第8周作业及其参考答案

Edited by Hu Chen

OUC

April 29, 2020

目录

二阶常系数齐次线性常微分方程的通解

给定一个二阶常系数齐次线性常微分方程

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0. \tag{1}$$

它的通解的求法为：
先写出特征方程

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{2}$$

这个方程有两个根r_1, r_2

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{3}$$

根据根的情况：

1. 有两个相异实根r_1, r_2, 则通解为$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
2. 两个相等的实根$r_1 = r_2$, 则通解为$y = (c_1 x + c_2) e^{r_1 x}$
3. 一对共轭复根,$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, 则通解为$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

一个二阶常系数非齐次线性常微分方程的通解

给定一个二阶常系数非齐次线性常微分方程

$$y'' + \beta^2 y = f(x), \quad \beta > 0. \tag{4}$$

对应的齐次方程的通解由上页可知，为$c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)$，则可由常数变易法求得方程(4)的通解为

$$y = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) + \frac{1}{\beta}\int_0^x \sin(\beta(x-s))f(s)ds$$

分离变量法求解齐次弦振动的混合问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \quad (5) \\
u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \quad (6) \\
u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l), \quad (7)
\end{cases}
$$

其中$\varphi(x)$ 和$\psi(x)$ 是已知函数。
注意(6) 是第一类边界条件(也称狄利克雷【英文Dirichlet】条件), (7) 是初始条件(因为关于t 求二阶导数，所以会有二个初始条件：如初始位移和初始速度)。(6) 式可以换成别的边界条件，比如把(6) 式换成$u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0$,（左边界是第二类边界条件，又称诺依曼【英文Neumann】条件，右边界是第一类边值条件）.当然还有第三类边界条件（又称罗宾【英文Robin】条件），如：$u_x(0,t) + cu(0,t) = 0.$

分离变量法

求解问题(5)–(7),如果设解$u(x,t)=T(t)X(x)$, 那么把u代入方程(5), 会得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (8) \\ T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (9) \end{cases}$$

其中λ 是任意的常数。方程(8) 的通解是$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$(此处假设$\lambda<0$),($\lambda=0$,通解为$X(x)=c_1x+c_2$, $\lambda>0$ 通解为$X(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$, 都可以形式上推出来). 有两个待定系数$c_1$, c_2, 所以需要两个条件，恰好由原问题的边界条件(6)知，有两个条件。将$u(x,t)=T(t)X(x)$ 代入(6),可以得到$X(0)=0, X(l)=0$. 因为我们要求有意义的解是非零解, 所以求解过程中发现只有$\lambda=n^2\pi^2/l^2$, $n=1,2,3,\ldots$ 有非零解，相应的解为$X_n=B_n\sin(n\pi x/l)$, B_n 是任意的常数【此处注意，如果条件(6)换成别的条件，相应的关于X(x) 的两个条件就变了,所以解X(x)也会发生变化,比如作业题14】

分离变量法(续1)

将有意义的λ 值代入(9)，可得方程(9) 的通解为$T_n = C_n\cos(n\pi at/l) + D_n\sin(n\pi at/l)$. 此时$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ 显然满足方程(5) 和边界条件(6), 但是一般不满足(7)（可以代入验证一下）。为此我们寻求它们的线性组合

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos(\frac{n\pi at}{l}) + D_n\sin(\frac{n\pi at}{l})]\sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{10}$$

此处有两组待定系数C_n, D_n. 可以把$u(x,t)$ 代入原问题的初始条件(7), 得到

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(\frac{n\pi x}{l}), \tag{11}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{n\pi a}{l}\sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{12}$$

分离变量法(续2)

由三角函数的正交关系

$$\int_0^l \sin(\frac{n\pi x}{l})\sin(\frac{m\pi x}{l})dx = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \quad (13) \\ \frac{l}{2}, & \text{for } m = n \quad (14) \end{cases}$$

通过(11) 和(12)，我们可以直接将C_n, D_n 解出来

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx & (15) \\ D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx & (16) \end{cases}$$

分离变量法求解非齐次方程

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (0 < x < l,\ t > 0), \quad (17)\\
u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \quad (18)\\
u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l), \quad (19)
\end{cases}
$$

其中$\varphi(x)$, $\psi(x)$ 和$f(x,t)$是已知函数,$f(x,t)$ 一般称为源项或应力项。我们先把(17)–(19) 对应的齐次方程(5)–(7)（也就是令$f(x,t)=0$）的解求出来，即形如$u_n = T_n(t)X_n(x)$ 的一系列。然后我们再令问题(17)–(19) 的解$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$(注意这里的$X_n(x)$就是齐次问题的$X_n(x)$, $T_n(t)$不是原来的，是待定系数)。剩下的是如何求$T_n(t)$. 我们以(17)–(19) 为例介绍。

分离变量法求解非齐次方程(续1)

(17)–(19) 对应的齐次方程(5)–(7)的分离变量法求得$X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l})$,所以令问题(17)–(19) 的解$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$. 将其代入方程(17) 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)\right]\sin(\frac{n\pi x}{l}) = f(x,t)$$

再把$f(x,t)$ 展开同样的傅里叶级数

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

比较可得

$$T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t). \tag{20}$$

分离变量法求解非齐次方程(续2)

方程(20) 的通解为

$$T_n(t) = C_n\cos(\frac{n\pi at}{l}) + D_n\sin(\frac{n\pi at}{l}) + \frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin(\frac{n\pi a(t-s)}{l})f_n(s)ds \tag{21}$$

此处有两组待定系数C_n 和D_n, 所以需要两组条件。再将解$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$ 代入初始条件(19) 得到

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(\frac{n\pi x}{l}) & (22) \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(0)\sin(\frac{n\pi x}{l}) & (23) \end{cases}$$

从中可以解出$T_n(0) = \varphi_n$, $T_n^{'}(0) = \psi_n$, 再代入(21), 即可以把C_n 和D_n,求出来:$C_n = \varphi_n$, $D_n = \frac{l\psi_n}{n\pi a}$($\varphi_n$ 和ψ_n分别是φ 和ψ 的展开系数)

习题七作业

1. 今有一弦，其两端被钉子钉紧，作自由振动，它的初位移为

$$\varphi(x)=\begin{cases} hx & (0\le x\le 1),\\ h(2-x) & (1\le x\le 2),\end{cases}$$

初速度为0，试求其傅氏解，其中h 为已知常数。

解

设弦的位移为$u(x,t)$，其长度为l，由题意知，$u(0,t)=0$，$u(l,t)=0$，$l=2$ (两端固定，所以两个端点的位移始终为0)，$u(x,0)=\varphi(x)$ (初始位移)，$u_t(x,0):=\psi(x)=0$ (因为初始速度为0，速度是位移关于时间t 的一阶导数)。$u(x,t)$ 满足弦振动方程$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$，(又因为是自由振动，所以不受外力，右端项$f(x,t)$=0，即$u_{tt}=a^2u_{xx}$)。所以$u(x,t)$ 满足(5)–(7)。定解问题(5)–(7) 的傅里叶解为(10)，即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+D_n\sin(\frac{n\pi at}{l})]\sin(\frac{n\pi x}{l}),$$

其系数为

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\
&= \int_0^1 hx\sin(\frac{n\pi x}{2}) + \int_1^2 h(2-x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}),
\end{aligned}
$$

$$
D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{2}{n\pi a}\int_0^2 0\cdot\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = 0,
$$

所以最后求的傅氏解为

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi a t}{2})\sin(\frac{n\pi x}{2}).
$$

3. 今有一弦，其两端$x = 0$ 和$x = l$为钉所固定，作自由振动，它的初位移为0，初速度为

$$\psi(x) = \begin{cases} c & (x \in [\alpha, \beta]), \\ 0 & (x \notin [\alpha, \beta]), \end{cases}$$

其中c 为已知常数, $0 < \alpha < \beta < l$，试求其傅氏解.

解

由作业1 的分析，我们知道$u(x, 0) := \varphi(x) = 0$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, 并且其傅氏解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}[C_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi at}{l})] \sin(\frac{n\pi x}{l}),$$

其系数为

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot \sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\
&= \frac{2}{n\pi a}\int_\alpha^\beta c\cdot \sin(\frac{n\pi x}{2})dx \\
&= \frac{2cl}{n^2\pi^2 a}\left[\cos(\frac{n\pi\alpha}{l}) - \cos(\frac{n\pi\beta}{l})\right].
\end{aligned}
$$

所以最后求的傅氏解为

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2cl}{n^2\pi^2 a}\left[\cos(\frac{n\pi\alpha}{l}) - \cos(\frac{n\pi\beta}{l})\right] \sin(\frac{n\pi a t}{l}) \sin(\frac{n\pi x}{2}).
$$

5. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \sin(\dfrac{\pi x}{l}),\ u_t(x,0) = \sin(\dfrac{\pi x}{l}) & (0 \leq x \leq l). \end{cases}$$

解

与问题(5)–(7) 比较，可知$\varphi(x) = \sin(\frac{\pi x}{l})$, $\psi(x) = \sin(\frac{\pi x}{l})$, 并且其傅里叶解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi at}{l})] \sin(\frac{n\pi x}{l}),$$

其中

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi \sin(\frac{n\pi x}{l}) dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \sin(\frac{\pi x}{l}) \sin(\frac{n\pi x}{l}) dx = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$
$$= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \sin(\frac{\pi x}{l})\sin(\frac{n\pi x}{l})dx = \begin{cases} \frac{l}{\pi a}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

所以最后求的傅氏解为

$$u(x,t) = \left[\cos(\frac{\pi at}{l}) + \frac{l}{\pi a}\sin(\frac{\pi at}{l})\right]\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

7. 今有偏微分方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + bu_x,$$

其中b 为已知常数。作代换$u = e^{\beta x}v$, 问β 取何值时可消去方程中的一阶导数项?

解

由$u(x,t) = e^{\beta x}v(x,t)$, 可知

$$u_{tt} = e^{\beta x}v_{tt},$$
$$u_x = \beta e^{\beta x}v + e^{\beta x}v_x,$$

$$u_{xx} = \beta^2 e^{\beta x} v + 2\beta e^{\beta x} v_x + e^{\beta x} v_{xx}.$$

代入原方程$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_x$ 得

$$e^{\beta x} v_{tt} = a^2 e^{\beta x} v_{xx} + (2a^2\beta + b) e^{\beta x} v_x + (2a^2\beta^2 + b\beta) e^{\beta x} v.$$

两边消去$e^{\beta x}$, 得

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + (2a^2\beta + b) v_x + (2a^2\beta^2 + b\beta) v.$$

故要想消去一阶项，只要令$2a^2\beta + b = 0$即可。所以$\beta = -\frac{b}{2a^2}$.
8. 今有偏微分方程(此题的结果在12题会用到)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c u_t,$$

其中c 为已知常数。作代换$u = e^{\alpha t} v$, 问α 取何值时可消去方程中的一阶导数项?

解

由$u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$, 可知

$$u_{xx} = e^{\alpha t} v_{xx},$$

$$u_t = \alpha e^{\alpha t} v + e^{\alpha x} v_t,$$

$$u_{tt} = \alpha^2 e^{\alpha t} v + 2\alpha e^{\alpha t} v_t + e^{\alpha t} v_{tt}.$$

代入原方程$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c u_t$ 得

$$e^{\alpha t} v_{tt} = a^2 e^{\alpha t} v_{xx} + (c - 2\alpha) e^{\alpha t} v_t + (c\alpha - \alpha^2) e^{\alpha t} v.$$

两边消去$e^{\alpha t}$, 得$v_{tt} = a^2 v_{xx} + (c - 2\alpha) v_t + (c\alpha - \alpha^2) v$. 故要想消去一阶项，只要令$c - 2\alpha = 0$即可。所以$\alpha = \frac{c}{2}$. 此时方程变为

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \frac{c^2}{4} v.$$

注2.1

7题和8 题的意义在于，经过我们的变换，消掉一阶项，在处理某些问题的时候会方便很多。比如用分离变量法求解新方程，会比较简单。原方程如果直接用分离变量法求解，比如说第7 题，如果设$u(x,t)=T(t)X(t)$, 代入方程得

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)+bT(t)X'(x),$$

两边同时除以$a^2T(t)X(x)$ 得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''}{X(x)}+\frac{bX'(x)}{a^2X(x)}$$

令两边都等于常数$-\lambda$,得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x)+\dfrac{b}{a^2}X'(x)+\lambda X(x)=0 & (24)\\ T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (25)\end{cases}$$

但是如果考虑变换后的方程$v_{tt}=a^2v_{xx}+cv$, 同样设$v(x,t)=T(t)X(x)$,

我们得到

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) + cT(t)X(x),$$

两边同时除以$a^2T(t)X(x)$ 得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''}{X(x)} + \frac{c}{a^2}$$

令两边都等于常数$-\lambda$,得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x) + (\frac{c}{a^2} + \lambda)X(x) = 0 & (26) \\ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (27) \end{cases}$$

.

与原来的方程(24)-(25) 比较，显然新方程更简单，且讨论起来更方便。这种化简方程思想在别的问题中也会用到，会使我们考虑的问题变的简单且易于处理。

12. 试用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2hu_t & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中h 是一个充分小的正数，$\varphi(x)$,$\psi(x)$ 为充分光滑的已知函数。

解

由8 题的结论可知, 作代换$u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$, 原方程变为$v_{tt} = a^2 v_{xx} + h^2 v$. 原来的边界条件变为$v(0,t) = 0$, $v(l,t) = 0$, 原来的初始条件变为$v(x,0) = \varphi(x)$, $v_t(x,0) = h\varphi(x) + \psi(x)$. 所以12题等价于求下面的关于$v$ 的混合问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + h^2 v & (0 < x < l,\ t > 0), & (28) \\ v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0 & (t \geq 0), & (29) \\ v(x,0) = \varphi(x),\ v_t(x,0) = h\varphi(x) + \psi(x) & (0 \leq x \leq l). & (30) \end{cases}$$

下面用分离变量法求解问题(28)–(30):

设$v(x,t)=T(t)X(x)$, 代入方程(28)
得$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)+h^2T(t)X(x)$, 由此可以得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x)+(\frac{h^2}{a^2}+\lambda)X(x)=0, & (31) \\ T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (32) \end{cases}$$

. 将$v(x,t)=T(t)X(x)$ 代入边界条件(29),可以得到$X(0)=0,\ X(l)=0.$
令$\mu=\frac{h^2}{a^2}+\lambda$, 则根据我们之前的讨论知只有$\mu=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n=1,2,\ldots,$ 方程(31)才有非零解$X_n=B_n\sin(\frac{n\pi x}{l})$, B_n 为任意常数。相应的此时$\lambda=\mu-\frac{h^2}{a^2}=\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{h^2}{a^2}$. 代入(32), 并注意到$h$ 充分小，(所以此$\lambda>0$),故方程(32) 的通解为

$$T_n(t)=C_n\cos(\omega_n t)+D_n\sin(\omega_n t),$$

其中$\omega_n=\sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-h^2}$.
令$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos(\omega_n t)+D_n\sin(\omega_n t)]\sin(\frac{n\pi x}{l})$, 代入初始条件(30), 得

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi x}{l}), \tag{33}$$

$$u_t(x,0)=h\varphi(x)+\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\omega_n\sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{34}$$

所以

$$\begin{cases} C_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi\sin(\frac{n\pi x}{l})dx & (35)\\ D_n\omega_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l(h\varphi+\psi)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx & (36)\end{cases}$$

最后再把$v(x,t)$ 代入$u(x,t)=e^{-ht}v(x,t)$，得到

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}[C_n\cos(\omega_n t)+D_n\sin(\omega_n t)]\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

,

注2.2

*12*题，如果直接用分离变量法求解，令$u(x,t)=T(t)X(x)$，会得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & (37) \\ T''(t)+2hT'(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (38) \end{cases}$$

. 先利用边界条件把$X_n(x)$ 解出来，再把相应的λ 值代入$T(t)$ 的方程，解出$T_n(t)$。最后再利用初值条件将系数求出来。这种做法也可以，留作练习。

14. 试用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+g & (0<x<l,\ t>0), \\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0 & (t\geq 0), \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0 & (0\leq x\leq l), \end{cases}$$

其中g 为已知常数.

解

先用分离变量法求解对应的齐次方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), & (39) \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0 & (t \geq 0), & (40) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 & (0 \leq x \leq l), & (41) \end{cases}$$

设$u(x,t) = T(t)X(x)$ 代入方程(39) 得$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$, 所以有

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

其中λ 是任意的常数。由此我们得到两个变量分离的常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & (42) \\ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (43) \end{cases}$$

.

再由边界条件(40),我们得到关于$X(x)$ 的两个边界条件$X(0) = 0$, $X'(l) = 0$. 下面分情况讨论:

(1)当$\lambda < 0$, 此时方程(42) 有通解

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ X'(l) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

此时系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以$c_1 = c_2 = 0$, 只有零解。

(2)当$\lambda = 0$, 此时方程(42) 有通解

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \\ X'(l) = c_1 = 0 \end{cases}$$

所以$c_1 = c_2 = 0$, 只有零解。

(2)当$\lambda > 0$, 此时方程(42) 有通解

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ X'(l) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)c_1 + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)c_2 = 0 \end{cases}$$

所以$c_1 = 0$, $c_2 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$, 要使$c_2 \neq 0$，所以只有$\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$. 于是

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

令$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}$, 此时对应的解

$$X_n = B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中B_n 为任意的常数。

接下来我们再回到原来的非齐次方程。令非齐次方程的解为$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$, 代入原方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}=g$$

再把g 展开同样的傅里叶级数

$$g=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l},$$

其中

$$g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx=\frac{4g}{(2n-1)\pi}.$$

比较可得

$$T_n''(t)+\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)=g_n. \tag{44}$$

方程(44) 的通解为

$$T_n(t) = C_n \cos(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}) + D_n \sin(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}) + \frac{2l}{(2n-1)\pi a}\int_0^t \sin(\frac{(2n-1)\pi a(t-s)}{2l}) g_n ds \quad (45)$$

再将解$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$ 代入初始条件(19) 得到

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} & (46) \\ u_t(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} & (47) \end{cases}$$

从中可以解出$T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$, 再代入(45), 可得$C_n = 0$, $D_n = 0$

所以

$$
\begin{aligned}
T_n(t) &= \frac{2l}{(2n-1)\pi a}\int_0^t \sin(\frac{(2n-1)\pi a(t-s)}{2l})g_n ds \\
&= \frac{8gl}{(2n-1)^2\pi^2 a}\int_0^t \sin(\frac{(2n-1)\pi a(t-s)}{2l})ds \\
&= -\frac{8gl}{(2n-1)^2\pi^2 a}\int_0^t \sin(\frac{(2n-1)\pi a}{2l}(t-s))d(t-s) \\
&= \frac{16gl^2}{(2n-1)^3\pi^3 a^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi a}{2l}(t-s)\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{16gl^2}{(2n-1)^3\pi^3 a^2}\left(1-\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}\right)
\end{aligned}
$$

原问题的解为$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} =$
$\frac{16gl^2}{\pi^3 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left(1-\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$.