# 1. gyakorlat

# FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

## Emlékeztető

**Definició.** *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban **van határértéke**, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

*Ekkor $A$ egyértelmű, és ezt az $f$ függvény $a$-beli **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

**A határérték definíciójának speciális esetei.** A $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ egyenlőségre $a$-tól, illetve $A$-tól függően a következő szóhasználatokat vezetjük be.

- **Végesben vett véges határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$.
- **Végesben vett végtelen határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A = \pm\infty$.
- **Végtelenben vett véges határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A \in \mathbb{R}$.
- **Végtelenben vett végtelen határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A = \pm\infty$.

**A határérték és a műveletek** közötti kapcsolatokra vonatkoznak az alábbi állítások:

*Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ és $\exists\, A := \lim\limits_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $\quad B := \lim\limits_a g \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

(a) $\exists\, \lim\limits_a (f+g)$ *és* $\lim\limits_a (f+g) = A + B$, *feltéve, hogy* $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van;*

(b) $\exists\, \lim\limits_a (f \cdot g)$ *és* $\lim\limits_a (f \cdot g) = A \cdot B$, *feltéve, hogy* $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van;*

(c) $\exists\, \lim\limits_a \dfrac{f}{g}$ *és* $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B}$, *feltéve, hogy* $\dfrac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van.*

**Kritikus határértékek vizsgálata.** Ha az előző tételben szereplő műveletek valamelyike nincs értelmezve, akkor az $f+g$, $f \cdot g$, $f/g$ függvények határértékéről általában semmit sem tudunk mondani (vö. a sorozatokra ismert eredményekkel). Ezeket **kritikus határértékeknek** nevezzük, és így jelöljük:

$$(+\infty) + (-\infty) \;\big(\text{vagy } (+\infty) - (+\infty)\big),\; (-\infty) + (+\infty) \;\big(\text{vagy } (-\infty) - (-\infty)\big),\; 0 \cdot (\pm\infty),\; \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\; \frac{0}{0},\; \frac{1}{0}.$$

Ezekben az esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert” követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon” (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékké átalakítani.

**Néhány nevezetes határérték.** A definícó alapján egyszerűen igazolhatók a szemléletesen „szinte nyilvánvaló” alábbi állítások:

- minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$ ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -\infty & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots; \end{cases}$
- minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{a^n}$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$ ;
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ = +\infty & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots\;, \end{cases}$
- minden $a > 0$ esetén $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

**Az exponenciális, a szinusz- és a koszinuszfüggvényt** a teljes $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsorok összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin(x) := \sin x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(x) := \cos x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Hatványsor összegfüggvényének a határértéke.** *Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor $R$ konvergenciasugara pozitív. Jelölje*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

*az összegfüggvényét. Ekkor $\forall b \in K_R(a)$ pontban létezik a $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ határérték, és*

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

Tehát, egy hatványsor összegfüggvényének van határértéke a konvergenciahalmazának minden belső pontjában, és a határérték megegyezik az adott pont behelyettesítésével kapott sor összegével.

**1. feladat.** *Számítsuk ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

**Megoldás.**

**(a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ és $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, ezért $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. A kifejezés átalakítására most 3 lehetőséget is mutatunk.

**1. megoldás.** Szorzunk, osztunk $(1+\cos x)$-szel.

$$\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}.$$

Ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \Big(\lim_{x\to 0} \sin x\Big) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \Big(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}\Big) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = 0\,.$$

**2. megoldás.** Trigonometrikus azonosságokat felhasználva a számlálót $x/2$ segítségével fejezzük ki:

$$1 - \cos x = \Big(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\Big) - \Big(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\Big) = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Ezért
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\Big(\lim_{x\to 0}\sin\tfrac{x}{2}\Big)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=0\cdot 1=0\,.$$

**3. megoldás.** Írjuk be a cos függvényt definiáló hatványsort, majd az összevonások után osszunk $x$-szel: ha $x\neq 0$, akkor

$$\mathbb{R}\ni\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x}=\frac{1-\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\Big)}{x}=$$
$$=\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x}=\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x}=$$
$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}=\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}-\cdots\,.$$

Az utolsó hatványsor konvergenciehalmaza $\mathbb{R}$, ezért a hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}-\cdots\right)=0\,.$$

**(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Az $e^x$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény definíciója alapján $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$, ezért $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)-1}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)=1.$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy az $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots$ hatványsor konvergenciehalmaza $\mathbb{R}$. Így
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

**2. feladat.** *Számítsuk ki a*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*határértéket, amennyiben az létezik, ha*

(a) $f(x) := c \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$, (b) $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R},\ a := 0)$,

(c) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$, (d) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (x > 0, a > 0)$,

(e) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x > 0,\ a > 0)$, (f) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ a := 0)$,

(g) $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$, (h) $f(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$,

(i) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\},\ a := -1\big)$,

(j) $f(x) := \begin{cases} x^4(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ *és* $a := 0$.

**Megoldás.** Mindegyik esetben $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Nem kritikus határértékre vezető átalakításokat fogunk végezni.

**(a)** $f(x) := c \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0.$$

**(b)** $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R},\ a := 0)$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) \to \nexists$$

Egyoldali határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Mivel $1 \neq -1$, így $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

**(c)** $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x\to a} (x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) = 4a^3.$$

**(d)** $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (x > 0, a > 0)$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{a - x}{xa(x-a)} = \lim_{x\to a} -\frac{1}{xa} = -\frac{1}{a^2}.$$

**(e)** $f(x) := \sqrt{x} \quad (x > 0,\ a > 0)\,.$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

**(f)** $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ a := 0)\,.$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \to \nexists$$

Egyoldali határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Mivel $+\infty \neq -\infty$, így $\nexists \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

**(g)** $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})\,.$

**1. lépés.** Ha $a = 0$, akkor (lásd 1. (b))

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

**2. lépés.** Ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = e^{a+(x-a)} = e^a \cdot e^{x-a},$$

így tetszőleges $a \neq x \in \mathbb{R}$, ill. $h := x - a$ esetén

$$\frac{e^x-e^a}{x-a} = \frac{e^a\cdot e^{x-a}-e^a}{x-a} = e^a\cdot\frac{e^{x-a}-1}{x-a} = e^a\cdot\frac{e^h-1}{h}.$$

Tehát

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = e^a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^a\cdot 1 = e^a.$$

**(h)** $f(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})\,.$

**Trükk**: Legyen $h := x - a$. Ekkor $x = a + h$, és

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tehát

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \lim_{h\to 0} \left( \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin a \cdot \frac{1 - \cos h}{h} \right).$$

Mivel

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a\,.$$

**(i)** $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2 - 9} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\},\ a := -1\big)\,.$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{\frac{x+2}{x^2-9} + \frac{1}{8}}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{8(x+1)(x^2 - 9)} = \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+7)}{8(x+1)(x^2 - 9)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+7}{8(x^2 - 9)} = \frac{6}{-64} = \\
&= -\frac{3}{32}.
\end{aligned}$$

**(j)** $f(x) := \begin{cases} x^4(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad$ és $\quad a := 0\,.$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \\
&= \lim_{x\to 0} x^3 \left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Mivel a $\mathcal{D}_f \ni x \mapsto \sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}$ függvény korlátos és $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, ezért a kérdezett határérték 0-val egyenlő.