第三次上机作业

问题叙述:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 对 $n = 2, 6, 10$ 分别计算 A 的条件数，并判断方程组 $AX = b$ 是否为病态方程组？(可选用任何一种范数)
- 对 $n = 6$，采用原始 Guass 消去法、Guass 列主元消去法、Gauss-Seidel 迭代法求解方程组 $AX = b$。(迭代法初值 $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$)
- 若 A 的最后一个元素有扰动 10^{-4}，再求解结果；计算扰动相对误差与解的相对误差，分析它们与条件数的关系。

问题解决过程:

第一问:

```
%% problem1
clc , clear
cond ( hilb (2) )
cond ( hilb (6) )
cond ( hilb (10) )
```

使用 cond() 函数通过“2”范数计算谱条件数。

表 1: 第一问

阶数	条件数	是否为病态方程
1	19.281470067903971	否
2	1.495105864141869e+07	是
3	1.602490962516758e+13	是

第二问:

图 1: 原始 Gauss 消去法原理

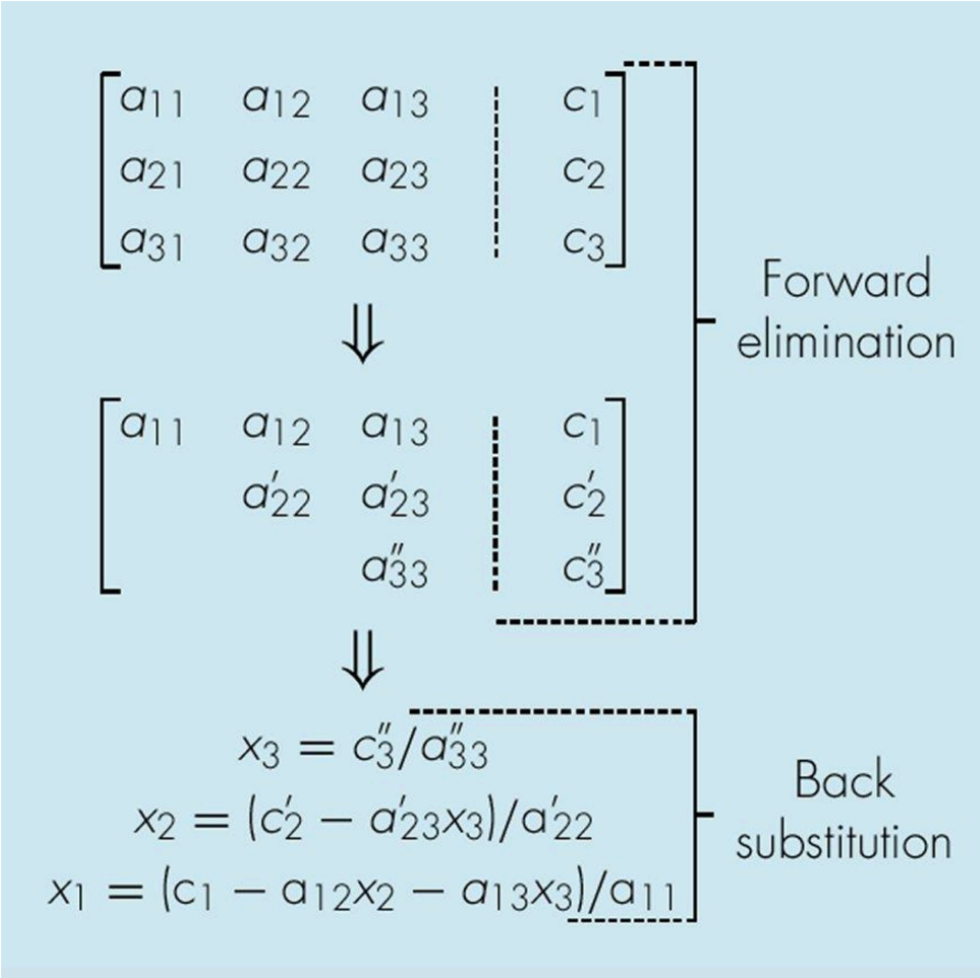


图 2: 列主元 Gauss 消去法原理

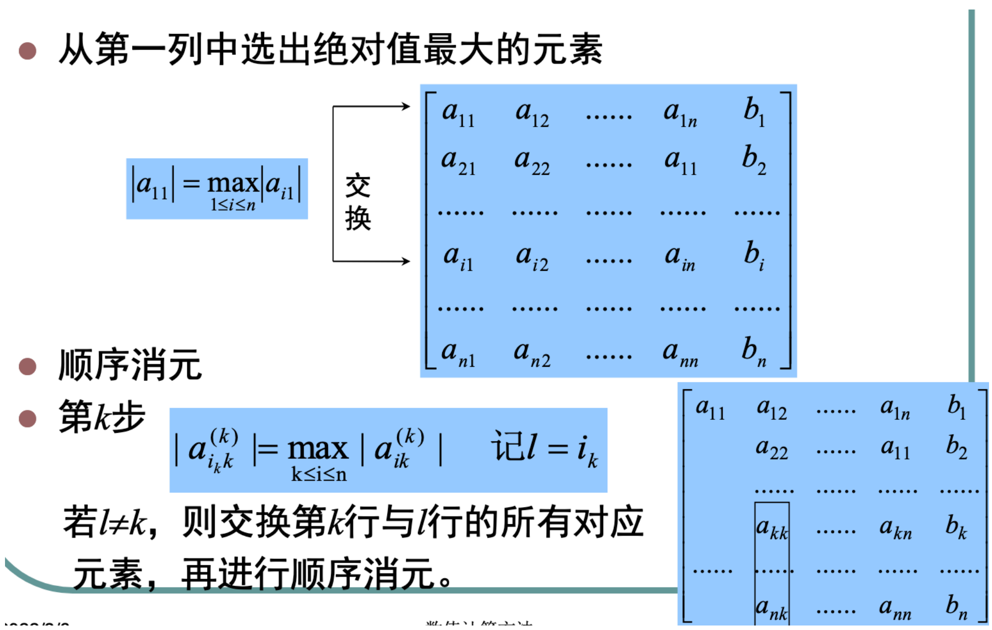
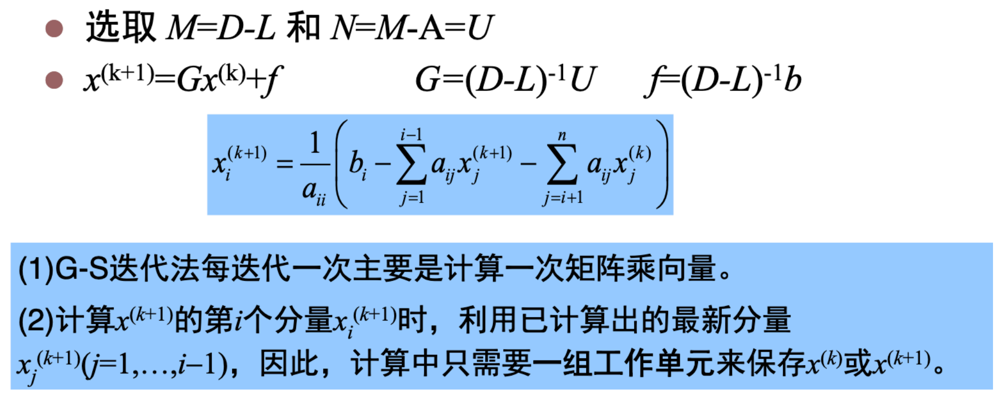


图 3: Gauss-Seide 迭代法原理




```
% problem2（设置断点调试）
clc,clear
n=6;
a=hilb(n);
b=ones(n,1);
x_real=invhilb(6)*b;

%% 原始Gauss消去法
a=hilb(n);
b=ones(n,1);
% 消元
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        factor=a(i,k)/a(k,k);
        for j=k+1:n
            a(i,j)=a(i,j)-factor*a(k,j);
        end
        b(i)=b(i)-factor*b(k);
    end
end
% 回带
x(n)=b(n)/a(n,n);
for i=n-1:-1:1
    sum=b(i);
    for j=i+1:n
        sum=sum-a(i,j)*x(j);
```

```
    end
    x(i)=sum/a(i,i);
end

%% Guass列主元消去法
a=hilb(n);
b=ones(n,1);
% 消元
for i=1:n-1
    max=abs(a(i,i));
    m=i;
    for j=i+1:n
        if max<abs(a(j,i))
            max=abs(a(j,i));
            m=j; % 寻找列最大值
        end
    end
    if(m~=i)
        for k=i:n
            c(k)=a(i,k);
            a(i,k)=a(m,k);
            a(m,k)=c(k);
        end
        d=b(i);
        b(i)=b(m);
        b(m)=d;
    end
    for k=i+1:n
        factor=a(k,i)/a(i,i);
        for j=i+1:n
            a(k,j)=a(k,j)-a(i,j)*factor;
        end
        b(k)=b(k)-b(i)*factor;
    end
end
% 回带
x(n)=b(n)/a(n,n);
```

```
for i=n-1:-1:1
    sum=b(i);
    for j=i+1:n
        sum=sum-a(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=sum/a(i,i);
end

%% Gauss-Seide迭代法
clear max;
a=hilb(n);
b=ones(n,1);
x0=ones(n,1);
x=zeros(n,1);% 初值全为0
k=0;
% 第一次迭代
for i=1:n
    x(i)=b(i);
    for j=1:i-1
        x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
    end
    for j=i+1:n
        x(i)=x(i)-a(i,j)*x0(j);
    end
    x(i)=x(i)/a(i,i);
end
% 计算相对误差
for i=1:n
    ea(i)=abs((x(i)-x0(i))/x(i));
end
% 迭代
while max(ea)>5e-11
    k=k+1;
    x0=x;
    for i=1:n
        x(i)=b(i);
        for j=1:i-1
```

```
                x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
            end
            for j=i+1:n
                x(i)=x(i)-a(i,j)*x0(j);
            end
            x(i)=x(i)/a(i,i);
        end
        for i=1:n
            ea(i)=abs((x(i)-x0(i))/x(i));
        end
end
```

利用 $x = invhild(6) * b$ 可以算出解的真值 $[-6, 210, -1680, , 5040, -6300, 2772]$，并使各算法与之比较。

表 2: 三种方法的解

x_i	原始 Guass 消去法	Guass 列主元消去法	Gauss-Seidel 迭代法
1	-6.000000000905970	-6.000000001120498	-5.999823400761557
2	2.100000000270427e+02	2.100000000329495e+02	2.099950627154710e+02
3	-1.680000000187955e+03	-1.680000000226683e+03	-1.679967067813866e+03
4	5.040000000497923e+03	5.040000000596050e+03	5.039915227977793e+03
5	-6.300000000556981e+03	-6.300000000662943e+03	-6.299907173971328e+03
6	2.772000000221711e+03	2.772000000262698e+03	2.771963654686595e+03

表 3: 三种方法的解的与真值误差

x_i	原始 Guass 消去法	Guass 列主元消去法	Gauss-Seidel 迭代法
1	1.509950683005930e-10	1.867495787640413e-10	2.943320640724778e-05
2	1.287749758679032e-10	1.569023175934923e-10	2.351087870969033e-05
3	1.118779989285810e-10	1.349304414231613e-10	1.960249174647374e-05
4	9.879422289068027e-11	1.182639058993479e-10	1.681984567604949e-05
5	8.840967013153233e-11	1.052291144520813e-10	1.473429026537772e-05
6	7.998238146825173e-11	9.476856048343888e-11	1.311158492245166e-05

第三问:

```
% problem3 (设置断点调试)
clc,clear
```

```
n=6;
a=hilb(n);
b=ones(n,1);
x_real=invhilb(n)*b;
cond_value=cond(a);

%% Guass列主元消去法
a=hilb(n);
a(n,n)=a(n,n)+1e-4;
b=ones(n,1);
x=zeros(n,1);
% 消元
for i=1:n-1
    max=abs(a(i,i));
    m=i;
    for j=i+1:n
        if max<abs(a(j,i))
            max=abs(a(j,i));
            m=j; % 寻找列最大值
        end
    end
    if(m~=i)
        for k=i:n
            c(k)=a(i,k);
            a(i,k)=a(m,k);
            a(m,k)=c(k);
        end
        d=b(i);
        b(i)=b(m);
        b(m)=d;
    end
    for k=i+1:n
        factor=a(k,i)/a(i,i);
        for j=i+1:n
            a(k,j)=a(k,j)-a(i,j)*factor;
        end
        b(k)=b(k)-b(i)*factor;
```

```
        end
end
% 回带
x(n)=b(n)/a(n,n);
for i=n-1:-1:1
        sum=b(i);
        for j=i+1:n
                sum=sum-a(i,j)*x(j);
        end
        x(i)=sum/a(i,i);
end

%% 误差分析
a=hilb(n);
a0=hilb(n);
a0(n,n)=a0(n,n)+1e-4;
b=ones(n,1);
r=b-a*x;
delta_x=x-x_real;
delta_a=a0-a;
ea_x=norm(delta_x)/norm(x_real);% 求解的相对误差
ea_a=norm(delta_a)/norm(a);% 求扰动相对误差
norm(delta_x)/norm(x_real+delta_x)
norm(a)*norm(inv(a))*ea_a
1/cond_value*norm(r)/norm(b)
cond_value*norm(r)/norm(b)
```

表 4: n=6 有扰动增加 1e-4 时三种方法的解

x_i	原始 Guass 消去法	Guass 列主元消去法	Gauss-Seidel 迭代法
1	4.844752054912968	4.844752054919485	4.844746909731582
2	-1.153425616474695e+02	-1.153425616476113e+02	-1.153424639791794e+02
3	5.973979315325770e+02	5.973979315332839e+02	5.973974949823572e+02
4	-1.033061150754008e+03	-1.033061150755301e+03	-1.033060438785369e+03
5	5.321937945986081e+02	5.321937945995361e+02	5.321933651002695e+02
6	39.122482160458030	39.122482160256840	39.122540571130420

我发现在有扰动的情况下，三种方法解出的结果近似相同，因此以 Guass 列

主元消去法为例讨论相对误差与条件数的关系。

表 5: 解相对误差与扰动相对误差

扰动情况	扰动相对误差 $\frac{\lVert\Delta x\rVert}{\lVert x\rVert}$	解相对误差 $\frac{\lVert\Delta x\rVert}{\lVert x\rVert}$
n=2 且增加	0.001271266686112	3.140184917367550e-16
n=2 且减少	0.001274321391806	3.140184917367550e-16
n=6 且增加	1.128446717557506	1.100590348649673e-10
n=6 且减少	1.161224483903645	1.100590348649673e-10
n=10 且增加	1.156077914610030	9.938069341139686e-05
n=10 且减少	1.156078429411258	9.938069341139686e-05

小结：

对于第一问，病态方程的一大重要判定条件为条件数是否远大于 1。经过计算，n=2 时为非病态方程，n=6 和 10 时为病态方程。这一点可以从第三问中明显地体现出。当存在扰动时，n=2 的方程解相对误差很小，而 n=6 和 10 时相对误差很大。

对于第二问，我使用了三种方法对方程进行了求解，迭代法的相对误差限 ε_t 设为 5e-11。从结果中可以看出，原始的 Guass 消去法和 Guass 列主元消去法误差较小，迭代法误差较大。这是因为迭代法的误差限设的较大，但即使如此仍然迭代了 650 万次才收敛，因此迭代法不适合本题。

对于第三问，我计算了 n 在 2，6，10 时有扰动时的结果，可以看出 n=2 时扰动相对误差较小，而 n=6，10 时扰动相对误差较大。这是因为 n=2 时条件数较小，为非病态方程，当 A 存在部分扰动时对结果影响不大；而 n=6 和 10 时条件数较大，为病态方程，A 在存在扰动时对解产生巨大影响。