Naloga 14. *Aproksimacija s sestavljenimi Bézierjevimi ploskvami.*

Z višanjem stopnje polinoma pridobimo več parametrov svobode. Pri metodi najmanjših kvadratov lahko na ta način dobimo boljšo aproksimacijo podatkov f_k, $k = 1, 2, \ldots, K$, prirejenim parametrom $(u_k, v_k) \in [0,1] \times [0,1]$, a matrika predoločenega sistema s tem postaja večja, reševanje problema pa zato računsko zahtevnejše in numerično občutljivejše. S konceptom sestavljanja polinomov lahko ostanemo pri nizki stopnji, število parametrov svobode pa večamo z delitvijo domene parametrizacije.

Naj točke $U_I = \frac{I}{M}$, $I = 0, 1, \ldots, M$, razmaknjene za $\frac{1}{M}$, $M \in \mathbb{N}$, določajo delitev intervala $[0,1]$ v smeri parametra u, točke $V_J = \frac{J}{N}$, $J = 0, 1, \ldots, N$, razmaknjene za $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, pa delitev intervala $[0,1]$ v smeri parametra v. Sestavljen polinom ali zlepek definiramo na kvadratu $[0,1] \times [0,1]$ kot funkcijo, ki na vsakem kvadratu $[U_{I-1}, U_I] \times [V_{J-1}, V_J]$, $(I, J) \in \{1, 2, \ldots, M\} \times \{1, 2, \ldots, N\}$, ustreza polinomu. Nadaljevanje opisuje konstrukcijo zvezno odvedljivega zlepka, ki določa aproksimacijo podatkov v smislu metode najmanjših kvadratov. Sestavljena je iz dveh faz: lokalne aproksimacije in glajenja.

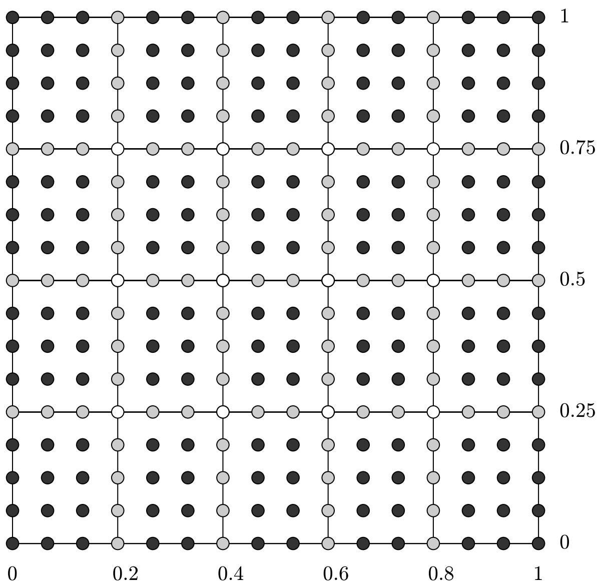
Najprej za vsak par (I, J) določimo polinom $b^{(I,J)}$ oblike

$$b^{(I,J)}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{i,j}^{(I,J)} B_i^m \left(\tfrac{u - U_I}{U_I - U_{I-1}} \right) B_j^n \left(\tfrac{v - V_J}{V_J - V_{J-1}} \right), \quad (u,v) \in [U_{I-1}, U_I] \times [V_{J-1}, V_J],$$

ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira podatke

$$\left(\tfrac{u_k - U_I}{U_I - U_{I-1}}, \tfrac{v_k - V_J}{V_J - V_{J-1}}, f_k \right), \quad (u_k, v_k) \in [U_{I-1}, U_I] \times [V_{J-1}, V_J].$$

Zlepek določajo koeficienti $b_{i,j}^{(I,J)}$, $(I, J) \in \{1, 2, \ldots, M\} \times \{1, 2, \ldots, N\}$ z indeksi $0 < i < m$ in $0 < j < n$ ter nekaterimi indeksi, ki so povezani z robom domene. Ti koeficienti so na spodnji sliki, ki prikazuje primer $M = 5$, $N = 4$, $m = 3$, $n = 4$, ponazorjeni s črno obarvanimi točkami.



Koeficiente, ki so na sliki ponazorjeni s sivo in belo barvo, določimo na podlagi pogojev zvezne odvedljivosti. Koeficient $b_{i,0}^{(I,J)} = b_{i,n}^{(I,J-1)}$, $0 < i < m$, za $J > 1$, ki je ponazorjen s sivo barvo, na primer določimo s predpisom

$$b_{i,0}^{(I,J)} = b_{i,n}^{(I,J-1)} = \frac{1}{2} b_{i,n-1}^{(I,J-1)} + \frac{1}{2} b_{i,1}^{(I,J)}.$$

Podobno je koeficient $b_{0,j}^{(I,J)} = b_{m,j}^{(I-1,J)}$, $0 < j < n$ za $I > 1$ določen s predpisom

$$b_{0,j}^{(I,J)} = b_{m,j}^{(I-1,J)} = \frac{1}{2} b_{m-1,j}^{(I-1,J)} + \frac{1}{2} b_{1,j}^{(I,J)}.$$

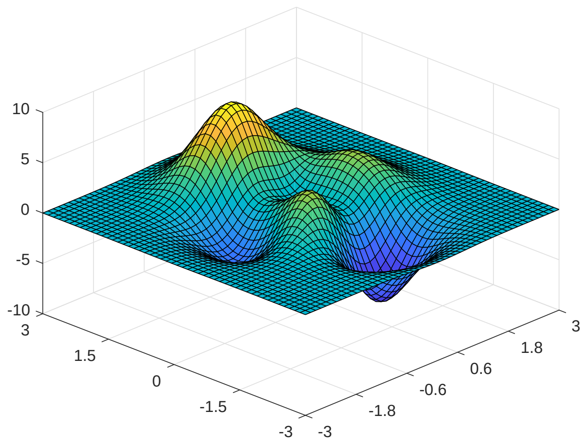
Koeficient $b_{0,0}^{(I,J)} = b_{m,0}^{(I-1,J)} = b_{m,n}^{(I-1,J-1)} = b_{0,n}^{(I,J-1)}$ za $I > 1$ in $J > 1$, ki je ponazorjen z belo barvo, pa določimo s predpisom

$$b_{0,0}^{(I,J)} = b_{m,0}^{(I-1,J)} = b_{m,n}^{(I-1,J-1)} = b_{0,n}^{(I,J-1)} = \frac{1}{4} b_{1,1}^{(I,J)} + \frac{1}{4} b_{m-1,1}^{(I-1,J)} + \frac{1}{4} b_{m-1,n-1}^{(I-1,J-1)} + \frac{1}{4} b_{1,n-1}^{(I,J-1)}.$$

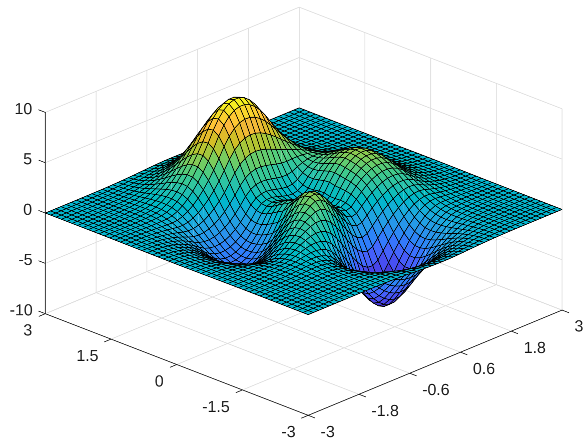
1. Sestavite metodo `lsqbezier2spline` za izračun koeficientov zlepka nad delitvijo kvadrata domene, ki je določen s parametroma M in N, ki so določeni s koeficienti polinomov stopnje (m,n), ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimirajo del podatkov (u_k, v_k, f_k), $k = 1, 2, \ldots, K$, nad pravokotnikom delitve.

```
function S = lsqbezier2spline(M,N,m,n,P)
% Opis:
%  lsqbezier2spline vrne kontrolne točke tenzorskih
%  polinomov, ki določajo zvezno odvedljiv zlepek, ki v
%  smislu metode najmanjših kvadratov najbolje aproksimira
%  dane podatke
%
% Definicija:
%  S = lsqbezier2spline(M,N,m,n,P)
%
% Vhodni podatki:
%  M,N       parametra, ki določata delitev domene,
%  m,n       parametra, ki določata stopnjo polinoma nad
%            pravokotnikom delitve,
%  P         matrika podatkov, ki v vsaki vrstici vsebuje
%            parametra z intervala [0,1] ter njima
%            pripadajočo vrednost, ki jo aproksimiramo
%
% Izhodni podatek:
%  S         celica velikosti N+1 x M+1, v kateri vsak
%            element vsebuje matriko s koeficienti polinoma,
%            ki določa zlepek nad pravokotnikom delitve
%            domene
```

2. Implementirano metodo uporabite za konstrukcijo sestavljene Bézierjeve ploskve nad delitvijo, določeno s parametroma $M = 4$ in $N = 5$, ki na vsakem pravokotniku delitve ustreza ploskvi stopnje $(3, 4)$. Ploskev naj v smislu metode najmanjših kvadratov aproksimira 2500 točk na grafu funkcije, ki jih v Matlabu dobite z ukazom `peaks(50)`. Abscise in ordinate kontrolnih točk Bézierjevih ploskev določite tako, da bo ploskev eksaktno opisovala abscise in ordinate točk grafa, aplikate kontrolnih točk pa naj bodo aproksimacija aplikat točk grafa po zgoraj opisani konstrukciji. Izračunajte, kakšno je maksimalno absolutno odstopanje med aplikatami sestavljene Bézierjeve ploskve pri parametrih (u_k, v_k), $k = 1, 2, \ldots, 2500$, in aplikatami točk grafa funkcije.



(a) Graf funkcije `peaks`



(b) Aproksimacijska ploskev za `peaks`

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si