Naloga 17. *Argyrisova interpolacijska shema.*

Za aproksimacijo funkcije f s polinomom dveh spremenljivk so na voljo številne interpolacijske sheme, s pomočjo katerih polinom določimo na podlagi interpolacije v ogliščih trikotnika, vzdolž njegovih stranic, včasih pa tudi v notranjosti trikotnika.

Ena izmed klasičnih shem je Argyrisova shema. Naj bo f dvakrat odvedljiva funkcija nad trikotnikom $T = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3) \subset \mathbb{R}^2$. Aproksimacijski polinom $p \in \mathbb{P}_5^2$ je določen z interpolacijo vrednosti ter prvih in drugih odvodov v ogliščih trikotnika ter interpolacijo smernega odvoda v središču vsake izmed stranic trikotnika. Predstavimo ga v Bézierjevi obliki

$$p = \sum_{i+j+k=5} b_{i,j,k} B^5_{i,j,k}$$

nad trikotnikom T.

Koeficienti polinoma p, pripadajoči točkam domene v okolici oglišča $\boldsymbol{V}_1$, so podani s formulami

$$\begin{aligned}
b_{5,0,0} &= f(\boldsymbol{V}_1),\\
b_{4,1,0} &= f(\boldsymbol{V}_1) + \frac{1}{5}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1\rangle,\\
b_{4,0,1} &= f(\boldsymbol{V}_1) + \frac{1}{5}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{V}_3 - \boldsymbol{V}_1\rangle,\\
b_{3,2,0} &= f(\boldsymbol{V}_1) + \frac{2}{5}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1\rangle + \frac{1}{20}\langle \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{H}f(\boldsymbol{V}_1)\cdot(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1)\rangle,\\
b_{3,1,1} &= f(\boldsymbol{V}_1) + \frac{1}{5}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1\rangle + \frac{1}{5}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{V}_3 - \boldsymbol{V}_1\rangle\\
&\qquad + \frac{1}{20}\langle \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{H}f(\boldsymbol{V}_1)\cdot(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1)\rangle,\\
b_{3,0,2} &= f(\boldsymbol{V}_1) + \frac{2}{5}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{V}_3 - \boldsymbol{V}_1\rangle + \frac{1}{20}\langle \boldsymbol{V}_3 - \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{H}f(\boldsymbol{V}_1)\cdot(\boldsymbol{V}_3 - \boldsymbol{V}_1)\rangle.
\end{aligned}$$

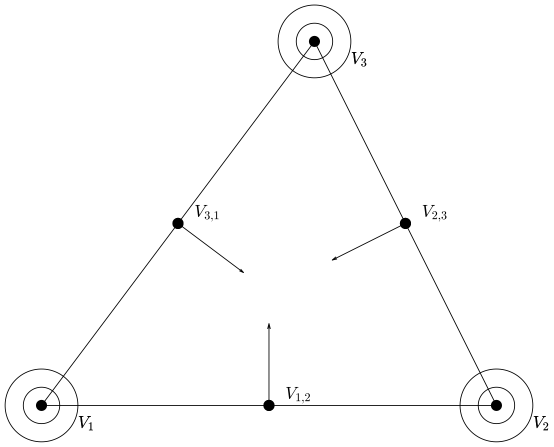
Pri tem $\boldsymbol{D}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ označuje gradient, $\boldsymbol{H}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ pa Hessejevo matriko funkcije f. Analogne formule veljajo za koeficiente $b_{0,5,0}, b_{0,4,1}, b_{1,4,0}, b_{0,2,2}, b_{1,2,1}, b_{2,2,0}$, ki pripadajo točkam domene v okolici oglišča $\boldsymbol{V}_2$, in koeficiente $b_{0,0,5}, b_{1,0,4}, b_{0,1,4}, b_{2,0,2}, b_{1,1,2}, b_{0,2,2}$, ki pripadajo točkam domene v okolici oglišča $\boldsymbol{V}_3$.

Koeficient $b_{2,2,1}$ polinoma p je določen z vrednostmi v ogliščih $\boldsymbol{V}_1$ in $\boldsymbol{V}_2$ ter vrednostjo odvoda f v točki $\boldsymbol{V}_{1,2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2$ v smeri enotskega vektorja $\boldsymbol{n}_{1,2}$, ki je pravokoten na $\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1$. Naj bodo z $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ podane baricentrične koordinate vektorja $\boldsymbol{n}_{1,2}$ glede na $T = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$. Koeficient je podan s formulo

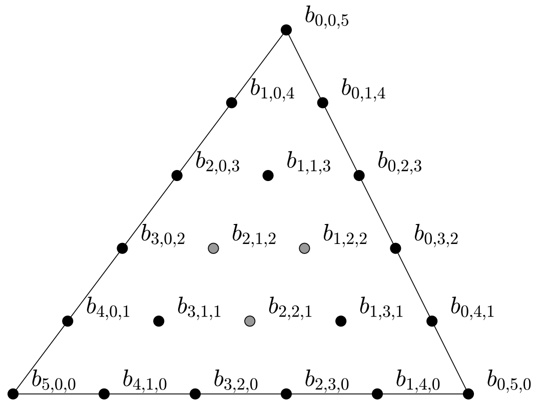
$$\begin{aligned}
b_{2,2,1} = \frac{8}{15}\frac{1}{\vartheta_3}\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{V}_{1,2}), \boldsymbol{n}_{1,2}\rangle &- \frac{1}{6}\left(b_{4,0,1} + 4b_{3,1,1} + 4b_{1,3,1} + b_{0,4,1}\right)\\
&- \frac{1}{6}\frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(b_{5,0,0} + 4b_{4,0,1} + 6b_{3,0,2} + 4b_{2,0,3} + b_{1,0,4}\right)\\
&- \frac{1}{6}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\left(b_{0,0,5} + 4b_{1,0,4} + 6b_{2,0,3} + 4b_{3,0,2} + b_{4,0,1}\right).
\end{aligned}$$

Podobno sta podana koeficienta $b_{1,2,2}$ in $b_{2,1,2}$, ki ju dobimo z dodatno interpolacijo v središčih stranic med $\boldsymbol{V}_2$ in $\boldsymbol{V}_3$ ter med $\boldsymbol{V}_3$ in $\boldsymbol{V}_1$. S tem je določenih vseh 21 koeficientov polinoma p.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si



(a) Argyrisova shema



(b) Bézierjeva oblika Argyrisovega polinoma

1. Sestavite metodo **argyris**, ki na podlagi ustreznih podatkov o funkciji f izračuna Bézierjeve koeficiente polinoma p nad trikotnikom T po Argyrisovi shemi.

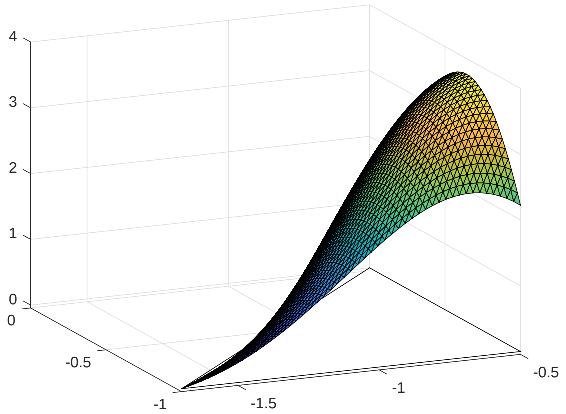
```
function B = argyris(T,f,Df,Hf)
% Opis:
%  argyris izračuna Bezierjeve ordinate polinoma dveh
%  spremenljivk stopnje 5, ki interpolira vrednosti, prve in
%  druge odvode podane funkcije f v ogliščih trikotnika ter
%  odvode funkcije f v središčih stranic trikotnika v smeri,
%  pravokotni na stranico
%
% Definicija:
%  B = argyris(T,f,Df,Hf)
%
% Vhodni podatki:
%  T    tabela velikosti 3 x 2, v kateri vsaka vrstica
%       predstavlja oglišče trikonika, nad katerim je
%       definiran polinom,
%  f    funkcija, ki jo interpoliramo,
%  Df   gradient funkcije, ki jo interpoliramo,
%  Hf   Hessejeva matrika funkcije, ki jo interpoliramo
%
% Izhodni podatek:
%  B    matrika velikosti 6 x 6, ki predstavlja koeficiente
%       polinoma dveh spremenljivk stopnje 5 v Bezierjevi
%       obliki
```

2. Izračunajte koeficiente Argyrisovega polinoma nad trikotnikom z oglišči $\boldsymbol{V}_1 = (-1.7 - 1)$, $\boldsymbol{V}_2 = (-0.5, -1)$, $\boldsymbol{V}_3 = (-0.5, 0)$ za funkcijo f, podano s predpisom

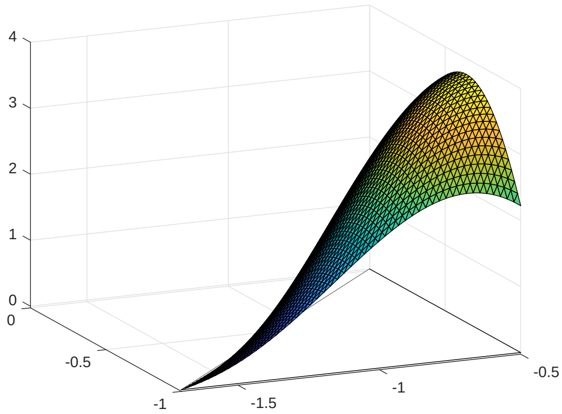
$$f(x,y) = 3(1-x)^2\, e^{-x^2-(y+1)^2} - 10\left(\tfrac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-x^2-y^2} - \tfrac{1}{3} e^{-(x+1)^2-y^2},$$

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

ki predstavlja funkcijo `peaks` v Matlabu. Narišite graf polinoma in izračunajte maksimalno absolutno napako aproksimacije f v točkah $\frac{N_1}{N}\boldsymbol{V}_1+\frac{N_2}{N}\boldsymbol{V}_2+\frac{N_3}{N}\boldsymbol{V}_3$, $N_1+N_2+N_3=N$, $N_1, N_2, N_3 \geq 0$, za $N=50$.



(a) Funkcija `peaks`



(b) Argyrisov polinom

jan.groselj@fmf.uni-lj.si