Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok gyakorlati jegy utóvizsga
2023. január 13.

Minden feladathoz kérjük: indoklás, levezetés, a számítások bemutatása.

Emlékeztető a követelményrendszerből:
Az elégséges (2-es) feltétele: mindhárom zh-témakörből legalább 7 pontot, ÉS összesen legalább 30 pontot kell elérni.

Első zh-témakör, összesen 25 pont

1. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+4} + \sqrt{6-x}\,.$$

2. *(9 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$9 - 5\cos(2x) = \left(8\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x + 2\sin^2 x$$

3. *(8 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$

Második zh-témakör, összesen 25 pont

4. *(8 pont)* Tekintsük a $z_1 = 7 + 11i$, $z_2 = 4 + i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2 - \frac{(3-2i)\cdot\overline{z_1}}{z_2}$$

5. *(8 pont)* Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

   Határozzuk meg a $(3A - B)^T \cdot C$ mátrix inverzét.

6. *(9 pont)* a) Hány dimenziós alteret generál $\mathbb{R}^4$-ben az alábbi vektorrendszer?

$$v_1 = (3,\,1,\,0,\,-1),\quad v_2 = (-1,\,2,\,3,\,1),\quad v_3 = (1,\,5,\,2,\,-3),\quad v_4 = (-1,\,2,\,2,\,0)$$

   b) Döntsük el, hogy az $u = (4,\,-2,\,1,\,1)$ vektor benne van-e ebben a generált altérben.

   c) Mennyi a megadott v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja?

Folytatás (Harmadik zh-témakör): a következő oldalon

$\boxed{\textit{Harmadik zh-témakör, összesen 25 pont}}$

7. *(9 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

8. *(8 pont)* Adott az alábbi lineárisan független vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektortérben:

$$b_1 = (1,\ -2,\ 0,\ 1), \quad b_2 = (1,\ -1,\ 2,\ 3), \quad b_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 4).$$

Állítsunk elő ortogonális és ortonormált bázist a $W = \operatorname{Span}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ altérben.

9. *(8 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (\, x \in (-\infty;\, 0)\,)$$

Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.