LEARN TO STUDY USING…

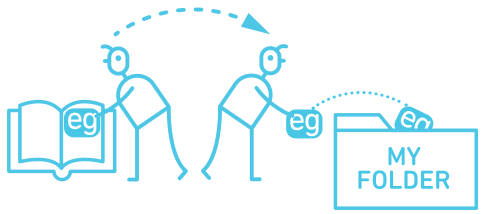
Concrete Examples

USE SPECIFIC EXAMPLES TO UNDERSTAND ABSTRACT IDEAS

LEARNINGSCIENTISTS.ORG

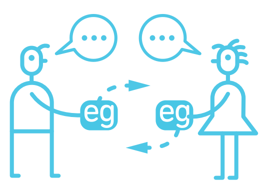
HOW TO DO IT

Collect examples your teacher has used, and look in your class materials for as many examples as you can find.



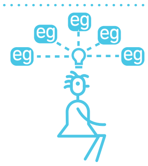
Make the link between the idea you are studying and each example, so that you understand how the example applies to the idea.

Share examples with friends, and explain them to each other for added benefits.



HOLD ON!

You may find examples on the internet that are not used appropriately. Make sure your examples are correct - check with your teacher.



Ultimately, creating your own relevant examples will be the most helpful for learning.

RESEARCH

Read more about concrete examples as a study strategy

Rawson, K. A., Thomas, R. C., & Jacoby, L. L. (2014). The power of examples: Illustrative examples enhance conceptual learning of declarative concepts. *Educational Psychology Review, 27*, 483-504.

Content by Yana Weinstein (University of Massachusetts Lowell) & Megan Smith (Rhode Island College) | Illustrations by Oliver Caviglioli (teachinghow2s.com/cogsci)
Funding provided by the APS Fund for Teaching and Public Understanding of Psychological Science

Algebra I
Rešitve izbranih nalog z ispitnih rokov

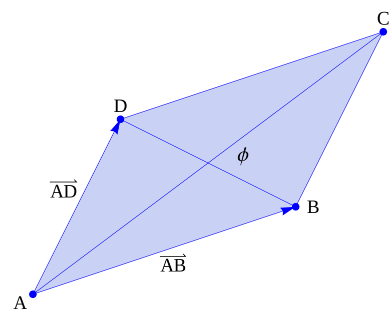
Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

(1) Dan je paralelogram z oglišči $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ in $D(-1,1,1)$.

(a) Izračunaj dolžino stranic paralelograma in kot med njegovima diagonalama.

(b) Izračunaj ploščino paralelograma $ABCD$.

Rešitev: (a) Dolžine stranic paralelograma lahko izračunamo tako, da najprej izračunamo ustrezne vektorje, nato pa še njihovo dolžino (slika je simbolna).



Stranici paralelograma sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AB}=(6,-1,1)$ in $\overrightarrow{AD}=(2,3,1)$, zato je

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38},$$
$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Kot med premicama je po definiciji ostri kot med njunima smernima vektorjema. Smeri obeh diagonal sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AC}=(8,2,2)$ in $\overrightarrow{BD}=(-4,4,0)$, od koder s pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, da velja

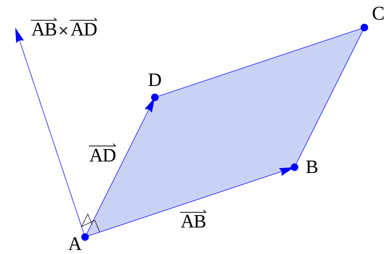
$$\cos\phi = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-32+8|}{\sqrt{64+4+4}\cdot\sqrt{16+16}} = \frac{24}{\sqrt{72\cdot 32}} = \frac{1}{2}.$$

To pomeni, da je $\phi = 60^\circ$.

(b) Izračunajmo najprej vektorski produkt

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+2\vec{j}+18\vec{k}-(3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}) = (-4,-4,20).$$

Ploščino paralelograma $ABCD$ lahko potem izračunamo s pomočjo vektorskega produkta na naslednji način. Vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ kaže v smer normale na ravnino paralelograma, njegova dolžina pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata ta dva vektorja.



Od tod dobimo

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |(-4,-4,20)| = \sqrt{16+16+400} = 12\sqrt{3}.$$

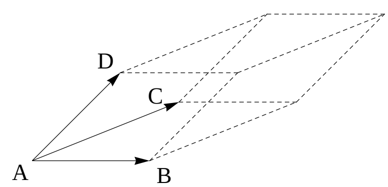
$\square$

(2) Dane so točke $A(1,1,2)$, $B(1,4,-1)$, $C(3,3,2)$ in $D(4,-1,4)$.

(a) Izračunaj prostornino paralelepipeda, ki je napet na vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AD}$.

(b) Izračunaj prostornino piramide $ABCD$.

Rešitev: (a) Paralelepiped je štiristrana poševna prizma, katere osnovna ploskev ima obliko paralelograma.



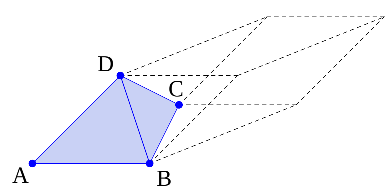
Najprej izračunajmo stranice paralelepipeda:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0,3,-3),\\ \overrightarrow{AC} &= (2,2,0),\\ \overrightarrow{AD} &= (3,-2,2).\end{aligned}$$

Prostornina danega paralelepipeda je potem enaka mešanemu produktu

$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0+0+12-(-18+0+12) = 18.$$

(b) Prostornina piramide je enaka šestini prostornine paralepipeda, torej je $V_{ABCD} = 3$.



$\square$

(3) Izračunaj presečišči:

(a) premic $p: \vec{r} = (1,2,0) + t(1,1,1)$ in $q: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = 1 - z$,

(b) ravnin $\Pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$ in $\Sigma: x - y + z - 8 = 0$.

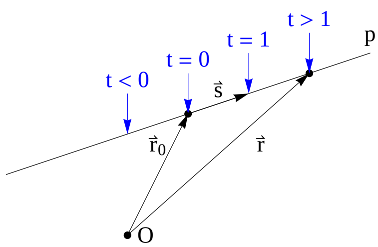
Rešitev: (a) Premica p v prostoru je podana s točko $\vec{r}_0$ na njej in z neničelnim smernim vektorjem $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$, ali pa z dvema točkama na njej. Premico lahko parametriziramo s predpisom

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

pri čemer je t parameter, ki določa, kje na premici smo, lahko pa jo podamo tudi v obliki sistema enačb

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

če uporabimo oznake $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$.



Iz podatkov preberemo, da leži na premici p točka $\vec{r}_p = (1,2,0)$ in da ima premica p smer $\vec{s}_p = (1,1,1)$, medtem, ko leži na premici q točka $\vec{r}_q = (2,3,1)$, njena smer pa je $\vec{s}_q = (2,3,-1)$.

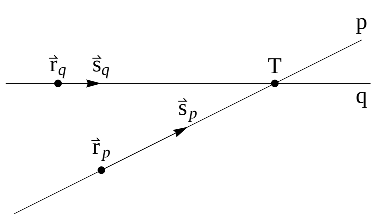
Enačbi obeh premic lahko zapišemo po komponentah kot

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, & x &= 2 + 2s, \\ y &= 2 + t, & y &= 3 + 3s, \\ z &= t, & z &= 1 - s. \end{aligned}$$

Če komponente paroma izenačimo, dobimo sistem treh enačb za dve neznanki

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2 + 2s, \\ 2 + t &= 3 + 3s, \\ t &= 1 - s, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $s = 0$, $t = 1$. Presečišče premic p in q je torej točka $T(2,3,1)$.



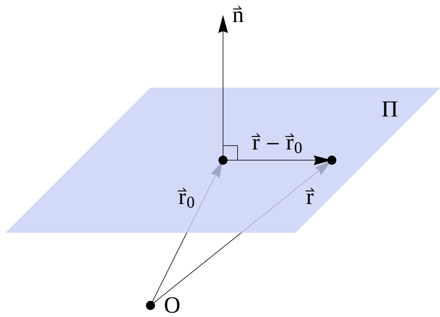
(b) Ravnina Π v prostoru je določena s točko na njej in z normalnim vektorjem, s premico in točko, ki ne leži na premici, ali pa s tremi nekolinearnimi točkami. Če ima ravnina za normalo vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, na njej pa leži točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0$, lahko zapišemo enačbo ravnine v obliki

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Če označimo $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{n} = (a, b, c)$, lahko enačbo ravnine napišemo v *standardni* oziroma *normalni* obliki

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

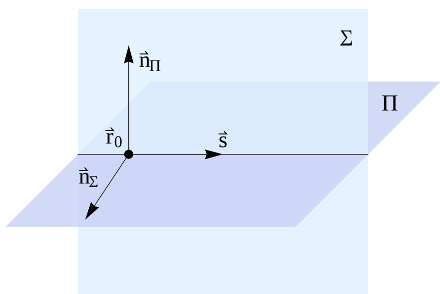


Ravnini imata normalna vektorja $\vec{n}_\Pi = (2, 3, -1)$ in $\vec{n}_\Sigma = (1, -1, 1)$, kar pomeni, da nista vzporedni. V takšnem primeru je njun presek premica s smerjo $\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma$, za izhodiščno točko pa lahko izberemo poljubno točko, ki leži na obeh ravninah. Sledi:

$$\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = (2, 3, -1) \times (1, -1, 1) = (2, -3, -5).$$

Za točko na premici pa lahko na primer izberemo točko $\vec{r}_0 = (1, 2, 9)$. Torej je presek obeh ravnin premica

$$\vec{r} = (1, 2, 9) + t(2, -3, -5).$$



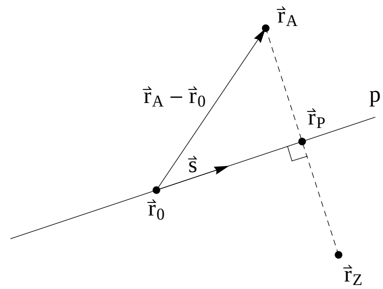
□

(4) Dani sta točka $A(7, 1, 3)$ in premica $p : \vec{r} = (3, -1, 0) + t(1, 1, 2)$.

(a) Poišči pravokotno projekcijo točke A na premico p.

(b) Poišči zrcalno sliko točke A glede na premico p.

Rešitev: (a) Poglejmo si najprej skico.



Pravokotno projekcijo točke A na premico p lahko izračunamo po formuli

$$\vec{r}_P = \vec{r}_0 + ((\vec{r}_A - \vec{r}_0) \cdot \vec{s}) \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2}$$

V našem primeru je $\vec{s} = (1, 1, 2)$ in $|\vec{s}|^2 = 6$. Od tod dobimo

$$\vec{r}_P = (3, -1, 0) + \big((4, 2, 3) \cdot (1, 1, 2)\big) \frac{\vec{s}}{6} = (5, 1, 4).$$

(b) Zrcalna slika točke A glede na premico p pa je

$$\vec{r}_Z = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (10, 2, 8) - (7, 1, 3) = (3, 1, 5).$$

□

(5) Naj bo p premica z enačbo $\vec{r} = (4, 5, 1) + t(3, 3, 0)$, premica q pa naj bo določena kot presečišče ravnin

$$\Pi : 2x + 3y - 5z = 3,$$
$$\Sigma : 3x - 4y + z = -4.$$

Izračunaj enačbo premice, ki jo dobimo, če premico p prezrcalimo preko premice q v ravnini, ki jo določata premici p in q.

Rešitev: Najprej izračunajmo enačbo premice q. Smerni vektor kaže v smeri vektorskega produkta normal ravnin Π in Σ:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 3, -5) \times (3, -4, 1) = (-17, -17, -17).$$

Zaradi enostavnosti vzemimo vzporedni vektor $\vec{s} = (1, 1, 1)$. Najti moramo še točko na premici q. Če fiksiramo $x = 1$, dobimo sistem enačb $3y - 5z = 1$ in $-4y + z = -7$, ki ima rešitev $y = 2$ in $z = 1$. Enačba premice q je torej

$$\vec{r} = (1, 2, 1) + s(1, 1, 1).$$

Presečišče premic p in q je določeno s sistemom enačb

$$\begin{aligned} 4 + 3t &= 1 + s, \\ 5 + 3t &= 2 + s, \\ 1 &= 1 + s. \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $s = 0$ in $t = -1$, kar pomeni, da se premici p in q sekata v točki $T(1, 2, 1)$. Zrcalno sliko premice p glede na premico q dobimo tako, da najprej prezrcalimo neko točko A na premici p preko premice q v točko A' in nato potegnemo premico skozi točki T in A'. Izberimo točko $A(4,5,1)$. Pravokotna projekcija točke A na premico q je

$$\vec{r}_P = \vec{r}_T + ((\vec{r}_A - \vec{r}_T)\cdot\vec{s})\,\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2} = (1,2,1) + ((3,3,0)\cdot(1,1,1))\,\frac{\vec{s}}{3} = (3,4,3).$$

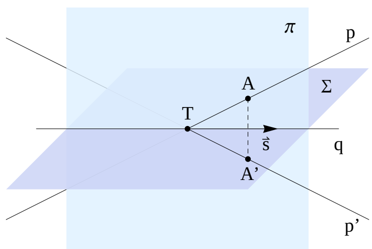
Zrcalna slika točke A glede na premico q pa je

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (2,3,5).$$

Enačba zrcalne slike premice p je tako enaka

$$\vec{r} = (1,2,1) + u(1,1,4).$$

Poglejmo še sliko.



□

(6) Dana je vektorska enačba $(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{x}$.

(a) Reši enačbo v primeru, ko je $\vec{a} = \vec{i}$ in $\vec{b} = \vec{j}$.

(b) Kaj geometrijsko predstavlja rešitev dane enačbe, če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna linearno neodvisna vektorja?

Rešitev: (a) Pišimo $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Potem je

$$\begin{aligned} \vec{i}\cdot\vec{x} &= x, \\ \vec{i}\times\vec{j} &= \vec{k}, \\ \vec{i}\times\vec{x} &= -z\vec{j} + y\vec{k}. \end{aligned}$$

Z uporabo teh enakosti se enačba poenostavi v vektorsko enačbo

$$x\vec{k} = -z\vec{j} + y\vec{k}.$$

Ker sta vektorja $\vec{j}$ in $\vec{k}$ linearno neodvisna, od tod dobimo sistem dveh skalarnih enačb

$$\begin{aligned} x &= y, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je premica v ravnini $z = 0$, ki se ujema s simetralo lihih kvadrantov.

(b) Naj bosta sedaj $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna linearno neodvisna vektorja. Potem tvori trojica $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$ bazo prostora $\mathbb{R}^3$, kar nam omogoča, da lahko zapišemo

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a}\times\vec{b}),$$

za enolično določene α, β in γ. Sedaj velja

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{x} &= \vec{a}\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})) = \alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b},\\ \vec{a}\times\vec{x} &= \vec{a}\times(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})) = \beta(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}).\end{aligned}$$

Z uporabo teh enakosti lahko prvotno enačbo prepišemo v obliko

$$(\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\times\vec{b} = \beta(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}))$$

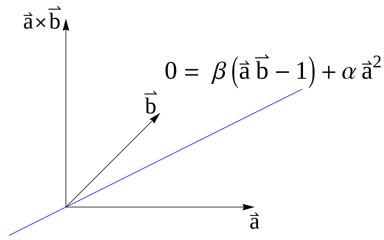
oziroma

$$(\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}-\beta)\vec{a}\times\vec{b} = \gamma(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})).$$

Vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$ in $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ sta oba neničelna in pravokotna, zato sta linearno neodvisna. Od tod sledi

$$\begin{aligned}\alpha|\vec{a}|^2+\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}-1) &= 0,\\ \gamma &= 0.\end{aligned}$$

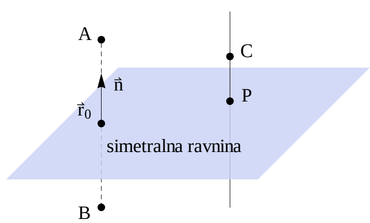
Rešitev je premica v ravnini, ki jo napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, z enačbo $|\vec{a}|^2\alpha+(\vec{a}\cdot\vec{b}-1)\beta=0$. Pri tem sta α in β koordinati na tej ravnini.



□

(7) Dane so točke $A(3,4,1)$, $B(-1,0,5)$ in $C(6,5,-4)$. Med točkami, ki so enako oddaljene od A in B, poišči tisto, ki je najbližje C.

Rešitev: Točke, ki so enako oddaljene od točk A in B, tvorijo simetralno ravnino. Ta ravnina vsebuje točko $\vec{r}_0=(1,2,3)$, ki je razpolovišče daljice AB, njena normala pa ima smer $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-4,-4,4)$.



Normalna oblika enačbe te ravnine je

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} &= 0,\\ (x-1,y-2,z-3)\cdot(-4,-4,4) &= 0,\\ -4x+4-4y+8+4z-12 &= 0,\\ -x-y+z &= 0.\end{aligned}$$

Točka na simetralni ravnini, ki je najbliže C, je kar projekcija točke C na simetralno ravnino. Le-to lahko poiščemo kot presek simetralne ravnine in pa premice skozi C, ki je pravokotna na ravnino. Ta premica ima parametrično enačbo

$$\vec{r} = (6, 5, -4) + t(-4, -4, 4),$$

oziroma $x = 6 - 4t$, $y = 5 - 4t$ in $z = -4 + 4t$. Če to vstavimo v enačbo simetralne ravnine, dobimo

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 0, \\ -(6 - 4t) - (5 - 4t) + (-4 + 4t) &= 0, \\ t &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

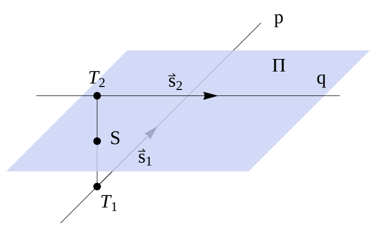
Iskana točka je torej $P(1, 0, 1)$. □

(8) Dani sta premici p in q z enačbama $\vec{r} = (-1, 2, 1) + t(-2, 2, -1)$ ter $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-6}{-2}$. Izračunaj normalno enačbo ravnine π, ki je enako oddaljena od premic p in q in nobene izmed njiju ne seka.

Rešitev: Če hočemo, da ravnina π ne seka premic p in q, mora biti vzporedna obema premicama. Zato kaže njen normalni vektor v smeri vektorskega produkta smeri obeh premic:

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-2, 2, -1) \times (2, 1, -2) = (-3, -6, -6).$$

Zaradi preprostosti vzemimo normalni vektor $\vec{n} = (1, 2, 2)$. Za zapis enačbe ravnine potrebujemo še točko na ravnini, ki jo lahko najdemo na naslednji način. Razdalja ravnine π od premic p in q je enaka kot razdalja ravnine π od njej vzporednih ravnin, ki vsebujeta premici p oziroma q. Če torej vzamemo dve točki iz teh dveh vzporednih ravnin, bo njuno razpolovišče ležalo v ravnini π.



Vzemimo na primer točki $T_1(-1, 2, 1)$ in $T_2(0, 1, 6)$. Njuno razpolovišče je potem točka $S(-1/2, 3/2, 7/2)$, od koder dobimo:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_S) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (x + 1/2, y - 3/2, z - 7/2) \cdot (1, 2, 2) &= 0, \\ x + 1/2 + 2y - 3 + 2z - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Normalna enačba ravnine π je torej

$$2x + 4y + 4z = 19.$$

□