关于矩阵乘法对于 DP 转移的优化

[如果有人讲过，那么下面的内容你就可以不用看了…而且 NOIP 正解考这个的概率，嗯，不是很大。但是如果你的暴力是一个 DP 而且你可以用这个优化的话…说不定能多拿很多分]

不知道矩阵乘法运算定义的自己百度吧。
知道矩阵乘法，但是不知道快速幂的自己百度吧。
不知道矩阵乘法结合快速幂的…
可以看看标程，然后结合两者的基本思想应该是可以看懂的。

主要的例题来自今天的考试题目《小澳的坐标系》

F[i][0]=F[i-1][0]+F[i-1][1]+F[i-1][2]
F[i][1]=F[i-1][0]+F[i-1][1]
F[i][2]=F[i-1][0]+F[i-1][2]

因为 F[i][1]和 F[i][2]明明就是相等的。
我们可以把它们缩成一个，于是转移方程变成了。
F[i][0]=F[i-1][0]+F[i-1][1]*2
F[i][1]=F[i-1][0]+F[i-1][1]

因为看到他们的转移都只和上一步有关。
所以可以构造出一个转移矩阵。

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+2*B & A+B \end{bmatrix}$$

例如我们构造的[1 1][2 1]这个矩阵就满足了我们的要求。
然后使用结合律就可以结合快速幂来快速计算了。
时间复杂度 O(logn*k^3)，k 表示方阵的大小

关于矩阵乘法优化转移的其他例子。

1. 斐波那契数列

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & A \end{bmatrix}$$

2. 斐波那契数列的拓展

F[i]=a1*F[i-1]+a2*F[i-2]+a3*F[i-3]+...+ak*F[i-k]

$$\boxed{A1 \quad A2 \quad A3 \quad \ldots \quad AK} \; \boxed{\;?\;} = \boxed{a1*A1+a2*A2+\ldots ak*AK \quad A1 \quad A2 \quad A3 \ldots AK\text{-}1}$$

$$\boxed{\;?\;} = \boxed{\begin{array}{llllllll}
a1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
ak\text{-}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
ak & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}}$$