第8周作业

Edited by Hu Chen

OUC

April 24, 2020

目录

分离变量法求解齐次弦振动的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \quad (1) \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \quad (2) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l), \quad (3) \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$ 和$\psi(x)$ 是已知函数。
注意(2) 是第一类边界条件(也称狄利克雷【英文Dirichlet】条件), (3) 是初始条件(因为关于t 求二阶导数，所以会有二个初始条件：如初始位移和初始速度)。(2) 式可以换成别的边界条件，比如把(2) 式换成$u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0$,（左边界是第二类边界条件，又称诺依曼【英文Neumann】条件，右边界是第一类边值条件）.当然还有第三类边界条件（又称罗宾【英文Robin】条件），如：$u_x(0,t) + cu(0,t) = 0.$

分离变量法

求解问题(1)–(3),如果设解$u(x,t)=T(t)X(x)$, 那么把u代入方程(1), 会得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (4) \\ T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (5) \end{cases}$$

其中λ 是任意的常数。方程(4) 的通解是$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$(此处假设$\lambda<0$),($\lambda=0$,通解为$X(x)=c_1x+c_2$, $\lambda>0$ 通解为$X(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$, 都可以形式上推出来). 有两个待定系数$c_1$, c_2, 所以需要两个条件，恰好由原问题的边界条件(2)知，有两个条件。将$u(x,t)=T(t)X(x)$ 代入(2),可以得到$X(0)=0, X(l)=0$. 因为我们要求有意义的解是非零解, 所以求解过程中发现只有$\lambda=n^2\pi^2/l^2$, $n=1,2,3,\ldots$ 有非零解，相应的解为$X_n=B_n\sin(n\pi x/l)$, B_n 是任意的常数【此处注意，如果条件(2)换成别的条件，相应的关于X(x) 的两个条件就变了,所以解X(x)也会发生变化,比如作业题14】

分离变量法(续1)

将有意义的λ 值代入(5)，可得方程(5) 的通解为$T_n = C_n \cos(n\pi at/l) + D_n \sin(n\pi at/l)$. 此时$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ 显然满足方程(1) 和边界条件(2), 但是一般不满足(3)（可以代入验证一下）。为此我们寻求它们的线性组合

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[C_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi at}{l})] \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

此处有两组待定系数C_n, D_n. 可以把$u(x,t)$ 代入原问题的初始条件(3), 得到

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi x}{l}), \tag{6}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{7}$$

分离变量法(续2)

由三角函数的正交关系

$$\int_0^l \sin(\frac{n\pi x}{l})\sin(\frac{m\pi x}{l})dx = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \quad (8) \\ \frac{l}{2}, & \text{for } m = n \quad (9) \end{cases}$$

通过(6) 和(7)，我们可以直接将C_n, D_n 解出来

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx & (10) \\ C_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx & (11) \end{cases}$$

分离变量法求解非齐次方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (0 < x < l,\ t > 0), & (12) \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), & (13) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l), & (14) \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$ 和$\psi(x)$ 是已知函数。
我们先把(12)–(14) 对应的齐次方程(1)–(3)（也就是令f(x,t)=0）的解求出来，即形如$u_n = T_n(t)X_n(x)$ 的一系列。然后我们再令问题(12)–(14) 的解$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$(注意这里的$X_n(x)$就是齐次问题的$X_n(x)$，$T_n(t)$不是原来的，是待定系数)。剩下的是如何求$T_n(t)$. 我们以(12)–(14) 为例介绍。

分离变量法求解非齐次方程(续1)

(12)–(14) 对应的齐次方程(1)–(3)的分离变量法求得$X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l})$,所以令问题(12)–(14) 的解$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$. 将其代入方程(12) 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)\right]\sin(\frac{n\pi x}{l}) = f(x,t)$$

再把$f(x,t)$ 展开同样的傅里叶级数

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

比较可得

$$T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t). \tag{15}$$

分离变量法求解非齐次方程(续2)

方程(15) 的通解为

$$T_n(t) = C_n\cos(\frac{n\pi at}{l}) + D_n\sin(\frac{n\pi at}{l}) + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin(\frac{n\pi a(t-s)}{l}) f_n(s)ds \tag{16}$$

此处有两组待定系数C_n 和D_n, 所以需要两组条件。再将解$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$ 代入初始条件(14) 得到

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(\dfrac{n\pi x}{l}) & (17) \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(0)\sin(\dfrac{n\pi x}{l}) & (18) \end{cases}$$

从中可以解出$T_n(0) = \varphi_n$, $T_n^{'}(0) = \psi_n$, 再代入(16), 即可以把C_n 和D_n,求出来:$C_n = \varphi_n$, $D_n = \frac{l\psi_n}{n\pi a}$($\varphi_n$ 和ψ_n分别是φ 和ψ 的展开系数)

习题七作业

1. 今有一弦，其两端被钉子钉紧，作自由振动，它的初位移为

$$\varphi(x) = \begin{cases} hx & (0 \leq x \leq 1), \\ h(2-x) & (1 \leq x \leq 2), \end{cases}$$

初速度为0，试求其傅氏解，其中h 为已知常数。

3. 今有一弦，其两端$x = 0$ 和$x = l$为钉所固定，作自由振动，它的初位移为0，初速度为

$$\psi(x) = \begin{cases} c & (x \in [\alpha, \beta]), \\ 0 & (x \notin [\alpha, \beta]), \end{cases}$$

其中c 为已知常数, $0 < \alpha < \beta < l$，试求其傅氏解，

5. 求解混合问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\
u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\
u(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{l}),\ u_t(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{l}) & (0 \leq x \leq l).
\end{cases}
$$

7. 今有偏微分方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_x,$$

其中b 为已知常数。作代换$u = e^{\beta x} v$, 问β 取何值时可消去方程中的一阶导数项?

8. 今有偏微分方程(此题的结果在12题会用到)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c u_t,$$

其中c 为已知常数。作代换$u = e^{\alpha t} v$, 问α 取何值时可消去方程中的一阶导数项?

12. 试用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2hu_t & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \varphi,\ u_t(x,0) = \psi & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中h 是一个充分小的正数，$\varphi(x)$,$\psi(x)$ 为充分光滑的已知函数。

14. 试用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + g & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中g 为已知常数.