Diszkrét matematika 2

3. előadás
Számelmélet

Mérai László
merai@inf.elte.hu
https://sites.google.com/view/laszlomerai

Komputeralgebra Tanszék

2023 ősz

Szimultán kongruenciák

Szeretnénk olyan x egészet, mely egyszerre elégíti ki a következő kongruenciákat:

$$\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \mod 3 \\ 4x &\equiv 3 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

A kongruenciákat külön megoldva:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 2 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

Látszik, hogy $x = 2$ megoldás lesz! Vannak-e más megoldások?

Szimultán kongruenciák

Szeretnénk olyan x egészet, mely egyszerre elégíti ki a következő kongruenciákat:

$$\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \mod 3 \\ 4x &\equiv 1 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

A kongruenciákat külön megoldva:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 4 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

Van-e megoldás?
Az első kongruencia összes egész megoldása: $\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$
Az második kongruencia összes egész megoldása: $\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots$

Van megoldás, például $x = 14$. Vannak-e más megoldások?

Szimultán kongruenciák

Szeretnénk olyan x egészet, mely egyszerre elégíti ki a következő kongruenciákat:

$$\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \mod 15 \\ 4x &\equiv 1 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

Van-e megoldás? Nincs!

A fenti kongruencia rendszer egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \mod 3 \\ 2x &\equiv 1 \mod 5 \\ 4x &\equiv 1 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

A kongruenciákat külön megoldva:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 3 \mod 5 \\ x &\equiv 4 \mod 5 \end{aligned}\right\}$$

Az utolsó két kongruencia nem elégíthető ki szimultán.

Szimultán kongruenciák

Feladat: Oldjuk meg a következő kongruencia rendszert:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x \equiv b_1 \mod n_1 \\ a_2x \equiv b_2 \mod n_2 \\ \vdots \\ a_kx \equiv b_k \mod n_k \end{array}\right\}$$

Az egyes lineáris kongruenciák $a_ix \equiv b_i \mod n_i$ külön megoldhatóak:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv c_1 \mod n_1 \\ x \equiv c_2 \mod n_2 \\ \vdots \\ x \equiv c_k \mod n_k \end{array}\right\}$$

Szimultán kongruenciák – javított dia

Feladat: Oldjuk meg a következő kongruencia rendszert:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv c_1 \mod n_1 \\ x \equiv c_2 \mod n_2 \\ \quad\vdots \\ x \equiv c_k \mod n_k \end{array}\right\}$$

Feltesszük, hogy az $n_1, n_2 \ldots, n_k$ modulusok relatív prímek. Az általános esetet később tárgyaljuk (bizonyítás nélkül).

Kínai maradéktétel

Tétel

Legyenek $1 < n_1, n_2 \ldots, n_k$ páronként relatív prím számok, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ egészek. Ekkor a

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv c_1 \mod n_1 \\ x \equiv c_2 \mod n_2 \\ \quad\vdots \\ x \equiv c_k \mod n_k \end{array}\right\}$$

kongruencia rendszer megoldható, és bármely két megoldás kongruens egymással modulo $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Kínai maradéktétel bizonyítása

Bizonyítás. A bizonyítás algoritmikus.
Legyen először $k = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv c_1 \mod n_1 \\ x \equiv c_2 \mod n_2 \end{array}\right\}$$

- A bővített euklideszi algoritmussal oldjuk meg az $n_1 x_1 + n_2 x_2 = 1$ egyenletet.
- Legyen $c_{1,2} = n_1 x_1 c_2 + n_2 x_2 c_1$.
- Ekkor $c_{1,2} \equiv c_j \mod n_j$ ($j = 1, 2$) u.i.:

$$c_{1,2} = n_1 x_1 c_2 + n_2 x_2 c_1 \equiv n_2 x_2 c_1 \equiv (1 - n_1 x_1) c_1 \equiv c_1 \mod n_1.$$

- Ha $x \equiv c_{1,2} \mod n_1 n_2$, akkor x megoldása a két kongruenciának.
- Megfordítva: ha x megoldása a két kongruenciának, akkor $x - c_{1,2}$ osztható n_1-gyel, n_2-vel, így a szorzatukkal is: $x \equiv c_{1,2} \mod n_1 n_2$ (u.i. $(n_1, n_2) = 1$).

Kínai maradéktétel bizonyítása

Bizonyítás. A bizonyítás algoritmikus.
Általános eset. A

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \mod n_1 \\ x &\equiv c_2 \mod n_2 \\ x &\equiv c_3 \mod n_3 \\ &\vdots \\ x &\equiv c_k \mod n_k \end{aligned}\right\}$$

szimultán kongruencia equivalens a

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_{1,2} \mod n_1 n_2 \\ x &\equiv c_3 \mod n_3 \\ &\vdots \\ x &\equiv c_k \mod n_k \end{aligned}\right\}$$

rendszerrel. Iterálva az eljárást kapjuk az $x \equiv c_{1,\dots,k} \mod n_1 \cdots n_k$ kongruenciát. $\square$

Kínai maradéktétel – javított dia

(**A dia kiegészítés, számonkérésen nem szerepel**)

Ha a modulusok nem relatív prímek, akkor a feladat hasonlóan kezelhető. Például $k = 2$ esetén tekintsük a

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv c_1 \mod n_1 \\ x \equiv c_2 \mod n_2 \end{array}\right\}$$

rendszert. Legyen $d = (n_1, n_2) > 1$. Megmutatható, hogy ha $c_1 \not\equiv c_2 \mod d$, akkor a rendszernek nincs megoldása. Ellenkező esetben legyen $n_1 x_1 + n_2 x_2 = d$. Ekkor

$$c_{1,2} \equiv c_1 - x_1 n_1 \frac{c_1 - c_2}{d} \mod \frac{n_1 n_2}{d}$$

lesz az összes megoldás. (Biz.: HF)

A $k \geq 3$ esetén az eljárást iterálva oldhatjuk meg a szimultán kongruencia rendszert.

Lineáris kongruenciák még egyszer

Tekintsük az $ax \equiv b \mod n$ lineáris kongruenciát.
Emlékeztető: ez megoldható, ha $(a, n) \mid b$.

Ha $(a, n) = 1$, akkor a kongruencia mindig megoldható.

Példa

A $3x \equiv b \mod 8$ minden b-re megoldható, míg $2x \equiv b \mod 8$ csak a páros b-kre oldható meg.

Példa

Az $ax \equiv b \mod 5$ minden $a \not\equiv 0$ és b esetén megoldható.

Adott n modulushoz tekintsük a jó a együtthatók számát:

Definíció

Adott n nemnegatív egész esetén legyen

$$\varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : (a, n) = 1\}$$

az Euler-függvény.

Euler-féle φ függvény

Legyen $\varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : (a,n) = 1\}$.

Példa

- $\varphi(5) = 4$: $a = 1, 2, 3, 4$ esetén $(a, 5) = 1$.
- $\varphi(6) = 2$: $a = 1, 5$ esetén $(a, 6) = 1$.
- $\varphi(7) = 6$: $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ esetén $(a, 7) = 1$.
- $\varphi(8) = 4$: $a = 1, 3, 5, 7$ esetén $(a, 8) = 1$.

Tétel (NB)

Legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_\ell^{e_\ell}$. Ekkor

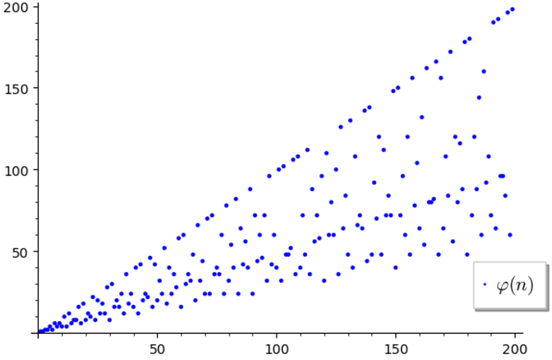
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Euler-féle φ függvény

Emlékeztető: $$\varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : (a,n) = 1\} = n \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Példa

- $\varphi(5) = 5(1 - 1/5) = 4$.
- $\varphi(6) = 6(1 - 1/2)(1 - 1/3) = 2$.
- $\varphi(7) = 7(1 - 1/7) = 6$.
- $\varphi(8) = 8(1 - 1/2) = 4$.



Oszthatósági szabályok

Példa

3-mal való oszthatósági szabály:

123 *pontosan akkor osztható* 3*-mal, ha* $1+2+3=6$ *osztható.*

Precízen:

$123 = 1\cdot 100 + 2\cdot 10 + 3\cdot 1 \equiv 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \equiv 1+2+3 \mod 3$

Általában

$$n = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot 1^i \equiv \sum_{i=0}^{k} n_i, \quad \text{u.i.} \quad 10 \equiv 1 \mod 3.$$

Oszthatósági szabályok

Példa

7-tel való oszthatósági szabály:

$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \mod 7$

u.i. $10^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2 \mod 7$

Általában: $10^i \equiv ? \mod 7$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$10^i \mod 7$	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	3	2	...

Tehát

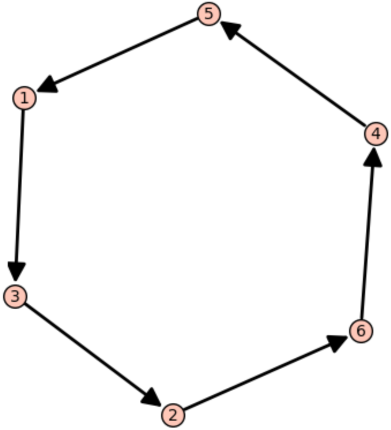
$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 11 \equiv 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4 \mod 7$$

Általában

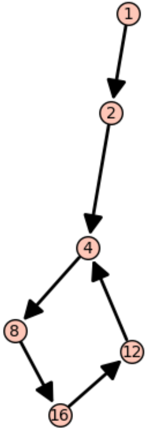
- Mindig van oszthatósági szabály.
- Az $a^i \mod n$ hatványmaradékok periodikusan ismétlődnek!

Hatványmaradékok

Az $a^i \bmod n$ hatványok:



$10^i \bmod 7$



$2^i \bmod 20$

Euler-Fermat tétel

Tétel (Euler-Fermat)

Legyenek $a, n \in \mathbb{Z}$, $(a, n) = 1$. Ekkor

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n,$$

ahol φ az Euler-féle függvény.

Példa

- $2^6 \equiv 1 \mod 7$, mert $\varphi(7) = 6$.
- $3^6 \equiv 1 \mod 7$, mert $\varphi(7) = 6$.
- $9^{12} \equiv 1 \mod 20$, mert $\varphi(20) = 12$.

Figyelem, kisebb hatvány is lehet 1:

- $1^6 = 1 \equiv 1 \mod 7$,
- $2^3 = 8 \equiv 1 \mod 7$,
- $9^2 = 81 \equiv 1 \mod 20$.