Univerza na Primorskem
Fakulteta za matematiko, naravoslovje
in informacijske tehnologije
Koper, 27. januar 2023.

Algebra I - rešitve izbranih nalog s 1. izpita

Rešitve zagotovo niso brez tiskarskih napak. Ko kakšno opazite, mi, prosim, pišite na *Safet.Penjic@iam.upr.si*

1. Naj bodo $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\vec{w}$ poljubni vektorji v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dokažite naslednjo lastnost vektorskega produkta

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}. \tag{1}$$

Ideja. Naj bodo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ poljubni vektorji v prostoru $\mathbb{R}^3$. Najprej bomo izračunali levo stran enakosti (1) tj. najprej bomo izračunali $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Potem pa bomo izračunali desnu stranu enekosti (1), tj. bomo izračunali $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$.

Rešitev. Prvo izračunajmo levo stran enakosti (1). Imamo

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1), \\
(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_2v_3 - u_3v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i} \begin{vmatrix} u_3v_1 - u_1v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 & u_1v_2 - u_2v_1 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \\
&\quad + \vec{k} \begin{vmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

kar implicira

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (&u_3v_1w_3 - u_1v_3w_3 - u_1v_2w_2 + u_2v_1w_3, \\
&u_1v_2w_1 - u_2v_1w_1 - u_2v_3w_3 + u_3v_2w_3
\end{aligned}$$

$$u_2v_3w_2 - u_3v_2w_2 - u_3v_1w_1 + u_1v_3w_1).$$

Zdaj izračunajmo desno stran enakosti (1). Imamo

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle &= u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \\
\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 \\
\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} &= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\
&= (u_1v_1w_1 + u_2v_1w_2 + u_3v_1w_3, u_1v_2w_1 + u_2v_2w_2 + u_3v_2w_3, u_1v_3w_1 + u_2v_3w_2 + u_3v_3w_3) \\
\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} &= (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\
&= (u_1v_1w_1 + u_1v_2w_2 + u_1v_3w_3, u_2v_1w_1 + u_2v_2w_2 + u_2v_3w_3, u_3v_1w_1 + u_3v_2w_2 + u_3v_3w_3),
\end{aligned}$$

kar implicira

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} = (&u_2v_1w_2 + u_3v_1w_3 - u_1v_2w_2 - u_1v_3w_3, \\
&u_1v_2w_1 + u_3v_2w_3 - u_2v_1w_1 - u_2v_3w_3, \\
&u_1v_3w_1 + u_2v_3w_2 - u_3v_1w_1 - u_3v_2w_2).
\end{aligned}$$

Opazimo da je desna strana enakosti (1) enaka levoj strani enakosti (1), ter enakost drži.

2. Naj bosta $\vec{a} + 2\vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ enotska vektorja, za katera velja, da je vektor $\vec{a} + 2\vec{b}$ pravokoten na vektor $\vec{a} - \vec{b}$. Določite kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Ideja. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lahko izračunamo s pomočjo enačbe

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Torej potrebujemo $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$ in $|\vec{b}|$.
Ker je $\vec{a} + 2\vec{b}$ enotski vektor, imamo $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 1$ ter $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 1$. Z druge strani, ker je $(\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 (= 1)$, imamo

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + 2\vec{b})^2 &= 1, \\
\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Podobno obravnavamo $\vec{a} - \vec{b}$. Ker je $\vec{a} - \vec{b}$ enotski vektor, imamo $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ ter $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1$. Z druge strani, ker je $(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 (= 1)$, imamo

$$\begin{aligned}
(\vec{a} - \vec{b})^2 &= 1, \\
\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 &= 1.
\end{aligned}$$

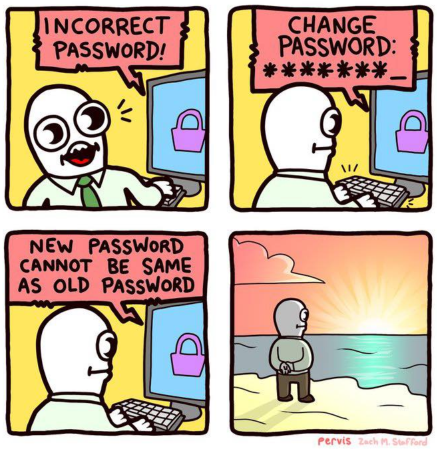
Na koncu, ker je vektor $\vec{a} + 2\vec{b}$ pravokoten na vektor $\vec{a} - \vec{b}$ imamo $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ kar implicira

$$\begin{aligned}
\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{a} - 2\vec{b}^2 &= 0, \\
\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo naslednji sistem linearnih enačb s tremi neznankami

$$\begin{aligned}
\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 &= 1 \\
\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 &= 1 \\
\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 &= 0
\end{aligned}$$

(neznanke so $\vec{a}^2$, $\vec{a}\vec{b}$ in $\vec{b}^2$).



Rešitev. Glede ideje zgoraj, obravnavamo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 &= 1\\ \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 &= 1\\ \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 &= 0.\end{aligned}$$

Rešitev sistema je $\vec{a}^2 = \frac{5}{9}$, $\vec{a}\vec{b} = -\frac{1}{9}$ in $\vec{b}^2 = \frac{2}{9}$. S tem smo dobili

$$|\vec{a}| = \frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad \vec{a}\vec{b} = -\frac{1}{9}, \qquad |\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Izračunajmo še kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Imamo

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\\ &= \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \varphi &= \arccos(-\frac{1}{\sqrt{10}})\\ &\approx 108^\circ.\end{aligned}$$

3. Dani sta točki $A(2,3,-1)$ in $B(4,-1,1)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Za vsako od točk $P(2,4,-1)$, $Q(3,1,0)$, $R(-2,11-5)$ raziščite, ali leži na daljici $\overline{AB}$ in ali leži na premici skozi A in B.

Ideja. Najprej poiščimo enačbo premice ℓ, ki poteka skozi točki A in B. Ker je $\overrightarrow{AB} = (2,-4,2)$ kanonična oblika premice ℓ je

$$\ell : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{2}.$$

Vektorska oblika enačbe premice ℓ je

$$\ell = (2,3,-1) + \lambda(2,-4,2).$$

Opazimo, za $\lambda = 0$ v vektorski obliki dobimo točko $A(2,3,-1)$, ter za $\lambda = 1$ dobimo točko $B(4,-1,1)$.

Rešitev. V ideji smo izračunali, da je vektorska oblika enačbe premice ℓ

$$\ell = (2, 3, -1) + \lambda(2, -4, 2)$$

ter, da za $\lambda = 0$ v vektorski obliki dobimo točko $A(2, 3, -1)$, ter za $\lambda = 1$ dobimo točko $B(4, -1, 1)$. To implicira

$$\overline{AB} : (2, 3, -1) + \lambda(2, -4, 2), \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

(za vrednosti λ od 0 do 1, bomo dobili vse točke segmenta $\overline{AB}$). Za $\lambda = \frac{1}{2}$ imamo

$$\begin{aligned}
(2, 3, -1) + \lambda(2, -4, 2) &= (2, 3, -1) + \frac{1}{2}(2, -4, 2) \\
&= (2, 3, -1) + (1, -2, 1) \\
&= (3, 1, 0) \\
&= Q.
\end{aligned}$$

Torej točka Q leži na daljici $\overline{AB}$.
Za $\lambda = -2$ imamo

$$\begin{aligned}
(2, 3, -1) + \lambda(2, -4, 2) &= (2, 3, -1) + (-2) \cdot (2, -4, 2) \\
&= (2, 3, -1) + (-4, 8, -4) \\
&= (-2, 11, -5) \\
&= R.
\end{aligned}$$

Torej točka Q ne leži na daljici $\overline{AB}$, ampak leži na premici ℓ, ki poteka skozi A in B.
Na koncu obravnavamo še točko $P(2, 4, -1)$. Če želimo da dobimo prvo koordinato $= 2$, za λ moramo vstaviti 0. Ampak za $\lambda = 0$ dobimo točko A. Če razmislimo, bomo izvedeli, da ne obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, ki nam bo podala točko P, kar implicira $P \notin \ell$.

Komentar. Spomnimo se, razdaljo med dvema točkama $X(x_1, y_1, z_1)$ in $Y(x_2, y_2, z_2)$ je

$$|\overline{XY}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Zdaj, na primer, če obravnavamo točko Q, in poiščemo razdaljo $|AQ|$, vrednost, ki je bomo dobili tukaj ne pomeni nič, glede tega ali je $Q \in \ell(a, b)$. Ampak, če vemo da $Q \in \ell$ drži, ta razdalja nam na nek način lahko pomaga da sklepamo, ali je $Q \in \overline{AB}$.

II metoda

Najprej izračunamo vektor $\overrightarrow{AB} = (2, -4, 2)$, in opazujemo krajevne vektorje točk P, Q in R, to je $\vec{r}_P = (2, 4, -1)$, $\vec{r}_Q = (3, 1, 0)$ in $\vec{r}_R = (-2, 11 - 5)$. Zdaj obravnavamo, ali je mogoče da vektor $\vec{r}_P - \vec{r}_A$ napišemo kot linearno kombinacijo vektorja $\overrightarrow{AB}$ (kjer je $\vec{r}_A = (2, 3, -1)$ krajevni vektor točke A). Podobno obravnavamo $\vec{r}_Q - \vec{r}_A$ in $\vec{r}_R - \vec{r}_A$.

4. Dana je matrika

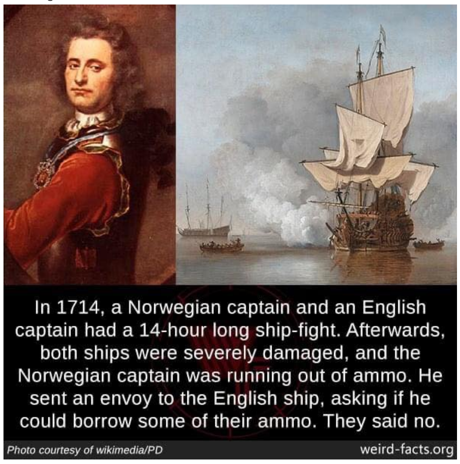
$$A = \begin{bmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1+x \end{bmatrix}.$$

(a) Določite vse vrednosti $x \in \mathbb{R}$ tako, da bo A obrnljiva matrika.

(b) Za $x = 2$ izračunajet A^{-1}.

(c) Z upoštevanjem dela (b) naloge rešite matrično enačbo $XA - I = A^2$.

Ideja. **(a)** Matrika A bo obrnljiva če in samo če $\det(A) \neq 0$. Izračunajmo determinanto matrike A.



Rešitev. **(a)** Imamo

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1+x \end{vmatrix} \\
&\overset{I_S+(II_S+III_S)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 7-x & 2 & 2 \\ 7-x & 4-x & 1 \\ -7+x & -4 & -1+x \end{vmatrix} \\
&= (7-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 1 \\ -1 & -4 & -1+x \end{vmatrix} \\
&\overset{I_S+III_S}{\underset{II_S+III_S}{=\!=\!=}} (7-x) \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1+x \\ 0 & -x & x \\ -1 & -4 & -1+x \end{vmatrix} \\
&= (7-x) \cdot (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1+x \\ -x & x \end{vmatrix} \\
&= (x-7) \cdot x \begin{vmatrix} -2 & 1+x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x(x-7)(-2+1+x) \\
&= x(x-7)(x-1).
\end{aligned}$$

Opazimo, da je $\det(A) \neq 0$ natanko tedaj, ko je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,7\}$. Lahko sklepamo, matrika A obrnljiva za vse $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,7\}$.

Rešitev. (b) Za $x = 2$ bomo dobili $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ter $\det(A) = -10$. Za domačo nalogo, razložite kako smo prišli do inverzne matrike:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} 6 & -10 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(obstajata dve različne metode, ki jih lahko uporabite).

Rešitev. (c) Rešimo matrično enačbo $XA - I = A^2$.

$$\begin{aligned} XA - I &= A^2 \\ XA &= A^2 + I \\ X &= (A^2 + I)A^{-1} \\ X &= A + A^{-1}. \end{aligned}$$

Opazimo, da $XA = A^2 + I$ implicira $X = (A^2 + I)A^{-1}$ - enakost pomnožimo s A^{-1} s desne strane. Opazimo, da ne implicira, ne pišemo, $X = A^{-1}(A^2 + I)\#\#\#$ (enakost ne množimo s leve strani). V tem primeru bomo dobili enako vrednost za X.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \\ -12 & -16 & -7 \end{bmatrix} \\ A^2 + I &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ -12 & -16 & -6 \end{bmatrix} \\ X &= (A^2 + I)A^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ -12 & -16 & -6 \end{bmatrix} \cdot \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 6 & -10 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} -4 & -30 & -22 \\ -24 & -15 & -7 \\ 16 & 40 & -12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej

$$X = \begin{bmatrix} 2/5 & 3 & 11/5 \\ 12/5 & 3/2 & 7/10 \\ -8/5 & -4 & 6/5 \end{bmatrix}.$$

Krajša reštitev je

$$\begin{aligned} X &= A + A^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/5 & 3 & 11/5 \\ 12/5 & 3/2 & 7/10 \\ -8/5 & -4 & 6/5 \end{bmatrix}.$$

5. Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pokažite, da sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= b - c \\ 2x + 10y + 10z &= 2a - 2c \\ -3x - 15y - 15z &= 0 \end{aligned}$$

nima rešitve, razen če je $a = c$ (odgovor natanko razložite). V tem primeru tudi poiščite rešitev.

Ideja. Uporabimo elementarne operacije ter napišimo razširjeno matriko $[A|b]$ v vrstični ešalon obliki.

Rešitev. Imamo

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b-c \\ 2 & 10 & 10 & 2a-2c \\ -3 & -15 & -15 & 0 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow[II_V/2]{III_V/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b-c \\ 1 & 5 & 5 & a-c \\ -1 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{III_V+II_V} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b-c \\ 1 & 5 & 5 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{II_V-I_V} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b-c \\ 0 & 3 & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Obravnavamo matriko

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b-c \\ 0 & 3 & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{array}\right]. \tag{2}$$

Imamo $\operatorname{rang}(A) = 2$, in če je $a - c \neq 3$ imamo $\operatorname{rank}(A|b) = 3$. Spomnimo se, če je $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|b)$ potem je sistem protisloven. Ta primer bomo imeli natanko tedaj, ko je $a \neq c$. Če je $a = c$ potem je $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 2 < 3$, kar implicira, da sistem ima neskončno mnogo rešitev. Naj bo t poljubno realno število. Če v matriko (2) vstavimo $a = c$ imamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b-a \\ 0 & 3 & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kar implicira

$$\begin{aligned} z &= t, \\ 3y &= a - b - 2t, \\ y &= \frac{1}{3}(a - b - 2t), \\ x &= b - a - 2y - 3t \\ &= b - a - \frac{2}{3}(a - b - 2t) - 3t \\ &= b - a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3}t - 3t \\ &= -\frac{5}{3}a + \frac{5}{3}b - \frac{5}{3}t. \end{aligned}$$

Vse rešitve so $(x, y, z) = (-\frac{5}{3}a + \frac{5}{3}b - \frac{5}{3}t, \frac{1}{3}(a - b - 2t), t)$, kjer je $t \in \mathbb{R}$ poljubno realno število.