[1, +\infty)$ *intervallumon.*

Megoldás.

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|x^2 - y^2\right| = \left|(x - y)(x + y)\right| \le 2\,|x - y| < \varepsilon,$$

ha $x, y \in [0, 1]$, ezért δ-t $\frac{\varepsilon}{2}$-nek választva

$$|x - y| < \delta \text{ esetén } \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy f egyenletesen folytonos a $[0, 1]$ intervallumon.

(b) Azt igazoljuk, hogy

$$\exists\ \varepsilon > 0, \ \text{hogy} \quad \forall\ \delta > 0\text{-hoz}$$

$$\exists\ x, y \in [1, +\infty), \ |x-y| < \delta : \ \big|f(x) - f(y)\big| \geq \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon := 1$ és $\delta > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}^+$: $n > \frac{1}{\delta}$. Ha most $x := n + \frac{1}{n}$ és $y := n$, akkor $|x-y| = \frac{1}{n} < \delta$ és

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \left|(x + \tfrac{1}{n})^2 - n^2\right| = 2 + \tfrac{1}{n^2} = 2 + \tfrac{1}{n^2} > \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy f nem egyenletesen folytonos az $[1, +\infty)$ intervallumon. $\blacksquare$

4. példa. *Legyen* $f(x) := \frac{1}{x}$ $(x > 0)$. *Mutassuk meg, hogy*

(a) f *egyenletesen folytonos az* $[1, +\infty)$ *intervallumon,*

(b) f *nem egyenletesen folytonos a* $(0, 1)$ *intervallumon.*

Megoldás.

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x \cdot y|} \le |x-y| < \varepsilon,$$

ha $x, y \in [1, +\infty)$, ezért δ-t ε-nak választva

$$|x-y| < \delta \text{ esetén } \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy f egyenletesen folytonos az $[1, +\infty)$ intervallumon.

(b) Azt igazoljuk, hogy

$$\exists\ \varepsilon > 0, \ \text{ hogy } \ \forall\ \delta > 0\text{-hoz}$$

$$\exists\ x, y \in (0,1), \ \ |x-y| < \delta : \ \big|f(x) - f(y)\big| \geq \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon := 1$ és $\delta > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan $2 \leq n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{\delta}$. Ha most $x := \frac{1}{n}$ és $y := \frac{1}{n+1}$, akkor $x, y \in (0,1)$,

$$|x-y| = \left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right| < \delta \text{ és}$$

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy f nem egyenletesen folytonos az $(0,1)$ intervallumon. ■

A 3(b) és a 4(b) példák azt mutatják, hogy az előző tétel megfordítása nem igaz. A következő tétel azt állítja, hogy ha f egy korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos, akkor f szükségképpen egyenletesen is folytonos $[a, b]$-n.

Heine-tétel. *Ha* $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f \in C[a, b]$, *akkor* f *egyenletesen folytonos* $[a, b]$ *intervallumon.*

Bizonyítás. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. T.f.h. f nem egyenletesen folytonos $[a, b]$-n. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\ \varepsilon > 0, \quad \text{hogy} \quad \forall\ \delta > 0\text{-hoz}$$

$$\exists\ x, y \in [a, b], \ \ |x - y| < \delta : \ \ \big|f(x) - f(y)\big| \geq \varepsilon.$$

A $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással kapjuk, hogy minden n-re létezik $x_n, y_n \in [a,b]$:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad \underbrace{\left|f(x_n) - f(y_n)\right| \geq \varepsilon}_{(*)}.$$

Az (x_n) sorozat korlátos, ezért van egy (x_{n_k}) konvergens részsorozata, amelynek az α határértéke ugyancsak $[a,b]$-ben van. Így

$$y_{n_k} = \left(y_{n_k} - x_{n_k}\right) + x_{n_k} \to 0 + \alpha = \alpha, \ \text{ ha } n_k \to +\infty$$

Mivel $f \in C[a,b]$, ezért $f \in C\{\alpha\}$ is teljesül. Az átviteli elv szerint tehát $f\left(x_{n_k}\right) \to f(\alpha)$ és $f\left(y_{n_k}\right) \to f(\alpha)$, ezért

$$\lim_{n_k \to +\infty} \left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right) = 0.$$

Ez azonban ellentmond $(*)$-nak. ■

A határozott integrál 3.

3. Folytonos függvények integrálhatósága

A következő tétel azt állítja, hogy a folytonosság „erősebb” tulajdonság a Riemann-integrálhatóságnál. Másként fogalmazva: A **folytonosság** az integrálhatóság **elégséges** feltétele.

Tétel. *Ha az f függvény **folytonos** az $[a, b]$ intervallumon, akkor **integrálható** $[a, b]$-n (jelekkel $C[a, b] \subset R[a, b]$).*

Bizonyítás. Elég megmutatni azt, hogy $\forall f \in C[a, b]$ függvényre a következő teljesül:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \ \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \quad \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Mivel $f \in C[a,b] \Longrightarrow$ (l. Heine tételét) f egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy

$$\forall\, x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta :\ |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$:
$\|\tau\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\} < \delta$.
Ekkor $\Omega(f,\tau)$-ban $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen

$$m_i := \min_{[x_{i-1},x_i]} f = f(u_i), \qquad M_i := \max_{[x_{i-1},x_i]} f = f(v_i)$$

(Weierstrass tétele szerint $\exists\, u_i,\ v_i$). Ekkor

$$\Omega(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \tfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. $\blacksquare$

Az állítás megfordítása nem igaz. Legyen például

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ekkor $f \in R[0,1]$, de $f \notin C[0,1]$.

Megjegyzés. Azt már tudjuk, hogy véges sok szakadási hellyel rendelkező, az egyes szakaszokon integrálható függvények integrálhatók. Kérdés, hogy a szakadási helyek számát valamilyen értelemben lehet-e növelni úgy, hogy a függvény továbbra is integrálható maradjon.

Kiderült, hogy egy függvény Riemann-integrálhatósága lényegében azon múlik, hogy a függvény szakadási helyeinek a halmaza mennyire „kicsi”. Ezt az állítást önti precíz formába a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó **Lebesgue-féle kritérium**, amely szerint a Riemann-integrálhatóság azzal ekvivalens, hogy a függvény bizonyos értelemben „majdnem” folytonos.

Precízen: A.m.h. az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **nullamértékű**, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik intervallumoknak egy olyan (I_k) sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Például egyszerűen belátható, hogy $\mathbb{R}$ minden, legfeljebb megszámlálható részhalmaza nullamértékű. Sőt, ha $A_k \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ nullamértékű, akkor az $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ halmaz is nullamértékű. Világos továbbá, hogy egy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű.

A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma:

Tegyük fel, hogy $f \in K[a,b]$ és legyen az f szakadási helyeinek a halmaza $\mathcal{A}_f := \{x \in [a,b] \mid f \notin C\{x\}\}$. Ekkor $f \in R[a,b]$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű. ■

1. következmény. *Az elemi függvények integrálhatók minden olyan* $[a,b]$ *intervallomon, amelyen értelmezve vannak.*

2. következmény. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$, *és tegyük fel, hogy* $f \in C(a,b)$. *Ha léteznek és végesek a*

$$\lim_{a+0} f \quad \textit{és} \quad \lim_{b-0} f$$

határértékek, akkor $f \in R[a,b]$.

Definíció. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *A.m.h. az* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény* ***szakaszonként folytonos***, *ha*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}^+ \text{ és } \tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ *index esetén*

- *az* $f|_{(x_{i-1}, x_i)}$ *függvény folytonos,*
- *léteznek és végesek a* $\lim\limits_{x_{i-1}+0} f$, $\lim\limits_{x_i-0} f$ *határértékek.*

Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy szakaszonként folytonos függvény, és* $\tau = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ *az előző definícióban szereplő halmaz. Ekkor* $f \in R[a,b]$ *és*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$