Algebra I - Matrični račun: 2. vaje

Vektorji (nad.) - Algebrske operacije z vektorji. Linearna neodvisnost vektorjev.

1. V trapezu $ABCD$ sta stranici AB in CD vzporedni. V kakšnem razmerju se sekata diagonali, če velja $|AB| = 3|CD|$?

2. Naj bosta $\vec{a} = (1, 3, -4)$ in $\vec{b} = (0, -2, -1)$. Izračunajte $\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{a} + 2\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Ali lahko izrazite vektor $\vec{c} = (-1, -1, -2)$ z vektorjema $\vec{a} = (2, 6, -2)$ in $\vec{b} = (2, 4, 1)$?

4. Ali so vektoji $\vec{a} = (1, 3, -7)$, $\vec{b} = (2, -1, 5)$ in $\vec{c} = (3, 0, 8)$ linearno neodvisni?

5. Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ leži vektor $(x, -3, -5)$ v ravnini vektorjev $(1, 0, -2)$ in $(-2, 1, 7)$?

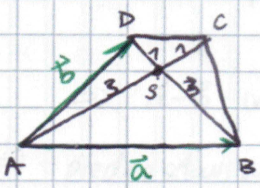
6. Pokažite, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna natanko tedaj, ko sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$.

7. Dani sta točki $A(1, 2, -1)$ in $B(1, 0, 2)$. Določite koordinate točke C, če je točka B središče daljice AC.

Navodila.

1. V trapezu $ABCD$ sta stranici AB in CD vzporedni. V kakšnem razmerju se sekata diagonali, če velja $|AB| = 3|CD|$?

①



$\vec{AS}:\vec{SC}=?$

$\vec{DS}:\vec{SB}=?$

$\vec{DS}=\alpha\vec{DB}=\alpha(-\vec{b}+\vec{a})$

$\vec{DS}=-\vec{b}+\beta(\vec{AC})=-\vec{b}+\beta(\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a})=$

$=-\vec{b}+\beta\vec{b}+\frac{1}{3}\beta\vec{a}$

$\alpha\vec{a}-\alpha\vec{b}=-\vec{b}+\beta\vec{b}+\frac{1}{3}\beta\vec{a}$

$\vec{a}: \alpha=\frac{1}{3}\beta \to 3\alpha=1-\alpha \to 4\alpha=1$

$\vec{b}: -\alpha=-1+\beta \to \beta=1-\alpha$

$\boxed{\alpha=\frac{1}{4}}$

$\boxed{\beta=\frac{3}{4}}$

$|AB|=3|CD|$

$\vec{DS}:\vec{SB}=1:3$

$\vec{AS}:\vec{SC}=3:1$

2. Naj bosta $\vec{a} = (1, 3, -4)$ in $\vec{b} = (0, -2, -1)$. Izračunajte $\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{a} + 2\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

② $\vec{a}=(1,3,-4)$

$\vec{b}=(0,-2,-1)$

$\vec{a}+\vec{b}=(1,1,-5)$

$-\vec{a}+2\vec{b}=(0,-4,-2)+(-1,-3,4)=(-1,-7,2)$

$2\vec{a}-3\vec{b}=(2,6,-8)+(0,6,3)=(2,12,-5)$

3. Ali lahko izrazite vektor $\vec{c} = (-1, -1, -2)$ z vektorjema $\vec{a} = (2, 6, -2)$ in $\vec{b} = (2, 4, 1)$?

③ $\vec{c}=(-1,-1,-2)$

$\vec{a}=(2,6,-2)$

$\vec{b}=(2,4,1)$

$\vec{c}\stackrel{?}{=}\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$

$(-1,-1,-2)=(2\alpha,6\alpha,-2\alpha)+(2\beta,4\beta,\beta)$

$-1=2\alpha+2\beta$

$-1=6\alpha+4\beta$

$-2=-2\alpha+\beta$

$+$ $-3=3\beta$, $\beta=-1$

$-1=2\alpha+2(-1)$

$1=2\alpha$

$\alpha=\frac{1}{2}$

$-1=6\cdot\frac{1}{2}+4\cdot(-1)$

$-1=3-4$

$-1=-1$ ✓

$\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

$(-1,-1,-2)=\frac{1}{2}(2,6,-2)-(2,4,1)$

$=(1,3,-1)+(-2,-4,-1)=(-1,-1,-2)$

4. Ali so vektoji $\vec{a} = (1, 3, -7)$, $\vec{b} = (2, -1, 5)$ in $\vec{c} = (3, 0, 8)$ linearno neodvisni?

④ Preverimo, če so $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lin. odvisni, torej preverimo, če je $\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$

$\vec{a}=(1,3,-7)$ $\vec{b}=(2,-1,5)$ $\vec{c}=(3,0,8)$

$(1,3,-7)=(2\alpha,-\alpha,5\alpha)+(3\beta,0,8\beta)$

$1=2\alpha+3\beta$, $1=-6+3\beta$ $3\beta=7$

$\beta=\frac{7}{3}$

$3=-\alpha \to \alpha=-3$

$-7=5\alpha+8\beta$

$-7=-25+8\cdot\frac{7}{3}$

$18=\frac{56}{3}$ //

$\Rightarrow$ NEODVISNI! ker $\vec{a}$ ne moremo zapisati kot lin. kombinacijo $\vec{b}$ in $\vec{c}$

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ so lin. neodvisni če iz dobimo $\alpha,\beta,\gamma=0$ $\Rightarrow$ DN

5. Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ leži vektor $(x, -3, -5)$ v ravnini vektorjev $(1, 0, -2)$ in $(-2, 1, 7)$?

⑤ $x \in \mathbb{R} = ?$ $\quad (x, -3, -5) \rightarrow$ ležati mora v ravnini tistih dveh

$(1, 0, -2)$

$(-2, 1, 7)$

$$(x, -3, -5) = \alpha(1, 0, -2) + \beta(-2, 1, 7)$$

$$x = \alpha - 2\beta \rightarrow x = -8 + 6 \rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$-3 = \beta \rightarrow \beta = -3$$

$$-5 = -2\alpha + 7\beta \rightarrow -5 = -2\alpha - 21 \rightarrow -2\alpha = 16 \rightarrow \alpha = -8$$

6. Pokažite, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna natanko tedaj, ko sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$.

⑥ pokaži, da sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lin. neodvisna $\Leftrightarrow$ ko sta lin. neodvisna $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$

$$\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lambda(\vec{a} - \vec{b}) + \sigma(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \sigma = 0\right)$$

nista nasprotna in noben ni enak $\vec{0}$

$(\Rightarrow)$ predpostavimo, da sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lin. neodvisna in naj za $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$ velja:

$$\lambda(\vec{a} - \vec{b}) + \sigma(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

$$\lambda\vec{a} - \lambda\vec{b} + \sigma\vec{a} + \sigma\vec{b} = \vec{0}$$

$$(\lambda + \sigma)\vec{a} + \vec{b}(\sigma - \lambda) = \vec{0}$$

Ker sta $\vec{a}, \vec{b}$ lin. neodvisna mora veljati:

$$\lambda + \sigma = 0$$
$$-\lambda + \sigma = 0$$
$$2\sigma = 0$$
$$\sigma = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$\Rightarrow \vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$ sta lin. neodvisna

$(\Leftarrow)$ predpostavimo: $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$ sta lin. neodvisna. in za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

$$\frac{\alpha}{2}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} + \frac{\alpha}{2}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} = \vec{0}$$

$\cancel{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a}}$

$\cancel{\alpha\vec{a} - \vec{a} = -\vec{a} + \beta\vec{b}}$

$\cancel{\vec{a}(\alpha - 1) = -(\beta\vec{b} + \vec{a})}$

$$\frac{\alpha + \beta}{2}\vec{a} + \frac{\beta + \alpha}{2}\vec{b} + \frac{\alpha - \beta}{2}\vec{a} + \frac{\beta - \alpha}{2}\vec{b} = \vec{0}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{\alpha - \beta}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \qquad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \qquad \alpha + \beta = \alpha - \beta$$

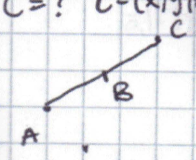
$$\beta = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

7. Dani sta točki $A(1, 2, -1)$ in $B(1, 0, 2)$. Določite koordinate točke C, če je točka B središče daljice AC.

⑦ $A(1, 2, -1)$

$B(1, 0, 2)$

$C = ?$ $\quad C = (x, y, z)$



$$\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} \qquad \left(S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)\right)$$

$$(1, 0, 2) - (1, 2, -1) = \frac{1}{2}\left((x, y, z) - (1, 2, -1)\right)$$

$$(0, -2, 3) = \frac{1}{2}(x - 1, y - 2, z + 1) \qquad C(1, -2, 5)$$

$$(0, -4, 6) = (x - 1, y - 2, z + 1)$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \qquad y - 2 = -4 \quad y = -2 \qquad z + 1 = 6 \quad z = 5$$