动态规划

清华大学计算机系 茹逸中

目录

1. 动态规划问题分类
   1. 数位DP
   2. 区间DP
   3. 树形DP
   4. 状压DP
   5. 插头DP

目录

动态规划问题分类

2.1 数位DP

- 数位DP是比较简单的DP类型，一般的问题是在[L,R]区间中满足某些数位条件的数的个数。
- 数位DP有比较格式化的状态设计方式，如果要求[1,R]中的答案，则设计状态
- F[i][0/1][k]表示前i位确定后，且前i为[比R小/等于R]，状态为k的数的个数
- 还有另一种方法，即先枚举x与R的最长公共前缀，然后再枚举下一个数，对剩下的数位做DP（可能可以不用DP）

2.1一些习题

- 求a~b中不包含62和4的数的个数. 0 < a、b < 2*10^9

2.1一些习题

- 求a~b中所有数位里出现了X的数称为幸运数，问第K大的幸运数

2.1一些习题

- Beautiful numbers
- 如果一个正整数能被它所有非0的数位整除，则称它时漂亮的。
- 求[a,b]中有多少数是漂亮的
- a<=b<=10^18

2.1一些习题

- 找出区间内平衡数的个数，所谓的平衡数，就是以这个数字的某一位为支点，另外两边的数字大小乘以距离之和相等，即为平衡数。

2.1一些习题

- 一个数的power=它表示成数位后的最长上升子序列长度。问[L,R]之间有多少数的power=k。
- R<=2^63-1,T<=100

2.2 区间动态规划

- 传统的动态规划问题一般是逐个考虑元素，一般是因为顺序不影响结果或者题目规定了顺序，但有些动态规划则不满足上述条件，于是就不能采用顺序DP的方法。
- 一类动态规划的顺序是区间顺序，这些问题往往不规定顺序，但是在合并时需要考虑位置关系（相邻合并）。

2.2 经典例题

- 在一条直线上有n堆石子，每堆有一定的数量，每次可以将两堆相邻的石子合并，合并后放在两堆的中间位置，合并的费用为两堆石子的总数。求把所有石子合并成一堆的最小花费。

2.2 经典例题

- 在一个环上有n堆石子，每堆有一定的数量，每次可以将两堆相邻的石子合并，合并后放在两堆的中间位置，合并的费用为两堆石子的总数。求把所有石子合并成一堆的最小花费。

2.2 一些习题

- 按钮
- 数轴上有n个按钮，第i个按钮按下去之后过t_i时间会弹起来。走1路程需要1时间，求怎么按可以将所有按钮都按下去。
- N<=1000

2.3 树形动态规划

- 树形动态规划是动态规划中的一个重要分支。
- 树形DP的状态与节点有关，有时每个节点上有1个状态，有时每个节点上有多个状态。
- 在大多数情况下，树形DP的状态上的值所表示的都是以该节点为根的子树的信息。
- 一般来说，在转移时，总是从孩子转移到父亲。

2.3 经典例题

- 求树的重心
- 给定一棵树G，对于一个点x，使得删除x后得到的若干棵树中节点数的最大值最小的x称为树的重心。

2.3 经典例题

- 没有上司的舞会

Ural大学有N个职员，编号为1~N。他们有从属关系，也就是说他们的关系就像一棵以校长为根的树，父结点就是子结点的直接上司。每个职员有一个快乐指数。现在有个周年庆宴会，要求与会职员的快乐指数最大。但是，没有职员愿和直接上司一起与会。

- f[u][0]表示在u不参会的条件下，以u为根的子树中所有人能达到的最大快乐指数，f[u][1]表示在u参会的条件下，以u为根的子树中所有人能达到的最大快乐指数。
- $f[u][0] = \sum_{v \in \mathrm{child}(u)} \max(f[v][0], f[v][1])$
- $f[u][1] = \sum_{v \in \mathrm{child}(u)} f[v][0] + w[u]$

2.3 一些习题

- HDU2196
- 求树中每个点到所有叶子节点的距离的最大值是多少

侦察守卫

- 给定一棵有根树，在一个点上放置岗哨可以覆盖这个点距离<=d的点，在每个点上放哨的代价互不相同，求覆盖所有点的最小代价。
- d<=20,n<=500000

迷失游乐园(NOI2012)

- 给定一棵带边权的环套树
- 等概率随机地从一个点出发
- 每次等概率地走到一个相邻的但没有到达过的点
- 如果相邻的点都到达过了，那么停止
- 求路径总长度的期望值
- 环长<=20

迷失游乐园(NOI2012)

- 先考虑一棵树的情况。
- 只要开始向下，就没法向上了，因此是先向上后向下。
- 先考虑只向下
- down[i] = sigma(down[j] + dis(i,j))/num_sons，j是i的孩子
- 再考虑既可以向上也可以向下
- f[i] = (sigma(down[j] + dis(i,j)) + f[father[j]])/(num_sons + 1)

迷失游乐园(NOI2012)

- 先考虑一棵树的情况。
- 只要开始向下，就没法向上了，因此是先向上后向下。
- 先考虑只向下
- down[i] = sigma(down[j] + dis(i,j))/num_sons，j是i的孩子
- 再考虑既可以向上也可以向下
- f[i] = (sigma(down[j] + dis(i,j)) + f[father[j]])/(num_sons + 1)

迷失游乐园(NOI2012)

- 考虑环套树
- 和环有关的情况应该是从某个点u向走到环上的一个点a，然后沿着环走到另一个点b，然后向下走
- 需要修改f[a]，其中r是环上的点
- 暴力枚举走到的点b，计算概率p，期望为(dis(a,b)+down[b])*p

The Chocolate Spree

- 在树上选两条不相交的链，使链上的点权和最大

HDU5834

- 给定一棵树，有点权和边权，点权上的价值只能取一次，可以获得w_i的价值，每经过一次边需要支付p_j价值，求以每个节点为起点能获得的最大价值。（可以是负数）
- N<=100000

POJ2152

- n个节点组成的树，要在树一些点上建立消防站，每个点建站都有个cost[i]，每个点如果不在当前的点上建站，也要依赖其他的消防站，并且距离不超过limit[i]。求符合上述条件的最小费用建站方案。n <= 1000.

状态压缩动态规划

状态压缩

- 什么是状态压缩？
- 有些动态规划问题有许多维状态，且状态的维数可能不确定，我们需要将这些状态压缩成一个整数来表示。
- 例如，如果有4维状态，它们分别有2,3,3,4种取值，那么就可以压缩成一维的状态。根据乘法原理，这维状态有72种取值，用x%2的值表示第一维状态，（x/2）%3的值表示第二维状态，（x/6）%3的值表示第三维状态，（x/18）%4的值表示第四维状态。
- 如果有k维状态，它们分别有a种取值，那么就可以压缩成有a^k种取值的状态，用k位的a进制数来表示。

状态压缩

- 棋盘
- 有一个N*M(N<=10,M<=1000)的棋盘，其中一些点有障碍。现在有1*2及2*1的小木块无数个，要盖满整个棋盘，有多少种方式？

一些习题

- 传递物品
- n个人在做传递物品的游戏,编号为1-n。
- 游戏规则是这样的：开始时物品可以在任意一人手上，他可把物品传递给其他人中的任意一位；下一个人可以传递给未接过物品的任意一人。
- 即物品只能经过同一个人一次，而且每次传递过程都有一个代价；不同的人传给不同的人的代价值之间没有联系；
- 求当物品经过所有n个人后，整个过程的总代价是多少。
- N<=16

一些习题

- 有n个怪兽（n<=15）,每个怪兽有一定的战斗力。你一次性可以收服若干只怪兽，前提是这些怪兽的总战斗力小于你当前的总战斗力。收服后你会获得这些怪兽的战斗力。请问有多少种方案可以收服所有的怪兽。

一些习题

- bzoj 2004
- 小Z所在的城市有N个公交车站，排列在一条长(N-1)km的直线上，从左到右依次编号为1到N，相邻公交车站间的距离均为1km。 作为公交车线路的规划者，小Z调查了市民的需求，决定按下述规则设计线路： 1． 设共K辆公交车，则1到K号站作为始发站，N-K+1到N号台作为终点站。 2． 每个车站必须被一辆且仅一辆公交车经过（始发站和终点站也算被经过）。 3． 公交车只能从编号较小的站台驶往编号较大的站台。 4． 一辆公交车经过的相邻两个站台间距离不得超过Pkm。 在最终设计线路之前，小Z想知道有多少种满足要求的方案。由于答案可能很大，你只需求出答案对30031取模的结果。
- N<=10^9,p<=10,k<=p

一些习题

- bzoj 2595
- 方格图上有n*m个点，有k(k<=10)个关键点。你需要将一些点染色使得关键点之间通过染色的节点互相连通。每个点染色的代价可能不同，你要使得总代价最小。
- N,m<=10

插头DP

- 插头DP的问题背景一般是在网格图上，且宽度较小（需要状压）。
- 对网格逐个决策，此时已决策的网格与未决策的网格构成轮廓线。
- 在轮廓线上定义插头，将轮廓线上的每一个格子上的插头类型进行状态压缩

BZOJ2331 地板

- 小L要用L形的地板铺满整个客厅。客厅有一些障碍物不能铺地板，问有多少种方案。
- R*C<=100

POJ3133 Manhattan Wiring

- 格子中有两个2，两个3.求把两个2连起来，两个3连起来。求经过总的格子数的总和最小。两条路径不能交叉。有障碍格子。
- n,m<=9

俄罗斯方块

- n*m的客厅，有一些障碍。用俄罗斯方块铺满，问有多少种方案。
- n<=30,m<=7

动态规划的优化问题

单调队列优化

- 例题：
- 数轴上有n个点，编号为0,1,2...,n。每个点上有权值（权值可能是负数）。小R刚开始在0号点，如果小R在i号点，那么下一次他可以移动到[i+L,i+R]之间的一个点。问他所经过所有点的最大权值和是多少。

单调队列优化

- 例题：
- 有n个台阶排成一列，第i个台阶的高度为h_i。小R从第1个台阶走到第n个台阶，从第i个台阶走到第i+1个台阶花费的代价是$C*|h_i-h_{i+1}|$。现在可以将一些台阶垫高，将一个台阶垫高h的代价是h^2。求最小总代价。
- $n \le 50000, h_i, C \le 100$

斜率优化

- 例题：
- 有n个数，可以将连续的一段数分为一组，分组的代价为这段数的和的平方加上一个常数C。每个数都必须被分组，求最小代价。
- N<=500000

概率和期望问题

概率

- 随机事件：
- 如果一个事件A可能发生，也可能不发生，则称A是随机事件。将A发生的概率记为P(A)。
- 有两个随机事件A和B，如果其中一个发生之后，另一个发生的概率不受影响，则称这两个事件是独立的，且有P(AB)=P(A)P(B)
- 某箱中有3个红球和2个黑球，从箱中随机摸出2个球，求
- P(恰有一个红球)
- P(至少有一个黑球)
- P(有两个黑球)

概率

- （离散）随机变量：
- 如果一个变量X的值是不固定的，则称X是随机变量。X取各值的概率称为X的分布列
- 某箱中有3个红球和2个黑球，从箱中随机摸出3个球，令X=摸出红球的个数
- 求X的分布列

概率

- 随机事件：
- 如果一个事件A可能发生，也可能不发生，则称A是随机事件。将A发生的概率记为P(A)。
- 有两个随机事件A和B，如果其中一个发生之后，另一个发生的概率不受影响，则称这两个事件是独立的，且有P(AB)=P(A)P(B)

概率问题

- W 记的儿童套餐会赠送一份小玩具，赠送的小玩具共有 n 种。
  小朋友买了 m 份儿童套餐，求收集齐 n 种小玩具的概率。假设每份儿童套餐赠送的
  小玩具的种类是等概率随机的。
- n,m<=1000

概率问题

- 打开了黑魔法师Vani的大门，队员们在迷宫般的路上漫无目的地搜寻着关押applepi的监狱的所在地。突然，眼前一道亮光闪过。“我，Nizem，是黑魔法圣殿的守卫者。如果你能通过我的挑战，那么你可以带走黑魔法圣殿的地图……”瞬间，队员们被传送到了一个擂台上，最初身边有一个容量为K的包包。
- 擂台赛一共有N项挑战，各项挑战依次进行。第i项挑战有一个属性ai，如果ai>=0，表示这次挑战成功后可以再获得一个容量为ai的包包；如果ai=-1，则表示这次挑战成功后可以得到一个大小为1 的地图残片。地图残片必须装在包包里才能带出擂台，包包没有必要全部装满，但是队员们必须把 「获得的所有的」地图残片都带走（没有得到的不用考虑，只需要完成所有N项挑战后背包容量足够容纳地图残片即可），才能拼出完整的地图。并且他们至少要挑战成功L次才能离开擂台。
- 队员们一筹莫展之时，善良的守卫者Nizem帮忙预估出了每项挑战成功的概率，其中第i项挑战成功的概率为pi%。现在，请你帮忙预测一下，队员们能够带上他们获得的地图残片离开擂台的概率。

概率问题

- 你有一坨K个毛球。这种毛球只会存活一天。在死亡之前，一个毛球有P_i的概率生出i个毛球(i=0,1,...,n-1)。m天后所有毛球都死亡的概率是多少？（包含在第m天前全部死亡的情况）

期望

- 在随机变量中，随机变量取值的平均值称为该随机变量的期望

$$E(X) = \sum xp(x)$$

- 期望是线性的$E(aX) = aE(X)$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

期望问题

- 某一天WJMZBMR在打osu~~~但是他太弱逼了，有些地方完全靠运气:(
  我们来简化一下这个游戏的规则
  有n次点击要做，成功了就是o，失败了就是x，分数是按comb计算的，连续a个comb就有a*a分，comb就是极大的连续o。
  比如ooxxxxooooxxx，分数就是2*2+4*4=4+16=20。
  Sevenkplus闲的慌就看他打了一盘，有些地方跟运气无关要么是o要么是x，有些地方o或者x各有50%的可能性，用?号来表示。
  比如oo?xx就是一个可能的输入。
  那么WJMZBMR这场osu的期望得分是多少呢？
  比如oo?xx的话，?是o的话就是oooxx => 9，是x的话就是ooxxx => 4
  期望自然就是(4+9)/2 =6.5了

期望问题

- 有n种不同的邮票，皮皮想收集所有种类的邮票。唯一的收集方法是到同学凡凡那里购买，每次只能买一张，并且买到的邮票究竟是n种邮票中的哪一种是等概率的，概率均为1/n。但是由于凡凡也很喜欢邮票，所以皮皮购买第k张邮票需要支付k元钱。 现在皮皮手中没有邮票，皮皮想知道自己得到所有种类的邮票需要花费的钱数目的期望。
- n<=10000