Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok javító zárthelyi $\boxed{\textit{az 1. zh anyagából}}$
2023. január 3.

$\boxed{\textit{Minden feladathoz kérjük: indoklás, levezetés, a számítások bemutatása.}}$

1. *(8 pont)* Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést, ha $0 < b < a$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$$

2. *(2+8 pont)*

   a) Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy $x_0 = -3$ gyöke legyen a következő polinomnak:

$$mx^3 - 2mx^2 + x + 93 = 0.$$

   b) Az a) pontban kiszámolt m paraméter mellett oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(x+3)\cdot\sqrt{2x-1} < \sqrt{mx^3-2mx^2+x+93}$$

3. *(9 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_2(x^2+x-1) - (\log_2 9)\cdot\log_3\sqrt{x-x^2+1} = \log_2 x$$

4. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\sin^2 x + \sin(2x) = 2\operatorname{tg} x + 2$$

5. *(7+1= 8 pont)*

   a) Egy megfelelő $N \in \mathbb{N}$ szám meghatározásával igazoljuk az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n > N: \quad \frac{3n^6-2n^5+n^4-3n^2+n-115}{5n^5-8n^4+n^3+2n^2-7n+31} > 200$$

   b) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

6. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+: \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot(k+1)!}{2^k} = \frac{(n+2)!-2^{n+1}}{2^n}$$