Algebra I - Matrični račun 2021/2022

8. vaje - MATRIKE

dodatne naloge

1. Določite maksimalno število linearno neodvisnih vrstic naslednjih matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $A:3, B:2, C:3$

2. Določite rang naslednjih matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $r(A) = 3, r(B) = 2, r(C) = 2.$

3. Obravnavajte rang naslednjih matrik glede na vrednost $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2x & 2 \\ x & 6 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & x & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3x & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2x & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \\ 9 & 9 & x & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $r(A) = \begin{cases} 2 & ;\ \textit{če je } x \in \left\{\frac{1}{3}, 2\right\} \\ 3 & ;\ \textit{sicer} \end{cases}$

$$r(B) = \begin{cases} 2 & ;\ \textit{če je } x = 1 \\ 3 & ;\ \textit{če je } x = -\frac{3}{4} \\ 4 & ;\ \textit{sicer} \end{cases}$$

$$r(C) = \begin{cases} 2 & ;\ \textit{če je } x = -6 \\ 3 & ;\ \textit{sicer} \end{cases}$$

4. Za dano matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 0 & \beta - 1 & \alpha + 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) določite vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako, da bo $r(A) = 1$ ali utemeljite, zakaj to ni mogoče.

   (b) določite vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako, da bo $r(A) = 2$ ali utemeljite, zakaj to ni mogoče.

Rešitev: (a) Ni možno, ker sta prva in zadnja vrstica linearno neodvisni bo $r(A) \geq 2$,

(b) $\alpha = 1$ *in* $\beta = 2$.

5. Koliko rešitev imajo naslednji sistemi enačb? V primeru da obstaja kakšna rešitev, poiščite vse rešitve sistema.

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rešitev: eno: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

(b) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x & + & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & & & = & 2 \end{array}$

Rešitev: eno: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = 1$

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & = & 12 \end{array}$

Rešitev: nobene

(d) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 20 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 16 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 8 \end{array}$

Rešitev: neskončno mnogo: $x_1 = 12 - 3x_2$, x_2 *poljuben*, $x_3 = 4 + 2x_2$

(e) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 8z & = & 8 \\ & - & 3y & + & 13z & = & -9 \end{array}$

Rešitev: eno: $x = 29,\ y = 16,\ z = 3$

(f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & + & w & = & 1 \\ & & y & + & z & - & w & = & 2 \\ x & & & + & z & + & w & = & 3 \end{array}$

Rešitev: neskončno mnogo: $x = \frac{1}{3} - 2w,\ y = -\frac{2}{3},\ z = \frac{8}{3} + w$, w *poljuben*

6. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} bx & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & \beta y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & \beta z & + & (3-\beta)t & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & \beta t & = & 6 \end{array}$$

   (a) Za katere vrednosti $\beta \in \mathbb{R}$ bo naslednji sistem linearnih enačb konsistenten?
   (b) Za katere vrednosti $\beta \in \mathbb{R}$ rešitev ne bo enolično določena?

Rešitev: (a)$\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *(b)* $\beta = 1$

7. Za katere vrednosti $\beta \in \mathbb{R}$ bo imel naslednji sistem linearnih enačb neskončno mnogo rešitev? Rešitve tudi poiščite.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & \beta \\ 4x & + & y & + & 10z & = & \beta^2 \end{array}$$

Rešitev: za $\beta = 1 : x = -3z, y = 1 + 2z, z$ *poljuben*

za $\beta = 2 : x = 1 - 3z, y = 2z, z$ *poljuben*

8. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & 2w & = & 0 \\ 2x & - & y & - & \beta z & + & w & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & \beta z & + & w & = & 2\beta \\ x & - & y & - & 2z & - & 2\alpha w & = & 8 \end{array}$$

   (a) Za katere vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bo sistem protisloven?
   (b) Za katere vrednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bo imel sistem neskončno mnogo rešitev?
   (c) Poiščite vse rešitve sistema, če je $\alpha = 3$ in $\beta = 1$.

Rešitev: (a) $\alpha = -1$ *in* $\beta \neq 2$, *(b)* $\alpha = -1$ *in* $\beta = 2$

(c) $x = -3,\ y = 5,\ z = -\frac{3}{2}$ *in* $w = -\frac{1}{2}$