11. és 12. gyakorlat

HATÁROZOTT INTEGRÁL ÉS ALKALMAZÁSAI

Emlékeztető.

$\boxed{1.}$ A határozott integrál kiszámítása.

Definíció. *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Az $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $f \;:\; [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény* ***primitív függvénye az*** $[a,b]$ ***intervallumon****, ha*

$$F \in C[a,b],\ \ F \in D(a,b),\ \ \textit{és}\ F'(x) = f(x) \quad \big(x \in (a,b)\big).$$

Newton–Leibniz-tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, és az f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor*

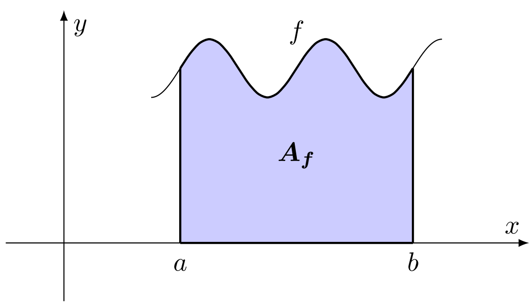
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b\,,$$

ahol F az f függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye.

Megjegyzések.

- A Newton–Leibniz-formula az integrál fogalmát hozza kapcsolatba a derivált fogalmával. Ha teljesülnek a tétel feltételei, akkor a határozott integrál értéke kiszámítható az integrandus primitív függvénye segítségével (feltéve, hogy a primitív függvény ismert).
- Ha az f függvény **folytonos** az $[a,b]$ intervallumon $(f \in C[a,b])$, akkor **integrálható** is $[a,b]$-n $(f \in R[a,b])$, továbbá **primitív függvénye** is létezik $[a,b]$-n. Tehát az integrandus folytonossága elégséges ahhoz, hogy teljesüljenek a Newton–Leibniz-tétel feltételei.

$\boxed{2.}$ Síkidom területe.



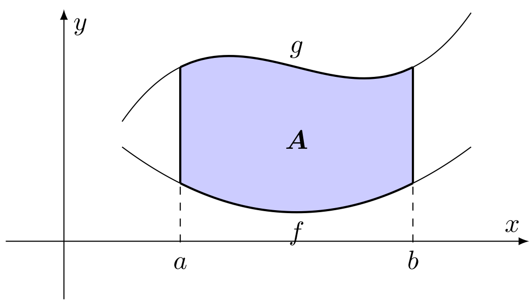
Definíció. *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos és $f \geq 0$. Ekkor az f grafikonja alatti*

$$A_f := \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b,\ \ 0 \leq y \leq f(x) \,\right\}$$

síkidomnak ***van területe****, ha $f \in R[a,b]$. A*

$$t\,(A_f) := \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

valós számot az A_f síkidom ***területének*** *nevezzük.*



Definíció. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy az* f *és* g *függvények korlátosak, továbbá* $f(x) \le g(x)$ *minden* $x \in [a, b]$*-re. Ekkor az*

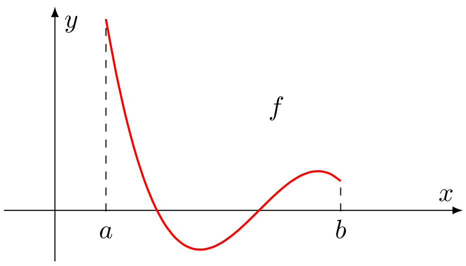
$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x) \right\}$$

síkidomnak ***van területe****, ha* $f, g \in R[a, b]$. *A*

$$t\,(A) := \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

valós számot az A *síkidom* ***területének*** *nevezzük.*

3. Síkbeli görbe ívhossza.



Definíció. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *A*

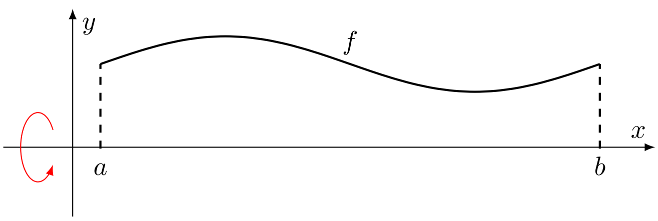
$$\Gamma_f := \left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; x \in [a, b] \right\}$$

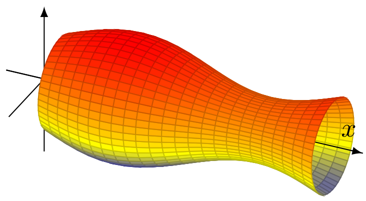
síkbeli halmazt (görbét) az f *grafikonjának nevezzük.*

Tétel. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *és tegyük fel, hogy az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonosan differenciálható. Ekkor az* f *függvény grafikonjának* ***ívhossza***

$$\ell\,(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx < +\infty.$$

4. Forgástest felszíne és térfogata.





Definíció. *Legyen* $0 \le f \in R[a, b]$. *Ekkor* f *grafikonjának az* x *tengely körüli megforgatásával adódó*

$$H_f := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x) \right\}$$

forgástestnek van ***térfogata****, és az egyenlő a*

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

integrállal.

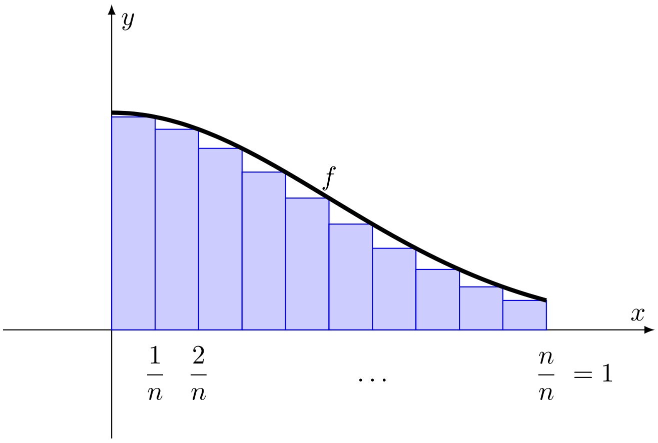
Definíció. *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$, *és tegyük fel, hogy* $0 \le f \in C^1[a, b]$. *Ekkor* f *grafikonjának az* x *tengely körüli forgatásával adódó*

$$\mathcal{A}_f := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le x \le b,\ y^2 + z^2 = f^2(x) \right\}$$

forgásfelületnek van ***felszíne****, és értéke*

$$2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

$\boxed{5.}$ Összeg határértékének kiszámolása.



Tétel. *Ha* $f \in R[0,1]$, *akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Megjegyzés. A tétel bizonyos összegek határértékének kiszámolását teszi lehetővé a határozott integrál fogalmának felhasználásával. Ha az összeg $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ alakban írható, akkor ez az f függvény τ_n felosztáshoz és ξ_n közbülső helyekhez tartozó

$$\sigma(f, \tau_n, \xi_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Riemann-féle közelítő összege, ahol

$$\tau_n := \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, n \right\} \in \mathcal{F}[0,1], \quad \text{és} \quad \xi_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} \right) \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

1. feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5},$

(d) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2},$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{-x} \cdot \cos^2 x\,dx.$

Megoldás.

(a) $\boxed{\displaystyle\int_{10}^{66} \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx}$

Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először határozzuk meg a primitív függvényeit. Alkalmazzuk a

$$t=\sqrt[3]{x-2} \iff x=t^3+2=:g(t) \qquad (x\in(10,66) \iff t\in(2,4))$$

helyettesítést. A g függvény deriválható:

$$g'(t)=3t^2 \qquad (t\in(2,4)),$$

továbbá $g'(t)>0$, így g szigorúan monoton növekvő, tehát invertálható, és

$$g^{-1}(x)=t=\sqrt[3]{x-2} \qquad (x\in(10,66)).$$

A második helyettesítési szabály alapján:

$$\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx=\int \frac{1}{t^3+2-t-2}\cdot 3t^2\,dt=\int \frac{3t}{t^2-1}\,dt=\frac{3}{2}\cdot\int\frac{2t}{t^2-1}\,dt=$$

$\left[\int \frac{f'}{f} \text{ alakú integrál:}\right]$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln(t^2-1)+c\Big|_{t=\sqrt[3]{x-2}}=\underline{\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-1\right)+c} \qquad (x\in(10,66),\ c\in\mathbb{R}).$$

A Newton–Leibniz-formula alapján az integrál:

$$\int_{10}^{66}\frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx=\frac{3}{2}\cdot\left[\ln\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-1\right)\right]_{10}^{66}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\ln\left(\sqrt[3]{64^2}-1\right)-\ln\left(\sqrt[3]{8^2}-1\right)\right)=\frac{3}{2}\cdot(\ln 15-\ln 3)=\underline{\underline{\frac{3}{2}\cdot\ln 5}}.$$

(b) $\boxed{\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx}$

Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először határozzuk meg a primitív függvényeit. Vegyük észre, hogy

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (x\in(1,e)),$$

vagyis az integrál $\int f\circ g\cdot g'$ alakú:

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx=\int \sin(\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx=\underline{-\cos(\ln x)+c} \qquad (x\in(1,e),\ c\in\mathbb{R}).$$

A Newton–Leibniz-formula alapján az integrál:

$$\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx=[-\cos(\ln x)]_1^e=-\cos(\ln e)+\cos(\ln 1)=\underline{\underline{1-\cos 1}}.$$

(c) $\boxed{\displaystyle\int\limits_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5}}$

Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először határozzuk meg a primitív függvényeit. A nevező teljes négyzetté alakításával:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} = \underline{\operatorname{arc\,tg}(x+2)+c} \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

A Newton–Leibniz-formula alapján az integrál:

$$\int\limits_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \left[\operatorname{arc\,tg}(x+2)\right]_{-2}^{\sqrt{3}-2} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}.$$

(d) $\boxed{\displaystyle\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}}$

Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először határozzuk meg a primitív függvényeit. Bontsuk a kifejezést parciális törtekre:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x-A-2B}{x^2-3x+2} \iff \begin{cases} A+B = \ 0 \\ -A-2B = \ 1 \end{cases} \iff A=1,\ B=-1,$$

tehát, $x \in (3,4)$ esetén:

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \ln(x-2) - \ln(x-1) + c = \underline{\ln\frac{x-2}{x-1} + c} \qquad (x \in (3,4),\ c \in \mathbb{R}).$$

A Newton–Leibniz-formula alapján az integrál:

$$\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \left[\ln\frac{x-2}{x-1}\right]_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \underline{\underline{\ln\frac{4}{3}}}.$$

(e) $\boxed{\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx}$

Az integrandus folytonos, ezért integrálható és létezik primitív függvénye. Először határozzuk meg a primitív függvényeit. Alkalmazzuk a linearizáló formulát:

$$\int e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx = \int e^{-x}\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int e^{-x}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx$$

Az első tag lineáris helyettesítéssel:

$$\int e^{-x}\,dx = \underline{-e^{-x}+c} \qquad (x \in (0,\pi),\ c \in \mathbb{R}).$$

A második tag parciális integrálással:

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx &= \int\left(-e^{-x}\right)'\cdot\cos(2x)\,dx = \\ &= \left(-e^{-x}\right)\cdot\cos(2x) - \int\left(-e^{-x}\right)\cdot(\cos(2x))'\,dx = \\ &= \left(-e^{-x}\right)\cdot\cos(2x) - \int\left(-e^{-x}\right)\cdot(-2\sin(2x))\,dx \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\int e^{-x}\cdot\sin(2x)\,dx}.\end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cdot\sin(2x)\,dx &= \int\left(-e^{-x}\right)'\cdot\sin(2x)\,dx = \\ &= \left(-e^{-x}\right)\cdot\sin(2x) - \int\left(-e^{-x}\right)\cdot(\sin(2x))'\,dx = \\ &= \left(-e^{-x}\right)\cdot\sin(2x) - \int\left(-e^{-x}\right)\cdot 2\cos(2x)\,dx \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-e^{-x}\cdot\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx}.\end{aligned}$$

Tehát, a fenti két összefüggés alapján:

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx &= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\left(-e^{-x}\cdot\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx\right) = \\ &= -e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\sin(2x) - 4\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx,\end{aligned}$$

átrendezve:

$$5\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\sin(2x) = e^{-x}\cdot(2\sin(2x) - \cos(2x)),$$

$$\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx = \underline{\frac{e^{-x}}{5}\cdot(2\sin(2x) - \cos(2x)) + c} \qquad (x\in(0,\pi),\ c\in\mathbb{R}).$$

A határozatlan integrál tehát:

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\int e^{-x}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx = \\ &= \frac{e^{-x}}{10}\cdot(2\sin(2x) - \cos(2x) - 5) + c \qquad (x\in(0,\pi),\ c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

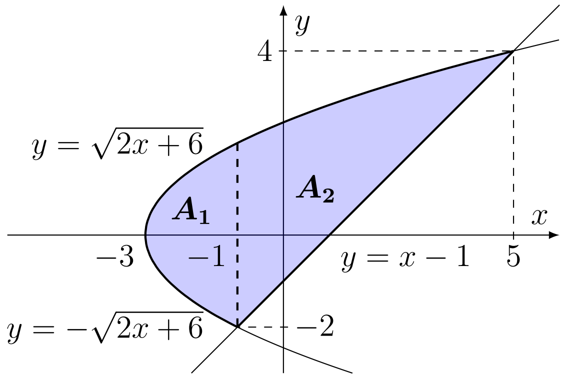
A Newton–Leibniz-formula alapján az integrál:

$$\int_0^\pi e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{10}\cdot(2\sin(2x) - \cos(2x) - 5)\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{e^{-\pi}}{10}\cdot(2\sin(2\pi) - \cos(2\pi) - 5) - \frac{e^0}{10}\cdot(2\sin 0 - \cos 0 - 5) = \underline{\underline{\frac{3}{5}\cdot\left(1 - e^{-\pi}\right)}}.$$

2. feladat. *Számoljuk ki az $y = x-1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x+6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét!*

Megoldás.



A két görbe az ábrán látható síkidomot zárja közre. Határozzuk meg a metszéspontjaikat:

$$\begin{cases} y^2 = 2x+6 \\ y = x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2 = 2x+6 \\ y = x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-4x-5 = 0 \\ y = x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

A parabola talppontja az $(-3,0)$ pont, a felső ágának egyenlete $y = \sqrt{2x+6}$, az alsó ágáé pedig $y = -\sqrt{2x+6}$. A síkidomot alulról határoló függvények a $[-3,-1]$ intervallumon az $x \mapsto -\sqrt{2x+6}$, a $[-1,5]$ intervallumon pedig az $x \mapsto x-1$. A felülről határoló függvény a teljes $[-3,5]$ intervallumon az $x \mapsto \sqrt{2x+6}$. A síkidomot tehát érdemes szétbontani az ábrán látható $A = A_1 \cup A_2$ részekre, ahol

$$A_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3 \le x \le -1,\ -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6}\right\},$$
$$A_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le -5,\ x-1 \le y \le \sqrt{2x+6}\right\}.$$

A két rész területe integrálással:

$$t(A_1) = \int_{-3}^{-1} \left(\sqrt{2x+6} - \left(-\sqrt{2x+6}\right)\right) dx = 2\int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}\, dx = 2\int_{-3}^{-1} (2x+6)^{1/2}\, dx =$$
$$= 2\left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \cdot 2}\right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(2x+6)^3}\right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}\right) = \underline{\frac{16}{3}},$$

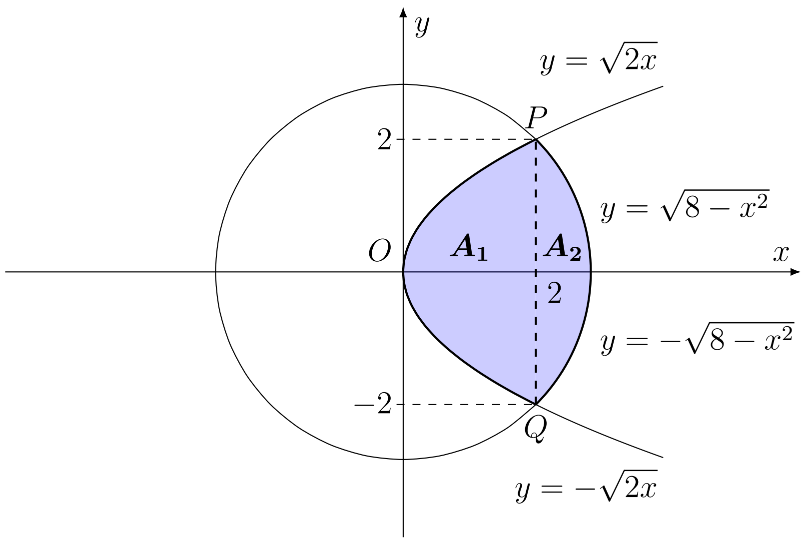
$$t(A_2) = \int_{-1}^{5} \left(\sqrt{2x+6} - (x-1)\right) dx = \int_{-1}^{5} \left((2x+6)^{1/2} - x + 1\right) dx =$$
$$= \left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \cdot 2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x+6)^3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\sqrt{16^3} - \frac{25}{2} + 5\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{4^3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \underline{\frac{38}{3}}.$$

A keresett terület tehát:

$$t(A) = t(A_1) + t(A_2) = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = \underline{\underline{18}}.$$

3. feladat. *Milyen arányú részekre osztja az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör által határolt síkrész területét?*

Megoldás.



Az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű körív a

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 8 \right\}$$

körlapot határolja, melynek területe $t(K) = 8\pi$.

Határozzuk meg a két görbe metszéspontjait:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \quad\;\; y^2 = 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 8 \\ \quad\;\; y^2 = 2x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ \qquad\quad\; y^2 = 2x \end{cases} \underset{(x \geq 0)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Tehát a görbék a $P(2, 2)$ és a $Q(2, -2)$ pontokban metszik egymást.

A parabola talppontja az $O(0, 0)$ pont, a felső ágának egyenlete $y = \sqrt{2x}$, az alsó ágáé pedig $y = -\sqrt{2x}$. A kör középpontja az origó, sugara $\sqrt{8}$, felső felének egyenlete $y = \sqrt{8 - x^2}$, az alsóé pedig $y = -\sqrt{8 - x^2}$. Tekintsük a két görbe által közrezárt A síkidom területét. Az A síkidomot érdemes szétbontani az ábrán látható $A = A_1 \cup A_2$ részekre, ahol

$$A_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{2x} \right\},$$
$$A_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2 \leq x \leq \sqrt{8},\ -\sqrt{8 - x^2} \leq y \leq \sqrt{8 - x^2} \right\}.$$

Az A_1 síkidom területe:

$$t(A_1) = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \left(-\sqrt{2x} \right) \right) dx = 2 \int_0^2 \sqrt{2x}\, dx = 2\sqrt{2} \int_0^2 x^{1/2}\, dx =$$
$$= 2\sqrt{2} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\sqrt{2^3} - \sqrt{0^3} \right) = \underline{\frac{16}{3}}.$$

Az A_2 síkidom az OPQ körcikkhez tartozó ***körszelet***, így területe elemi úton is meghatározható a körcikk és az OPQ háromszög területeinek különbségeként. Az OPQ körcikk középponti szöge derékszög, így területe a teljes kör területének negyede:

$$t\left(OPQ_{\text{körcikk}}\right) = \frac{t(K)}{4} = 2\pi.$$

Az OPQ derékszögű háromszög átfogója 4, az átfogóhoz tartozó magassága 2, így területe:

$$t\left(OPQ_{\triangle}\right) = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$

Az A_2 körszelet területe tehát:

$$t(A_2) = t\left(OPQ_{\text{körcikk}}\right) - t\left(OPQ_{\triangle}\right) = \underline{2\pi - 4}.$$

A közrezárt terület:

$$t(A) = t(A_1) + t(A_2) = \frac{16}{3} + (2\pi - 4) = \underline{\underline{\frac{4}{3} + 2\pi}},$$

vagyis a keresett arány:

$$\frac{t(A)}{t(K) - t(A)} = \frac{\frac{4}{3} + 2\pi}{8\pi - \frac{4}{3} - 2\pi} = \frac{\frac{4}{3} + 2\pi}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{4 + 6\pi}{18\pi - 4} = \underline{\underline{\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}}} \approx 0.435$$

Megjegyzés. Az A_2 síkidom területét a

$$t(A_2) = \int_2^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{8 - x^2} - \left(-\sqrt{8 - x^2}\right)\right) dx$$

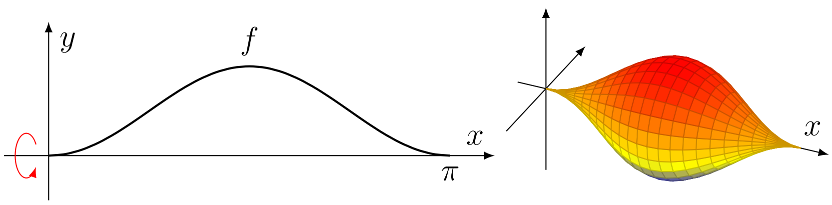
integrállal is meghatározhatjuk. Ez azonban lényegesen több számolást igényelne.

4. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) := \sin^2 x \qquad (x \in [0, \pi])$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

Megoldás.



$0 \leq f \in C[0, \pi] \implies f \in R[0, \pi]$, így a forgástestnek van térfogata:

$$V := \pi \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^4(x)\, dx.$$

Először határozzuk meg az integrandus primitív függvényeit. Alkalmazzuk a linearizáló formulákat:

$$\begin{aligned}\int \sin^4(x)\,dx &= \int \left(\sin^2(x)\right)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\,dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right)\,dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\,dx = \\ &= \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx = \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin(4x)}{4} + c = \\ &= \underline{\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c} \qquad (x\in(0,\pi),\ c\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

A keresett térfogat tehát:

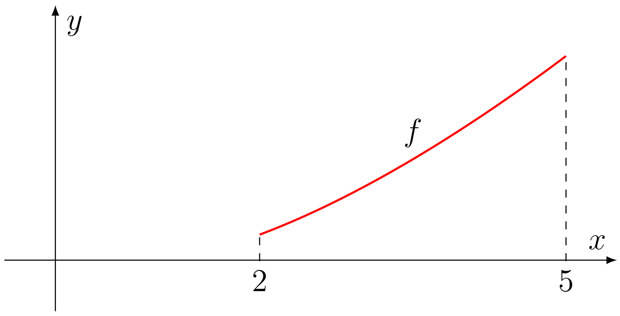
$$V = \pi\left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^\pi = \underline{\underline{\frac{3\pi^2}{8}}} \approx 3.701.$$

5. feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \qquad (2\le x\le 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

Megoldás.



Az f függvény deriválható,

$$f'(x) = (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1} \qquad (x>1),$$

és $f'\in C[2,5] \implies f\in C^1[2,5]$. Az ívhossz:

$$\begin{aligned}\ell := \int_2^5 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx &= \int_2^5 \sqrt{1+x-1}\,dx = \int_2^5 \sqrt{x}\,dx = \int_2^5 x^{1/2}\,dx = \\ &= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_2^5 = \underline{\underline{\frac{2}{3}\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}\right)}} \approx 5.568.\end{aligned}$$

6. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2.$$

Megoldás. Fejezzük ki a határértékben szereplő összeget integrálközelítő összegként! Átalakítás:

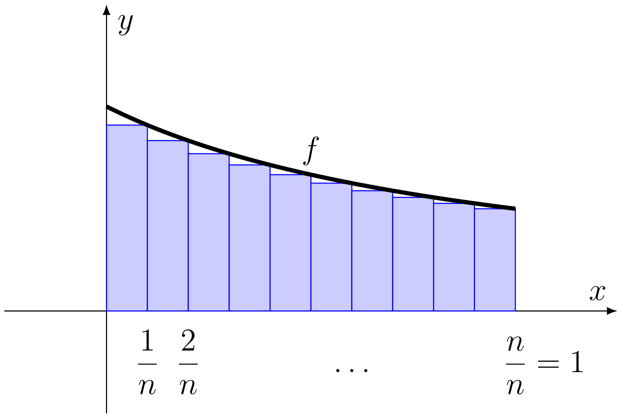
$$s_n := \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}},$$

vagyis az (s_n) sorozat tagjai az

$$f(x):=\frac{1}{1+x}\qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$$

függvény Riemann-féle közelítő összegei $[0,1]$-en:

$$s_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$



Mivel $f\in C[0,1] \implies f\in R[0,1]$, így

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2-\ln 1=\underline{\underline{\ln 2}}.$$