数值微分和数值积分

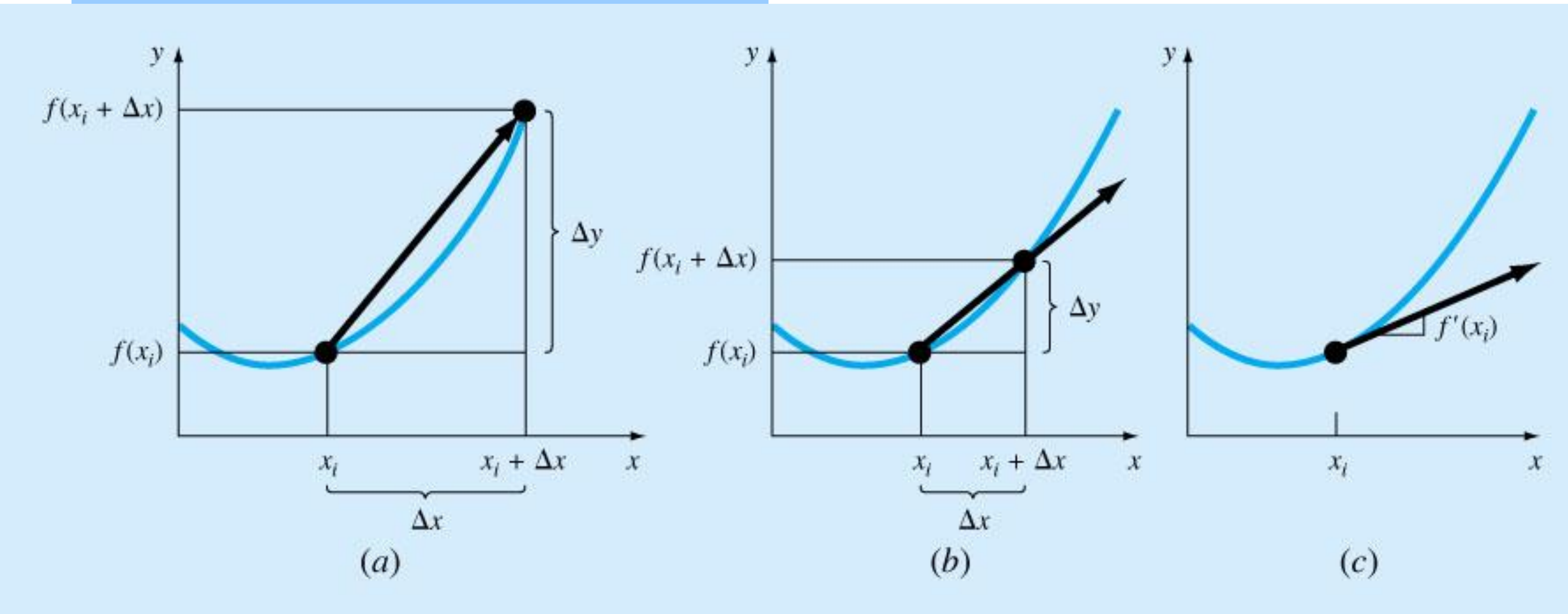
浙江大学控制学院

微分和积分

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

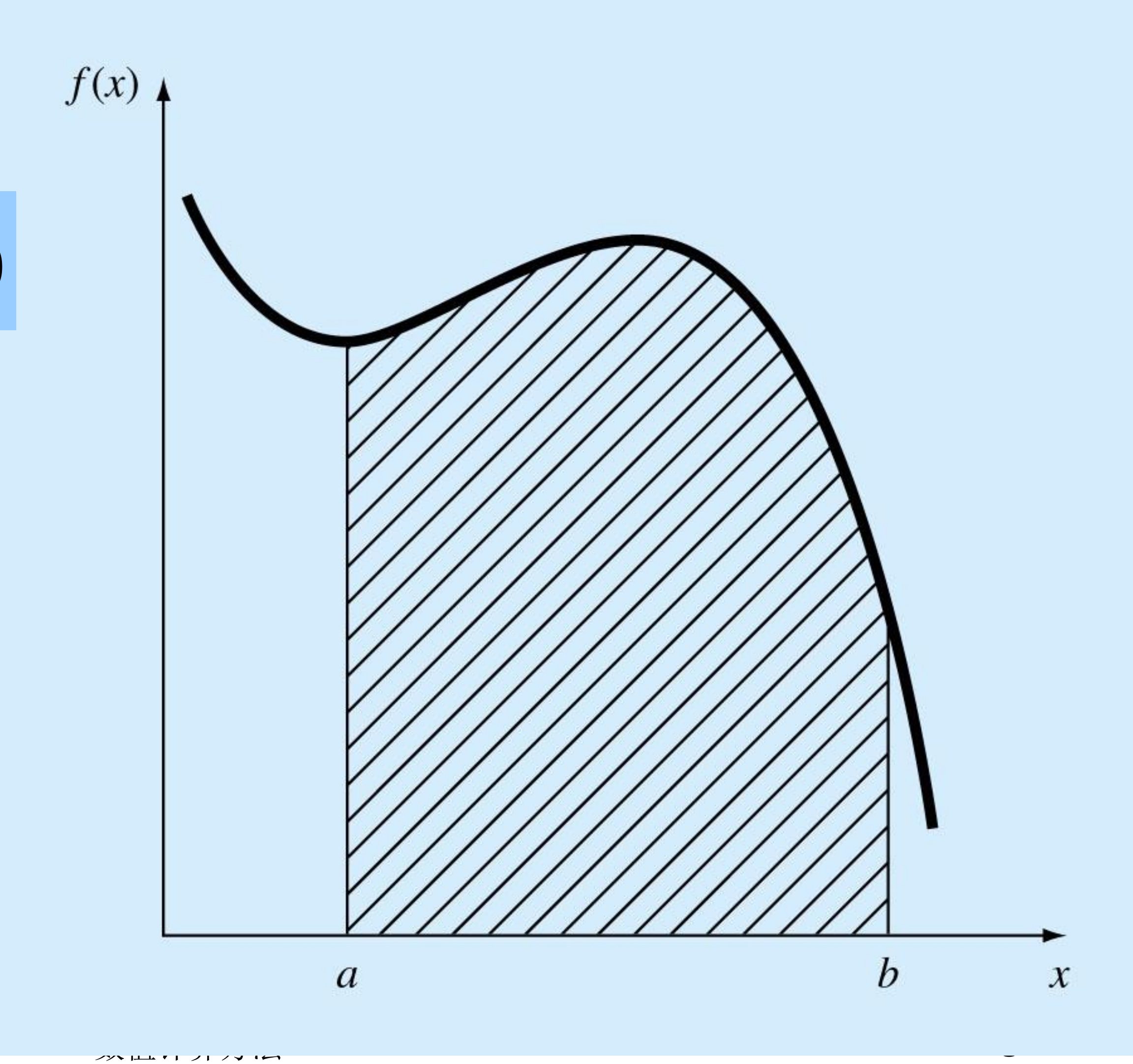
$$I = \int_a^b f(x) dx$$



微分和积分

- Newton-Leibniz公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



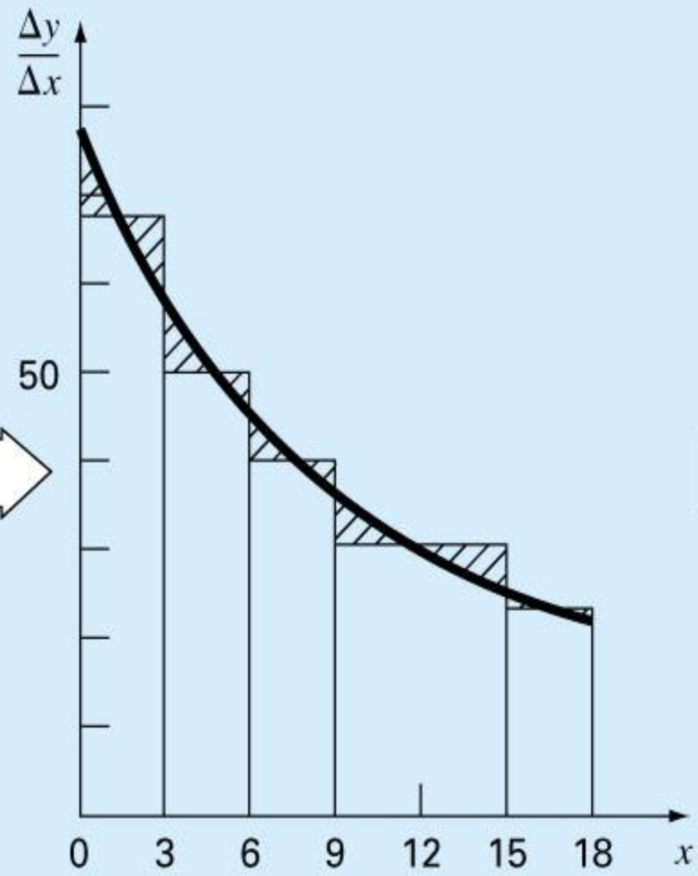
微分和积分

- 函数类型
  - 简单的连续函数，如多项式、指数函数或三角函数
    - 有些可以通过解析方法求得函数的微分和积分，有些也很难通过解析方法获得
  - 很难或完全无法直接微分或积分的复杂函数
  - 列表型函数，仅给出了一系列离散点及相应的函数值，如实验或现场数据
    - 利用插值或拟合得到的函数

等面积微分

x	y	$\Delta y/\Delta x$
0	0	
		66.7
3	200	
		50
6	350	
		40
9	470	
		30
15	650	
		23.3
18	720	

(*a*)

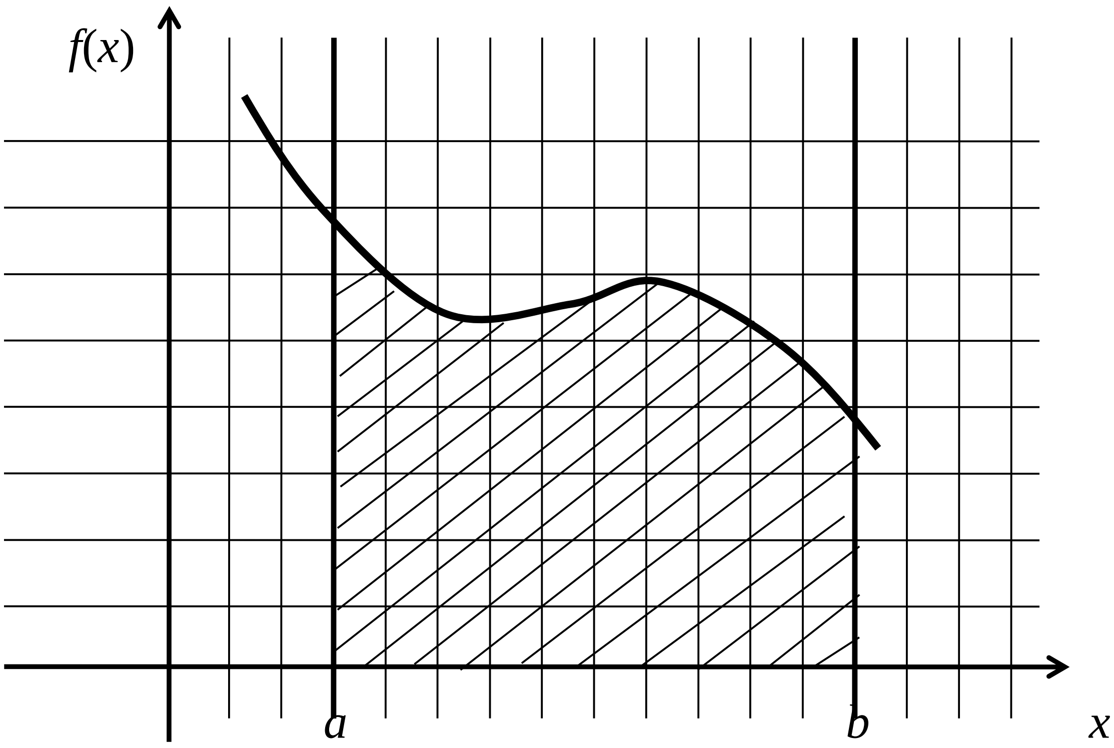


(*b*)

x	dy/dx
0	76.50
3	57.50
6	45.00
9	36.25
15	25.00
18	21.50

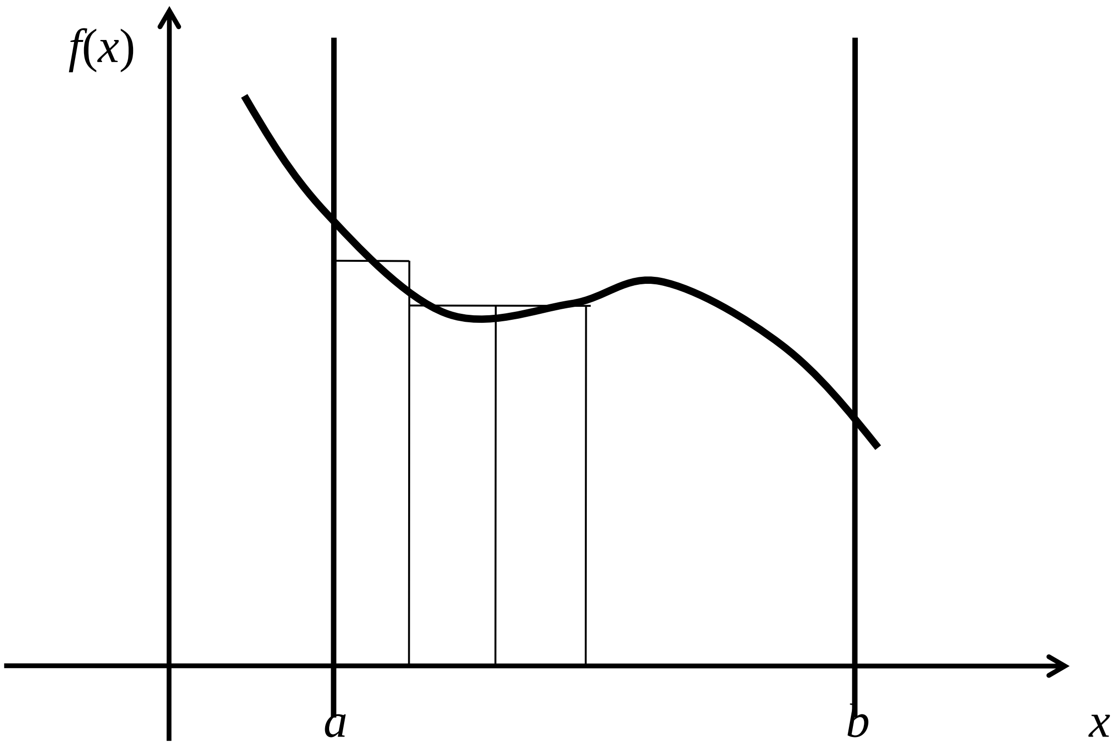
(*c*)

网格逼近积分



积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$



数值微分与积分

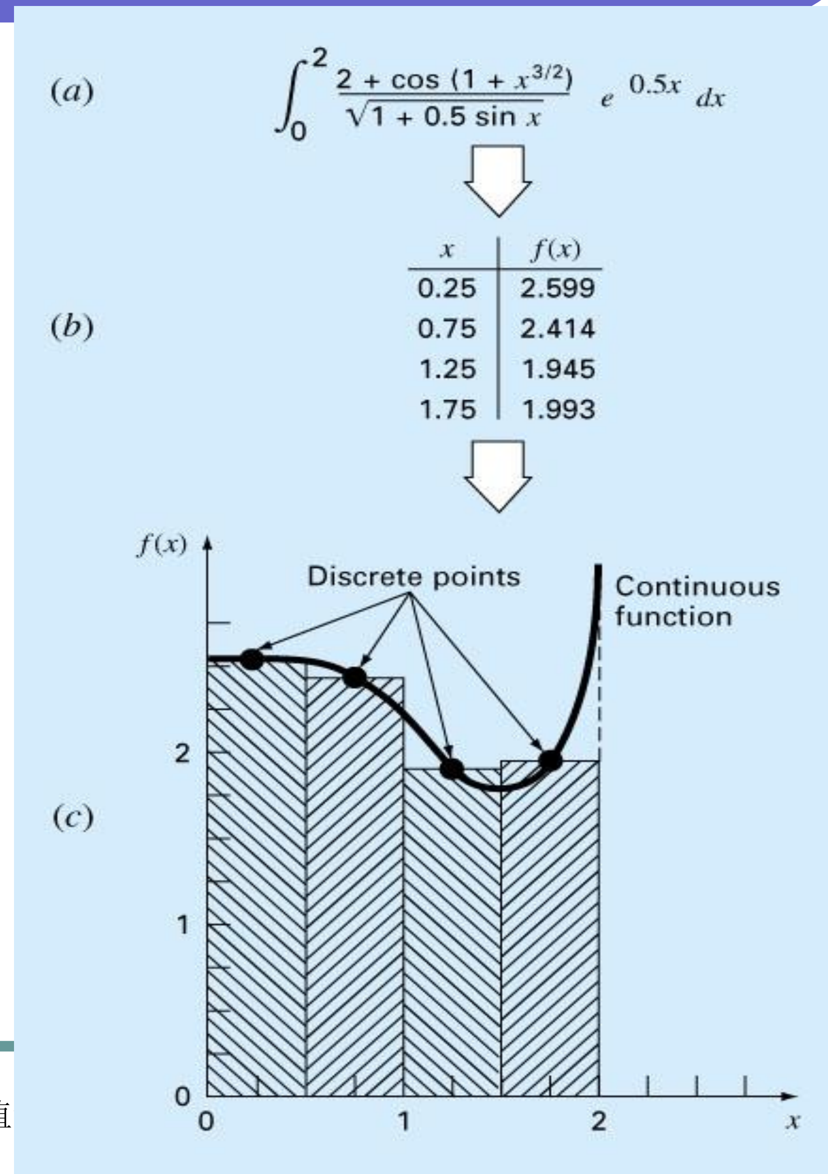
- 数值微分
  - 有限差商逼近导数
  - 数据存在误差，使用曲线拟合技术构造光滑拟合曲线，对拟合曲线微分
- 数值积分
  - 积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

    用区间$[a,b]$上一些点x_k处的“高度” $f(x_k)$的加权平均值，作为平均高度 $f(\xi)$的近似值
  - $I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

    求积系数$A_k=\omega_k(b-a)$，ω_k是求积节点权系数。

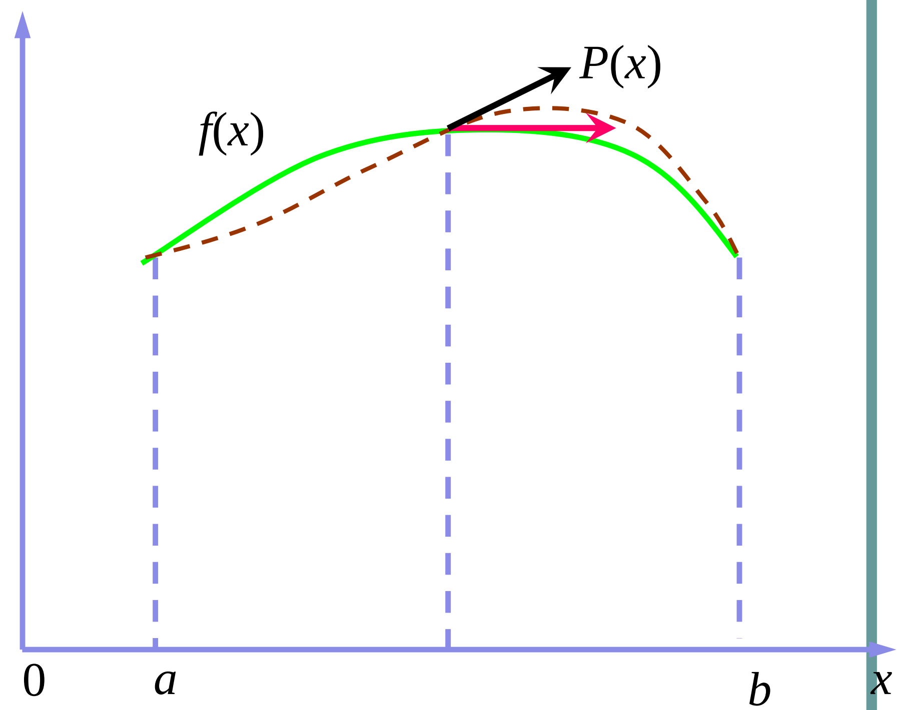
数值微分与积分

- 对于复杂连续函数
  - 由函数表达式生成离散的数据列表
  - 在离散点的基础上，利用数值方法计算数值微分和积分



数值积分与微分的稳定性

- 一般数值积分过程是稳定的，所得的解精确度也较高。
- 数值微分时，因近似多项式的曲线斜率可能和给定函数$f(x)$的曲线斜率有很大不同，特别是当$f(x)$在给定区间内变化比较大时更是这样。这样就使得数值微分的解不稳定，并且精度也较差。



积分过程对数据点进行求和，正的和负的随机误差倾向于相互抵消；相反，微分过程是相减的，正的和负的随机误差倾向于相加。

本章内容

- 数值微分
  - 差商近似
  - 插值型数值微分
- 数值积分
  - Newton-Cotes 积分
  - 龙贝格（Romberg）积分
  - 高斯（Gauss）求积公式

有限差商近似

- 向前差商 $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

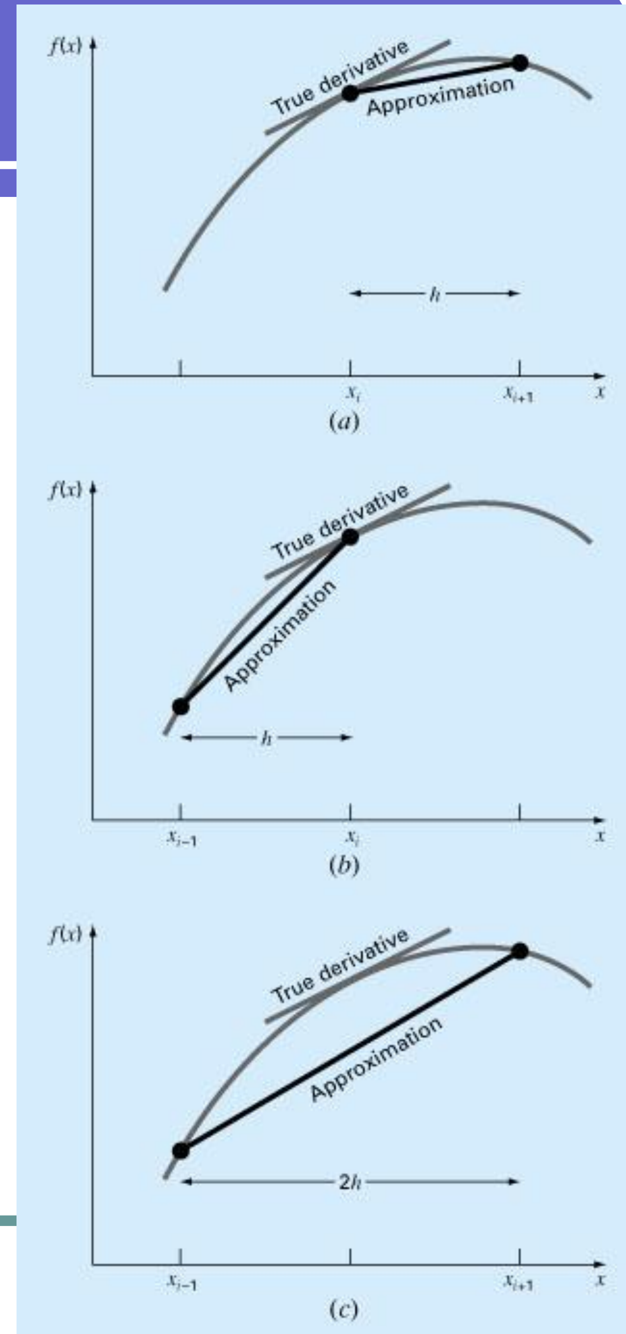
$$R(x) = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\frac{h}{2!} f''(\xi) = O(h)$$

- 向后差商 $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$R(x) = f'(x_0) - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \frac{h}{2!} f''(\xi) = O(h)$$

- 中心差商 $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$R(x) = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$
$$= -\frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) = O(h^2)$$



有限差商近似的误差

- h越小，误差越小，但同时舍入误差增大
- 最佳步长确定的事后估计法
  - 设$D(h)$，$D(h/2)$分别为步长为h，$h/2$的差商公式

$$f'(x)-D(h)=O(h)$$
$$f'(x)-D(h/2)=O(h/2)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)-D(h)}{f'(x)-D(h/2)}=\frac{O(h)}{O(h/2)}\approx 2$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)-D(h)=2f'(x)-2D(h/2)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)-D(h/2)=D(h/2)-D(h)$$

$$\left|D(h)-D(\frac{h}{2})\right|<\varepsilon$$

时的步长$h/2$就是合适的步长

增加泰勒级数展开式中的项数可以提高精度

$$\Downarrow$$

高精度微分公式

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

增加二阶导数项可以将精度提高到 $O(h^2)$

高精度微分公式

- 前向差商

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}+O(h^2)$$

- 后向差商

$$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}+O(h^2)$$

- 中心差商

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}+O(h^4)$$

数值微分——例

- 例：利用有限差商估计函数

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

- 在x=0.5处的导数值（真值为$f'(0.5)=-0.9125$）
- 解：h=0.5，

i	x_i	$f(x_i)$
i-1	0	1.2
i	0.5	0.925
i+1	1.0	0.2

- 前向差商 $$f'(0.5) = \frac{0.2-0.925}{0.5} = -1.45 \qquad |\varepsilon_t| = 58.9\%$$
- 后向差商 $$f'(0.5) = \frac{0.925-1.2}{0.5} = -0.55 \qquad |\varepsilon_t| = 39.7\%$$
- 中心差商 $$f'(0.5) = \frac{0.2-1.2}{1} = -1.0 \qquad |\varepsilon_t| = 9.6\%$$
- h=0.25

i	x_i	$f(x_i)$
i-1	0.25	1.10351563
i	0.5	0.925
i+1	0.75	0.63632813

$$f'(0.5) = -1.155 \qquad |\varepsilon_t| = 26.5\%$$

$$f'(0.5) = -0.714 \qquad |\varepsilon_t| = 21.7\%$$

$$f'(0.5) = -0.934 \qquad |\varepsilon_t| = 2.4\%$$

数值微分——例

- 取h=0.25，利用高精度微分公式
- 前向差商

$$f'(0.5) = -0.859375 \qquad |\varepsilon_t| = 5.82\%$$

- 后向差商

$$f'(0.5) = -0.878125 \qquad |\varepsilon_t| = 3.77\%$$

- 中心差商

$$f'(0.5) = -0.9125 \qquad |\varepsilon_t| = 0\%$$

i	x_i	$f(x_i)$
i-2	0	1.2
i-1	0.25	1.10351563
i	0.5	0.925
i+1	0.75	0.63632813
i+2	1.0	0.2

本章内容

- 数值微分
  - 差商近似
  - 插值型数值微分
- 数值积分
  - Newton-Cotes 积分
  - 龙贝格积分
  - 高斯求积公式

插值型数值微分

- 用插值函数的导数近似为原函数的导数

$$\left(x_j, f\left(x_j\right)\right)(j=0,1,2,\cdots,n)$$

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x) \qquad f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

$$f^{(k)}(x)\approx P_n^{(k)}(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$R_n^{(k)}(x)=\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right]$$

插值型数值微分

- k=1

$$R_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]$$

- ξ未知，当$x\neq x_i$时，无法利用上式估计误差，若求某个插值节点的导数值，有

$$f'(x_i)=P_n'(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_i)$$

- 特例：n=1，插值节点为x_0和 x_1，若记$h=x_1-x_0$——一阶微分两点公式

$$f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi)$$

在x_0处的向前差商

$$f'(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}+\frac{h}{2}f''(\xi)$$

在x_1处的向后差商

插值型数值微分

- 特例：n=2，插值节点为$x_k=x_0+kh(k=0,1,2)$——一阶微分三点公式

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi)$$

三点向前差商

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi)$$

中心差商

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi)$$

三点向后差商

基于泰勒级数的公式等价于通过对数据点进行插值求微分

数值微分

- 用三次样条插值的导数近似被插值函数的导数，效果相当好
- 在实际问题中使用哪种公式要视具体问题而定。有时三种公式都要用到，给定一个列表函数，对函数中间各点都可使用精度较高的中心差分公式，但起始点只能使用前差公式，终点则使用后差公式。
- 一般情况下，三点公式比两点公式准确，步长越小结果越准确。但当余项中的高阶导数无界或计算过程中的舍入误差超过截断误差时，这个结论不成立。

本章内容

- 数值微分
  - 差商近似
  - 插值型数值微分
- **数值积分**
  - Newton-Cotes 积分
  - 龙贝格（Romberg）积分
  - 高斯（Gauss）求积公式

数值积分

- 定义数值积分是离散点上的函数值的线性组合

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = I_n(f)$$

$$I = I_n(f) + R_n(f)$$

求积公式的余项

称为求积系数，与$f(x)$无关，与积分区间和积分点有关

称为求积节点，与$f(x)$无关

- 两个问题：
  - 求积系数如何选取
  - 节点可以自由选取，取什么点好

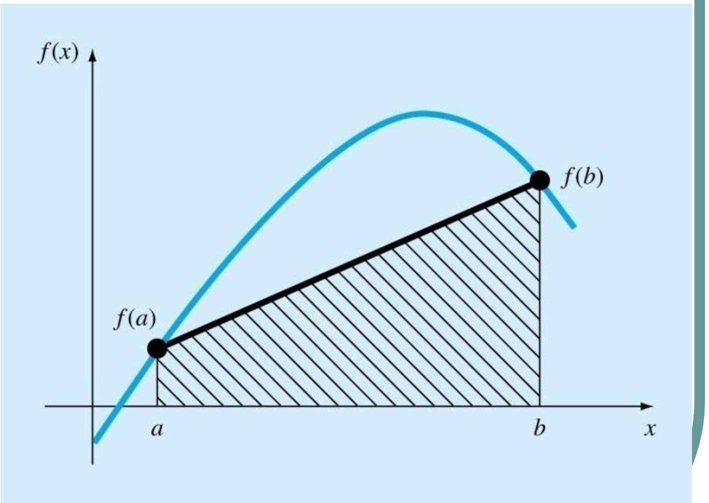
代数精度

- 如果一个求积公式对任何次数不超过m次的多项式$P_m(x)$都准确成立

$$\int_a^b P_m(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k P_m(x_k)$$

阶次为$m+1$时，$R(f)\neq 0$，则称求积公式$I_n(f)$的代数精度是m

- 梯形公式的代数精度$m=1$
  - 对不高于1次的代数多项式都准确成立
  - 对2次以上的代数多项式存在误差



- 一个求积公式的代数精度越高，就能对更多的被积函数准确或较准确地成立

插值型求积公式

A_i

- 用插值函数的积分，作为数值积分

$$I_n(f)=\int_a^b L_n(x)dx=\int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)dx=\sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b l_i(x)dx\right)f(x_i)$$

- 代数精度

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$I(f)-I_n(f)=\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

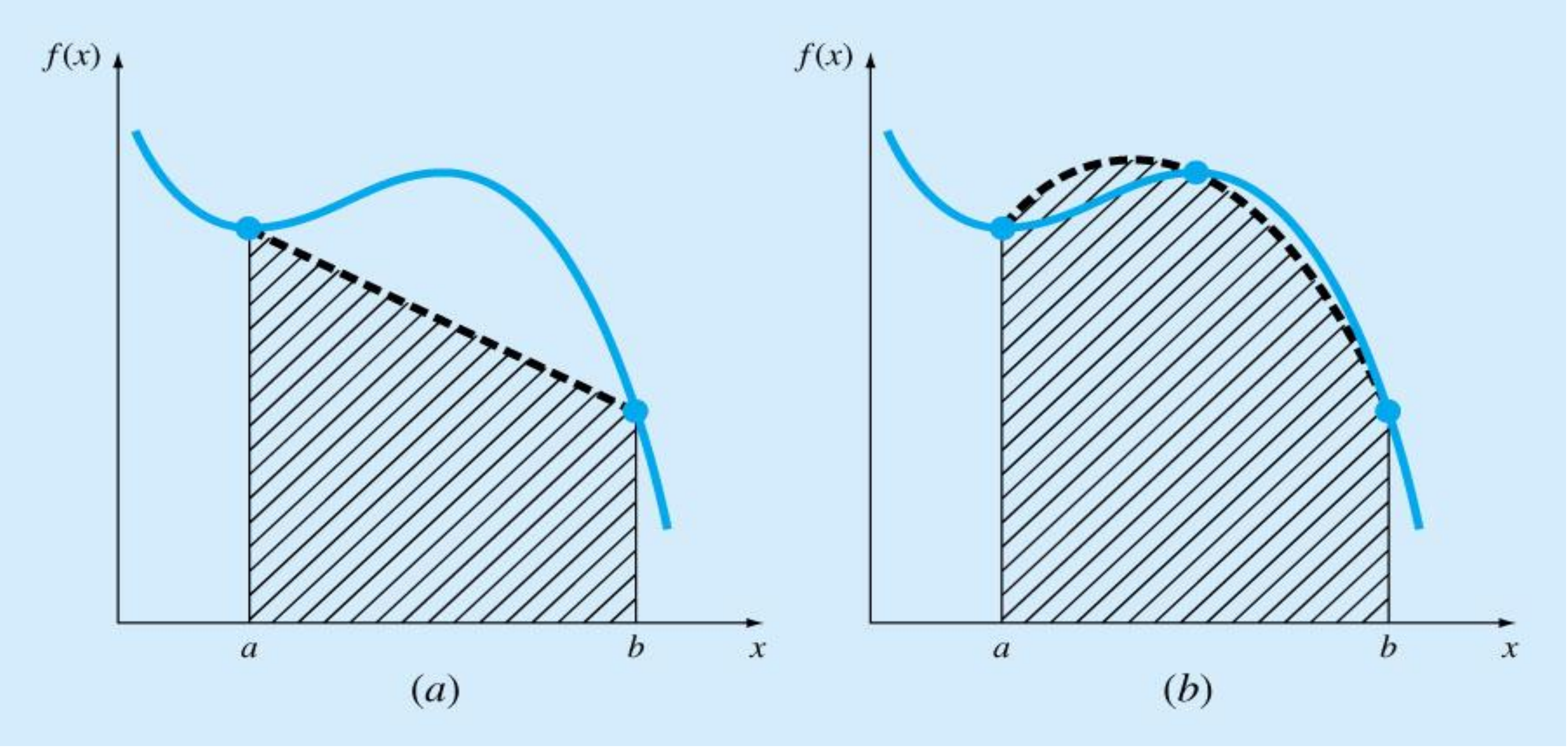
$$f(x)=x^k,\ f^{(n+1)}(x)=0, k\le n$$

至少**n**阶代数精度

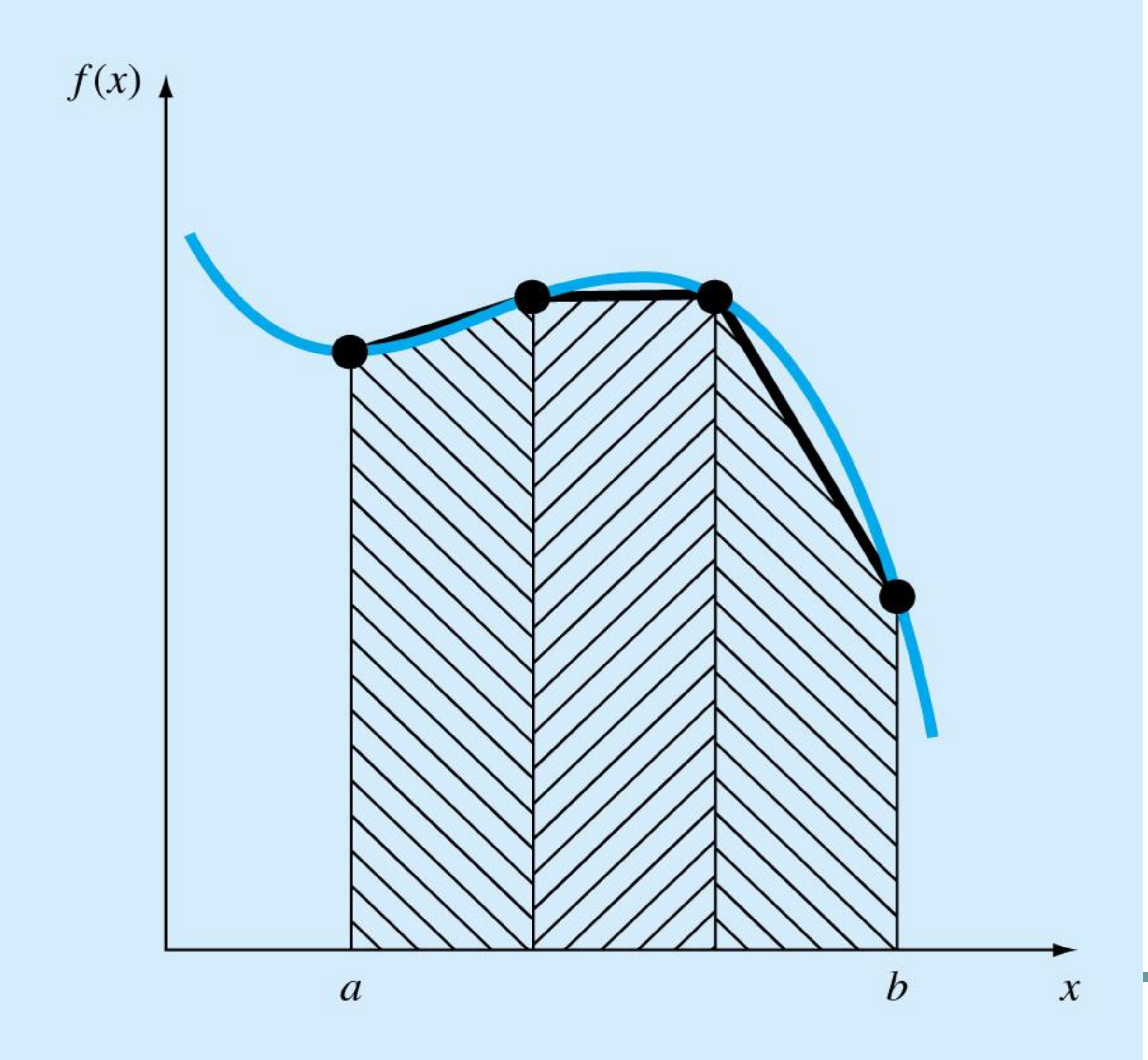
本章内容

- 数值微分
  - 差商近似
  - 插值型数值微分
- 数值积分
  - **Newton-Cotes 积分**
  - 龙贝格（Romberg）积分
  - 高斯（Gauss）求积公式

Newton-Cotes 积分



Newton-Cotes 积分



Newton-Cotes 积分

- 采用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$来逼近$f(x)$，将积分区间n等分，取分点为求积节点，并作变量替换

$$h=\frac{b-a}{n},x_i=a+ih,i=0,\cdots,n \qquad x=a+th,$$

$$A_i=\int_a^b l_i(x)dx=\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{i!(n-i)!(-1)^{n-i}}hdt$$

$$=\underbrace{nh}_{b-a}\cdot\underbrace{\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)dt}$$

b-a

与步长*h*无关，可以预先求出 $C_i^{(n)}$——Cotes系数

$$A_i=(b-a)C_i^{(n)}$$

梯形公式

I=(b-a)×平均高度

- n=1

$$C_0^{(1)}=-\int_0^1 (t-1)dt=\frac{1}{2}$$

$$C_1^{(1)}=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

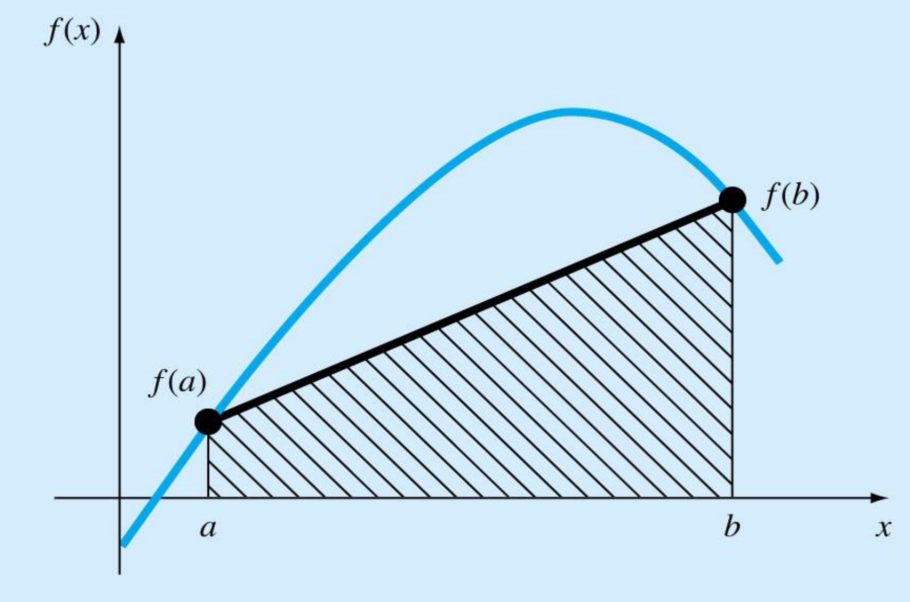
$$I_1(f)=(b-a)\frac{1}{2}f(a)+(b-a)\frac{1}{2}f(b)$$

$$=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$E_1(f)=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)dx$$

$$=\frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$=\frac{-(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$



梯形公式——例

- 例：利用梯形公式计算函数在[0 0.8]上的积分（精确值为1.640533）

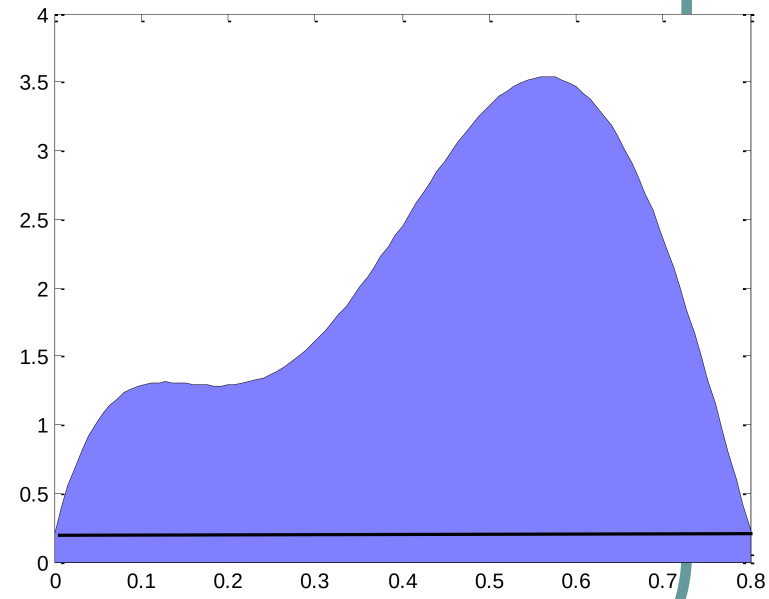
$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

- 解：$f(0)=0.2$

  $f(0.8)=0.232$

$$I_1 \cong (0.8-0)\frac{1}{2}(0.2+0.232)=0.1728$$

$$E_t=1.467733 \qquad \varepsilon_t=89.5\%$$

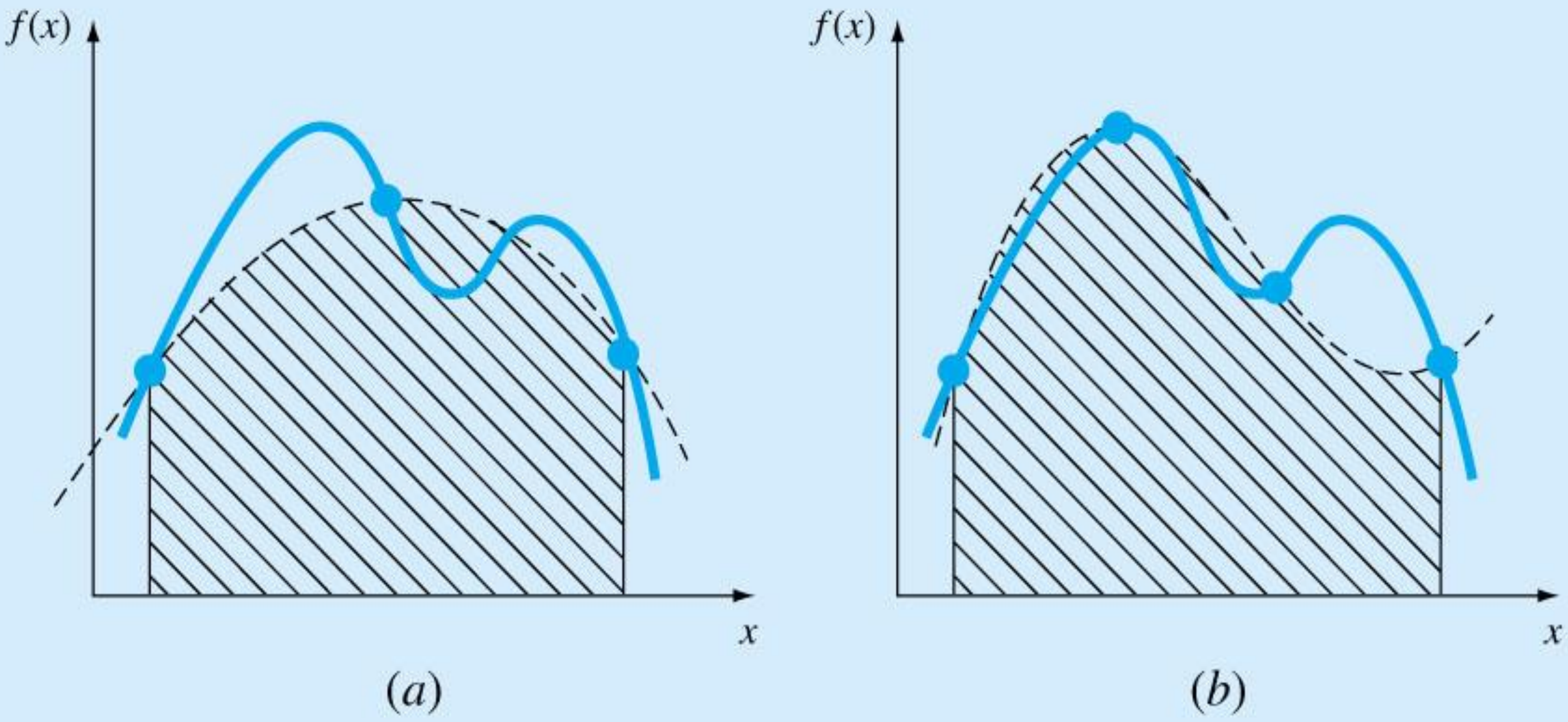


估计误差：用被积函数二阶导数的积分平均值代替$f''(\xi)$

$$f''(x)=\frac{\int_0^{0.8}(-400+4050x-10800x^2+8000x^3)dx}{0.8-0}=-60$$

$$E_a=-\frac{1}{12}(-60)(0.8)^3=2.56$$

Simpson公式



Simpson公式

还可由扩展的4阶牛顿插值多项式证明

$$E_2(f)=\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx$$

$$=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)=-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

- $n=2$

$$C_0^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2(t-1)(t-2)dt=\frac{1}{6}$$

$$C_1^{(2)}=-\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt=\frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)dt=\frac{1}{6}$$

$$I_2(f)=(b-a)\frac{1}{6}f(a)+(b-a)\frac{4}{6}f(\frac{b+a}{2})+(b-a)\frac{1}{6}f(b)$$

$$=\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b)\right]$$

Simpson1/3法则

***I*=(*b*-*a*)×平均高度**

Simpson公式——例

- 例：利用Simpson公式计算函数在[0 0.8]上的积分（精确值为1.640533）

$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

- 解：$f(0)=0.2$

  $f(0.4)=2.456$

  $f(0.8)=0.232$

$$I \cong \frac{0.8}{6}(0.2+4(2.456)+0.232)=1.367467$$

$$E_t=0.2730667 \quad \varepsilon_t=16.6\%$$

估计误差：

$$E_a=-\frac{1}{2880}(-2400)(0.8)^5=0.2730667$$

用被积函数四阶导数的积分平均值代替$f^{(4)}(\xi)$，由于被积函数恰好是五次多项式，与真实误差一致

Simpson 3/8 法则

- n=3，构造区间上的四点三次Lagrange插值多项式，并逼近被积函数

$$I(f)=\frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$
$$=(b-a)\frac{\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]}{8}$$

$$E(f)=-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)=-\frac{3}{80}h^5f^{(4)}(\xi)$$

***I*=(*b*-*a*)×平均高度**

具有与Simpson公式相同阶次的代数精度，比Simpson公式精确一点。一般情况下，优先使用Simpson公式。

Simpson 3/8 法则——例

$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

在[0 0.8]上子区间数目分别为3和5时，计算积分。

- 子区间数目为3时，利用Simpson 3/8 法则：

$f(0)=0.2;f(0.2667)=1.432724;\ f(0.5333)=3.487177;\ f(0.8)=0.232$

$$I\cong\frac{0.8}{8}(0.2+3(1.432724+3.487177)+0.232)=1.519170$$

$$E_t=1.640533-1.519170=0.1213630 \qquad \varepsilon_t=7.4\%$$

$$E_a=-\frac{1}{0.6480}(-2400)(0.8)^5=0.1213630$$

Simpson 3/8 法则——例

- 子区间数目为5时，结合 Simpson 1/3 法则：

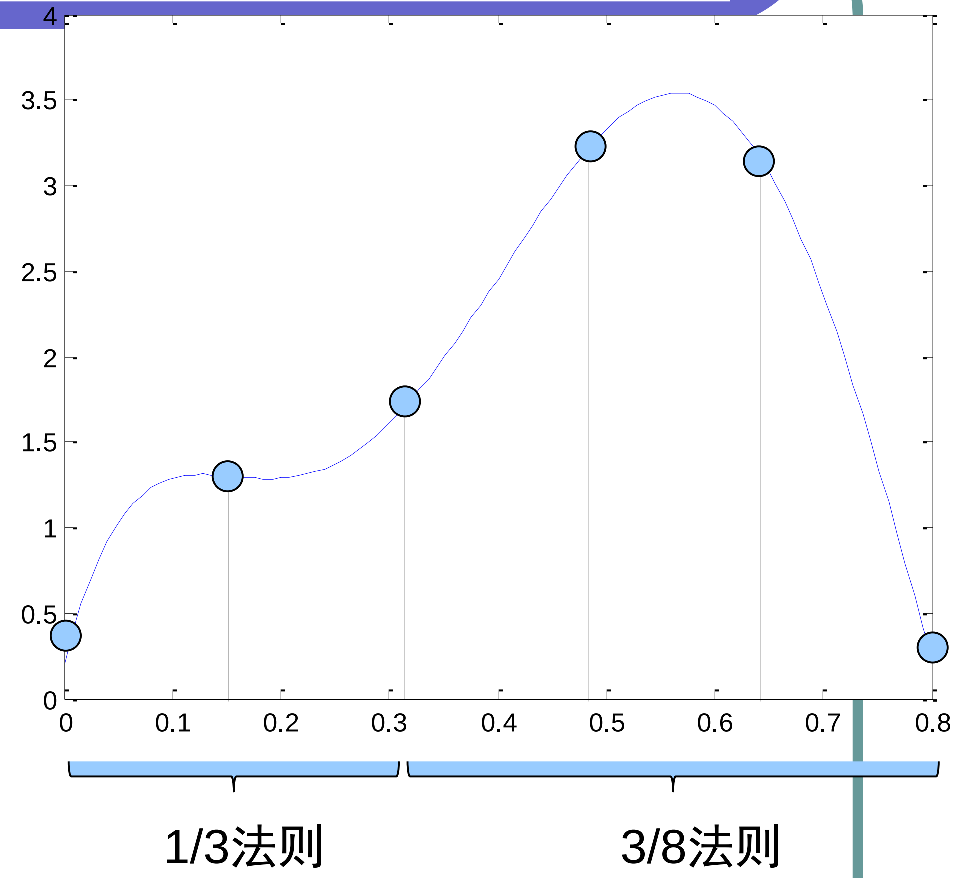
$f(0)=0.2$; $f(0.16)=1.296919$;

$f(0.32)=1.743393$;

$f(0.48)=3.186015$;

$f(0.64)=3.181929$;

$f(0.8)=0.232$



$I_1 \cong 0.3803237$ $I_2 \cong 1.264754$

$I = I_1 + I_2 = 1.645077$

$E_t = 1.640533 - 1.645077 = -0.00454383$ $\varepsilon_t = -0.28\%$

Cotes系数

n	$C_k^{(n)}$ $k=0,\ldots,n$									
1	1	1								/2
2	1	4	1							/6
3	1	3	3	1						/8
4	7	32	12	32	7					/90
5	19	75	50	50	75	19				/288
6	41	216	27	272	27	216	41			/840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		/17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989	/28350

Cotes
公式

数值积分的稳定性

- $f(x)=1$ $$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}y_k=b-a \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1$$
- 初始数据$(x_k, y_k)\rightarrow$实际计算数据(x_k^*, y_k^*) $$\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}y_k \approx \sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}y_k^*$$

$$e=\left|\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}(y_k-y_k^*)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}(f(x_k)-f(x_k^*))\right|\le\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|\cdot\max_k\left|f(x_k)-f(x_k^*)\right|$$

- **如果$C_k^{(n)}>0$** $$\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|=\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1 \qquad e\le\max_k\left|f(x_k)-f(x_k^*)\right|$$
- **积分过程中计算结果的误差没有扩大，它不会超过$|f(x_k)-f(x_k^*)|$的最大误差，故求积过程是稳定的。**
- 如果$C_k^{(n)}$有正有负，如表中$n>7$时 $$\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|>\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1$$
- **若$C_k^{(n)}(f(x_k)-f(x_k^*))>0$**

$$e=\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|\cdot\left|f(x_k)-f(x_k^*)\right|\ge\sum_{k=0}^{n}|C_k^{(n)}|\cdot\min_k\left|f(x_k)-f(x_k^*)\right|$$

初始数据的误差在求和过程中扩大，将导致计算的不稳定。此外，由插值的龙格现象可知，高阶Newton-Cotes积分不能保证等距数值积分序列的收敛性。因此，高阶($n>7$)的Newton-Cotes求积不被采用。

Newton-Cotes公式的余项

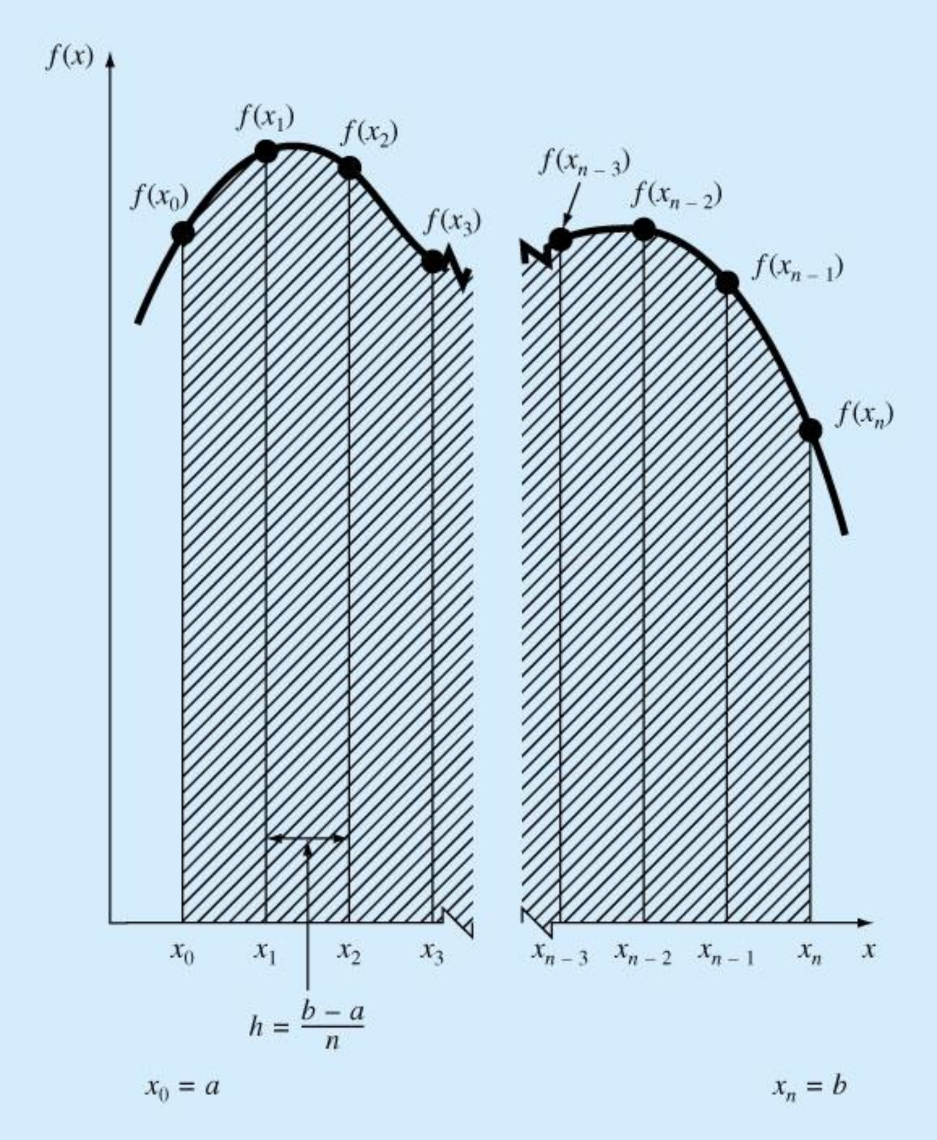
- 对偶数有$n+1$阶代数精度，而奇数为n阶代数精度

$$E_n(f)=\frac{K_n}{(n+2)!}f^{(n+2)}(\xi), K_n=\int_a^b x\omega_{n+1}(x)dx<0, n=2k$$

$$E_n(f)=\frac{K_n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), K_n=\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx<0, n=2k-1$$

复合Newton-Cotes公式

- 先将积分区间分成几个小区间，并在每个小区间上用低阶Newton-Cotes公式计算积分的近似值，然后对这些近似值求和，从而得到所求积分的近似值。



复合梯形公式

$$h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,\cdots,n$$

$$f\in C^2[a,b]\Rightarrow \exists \xi\in[a,b], s.t., \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)=nf''(\xi)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)=\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

$$T_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)\right\}$$

$$=h\left(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(b)\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

$$E_n(f)=-\frac{nh^3}{12}f''(\xi)$$

$$=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$$

$$=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$$

$$I=(b-a)\frac{\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right)}{2n}$$

I=(b-a)×平均高度

复合梯形公式——例1

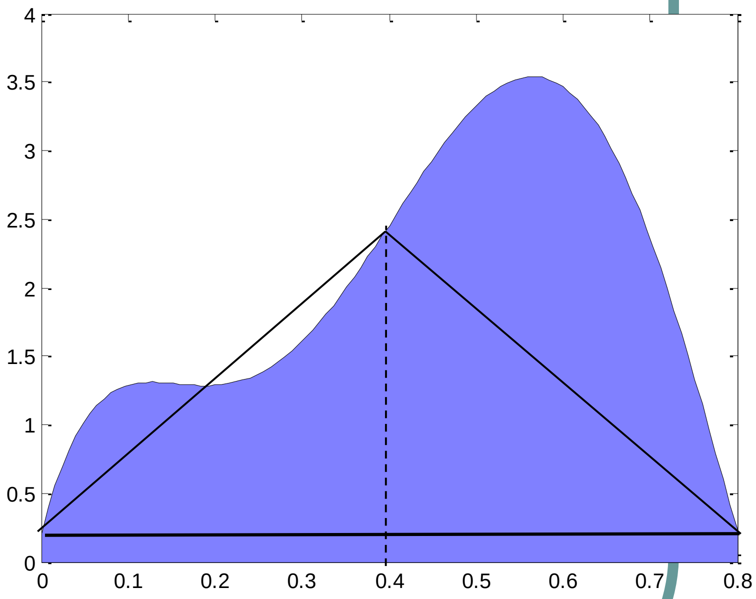
- 例：利用复合梯形公式计算函数在[0 0.8]上的积分（精确值为1.640533） $f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$
- 解：n=2

$f(0)=0.2 \quad f(0.4)=2.456 \quad f(0.8)=0.232$

$$I_1 \cong 0.8\frac{(0.2+2(2.456)+0.232)}{2}=1.0688$$

$E_t=0.57173 \qquad \varepsilon_t=34.9\%$

$$E_a=-\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60)=0.64$$



复合梯形公式——例1

子区间数目增加时，误差随之减小。误差与n^2成反比。

- 复合梯形公式的计算结果

n	h	I	$\varepsilon_t(\%)$
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

复合梯形公式——例2

- 例：计算 $I=\int_0^1 e^x dx$ 要求至少有5位有效数字(即要求截断误差≤0.5×10^{-4})，用复合梯形公式计算至少要在[0,1]区间划分多少个等分区间？
- 解： $f(x)=e^x$ $f''(x)=e^x$ $0\le x\le 1$

$$\left|E_T(f)\right|=\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)=\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)\le\frac{1}{12n^2}e\le 0.5\times10^{-4}$$

$n=67.3$ 至少要在[0,1]区间划分68个等分区间

降落伞问题——复合梯形公式

- 跳伞者的速度与时间的关系：$v(t)=\frac{gm}{c}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)$
- 则经过时间t=10后下落的距离为

$$d=\frac{gm}{c}\int_0^{10}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)dt$$

- 解析解为：d=289.43515m

n=500时的计算结果最精确。此后误差绝对值增大，原因为舍入误差。

子区间数	子区间长度	d估计值	$\varepsilon_t(\%)$	子区间数	子区间长度	d估计值	$\varepsilon_t(\%)$
10	1.0	288.7491	0.237	500	0.02	289.4348	1.2×10^{-4}
20	0.5	289.2636	0.0593	1000	0.01	289.4360	-3.0×10^{-4}
50	0.2	289.4076	9.5×10^{-3}	2000	0.005	289.4369	-5.9×10^{-4}
100	0.1	289.4282	2.4×10^{-3}	5000	0.002	289.4337	5.2×10^{-4}
200	0.05	289.4336	5.4×10^{-4}	10000	0.0001	289.4317	1.2×10^{-3}

复合Simpson公式

$$E_n(f)=-\frac{(2h)^5 m}{2880}f^{(4)}(\xi)=-\frac{(b-a)^5}{2880m^4}f^{(4)}(\xi)=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi)$$

$$h=\frac{b-a}{n},x_i=a+ih,i=0,\cdots,n$$

$$S_n=\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx=\frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1})+4f(x_{k-\frac{1}{2}})+f(x_k))$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

$n=2m$ 偶数个子区间

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}f(x)=\frac{2h}{6}(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2}))-\frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\xi_i)$$

$$S_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{2h}{6}(f(x_{2i})+f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2}))-\frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\xi_i)\right\}$$

$$=\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{i=0}^{m-1}f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})+f(b)\right)\underline{-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\xi_i)}$$

误差

复合Simpson公式——例

- 例：利用复合Simpson公式计算函数在[0 0.8]上的积分（精确值为1.640533）

$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

- 解：$n=4(h=0.2)$

$f(0)=0.2$; $f(0.2)=1.288$; $f(0.4)=2.456$; $f(0.6)=3.464$; $f(0.8)=0.232$

$$I=\frac{0.8}{12}(0.2+4(1.288+3.464)+2(2.456)+0.232)=1.623467$$

$$E_t=1.640533-1.623467=0.017067 \qquad \varepsilon_t=1.04\%$$

估计误差：

$$E_a=-\frac{(0.8)^5}{180(4)^4}(-2400)=0.017067$$

复合积分公式的收敛阶

- 定义：复合求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx I_n$ 若满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^b f(x)dx - I_n}{h^p} = C < \infty, C \neq 0$$

- 则称I_n是p阶收敛的。
- 可以证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^b f(x)dx - T_n}{h^2} = -\frac{1}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

二阶收敛性

- 复合Simpson公式具有四阶收敛性。
- 收敛阶越高，近似值I_n收敛到真值的速度就越快，在相近的计算工作量下，有可能获得较精确的近似值。

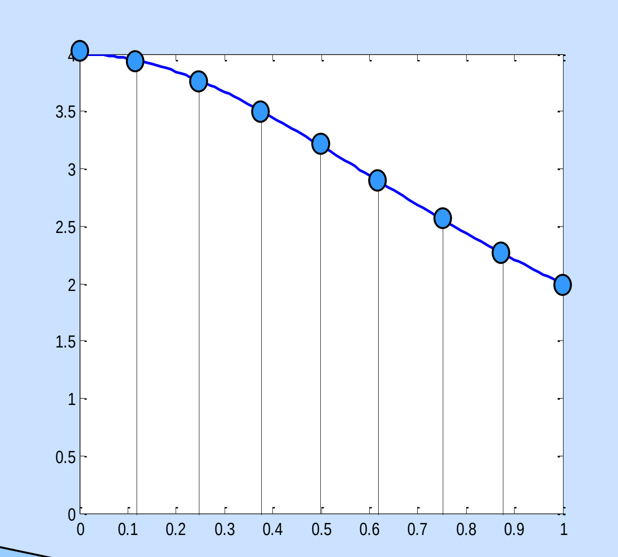
积分公式的收敛阶——例

- 计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$

x	f(x)	x	f(x)
0	4.00000000	5/8	2.87640449
1/8	3.93846154	3/4	2.56000000
1/4	3.76470588	7/8	2.26548673
3/8	3.50684932	1	2.00000000
1/2	3.20000000		

- 解：复合梯形公式，n=8
- 复合Simpson公式，n=4

$$\pi \approx T_8 = \frac{1}{16}\left\{ f(0) + 2\left[\begin{array}{l} f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{1}{2}) \\ + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{3}{4}) + f(\frac{7}{8}) \end{array} \right] + f(1) \right\} = 3.138988494$$



$$\pi \approx S_4 = \frac{1}{4\times 6}\left\{ f(0) + 4\left[\begin{array}{l} f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) \\ + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8}) \end{array} \right] + 2\left[\begin{array}{l} f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) \\ + f(\frac{3}{4}) \end{array} \right] + f(1) \right\} = 3.141592502$$

两种方法都用到表中九个点上的函数值，计算量基本相同，但复合Simpson公式得到的近似值比复合梯形公式得到的近似值精确。因此，较多应用复合Simpson公式。

非等距积分

- 非等距梯形法则

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

- Simpson法则

x	*h*	*f*(*x*)	*x*	*h*	*f*(*x*)
0.0		0.200000	0.44	0.04	2.842985
0.12	0.12	1.309729	0.54	0.1	3.507297
0.22	0.1	1.305241	0.64	0.1	3.181929
0.32	0.1	1.743393	0.70	0.06	2.363000
0.36	0.04	2.074903	0.80	0.1	0.232000
0.40	0.04	2.456000			

Simpson 1/3法则

Simpson 3/8法则

Simpson 1/3法则

误差的事后估计与步长自适应

- 事后误差估计
  - 复合梯形公式

$$I(f)-T_n(f)=-\frac{(b-a)}{12}h^2f''(\xi)$$

n等分区间

步长自适应：利用Simpson公式，在对半分的区间上递归应用公式并估计误差，决定步长是否减半

$$I(f)-T_{2n}(f)=-\frac{(b-a)}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2f''(\eta)$$

$2n$等分区间

近似有 $f''(\eta)\approx f''(\xi)$ $\Rightarrow$

$$I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{3}\left(T_{2n}(f)-T_n(f)\right)$$

$\Downarrow$

$$I(f)\approx T_{2n}(f)+\frac{1}{3}\left(T_{2n}(f)-T_n(f)\right)$$

  - 复合Simpson公式

$$I(f)-S_{2n}(f)\approx\frac{1}{15}\left(S_{2n}(f)-S_n(f)\right)$$

计算停止条件：

$$\frac{\left|T_{2n}(f)-T_n(f)\right|}{3}<\varepsilon$$

在区间逐步分半进行计算的过程中可以用前后两次计算结果来估计误差

步长自适应数值积分-参考程序

```
function q = quadadapt(f,a,b,tol,varargin)
% Evaluates definite integral of f(x) from a to b
if nargin < 4 | isempty(tol),tol = 1.e-6;end
c = (a + b)/2;
fa = feval(f,a,varargin{:}); fc = feval(f,c,varargin{:});
fb = feval(f,b,varargin{:});
q = quadstep(f, a, b, tol, fa, fc, fb, varargin{:});
end

function q = quadstep(f,a,b,tol,fa,fc,fb,varargin)
% Recursive subfunction used by quadadapt.
h = b - a; c = (a + b)/2;
fd = feval(f,(a+c)/2,varargin{:}); fe = feval(f,(c+b)/2,varargin{:});
q1 = h/6 * (fa + 4*fc + fb);
q2 = h/12 * (fa + 4*fd + 2*fc + 4*fe + fb);
if abs(q2 - q1) <= tol
    q = q2 + (q2 - q1)/15;
else
    qa = quadstep(f, a, c, tol, fa, fd, fc, varargin{:});
    qb = quadstep(f, c, b, tol, fc, fe, fb, varargin{:});
    q = qa + qb;
end
end
```

复合梯形公式的递推公式

$$T_{2n}(f)=\frac{b-a}{4n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{2n-1}f(a+i\frac{b-a}{2n})+f(b)\right)$$

- 当i取偶数时为n等分点，当i取奇数时为新增加的分点

$$T_{2n}(f)=\frac{b-a}{4n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+2i\frac{b-a}{2n})+2\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n})+f(b)\right)$$

$$=\frac{b-a}{4n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+2i\frac{b-a}{2n})+f(b)\right)+\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n})$$

$$=\frac{1}{2}T_n+\underline{\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n})}$$

复合梯形公式的递推公式——例

- 计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 使积分误差不超过10^{-6}
- 解：在[0,1]整个区间上利用梯形公式得到T_1

n	T_n	$\|T_{2n}-T_n\|/3$	n	T_n	$\|T_{2n}-T_n\|/3$
1	3		32	3.14142989	1.6276×10^{-4}
2	3.1	0.03333333	64	3.14155196	4.0690×10^{-5}
4	3.13117647	0.01039216	128	3.14158248	1.0173×10^{-5}
8	3.13898849	0.00260401	256	3.14159011	2.5433×10^{-6}
16	3.14094161	6.5104×10^{-4}	512	3.14159202	6.3667×10^{-7}

收敛比较慢！

重积分

- 在微积分中，二重积分的计算是用化为累次积分的方法进行的。计算二重数值积分也同样采用累次积分的计算过程。
- 简化起见，我们仅讨论矩形区域上的二重积分。
- 对非矩形区域的积分，大多可以变化为矩形区域上的累次积分。

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

本章内容

- 数值微分
  - 差商近似
  - 插值型数值微分
- 数值积分
  - Newton-Cotes 积分
  - **龙贝格（Romberg）积分**
  - 高斯（Gauss）求积公式

龙贝格积分

- 外推算法
  - 用若干个积分近似值来推算更精确的新的近似值的方法
- 根据误差的事后估计

$$I(f)\approx T_{2n}(f)+\frac{1}{3}\left(T_{2n}(f)-T_n(f)\right)$$

$$\bar{T}_n(f)=T_{2n}(f)+\frac{1}{3}\left(T_{2n}(f)-T_n(f)\right)=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)$$

比T_{2n}更好地接近积分真值

- P56例： $T_4=3.13117647$ $T_8=3.13898849$

$$\bar{T}_4=\frac{4}{3}\times 3.13898849-\frac{1}{3}\times 3.13117647=3.14159250$$

准确程度比T_{512}高，却仅需九点！

龙贝格积分

- 验证可得 $$I(f)\approx T_{2n}(f)+\frac{1}{3}\left(T_{2n}(f)-T_n(f)\right)=S_n(f)$$

$$I(f)\approx S_{2n}(f)+\frac{1}{15}\left(S_{2n}(f)-S_n(f)\right)=C_n(f)$$

用低阶的公式组合后成为一个高阶的公式

$$R_n=C_{2n}+\frac{1}{63}(C_{2n}-C_n)=\frac{1}{63}(64C_{2n}-C_n)$$

龙贝格（Romberg）积分

Richardson外推法

$$I-G_{2n}=\frac{1}{4^m-1}(G_{2n}-G_n)\qquad m=1,2,3,\cdots$$

当*m*>4时上式趋近于0，再进行外推已无必要。故在实际中只作到*R*为止。

龙贝格积分

适用于函数的积分

- 计算过程
  - 记号 $T_m^{(k)}$

积分区间的二分次数

近似值所在序列的性质，*m*=0在梯形序列中；*m*=1在Simpson序列中；*m*=2在Cotes序列中；*m*=3在Romberg序列中

$$T_0^{(0)}=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$T_0^{(l)}=\frac{1}{2}T_0^{(l-1)}+\frac{b-a}{2^l}\sum_{i=1}^{2^{l-1}}f\left[a+(2i-1)\frac{b-a}{2^l}\right],l=1,2,3\cdots$$

$$T_m^{(k)}=\frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1},k=0,1,2,\cdots;m=1,2,3,\cdots$$

$$\left|T_m^{(0)}-T_{m-1}^{(0)}\right|<\varepsilon$$

或用相对误差判断

① $\boldsymbol{T_1=T_0^{(0)}}$ $<\varepsilon$?

② $\boldsymbol{T_2=T_0^{(1)}}$ ③ $\boldsymbol{S_1=T_1^{(0)}}$ $<\varepsilon$?

④ $\boldsymbol{T_4=T_0^{(2)}}$ ⑤ $\boldsymbol{S_2=T_1^{(1)}}$ ⑥ $\boldsymbol{C_1=T_2^{(0)}}$ $<\varepsilon$?

⑦ $\boldsymbol{T_8=T_0^{(3)}}$ ⑧ $\boldsymbol{S_4=T_1^{(2)}}$ ⑨ $\boldsymbol{C_2=T_2^{(1)}}$ ⑩ $\boldsymbol{R_1=T_3^{(0)}}$

••• ••• ••• ••• ••• •••

$O(h^2)$ $O(h^4)$ $O(h^6)$ $O(h^8)$

龙贝格积分——例

- 计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$
- 解：

k	T_{2k}	S_{2k-1}	C_{2k-2}	R_{2k-3}
0	3			
1	3.1	3.133333		
2	3.131176	3.141569	3.142118	
3	3.138988	3.141593	3.141594	3.141586
4	3.140941	3.141592	3.141592	3.141593

数值微分的外推法

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \pm \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \cdots$$

$$f'(x) = T(h) \approx \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h) \right]$$

$$= f'(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots$$

$$f'(x) = T(h) - \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(x) - \cdots$$

中点公式的误差与h^2成正比

$$\frac{f'(x) - T(h)}{f'(x) - T(2h)} \approx \frac{1}{4}$$

$$f'(x) \approx \frac{4}{3} T(h) - \frac{1}{3} T(2h) = S(h)$$

作为$f'(x)$的近似值，$S(h)$比$T(h)$要更好。

数值微分的外推法

- 类似地 $C(h)=\frac{16}{15}S(h)-\frac{1}{15}S(2h)$

$$T(h)=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]$$

$$S(h)=\frac{4}{3}T(h)-\frac{1}{3}T(2h)$$

$$C(h)=\frac{16}{15}S(h)-\frac{1}{15}S(2h)$$

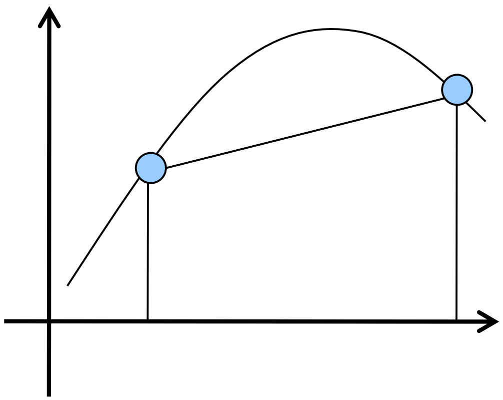
计算$f'(x)$的近似值，直到 $|C_{k+1}-C_k|<\varepsilon$，$f'(x)\approx C_{k+1}$

本章内容

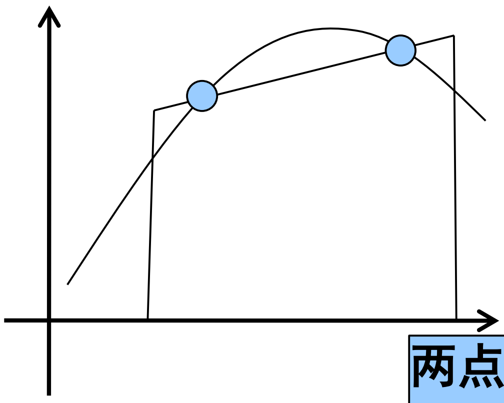
- 数值微分
  - 差商近似
  - 插值型数值微分
- 数值积分
  - Newton-Cotes 积分
  - 龙贝格（Romberg）积分
  - **高斯（Gauss）求积公式**

高斯求积公式

- 梯形公式
  - 限定节点为两个端点，代数精度为1
- 对节点不加限制，可以适当选取x_0，x_1，使得积分公式具有更高的代数精度。



$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$



- 假设积分区间为[-1,1]，若要求代数精度为3

$$\begin{cases} A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \\ A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \\ A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} \\ A_0 \cdot x_0^3 + A_1 \cdot x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow$$

$$A_0 = A_1 = 1$$

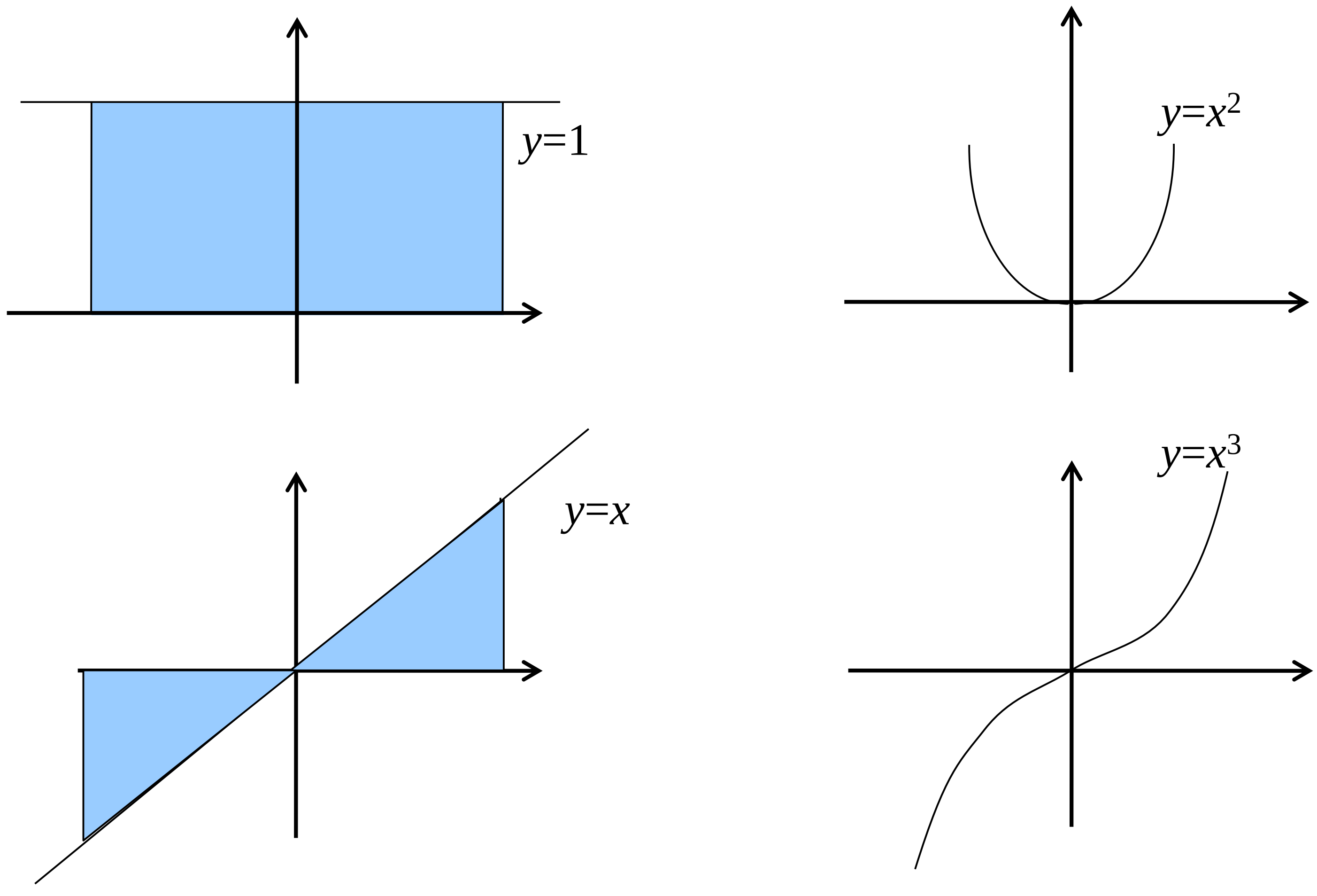
$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

两点Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} fdx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

高斯求积公式



两点Gauss-Legendre公式

- 积分区间变换[a,b]→[-1,1]
  - 定义一个新变量x_d $$x = a_0 + a_1 x_d$$
  - 下限x=a，对应于x_d=-1 $$a = a_0 + a_1(-1)$$
  - 上限x=b，对应于x_d=1 $$b = a_0 + a_1(1)$$
  - 可得 $$a_0 = \frac{b+a}{2} \qquad a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} \Rightarrow dx = \frac{(b-a)}{2}dx_d$$

两点Gauss-Legendre公式——例

- [0,0.8]

$$x = 0.4 + 0.4x_d$$

$$dx = 0.4dx_d$$

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$\int_0^{0.8}\left(0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} 0.2 + 25(0.4+0.4x_d) - 200(0.4+0.4x_d)^2 + 675(0.4+0.4x_d)^3 \\ -900(0.4+0.4x_d)^4 + 400(0.4+0.4x_d)^5 \end{pmatrix} 0.4dx_d$$

$$I = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$$

$$\varepsilon_t = -11.1\%$$

高斯求积公式

- 定理
  - **n+1**个积分点的数值积分公式，最高**2n+1**阶
- 高斯求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

  - 若代数精度达到**2n+1**，则称为**高斯求积公式**，相应的求积节点称为**高斯点**
- 构造
  - 待定系数法，x_k，A_k，令$f(x)=1,x,x^2,\ldots,x^{2n+1}$使求积公式精确成立
  - 首先利用$[a,b]$上的$n+1$次正交多项式确定高斯点，再利用高斯点确定求积系数
    - $[a,b]$上的$n+1$次正交多项式的零点是Gauss点

几个常用的正交多项式

- Legendre多项式的一般形式
  - 在区间[-1,1]上

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$\begin{cases} P_0(x)=1, \quad P_2(x)=x \\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,3,\dots\dots) \end{cases}$$

- 切比雪夫多项式、Hermite多项式

Gauss-Legendre求积公式

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{[(1+n)P_{n+1}(x_k)]^2}$$

$$E_t = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in [-1,1]$$

- n=2 $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$$
- n=3 $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi)$$

Gauss-Legendre求积公式节点、系数表

n	x_k	A_k
1	0	2
2	±0.5773502692	1
3	±0.7745966692 0	0.5555555556 0.8888888889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889

n	x_k	A_k
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	±0.9602898565 ±0.7966664774 ±0.5255324099 ±0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

Gauss-Hermite求积公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

n	x_k	A_k	n	x_k	A_k
2	±0.7071067811	0.8862269254	6	±0.4360774119 ±1.3358490704 ±2.3506049736	0.7246295952 0.1570673203 0.0045300099
3	±1.2247448713 0	0.2954089751 1.8163590006			
4	±0.5246476232 ±1.6506801238	0.8049140900 0.0813128354	7	±0.8162878828 ±1.6735516287 ±2.6519613563 0	0.4256072526 0.0545155828 0.0009717812 0.8102646175
5	±0.9585724646 ±2.0201828704 0	0.3936193231 0.0199532421 0.9453087204			

三点Gauss-Legendre求积公式——例

$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi)$$

$$\begin{aligned}I &= 0.5555556\,f(-0.7745967)+0.8888889\,f(0)+0.5555556\,f(0.7745967)\\ &=1.640533\end{aligned}$$

- 结果精确

降落伞问题——高斯求积公式

- 跳伞者的速度与时间的关系： $v(t)=\frac{gm}{c}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)$
- 则经过时间t=10后下落的距离为

$$d=\int_0^{10} v(t)dt=\frac{gm}{c}\int_0^{10}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)dt$$

- 解析解为：d=289.43515m，采用高斯求积公式

点数	d估计值
2	290.0145
3	289.4393
4	289.4352
5	289.4351
6	289.4351

高斯求积公式

$$E_t = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi)$$

- 优点
  - 计算量小，精度高
- 缺点
  - n改变大小时，节点和系数几乎都改变
  - 余项表达式涉及被积函数的高阶导数，利用余项控制精度困难
  - 需要计算节点处的函数值，不适用于函数表达式未知的情况

- 较多采用复合求积的方法，将积分区间分成m个等长的小区间，在每个小区间上使用同一低阶Gauss求积公式算出积分的近似值，再相加

MATLAB中的函数

函数	描述
quad	Simpson公式
trapz	梯形公式
diff	数值微分（连续函数求导）
quadl	Lobatto求积（一种高斯求积公式，取代了quad8）
sum	求和
dblquad	二重积分

第五章 总结——数值积分各种方法

方法	需要的节点数	复合公式需要的节点数	精度	应用范围	编程难度	备注
梯形公式	2	n+1	$h^3f''(\xi)$	广泛	容易	
Simpson1/3法则	3	2n+1	$h^5f^{(4)}(\xi)$	广泛	容易	
Simpson3/8法则	4	≥3	$h^5f^{(4)}(\xi)$	广泛	容易	
高阶Newton-Cotes公式	≥5			很少	容易	
Romberg积分	3			要求已知$f(x)$表达式	容易	不适于列表型数据
Gauss求积公式	≥2			要求已知$f(x)$表达式	容易	不适于列表型数据

第五章 总结——重要内容

- 各种求积方法的直观解释，公式和误差分析

温馨提示

- 学期将结束，请合理安排时间，准备大作业
- 大作业
  - 截止时间：2022.4.30 24:00