简单

博弈入门

GAME

by foreverzeus

QQ:121891231

Mail:foreverzeus@gmail.com

引入

取石子游戏

- 有两堆石子
- 数量分别是p1 p2
- 有游戏者A和B
- 规定A先拿石子,每次可以从一堆中取石子取任意石子,但不能不取或者从两堆中取
- 问最后谁胜利

取石子游戏

- 有两堆石子
- 数量分别是p1 p2
- 有游戏者A和B
- 规定A先拿石子,每次可以从一堆中取石子,最多去m个，但不能不取或者从两堆中取
- 问最后谁胜利

首先明确我们这里提到的东西

- 这里涉及的是一个组合博弈游戏
- 游戏规则：
- 1. 有两个游戏者，游戏规则下一定有胜利者，无平局
- 2. 有一个可能的游戏状态集。这个状态集通常是有限的。
- 3.游戏是公平的
- 4.双方轮流执行而且每次执行一定会改变局面,而且每次决策,游戏者都会选择一个对自己最有利的策略。故也可以得知游戏一定会结束。

- 5.胜负的定义通常有两种，谁无法做决策了谁失败,或者谁最后做决策的谁失败
- 6.如果换成图来看 那么可以看成是一个无环的有向图

最优决策下

- 两个概念：
- 必胜局面S　指的是先手必胜
- 必败局面T　指的是先手必败
- 关系：
- 必胜局面一定存在一个决策使得S进入T
- 必败局面不管做什么决策都会使得T进入S
- 为什么这么说？

几种解题策略：

1：根据游戏规则发现规律

2：根据局面的定义搜索

3：利用sg函数求解

zoj 1024 Calendar Game

http://acm.zju.edu.cn/onlinejudge/showProblem.do?problemCode=1024

- 可以有两种策略
- 1:跳到该日期的下一个日期(即是按顺序前进1)
- 2:(如果目标日期合法)跳到下一个月的该日期（比如a b c则跳到 a b+1 c)
- 胜利条件:若谁先刚好到达2001.11.04则胜利
- >>A player wins the game when he/she exactly reaches the date of November 4, 2001. If a player moves to a date after November 4, 2001, he/she looses the game.

寻找必败态

1：结束状态的性质由规则决定。
2：一个非结束状态，如果它能到达任何必败状态，那么它是必胜状态，否则它就是必败状态。

对于当前局面S 若其后续局面S1 ,S2存在必败局面 则当前为必胜局面;

```
int cal(int year,int mon,int day){
    if(2001.11.4)  return 0;
    if(2001.11.3)  return 1;
    if(2001.10.4)  return 1;
    if(合法&&下一个日期1==0) 当前为1 返回1
    if(合法&&下一个日期2==0)当前为1 返回1
    当前为0 返回0
}
```

搜索是万能的,但时间和空间却是有限的

bnu 4098 取石子游戏
http://acm.cist.bnu.edu.cn/contest/problem_show.php?pid=4098 (要AC的前提。。。。校园网)

规则：一堆石子N，每次只能从中取la到lb个,如果最后一次少于la个,也要把他取完
最后一次是谁取的谁就输了
不超过100000行，每行三个正整数N，P，Q。(0<N,P,Q<65536).

- 根据寻找必败态的原则：
- 分析前几个局面
- S1必败态：1~la 此时先手者一定要把它取完 先手者必败
- S2必胜态：la+1~la+lb 此时先手者很明显存在策略使得S2进入S1局面 故先手者必胜
- S3必败态：la+lb+1~la+lb+la 此时先手者最少能取la个最多去lb个 此时剩下la+1~la+lb 进入必胜态 即是不管怎么决策都进入必胜态 故当前为必败态
- S4必胜态：la+lb+la+1~la+lb+la+lb同理存在策略使得，，，
- 于是可以初步得出结论：
- 必胜态：若存在n在区间(k为正整数)
- (la+1)+k*(la+lb)~(k+1)(la+lb) 则n为必胜
- 则只要判断 （n-1）%（la+lb）余数介于la到la+lb之间则满足条件

重新看回这个问题

- 有两堆石子
- 数量分别是p1 p2
- 有游戏者A和B
- 规定A先拿石子,每次可以从一堆中取石子取任意石子,但不能不取或者从两堆中取
- 问最后谁胜利

分析：

- S1:若只剩下一堆石子
- S2:若只剩下两堆石子

加了条件呢？每次限制最多拿m个

- 一堆石子
- 两堆石子

推广：

- 有n堆石子
- 数量分别是pi
- 有游戏者A和B
- 规定A先拿石子,每次可以从一堆中取石子取任意石子,但不能不取或者从两堆中取
- 问最后谁胜利

分析：

- 此时若还一步一步分析将会变得非常麻烦 比如有三堆石子 四堆石子.....

Nim和

- 首先我们用S来表示当前局面
- 比如有三堆石子4 5 6那么S=（4，5，6）；
- 定义局面加法
- 若S1=（4） s2=（5） s3=（6）
- 则有S=s1+s2+s3
- 那么什么时候胜利什么时候失败？

回忆：必胜局面S一定存在一个决策使得S进入T
必败局面T不管做什么决策都会使得T进入S

- **定理:**
- 对于nim游戏的某个位置(x_1, x_2, x_3)，当且仅当它各部分的nim-sum等于0时（即$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3=0$），则当前位于必败点.
- 为什么？
- 异或运算：
- 若A ⊕ B = X 且 A ⊕ C= X 那么则有B=C;
- 分析：

- 假设:
- A1⊕A2⊕A3⊕A4⊕Ai…=X;
- 若**X=0**; （除了结束局面）

或者：假设**A1-》A10**

A10⊕A2⊕A3⊕A4⊕Ai…=X=0;

根据异或运算可以得知A10=A1！不满足要求

- 若**X**！ **=0**;
- 取设**x**最高位为**k** 取**Ai**中**k**位也为**1**的**Ai**;
- **Ai-》Aj**
- **Aj<Ai (修改了最高位 明显变小)**
- 其实存在：对于值**x**不为**0**存在**Ai** ⊕ X < Ai（高位相同）

A1
A2
A3
A4
⊕Ai

X

看成二进制

重要结论

- 到此为止：前面的题我们都可以解决了：
- 取石子：数量分别是pi
- 那么只要计算p1⊕p2⊕p3…⊕pi

还是刚才的问题。。。。
若果每次只能取m个呢有n堆石子pi

引入SG函数

定义：

对于一个有向无环图来说，SG函数，在顶点x上满足：

g(x)=mex{ g(y) | y是x的后继}。

？他能做什么

- 回顾刚才最原始的可以问题：
- 取石子：数量分别是pi，其他不限制

X	0	1	2	3	4	5	6	7	i
sg	0	1	2	3	4	5	6	7	i

- 每次只能最多取3个(假设)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Sg	0	1	2	3	0	1	2	3	0

Sg函数 让问题变得更简单

重要结论：

- 若局面和不为0必定存在Ai ⊕ X < Ai（高位相同）
  应用：
- 假若先手者必胜，问先手者的第一步必胜策略有多少种选择，可以怎样选择

- 思考？？？
- 取石子：数量分别是pi，每次只能从一堆中取若干颗(最少1个) 谁最后取石子的谁输？问先取者A存不存在必胜策略..

- http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1907

  - 特殊性在哪里--》》》》》只有1个石子的堆数
  - 记：k为pi中大于1的堆数
  - N为石子的堆数
  - 1：若k=0 且n%2=0 先手必胜
  - 2：若k！=0 若sg!=0 先手必胜

推广：

- 先手必胜当且仅当：
- （1）游戏的SG函数不为0且游戏中某个单一游戏的SG函数大于1；
- （2）游戏的SG函数为0且游戏中没有单一游戏的SG函数大于1。
- 证明：
- 》》》》

- S1>>SG==0，存在单一游戏的SG>1
- **S2>>SG!=0，存在单一游戏的SG>1**
- **s3>>SG==0，不存在单一游戏的SG>1**
- s4>>SG!=0，不存在单一游戏的SG>1

练习：

- hdu 1536 S-Nim
- http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1536
- 给出n个数 sel[i]表示每次只能取sel[i]个石头

- 利用sg函数可以快速求解：

```
int mex(int t){
 int i,j,k=inf;
 int vis[150];
 memset(vis,0,sizeof(vis));
 for(i=1;i<=n;i++){
  int tmp=t-sel[i];
  if(tmp<0) break;
  if(value[tmp]==-1)
     value[tmp]=mex(tmp);
  vis[value[tmp]]=1;
 }
 for(i=0;;i++)//补集中最小的数
  if(vis[i]==0) return i;
 return 0;
}
```

- **hdu 3032 Nim or not Nim?**
- 给出n堆石头,每次能从一堆石头中取出任意个石头 或者将一堆大于等于2的石头分成两堆石头(不为0)
- 谁最后无法决策了谁输

一开始讲过：
1：根据游戏规则发现规律
2：根据局面的定义搜索
3：利用sg函数求解

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sg	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9

sg(0)=0;

sg(n)=n+1;当(n-3)%4==0

sg(n)=n-1;当(n-4)%4==0

http://www.acm.cs.ecnu.edu.cn/problem.php?problemid=1328

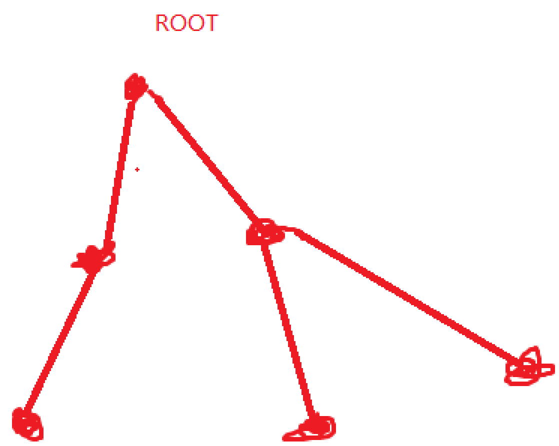
http://www.scau.edu.cn/gongbulan/xxxy/t20031122_2548.htm

一排石子有L个，甲乙两人轮流从中取“紧紧挨着的”A或B或C枚石子。谁不能取了，谁就是输家。

已知**A，B，C，L，**问甲乙二人谁有必胜策略。

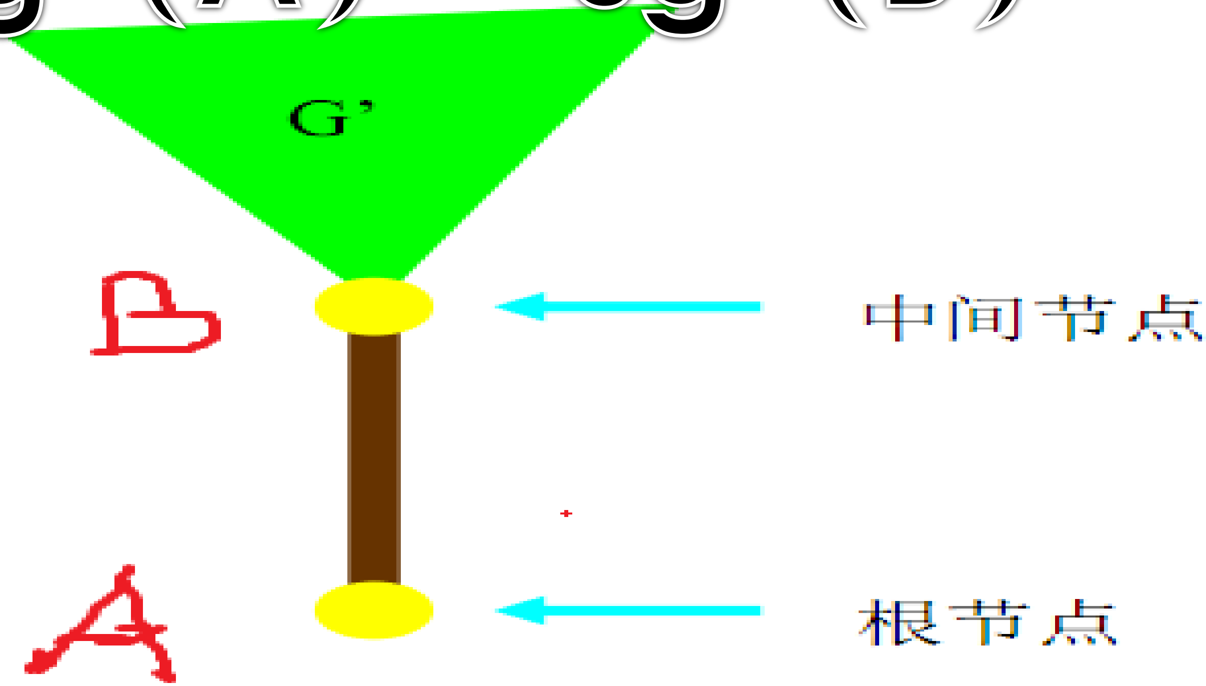
树的删边游戏

- A和B玩游戏
- 树的删边游戏，有一个点作为root每次选择删除一条边后不与根节点相连的边全部去掉谁无路可走谁即失败；
- http://acm.hit.edu.cn/ju
?Proid=2849



结论：

Sg（A）= sg（B）+1;



思考一下…楼梯滚硬币问题 经典组合游戏

- 游戏是这样的
- 在一个长长的楼梯上，编号从下到上是0到n-1：
- 某些格子上遍布了某种数量的硬币
- 操作：每次只能从i格子将任意硬币移动到i-1格子
- 胜负：谁最后把最后的剩下的硬币移动到0的胜利

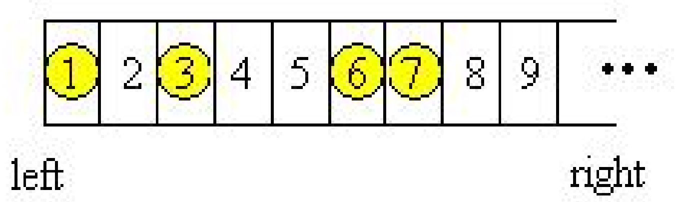
- 分析：
- 每次要么把从奇数格子移到偶数格子
- 要么从偶数格子移到奇数格子

神奇的结论：
Sg=奇数格子的异或

- 看几个特殊的情况：
- 假设奇数格子上没有硬币 →>>>>>灰常的重要
- 假设只有两个奇楼梯上放有相同的石子
- -》》 换个角度------取石子？？？？？

转换是非常神奇的东西

- **Georgia and Bob**
- http://162.105.81.212/JudgeOnline/problem?id=1704



- 一个1*M的棋盘上有N个棋子，初始位置一定，两人轮流操作，每次移动一枚棋子，要求只能向左移且至少移动一格，
- 而且不能到达或经过以前有棋子的格子，谁无法移动棋子就算输。

A Funny Stone Game

- http://acm.uva.es/archive/nuevoportal/data/problem.php?p=3668
- 有n堆石子,被编号为0..n-1。每名玩家选取3堆石子i,j,k(i<j,j<=k,且至少有一枚石子在第i堆石子中)，从i中取出一枚石子，并向j，k中各放入一枚石子(如果j=k则向k中放入2颗石子)。最先不能取石子的人输。

  石子堆的个数不会超过23，每一堆石子不超过1000个。

  输入：

  输入包含多组数据，每组数据由2行构成，第一行为一个整数n，第二行包含n个整数S0..Sn-1表示每一堆石子的个数。输入以包含一个0的一行结束。

  输出：

  每组数据的输出依次各占一行。输出格式为 “Game t: i j k”,t为数据的序号，i,j,k表示一个保证能获胜的开局。如果有多种方案，输出字典顺序最小的一组，如果没有这样的方案，i、j、k、均为-1。

总结：

注意规律

注意条件（规则 胜负条件）

注意位运算的优先级

OVER

谢谢！

- 作业：
- (前面几个应该秒杀)
- Poj 2975
- Hdu 2176
- Ural 1023
- Poj 2505
- Hdu 3032
- Hdu 1536
- Hdu 1907

Zoj 1024
Zoj 1913
POI 2000 stripes
Poj 1704
Poj 2425
Hoj 2849
Hoj 2654
Hoj 2533

HOJ HDU URAL ZOJ POJ