

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok javító zárthelyi *a 2. zh anyagából*
2023. január 3.

Minden feladathoz kérjük: indoklás, levezetés, a számítások bemutatása.

1. a) (7 pont) Tekintsük a $z_1 = 20 - 5i$, $z_2 = 7 + 6i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2} \right)^4$$

- b) (4 pont) Oldjuk meg az $5x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

(a) (6 pont) $(AB^T)^{-1} \cdot (2A + B) = ?$

(b) (4 pont) $\det(B^T B) = ?$

3. (5 pont) Altér-e \mathbb{R}^6 -ban az alábbi részhalmaz?

$$S := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \geq 0\}$$

4. Tekintsük az \mathbb{R}^4 vektortér alábbi altérét:

$$W := \{(x - y, x + y + 2z, y + z, x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x + y - z = 0\}$$

(a) (7 pont) Adjunk meg bázist W -ben. Hány dimenziós a W altér?

(b) (2 pont) Altere-e a W vektortérnek a $G = \text{Span}((0, 0, 0, 0), (-1, 9, 5, 1))$ halmaz?

5. (8 pont) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval. Írjuk fel a megoldást skalár alakban és vektor alakban is. Mennyi az együtthatómátrix rangja?

$$\begin{array}{cccccccl} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 7x_5 & = & 4 \\ \hline x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \end{array}$$