Naloga 13. *Aproksimacija z Bézierjevimi ploskvami po metodi najmanjših kvadratov.*

Vrednosti $f_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, K$ za $K \in \mathbb{N}$, so prirejene parametrom $(u_k, v_k) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Radi bi poiskali polinom

$$b(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

stopnje (m, n) s koeficienti $b_{i,j}$, ki minimizira vrednost

$$\sum_{k=1}^{K} (f_k - b(u_k, v_k))^2 .$$

Tak polinom predstavlja najboljšo aproksimacijo za dane podatke po metodi najmanjših kvadratov. Določimo ga z reševanjem predoločenega sistema

$$\begin{bmatrix} B_0^m(u_1)B_0^n(v_1) & \cdots & B_0^m(u_1)B_n^n(v_1) & \cdots & B_m^m(u_1)B_0^n(v_1) & \cdots & B_m^m(u_1)B_n^n(v_1) \\ B_0^m(u_2)B_0^n(v_2) & \cdots & B_0^m(u_2)B_n^n(v_2) & \cdots & B_m^m(u_2)B_0^n(v_2) & \cdots & B_m^m(u_2)B_n^n(v_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_0^m(u_K)B_0^n(v_K) & \cdots & B_0^m(u_K)B_n^n(v_K) & \cdots & B_m^m(u_K)B_0^n(v_K) & \cdots & B_m^m(u_K)B_n^n(v_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} \\ \vdots \\ b_{0,n} \\ \vdots \\ b_{m,0} \\ \vdots \\ b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix} .$$

Pri tem predpostavljamo, da so podatki taki, da je $K \geq (m + 1)(n + 1)$ in da je matrika zgornjega sistema polnega ranga.

1. Sestavite metodo `lsqbezier2` za izračun koeficientov polinoma stopnje (m, n), ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira podatke (u_k, v_k, f_k), $k = 1, 2, \ldots, K$.

```
function B = lsqbezier2(m,n,P)
% Opis:
%  lsqbezier2 vrne kontrolne točke tenzorskega polinoma, ki
%  po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira dane
%  podatke
%
% Definicija:
%  B = lsqbezier2(m,n,P)
%
% Vhodni podatki:
%  m,n      parametra, ki določata stopnjo polinoma,
%  P        matrika podatkov, ki v vsaki vrstici vsebuje
%           parametra z intervala [0,1] ter njima
%           pripadajočo vrednost, ki jo aproksimiramo
%
% Izhodni podatek:
%  B        matrika velikosti n+1 x m+1, ki vsebuje
%           koeficiente polinoma, ki po metodi najmanjših
%           kvadratov najbolje aproksimira dane podatke
```

2. Uporabite zgornjo metodo za konstrukcijo Bézierjeve ploskve stopnje $(9, 10)$, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira 2500 točk na grafu funkcije, ki jo določa v Matlabu vgrajena funkcija `peaks`. Uporabite spodnje ukaze.

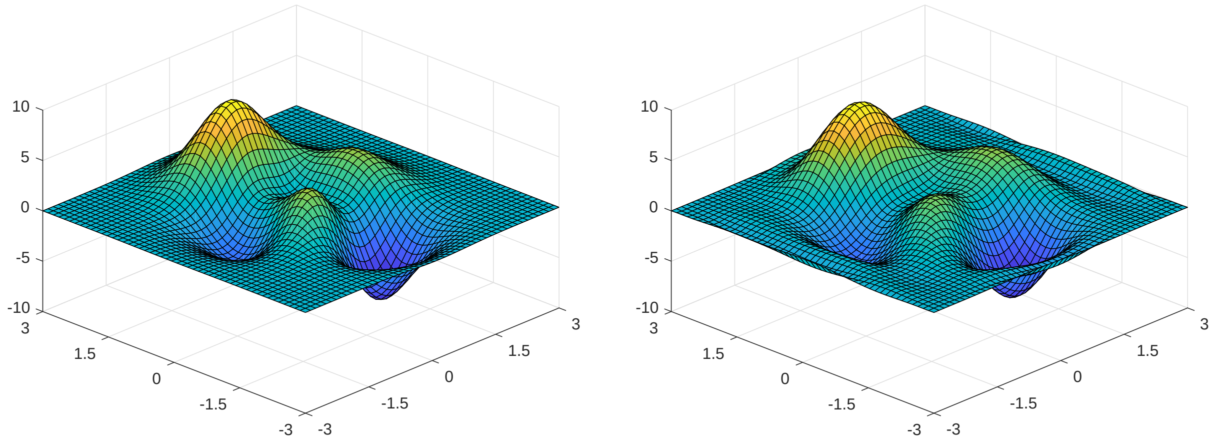
```
[X,Y,Z] = peaks(50);
P = [(X(:)+3)/6 (Y(:)+3)/6 Z(:)];
```

Tabeli `X` in `Y` sta velikosti 100×100 in določata kartezične koordinate enakomerno razporejenih točk v kvadratu $[-3, 3] \times [-3, 3]$. Tabela `Z` je prav tako velikosti 50×50, vsak njen element pa ustreza vrednosti funkcije v točki, ki je določena z istoležnima elementoma iz tabel `X` in `Y`. Vrednostim iz tabele `Z` priredimo parametre (u_k, v_k), $k = 1, 2, \ldots, 2500$, ki jih dobimo z linearno transformacijo kartezičnih koordinat s kvadrata $[-3, 3] \times [-3, 3]$ na kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Na ta način je določena tabela podatkov `P` velikosti 2500×3.

Podatke iz tabele `P` aproksimirajte po metodi najmanjših kvadratov in s tem določite aplikate kontrolnih točk Bézierjeve ploskve. Za izračun abscis in ordinat upoštevajte, da lahko funkciji $(x, y) \mapsto x$ in $(x, y) \mapsto y$ na kvadratu $[-3, 3] \times [-3, 3]$ parametriziramo s polinomoma

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(6\frac{i}{m} - 3\right) B_i^m(u)B_j^n(v), \quad \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(6\frac{j}{n} - 3\right) B_i^m(u)B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Izračunajte, kakšno je maksimalno absolutno odstopanje med aplikatami Bézierjeve ploskve pri parametrih (u_k, v_k), $k = 1, 2, \ldots, 2500$, in podanimi vrednostmi iz tretjega stolpca tabele `P`.



(a) Graf funkcije `peaks` (b) Aproksimacijska ploskev za `peaks`