问题一

问题叙述

用 Newton-Raphson 方法和割线法求方程 $x\tan(x)=2$ 的位于区间 $[0,\pi/2]$ 的一个根，要求相对误差限为 0.01%，并画图比较两种方法的收敛速度。

问题分析

题中：$f(x)=x\tan(x)-2$，$f'(x)=\tan(x)+\dfrac{x}{\cos^2(x)}$

Newton-Raphson 方法：寻找 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 的不动点，迭代公式为：

$x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_{i+1})}$，终止条件为 $\varepsilon_a=\left|\dfrac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}}\right|\times 100\%<0.01\%$

割线法：迭代公式为：$x_{i+1}=x_i-f(x_i)\dfrac{x_i-x_{i-1}}{f(x_i)-f(x_{i+1})}$，终止条件为

$\varepsilon_a=\left|\dfrac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}}\right|\times 100\%<0.01\%$

关于收敛速度，我们可以画出相对误差与迭代次数的关系，并将两个曲线进行比较。

MATLAB 程序

```
clear;
clc;
format long e;
p(1)=2*pi/5;
e_p=0.0001;
x1(1)=1;
for k=2:100
    p(k)=p(k-1)-f(p(k-1))/df(p(k-1));
    x1(k)=k;
    err1=abs(p(k)-p(k-1));
    e_a1=err1/abs(p(k));
    if(e_a1<e_p),break,end
end
p(k)
for i=1:k
    e1(i)=abs(p(i)-p(k))/p(k);
```

```
end
s(1)=2*pi/5;
s(2)=3*pi/10;
x2(1)=1;
x2(2)=2;
for j=3:100

  s(j)=s(j-1)-f(s(j-1))*(s(j-1)-s(j-2))/(f(s(j-1))-f(s
  (j-2)));
   x2(j)=j;
   err2=abs(s(j)-s(j-1));
   e_a2=err2/abs(s(j));
   if(e_a2<e_p),break,end
end
s(j)
for i=1:j
   e2(i)=abs(s(i)-s(j))/s(j);
end
plot(x1,e1,x2,e2);
xlabel('迭代次数');

ylabel('相对误差');

legend('Newton-Raphson','割线法');
function y=f(x)
   y=x*tan(x)-2;
end
function y=df(x)
   y=tan(x)+x/(cos(x)*cos(x));
end
```

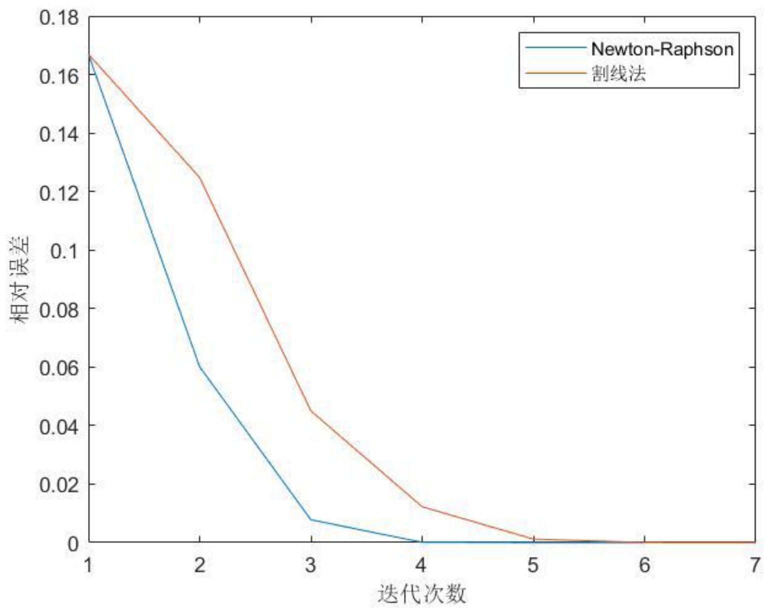
结果分析

运行结果：

Newton-Raphson 方法：1.076873986311807

割线法：1.076874074431557

图像：



分析比较可知，第一种方法收敛稍快一些，总体两者相差不多。

问题二

问题叙述

用高斯消去法求解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

问题分析

用第一个方程主元的系数可以消去其他方程的关于主元的部分，分别有两步：消去过程和回代过程。

MATLAB 程序

```
clear;
clc;
format long e
n=3;
a=[2 1 4
   3 2 1
   1 3 3];
b=[16 10 16];
b=b';
```

```
    for k=1:n-1
        for i=k+1:n
            factor=a(i,k)/a(k,k);
            for j=k+1:n
                a(i,j)=a(i,j)-factor*a(k,j);
            end
            b(i)=b(i)-factor*b(k);
        end
    end
    if a(n,n)==0
        disp('无解');
    else
        x(n)=b(n)/a(n,n);
        for i=n-1:-1:1
            sum=b(i);
            for j=i+1:n
                sum=sum-a(i,j)*x(j);
            end
            x(i)=sum/a(i,i);
        end
    end
    x
```

结果

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

观察方程可以看出这是一个良态方程，因此用普通的高斯消去法不会产生很大的误差，结果准确。