

第三次上机作业

问题叙述：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 对 $n = 2, 6, 10$ 分别计算 A 的条件数，并判断方程组 $AX = b$ 是否为病态方程组？（可选用任何一种范数）
- 对 $n = 6$ ，采用原始 Gauss 消去法、Gauss 列主元消去法、Gauss-Seidel 迭代法求解方程组 $AX = b$ 。（迭代法初值 $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ）
- 若 A 的最后一个元素有扰动 10^{-4} ，再求解结果；计算扰动相对误差与解的相对误差，分析它们与条件数的关系。

问题解决过程：

第一问：

```
1 %% problem1
2 clc, clear
3 cond(hilb(2))
4 cond(hilb(6))
5 cond(hilb(10))
```

使用 `cond()` 函数通过“2”范数计算谱条件数。

表 1: 第一问

阶数	条件数	是否为病态方程
1	19.281470067903971	否
2	1.495105864141869e+07	是
3	1.602490962516758e+13	是

第二问：

图 1: 原始 Gauss 消去法原理

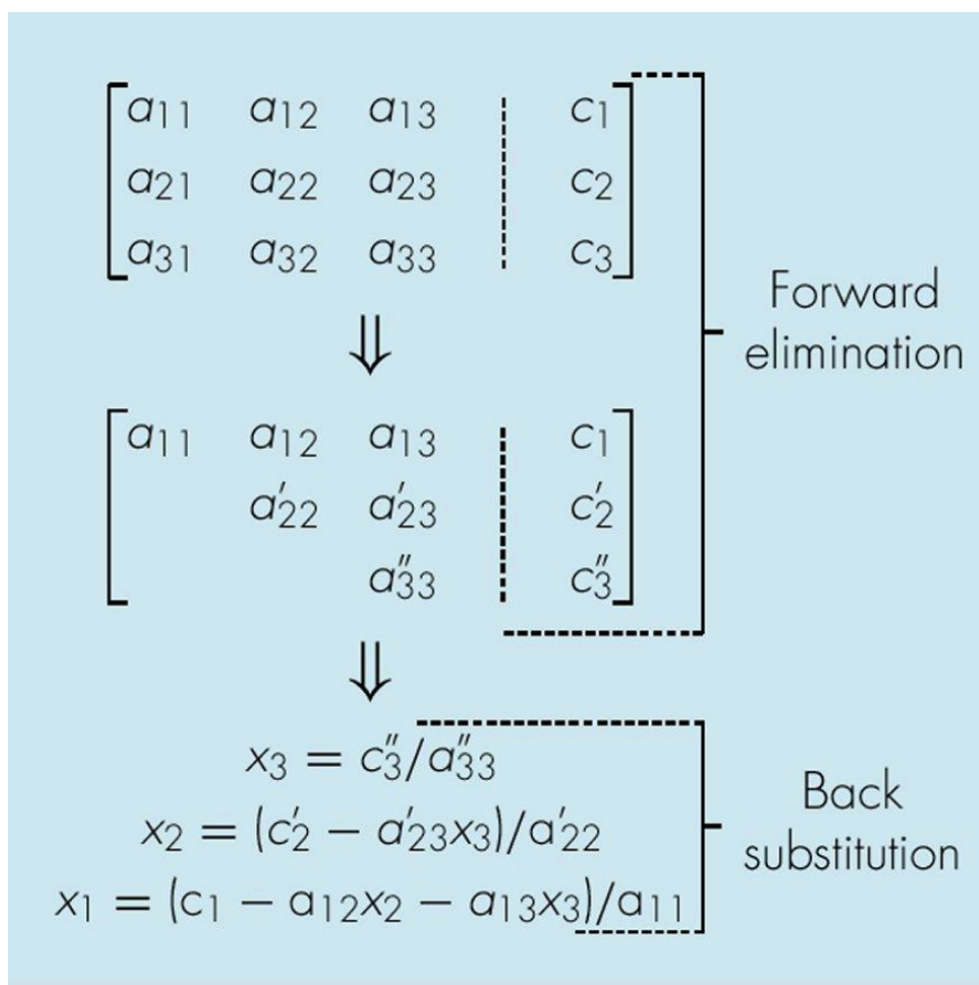
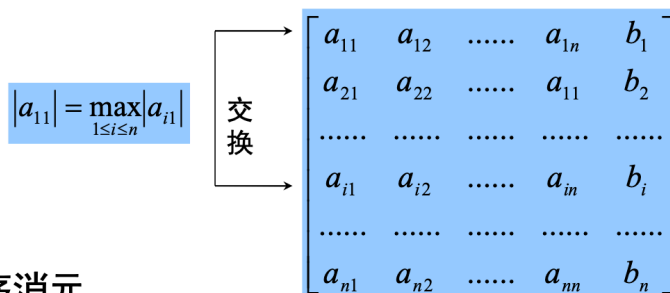


图 2: 列主元 Gauss 消去法原理

- 从第一列中选出绝对值最大的元素



- 顺序消元

- 第 k 步

$$|a_{i_k}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}| \quad \text{记 } l = i_k$$

若 $l \neq k$, 则交换第 k 行与 l 行的所有对应元素, 再进行顺序消元。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{kk} & b_k \\ & & & \dots & \dots \\ & & & a_{nk} & b_n \end{bmatrix}$$

图 3: Gauss-Seide 迭代法原理

- 选取 $M=D-L$ 和 $N=M-A=U$
- $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$ $G=(D-L)^{-1}U$ $f=(D-L)^{-1}b$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

(1)G-S迭代法每迭代一次主要是计算一次矩阵乘向量。

(2)计算 $x^{(k+1)}$ 的第 i 个分量 $x_i^{(k+1)}$ 时, 利用已计算出的最新分量 $x_j^{(k+1)}(j=1,\dots,i-1)$, 因此, 计算中只需要一组工作单元来保存 $x^{(k)}$ 或 $x^{(k+1)}$ 。

```

1  % problem2 (设置断点调试)
2  clc , clear
3  n=6;
4  a=hilb(n);
5  b=ones(n,1);
6  x_real=invhilb(6)*b;
7
8  %% 原始 Gauss 消去法
9  a=hilb(n);
10 b=ones(n,1);
11 % 消元
12 for k=1:n-1
13     for i=k+1:n
14         factor=a(i,k)/a(k,k);
15         for j=k+1:n
16             a(i,j)=a(i,j)-factor*a(k,j);
17         end
18         b(i)=b(i)-factor*b(k);
19     end
20 end
21 % 回带
22 x(n)=b(n)/a(n,n);
23 for i=n-1:-1:1
24     sum=b(i);
25     for j=i+1:n
26         sum=sum-a(i,j)*x(j);

```

```
27     end
28     x(i)=sum/a(i,i);
29 end
30
31 %% Guass列主元消去法
32 a=hilb(n);
33 b=ones(n,1);
34 % 消元
35 for i=1:n-1
36     max=abs(a(i,i));
37     m=i;
38     for j=i+1:n
39         if max<abs(a(j,i))
40             max=abs(a(j,i));
41             m=j; % 寻找列最大值
42         end
43     end
44     if(m~=i)
45         for k=i:n
46             c(k)=a(i,k);
47             a(i,k)=a(m,k);
48             a(m,k)=c(k);
49         end
50         d=b(i);
51         b(i)=b(m);
52         b(m)=d;
53     end
54     for k=i+1:n
55         factor=a(k,i)/a(i,i);
56         for j=i+1:n
57             a(k,j)=a(k,j)-a(i,j)*factor;
58         end
59         b(k)=b(k)-b(i)*factor;
60     end
61 end
62 % 回带
63 x(n)=b(n)/a(n,n);
```

```
64 for i=n-1:-1:1
65     sum=b(i);
66     for j=i+1:n
67         sum=sum-a(i,j)*x(j);
68     end
69     x(i)=sum/a(i,i);
70 end
71
72 %% Gauss-Seide 迭代法
73 clear max;
74 a=hilb(n);
75 b=ones(n,1);
76 x0=ones(n,1);
77 x=zeros(n,1);% 初值全为 0
78 k=0;
79 % 第一次迭代
80 for i=1:n
81     x(i)=b(i);
82     for j=1:i-1
83         x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
84     end
85     for j=i+1:n
86         x(i)=x(i)-a(i,j)*x0(j);
87     end
88     x(i)=x(i)/a(i,i);
89 end
90 % 计算相对误差
91 for i=1:n
92     ea(i)=abs((x(i)-x0(i))/x(i));
93 end
94 % 迭代
95 while max(ea)>5e-11
96     k=k+1;
97     x0=x;
98     for i=1:n
99         x(i)=b(i);
100         for j=1:i-1
```

```

101         x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
102     end
103     for j=i+1:n
104         x(i)=x(i)-a(i,j)*x0(j);
105     end
106     x(i)=x(i)/a(i,i);
107 end
108 for i=1:n
109     ea(i)=abs((x(i)-x0(i))/x(i));
110 end
111 end

```

利用 $x = invhild(6) * b$ 可以算出解的真值 $[-6, 210, -1680, , 5040, -6300, 2772]$ ，并使各算法与之比较。

表 2: 三种方法的解

x_i	原始 Guass 消去法	Guass 列主元消去法	Gauss-Seidel 迭代法
1	-6.000000000905970	-6.000000001120498	-5.999823400761557
2	2.100000000270427e+02	2.100000000329495e+02	2.099950627154710e+02
3	-1.680000000187955e+03	-1.680000000226683e+03	-1.679967067813866e+03
4	5.040000000497923e+03	5.040000000596050e+03	5.039915227977793e+03
5	-6.300000000556981e+03	-6.300000000662943e+03	-6.299907173971328e+03
6	2.772000000221711e+03	2.772000000262698e+03	2.771963654686595e+03

表 3: 三种方法的解的与真值误差

x_i	原始 Guass 消去法	Guass 列主元消去法	Gauss-Seidel 迭代法
1	1.509950683005930e-10	1.867495787640413e-10	2.943320640724778e-05
2	1.287749758679032e-10	1.569023175934923e-10	2.351087870969033e-05
3	1.118779989285810e-10	1.349304414231613e-10	1.960249174647374e-05
4	9.879422289068027e-11	1.182639058993479e-10	1.681984567604949e-05
5	8.840967013153233e-11	1.052291144520813e-10	1.473429026537772e-05
6	7.998238146825173e-11	9.476856048343888e-11	1.311158492245166e-05

第三问:

```

1 % problem3 (设置断点调试)
2 clc , clear

```

```
3 n=6;
4 a=hilb(n);
5 b=ones(n,1);
6 x_real=invhilb(n)*b;
7 cond_value=cond(a);
8
9 %% Guass列主元消去法
10 a=hilb(n);
11 a(n,n)=a(n,n)+1e-4;
12 b=ones(n,1);
13 x=zeros(n,1);
14 % 消元
15 for i=1:n-1
16     max=abs(a(i,i));
17     m=i;
18     for j=i+1:n
19         if max<abs(a(j,i))
20             max=abs(a(j,i));
21             m=j; % 寻找列最大值
22         end
23     end
24     if (m~=i)
25         for k=i:n
26             c(k)=a(i,k);
27             a(i,k)=a(m,k);
28             a(m,k)=c(k);
29         end
30         d=b(i);
31         b(i)=b(m);
32         b(m)=d;
33     end
34     for k=i+1:n
35         factor=a(k,i)/a(i,i);
36         for j=i+1:n
37             a(k,j)=a(k,j)-a(i,j)*factor;
38         end
39         b(k)=b(k)-b(i)*factor;
```

```

40     end
41 end
42 % 回带
43 x(n)=b(n)/a(n,n);
44 for i=n-1:-1:1
45     sum=b(i);
46     for j=i+1:n
47         sum=sum-a(i,j)*x(j);
48     end
49     x(i)=sum/a(i,i);
50 end
51
52 %% 误差分析
53 a=hilb(n);
54 a0=hilb(n);
55 a0(n,n)=a0(n,n)+1e-4;
56 b=ones(n,1);
57 r=b-a*x;
58 delta_x=x-x_real;
59 delta_a=a0-a;
60 ea_x=norm(delta_x)/norm(x_real);% 求解的相对误差
61 ea_a=norm(delta_a)/norm(a);% 求扰动相对误差
62 norm(delta_x)/norm(x_real+delta_x)
63 norm(a)*norm(inv(a))*ea_a
64 1/cond_value*norm(r)/norm(b)
65 cond_value*norm(r)/norm(b)

```

表 4: $n=6$ 有扰动增加 $1e-4$ 时三种方法的解

x_i	原始 Guass 消去法	Guass 列主元消去法	Gauss-Seidel 迭代法
1	4.844752054912968	4.844752054919485	4.844746909731582
2	-1.153425616474695e+02	-1.153425616476113e+02	-1.153424639791794e+02
3	5.973979315325770e+02	5.973979315332839e+02	5.973974949823572e+02
4	-1.033061150754008e+03	-1.033061150755301e+03	-1.033060438785369e+03
5	5.321937945986081e+02	5.321937945995361e+02	5.321933651002695e+02
6	39.122482160458030	39.122482160256840	39.122540571130420

我发现在有扰动的情况下，三种方法解出的结果近似相同，因此以 Guass 列

主元消去法为例讨论相对误差与条件数的关系。

表 5: 解相对误差与扰动相对误差

扰动情况	扰动相对误差 $\frac{\ \Delta x\ }{\ x\ }$	解相对误差 $\frac{\ \Delta x\ }{\ x\ }$
n=2 且增加	0.001271266686112	3.140184917367550e-16
n=2 且减少	0.001274321391806	3.140184917367550e-16
n=6 且增加	1.128446717557506	1.100590348649673e-10
n=6 且减少	1.161224483903645	1.100590348649673e-10
n=10 且增加	1.156077914610030	9.938069341139686e-05
n=10 且减少	1.156078429411258	9.938069341139686e-05

小结:

对于第一问, 病态方程的一大重要判定条件为条件数是否远大于 1。经过计算, n=2 时为非病态方程, n=6 和 10 时为病态方程。这一点可以从第三问中明显地体现出。当存在扰动时, n=2 的方程解相对误差很小, 而 n=6 和 10 时相对误差很大。

对于第二问, 我使用了三种方法对方程进行了求解, 迭代法的相对误差限 ε_t 设为 $5e-11$ 。从结果中可以看出, 原始的 Guass 消去法和 Guass 列主元消去法误差较小, 迭代法误差较大。这是因为迭代法的误差限设的较大, 但即使如此仍然迭代了 650 万次才收敛, 因此迭代法不适合本题。

对于第三问, 我计算了 n 在 2, 6, 10 时有扰动时的结果, 可以看出 n=2 时扰动相对误差较小, 而 n=6, 10 时扰动相对误差较大。这是因为 n=2 时条件数较小, 为非病态方程, 当 A 存在部分扰动时对结果影响不大; 而 n=6 和 10 时条件数较大, 为病态方程, A 在存在扰动时对解产生巨大影响。