4.1 函数项级数的基本性质

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 23 日

目录

4.1.1 数项级数

形式上, 复数项无穷级数就是无穷多个复数按照一定次序依次相加起来, 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots , \tag{4.1}$$

其中 z_n 为复数.

4.1.1 数项级数

形式上, 复数项无穷级数就是无穷多个复数按照一定次序依次相加起来, 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots , \tag{4.1}$$

其中 z_n 为复数. 如果记它的前 n 项的和为 S_n, 即

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n,$$

则这个无穷相加的过程可用递推公式

$$S_{n+1} = S_n + z_{n+1}$$

描述. 我们称数列 $\{S_n\}$ 为级数(4.1)的部分和序列.

用极限的观点看, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots, \tag{4.1}$$

的和就是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限, 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

用极限的观点看, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots , \tag{4.1}$$

的和就是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限, 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

所以如果级数(4.1)的部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛于复数 s, 则称级数(4.1)收敛于 s, 并称 s 为级数(4.1)的和, 记作

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

用极限的观点看, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots , \tag{4.1}$$

的和就是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限, 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

所以如果级数(4.1)的部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛于复数 s, 则称级数(4.1)收敛于 s, 并称 s 为级数(4.1)的和, 记作

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

如果复数列 $\{S_n\}$ 不收敛, 则称级数(4.1)发散.

如果级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots, \tag{4.1}$$

收敛，则有

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = s - s = 0.$$

在判别级数的敛散性时，常用这一性质证明级数发散.

由复数列与其实部和虚部数列的敛散性关系（见习题一第 15 题）知, 若记 $s = x + \mathrm{i}y, z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, 则有

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \iff x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

由复数列与其实部和虚部数列的敛散性关系（见习题一第 15 题）知, 若记 $s = x + \mathrm{i}y, z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, 则有

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \iff x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

这一结果连通了实级数理论和复级数理论. 利用它, 许多实数项级数的结果可推广到复数项级数,

由复数列与其实部和虚部数列的敛散性关系（见习题一第 15 题）知, 若记 $s = x + \mathrm{i}y, z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, 则有

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \iff x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

这一结果连通了实级数理论和复级数理论. 利用它, 许多实数项级数的结果可推广到复数项级数, 例如可得到判别复数项级数收敛性的柯西收敛原理：级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots, \tag{4.1}$$

收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时有

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon,\ p = 1, 2, 3, \cdots.$$

柯西收敛原理：级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots, \tag{4.1}$$

收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时有

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon,\ p = 1, 2, 3, \cdots.$$

直观地看, 柯西收敛原理是说无穷级数要想收敛, 即其部分和序列要想收敛, 序列的变化幅度就要随着下标 n 的增大而越来越小, 直至几乎不再变化.

- 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛.

- 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛.
- 利用柯西收敛原理容易证明：绝对收敛的级数必收敛. 因此收敛级数只可分为绝对收敛的和不绝对收敛的两类.

- 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛.
- 利用柯西收敛原理容易证明：绝对收敛的级数必收敛. 因此收敛级数只可分为绝对收敛的和不绝对收敛的两类.
- 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛但不绝对收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 条件收敛.

- 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛.
- 利用柯西收敛原理容易证明：绝对收敛的级数必收敛. 因此收敛级数只可分为绝对收敛的和不绝对收敛的两类.
- 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛但不绝对收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ 条件收敛.

为什么要引入级数的绝对收敛性?

有限个复数求和时, 因为复数的加法运算满足交换律和结合律, 其求和的次序是不重要的. 无论是从前往后求, 还是从后往前求, 还是按任意的次序求, 只要所有的项都被加起来了, 和就只有一个.

有限个复数求和时, 因为复数的加法运算满足交换律和结合律, 其求和的次序是不重要的. 无论是从前往后求, 还是从后往前求, 还是按任意的次序求, 只要所有的项都被加起来了, 和就只有一个.

那无穷级数呢?

有限个复数求和时，因为复数的加法运算满足交换律和结合律，其求和的次序是不重要的. 无论是从前往后求，还是从后往前求，还是按任意的次序求，只要所有的项都被加起来了，和就只有一个.

那无穷级数呢?

黎曼证明了条件收敛的实级数如果求和次序允许被打乱的话，则其按照某种不同次序求得的和可以为任意一个实数（包括 $+\infty$ 和 $-\infty$）.

有限个复数求和时, 因为复数的加法运算满足交换律和结合律, 其求和的次序是不重要的. 无论是从前往后求, 还是从后往前求, 还是按任意的次序求, 只要所有的项都被加起来了, 和就只有一个.

那无穷级数呢?

黎曼证明了条件收敛的实级数如果求和次序允许被打乱的话, 则其按照某种不同次序求得的和可以为任意一个实数（包括 $+\infty$ 和 $-\infty$）.

绝对收敛的级数不论如何改变求和的次序, 其和是不会改变的. 因此可以说绝对收敛性保证了对无穷级数加法交换律和结合律仍然有效.

下面我们专门讨论一下收敛级数的乘法问题.

下面我们专门讨论一下收敛级数的乘法问题.

为了定义两个收敛级数的乘积，我们先回忆一下两个有限和的乘积的结果

$$\left(\sum_{j=1}^{J} z_j\right)\left(\sum_{k=1}^{K} z'_k\right)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} z_j z'_k=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} z_j z'_k,$$

其中 z'_k 表示任意的复数. 上面的这个公式表示下面的列表按行加起来和按列加起来结果相同.

$$\begin{array}{cccc}
z_1 z'_1 & z_1 z'_2 & \cdots & z_1 z'_K \\
z_2 z'_1 & z_2 z'_2 & \cdots & z_2 z'_K \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
z_J z'_1 & z_J z'_2 & \cdots & z_J z'_K
\end{array}$$

下面我们专门讨论一下收敛级数的乘法问题.

为了定义两个收敛级数的乘积, 我们先回忆一下两个有限和的乘积的结果

$$\left(\sum_{j=1}^{J} z_j\right)\left(\sum_{k=1}^{K} z_k'\right) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} z_j z_k' = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} z_j z_k',$$

其中 z_k' 表示任意的复数. 上面的这个公式表示下面的列表按行加起来和按列加起来结果相同.

$$\begin{array}{cccc} z_1 z_1' & z_1 z_2' & \cdots & z_1 z_K' \\ z_2 z_1' & z_2 z_2' & \cdots & z_2 z_K' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_J z_1' & z_J z_2' & \cdots & z_J z_K' \end{array}$$

这个等式说明两个有限和式的乘积等于它们各自的项的乘积全部加起来.

这启发我们两个无穷级数的乘积也应当为它们各自的项的乘积全部加起来.

这启发我们两个无穷级数的乘积也应当为它们各自的项的乘积全部加起来.

考虑两个收敛的级数 $s=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$, $s'=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n'$. 则它们的乘积既可按下面的表格 1 中的矩形方法相加而得, 也可按表格 2 中的对角线方法相加而得.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & z_1' & & z_2' & & z_3' & & \cdots \\ \hline
z_1 & z_1z_1' & & z_1z_2' & & z_1z_3' & & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
z_2 & z_2z_1' & \leftarrow & z_2z_2' & & z_2z_3' & & \cdots \\
 & & & & & \downarrow & & \\
z_3 & z_3z_1' & \leftarrow & z_3z_2' & \leftarrow & z_3z_3' & & \cdots \\
\vdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

表 1: 矩形求和次序

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & z_1' & & z_2' & & z_3' & & \cdots \\ \hline
z_1 & z_1z_1' & & z_1z_2' & & z_1z_3' & & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
z_2 & z_2z_1' & & z_2z_2' & & z_2z_3' & & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
z_3 & z_3z_1' & & z_3z_2' & & z_3z_3' & & \cdots \\
\vdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

表 2: 对角线求和次序

- 这里自然地出现了不同的求和次序问题, 根本无法辨别哪种求和次序更加合理.

- 这里自然地出现了不同的求和次序问题, 根本无法辨别哪种求和次序更加合理.
- 直观上, s 和 s' 是当前考虑的两个收敛级数的和, 所以这两个收敛级数的乘积应该是 ss'. 因此我们必须要求按照不同求和次序所得的和应该相同.

- 这里自然地出现了不同的求和次序问题，根本无法辨别哪种求和次序更加合理.
- 直观上，s 和 s' 是当前考虑的两个收敛级数的和，所以这两个收敛级数的乘积应该是 ss'. 因此我们必须要求按照不同求和次序所得的和应该相同.
- 已知两个绝对收敛的级数的乘积的各项的求和次序不会改变它的和. 今后我们将利用绝对收敛性来保障无穷级数的乘法运算的可行性.

虽然绝对收敛的级数的求和次序是无关紧要的, 但对角线求和方法在表示方面要优于矩形方法, 因此我们规定两个绝对收敛的级数的乘积的表示要以对角线求和方法为准.

虽然绝对收敛的级数的求和次序是无关紧要的, 但对角线求和方法在表示方面要优于矩形方法, 因此我们规定两个绝对收敛的级数的乘积的表示要以对角线求和方法为准. 按对角线求和方法, 我们可得级数乘积公式

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n\right) = ss' = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n, \tag{4.2}$$

其中 w_n 为第 n 条对角线上全部乘积项 $z_j z'_k$ 的和, 注意到这时下标 $j+k$ 都等于 $n+1$, 所以有

$$w_n = \sum_{m=1}^{n} z_m z'_{n+1-m}.$$

虽然绝对收敛的级数的求和次序是无关紧要的，但对角线求和方法在表示方面要优于矩形方法，因此我们规定两个绝对收敛的级数的乘积的表示要以对角线求和方法为准．按对角线求和方法，我们可得级数乘积公式

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n'\right) = ss' = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n, \tag{4.2}$$

其中 w_n 为第 n 条对角线上全部乘积项 $z_j z_k'$ 的和，注意到这时下标 $j+k$ 都等于 $n+1$，所以有

$$w_n = \sum_{m=1}^{n} z_m z_{n+1-m}'.$$

柯西首次把两个级数的乘积表示成这个形式，今后我们称由公式(4.2)定义的级数乘积为级数的柯西乘积．

4.1.2 一致收敛的函数项级数

设复变函数列 $\{f_n(z)\}$ 的各项均在点集 $E \subset \mathbb{C}$ 上有定义, 则称表达式

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

为复变函数项级数, 简称为函数项级数.

4.1.2 一致收敛的函数项级数

设复变函数列 $\{f_n(z)\}$ 的各项均在点集 $E \subset \mathbb{C}$ 上有定义, 则称表达式

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

为复变函数项级数, 简称为函数项级数.对任一点 $z_0 \in E$, 如果数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$$

收敛, 则称 z_0 为函数项级数(4.3)的收敛点.

4.1.2 一致收敛的函数项级数

设复变函数列 $\{f_n(z)\}$ 的各项均在点集 $E \subset \mathbb{C}$ 上有定义, 则称表达式

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

为复变函数项级数, 简称为函数项级数.对任一点 $z_0 \in E$, 如果数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$$

收敛, 则称 z_0 为函数项级数(4.3)的收敛点. 函数项级数(4.3)的全体收敛点所构成的集合称为它的收敛域, 暂记作 D.

通过函数项级数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

我们实际上定义了收敛域 D 上的一个函数, 即

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \quad z\in D.$$

通过函数项级数

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

我们实际上定义了收敛域 D 上的一个函数, 即

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \quad z \in D.$$

我们称函数 $f(z)$ 为函数项级数(4.3)的和函数.

通过函数项级数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(z) \tag{4.3}$$

我们实际上定义了收敛域 D 上的一个函数, 即

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(z),\quad z\in D.$$

我们称函数 $f(z)$ 为函数项级数(4.3)的和函数.

有限项函数的和在公共的定义域上是一个函数, 函数项级数的和自然也应该是一个函数.

通过函数项级数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

我们实际上定义了收敛域 D 上的一个函数, 即

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \quad z\in D.$$

我们称函数 $f(z)$ 为函数项级数(4.3)的和函数.

有限项函数的和在公共的定义域上是一个函数, 函数项级数的和自然也应该是一个函数. 一个函数项级数的收敛域就是它的和函数的定义域. 所以只有在收敛域非空时, 和函数的概念才有意义. 因此收敛域是函数项级数的最基本的概念.

对函数项级数

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \tag{4.3}$$

我们可以定义它的部分和函数为

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z).$$

对函数项级数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(z) \tag{4.3}$$

我们可以定义它的部分和函数为

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}f_k(z).$$

易知函数项级数(4.3)的和函数 $f(z)$ 正是它的部分和函数列 $\{S_n(z)\}$ 在收敛域 D 上的极限函数.

我们知道, 两个连续函数的和是一个连续函数, 因而有限个连续函数的和仍是一个连续函数.

我们知道, 两个连续函数的和是一个连续函数, 因而有限个连续函数的和仍是一个连续函数.

我们希望无穷多个连续函数的和, 即连续函数项级数的和函数仍是一个连续函数.

我们知道, 两个连续函数的和是一个连续函数, 因而有限个连续函数的和仍是一个连续函数.

我们希望无穷多个连续函数的和, 即连续函数项级数的和函数仍是一个连续函数.

对可导性和可积性, 我们也抱有同样的期望. 总之, 我们希望和函数能继承函数项级数中各项共有的一些性质, 例如连续性、可积性、可微性等.

然而, 和函数一般不会再有函数项级数各项都具有的一些良好性质.

然而, 和函数一般不会再有函数项级数各项都具有的一些良好性质.

我们举一个具体的例子. 由于我们讨论的问题是实函数理论的推广, 因此举一个实函数的例子就足以说明问题了.

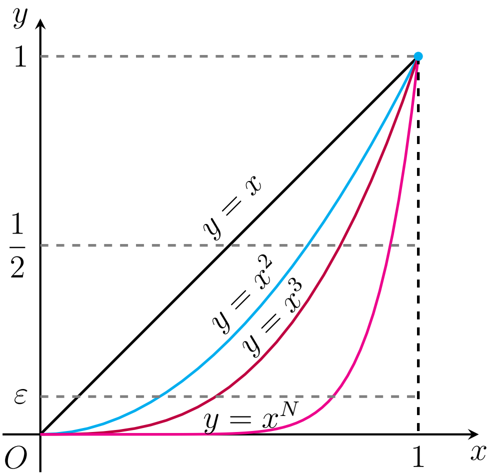
然而，和函数一般不会再有函数项级数各项都具有的一些良好性质.

我们举一个具体的例子. 由于我们讨论的问题是实函数理论的推广，因此举一个实函数的例子就足以说明问题了. 考虑到函数项级数与部分和函数列之间的关系，为简单起见，我们考虑一个实函数列

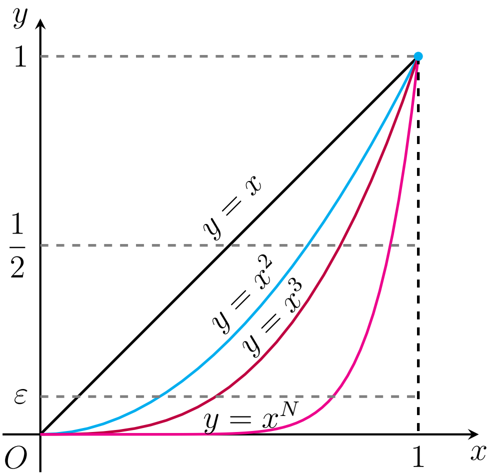
$$f_n(x) = x^n, x \in [0,1], n = 1, 2, 3, \cdots .$$

容易得到它的极限函数是

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



虽然在 $[0,1]$ 上每个点处，函数列作为数列都收敛，但收敛的快慢程度即收敛速度却大不相同，在越靠近左端点 $x=0$ 的点处收敛速度就越快，只要离左端点足够近，收敛速度就可以充分的快；相反，越靠近右端点 $x=1$ 收敛速度就越慢，甚至可以任意的慢．正是右端点 $x=1$ 附近的任意慢的收敛速度造成了极限函数的不连续性．



虽然在 $[0,1]$ 上每个点处，函数列作为数列都收敛，但收敛的快慢程度即收敛速度却大不相同，在越靠近左端点 $x=0$ 的点处收敛速度就越快，只要离左端点足够近，收敛速度就可以充分的快；相反，越靠近右端点 $x=1$ 收敛速度就越慢，甚至可以任意的慢．正是右端点 $x=1$ 附近的任意慢的收敛速度造成了极限函数的不连续性．

要想保证和函数的连续性，就要把不连续点的一个邻域从收敛域中剔除掉．换句话说，我们要求收敛速度有下限．这就引出了函数项级数的一致收敛性概念．

为给出一致收敛性的严格定义, 我们先用 $\varepsilon - N$ 语言来严格陈述定义函数项级数的和函数时的收敛性：对任意给定的 $z \in D$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon, z)$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

为给出一致收敛性的严格定义, 我们先用 $\varepsilon - N$ 语言来严格陈述定义函数项级数的和函数时的收敛性：对任意给定的 $z \in D$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon, z)$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

注意这里 N 的取法不仅依赖于 ε, 而且依赖于 $z \in D$. 因此我们称这种收敛性为逐点收敛性.

为给出一致收敛性的严格定义, 我们先用 $\varepsilon - N$ 语言来严格陈述定义函数项级数的和函数时的收敛性：对任意给定的 $z \in D$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon, z)$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

注意这里 N 的取法不仅依赖于 ε, 而且依赖于 $z \in D$. 因此我们称这种收敛性为逐点收敛性.

对同一 ε, 取得的 N 的大小反应了收敛速度的快慢. N 越小, 则收敛速度越快; N 越大, 则收敛速度越慢. 逐点收敛性不但允许函数项级数在每个点处的收敛速度不同, 而且允许任意慢的收敛速度.

与逐点收敛性相比, 一致收敛性要求对不同的 z 可取到同一个 N. 这意味着在考虑一致收敛性时, 收敛域内的在其上收敛速度太慢的那部分点集必须被舍弃掉.

定义 4.1 (函数项级数的一致收敛性)

设函数 $f(z)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的和函数, 点集 G 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的收敛域 D 的一个子集. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon, G)$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $z \in G$ 均有

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 G 上**一致收敛**于 $f(z)$.

与逐点收敛性相比，一致收敛性要求对不同的 z 可取到同一个 N. 这意味着在考虑一致收敛性时，收敛域内的在其上收敛速度太慢的那部分点集必须被舍弃掉.

定义 4.1 (函数项级数的一致收敛性)

设函数 $f(z)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的和函数，点集 G 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的收敛域 D 的一个子集. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N = N(\varepsilon, G)$，使当 $n > N$ 时，对一切 $z \in G$ 均有

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 G 上**一致收敛**于 $f(z)$.

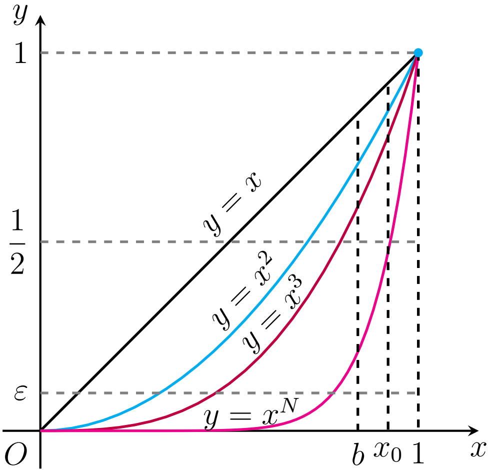
显然, 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在点集 G 上一致收敛于和函数 $f(z)$, 则在 G 的任一子集上也一致收敛于 $f(z)$.

显然, 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在点集 G 上一致收敛于和函数 $f(z)$, 则在 G 的任一子集上也一致收敛于 $f(z)$.

那么一致收敛性成立的最大范围如何确定呢?

显然, 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在点集 G 上一致收敛于和函数 $f(z)$, 则在 G 的任一子集上也一致收敛于 $f(z)$.

那么一致收敛性成立的最大范围如何确定呢？实际上, 这个最大范围一般是不可能被确定出来的, 因为一致收敛的范围与收敛速度的下限有关, 但一致收敛性定义中的收敛速度的下限实际上可以任意小.



函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,b]$ 上是一致收敛的, 还可以证明在区间 $[0,x_0]$ 上也是一致收敛的. 事实上, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任一区间 $[0,a](0<a<1)$ 上都是一致收敛的.

从这个例子里我们看到一致收敛性成立的范围有时可以无限地接近收敛域, 但两者之间始终会存在一个“缝隙”. 正因如此, 有些书中会针对这种情况定义另一种收敛性: 内闭一致收敛性. 在本课程中, 我们将回避它.

关于函数项级数一致收敛性的判别法，我们有柯西一致收敛原理：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在点集 G 上一致收敛当且仅对当任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N = N(\varepsilon, G)$，使当 $n > N$ 时，对一切 $z \in G$ 均有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon,\ p = 1, 2, 3, \cdots .$$

关于函数项级数一致收敛性的判别法，我们有柯西一致收敛原理：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在点集 G 上一致收敛当且仅对当任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N = N(\varepsilon, G)$，使当 $n > N$ 时，对一切 $z \in G$ 均有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \ p = 1, 2, 3, \cdots .$$

利用柯西一致收敛原理可得关于一致收敛的魏尔斯特拉斯 $\boldsymbol{M}$-判别法：如果

$$|f_n(z)| \leq M_n, z \in G, \ n = 1, 2, 3, \cdots ,$$

并且正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 G 上绝对收敛且一致收敛.

前面我们只对数项级数定义了绝对收敛性, 但由于函数项级数的和函数是在逐点收敛性下作为数项级数的和被定义的, 所以很容易把绝对收敛性推广到函数项级数上来.

前面我们只对数项级数定义了绝对收敛性, 但由于函数项级数的和函数是在逐点收敛性下作为数项级数的和被定义的, 所以很容易把绝对收敛性推广到函数项级数上来.

魏尔斯特拉斯 M-判别法的方便之处是可以同时判别绝对收敛性和一致收敛性.

前面我们只对数项级数定义了绝对收敛性, 但由于函数项级数的和函数是在逐点收敛性下作为数项级数的和被定义的, 所以很容易把绝对收敛性推广到函数项级数上来.

魏尔斯特拉斯 M-判别法的方便之处是可以同时判别绝对收敛性和一致收敛性.

在引入一致收敛性之后, 我们需要考察一致收敛性是否能够保证和函数继承通项的一些良好性质. 从下面的三个定理中, 读者可以看到一致收敛性的确满足了我们的需求.

定理 4.1

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在点集 G 上连续, 并且在 G 上一致收敛于 $f(z)$, 则和函数 $f(z)$ 在 G 上连续.

定理 4.1

设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在点集 G 上连续, 并且在 G 上一致收敛于 $f(z)$, 则和函数 $f(z)$ 在 G 上连续.

证　设 z_0 为 G 上任意一点, $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$.

定理 4.1

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在点集 G 上连续, 并且在 G 上一致收敛于 $f(z)$, 则和函数 $f(z)$ 在 G 上连续.

证 设 z_0 为 G 上任意一点, $S_N(z) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(z)$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 利用三角不等式我们有

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - S_N(z) + S_N(z) - S_N(z_0) + S_N(z_0) - f(z_0)| \\
&\leq |f(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - f(z_0)|.
\end{aligned}
$$

定理 4.1

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在点集 G 上连续, 并且在 G 上一致收敛于 $f(z)$, 则和函数 $f(z)$ 在 G 上连续.

证 设 z_0 为 G 上任意一点, $S_N(z)=\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(z)$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 利用三角不等式我们有

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f(z_0)| &= |f(z)-S_N(z)+S_N(z)-S_N(z_0)+S_N(z_0)-f(z_0)| \\
&\leq |f(z)-S_N(z)|+|S_N(z)-S_N(z_0)|+|S_N(z_0)-f(z_0)|.
\end{aligned}
$$

由一致收敛性可知存在一个 N 使得

$$|f(z)-S_N(z)|\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad |S_N(z_0)-f(z_0)|\leq\frac{\varepsilon}{3}.$$

同时, $S_N(z)$ 作为有限个连续函数的和是一个连续函数. 所以存在一个 $\delta > 0$, 使当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有

$$|S_N(z) - S_N(z_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

同时, $S_N(z)$ 作为有限个连续函数的和是一个连续函数. 所以存在一个 $\delta > 0$, 使当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有

$$|S_N(z) - S_N(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 使当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$. 这说明 $f(z)$ 在点 z_0 处连续. 最后, 由 z_0 的任意性可知 $f(z)$ 在 G 上连续. ∎

定理 4.2

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在有限长的曲线 C 上连续, 并且在 C 上一致收敛于 $f(z)$, 则沿 C 可以逐项积分

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

证　首先由定理4.1, $f(z)$ 在曲线 C 上也连续, 从而可积.

定理 4.2

设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在有限长的曲线 C 上连续, 并且在 C 上一致收敛于 $f(z)$, 则沿 C 可以逐项积分

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

证 首先由定理4.1, $f(z)$ 在曲线 C 上也连续, 从而可积. 要证明

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to+\infty} \int_C \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(z)\right) \mathrm{d}z,$$

定理 4.2

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在有限长的曲线 C 上连续, 并且在 C 上一致收敛于 $f(z)$, 则沿 C 可以逐项积分

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

证　首先由定理4.1, $f(z)$ 在曲线 C 上也连续, 从而可积. 要证明

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to+\infty} \int_C \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(z)\right)\mathrm{d}z,$$

只需证明

$$\lim_{N\to+\infty} \int_C \left(f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = 0.$$

$$\lim_{N\to+\infty}\int_C\left(f(z)-\sum_{n=1}^{N}f_n(z)\right)\mathrm{d}z=0.$$

由一致收敛性可知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个正整数 M, 使当 $N>M$ 时有

$$\left|f(z)-\sum_{n=1}^{N}f_n(z)\right|\leq\varepsilon.$$

再利用积分估计定理即可完成证明. $\blacksquare$

定理 4.3 (魏尔斯特拉斯定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在区域 G 内解析, 并且在 G 内一致收敛于 $f(z)$, 则

(1) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 G 内解析.

(2) $f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(m)}(z),\ z \in G,\ m = 1, 2, 3, \cdots.$

定理 4.3 (魏尔斯特拉斯定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在区域 G 内解析, 并且在 G 内一致收敛于 $f(z)$, 则

(1) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 G 内解析.

(2) $f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(m)}(z),\ z \in G,\ m = 1, 2, 3, \cdots.$

证 (1) 设 z_0 为 G 内任一点. 取 z_0 的一个全含于 G 内的邻域 U.

定理 4.3 (魏尔斯特拉斯定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的各项在区域 G 内解析, 并且在 G 内一致收敛于 $f(z)$, 则

(1) $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 G 内解析.

(2) $f^{(m)}(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(m)}(z),\ z\in G,\ m=1,2,3,\cdots.$

证 (1) 设 z_0 为 G 内任一点. 取 z_0 的一个全含于 G 内的邻域 U. 在 U 内任取一周线 C, 则由定理4.2可得

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

上式最后一个等号应用了柯西积分定理.

于是, 由莫雷拉定理知 $f(z)$ 在 U 内解析, 即 $f(z)$ 在点 z_0 解析.

于是, 由莫雷拉定理知 $f(z)$ 在 U 内解析, 即 $f(z)$ 在点 z_0 解析. 由 z_0 的任意性, 可知 $f(z)$ 在 G 内解析.

于是, 由莫雷拉定理知 $f(z)$ 在 U 内解析, 即 $f(z)$ 在点 z_0 解析. 由 z_0 的任意性, 可知 $f(z)$ 在 G 内解析.

(2) 设 z_0 为 G 内任一点. 取 z_0 的一个全含于 G 内的邻域 U. 在 U 内取一以 z_0 为心的圆周 C. 于是由定理 3.7 有

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \mathrm{d}\zeta, \ m = 1, 2, 3, \cdots ,$$

$$f_n^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \mathrm{d}\zeta, \ m = 1, 2, 3, \cdots .$$

于是, 由莫雷拉定理知 $f(z)$ 在 U 内解析, 即 $f(z)$ 在点 z_0 解析. 由 z_0 的任意性, 可知 $f(z)$ 在 G 内解析.

(2) 设 z_0 为 G 内任一点. 取 z_0 的一个全含于 G 内的邻域 U. 在 U 内取一以 z_0 为心的圆周 C. 于是由定理 3.7 有

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \mathrm{d}\zeta, \ m = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$f_n^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \mathrm{d}\zeta, \ m = 1, 2, 3, \cdots.$$

容易证明级数

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}$$

在 C 上是一致收敛的. 所以由定理4.2有

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\, \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\, \mathrm{d}\zeta.$$

在两端同乘以 $\dfrac{m!}{2\pi \mathrm{i}}$ 就得到要证明的

$$f^{(m)}(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(m)}(z_0), \ m = 1, 2, 3, \cdots .$$