Naloga 15. *Polinomi dveh spremenljivk.*

Prostor polinomov $\mathbb{P}_n^2$ dveh spremenljivk stopnje n je dimenzije $\binom{n+2}{2}$ in ga lahko opišemo s funkcijami

$$(x, y) \mapsto x^i\, y^j, \quad 0 \le i + j \le n.$$

Za geometrijsko oblikovanje je priročnejša predstavitev z Bernsteinovimi baznimi polinomi dveh spremenljivk, pri definiciji katerih namesto kartezičnih uporabljamo baricentrične koordinate. Baricentrične koordinate točke $\boldsymbol{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ glede na trikotnik $T = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ z oglišči $\boldsymbol{V}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, so podane s trojico $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, ki je enolično določena kot rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

Bernsteinovi bazni polinomi dveh spremenljivk stopnje n so definirani kot

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!\, j!\, k!}\, u^i\, v^j\, w^k, \qquad i + j + k = n,$$

in sestavljajo bazo za $\mathbb{P}_n^2$. Vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n^2$ lahko torej predstavimo v tako imenovani Bézierjevi obliki kot

$$p = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}\, B_{i,j,k}^n$$

za neka realna števila $b_{i,j,k}$.

1. V Matlabu sestavite metodo `pointbary`, ki kartezične koordinate (x, y) točke $\boldsymbol{P}$ pretvori v baricentrične koordinate (u, v, w) glede na trikotnik T. Pripravite tudi metodo `vectorbary`, ki vrne baricentrične koordinate vektorja $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{0}$.

2. Vrednost polinoma $p \in \mathbb{P}_n^2$ v točki $\boldsymbol{P}$, kjer je polinom p podan v Bézierjevi obliki, točka $\boldsymbol{P}$ pa z baricentričnimi koordinatami (u, v, w), lahko izračunamo z de Casteljaujevim postopkom:

   $$b_{i,j,k}^r = u\, b_{i+1,j,k}^{r-1} + v\, b_{i,j+1,k}^{r-1} + w\, b_{i,j,k+1}^{r-1}, \quad i + j + k = n - r, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

   Ta se začne s koeficienti $b_{i,j,k}^0 = b_{i,j,k}$, $i + j + k = n$, konča pa z vrednostjo $b_{0,0,0}^n$ polinoma p v točki $\boldsymbol{P}$. Postopek lahko enostavno prilagodimo za računanje vrednosti trikotniškega razcveta $\mathcal{B}[p](\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n)$ polinoma p pri argumentih $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$. V tem primeru v r-tem koraku postopka uporabimo baricentrične koordinate argumenta $\boldsymbol{P}_r$ (kar so lahko v odvisnosti od konteksta baricentrične koordinate točke ali vektorja). Sestavite metodo `blossom3`, ki izračuna trikotniški razcvet pri podanih baricentričnih koordinatah, in njeno izpeljanko `decasteljau3`, ki izračuna vrednost polinoma.

```
function b = blossom3(B,U)
% Opis:
%  blossom3 izračuna razcvet polinoma dveh spremenljivk
%
```

```
% Definicija:
%  b = blossom3(B,U)
%
% Vhodna podatka:
%  B     matrika velikosti n+1 x n+1, ki predstavlja
%        koeficiente polinoma dveh spremenljivk stopnje n v
%        Bezierjevi obliki (element matrike na mestu (i,j),
%        j <= n+2-i, določa koeficient polinoma z indeksom
%        (n+2-i-j, j-1, i-1)),
%  U     matrika velikosti n x 3, v kateri vrstice
%        predstavljavo baricentrične koordinate točk ali
%        vektorjev glede na domenski trikotnik, za katere
%        izvajamo razcvet polinoma
%
% Izhodni podatek:
%  b     vrednost razcveta polinoma, določenega z matriko B,
%        v točkah, določenih z matriko U
```

3. S pomočjo implementiranih metod izračunajte vrednost polinoma

$$2B^3_{3,0,0} + 5B^3_{2,0,1} - B^3_{1,2,0} + B^3_{2,1,0} + 3B^3_{1,1,1} - 4B^3_{0,2,1} + B^3_{0,0,3}$$

nad trikotnikom z oglišči $\boldsymbol{V}_1 = (0,0)$, $\boldsymbol{V}_2 = (5,1)$, $\boldsymbol{V}_3 = (3,3)$ v točkah $(0,0)$, $(1,1)$ in $(4,2)$. Z upoštevanjem, da se odvod $p \in \mathbb{P}^2_n$ v smereh $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_r$, $r \leq n$, izvrednoten v točki $\boldsymbol{P}$, izraža kot

$$D_{\boldsymbol{d}_1} D_{\boldsymbol{d}_2} \ldots D_{\boldsymbol{d}_r} p(\boldsymbol{P}) = \frac{n!}{(n-r)!} \mathcal{B}[p](\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_r, \underbrace{\boldsymbol{P}, \ldots, \boldsymbol{P}}_{n-r}),$$

določite še prve in druge odvode polinoma p v teh točkah v smereh x in y.