4.1 李群李代数基础

上一讲，我们介绍了旋转矩阵和变换矩阵的定义。当时，我们说三维旋转矩阵构成了**特殊正交群** $SO(3)$，而变换矩阵构成了**特殊欧氏群** $SE(3)$：

$$SO(3) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times3} | \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, det(\boldsymbol{R}) = 1\}. \tag{4.1}$$

$$SE(3) = \left\{ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | \boldsymbol{R} \in SO(3), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{4.2}$$

不过，当时我们并未详细解释**群**的含义。细心的读者会注意到，旋转矩阵也好，变换矩阵也好，**它们对加法是不封闭的**。换句话说，对于任意两个旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$，它们按照矩阵加法的定义，和不再是一个旋转矩阵：

$$\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 \notin SO(3). \tag{4.3}$$

对于变换矩阵亦是如此。我们发现，这两种矩阵并没有良好定义的加法，相对的，它们只有一种较好的运算：乘法。$SO(3)$ 和 $SE(3)$ 关于乘法是封闭的:

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 \in SO(3), \quad \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 \in SE(3). \tag{4.4}$$

我们知道乘法对应着旋转或变换的复合——两个旋转矩阵相乘表示做了两次旋转。对于这种只有一个运算的集合，我们把它叫做**群**。

4.1.1 群

群（Group）是**一种集合**加上**一种运算**的代数结构。我们把集合记作 A，运算记作 $\cdot$，那么群可以记作 $G = (A, \cdot)$。群要求这个运算满足以下几个条件：

1. 封闭性: $\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$
2. 结合律: $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3).$
3. 幺元: $\exists a_0 \in A, \quad s.t. \quad \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a.$
4. 逆: $\forall a \in A, \quad \exists a^{-1} \in A, \quad s.t. \quad a \cdot a^{-1} = a_0.$

读者可以记作“封结幺逆”[①]。我们可以验证，旋转矩阵集合和矩阵乘法构成群，同样

[①]谐音凤姐咬你。

变换矩阵和矩阵乘法也构成群（因此才能称它们为旋转矩阵群和变换矩阵群）。其他常见的群包括整数的加法 $(\mathbb{Z},+)$，去掉 0 后的有理数的乘法（幺元为 1）$(\mathbb{Q}\backslash 0,\cdot)$ 等等。矩阵中常见的群有：

一般线性群 $GL(n)$　指 $n\times n$ 的可逆矩阵，它们对矩阵乘法成群。

特殊正交群 $SO(n)$　也就是所谓的旋转矩阵群，其中 $SO(2)$ 和 $SO(3)$ 最为常见。

特殊欧氏群 $SE(n)$　也就是前面提到的 n 维欧氏变换，如 $SE(2)$ 和 $SE(3)$。

群结构保证了在群上的运算具有良好的性质，而群论则是研究群的各种结构和性质的理论，但我们在此不多加介绍。感兴趣的读者可以参考任意一本近世代数教材。

李群是指具有连续（光滑）性质的群。像整数群 $\mathbb{Z}$ 那样离散的群没有连续性质，所以不是李群。而 $SO(n)$ 和 $SE(n)$，它们在实数空间上是连续的。我们能够直观地想象一个刚体能够连续地在空间中运动，所以它们都是李群。由于 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 对于相机姿态估计尤其重要，我们主要讨论这两个李群。如果读者对李群的理论性质感兴趣，请参照 [20]。

下面，我们先从较简单的 $SO(3)$ 开始讨论，我们将发现每个李群都有对应的李代数。我们首先引出 $SO(3)$ 上面的李代数 $\mathfrak{so}(3)$。

4.1.2 李代数的引出

考虑任意旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$，我们知道它满足：

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{I}. \tag{4.5}$$

现在，我们说，$\boldsymbol{R}$ 是某个相机的旋转，它会随时间连续地变化，即为时间的函数：$\boldsymbol{R}(t)$。由于它仍是旋转矩阵，有

$$\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}(t)^T=\boldsymbol{I}.$$

在等式两边对时间求导，得到：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T+\boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t)^T=0.$$

整理得：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T=-\left(\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T\right)^T. \tag{4.6}$$

可以看出 $\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T$ 是一个**反对称**矩阵。回忆之前，我们在式（3.3）介绍叉积时，引入了 $^\wedge$ 符号，将一个向量变成了反对称矩阵。同理，对于任意反对称矩阵，我们亦能找到一个与之对应的向量。把这个运算用符号 $^\vee$ 表示：

$$\boldsymbol{a}^{\wedge} = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\vee} = \boldsymbol{a}. \tag{4.7}$$

于是，由于 $\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T$ 是一个反对称矩阵，我们可以找到一个三维向量 $\boldsymbol{\phi}(t) \in \mathbb{R}^3$ 与之对应。于是有：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = \boldsymbol{\phi}(t)^{\wedge}.$$

等式两边右乘 $\boldsymbol{R}(t)$，由于 $\boldsymbol{R}$ 为正交阵，有：

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)^{\wedge}\boldsymbol{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{R}(t). \tag{4.8}$$

可以看到，每对旋转矩阵求一次导数，只需左乘一个 $\boldsymbol{\phi}^{\wedge}(t)$ 矩阵即可。为方便讨论，我们设 $t_0 = 0$，并设此时旋转矩阵为 $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$。按照导数定义，可以把 $\boldsymbol{R}(t)$ 在 0 附近进行一阶泰勒展开：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(t) &\approx \boldsymbol{R}(t_0) + \dot{\boldsymbol{R}}(t_0)(t - t_0) \\ &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\phi}(t_0)^{\wedge}(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

我们看到 $\boldsymbol{\phi}$ 反映了 $\boldsymbol{R}$ 的导数性质，故称它在 $SO(3)$ 原点附近的正切空间 (Tangent Space) 上。同时在 t_0 附近，设 $\boldsymbol{\phi}$ 保持为常数 $\boldsymbol{\phi}(t_0) = \boldsymbol{\phi}_0$。那么根据式（4.8），有

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{\phi}(t_0)^{\wedge}\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{\phi}_0^{\wedge}\boldsymbol{R}(t).$$

上式是一个关于 $\boldsymbol{R}$ 的微分方程，而且我们知道初始值 $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$，解之，得：

$$\boldsymbol{R}(t) = \exp\left(\boldsymbol{\phi}_0^{\wedge} t\right). \tag{4.10}$$

读者可以验证上式对微分方程和初始值均成立。不过，由于做了一定的假设，所以它只在 $t = 0$ 附近有效。我们看到，旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与另一个反对称矩阵 $\boldsymbol{\phi}_0$ 通过指数关系发生了联系。也就是说，当我们知道某个时刻的 $\boldsymbol{R}$ 时，存在一个向量 $\boldsymbol{\phi}$，它们满足这个矩阵指数关系。但是矩阵的指数是什么呢？这里我们有两个问题需要澄清：

1. 如果上式成立，那么给定某时刻的 $\boldsymbol{R}$，我们就能求得一个 $\boldsymbol{\phi}$，它描述了 $\boldsymbol{R}$ 在局部的导数关系。与 $\boldsymbol{R}$ 对应的 $\boldsymbol{\phi}$ 有什么含义呢？后面会看到，$\boldsymbol{\phi}$ 正是对应到 $SO(3)$ 上的李代数 $\mathfrak{so}(3)$；
2. 其次，矩阵指数 $\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)$ 如何计算？——事实上，这正是李群与李代数间的指数/对数映射。

下面我们一一加以介绍。

4.1.3 李代数的定义

每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群的局部性质。通用的李代数的定义如下：

李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}.$
2. 双线性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有：
$$[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}].$$
3. 自反性[①] $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}.$
4. 雅可比等价 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] = \boldsymbol{0}.$

其中二元运算被称为**李括号**。从表面上来看，李代数所需要的性质还是挺多的。相比于群中的较为简单的二元运算，李括号表达了两个元素的差异。它不要求结合律，而要求元素和自己做李括号之后为零的性质。作为例子，三维向量 $\mathbb{R}^3$ 上定义的叉积 $\times$ 是一种李括号，因此 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$ 构成了一个李代数。读者可以尝试将叉积的性质代入到上面四条性质中。

4.1.4 李代数 $\mathfrak{so}(3)$

下面我们说，之前提到的 $\boldsymbol{\phi}$，事实上是一种李代数。$SO(3)$ 对应的李代数是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的向量，我们记作 $\boldsymbol{\phi}$。根据前面的推导，每个 $\boldsymbol{\phi}$ 都可以生成一个反对称矩阵：

[①] 自反性是指自己与自己的运算为零。

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\phi}^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{4.11}$$

在此定义下，两个向量 $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2$ 的李括号为：

$$[\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2] = \left(\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\Phi}_1\right)^{\vee}. \tag{4.12}$$

读者可以去验证该定义下的李括号满足上面的几条性质。由于 $\boldsymbol{\phi}$ 与反对称矩阵关系很紧密，在不引起歧义的情况下，就说 $\mathfrak{so}(3)$ 的元素是 3 维向量或者 3 维反对称矩阵，不加区别：

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\phi}^{\wedge} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\right\}. \tag{4.13}$$

至此，我们已清楚了 $\mathfrak{so}(3)$ 的内容。它们是一个由三维向量组成的集合，每个向量对应到一个反对称矩阵，可以表达旋转矩阵的导数。它与 $SO(3)$ 的关系由指数映射给定：

$$\boldsymbol{R} = \exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}). \tag{4.14}$$

指数映射会在稍后介绍。由于已经介绍了 $\mathfrak{so}(3)$，我们顺带先来看 $SE(3)$ 上对应的李代数。

4.1.5 李代数 $\mathfrak{se}(3)$

对于 $SE(3)$，它也有对应的李代数 $\mathfrak{se}(3)$。为省略篇幅，我们就不描述如何引出 $\mathfrak{se}(3)$ 了。与 $\mathfrak{so}(3)$ 相似，$\mathfrak{se}(3)$ 位于 $\mathbb{R}^6$ 空间中：

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{so}\left(3\right), \boldsymbol{\xi}^{\wedge} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{\wedge} & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}\right\}. \tag{4.15}$$

我们把每个 $\mathfrak{se}(3)$ 元素记作 $\boldsymbol{\xi}$，它是一个六维向量。前三维为平移，记作 $\boldsymbol{\rho}$；后三维为旋转，记作 $\boldsymbol{\phi}$，实质上是 $\mathfrak{so}(3)$ 元素[①]。同时，我们拓展了 $^{\wedge}$ 符号的含义。在 $\mathfrak{se}(3)$ 中，同样使用 $^{\wedge}$ 符号，将一个六维向量转换成四维矩阵，但这里不再表示反对称：

[①]请注意有些地方把旋转放前面，平移放后面，也是可行的。

$$\boldsymbol{\xi}^{\wedge} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{\wedge} & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}. \tag{4.16}$$

我们仍使用 $^{\wedge}$ 和 $^{\vee}$ 符号来指代“从向量到矩阵”和“从矩阵到向量”的关系，以保持和 $\mathfrak{so}(3)$ 上的一致性。读者可以简单地把 $\mathfrak{se}(3)$ 理解成“由一个平移加上一个 $\mathfrak{so}(3)$ 元素构成的向量”（尽管这里的 $\boldsymbol{\rho}$ 还不直接是平移）。同样，李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 亦有类似于 $\mathfrak{so}(3)$ 的李括号：

$$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2] = \left(\boldsymbol{\xi}_1^{\wedge}\boldsymbol{\xi}_2^{\wedge} - \boldsymbol{\xi}_2^{\wedge}\boldsymbol{\xi}_1^{\wedge}\right)^{\vee}. \tag{4.17}$$

读者可以验证它满足李代数的定义（留作习题）。至此我们已经见过两种重要的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{se}(3)$ 了。

4.2 指数与对数映射

4.2.1 $SO(3)$ 上的指数映射

现在来考虑第二个问题：$\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})$ 是如何计算的？它是一个矩阵的指数，在李群和李代数中，称为指数映射（Exponential Map）。同样，我们会先讨论 $\mathfrak{so}(3)$ 的指数映射，再讨论 $\mathfrak{se}(3)$ 的情形。

任意矩阵的指数映射可以写成一个泰勒展开，但是只有在收敛的情况下才会有结果，其结果仍是一个矩阵。

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n. \tag{4.18}$$

同样地，对 $\mathfrak{so}(3)$ 中任意一元素 $\boldsymbol{\phi}$，我们亦可按此方式定义它的指数映射：

$$\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n. \tag{4.19}$$

我们来仔细推导一下这个定义。由于 $\boldsymbol{\phi}$ 是三维向量，我们可以定义它的模长和它的方向，分别记作 θ 和 $\boldsymbol{a}$，于是有 $\boldsymbol{\phi} = \theta\boldsymbol{a}$。这里 $\boldsymbol{a}$ 是一个长度为 1 的方向向量。首先，对于 $\boldsymbol{a}^{\wedge}$，有以下两条性质：

$$\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{I}, \tag{4.20}$$

以及

$$\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} = -\boldsymbol{a}^{\wedge}. \tag{4.21}$$

读者可以自行验证上述性质。它们提供了处理 $\boldsymbol{a}^{\wedge}$ 高阶项的方法。利用这两个性质，我

们可以把指数映射写成：

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right) = \exp\left(\theta \boldsymbol{a}^\wedge\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\theta \boldsymbol{a}^\wedge\right)^n \\
&= \boldsymbol{I} + \theta \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^4 \left(\boldsymbol{a}^\wedge\right)^4 + ... \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \theta \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge - \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^4 \left(\boldsymbol{a}^\wedge\right)^2 + ... \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - ...\right)\boldsymbol{a}^\wedge - \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - ...\right)\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge \\
&= \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge - \cos\theta \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge \\
&= (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge \\
&= \cos\theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge.
\end{aligned}
$$

最后我们得到了一个似曾相识的式子：

$$
\exp(\theta \boldsymbol{a}^\wedge) = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.22}
$$

回忆前一讲内容，它和罗德里格斯公式，即式（3.14）如出一辄。这表明，$\mathfrak{so}(3)$ 实际上就是由所谓的**旋转向量**组成的空间，而指数映射即罗德里格斯公式。通过它们，我们把 $\mathfrak{so}(3)$ 中任意一个向量对应到了一个位于 $SO(3)$ 中的旋转矩阵。反之，如果定义对数映射，我们也能把 $SO(3)$ 中的元素对应到 $\mathfrak{so}(3)$ 中：

$$
\boldsymbol{\phi} = \ln\left(\boldsymbol{R}\right)^\vee = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}\right)^{n+1}\right)^\vee. \tag{4.23}
$$

不过我们通常不按照泰勒展开去计算对数映射。在第 3 讲中，我们已经介绍过如何根据旋转矩阵计算对应的李代数，即使用式（3.16），利用迹的性质分别求解转角和转轴，采用那种方式更加省事一些。

现在，我们介绍了指数映射的计算方法。读者可能会问，指数映射性质如何呢？是否对于任意的 $\boldsymbol{R}$ 都能找到一个唯一的 $\boldsymbol{\phi}$？很遗憾，指数映射只是一个满射。这意味着每个 $SO(3)$ 中的元素，都可以找到一个 $\mathfrak{so}(3)$ 元素与之对应；但是可能存在多个 $\mathfrak{so}(3)$ 中的元素，对应到同一个 $SO(3)$。至少对于旋转角 θ，我们知道多转 360 度和没有转是一样的——它具有周期性。但是，如果我们把旋转角度固定在 $\pm\pi$ 之间，那么李群和李代数元素是一一对应的。

$SO(3)$ 与 $\mathfrak{so}(3)$ 的结论似乎在我们意料之中。它和我们前面讲的旋转向量与旋转矩阵很相似，而指数映射即是罗德里格斯公式。旋转矩阵的导数可以由旋转向量指定，指导着如何在旋转矩阵中进行微积分运算。

4.2.2 $SE(3)$ 上的指数映射

下面我们来介绍 $\mathfrak{se}(3)$ 上的指数映射。为了节省篇幅，我们不再像 $\mathfrak{so}(3)$ 那样详细推导指数映射。$\mathfrak{se}(3)$ 上的指数映射形式如下：

$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}. \tag{4.25}$$

如果你有耐心，可以照着 $\mathfrak{so}(3)$ 上的做法推导，把 exp 进行泰勒展开推导此式。从结果上看，$\boldsymbol{\xi}$ 的指数映射左上角的 $\boldsymbol{R}$ 是我们熟知的 $SO(3)$ 中的元素，与 $\mathfrak{se}(3)$ 当中的旋转部分 $\boldsymbol{\phi}$ 对应。而右上角的 $\boldsymbol{J}$ 则可整理为（设 $\boldsymbol{\phi} = \theta \boldsymbol{a}$）：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^{\wedge}. \tag{4.26}$$

该式与罗德里格斯有些相似，但不完全一样。我们看到，平移部分经过指数映射之后，发生了一次以 $\boldsymbol{J}$ 为系数矩阵的线性变换。请读者重视这里的 $\boldsymbol{J}$，因为我们后面还要用到它。

同样的，虽然我们也可以类比推得对数映射，不过根据变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 求 $\mathfrak{so}(3)$ 上的对应向量也有更省事的方式：从左上的 $\boldsymbol{R}$ 计算旋转向量，而右上的 $\boldsymbol{t}$ 满足：

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}. \tag{4.27}$$

由于 $\boldsymbol{J}$ 可以由 $\boldsymbol{\phi}$ 得到，所以这里的 $\boldsymbol{\rho}$ 亦可由此线性方程解得。现在，我们已经弄清了李群、李代数的定义与相互的转换关系，总结如图 4-1 所示。如果读者有哪里不明白，可以翻回去几页看看公式推导。

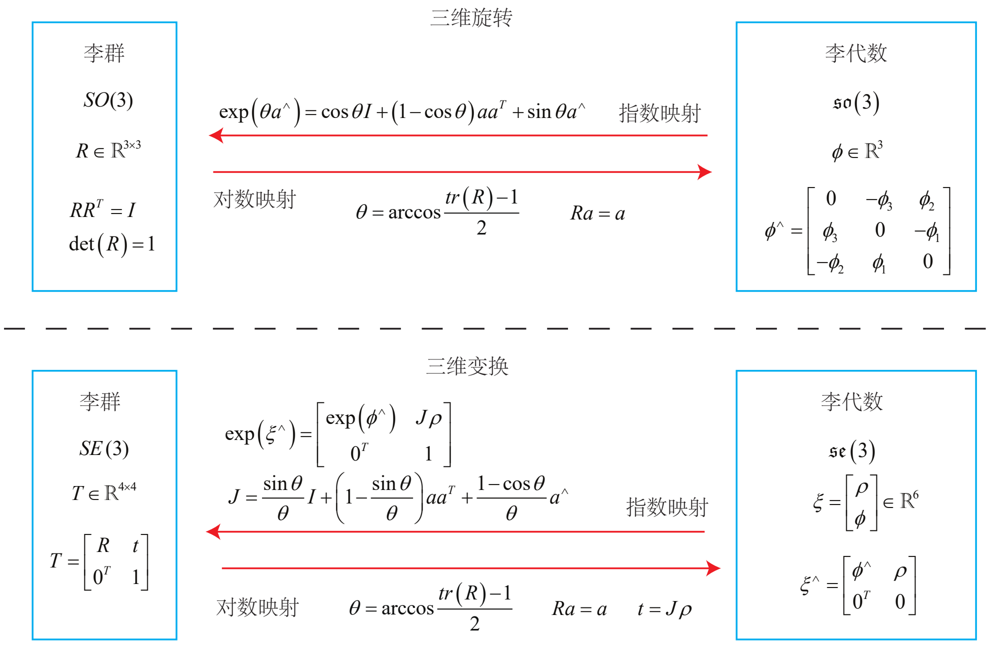

图 4-1 $SO(3), SE(3), \mathfrak{so}(3), \mathfrak{se}(3)$ 的对应关系。

4.3 李代数求导与扰动模型

4.3.1 BCH 公式与近似形式

使用李代数的一大动机是为了进行优化，而在优化过程中导数是非常必要的信息（我们会在第六讲详细介绍）。下面我们来考虑一个问题。虽然我们已经清楚了 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 上的李群与李代数关系，但是，当我们在 $SO(3)$ 中完成两个矩阵乘法时，李代数中 $\mathfrak{so}(3)$ 上发生了什么改变呢？反过来说，当 $\mathfrak{so}(3)$ 上做两个李代数的加法时，$SO(3)$ 上是否对应着两个矩阵的乘积？如果成立的话，相当于：

$$\exp\left(\phi_1^\wedge\right)\exp\left(\phi_2^\wedge\right) = \exp\left((\phi_1 + \phi_2)^\wedge\right).$$

如果 ϕ_1, ϕ_2 为标量，那显然该式成立；但此处我们计算的是**矩阵**的指数函数，而非标量的指数。换言之，我们在研究下式是否成立：

$$\ln(\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})) = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\ ?$$

很遗憾，该式在矩阵时并不成立。

两个李代数指数映射乘积的完整形式，由 Baker-Campbell-Hausdorff 公式（BCH 公式）[①]给出。由于它完整的形式较复杂，我们给出它展开式的前几项：

$$\ln(\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})) = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]+\frac{1}{12}[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]-\frac{1}{12}[\boldsymbol{B},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]+\cdots \tag{4.28}$$

其中 [] 为李括号。BCH 公式告诉我们，当处理两个矩阵指数之积时，它们会产生一些由李括号组成的余项。特别地，考虑 $SO(3)$ 上的李代数 $\ln(\exp(\boldsymbol{\phi}_1^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}_2^\wedge))^\vee$，当 $\boldsymbol{\phi_1}$ 或 $\boldsymbol{\phi_2}$ 为小量时，小量二次以上的项都可以被忽略掉。此时，BCH 拥有线性近似表达：

$$\ln(\exp(\boldsymbol{\phi}_1^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}_2^\wedge))^\vee \approx \begin{cases} \boldsymbol{J}_l(\boldsymbol{\phi}_2)^{-1}\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2 & \text{if } \boldsymbol{\phi}_1 \text{ is small,} \\ \boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\phi}_1)^{-1}\boldsymbol{\phi}_2+\boldsymbol{\phi}_1 & \text{if } \boldsymbol{\phi}_2 \text{ is small.} \end{cases} \tag{4.29}$$

以第一个近似为例。该式告诉我们，当对一个旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_2$（李代数为 $\boldsymbol{\phi}_2$）左乘一个微小旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_1$（李代数为 $\boldsymbol{\phi}_1$）时，可以近似地看作，在原有的李代数 $\boldsymbol{\phi}_2$ 上，加上了一项 $\boldsymbol{J}_l(\boldsymbol{\phi}_2)^{-1}\boldsymbol{\phi}_1$。同理，第二个近似描述了右乘一个微小位移的情况。于是，李代数在 BCH 近似下，分成了左乘近似和右乘近似两种，在使用时我们须加注意，使用的是左乘模型还是右乘模型。

本书以左乘为例。左乘 BCH 近似雅可比 $\boldsymbol{J}_l$ 事实上就是式（4.26）的内容：

$$\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I}+\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+\frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.30}$$

它的逆为：

$$\boldsymbol{J}_l^{-1} = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{I}+\left(1-\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.31}$$

而右乘雅可比仅需要对自变量取负号即可：

$$\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{J}_l(-\boldsymbol{\phi}). \tag{4.32}$$

这样，我们就可以谈论李群乘法与李代数加法的关系了。为了方便读者理解，我们重新叙述一下 BCH 近似的意义。

[①] 参见 `https://en.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff_formula`。

假定对某个旋转 $\boldsymbol{R}$，对应的李代数为 $\boldsymbol{\phi}$。我们给它左乘一个微小旋转，记作 $\Delta\boldsymbol{R}$，对应的李代数为 $\Delta\boldsymbol{\phi}$。那么，在李群上，得到的结果就是 $\Delta\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}$，而在李代数上，根据 BCH 近似，为：$\boldsymbol{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\phi})\Delta\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\phi}$。合并起来，可以简单地写成：

$$\exp\left(\Delta\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)=\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\phi}\right)\Delta\boldsymbol{\phi}\right)^\wedge\right). \tag{4.33}$$

反之，如果我们在李代数上进行加法，让一个 $\boldsymbol{\phi}$ 加上 $\Delta\boldsymbol{\phi}$，那么可以近似为李群上带左右雅可比的乘法：

$$\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+\Delta\boldsymbol{\phi}\right)^\wedge\right)=\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_l\Delta\boldsymbol{\phi}\right)^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)=\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_r\Delta\boldsymbol{\phi}\right)^\wedge\right). \tag{4.34}$$

这将为之后李代数上的做微积分提供了理论基础。同样的，对于 $SE(3)$，亦有类似的 BCH 近似公式：

$$\exp\left(\Delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\approx\exp\left(\left(\boldsymbol{\mathcal{J}}_l^{-1}\Delta\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\right)^\wedge\right), \tag{4.35}$$

$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\Delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\approx\exp\left(\left(\boldsymbol{\mathcal{J}}_r^{-1}\Delta\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\right)^\wedge\right). \tag{4.36}$$

这里 $\boldsymbol{\mathcal{J}}_l$ 形式比较复杂，它是一个 6×6 的矩阵，读者可以参考 [6] 中式 (7.82) 和 (7.83) 内容。由于我们在计算中不用到该雅可比，故这里略去它的实际形式。

4.3.2 $SO(3)$ 李代数上的求导

下面我们来讨论一个带有李代数的函数，如何关于该李代数求导的问题。该问题有很强的实际背景。在 SLAM 中，我们要估计一个相机的位置和姿态，该位姿是由 $SO(3)$ 上的旋转矩阵或 $SE(3)$ 上的变换矩阵描述的。不妨设某个时刻小萝卜的位姿为 $\boldsymbol{T}$。它观察到了一个世界坐标位于 $\boldsymbol{p}$ 的点，产生了一个观测数据 $\boldsymbol{z}$。那么，由坐标变换关系知：

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{w}. \tag{4.37}$$

然而，由于观测噪声 $\boldsymbol{w}$ 的存在，$\boldsymbol{z}$ 往往不可能精确地满足 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}$ 的关系。所以，我们通常会计算理想的观测与实际数据的误差：

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}. \tag{4.38}$$

假设一共有 N 个这样的路标点和观测，于是就有 N 个上式。那么，对小萝卜的位姿

估计，相当于是寻找一个最优的 $\boldsymbol{T}$，使得整体误差最小化：

$$\min_{\boldsymbol{T}} J(\boldsymbol{T}) = \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{T}\boldsymbol{p}_i\|_2^2. \tag{4.39}$$

求解此问题，需要计算目标函数 J 关于变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的导数。我们把具体的算法留到后面再讲。这里重点要说的是，**我们经常会构建与位姿有关的函数，然后讨论该函数关于位姿的导数，以调整当前的估计值**。然而，$SO(3), SE(3)$ 上并没有良好定义的加法，它们只是群。如果我们把 $\boldsymbol{T}$ 当成一个普通矩阵来处理优化，那就必须对它加以约束。而从李代数角度来说，由于李代数由向量组成，具有良好的加法运算。因此，使用李代数解决求导问题的思路分为两种：

1. 用李代数表示姿态，然后对根据李代数加法来对李代数求导。
2. 对李群**左乘**或**右乘**微小扰动，然后对该扰动求导，称为左扰动和右扰动模型。

第一种方式对应到李代数的求导模型，而第二种则对应到扰动模型。下面我们来讨论这两种思路的异同。

4.3.3 李代数求导

首先，考虑 $SO(3)$ 上的情况。假设我们对一个空间点 $\boldsymbol{p}$ 进行了旋转，得到了 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}$。现在，要计算旋转之后点的坐标相对于旋转的导数，我们不严谨地记为[①]：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{R}}.$$

由于 $SO(3)$ 没有加法，所以该导数无法按照导数的定义进行计算。设 $\boldsymbol{R}$ 对应的李代数为 $\boldsymbol{\phi}$，我们转而计算：

$$\frac{\partial\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}\right)}{\partial \boldsymbol{\phi}}.$$

[①]请注意这里并不能按照矩阵微分来定义导数，这只是一个记号。

按照导数的定义，有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\phi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&\approx \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\left(\boldsymbol{I}+\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{-\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta\boldsymbol{\phi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{J}_l.
\end{aligned}$$

第二行的近似为 BCH 线性近似，第三行为泰勒展开舍去高阶项后近似，第四行至第五行将反对称符号看作叉积，交换之后变号。于是，我们推导了旋转后的点相对于李代数的导数：

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\phi}} = (-\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{J}_l. \tag{4.40}$$

不过，由于这里仍然含有形式比较复杂的 $\boldsymbol{J}_l$，我们不太希望计算它。而下面要讲的扰动模型则提供了更简单的导数计算方式。

4.3.4 扰动模型（左乘）

另一种求导方式，是对 $\boldsymbol{R}$ 进行一次扰动 $\Delta\boldsymbol{R}$。这个扰动可以乘在左边也可以乘在右边，最后结果会有一点儿微小的差异，我们以左扰动为例。设左扰动 $\Delta\boldsymbol{R}$ 对应的李代数为 $\boldsymbol{\varphi}$。然后，对 $\boldsymbol{\varphi}$ 求导，即：

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{4.41}$$

该式的求导比上面更为简单：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}}\\
&\approx \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\left(1+\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}}\\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{-(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}.
\end{aligned}
$$

可见，扰动模型相比于直接对李代数求导，省去了一个雅可比 $\boldsymbol{J}_l$ 的计算。这使得扰动模型更为实用。请读者务必理解这里的求导运算，这在位姿估计当中具有重要的意义。

4.3.5 $SE(3)$ 上的李代数求导

最后，我们给出 $SE(3)$ 上的扰动模型，而直接李代数上的求导就不再介绍了。假设某空间点 $\boldsymbol{p}$ 经过一次变换 $\boldsymbol{T}$（对应李代数为 $\boldsymbol{\xi}$），得到 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}$[①]。现在，给 $\boldsymbol{T}$ 左乘一个扰动 $\Delta\boldsymbol{T}=\exp\left(\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)$，我们设扰动项的李代数为 $\delta\boldsymbol{\xi}=[\delta\boldsymbol{\rho},\delta\boldsymbol{\phi}]^T$，那么：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\delta\boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}}\frac{\exp\left(\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}}\\
&\approx \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}}\frac{\left(\boldsymbol{I}+\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}}\\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}}\frac{\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}}\\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}}\frac{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\phi}^{\wedge} & \delta\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{0}^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t}\\ 1\end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}}\\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}}\frac{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t}\right)+\delta\boldsymbol{\rho}\\ 0\end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t})^{\wedge}\\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{0}^T\end{bmatrix}\triangleq(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^{\odot}.
\end{aligned}
$$

我们把最后的结果定义成一个算符 $^{\odot}$[②]，它把一个齐次坐标的空间点变换成一个 4×6 的矩阵。

[①]请注意为了使乘法成立，$\boldsymbol{p}$ 必须使用齐次坐标。
[②]我会读作“咚”，像一个石子掉在井里。