Analízis 1., 2. zárthelyi dolgozat, 2023.05.26.

Megoldások (vázlatosan)

1. Konvergens-e a

$$\sum_{n=0} \frac{3\cdot(-2)^n - 3^{n+2}}{4^{n-1}}$$

végtelen sor? Ha igen, számítsa ki az összegét! *(5 pont)*

Megoldás:

- $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{3\cdot(-2)^n - 3^{n+2}}{4^{n-1}} = \sum_{n=0}\left(12\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - 36\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right).$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 12\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = 12\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = 12\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 8$, valamint
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 36\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = 36\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = 36\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 36\cdot 4 = 144.$
- A sor konvergens, mert előáll két konvergens sor összegeként. A sor összege:
  $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\cdot(-2)^n - 3^{n+2}}{4^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 12\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 36\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = 8 - 144 = -136.$

2. Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2+n+6}{\sqrt{n^5+8n^3}}$, *(4 pont)*

(b) $\displaystyle\sum_{n=2} \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2+4n}$, *(4 pont)*

(c) $\displaystyle\sum_{n=3} \frac{n^{20}\cdot 23^n}{n!}$. *(4 pont)*

Megoldás:

(a) Pozitív tagú sor, nagyságrendje $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, ezért sejtésünk, hogy divergens. A hiperharmonikus sorra vonatkozó állításra és a minoráns kritériumra támaszkodva bizonyítunk:
$$\frac{n^2+n+6}{\sqrt{n^5+8n^3}} > \frac{n^2}{\sqrt{n^5+8n^5}} = \frac{n^2}{\sqrt{9n^5}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}\frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{divergens,}$$
így annak harmada és az eredeti sor is divergens.

(b) A Cauchy-féle gyökkritérium alapján
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+4} = \frac{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^4}{\left(1+\frac{5/2}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{5/2}{n}\right)^4} \longrightarrow \frac{e^{3/2}\cdot 1}{e^{5/2}\cdot 1} = \frac{1}{e} < 1,$$
ezért a sor (abszolút) konvergens.

(c) A d'Alembert-féle hányadoskritérium alapján
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{20}\cdot 23^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^{20}\cdot 23^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{20}\cdot\frac{23}{n+1} \longrightarrow 1^{20}\cdot 0 = 0 < 1,$$
ezért ez a sor is (abszolút) konvergens.

3. Határozza meg a
$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2 \cdot 4^n} \cdot (2x-3)^n$$
hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát! *(8 pont)*

Megoldás:

- $\dfrac{1}{n^2 \cdot 4^n} \cdot (2x-3)^n = \dfrac{1}{n^2 \cdot 2^n} \cdot (x - \frac{3}{2})^n$, így a hatványsor közepe $a = \dfrac{3}{2}$.
  A Cauchy–Hadamard-tétel alapján $\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n^2 \cdot 2^n}\right|} = \dfrac{1}{2 \cdot (\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$, így $R = 2$.
  A hatványsor abszolút konvergens a konvergenciahalmaz belsejében, azaz ha $x \in (a-R, a+R) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$, és divergens, ha $x < -\dfrac{1}{2}$ vagy $x > \dfrac{7}{2}$.
- $x = \dfrac{7}{2}$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ sort kapjuk, ami (abszolút) konvergens.
- $x = -\dfrac{1}{2}$ esetén pedig a $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ sort kapjuk, ami egy konvergens Leibniz-típusú sor, hiszen $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ monoton csökkenő és nullához tart.
- Összefoglalva: a hatványsor konvergenciahalmaza $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$.

4. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x+2}-3}$, *(3 pont)*

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{1-\exp 3x}$. *(4 pont)*

Megoldás:

(a) A számlálót szorzattá bontjuk, a nevezőt gyöktelenítjük:
$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x+2}-3} = \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x-1)(\sqrt{x+2}+3)}{(x+2)-9} =$$
$$= \lim_{x\to 7} (x-1)(\sqrt{x+2}+3) = (7-1)(\sqrt{7+2}+3) = 6 \cdot 6 = 36.$$

(b) Átalakítva, nevezetes határértékek alkalmazásával:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{1-\exp 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{\cos 2x}}{\frac{\exp(3x)-1}{3x} \cdot (-3)} = \frac{1 \cdot \sqrt{1}}{1 \cdot (-3)} = -\frac{1}{3}.$$

5. Adja meg az
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5-x}-4}{x^2-2x+1} & \text{ha } x < 1 \\ \dfrac{\sin(2x-10)}{x^2-25} & \text{ha } 1 < x < 5 \\ \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10} & \text{ha } x > 5 \\ 0 & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } x = 5. \end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait! *(8 pont)*

Megoldás:

- A függvény folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{1,5\}$ halmaz minden pontjában.
- Az $x=1$ pontban balról
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sqrt{5-x}-4}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1-0}(\sqrt{5-x}-4)\cdot \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(x-1)^2} = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty.$$
Ezért az f függvénynek másodfajú szakadása van az $x=1$ pontban.
- Az $x=5$ pontban balról
$$\lim_{x\to 5-0} f(x) = \lim_{x\to 5-0} \frac{\sin(2x-10)}{x^2-25} = \lim_{x\to 5-0} \frac{\sin(2x-10)}{\frac{1}{2}(2x-10)(x+5)} = 2\cdot 1\cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$
- Az $x=5$ pontban jobbról
$$\lim_{x\to 5+0} f(x) = \lim_{x\to 5+0} \frac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to 5+0} \frac{(x-3)(x-5)}{(x+2)(x-5)} = \lim_{x\to 5+0} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2}{7}.$$
Így f-nek elsőfajú szakadása van az $x=5$ pontban.