2. zárthelyi dolgozat, 2021. december 10.
Analízis II.
Programtervező informatikus BSc szak

A és B szakirány

Megoldások

1. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x-1}{x^3-2x^2+x} \qquad (x \in (-\infty, 0))$$

függvény primitív függvényeinek a halmazát! **8 pont**

Megoldás. Látható, hogy tetszőleges $x \in I := (-\infty, 0)$ esetén

$$\frac{x-1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x-1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{x-1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Parciális törtekre bontva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \qquad (x \in (-\infty, 0)),$$

így a logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján

$$\int \frac{x-1}{x^3-2x^2+x}\,dx = [\ln(1-x) - \ln(-x)]_{x\in I} = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

2. Számítsa ki az

$$f(x) := \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+2e^x+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény határozatlan integrálját! **12 pont**

Megoldás. Világos, hogy az integrandus

$$S(e^x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakú, ahol

$$S(y) := \frac{2y^2+3y}{y^2+2y+3} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Így, ha

$$\varphi(t) := \ln(t) \qquad (t \in (0, +\infty)),$$

akkor a $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ bijekcióra

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in (0, +\infty)),$$

és alkalmazva a második helyettesítési szabályt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 2e^x + 3}\, dx &= \int S(e^x)\, dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int S(t) \cdot \frac{1}{t}\, dt \bigg|_{t=e^x} = \int \frac{2t^2 + 3t}{t^2 + 2t + 3} \cdot \frac{1}{t}\, dt \bigg|_{t=e^x} = \\
&= \int \frac{2t + 3}{t^2 + 2t + 3}\, dt \bigg|_{t=e^x}.
\end{aligned}$$

Mivel tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{2t + 3}{t^2 + 2t + 3} &= \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 3} + \frac{1}{t^2 + 2t + 3} = \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 3} + \frac{1}{(t + 1)^2 + 2} = \\
&= \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1},
\end{aligned}$$

ezért tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\int \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 2e^x + 3}\, dx &= \left[\ln(t^2 + 2t + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t + 1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{t=e^x} = \\
&= \ln(e^{2x} + 2e^x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x + 1}{\sqrt{2}}\right) + c.
\end{aligned}$$

3. Indokolja meg, hogy az

$$f(x) := \frac{1 + \ln(x)}{x} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény integrálható $[1, e]$-n, majd ezen az intervallumon számítsa ki f határozott integrálját! $\boxed{\textbf{9 pont}}$

Megoldás. Mivel f folytonos, ezért integrálható $[1, e]$-n. Az

$$\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x}\, dx$$

integrál kiszámítása két módon (is) elvégezhető.

1. módszer. Legyen

$$\varphi(x) := 1 + \ln(x) \quad (x \in [1, e]) \qquad \text{és} \qquad f(x) := x \quad (x \in [1, 2]).$$

Ekkor

$$\varphi \in \mathfrak{D}[1, e] \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in [1, e]).$$

Így az első helyettesítési szabály alkalmazásával

$$\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_1^2 f = \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

adódik.

2. módszer. Mivel tetszőleges $x \in [1, e]$ esetén

$$\frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot \frac{1}{x},$$

ezért

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x}\,dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\right) dx = \left[\ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e = \\ &= \ln(e) + \frac{\ln^2(e)}{2} - \ln(1) - \frac{\ln^2(1)}{2} = 1 + \frac{1}{2} - 0 - 0 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4. Az $y = x^2$ és az $y = 2x$ görbék által közrezárt síktartományt az $y = 1$ egyenes két részre osztja. Számítsa ki mindkét résznek a területét! **11 pont**

Megoldás. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ a két görbe metszéspontjának abszcisszája, akkor

$$\alpha^2 = 2\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha[\alpha - 2] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{0; 2\}.$$

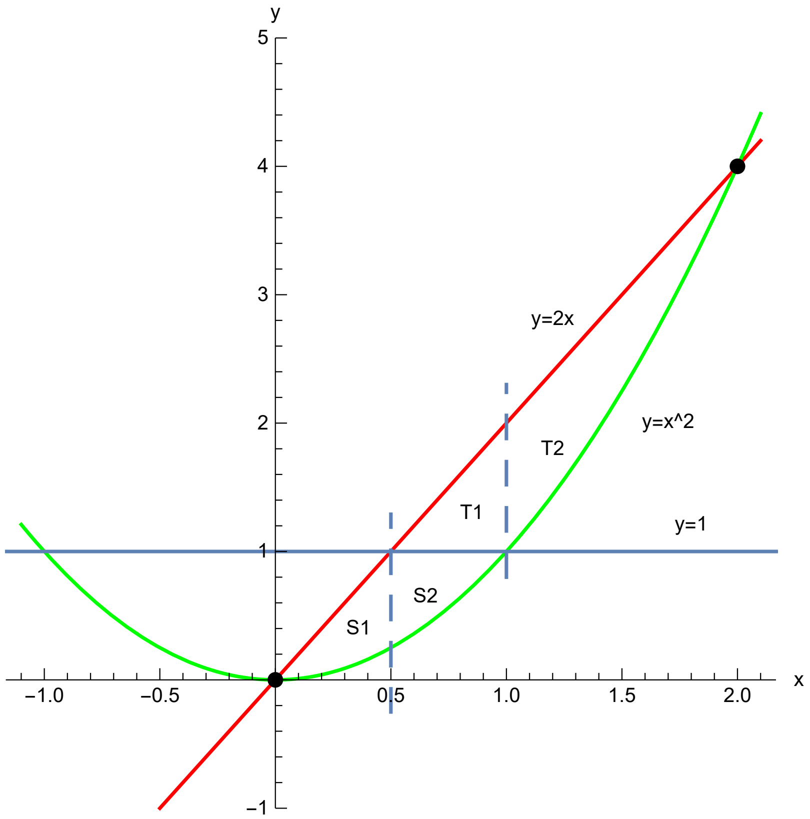
Az

$$\begin{aligned} S &:= S_1 \cup S_2 := \\ &:= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0, 1/2],\ y \in [x^2, 2x]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [1/2, 1],\ y \in [x^2, 1]\right\} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} T &:= T_1 \cup T_2 := \\ &:= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [1/2, 1],\ y \in [1, 2x]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [1, 2],\ y \in [x^2, 2x]\right\} \end{aligned}$$

ponthalmazok területét kell kiszámítani (vö. 1. ábra).



1. ábra.

- Az S ponthalmaz területe:

$$\int_0^{1/2} (2x - x^2)\,dx + \int_{1/2}^{1} (1 - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - 0 + 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{12}.$$

- A T ponthalmaz területe:

$$\int_{1/2}^{1} (2x - 1)\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - x\right]_{1/2}^{1} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= 1 - 1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}.$$

5. Határozza meg az

$$f(x) := \sqrt{(x^2+1)\cdot\sin(2x)} \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát! **10 pont**

Megoldás. Mivel f folytonos függvény, ezért a kérdéses V_f térogatra

$$\begin{aligned}
\frac{V_f}{\pi} &= \int_0^{\pi/2} f^2 = \int_0^{\pi/2} (x^2+1)\cdot\sin(2x)\,dx = \\
&= \left[-\frac{(x^2+1)\cdot\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x\cdot\cos(2x)\,dx = \\
&= \frac{\pi^2+4}{8} + \frac{1}{2} + \left[\frac{x\cdot\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2}\,dx = \\
&= \frac{\pi^2+4}{8} + \frac{1}{2} + 0 - 0 + \left[\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2+4}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2+4}{8}.
\end{aligned}$$