



Algebra I
IZPIT
– 9. FEBRUAR 2022 –

Čas pisanja: 135 minut. Maksimalno število točk: 100. Dovoljena je uporaba pisala in kalkulatorja. Pišite razločno in utemeljite vsak odgovor. Srečno!

- Zapišite definicijo skalarnega produkta in naštejte vsaj tri njegove lastnosti. Nato dokažite naslednjo trditev: Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, velja $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi$, pri čemer je φ kot med vektorjema \vec{u} in \vec{v} . (7 točk)
 - Izpeljite enačbo za premico v \mathbb{R}^3 , v vektorski, parametrični in kanonični obliki. (6 točk)
 - Zapišite in dokažite Cramerjevo pravilo za reševanje sistema linearnih enačb. (7 točk)

- V kocki $ABCD A' B' C' D'$ (točka A' leži nad točko A) označimo z $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Točka T leži na stranici AB tako, da velja $|AT| : |TB| = 1 : 3$, točka P deli stranico $B' C'$ v razmerju $|B' P| : |P C'| = 1 : 5$ in točka S leži na presečišču telesnih diagonal.

- Zapišite vektorja $\overrightarrow{D' T}$ in $\overrightarrow{S P}$ kot linearno kombinacijo vektorjev \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} . (10 točk)
- Določite razmerje $|C R| : |R B'|$, če je R presečišče daljic $C B'$ in $B P$. (10 točk)
Namig: Zapišite vektor $\overrightarrow{C R}$ kot linearno kombinacijo vektorjev \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} na dva načina.

- Dani imamo premici $\ell = (7, 0, 1) + \lambda(2, 1, -2)$ in $q : x + 3 = 4 - 4y = 20 - 4z$.

- Poiščite presečišče premic ℓ in q . (7 točk)
- Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje premici ℓ in q . (7 točk)
- Izračunajte kot med premicama ℓ in q . (6 točk)

Namig: Kot med dvema vektorjema izračunamo s pomočjo enačbe $\cos \varphi = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$.

- Pokažite, da sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 5z &= a \\ 4x + 5y + 6z &= b \\ 5x + 6y + 7z &= c \end{aligned}$$

nima rešitve, razen če je $a + c = 2b$. V tem primeru rešitev tudi poiščite. (20 točk)

- Z uporabo osnovnih operacij nad vrsticami pokažite, da je

$$\begin{vmatrix} a+2 & b+2 & c+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 0.$$

(20 točk)