Matrike - različne dodatne naloge

1. Kjer je to mogoče, izračunajte vrednost matričnega izraza, za matrike A, B in C spodaj, kjer izračun ni možen pa utemeljite zakaj:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) $CA - B$
   (b) $-AB + C^T$
   (c) $-B^T C + A$

Rešitev: (a) ni možno,(b) ni možno,(c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -7 \\ -7 & -3 & 0 & 12 \end{bmatrix}^T.$

2. Dane so matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ -3 & y \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -12 & 8 \end{bmatrix}$.
Določite x in y v matriki B tako, da bo veljalo $AB = C$.

Rešitev: $x = 1, y = 2$

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Izračunaj A^{2001}.
(Namig: Izračunaj prvih nekaj potenc matrike A.)

Rešitev: $A^{2001} = A^3 = I$

4. Izračunajte determinanto naslednjih matrik:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 12 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešitev: $\det A = 1$, $\det B = -32$, $\det C = 6$

5. V matriki
$$A = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 \\ 1 & z & z+1 \end{bmatrix}$$
določite $z \in \mathbb{Z}$ tako, da bo $\det A = 0$.

Rešitev: $z_1 = 0,\ z_2 = -2$

6. Določite tako število $x \in \mathbb{R}$, da bo veljalo $\det(AB) = 0$, če je
$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $x_1 = 1,\ x_2 = 3$

7. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -4 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Rešite matrični enačbi

   (a) $2AX - 3A = BX$

   (b) $2AX - BA = BX$

Rešitev: (a) $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, *(b)* $X = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{19}{3} & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 16 & 19 \end{bmatrix}$

8. Določite rang matrike A v odvisnosti od vrednosti $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \\ 9 & 9 & \alpha & 3 \end{bmatrix}$$

Rešitev: $r(A) = \begin{cases} 2 & ;\ \textit{če je } \alpha = -6 \\ 3 & ;\ \textit{sicer} \end{cases}$

9. Za dano matriko
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 0 & \beta - 1 & \alpha + 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) določite vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako, da bo $r(A) = 1$ ali utemeljite, zakaj to ni mogoče.

   (b) določite vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako, da bo $r(A) = 2$ ali utemeljite, zakaj to ni mogoče.

Rešitev: (a) Ni možno, ker sta prva in zadnja vrstica

linearno neodvisni bo $r(A) \geq 2$,

(b) $\alpha = 1$ *in* $\beta = 2$.

10. Koliko rešitev imajo naslednji sistemi enačb? V primeru da obstaja kakšna rešitev, poiščite vse rešitve sistema.

   (a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rešitev: eno: $x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$

   (b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 5x_1 - 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Rešitev: eno: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = 1$

   (c)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= 12 \end{aligned}$$

Rešitev: nobene

   (d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 16 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Rešitev: neskončno mnogo: $x_1 = 12 - 3x_2$, x_2 *poljuben*, $x_3 = 4 + 2x_2$

   (e)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2y - 8z &= 8 \\ -3y + 13z &= -9 \end{aligned}$$

Rešitev: eno: $x = 29$, $y = 16$, $z = 3$

(f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & z & + & w & = & 1 \\ & & y & + & z & - & w & = & 2 \\ x & & & + & z & + & w & = & 3 \end{array}$$

Rešitev: neskončno mnogo: $x = \frac{1}{3} - 2w$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{8}{3} + w$, w *poljuben*

11. Koliko rešitev ima naslednji sistem linearnih enačb? Upoštevajte vse možne vrednosti $\beta \in \mathbb{R}$ in rešitve poiščite, ko obstajajo.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} bx & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & \beta y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & \beta z & + & (3-\beta)t & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & \beta t & = & 6 \end{array}$$

Rešitev: za $\beta = 2$ *sistem nima rešitve,*

za $\beta = 1$ *ima sistem* 2*-parametrično rešitev:* $t = 2$, $x = 2 - y - z$,

za vse ostale vrednosti β *ima sistem enolično rešitev:* $x = \frac{4\beta^2-18\beta+18}{(\beta-1)(\beta-2)}, y = 0, z = \frac{4}{\beta-1}, t = \frac{2}{\beta-2}$

12. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & 2w & = & 0 \\ 2x & - & y & - & \beta z & + & w & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & \beta z & + & w & = & 2\beta \\ x & - & y & - & 2z & - & 2\alpha w & = & 8 \end{array}$$

(a) Za katere vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bo sistem protisloven?

(b) Za katere vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bo imel sistem neskončno mnogo rešitev?

(c) Poiščite vse rešitve sistema, če je $\alpha = 3$ in $\beta = 1$.

Rešitev: (a) $\alpha = -1$ *in* $\beta \neq 2$*, (b)* $\alpha = -1$ *in* $\beta = 2$

(c) $x = -3$, $y = 5$, $z = -\frac{3}{2}$ *in* $w = -\frac{1}{2}$