线性代数方程组

浙江大学控制学院

本章内容

- 高斯消去法
- LU分解、特殊矩阵和矩阵求逆
- 误差分析、条件数
- 迭代方法

误差分析和方程组条件数

- 利用逆矩阵确定方程组是否病态的方法
  - 缩放系数矩阵A，使其每一行的最大元素为1。计算缩放后的逆矩阵，如果A^{-1}中有元素的值大于1几倍，则方程组是病态的。
  - 将逆矩阵与原矩阵相乘，检查结果是否接近1。如果不接近1，则方程组是病态的。
  - 求逆矩阵的逆矩阵，与原系数矩阵对比。如果不相等，则方程组是病态的。

向量和矩阵的范数

- 向量的范数
  - 三维欧氏空间中向量长度概念的推广
  - 定义

设对任意向量$x \in R^n$,按一定的规则有一实数与之对应,记为$\|x\|$,若$\|x\|$满足

1, $\|x\| \geq 0$, 且$\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$; (正定)

2, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, α为任意实数 (齐次)

3, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 对任意$x, y \in R^n$

(三角不等式)

则称 $\| x \|$ 为 向量x的范数

向量和矩阵的范数

- 几种向量范数
  - 向量的“2”范数（欧几里德范数）
    $$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$
  - 向量的“1”范数
    $$\|x\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$
  - 向量的“∞”范数（极大值范数或一致向量范数）
    $$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,\cdots|x_n|\}=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$$
  - 向量的“p”范数
    $$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

向量和矩阵的范数

- 矩阵的范数

定义：对任意n阶方阵A，按一定的规则有一实数与之对应，记为$\|A\|$。若$\|A\|$满足：

1 $\|A\| \geq 0$，且$\|A\| = 0$当且仅当$A = 0$；（正定）

2 $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$，$\alpha$为任意实数；（齐次）

3 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$，对任意$A, B$两个$n$阶方阵；（三角不等式）

4 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$；（矩阵乘法不等式，相容性条件）

则称$\|A\|$为矩阵A的范数

向量和矩阵的范数

- 几种矩阵范数
  - 矩阵的“2”范数（谱范数）
  - 矩阵的“1”范数（列和范数）
  - 矩阵的“∞”范数（行和范数）

$$\| A \|_2 = \left[\lambda_{\max} \left(A^T A \right) \right]^{1/2}$$

$$\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

向量和矩阵的范数

- 谱和谱半径
  - $A \in R^{n\times n}$的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n，
  - 称A的所有特征值的集合为A的谱
  - 称 $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ 为A的谱半径
- $\|A\|$ 为A的任意一种范数，有$\rho(A) \le \|A\|$
- （按行）严格对角占优阵
  - 如果A满足条件 $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

    即A的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和

病态方程组和矩阵条件数

- 例： $\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix}$ $\quad x = (1,1)^T$
- 若系数矩阵有微小扰动 $\Delta A = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 5\times 10^{-5}$
- 则 $\begin{bmatrix} 1.0001 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^{(1)} = (50, -48.5)^T$ $\quad \frac{\|\Delta x^{(1)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 49.5$
- 若右端有微小扰动 $\Delta b = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 5\times 10^{-5}$
- 则 $\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9899 \\ 1.9701 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^{(2)} = (2.97, -0.99)^T$ $\quad \frac{\|\Delta x^{(2)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.99$
- 若同时对系数矩阵和右端有扰动，则

$$\begin{bmatrix} 1.0001 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9899 \\ 1.9701 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^{(3)} = (148.5, -148.005)^T \quad \frac{\|\Delta x^{(3)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 149.005$$

病态方程组和矩阵条件数

- 扰动方程 $(A+\Delta A)x=b+\Delta b$
- 如果方程组的系数或常数项有微小改变时，解会发生很大的改变，则称这种方程组为“**病态**”的
- 扰动方程的解与原方程的解相对误差不大，称为**良态**方程
- 方程组的“**条件**”问题
- 一般说来，在用计算机解方程组时，实际上解的都是扰动方程，这是由于计算过程中不可避免地会产生舍入误差
- 对于良态问题，只要数值方法是稳定的，就可以得到较好的结果
- 而对于病态问题，即使算法是稳定的，其计算结果有时也会很坏

扰动方程组的误差界

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$$

- b的扰动 $A(x+\Delta x) = b+\Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$

  $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

  $\Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\| \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

- A的扰动 $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \Rightarrow \Delta x = -A^{-1}\Delta A(x+\Delta x) \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\| \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

- 同时扰动 $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b \Rightarrow \Delta x = (A+\Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta A x)$

  由恒等式 $(A+\Delta A)^{-1} = A^{-1}(I+\Delta A A^{-1})^{-1} \Rightarrow \Delta x = A^{-1}[I+\Delta A A^{-1}]^{-1}(\Delta b - \Delta A x)$

  假设 $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| \le 1$ $\qquad \|b\| \le \|A\|\|x\|$

  则 $\left\|A^{-1}[I+\Delta A A^{-1}]^{-1}\right\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|\Delta A\|\|A^{-1}\|} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1-\|A\|\|A^{-1}\|\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$

病态方程组和矩阵条件数

- 条件数
  - 设$A\in R^{n\times n}$，非奇异，$\mathrm{Cond}(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|$
  - $K(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2$ 称为谱条件数
- 条件数的性质
  - 对任何非奇异矩阵A，有$\mathrm{Cond}(A)\geq 1$。
  - 对任何非奇异矩阵A，非零常数c，有 $\mathrm{Cond}(cA) = \mathrm{Cond}(A)$
  - 若P为正交矩阵，则$K(P)=1$，且$K(PA)=K(AP)=K(A)$
  - 若$A=A^T$，$K(A)=\dfrac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$

病态方程组和矩阵条件数

- 线性方程组$Ax=b$解的相对误差直接与A的条件数相关
- A的条件数Cond(A)相对大(>>1)，称$Ax=b$是病态方程组/坏条件，或A是病态的；当A的条件数Cond(A)相对小，称$Ax=b$是良态方程组/好条件，或A是良态的。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cond}(A)_2 = K(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = \frac{1.98005}{0.00005} = 39206 >> 1$$

方程是病态方程

矩阵条件数

- Hilbert矩阵是一个著名的病态矩阵，它是一个对称正定矩阵，当$n \geq 3$时，Hilbert矩阵是病态矩阵
- n越大，条件数越大
- Matlab中hilb()构造hilbert矩阵，invhilb()可求精确逆

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

相对误差的事后估计（近似解可靠性判别）

- 设$Ax=b$，A为非奇异矩阵，x为精确解，$\tilde{x}$ 为计算解，残余向量$r=b-A\tilde{x}$
- 则近似解的相对误差估计

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|}\le\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le cond(A)\frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|}$$

  - Cond(A)越小，相对误差越小
  - 近似解的精度不仅依赖于残余向量r，也与矩阵A的条件数有关

相对误差的事后估计

$$A=\begin{bmatrix}6 & 13 & -17\\ 13 & 29 & -38\\ -17 & -38 & 50\end{bmatrix}\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}6 & -4 & -1\\ -4 & 11 & 7\\ -1 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

$$cond(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=105\times 22=2310$$

- 假定在求解$Ax=b$的过程中，得到的解满足 $\|r\|\le 0.001$
- 绝对误差上界 $\|\Delta x\|\le\|A^{-1}\|\|r\|\le 22\times 0.001=0.022$
- 若给定$\|b\|=4$，相对误差上界

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le cond(A)\frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|}=2310\times\frac{0.001}{4}=0.5775$$

病态方程组的判别

- 当A的行列式值相对小，或A某些行/列近似线性相关，方程组可能病态
- 若用选主元消去法求解$Ax=b$，在A消去中出现小主元，方程组可能病态
- 当A元素数量级相差很大且无一定规则，方程组可能病态
- 估计条件数，若条件数较大，则方程组病态

迭代求精技术

- 设x为精确解，$\tilde{x}_1$为得到的近似解，则 $x = \tilde{x}_1 + \Delta x_1$
- 残余向量 $r_1 = b - A\tilde{x}_1$

$$\Downarrow$$

$$Ax = A\tilde{x}_1 + A\Delta x_1$$

$$A\Delta x_1 = r_1$$

- 通过求解上述方程，可以得到修正因子 Δx_1
- 由于舍入误差的影响， 同样 $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + \Delta x_1$ 不会是精确解，可从 $\tilde{x}_2$ 出发重复以上步骤
- 对于LU分解，只需计算残余向量再进行回代，LU分解的目的就是高效求解右边常数向量不同的方程组，采用迭代求精非常有效
- 当$Ax=b$不过分病态时，迭代求精是较成功的提高近似解精度的方法

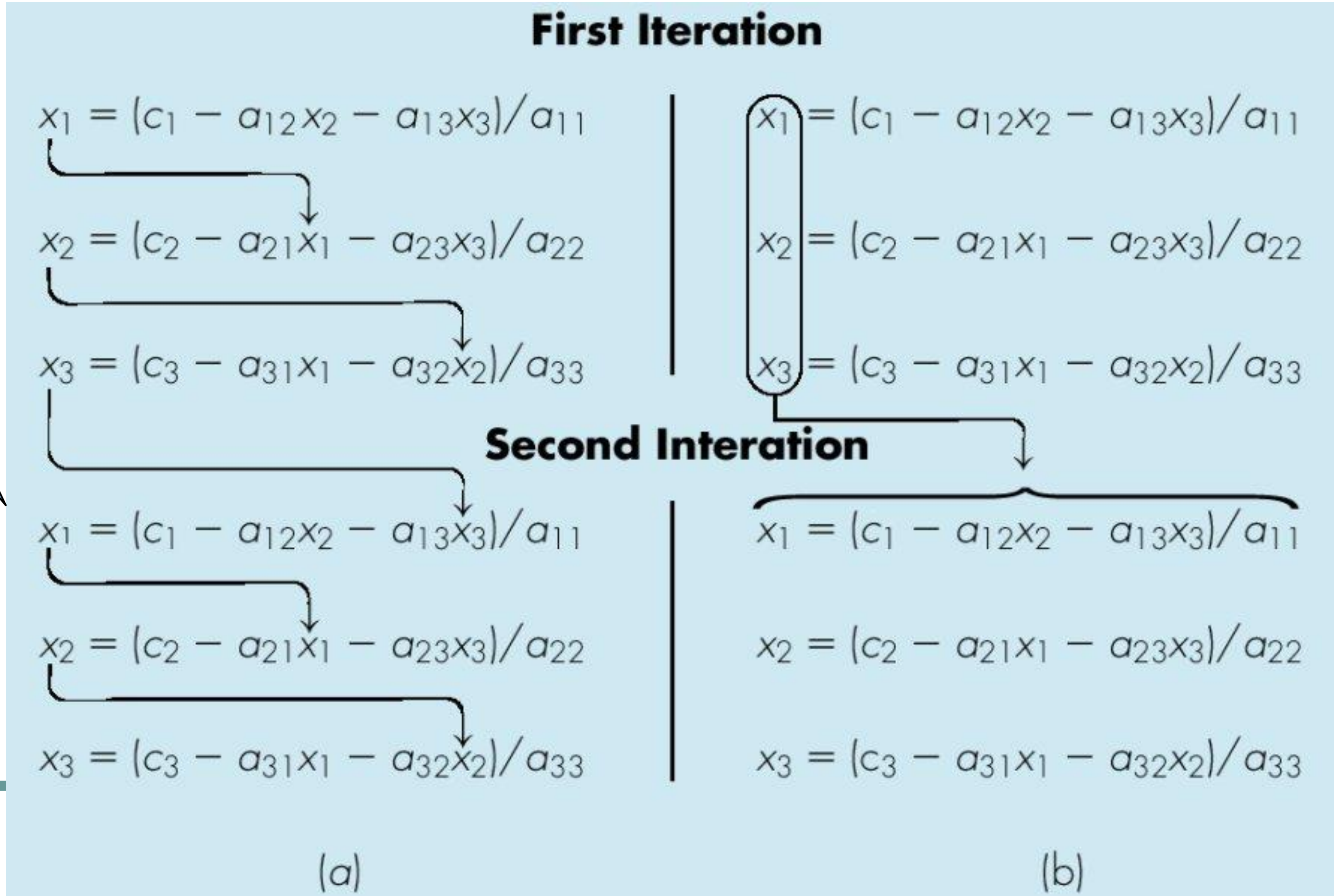
本章内容

- 高斯消去法
- LU分解、特殊矩阵和矩阵求逆
- 误差分析、条件数
- 迭代方法

迭代法的思想

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\
x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}
\end{aligned}
$$

高斯-赛得尔方法（异步迭代法）



雅可比方法（同步迭代法）

迭代法

$Ax = b$ $\Longrightarrow$ $x = Gx + f$

- 任取初始向量 $X^{(0)}$，作

$$X^{(1)} = GX^{(0)} + f$$

$$X^{(k+1)} = GX^{(k)} + f$$

- 构造向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 求方程的近似解的方法，称为一阶定常迭代法，G为该迭代法的迭代矩阵。
- 如果对任意取初始近似$\boldsymbol{x}^{(0)}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ ，称迭代法为**收敛**，否则称迭代法为**发散**。若迭代法收敛，则称$\boldsymbol{x}^{(k)}$为第k步迭代得到方程组的近似解。

迭代法

- 问题
  - 构造迭代方法
  - 迭代的收敛性和收敛速度

基本迭代方法

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}=D-L-U$$

- A分裂为$A=M-N$
- 分裂阵M
  - 可选择的非奇异阵
  - $Mx=d$易于求解
  - M选为A的某种近似
- $Ax=b \Longrightarrow Mx=Nx+b \Longrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$
- 迭代：
  - $x^{(0)}$为初始向量
  - $x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b$
- 选取不同的M阵就得到不同迭代法。

雅可比(Jacobi)迭代法（同步迭代法）

- 设A为非奇异矩阵，且$a_{ii}\neq 0$，选取 $M=D$ 和 $N=D-A=L+U$
- $x^{(k+1)}=Jx^{(k)}+f$　　$J=D^{-1}(L+U)$　　$f=D^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

(1)雅可比迭代法，每迭代一次主要是计算一次矩阵乘向量，即$Jx^{(k)}$。

(2)计算过程中，原始数据A始终不变。

(3)计算中需要**两组工作单元**来保存$x^{(k)}$及$x^{(k+1)}$。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法（异步迭代法）

- 选取 M=D-L 和 N=M-A=U
- $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$　　　$G=(D-L)^{-1}U$　　$f=(D-L)^{-1}b$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

(1)G-S迭代法每迭代一次主要是计算一次矩阵乘向量。

(2)计算$x^{(k+1)}$的第i个分量$x_i^{(k+1)}$时，利用已计算出的最新分量$x_j^{(k+1)}(j=1,\ldots,i-1)$，因此，计算中只需要**一组工作单元**来保存$x^{(k)}$或$x^{(k+1)}$。

迭代终止准则

- 近似相对百分误差

$$\left|\varepsilon_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right| \times 100\%$$

- 对所有的i，近似相对百分误差小于预设的ε_s时，迭代终止
- 其他的终止准则 $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|$

迭代法——例

- 求解线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Jacobi迭代

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases}$$

- G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_2^{(k+1)} + 2 \end{cases}$$

迭代法——例

G-S方法比Jacobi方法收敛快。

迭代次数	Jacobi方法						G-S方法					
	x_1	$\lvert\varepsilon_a\rvert_1$	x_2	$\lvert\varepsilon_a\rvert_2$	x_3	$\lvert\varepsilon_a\rvert_3$	x_1	$\lvert\varepsilon_a\rvert_1$	x_2	$\lvert\varepsilon_a\rvert_2$	x_3	$\lvert\varepsilon_a\rvert_3$
0	0		0		0		0		0		0	
1	0.3	100	1.5	100	2	100	0.3	100	1.56	100	2.684	100
2	0.8	62.5	1.76	14.7727	2.66	24.812	0.8804	65.9246	1.9445	19.7729	2.9539	9.1362
3	0.918	12.854	1.926	8.6189	2.864	7.1229	0.9843	10.5542	1.9922	2.3975	2.9938	1.3322
4	0.9716	5.5167	1.97	2.2335	2.954	3.0467	0.9997	1.3571	1.9989	0.335	2.9991	0.1796
5	0.9894	1.7991	1.9897	0.9911	2.9823	0.9496	1	0.1879	1.9999	0.0457	2.9999	0.0247
6	0.9962	0.6802	1.9961	0.3202	2.9938	0.3824	1	0.0257	2	0.0063	3	0.0034
7	0.9986	9.2427	1.9986	0.1251	2.9977	0.1305	1	0.0035	2	0.0009	3	0.0005
8	0.9995	0.0892	1.9995	0.0438	2.9992	0.0495						
9	0.9998	0.0324	1.9998	0.0163	2.9997	0.0176						
10	0.9999	0.0118	1.9999	0.0059	2.9999	0.0065						

迭代法的收敛性

- $x=Gx+f$ $x^*=Gx^*+f$
- 迭代$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$
- 引入误差向量$e^{(k)}=x^{(k)}-x^*$
- 误差向量的递推公式： $e^{(k+1)}=Ge^{(k)}$
- 于是$e^{(k)}=Ge^{(k-1)}=G^2e^{(k-2)}=\ldots=G^ke^{(0)}$ （$e^{(0)}=x^{(0)}-x^*$）

$$\left\|e^{(k)}\right\|=\left\|G^k e^{(0)}\right\|\le\left\|G\right\|^k\left\|e^{(0)}\right\|=q^k\left\|e^{(0)}\right\|$$

- 定理：设$G\in R^{n\times n}$，则$G^k\to 0$（零矩阵）（当$k\to\infty$时）的充要条件为G所有特征值满足$|\lambda_i|<1$（$i=1,2,\ldots,n$）或G的谱半径$\rho(G)<1$

迭代法的收敛性

- **一阶定常迭代法收敛性的基本定理**

  设有方程组$x=Gx+f$，有迭代法$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$，则对任选初始向量$x^{(0)}$，迭代法收敛的充要条件是$\rho(G)<1$。

- 迭代收敛的**充分**条件

  设有方程组$x=Gx+f$及一阶定常迭代法$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$，如果有G的某种范数$\|G\|_r=q<1$，则

  - 迭代法收敛；
  - 误差估计 $\left\|x^*-x^{(k)}\right\| \le \dfrac{q}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| < \dfrac{1}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$ 事后估计

    $\left\|x^*-x^{(k)}\right\| \le \dfrac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$ 事前估计

  - 当q≈1时，迭代法收敛缓慢。

  q越小收敛速度越快；可以事先估计保证误差$\|x^*-x^{(k)}\|_\infty<\varepsilon$所需要的迭代次数。

迭代法的收敛性

matlab中计算特征值：eig()

- 推论：
  - Jacobi迭代法收敛的充要条件是$\rho(J)<1$　$(J=D^{-1}(L+U))$
  - G-S迭代法收敛的充要条件是$\rho(G)<1$　$(G=(D-L)^{-1}U)$
- 例1：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.8\\ 0.8 & 1 & 0.8\\ 0.8 & 0.8 & 1\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}0 & -0.8 & -0.8\\ -0.8 & 0 & -0.8\\ -0.8 & -0.8 & 0\end{bmatrix}$$

$\rho(J)=1.6>1$ Jacobi迭代不收敛

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.8 & 1 & 0\\ 0.8 & 0.8 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -0.8 & -0.8\\ 0 & 0 & -0.8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -0.8 & -0.8\\ 0 & 0.64 & -0.16\\ 0 & 0.128 & 0.768\end{bmatrix}$$

$\rho(G)<1$ G-S迭代收敛

- 例2：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$\rho(J)<1$ Jacobi迭代收敛

$$G=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$\rho(G)>1$ G-S迭代不收敛

对于给定的线性方程组，用雅可比法和G-S法求解时可能都收敛或都不收敛，也可能一个收敛另一个不收敛。

迭代法的收敛性

- 如果A为（按行）严格对角占优阵，则$Ax=b$的Jacobi方法和G-S方法都收敛。
  - 实际上，如果A为严格对角占优阵，可以证明， $\|J\|_\infty<1$并且$\|G\|_\infty<1$，因此，Jacobi方法和G-S方法都收敛。
  - G-S迭代法比Jacobi迭代法收敛得快
- 如果A为对称正定矩阵，G-S迭代收敛。
- 例：判断解$Ax=b$的Jacobi方法和G-S方法的收敛性

$$A=\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|a_{11}|=10>|-2|+|-1|$$

$$|a_{22}|=10>|-2|+|-1|$$

$$|a_{33}|=15>|-1|+|-2|$$

A是严格对角占优矩阵，两种方法都收敛

迭代法的收敛性

- 例：用G-S方法求解

$$\begin{aligned} 3x_1+7x_2+13x_3&=76\\ x_1+5x_2+3x_3&=28\\ 12x_1+3x_2-5x_3&=1 \end{aligned}$$

不收敛！

Iteration	x_1	$\lvert\varepsilon_a\rvert_1$	x_2	$\lvert\varepsilon_a\rvert_2$	x_3	$\lvert\varepsilon_a\rvert_3$
1	21.000	110.71	0.80000	100.00	5.0680	98.027
2	-196.15	109.83	14.421	94.453	-462.30	110.96
3	-1995.0	109.90	-116.02	112.43	4718.1	109.80
4	-20149	109.89	1204.6	109.63	-47636	109.90
5	$2.0364\text{x}10^5$	109.90	-12140	109.92	$4.8144\text{x}10^5$	109.89
6	$-2.0579\text{x}10^5$	1.0990	$1.2272\text{x}10^5$	109.89	$-4.8653\text{x}10^6$	109.89

$$[A]=\begin{bmatrix}3&7&13\\1&5&3\\12&3&-5\end{bmatrix} \Rightarrow [A]=\begin{bmatrix}12&3&-5\\1&5&3\\3&7&13\end{bmatrix}$$

不是所有的矩阵都可以通过重排变为严格对角占优阵

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=3\\ 2x_1+3x_2+4x_3&=9\\ x_1+7x_2+x_3&=9 \end{aligned}$$

逐次超松弛迭代法(SOR，Successive Over-Relaxation)

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

G-S方法得到的解

- 高斯-赛得尔方法的基础上进行修改

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})$$

$0<\omega<2$，称为松弛因子

- $\omega=1$，SOR方法即为G-S方法
- $0<\omega<1$，结果为当前迭代结果和上一次迭代结果的加权平均，称为低松弛方法。用于使得非收敛方程组收敛或者克服振荡加速收敛。
- $1<\omega<2$，超松弛方法
  - 隐含假设：新值沿正确方向向真实解移动，但是移动的速度慢
  - 用于加速已知是收敛的方程组的收敛速度
  - 根据经验确定ω值

SOR——例

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

精确解为$x^*=[-1\ -1\ -1\ -1]^T$，初始向量$x^{(0)}=[0\ 0\ 0\ 0]^T$

松弛因子	满足$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\|<10^{-5}$的迭代次数
1.0	22
1.1	17
1.2	12
1.3	11
1.4	14
1.5	17
1.6	23
1.7	33
1.8	53
1.9	107

最佳松弛因子

SOR——收敛性

- SOR的矩阵形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

***M*=(*D*- ω *L*)/ω**

$$\Downarrow$$

$$(D-\omega L)x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)D + \omega U\right]x^{(k)} + \omega b \Rightarrow$$

$$x^{(k+1)} = G\omega x^{(k)} + f$$

$$G\omega = (D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]$$

$$f = \omega(D-\omega L)^{-1} b$$

- SOR法收敛的充要条件是$\rho(G\omega)<1$
- 如果A为对称正定阵，且$0<\omega<2$，则解$Ax=b$的SOR法收敛。

MATLAB中的函数

矩阵分析		线性方程组	
函数	描述	函数	描述
cond	计算矩阵条件数	右除/和左除\	help slash
norm	计算矩阵或向量的范数	lu	lu分解
inv	矩阵求逆	chol	cholesky分解
pinv	求矩阵伪逆		
det	计算行列式的值		
rank	求秩		
eig，eigs	矩阵特征值		

第三章 总结——各种方法

<table>
<tr><th>方法</th><th>稳定性</th><th>精度</th><th>应用范围</th><th>编程难度</th><th>备注</th></tr>
<tr><td>图解法</td><td>—</td><td>差</td><td>受限</td><td>—</td><td>比数值方法耗时</td></tr>
<tr><td>Cramer法则</td><td>—</td><td>受舍入误差影响</td><td>受限</td><td>—</td><td>方程数多于3个时计算复杂</td></tr>
<tr><td>列主元高斯消去</td><td rowspan="2">—</td><td rowspan="2">受舍入误差影响</td><td rowspan="2">一般，适用于方程组系数矩阵为低阶稠密矩阵、带状矩阵</td><td rowspan="2">中等，计算量较小，存储量较大</td><td></td></tr>
<tr><td>LU分解</td><td>实现消去法；进行矩阵求逆计算</td></tr>
<tr><td>迭代法(Jacobi和G-S)</td><td>可能不收敛</td><td>优秀</td><td>收敛时，适用于大型稀疏线性方程组</td><td>较简单，计算量有时较大，存储量较小</td><td></td></tr>
</table>

第三章 总结——重要内容

- 直接法
  - 高斯消去、LU分解
- 迭代
  - Jacobi、Gauss-Seidel、SOR
- 具体算法、问题及改进
- 范数、条件数、病态方程组