

Analízis I. gyakorlatok
Programtervező informatikus BSc
A, B és C szakirány

1. gyakorlat

Egyenlőtlenségek

■ Szükséges ismeretek

- Teljes indukció.
- Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása.

■ Feladatok

1. Feladat. (A háromszög-egyenlőtlenség) Egy valós szám abszolút értékét a következő módon értelmezzük:

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy minden a és b valós számra

$$a) \quad |a + b| \leq |a| + |b|, \qquad b) \quad \left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|.$$

2. Feladat. (A Bernoulli-egyenlőtlenség) Igazoljuk, hogy minden $h \geq -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

3. Feladat. (A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség) Legyen $n \geq 2$ tetszőleges természetes szám és a_1, a_2, \dots, a_n tetszőleges szerinti nemnegatív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$(*) \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $a \geq -1/2$ valós számra fennáll az

$$(1 - a)^5 \cdot (1 + a) \cdot (1 + 2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség!

5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

2. Feladat. Oldja meg \mathbb{R} -en a

$$\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$$

egyenlőtlenséget!

3. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív a, b, c valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$8abc \leq (a+b) \cdot (b+c) \cdot (a+c) \leq \frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Igazolja, hogy ha az a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valós számok szorzata 1, akkor

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Mikor van itt egyenlőség?

2. Feladat. Lássa be, hogy minden a, b, c pozitív valós szám esetén:

$$\begin{aligned} a) \quad a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + ac + bc, & b) \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &\geq a + b + c, \\ c) \quad (a+b+c)(ab+bc+ca) &\geq 9abc. \end{aligned}$$

3. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és a_1, a_2, \dots, a_n tetszőleges pozitív valós számok, akkor

$$a) \quad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n, \quad b) \quad a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}.$$

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

4. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

■ További feladatok

1. Feladat. Az a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valós számok **harmonikus közepét** így értelmezzük:

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

A harmonikus-, a mértani- és a számtani közepek között a

$$H_n \leq M_n \leq S_n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a számok egyenlők egymással.

2. Feladat. (**A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**) Legyen $n \geq 1$ egy természetes szám. Ekkor minden a_1, a_2, \dots, a_n és b_1, b_2, \dots, b_n valós számra

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$a_1 = \lambda b_1, \ a_2 = \lambda b_2, \ \dots, \ a_n = \lambda b_n \quad \text{vagy} \quad b_1 = \lambda a_1, \ b_2 = \lambda a_2, \ \dots, \ b_n = \lambda a_n.$$

Megjegyzés. Az állítás geometriai tartalma $n = 2$ esetén a következő: tekintsük az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ síkbeli vektorokat. Ezek hossza

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

skaláris szorzata pedig

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma,$$

ahol γ az \underline{a} és \underline{b} vektorok által bezárt szög. A skaláris szorzatot koordinátákkal így fejezhetünk ki:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Mivel $|\cos \gamma| \leq 1$, ezért ebből $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$, azaz

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

következik. A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség tehát ennek általánosítása.

2. gyakorlat

Számhalmaz szuprémuma és infimuma

■ Szükséges ismeretek

- Számhalmaz maximuma és minimuma.
- Korlátos számhalmazok.
- A szuprémum elv.
- Számhalmaz szuprémuma és infimuma.

■ Feladatok

1. Feladat. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről **nem** korlátos! Mutassuk meg, hogy az

$$A := \left\{ \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} \mid x \in [1, +\infty) \right\}$$

halmaz felülről **nem** korlátos!

2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A := \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

halmaznak **nincs** maximuma!

3. Feladat. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

$$\begin{aligned} a) \quad A &:= \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in (0, 1] \right\}, & b) \quad A &:= \left\{ \frac{x+1}{2x+3} \mid x \in [0, +\infty) \right\}, \\ c) \quad A &:= \left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \mid x \in [-2, +\infty) \right\}, & d) \quad A &:= \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \mid 0 \leq x \in \mathbb{R} \right\}? \end{aligned}$$

Határozzuk meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Házi feladatok

1. Feladat. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

$$\begin{aligned} a) \quad A &:= \left\{ \frac{1}{x^2} \mid 0 < x \leq 1 \right\}, & b) \quad A &:= \left\{ \frac{2n+1}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ c) \quad A &:= \left\{ \frac{5x+7}{2x+1} \mid x \in [0, +\infty) \right\}? \end{aligned}$$

Határozza meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &:= \left\{ \frac{|x| - 2}{|x| + 2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, & \text{b)} \quad A &:= \left\{ \frac{2x^2 + 1}{5x^2 + 2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \\ \text{c)} \quad A &:= \left\{ \frac{n^2 + n + 2}{3n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, & \text{d)} \quad A &:= \left\{ \frac{2m - 1}{3n + 2} \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}, \\ \text{e)} \quad A &:= \left\{ \frac{2^{n+2} + 9}{3 \cdot 2^n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}? \end{aligned}$$

Határozza meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

2. Feladat. Korlátos-e alulról, illetve felülről az

$$A := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1, 0 < y < x \right\}$$

halmaz? Ha igen, akkor számítsa ki $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ További feladatok

1. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a valós számok tetszőleges A és B nemüres és korlátos részhalmazaira

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sup\{a + b \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \sup A + \sup B, \\ & \inf\{a + b \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \inf A + \inf B, \end{aligned}$$

b) ha A és B minden eleme pozitív, akkor

$$\begin{aligned} & \sup\{a \cdot b \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \sup A \cdot \sup B, \\ & \inf\{a \cdot b \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \inf A \cdot \inf B. \end{aligned}$$

2. Feladat. Igazolja, hogy bármely $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmazok esetében

$$\text{a)} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}, \quad \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},$$

b) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor

$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}, \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\},$$

c) ha $A \subset B$, akkor

$$\inf A \geq \inf B \quad \text{és} \quad \sup A \leq \sup B.$$

Adjon példát olyan A, B halmazokra, hogy b)-ben \leq (\geq) helyett $<$ ($>$) legyen írható.

3. gyakorlat

Függvények

■ Szükséges ismeretek

- A függvény definíciója, értelmezési tartománya, értékkészlete.
- Halmaznak függvény által létesített képe, ősképe.
- Függvény invertálhatóságának a fogalma.
- Az inverz függvény definíciója.
- Az összetett függvény fogalma.

■ Feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a $C := [-2, 2]$ halmaz

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

2. Feladat. Számítsuk ki a $D := [1, 2]$ halmaz

$$f(x) := |x - 1| - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképet!

3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{1 + |x - 1|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény **nem** invertálható!

4. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 \quad (x \in (-1, 1))$$

függvény invertálható, és számítsuk ki az inverzét!

5. Feladat. Határozzuk meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

$$a) \quad f(x) := \sqrt{x+1} \quad (x \in [-1, +\infty)), \quad g(x) := x^2 - 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$b) \quad f(x) := \frac{1}{2x+1} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right), \quad g(x) := x^2 + 3x + \frac{3}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6. Feladat. Legyen

$$f(x) := \sqrt{2x+1} \quad \left(x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) \quad \text{és} \quad g(x) := \frac{1}{x^2-2} \quad (x \in (2, +\infty)).$$

Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket!

■ Házi feladatok

1. **Feladat.** Határozza meg az $E := (-1, 3)$ halmaz

$$f(x) := \frac{2x+4}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

függvény által létesített képét és ösképet!

2. **Feladat.** Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad (x \in [0, +\infty))$$

függvény invertálható, és számítsa ki az inverzét!

3. **Feladat.** Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \operatorname{sgn}(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

■ Gyakorló feladatok

1. **Feladat.** Határozza meg a $C := [-1, 6]$ halmaz

$$f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

2. **Feladat.** Legyen

$$f(x) := \sqrt{|5x-2|} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad D := (-1, 2].$$

Határozza meg az $f^{-1}[D]$ halmazt!

3. **Feladat.** Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} 3x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \sqrt{18-x} & (1 < x < 2) \end{cases}$$

függvény invertálható, és határozza meg az inverzét!

4. **Feladat.** Határozza meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty). \end{cases}$$

5. **Feladat.** Legyen $f(x) := x^2$ ($x > 0$) és $g(x) := x+1$ ($x > 0$). Mutassa meg, hogy az $f \circ g$ függvény invertálható, és határozza meg az inverzét!

■ További feladatok

1. **Feladat.** Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékénél lesz az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \alpha - x & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

függvény invertálható? Mi lesz akkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve f^{-1} ?

2. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha az f és a g függvény invertálható, továbbá $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, akkor $f \circ g$ is invertálható függvény, és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

3. Feladat. Legyen $f : A \rightarrow B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy bármely $D_1, D_2 \subset B$ esetén

- a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset, \quad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f,$
- b) $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2],$
- c) $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2],$
- d) $f^{-1}[D_1 \setminus D_2] = f^{-1}[D_1] \setminus f^{-1}[D_2].$

4. Feladat. Igazolja, hogy az $f : A \rightarrow B$ függvényre az

$$f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható!

5. Feladat. Igazolja, hogy az $f : A \rightarrow B$ függvényre az

$$f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható!

6. Feladat. Legyen $f : A \rightarrow B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy

- minden $D \subset B$ halmazra $f[f^{-1}[D]] \subset D,$
- az $f[f^{-1}[D]] = D$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $D \subset B$ halmazra, ha $\mathcal{R}_f = B.$

4. gyakorlat

Valós sorozatok 1.

■ Szükséges ismeretek

- Sorozat konvergenciájának és határértékének a definíciója.
- $(\pm\infty)$ -hez tartó sorozatok.
- A tágabb értelemben vett határérték fogalma.

■ Feladatok

1. Feladat. Tekintsük az (a_n) sorozat konvergenciájának a definícióját:

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$(*) \quad \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0 \text{ és } \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

2. Feladat. A konvergencia definíciója alapján mutassuk meg, hogy

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}, \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = 0.$$

3. Feladat. A definíció szerint az (a_n) sorozat $(+\infty)$ -hez tart, ha

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n > P.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$(**) \quad \exists P > 0 \text{ és } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n > P.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

4. Feladat. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+3} = +\infty, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-3n^2}{n+1} = -\infty.$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat konvergens?

2. Feladat. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

$$\begin{aligned} a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}} &= 1, & b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} &= +\infty, \\ c) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+3n-1} - 2n) &= -\infty & d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n-1}{3-n^2} &= -2. \end{aligned}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 10}{n^3 + n^2 + n + 1} = 2,$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + (-1)^n n}{n^2 + 2} = 2,$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \sqrt{n} - 1}{n + \sqrt{n} + 1} = 1,$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n^3 - n^2 + 3n + 1}{n^2 + \sqrt{n} + 2}} = +\infty,$$

$$e) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2n + (-1)^n} - \sqrt{2n} \right) = 0,$$

$$f) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{2n+1} \right) = -\infty.$$

2. Feladat. Legyen (a_n) olyan nullsorozat, amelyre $a_n \neq 0$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mit lehet mondani az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat határértékéről?

3. Feladat. Igazolja, hogy az

$$a_n := n^{(-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat divergens!

■ További feladatok

1. Feladat. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens. Mutassa meg, hogy az

$$s_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

számtani közepek sorozata is konvergens, és $\lim(a_n) = \lim(s_n)$. Adjon példát olyan (a_n) sorozatra, amely divergens, de a fenti (s_n) sorozat konvergens. Mutassa meg azt is, hogy ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim(s_n) = +\infty$!

2. Feladat. Legyen $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat felbontható $(a_n^{(1)})$, $(a_n^{(2)})$, \dots , $(a_n^{(k)})$ páronként diszjunkt részsorozatokra, ha a részsorozatokhoz tartozó $\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) indexsorozatok értékészletei egy osztályozása a természetes számok halmazának.

Igazoljuk, hogy ha egy sorozatnak van egy páronként diszjunkt, véges számú részsorozatból álló felbontása, amely felbontásban szereplő sorozatok határértéke azonos, akkor az eredeti sorozat ugyanehhez a számhoz tart!

Igaz-e az előző állítás végtelen számú részsorozatból álló felbontás esetén?

5. gyakorlat

Valós sorozatok 2.

■ Szükséges ismeretek

- Nevezetes sorozatok határértékei.
- A műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek.
- A rendezés és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek, a közrefogási elv.
- Monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételek.

■ Feladatok

1. Feladat. Legyen

$$P(x) := a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$(a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, r)$$

egy pontosan r -edfokú polinom (azaz $a_r \neq 0$). Mutassuk meg, hogy ha $1 \leq r \in \mathbb{N}$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty & (a_r > 0) \\ -\infty & (a_r < 0) \end{cases} = \operatorname{sgn}(a_r) \cdot (+\infty)$$

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n + 2}{1 - n^2},$	b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n - 4},$
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n + 1}{n^3 - 4n + 3},$	d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7 + n - 12}{1 - n^2 + 3n},$
e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2-n)^7 + (2+n)^7}{(n^2 + n + 1) \cdot (2n + 1)^5},$	f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2}{6n - 1} \right).$

3. Feladat. Mi a határértéke az

$$a_n := n^2 \cdot (n - \sqrt{n^2 + 1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak?

4. Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozzuk meg az

$$a_n := \sqrt{n^2 + n + 1} - \alpha n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

5. Feladat. A nevezetes sorozatok határértékeiről tanultakat is felhasználva, számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}},$	b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n},$
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}},$	d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + n}{n! + 3^n}.$

6. Feladat. Konvergensek-e a következő sorozatok, ha igen, mi a határértékük!

$$\begin{array}{ll} a) \ a_n = \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}), & b) \ a_n = \sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ c) \ a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}), & d) \ a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!

$$a) \ a_n := \frac{n^3 - 2n - 1}{-3n^3 + n + 3}, \quad b) \ a_n := \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}.$$

2. Feladat. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

$$a) \ a_n := \sqrt{n^2 + 3n + 1} - 2n, \quad b) \ a_n := n(n - \sqrt{n^2 + 1}).$$

3. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} a) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{2^{-n} + 3^n}, & b) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1} + 3^n}, & c) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} + n^5}}, \\ d) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-3)^n + n^3}{n! + 5^n}, & e) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + n^2 + 1}, & f) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n3^n + n^3 + (-1)^n}. \end{array}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!

$$\begin{array}{lll} a) \ a_n := \frac{n^4 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n - 4}, & b) \ a_n := \frac{(n-1)^7(2n-1)^3}{1 + (n+1)^{10}}, & c) \ a_n := \frac{\sqrt{n^4 + 1} - n^2}{n^2 + 1}, \\ d) \ a_n := \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^2 + 3}}, & e) \ a_n := \sqrt{\frac{3n^2 + n + 1}{n^2 + 2}}, & f) \ a_n := \frac{n - \sqrt{n} - 1}{n + \sqrt{n} + 1}, \\ g) \ a_n := \frac{\sqrt[3]{n^2 + 3}}{n+1}, & h) \ a_n := \frac{n + \sqrt{n^4 + 3}}{2n^2 + 5}, & i) \ a_n := \frac{\sqrt{n^4 + 1} - n^2}{n+1}, \\ j) \ a_n := n(\sqrt{n^2 + 4} - n), & k) \ a_n := \sqrt{n^2 + n} - n + 1, & l) \ a_n := \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}, \\ m) \ a_n := \frac{5^n - 3^{n+2}}{3^n - 2^{2n+1}}, & n) \ a_n := \frac{2^n + (-1)^n}{2^n - 1}, & o) \ a_n := \sqrt[n]{\sqrt{n} + 2}, \\ p) \ a_n := \sqrt[n]{\frac{3n + \sqrt{n} + 1}{n+1}}, & q) \ a_n := \sqrt[n]{n^4 + 4n + 1}, & r) \ a_n := \sqrt[n]{3^n + (-1)^{nn}}. \end{array}$$

2. Feladat. Igaz-e, hogy ha

- a) (a_n) konvergens, (b_n) divergens $\implies (a_n + b_n)$ divergens?
- b) (a_n) divergens, (b_n) divergens $\implies (a_n + b_n)$ divergens?

3. Feladat. Az α valós paraméter milyen értékei mellett konvergens az

$$a_n := \frac{(1-\alpha)n^2 + n + 1}{3n^2 + 2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Mi ekkor a határértéke?

4. Feladat. Határozza meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(an - \sqrt{cn^2 + bn - 2} \right) = 1$$

legyen!

■ További feladatok

1. Feladat. Igazolja, hogy

$$\alpha := \lim(x_n) \quad \implies \quad |\alpha| = \lim(|x_n|)$$

Igaz-e az állítás megfordítása?

2. Feladat. Tegyük fel, hogy adottak az $r, s \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, $a_r \neq 0$, $b_0, \dots, b_s \in \mathbb{R}$, $b_s \neq 0$ számok, és legyen

$$R_n := \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_r n^r}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_s n^s}$$

olyan $n \in \mathbb{N}$ indexekre, amelyekre a nevező nem nulla.

Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \begin{cases} \frac{a_r}{b_s} & (r = s) \\ 0 & (r < s) \\ +\infty & (r > s \text{ és } a_r/b_s > 0) \\ -\infty & (r > s \text{ és } a_r/b_s < 0). \end{cases}$$

3. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ sorozat az e számhoz konvergál:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

4. Feladat. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sorozatra

a) $\lim(a_n) = +\infty$,

b) $\lim(a_n) = 0$

teljesül. Vizsgálja meg határérték szempontjából az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozatot!

5. Feladat. Legyen (a_n) egy olyan konvergens sorozat, amelynek egyik tagja sem 0. Konvergencia szempontjából mit tud mondani az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozatról?

6. gyakorlat

Valós sorozatok 3.

■ Szükséges ismeretek

- Az e szám értelmezése.
- Pozitív valós szám m -edik gyökének a létezésére és közelítő értékeinek a kiszámítására vonatkozó tétel.
- Rekurzív módon megadott sorozatok határértékének a vizsgálata.

■ Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$\begin{aligned} a) \quad a_n &:= \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \quad (n \in \mathbb{N}), & b) \quad a_n &:= \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n} \quad (n \in \mathbb{N}^+), \\ c) \quad a_n &:= \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$a_0 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét!

3. Feladat. Az $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens az

$$a_0 := \sqrt{\alpha}, \quad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, és ekkor mi a határértéke?

4. Feladat. Legyen $\alpha \geq 0$ valós paraméter. Vizsgáljuk meg határérték szempontjából az

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot!

5. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{2}{1 + a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét!

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$\begin{aligned} a) \quad a_n &:= \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} \quad (n \in \mathbb{N}), & b) \quad a_n &:= \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^{n-5} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ c) \quad a_n &:= \left(\frac{3n+3}{2n-1}\right)^{5n+1} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

2. Feladat. Legyen

$$a_0 := \sqrt{3}, \quad a_{n+1} := \sqrt{3 + 2a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Mutassa meg, hogy a sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

3. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor az

$$a_0 := \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + \alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

■ **Gyakorló feladatok**

1. Feladat. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$\begin{array}{ll} a) \quad a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} & (n \in \mathbb{N}^+), \quad b) \quad a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^+), \\ c) \quad a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n & (n \in \mathbb{N}^+), \quad d) \quad a_n := \left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)^{3n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ e) \quad a_n := \left(\frac{n+3}{2n+2}\right)^{2n-3} & (n \in \mathbb{N}), \quad f) \quad a_n := \left(\frac{5n+2}{4n-1}\right)^{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

2. Feladat. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$\begin{array}{ll} a) \quad a_n := \left(\frac{n^3-3}{n^3+2}\right)^{n^3} & (n \in \mathbb{N}), \quad b) \quad a_n := \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^+), \\ c) \quad a_n := \left(\frac{n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n+1} & (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

3. Feladat. Számítsa ki az

$$a_0 := 6, \quad a_{n+1} := 5 - \frac{6}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

4. Feladat. Számítsa ki az

$$a_0 := 12, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{4} + 3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

5. Feladat. Konvergens-e az

$$0 \leq a_0 \leq 1, \quad a_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

■ További feladatok

1. Feladat. A nemnegatív $\alpha < \beta$ valós számokból kiindulva a következőképpen képezzük az (a_n) és a (b_n) sorozatot:

$$a_0 := \alpha, \quad b_0 := \beta \quad \text{és} \quad a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Igazolja, hogy a sorozatok konvergensek, és a határértékük egyenlő! Lényeges-e az $\alpha < \beta$ feltétel? (C. F. Gauss nyomán ezt a közös értéket az α és a β számok **számtani-mértani közepének** nevezzük.)

2. Feladat. Vizsgálja meg határérték szempontjából az

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot, ha $\alpha < 0$ valós paraméter!

7. gyakorlat

Végtelen sorok 1.

■ Szükséges ismeretek

- A végtelen sor fogalma, konvergenciája és összege.
- Nevezetes sorok.
- Végtelen sorok lineáris kombinációi.
- Sorok konvergenciájának egy szükséges feltétele.
- A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.
- Összehasonlító kritériumok.

■ Feladatok

1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és számítsuk ki az összegüket!

$$a) \sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{3^{2n}},$$

$$b) \sum_{n=0} \frac{\left((-1)^n + 2^n\right)^2}{5^{n+2}},$$

$$c) \sum_{n=1} \frac{1}{4n^2 - 1},$$

$$d) \sum_{n=0} \frac{n^2 + 3n}{(n+2)!}.$$

2. Feladat. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$$

sorösszeget, ha $q \in (-1, 1)$.

3. Feladat. Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat!

$$a) \sum_{n=1} \sqrt[n]{0,1},$$

$$b) \sum_{n=1} \frac{n}{2n-1},$$

$$c) \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}},$$

$$d) \sum_{n=1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2}.$$

4. Feladat. Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat!

$$a) \sum_{n=1} \frac{1}{2n+1},$$

$$b) \sum_{n=1} \frac{1}{n^2 - n + 1},$$

$$c) \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$d) \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}.$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és számítsuk ki az összegüket!

$$a) \sum_{n=3} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^{2n}} \right), \quad b) \sum_{n=1} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}.$$

2. Feladat. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat!

$$a) \sum_{n=1} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1}, \quad b) \sum_{n=1} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n-1},$$
$$c) \sum_{n=1} \frac{n^2 + n - 1}{\sqrt{n^4 + 1} - n^3 + n^5}, \quad d) \sum_{n=1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg a következő sorok összegét, ha konvergensek!

$$a) \sum_{n=0} \frac{1 + 2^{2n+1}}{5^n}, \quad b) \sum_{n=2} \frac{(-1)^{n+1} + 3^n}{4^{n-1}}, \quad c) \sum_{n=3} \frac{1}{n^2 - 1},$$
$$d) \sum_{n=2} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}, \quad e) \sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad f) \sum_{n=1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

2. Feladat. Számítsa ki az alábbi sorok összegét!

$$a) \sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad b) \sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}, \quad c) \sum_{n=1} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}.$$

3. Feladat. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Határozza meg a következő sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n$$

4. Feladat. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat!

$$a) \sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n + 1}}, \quad b) \sum_{n=1} \left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^n, \quad c) \sum_{n=1} \frac{3n-2}{n^2+1},$$
$$d) \sum_{n=2} \frac{2n+1}{n^3-3n+1}, \quad e) \sum_{n=1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad f) \sum_{n=1} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right).$$

5. Feladat. Igazolja, hogy a páratlan számok reciprokaiból álló sor divergens!

■ További feladatok

1. Feladat. Konvergens-e a $\sum a_n$ sor, ha a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$$

egyenlőség minden $p = 1, 2, 3, \dots$ számra teljesül?

2. Feladat. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7 számjegy. Igazolja, hogy ezen számok reciprokainak az összege véges! Mutassa meg, hogy az összeg kisebb 80-nál!

3. Feladat. Cauchy-féle kondenzációs elv: Igazolja, hogy ha (a_n) egy nem negatív tagokból álló, monoton csökkenő sorozat, akkor $\sum a_n$ és $\sum 2^n a_{2^n}$ ekvikonvergens sorok!

4. Feladat. A Cauchy-féle kondenzációs elv segítségével igazolja a hiperharmonikus sor konvergenciájára vonatkozó tételt!

8. gyakorlat

Végtelen sorok 2.

■ Szükséges ismeretek

- A sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyök- és d'Alembert-féle hányadoskritérium.
- Összehasonlító kritériumok.
- Nevezetes sorok.
- Leibniz-típusú sorok.
- A p -adikus törtek.
- Sorok Cauchy-szorzata.
- Sorok átrendezése és zárójelezése.

■ Feladatok

1. **Feladat.** Az alábbi sorok közül melyek konvergenssek?

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{3n+2},$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n,$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n},$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + 3^n},$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2+n+1},$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(-3)^n}.$$

2. **Feladat.** Milyen $x \geq 0$ valós szám esetén konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \right)^n$$

sor, és akkor mi az összege?

3. **Feladat.** Az x valós szám milyen értéke mellett konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$$

végtelen sor?

4. **Feladat.** Az $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ paraméter milyen értékei mellett konvergens a

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

végtelen sor?

5. **Feladat.** Adjuk meg az

$$a) \quad \frac{1}{7},$$

$$b) \quad 0, 1\overline{4}_{(6)}$$

számok diadikus tört alakját!

6. Feladat. A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ geometriai sor önmagával vett Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazoljuk, hogy minden $|q| < 1$ valós számra

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Az alábbi sorok közül melyek konvergenssek?

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n}, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{n^2+n} \right)^n. \end{array}$$

2. Feladat. Adja meg a következő számok diadikus tört alakját!

$$a) \frac{3}{8}, \quad b) 0, \overline{23}_{(5)}$$

3. Feladat. A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ sorok Cauchy-szorzatával igazolja, hogy ha $|q| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Az alábbi sorok közül melyek konvergenssek?

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)^n. \end{array}$$

2. Feladat. Adja meg a következő számok diadikus tört alakját!

$$(a) \frac{2}{11}, \quad (b) 0, \overline{71}_{(8)}$$

3. Feladat. Mutassa meg, hogy a

$$\begin{array}{l} a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ sor önmagával vett Cauchy-szorzata konvergens,} \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens!} \end{array}$$

■ További feladatok

1. Feladat. A gyök- és a hányadoskritérium alkalmazása. Bizonyítsa be, hogy a gyökkritérium „erősebb”, mint a hányadoskritérium. Ez a következőket jelenti.

- a) Minden olyan esetben, amikor a hányadoskritérium alkalmazható, akkor a gyökkritérium is alkalmazható. Másként fogalmazva: legyen (a_n) egy pozitív tagú számsorozat. Ekkor

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \overline{\mathbb{R}} \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

- b) Van olyan végtelen sor, amelyik a gyökkritérium alapján konvergens, de a hányadoskritérium nem alkalmazható. Tekintse például a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

végtelen sort.

Útmutatás.

- a) Legyen $0 < A < +\infty$. Ekkor

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: A - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Válasszunk egy $\varepsilon > 0$, $A - \varepsilon > 0$ számot. Tekintsük a hozzá tartozó n_0 küszöbindexet, valamint egy $n > n_0$ számot. A $(*)$ alapján $n_0 + 1, \dots, n$ -re kapott egyenlőtlenségeket szorozzuk össze, majd alkalmazzuk a közrefogási elvet.

Az állítás bizonyítása az $A = 0$, $A = +\infty$ esetekben hasonló.

- b) Legyen $a_n := \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}$) és

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + (-1)^{n+1}}{3 + (-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $b_{2n} = \frac{1}{4}$ és $b_{2n+1} = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért a (b_n) sorozatnak nincs határértéke, így a hányadoskritérium nem alkalmazható. Ugyanakkor

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \sqrt[n]{3 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

ezért a gyökkritérium szerint a $\sum a_n$ sor konvergens.

2. Feladat. Igazolja, hogy ha egy konvergens sort úgy rendezünk át, hogy minden páratlan indexű tag a nála nagyobb szomszédos taggal helyet cserél, akkor az átrendezett sor is konvergens, és összege az eredeti sorral megegyezik!

3. Feladat. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ feltételese konvergens sornak adjon meg egy olyan átrendezését, amelynek összege

$$(a) \quad 12,$$

$$(b) \quad +\infty!$$

4. Feladat. Az 1. (a) feladat állítását felhasználva mutassa meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

9. gyakorlat

Végtelen sorok 3.

■ Szükséges ismeretek

- A hatványsor fogalma. A hatványsor konvergenciahalmaza és konvergenciasugara.
- Cauchy–Hadamard-tétel. A konvergenciasugár hányadoson alapuló kiszámítása.
- A hatványsorok összegfüggvénye.
- Műveletek hatványsorokkal.
- Az exponenciális függvény fogalma és tulajdonságai.
- A szinusz- és koszinuszfüggvény fogalma és tulajdonságai.

■ Feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg a

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1} (3x-1)^n, \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x+2)^n$$

hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán.

2. Feladat. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsuk elő nulla középpontú hatványsor összegeként:

$$a) f(x) = \frac{1-x}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$$

$$b) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}).$$

3. Feladat. Állítsuk elő az

$$a) f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) f(x) = \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényeket nulla középpontú hatványsor összegeként.

■ Házi feladatok

1. Feladat. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán!

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n+1} x^n, \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^2 - 1} (x-2)^n.$$

2. Feladat. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő nulla középpontú hatványsor összegeként!

$$a) f(x) = \frac{x+3}{5x^2+9x-2} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{5}\right\}\right), \quad b) f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}), & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}, & c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 (2x+3)^n, \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n, & f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}, \\ g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n^2}}, & h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n, & i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\alpha^{n^2}} x^n \quad (\alpha > 1). \end{array}$$

2. Feladat. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő nulla középpontú hatványsor összegeként!

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{1+x}{3x-2} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}\right), & b) f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}), \\ c) f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}), & d) f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) f(x) = \frac{1}{e^{x^3}} \quad (x \in \mathbb{R}), & f) f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{array}$$

■ További feladatok

1. Feladat. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán!

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{4n}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n^2}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n^2}.$$

2. Feladat. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara 2, a $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara pedig 3. Mennyi lesz a $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$ sor konvergenciasugara?

3. Feladat. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő egy megadott a középpontú hatványsor összegeként:

$$a) f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6} \quad (a=1, x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}), \quad b) f(x) = e^x \quad (a=2, x \in \mathbb{R}).$$

4. Feladat. Tekintsük az

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad \text{és} \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

Fibonacci sorozatot. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara legalább $1/2$. Határozzuk meg a sor összegfüggvényét a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon. Ezt felhasználva adjunk explicit képletet az (a_n) sorozatra.

10. gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága 1.

■ Szükséges ismeretek

- Számhalmaz torlódási pontja.
- A határérték egységes definíciója.
- A határérték egyértelmű.
- A határértékre vonatkozó átviteli elv.
- A közrefogási elv.
- A határérték és a műveletek kapcsolata.
- A határérték definíciójának speciális esetei egyenlőtlenségekkel.
- Egyoldali határértékek.
- Nevezetes határértékek: az előjelfüggvény, hatványfüggvények, reciprokfüggvények, polinomfüggvények, racionális törtfüggvények.

■ Feladatok

1. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Fogalmazzuk meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat!

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -2} f = 7, \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty.$$

2. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} &= 1, & b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} &= -8, \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} &= \frac{1}{2}, & d) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} &= 3. \end{aligned}$$

3. Feladat. A nevezetes határértékek és a műveleti tételek felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x + 2}, & & b) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 2x + 1}, \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 - 5x + 6}, & & d) \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 - 5x + 6}. \end{aligned}$$

4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 2x + 7), \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x + 2).$$

5. Feladat. A „kiemelés/leosztás technikájával” határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 23}{-3x^3 - 5x^2 + 31x + 1}, & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 7x^2 + 5x - 1}, \\ c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 11x + 2}{x^2 + 3x + 2}. \end{array}$$

6. Feladat. A „szorzatra bontás technikájával” vizsgáljuk meg a következő határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}.$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = -\frac{2}{5}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x - 4}{x^2 + 1} = +\infty.$$

2. Feladat. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^2 - x}{2x^4 - x^3 + x}, & b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 1}, \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right), & d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad (m, n = 1, 2, \dots). \end{array}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Fogalmazza meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat!

$$a) \lim_1 f = +\infty, \quad b) \lim_{+\infty} f = -\infty, \quad c) \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3.$$

2. Feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 3} = -\frac{3}{4}, & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^3 - x^2 + x - 1} = 4, \\ c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x}{1 - x^2} = -2, & d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{x^2 + 3x - 4} = 0, \\ e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x}} = -\infty, & f) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{2x-1} = -1. \end{array}$$

3. Feladat. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^8 - 3x^4 + 2x^2}{4x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2}, & b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + x - 6}, \\ c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3 - 2x^3}, & d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 + 3x^5 - 2x^2 - x - 1}{x^3 - 1}, \\ e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} \right), & f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} \right) \quad (m, n = 1, 2, \dots). \end{array}$$

■ További feladatok

1. Feladat. Mutassa meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nem állandó, periodikus függvény, akkor a $\lim_{-\infty} f$ és a $\lim_{+\infty} f$ határértékek nem léteznek!

2. Feladat. Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$ egy olyan polinom, amire $a_n > 0$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor $\exists K > 0, \forall x > K: p(x) > 0$.

3. Feladat. Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$ egy olyan polinom, amire $n > 0$, $a_n > 0$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor $\exists K > 0$, hogy p szigorúan monoton növekvő a $(K, +\infty)$ intervallumon!

11. gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága 2.

■ Szükséges ismeretek

- Az \exp , a \sin és a \cos függvény hatványsoros definíciója.
- Hatványsor összegfüggvényének a határértéke.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- A pontbeli folytonosság fogalma.
- Speciális függvények folytonossága.
- Az összetett függvény határértéke.

■ Feladatok

1. Feladat. A „gyöktelenítés technikájával” számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy létezik a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right)$$

határérték, ahol $[\alpha]$ jelöli az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám egész részét. Mivel egyenlő ez a limesz?

3. Feladat. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{aligned} a) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), & b) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \\ c) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}, & d) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \cdot \sin x} - \sqrt{\cos x}}. \end{aligned}$$

4. Feladat. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

5. Feladat. Számítsuk ki a következő paraméteres határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{\alpha x^2 + 1} - 1} \quad (\alpha > 0), \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} \quad (\alpha, \beta \neq 0).$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az következő az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{\frac{4x^3 + 3x^2}{4x-3}} \right), \\
 c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, & d) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3-x)}{\sin(4x-12)}, \\
 e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{5x}}{2x}, & f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - \frac{1}{1-x}}{x + \sin 2x}.
 \end{array}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az következő az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}, \\
 c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2 - 4}, & d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2 - \sqrt{x^2+1}}, \\
 e) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x), & f) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} + x).
 \end{array}$$

2. Feladat. Számítsa ki az következő az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 4x}{x^3}, \\
 c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{1 - \cos x}, & d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x + \sin^2 2x}{2x^2 - \sin^2 x}, \\
 e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{4x}}{x \cos 2x + \sin 3x}, & f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).
 \end{array}$$

3. Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Számítsa ki a

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x} - x - 1}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-\alpha} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}
 \end{array}$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

4. Feladat. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ mellett igaz az, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)) = 0$?

5. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

határértékeket!

6. Feladat. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke!

- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \{x\}$, ahol $\{x\} := x - [x]$ az x valós szám tört része,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - \{x\}$.

7. Feladat. Indokolja meg miért nem léteznek a következő határértékek!

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|1 - x^2|}{1 + x},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}.$$

■ További feladatok

1. Feladat. Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, és $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ha f folytonos az a pontban, $f(a) = 0$ és g korlátos, akkor az fg függvény folytonos az a pontban!

2. Feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in D_f$. Igazolja, hogy ha f folytonos az a pontban akkor $|f|$ is folytonos az a pontban! Igaz-e az állítás megfordítása?

3. Feladat. Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, és $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ha az f és g függvények folytonosak az a pontban, akkor az $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad G(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

függvények is folytonosak az a pontban!

4. Feladat. Igazolja, hogy ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek minden pontjában nulla a határértéke, akkor $\exists a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$.

5. Feladat. Adjon meg olyan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvényt, amely monoton és végtelen sok szakadási helye van!

6. Feladat. Adjon meg olyan $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \text{de} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$$

teljesül!

12. gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága 3.

■ Szükséges ismeretek

- A pontbeli folytonosság fogalma
- Szakadási helyeknek és osztályozásuk.
- A pontbeli folytonosság és határérték közötti kapcsolat.
- A folytonosságra vonatkozó átviteli elv.
- Az algebrai műveletek és a folytonosság kapcsolata.
- Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
- Az összetett függvény folytonossága.
- Az összetett függvény határértéke
- Nevezetes határértékek.
- A Bolzano tétele.
- A Weierstrass tétele.

■ Feladatok

1. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy

$$(*) \quad \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall \varepsilon > 0 \text{ és } \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Az f függvény milyen tulajdonságát fejezi ki ez az állítás?

2. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} & (x < 1) \\ \sqrt{x + 3} & (1 \leq x \leq 6) \\ \frac{\sin(2x - 12)}{x - 6} & (x > 6) \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

3. Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesznek mindenütt folytonosak a következő függvények?

$$a) \quad f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1 & (x \leq 1) \\ -x + 3 & (x > 1), \end{cases} \quad b) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{e^{x+\frac{1}{x}}} & (x > 0) \\ -2x + \alpha & (x \leq 0). \end{cases}$$

4. Feladat. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozzuk meg az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} & (x < 0) \\ \alpha - \beta x^3 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 1} & (x > 1) \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a jelzett I intervallumon!

$$\begin{array}{ll} a) & x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0, \quad I := \mathbb{R}, \\ b) & e^x = 2 - x, \quad I := \mathbb{R}, \\ c) & x = \cos x, \quad I := (0, 1), \\ d) & \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = e^{x^2}, \quad I := (0, 2). \end{array}$$

6. Feladat. Lássuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke! Lényeges-e a polinom fokszámára tett feltétel?

7. Feladat. Igazoljuk, hogy az $x^3 + x - 1$ polinomnak pontosan egy valós gyöke van, és számítsuk ki ezt a gyököt 10^{-1} pontossággal!

8. Feladat. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor f -nek létezik abszolút minimuma!

■ Házi feladatok

1. Feladat. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x + 2} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}) \\ \alpha & (x = -1) \\ \beta & (x = -2) \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

2. Feladat. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 - |x| & (x \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$

3. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a valós számok halmazán!

$$a) \quad x^4 + x^2 - 2 = x, \quad b) \quad e^x = x^2 + 3.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos a következő függvény?

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &:= \begin{cases} x^2 - \alpha^2 & (x < 4) \\ \alpha x + 20 & (x \geq 4), \end{cases} & b) \quad f(x) &:= \begin{cases} x^3 + x & (x \leq \alpha) \\ x^2 & (x > \alpha), \end{cases} \\ c) \quad f(x) &:= \begin{cases} \alpha x + 1 & (x \leq 2) \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & (x > 2), \end{cases} & d) \quad f(x) &:= \begin{cases} x^2 + \alpha x - 1 & (x < 1) \\ \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} & (x \geq 1). \end{cases} \end{aligned}$$

2. Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az alábbi függvények folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát!

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{x-7}{|x-7|} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}) \\ \alpha & (x = 7), \end{cases} & b) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{x^2 + 64}{x + 4} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}) \\ \alpha & (x = -4), \end{cases} \\ c) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{9\}) \\ \alpha & (x = 9), \end{cases} & d) \quad f(x) &:= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ \alpha & (x = 0), \end{cases} \\ e) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ \alpha & (x = 0), \end{cases} & f) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{\sin(2x-4)}{x-2} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) \\ \alpha & (x = 2). \end{cases} \end{aligned}$$

3. Feladat. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha e^{\frac{2}{x-1}} + \beta & (x < 1) \\ \beta \sqrt{\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 1} & (1 \leq x \leq 3) \\ \frac{\alpha}{(x-3)^2} & (x > 3) \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &:= \operatorname{sgn}^2 x \quad (x \in \mathbb{R}), & b) \quad f(x) &:= |x| \operatorname{sgn} x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c) \quad f(x) &:= \operatorname{sgn}(x^2 - x) + \operatorname{sgn} x \quad (x \in \mathbb{R}), & d) \quad f(x) &:= x[x] \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

5. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a jelzett I intervallumon!

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{1}{x+1} &= x^3 + 2x - 4, \quad I := (-1, +\infty), \\ b) \quad e^x x^2 &= 2, \quad I := (0, +\infty), \\ c) \quad \sin x &= 1 - x, \quad I := (0, 1), \\ d) \quad \frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2} &= 0, \quad I := (1, 2), \\ e) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} &= 0, \quad I := (1, 2), \quad I := (2, 3). \end{aligned}$$

6. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\ln x = e^x - 3$$

egyenletnek van megoldása az $(1, 2)$ intervallumban!

7. Feladat. Igazolja, hogy az $x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ polinomnak pontosan egy pozitív valós gyöke van, és számítsa ki ezt a gyököt 10^{-2} pontossággal!

8. Feladat. Készítsen folyamatábrát a függvények zérushelyének keresésére vonatkozó intervallumfelezési eljárásnak!

9. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Igazolja, hogy f korlátos függvény!

■ További feladatok

1. Feladat. Igazolja, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton függvény, amely minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz, akkor f folytonos függvény!

2. Feladat. Igazolja, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor minden $x_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén létezik olyan $\xi \in [a, b]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

3. Feladat. Igazolja, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ egy folytonos függvény, akkor létezik olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $f(\xi) = \xi$!