第13周讲稿及作业

Edited by Hu Chen

OUC

May 27, 2020

目录

引子

数学中经常利用某种运算先把复杂问题变换为比较简单的问题, 然后求解, 最后再利用逆运算得到原问题的解. 例如, 利用对数运算把数的乘除运算转化为加减运算就是一个简单的例子. 积分变换也是基于这种思想来解决问题的.

对函数$f(x)$进行某种**积分变换**, 是指对它进行如下形式的含参变量的积分运算

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)k(x,\lambda)\mathrm{d}x,$$

其中的二元函数$k(x,\lambda)$称为**积分核**, $-\infty\le a<b\le+\infty$.

- 称$F(\lambda)$是$f(x)$的**像函数**, $f(x)$是$F(\lambda)$的**原像函数**.
- 积分核$k(x,\lambda)$的不同取法决定了不同的积分变换.

和分离变量法一样, 积分变换法是求解线性偏微分方程定解问题的一种重要通用方法. 但不同于分离变量法的是, 它是用于求解无界区域上的问题的.

热传导的初值问题

考虑热传导方程初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程得

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

其中λ是待定常数. 由此可得$X(x)$和$T(t)$分别满足下面的常微分方程

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \ t > 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ -\infty < x < +\infty.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ |X(\pm\infty)| < +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

分三类情况讨论:

1) 当$\lambda < 0$时, 方程$X''(x) + \lambda X(x) = 0$的通解为

$$X(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,x}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

当$x \to +\infty$时, 若$A \neq 0$, 则有$X(x) \to +\infty$. 所以有$A = 0$. 同样, 令$x \to -\infty$, 可得$B = 0$. 因此在此情形下无解.

2) 当$\lambda = 0$时, 方程$X''(x) + \lambda X(x) = 0$的通解为

$$X(x) = A + Bx, \quad -\infty < x < +\infty.$$

同理, 当$x \to \pm\infty$时, $X(x)$应有界, 故有$B = 0$. 所以在此情形下, 常数函数$X(x) = A$为特征函数.

3) 当$\lambda > 0$时，方程$X''(x) + \lambda X(x) = 0$的通解为

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中$\omega = \sqrt{\lambda} > 0$. 这个通解显然满足自然边界条件$|X(\pm\infty)| < +\infty$，所以每一个$\lambda > 0$都是特征值，而上述通解便是相应的特征函数. 为区分这些特征函数，我们将它们重写为

$$X_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

注意这里$\cos\omega x$和$\sin\omega x$是两个线性无关的特征函数.

综上所述，$\lambda = \omega^2 \geq 0$都是特征值，相应的特征函数为

$$X_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

当$\lambda = \omega^2 \geq 0$时，方程$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$的通解都可以表示为

$$T_\omega(t) = C(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}.$$

所以对任一$\omega \geq 0$，我们都有非零特解

$$u_\omega(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x].$$

叠加所有的特解，关于ω在$[0,+\infty)$积分得

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega.$$

为确定$A(\omega)$和$B(\omega)$，由初始条件可得

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

- 这个展式在什么范围内成立？即对哪些定义在整个实数轴上的函数成立？
- 如何求出函数$A(\omega)$和$B(\omega)$？

根据前面我们对特征值问题积累的经验，函数系$\{\cos\omega x,\sin\omega x\}_{\omega\geq0}$应该构成了某个函数空间中的一个坐标系，上面的等式(2)就是$\varphi(x)$在这个坐标系下的展式，而$A(\omega)$和$B(\omega)$分别是它沿坐标轴$\cos\omega x$和$\sin\omega x$方向的坐标分量. 只是由于整个实数轴上的函数比有限区间上的函数要多的多，所以相对于有限区间上的函数空间的坐标系，整个实数轴上的函数空间的坐标系中所包含的函数要多的多，以至于坐标系展式从以前的级数形式变成了现在的积分形式.

傅里叶积分表示公式

设$f(x)$是一个定义在$(-\infty,+\infty)$上的非周期函数. 因为傅里叶级数展开的适用对象是周期函数, 所以不能期望对$f(x)$可以直接作傅里叶级数展开.

虽然$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不能展成傅里叶级数, 但把它限制在有限区间$[-l,l]$上后就可以将其展成傅里叶级数了, 而且这个区间可以任意大.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\quad x\in[-l,l], \tag{3}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

将a_n,b_n的表示式代入展式(3), 我们可得

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{l}\mathrm{d}\xi,\quad x\in[-l,l].$$

由于这个展式对任意的正实数l都成立, 所以我们可猜想若令$l\to+\infty$, 则$f(x)$在实数轴上的每一点的值就都会被表示出来.

为了保证积分

$$\int_{-l}^{l} f(\xi)\mathrm{d}\xi \quad 和 \quad \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{l}\mathrm{d}\xi$$

的极限存在，我们需假定$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

于是令$l \to +\infty$，则对任意的$x \in (-\infty,+\infty)$，我们有

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{l}\mathrm{d}\xi.$$

为了能够更好地预测这个极限的结果，我们需要适当地改变一下它的写法．
记$\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}, \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{\pi}{l}, n = 1,2,3,\cdots$，将上面的极限重写为

$$f(x) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\omega_n(x-\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中$\Delta\omega = \Delta\omega_n = \dfrac{\pi}{l}$.

对黎曼积分定义熟悉的读者会发现和式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \omega_n (x-\xi) \mathrm{d}\xi$$

形式上很像是由含参变量的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega (x-\xi) \mathrm{d}\xi$$

定义的关于 ω 的函数的积分和式, 只是现在关于 ω 的积分定义的范围是$[0, \infty)$. 虽然通常无穷区间上的黎曼积分是通过有限区间上的积分对积分（上下）限取极限定义的, 但实际上它也可以通过分割、（无穷级数）求和、取极限的步骤直接定义. 因此我们可猜到取极限后的结果为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega (x-\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\omega, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{4}$$

这个公式称为傅里叶积分表示公式.

利用$\cos\omega(x-\xi)=\cos\omega x\cos\omega\xi+\sin\omega x\sin\omega\xi$, 傅里叶积分表示公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega,\quad x\in(-\infty,+\infty) \tag{4}$$

可重写为与傅里叶级数展式(3)相对应的形式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,\mathrm{d}\omega,\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{5}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x.$$

考虑下面的非齐次初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases} \tag{6}$$

前面的经验告诉我们分离变量法只能用来求解齐次方程的定解问题，而对非齐次方程的定解问题，我们必须求助于更本质的方法——特征函数展开法.

在前面的讨论中，我们已经获得了现成的函数坐标系展开形式

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\, \mathrm{d}\omega, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{5}$$

其中

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x \mathrm{d}x, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x \mathrm{d}x.$$

不过在这里我们需要先把它改造成更简洁从而更方便应用的形式.

将$\cos\omega(x-\xi)$写成复数形式

$$\cos\omega(x-\xi)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\right],$$

代入傅里叶积分表示公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega,\quad x\in(-\infty,+\infty) \tag{4}$$

中可得**复数型傅里叶积分表示公式**

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

它可重写为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{7}$$

这里$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$构成了一个函数坐标系，上面的等式是函数$f(x)$在这个坐标系下的展式，圆括号中的积分就是它沿坐标轴$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$方向的（相差一个常数$1/2\pi$的）坐标分量.

设初值问题(6)的解有如下表示形式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega,$$

其中系数

$$C(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi$$

是$u(x,t)$作为x的函数在函数坐标系$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$下的坐标（函数）. 现在求解$u(x,t)$的问题就变成了求它的坐标$C(\omega,t)$的问题. 同时将$f(x,t)$展开为

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$F(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi.$$

将上面的这两个展式代入初值问题(6)中的方程, 可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(\omega,t)+a^2\omega^2C(\omega,t)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

等式两端都是在同一坐标系$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$下的展式, 所以对应的坐标应相等. 于是可得常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(\omega,t)+a^2\omega^2C(\omega,t)=F(\omega,t),\quad t>0.$$

利用初值问题(6)中的初始条件有

$$C(\omega,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\omega.$$

因此理论上可以通过求解这个常微分方程初值问题解出$C(\omega,t)$, 从而解得$u(x,t)$.

审视一下上面的求解过程, 就会发现要想真正实现这个求解过程, 我们必须利用$f(x,t)$求出$F(\omega,t)$, 利用$\varphi(x)$求出$C(\omega,0)$和利用$C(\omega,t)$求出$u(x,t)$. 这就需要计算包含在公式(7)中的两个积分公式

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\quad 和\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

然而, 这两个积分的计算问题并不简单, 我们需要对它们展开专门的讨论. 为此我们引入下面的定义

Definition 1

如果定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(x)$的傅里叶积分表示公式成立, 则称

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{8}$$

为$f(x)$的傅里叶变换, 记作$\widehat{f}(\omega)=F[f(x)]$或$F[f]$; 而称

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

为$\widehat{f}(\omega)$的傅里叶逆变换, 记作$f(x)=F^{-1}[\widehat{f}(\omega)]$或$F^{-1}[\widehat{f}]$. 公式(9)又称为傅里叶变换反演公式.

傅里叶变换的理论基础是傅里叶积分表示公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

所以不论如何定义傅里叶变换和逆变换, 只要它们合起来与傅里叶积分表示公式一致或等价就可以.

一些其它常见的傅里叶变换定义形式：

傅里叶变换	傅里叶逆变换
$\widehat{f}(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$	$f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$
$\widehat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$
$\widehat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$
$\widehat{f}(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\omega x}\mathrm{d}x$	$f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\omega x}\mathrm{d}\omega$

最后一行的定义形式与其它的定义形式差别最大，但只需作变量替换$\eta=2\pi\omega$，便可得

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\mathrm{d}x=\widetilde{f}(\eta),$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\omega x}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta x}\mathrm{d}\eta.$$

所以它与本书采用的定义形式是等价的.

傅里叶变换的性质

性质1 (线性性质) 由傅里叶变换的定义, 容易验证积分算子F是线性算子, 即有

$$F[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 F[f_1] + c_2 F[f_2] = c_1 \widehat{f_1}(\omega) + c_2 \widehat{f_2}(\omega),\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

对此式两端同时作傅里叶逆变换, 可得

$$F^{-1}[c_1 \widehat{f_1}(\omega) + c_2 \widehat{f_2}(\omega)] = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x).$$

这说明积分算子F^{-1}也是线性算子.

对以下每一条傅里叶变换的性质, 都可类似地推出对应的傅里叶逆变换的性质.

性质2 (位移性质) $F[f(x-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}\widehat{f}(\omega),\ a \in \mathbb{R}.$

证

$$\begin{aligned} F[f(x-a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\xi=x-a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(a+\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}\widehat{f}(\omega). \end{aligned}$$

如果傅里叶变换的对象是时域上的函数, 当$a>0$时, 这条性质又常被称为是延迟性质.

性质3 (相似性质) $F[f(kx)] = \dfrac{1}{|k|}\widehat{f}\left(\dfrac{\omega}{k}\right),\ k \neq 0.$

证 需对$k>0$和$k<0$分类讨论, 除此之外, 证明过程完全类似于性质 2 的证明.

性质4 (微分性质) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, 则$F[f'(x)]=\mathrm{i}\omega\widehat{f}(\omega)$.

证 由分部积分公式有

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\omega\widehat{f}(\omega). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

由此出发, 当

$$\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=0,\ k=0,1,2,\cdots,n-1$$

时, 利用数学归纳法可证明

$$F[f^{(n)}(x)]=(\mathrm{i}\omega)^n\widehat{f}(\omega),\ n=1,2,3,\cdots. \tag{10}$$

由傅里叶变换的几何解释, 傅里叶变换把函数空间中的微分运算变成了它的坐标空间中的代数运算（准确地说, 是乘法运算）. 利用傅里叶变换的微分性质, 可以把一个偏微分方程转化为常微分方程, 把一个常微分方程转化为代数方程. 因此傅里叶变换自然成为了求解微分方程的重要工具.

性质5 (像函数的微分性质) $F[xf(x)] = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}(\omega)$.

证

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}(\omega) &= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = F[xf(x)].
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

不难用数学归纳法证明

$$F[x^n f(x)] = \mathrm{i}^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\widehat{f}(\omega), \quad n = 1, 2, \cdots .$$

这条性质表明, 虽然函数空间中的微分运算通过傅里叶变换可以变为坐标空间中的代数运算, 但函数空间中的一些代数运算却通过傅里叶变换变为坐标空间中的微分运算. 考虑到傅里叶变换和逆变换的定义可以交换, 这条性质和微分性质实质上是一回事.

性质6 (积分性质) $F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}\widehat{f}(\omega)$.

证 因为

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{-\infty}^{0} f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

所以它是$f(x)$的一个原函数. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x).$$

利用微分性质可得

$$\widehat{f}(\omega) = F[f(x)] = F\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \mathrm{i}\omega F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right].$$

所以

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\widehat{f}(\omega).$$ ∎

由傅里叶变换的几何解释, 傅里叶变换把函数空间中的微积分运算变成了它的坐标空间中的乘除法运算. 微分和积分原本隐藏着的互逆运算关系, 在坐标空间中却被以如此直接的方式呈现出来了. 这说明将函数空间中的问题转换到坐标空间中（即对函数作傅里叶变换）来讨论可能会简化原来的问题. 这正是傅里叶变换有着非常广泛的应用的原因.

为了引出函数的卷积概念，我们先讨论一下两个函数的乘积的傅里叶级数. 设$f(x)$和$g(x)$都是以2π为周期的函数，它们的傅里叶级数分别为

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\quad g(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widehat{g}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}.$$

记$h(x)=f(x)g(x)$，则有

$$h(x)=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widehat{g}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_k\widehat{g}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+m)x}.$$

令$n=k+m$，则$k=n-m$，于是有

$$h(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_{n-m}\widehat{g}_m\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

所以$h(x)$的傅里叶级数的系数$\widehat{h}_n$为

$$\widehat{h}_n=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_{n-m}\widehat{g}_m,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

我们称数列$\{\widehat{h}_n\}$为数列$\{\widehat{f}_n\}$和$\{\widehat{g}_n\}$的卷积.

我们看到有限区间上的函数空间中的函数乘积在坐标空间中变成了相应坐标序列的卷积. 这一性质对整个实数轴上的函数仍成立, 只是这时函数的坐标由序列变成了函数. 因此我们需要定义函数的卷积概念.

Definition 2

设函数 f 和 g 在$(-\infty, +\infty)$上有定义. 如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

对所有的$x \in (-\infty, +\infty)$都收敛, 则称由该积分定义的函数为 f 与 g 的卷积, 记为

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

性质7 (卷积性质) $F[f*g(x)]=\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$, $F[f(x)g(x)]=\dfrac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}(\omega)$.

证

$$\begin{aligned}F[f*g(x)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\,g(t)\mathrm{d}t\quad(\text{交换积分次序})\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}g(t)\mathrm{d}t\quad(\text{利用位移性质})\\&=\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F[f(x)g(x)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g}(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x}\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g}(\mu)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\mu)x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\mu\quad(\text{交换积分次序})\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g}(\mu)\widehat{f}(\omega-\mu)\mathrm{d}\mu=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

■

对一些难以直接求出它的傅里叶变换（或逆变换）的函数, 如果能将其看作是一些简单函数的乘积形式, 利用卷积性质, 就可能求出它的傅里叶变换（或逆变换）.

函数的卷积与函数的乘积分别是函数空间和它的坐标空间中相对应的两种函数运算, 所以函数的乘积应满足的运算律, 函数的卷积也应满足. 由此可知函数的卷积服从如下的运算律:

(1) 交换律: $f*g=g*f$;
(2) 结合律: $f*(g*h)=(f*g)*h$;
(3) 分配律: $f*(g+h)=f*g+f*h$.

函数的卷积是继加减乘除、复合等运算之后又一重要的函数运算.

傅里叶变换和逆变换分开来看就是两个独立的积分变换. 下面的对称性质揭示了同一个函数的傅里叶变换和逆变换之间的关系. 它告诉我们求函数的傅里叶变换或逆变换实际上是同一个问题.

性质8 (对称性质) $F^{-1}[f(x)] = \dfrac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)$.

证 由傅里叶逆变换的定义式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

有

$$F^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

而

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

因此

$$F^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega).$$

■

Example 3

设$f_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le A, \\ 0, & |x| > A. \end{cases}$ 求$\widehat{f}_1(\omega)$.

解 由傅里叶变换的定义有

$$\widehat{f}_1(\omega) = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = 2\frac{\sin\omega A}{\omega}. \qquad \blacksquare$$

这个例题的结果可以用于一维波动方程初值问题的求解, 见例9.

Example 4

设$f_2(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-kx}(k > 0), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ 求$\widehat{f}_2(\omega)$.

解 由傅里叶变换的定义有

$$\widehat{f}_2(\omega) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{k+\mathrm{i}\omega}. \qquad \blacksquare$$

Example 5

设$f_3(x) = \mathrm{e}^{-k|x|}(k>0)$, 求$\widehat{f_3}(\omega)$.

解 由于$f_3(x) = f_2(x) + f_2(-x)$, 由线性性质和相似性质有

$$\widehat{f_3}(\omega) = \widehat{f_2}(\omega) + \widehat{f_2}(-\omega) = \frac{1}{k+\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{k-\mathrm{i}\omega} = \frac{2k}{k^2+\omega^2}. \qquad \blacksquare$$

Example 6

设$f_4(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, 求$\widehat{f}_4(\omega)$.

解 利用分部积分公式和像函数的微分性质有

$$\begin{aligned}\widehat{f}_4(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{-1}{\mathrm{i}\omega}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+2\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{2\mathrm{i}}{\omega}F[xf_4(x)]=-\frac{2}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}_4(\omega).\end{aligned}$$

或者直接计算可得$f_4'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}=-2xf_4(x)$, 对两端作傅里叶变换, 由微分性质和像函数的微分性质同样可得上式. 所以$\widehat{f}_4(\omega)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}_4(\omega)=-\dfrac{\omega}{2}\widehat{f}_4(\omega),\\ \widehat{f}_4(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.\end{cases}$$

由此可解得

$$\widehat{f}_4(\omega)=\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Example 7

设$f_5(x) = \mathrm{e}^{-Ax^2}\ (A > 0)$，求$\widehat{f_5}(\omega)$.

解 注意到$f_5(x) = f_4(\sqrt{A}x)$，由相似性质有

$$\widehat{f_5}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{A}}\widehat{f_4}\left(\frac{\omega}{\sqrt{A}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4A}}.$$

若取$A = \dfrac{1}{4a^2t}\ (a, t > 0)$，则有

$$F\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right] = 2a\sqrt{\pi t}\,\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}.$$

两边作傅里叶逆变换可得

$$F^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}\right] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{11}$$

这个公式将用于热传导方程初值问题的傅里叶变换解法中，见例8.

对$u(x,t)$关于x作傅里叶变换, 我们有

$$\widehat{u}(\omega,t)=F[u(x,t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

对$\widehat{u}(\omega,t)$关于t求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

也就是说,

$$F\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t).$$

对$\widehat{u}(\omega,t)$关于t继续求导可得

$$F\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t)\right]=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\widehat{u}(\omega,t),\quad n=1,2,\cdots.$$

此外, 由公式(10)有

$$F\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,t)\right]=(\mathrm{i}\omega)^n\widehat{u}(\omega,t),\quad n=1,2,\cdots.$$

Example 8

求解一维热传导方程初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{12}$$

解 对方程及初始条件两端都关于 x 作傅里叶变换. 记$\widehat{u}(\omega,t) = F[u], \widehat{\varphi}(\omega) = F[\varphi]$, 由微分性质和线性性质有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t) = -a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t), & t > 0, \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$

其中的 ω 视为参数. 这个一阶常微分方程初值问题的解为

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}.$$

现在, 只需对$\widehat{u}(\omega,t)$作傅里叶逆变换便可得到初值问题(12)的解$u(x,t)$. 于是

$$u(x,t) = F^{-1}[\widehat{u}(\omega,t)] = F^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\right].$$

由卷积性质和公式(11)有

$$F^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\right] = \varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\mathrm{d}\xi.$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi. \tag{13}$$

今后遇到初值问题, 我们建议读者使用傅里叶变换法求解, 而不再使用分离变量法求解. 在前面我们之所以要比较详细地介绍求解初值问题的分离变量法, 目的主要在于让读者了解傅里叶变换法的来源, 从而更容易接受和理解傅里叶变换的概念和方法.

Example 9

求解一维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

解 对方程及初始条件关于 x 作傅里叶变换,
记$\widehat{u}(\omega,t) = F[u], \widehat{\varphi}(\omega) = F[\varphi], \widehat{\psi}(\omega) = F[\psi]$, 则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\widehat{u}(\omega,t) = -a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t), & t > 0, \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{\varphi}(\omega), \widehat{u}_t(\omega,0) = \widehat{\psi}(\omega). \end{cases}$$

解得

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{\varphi}(\omega)\cos a\omega t + \frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t.$$

现在只需求出它的傅里叶逆变换, 我们有

$$u(x,t) = F^{-1}[\widehat{u}(\omega,t)] = F^{-1}[\widehat{\varphi}(\omega)\cos a\omega t] + F^{-1}\left[\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t\right].$$

虽然一般首先会想到利用卷积性质来求这两个逆变换, 但马上就会发现$\cos a\omega t$不满足傅里叶逆变换的条件, 因为它不满足绝对可积条件. 这意味着$\cos a\omega t$的傅里叶逆变换不是一个普通函数, 而是广义函数.

利用欧拉公式和位移性质有

$$F^{-1}[\widehat{\varphi}(\omega)\cos a\omega t] = \frac{1}{2}F^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\omega)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)].$$

对 $\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t$, 虽然也没有普通函数的傅里叶变换是$\sin a\omega t$, 但利用例3的结果, 我们可以直接找到$\frac{\sin a\omega t}{a\omega}$的傅里叶逆变换. 因而可以利用卷积性质求出$\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t$的傅里叶逆变换.

或者将$\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t$重写为

$$\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t=\frac{1}{2a\mathrm{i}\omega}\widehat{\psi}(\omega)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right).$$

于是利用积分性质和位移性质有

$$\begin{aligned}F^{-1}\left[\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t\right]&=F^{-1}\left[\frac{1}{2a\mathrm{i}\omega}\widehat{\psi}(\omega)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right)\right]\\&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}F^{-1}[\widehat{\psi}(\omega)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right)]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}[\psi(\xi+at)-\psi(\xi-at)]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi+at)\mathrm{d}\xi-\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi-at)\mathrm{d}\xi\right)\\&=\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因此解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{14}$$

这就是著名的波动方程的达朗贝尔公式.

使用傅里叶变换法求解定解问题, 最困难的地方往往在于最后一步, 即求逆变换之时. 为求出解的傅里叶逆变换, 需要灵活应用傅里叶变换的性质. 若实在无法求出逆变换, 那么利用逆变换公式(9)表示出来的解的形式也是可以接受的.

n维傅里叶变换

如同傅里叶级数可以推广到多元函数情形一样, 作为它的连续版本, 傅里叶变换自然也可以推广到多元函数的情形.

下面我们以定义在整个平面上的二元实函数$u(x_1, x_2)$为例来说明推广的基本思路.

先对$u(x_1, x_2)$关于 x_1 作傅里叶变换, 有

$$\widehat{u}(\omega_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x_1} \mathrm{d}x_1,$$

变换后的函数$\widehat{u}(\omega_1, x_2)$又是一个定义在整个平面上的二元函数, 对它可以再作傅里叶变换. 只是$\widehat{u}(\omega_1, x_2)$一般是复值函数. 所以需先将傅里叶变换推广到实自变量复值函数的情形.

设$f(x)$是一个实自变量复值函数, 则它可以写成

$$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$$

的形式, 其中$f_1(x), f_2(x)$为实函数. 于是可自然地定义

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f_1}(\omega) + \mathrm{i}\widehat{f_2}(\omega)$$

为$f(x)$的傅里叶变换. 由傅里叶逆变换的线性性质, 容易验证下面的反演公式成立

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f_1}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f_2}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \\ &= f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x) = f(x).\end{aligned}$$

可以逐一验证前面所述傅里叶变换的性质都仍然成立.

现在对$\widehat{u}(\omega_1,x_2)$关于$x_2$作傅里叶变换, 便得

$$\widehat{u}(\omega_1,\omega_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\omega_1,x_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 x_2}\mathrm{d}x_2.$$

然后对$\widehat{u}(\omega_1,\omega_2)$先关于$\omega_2$做逆变换便又得$\widehat{u}(\omega_1,x_2)$, 即

$$\widehat{u}(\omega_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 x}\mathrm{d}\omega_2.$$

再对$\widehat{u}(\omega_1,x_2)$关于$\omega_1$做逆变换便又得$u(x_1,x_2)$, 即

$$u(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\omega_1,x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{d}\omega_1.$$

将上述变换和逆变换的过程各自合为一个公式表示出来便是

$$\widehat{u}(\omega_1,\omega_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$u(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

这两个公式分别就是二重傅里叶变换和逆变换的公式.

注意到二重傅里叶变换和逆变换公式的推导只是先对自变量依次逐一作一维傅里叶变换，然后再逆序逐一逆变换回去，最后把变换和逆变换的过程各自合并成一个公式而已. 对一般的多元函数完全可以做出同样的推导过程. 因此可知 n 重傅里叶变换的定义为

$$\widehat{u}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)=\int_{\mathbb{R}^n}u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

相应的逆变换公式为

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\cdots\mathrm{d}\omega_n,$$

记作

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)&=F[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=F^{-1}[\widehat{u}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)].\end{aligned}$$

如果引入向量符号$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$和$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$，则 n 重傅里叶变换和逆变换的公式可以重写为

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\omega})=\int_{\mathbb{R}^n}u(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega},$$

其中$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}=\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_nx_n$表示向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的内积. 我们看到，在向量记法下，n 重傅里叶变换和逆变换的公式表示与一维情形一样简单.

注意到n重傅里叶变换不过是n个一维傅里叶变换的复合而已, 我们可以毫不费力地将一元函数傅里叶变换的性质相应地推广到多元函数情形. 例如我们有微分公式

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right]=\mathrm{i}\omega_k F[f],\ k=1,2,\cdots,n,$$

$$F\left[\frac{\partial^{m_j+m_k} f}{\partial x_j^{m_j}\partial x_k^{m_k}}\right]=(\mathrm{i}\omega_j)^{m_j}(\mathrm{i}\omega_k)^{m_k}F[f],\ j,k=1,2,\cdots,n.$$

定义两个n元函数的卷积为

$$f*g(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

即

$$\begin{aligned}&f*g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\=&\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)g(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n,\end{aligned}$$

则我们有卷积公式

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g].$$

δ函数的傅里叶变换

对任意一个连续函数$\varphi(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x-\xi)dx = \varphi(\xi). \tag{15}$$

所以我们有

$$F[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = e^{-i\omega x}|_{x=0} = 1, \tag{16}$$

$$F[\delta(x-\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = e^{-i\omega x}|_{x=\xi} = e^{-i\omega\xi}. \tag{17}$$

形式上我们规定1 的傅里叶逆变换为$\delta(x)$, $e^{-i\omega\xi}$ 的傅里叶逆变换为$\delta(x-\xi)$.

基本解

为简单起见, 我们以位势方程

$$\Delta_3 u = f(M), \quad M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{18}$$

为例来介绍基本解方法.

由 δ 函数与普通函数的卷积运算有

$$f(M) = \delta * f(M) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(M - M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0.$$

若$\delta(M - M_0)$表示在点$M = M_0$处的单位电量的点电荷, 则$f(M_0)\delta(M - M_0)$表示在点$M = M_0$处的电量为$f(M_0)$ 的点电荷. 由于积分代表对连续量求和, 所以上式正好表明分布在整个空间区域的连续带电体可看作是由布满整个空间区域的点电荷构成的.

一般地, 若$\delta(M - M_0)$表示集中分布在点$M = M_0$处的某单位物理量的点源, 则$f(M_0)\delta(M - M_0)$表示集中分布在点$M = M_0$处的总量为$f(M_0)$的该物理量的点源. 上面的卷积公式表明密度分布为$f(M)$的连续场源可看作是由位于整个空间区域内所有点的密度分布为$f(M_0)\delta(M - M_0)$的点源构成的.

只要求出单位点电荷生成的电势场, 即方程

$$\Delta_3 V = \delta(M - M_0), \quad M = (x, y, z), M_0 = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \tag{19}$$

的解$V(M; M_0)$, 便可利用积分叠加原理得到电荷密度分布为$f(M)$的连续带电体生成的电势场, 即方程

$$\Delta_3 u = f(M), \quad M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{18}$$

的解为

$$u(M) = \int_{\mathbb{R}^3} V(M; M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0,$$

其中被积函数$V(M; M_0) f(M_0)$便是由位于点M_0处的电量为$f(M_0)$的点电荷所生成的电势场.

利用广义函数的概念和运算, 我们可以验证上述公式确实给出了方程(18)的解. 运算过程为

$$\begin{aligned}\Delta_3 u = \Delta_3 \int_{\mathbb{R}^3} V(M; M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_3 V(M; M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0 \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(M - M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0 &= f(M).\end{aligned}$$

这里所做的不是形式运算, 而是广义函数所允许的运算. 所以现在我们得到的不再是形式解, 而是真正的解, 是广义函数意义下的广义解.

由于是在整个空间范围内求解, 我们其实可以只求位于原点的单位点电荷所生成的电势场, 即只求解方程

$$\Delta_3 U = \delta(M), \quad M \in \mathbb{R}^3. \tag{20}$$

记它的解为$U(M)$. 方程(19)的解$V(M; M_0)$和方程(20)的解$U(M)$都是由单位点电荷所生成的电势场, 差别只在于点电荷的位置有所不同, 但位置是由坐标系确定的, 而坐标系是人为选取的, 所以$V(M; M_0)$和$U(M)$之间只相差一个坐标平移变换. 这意味着方程(19)的解可由(20)的解平移而得, 即$V(M; M_0) = U(M - M_0)$. 容易验证确实如此. 于是方程(18)的解的积分公式可改写为

$$u(M) = \int_{\mathbb{R}^3} U(M - M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0 = U * f(M).$$

这个公式表明连续场源生成的场不但可以看作是点源生成的场的叠加, 而且同样可用卷积的形式表示出来.

我们看到一旦求出点源$\delta(M)$生成的场$U(M)$, 便可以求出连续场源所生成的场, 所以称$U(M)$为方程(18)的基本解.

由于上面的讨论过程只用到了拉普拉斯算子Δ_3的线性性质，而与它的具体表示形式无关，所以我们可以顺利地把基本解的概念推广到一般的线性微分算子情形．一般地，有如下定义：

Definition 10

设L是一个关于$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的常系数线性微分算子，我们称方程$Lu=\delta(\boldsymbol{x})$的解$U(\boldsymbol{x})$ 为方程$Lu(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$的基本解.

由此定义可知，基本解就是由点源所生成的场，因此物理上也称基本解为点源函数.

例2.1

二阶常系数线性微分算子：

$$L:=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+C.$$

需要注意，因为没有定解条件的限制，基本解并不是唯一的．只需注意到一个基本解加上齐次方程$Lu=0$的一个解仍是基本解，便会明白这一点.

利用基本解, 可以得到非齐次方程$Lu = f(\boldsymbol{x})$的一个解的积分表示公式.

Theorem 11

设$U(\boldsymbol{x})$是微分算子方程$Lu = f(\boldsymbol{x})$的基本解, $f(\boldsymbol{x}) \in D(\mathbb{R}^n)$, 则卷积函数

$$u = U * f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} U(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{21}$$

是非齐次方程$Lu = f(\boldsymbol{x})$的解.

证 因为$LU(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$, 所以

$$LU(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}).$$

交换微分和积分的次序得

$$L(U * f) = \int_{\mathbb{R}^n} LU(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = f(\boldsymbol{x}).$$ ∎

定理中要求非齐次项$f(\boldsymbol{x})$无穷次可导的条件可根据微分算子L的阶相应放宽.

我们转向求偏微分方程的基本解问题. 下面这个例题的数学推导比较复杂, 初学者如感到困难可先跳过具体的推导过程, 但要记住结论.

Example 12

求三维位势方程的基本解.

解　用三重傅里叶变换求解

$$\Delta_3 U = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \delta(x, y, z) \quad (-\infty < x, y, z < +\infty).$$

记$\widehat{U}(\lambda, \mu, \nu) = F[U(x, y, z)]$, 我们有

$$-(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\widehat{U} = 1.$$

解得

$$\widehat{U} = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

作逆变换有

$$U = F^{-1}[\widehat{U}] = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\rho^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x + \mu y + \nu z)} \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\nu.$$

记$\boldsymbol{\rho} = (\lambda, \mu, \nu), \boldsymbol{r} = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta$为向量 $\boldsymbol{\rho}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角, 则有

$$U=F^{-1}[\widehat{U}]=-\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu=-\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu.$$

由于总是可以通过旋转变换使得ν轴与向量$\boldsymbol{r}$方向一致, 而且旋转变换不会改变体积微元的大小, 从而在这里不会改变积分表示的形式, 所以不妨设ν轴与向量$\boldsymbol{r}$方向一致. 于是利用球坐标变换

$$\lambda=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \mu=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \nu=\rho\cos\theta,$$

可得

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\\&=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\rho r}{\rho}\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

利用课本上(5.21)式可知$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\rho r}{\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}$, 从而有

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$\blacksquare$

在取无穷远处电势为零的情况下, 这个基本解就是位于原点电量为$-\varepsilon_0$的点电荷生成的电势场.

格林函数法

除去点源的概念外, 格林函数法的基本思想就是线性叠加原理, 所以只要定解问题中的定解数据与解之间是线性关系, 就可以把格林函数法推广到这个定解问题上. 因此我们可以毫无障碍地将格林函数法推广到线性发展方程的初值问题和混合问题. 在这一节, 我们仅以热传导方程和波动方程为例来做一个简单的介绍.

为简单起见, 我们只给出一维热传导方程初值问题和一个混合问题的格林函数的定义. 高维初值问题和其它混合问题的格林函数可类似定义.

Definition 13

初值问题

$$\begin{cases} G_t - a^2 G_{xx} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau), & -\infty < x,\xi < +\infty, t,\tau > 0, \\ G(x,t;\xi,\tau)\big|_{t=0} = 0, & -\infty < x,\xi < +\infty, \tau \geq 0 \end{cases} \tag{22}$$

的解$G(x,t;\xi,\tau)$称为初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{23}$$

的格林函数.

容易验证初值问题(23)的解可以用它的格林函数$G(x,t;\xi,\tau)$表示为

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,t;\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau.$$

利用齐次化原理, 初值问题(23)可转化为更基本的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{24}$$

求解. 同样利用齐次化原理, 初值问题(23)的格林函数可转化为初值问题

$$\begin{cases} G_t - a^2 G_{xx} = 0, & -\infty < x, \xi < +\infty, t > \tau \geq 0, \\ G(x,t;\xi,\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(x-\xi), & -\infty < x, \xi < +\infty, t \geq \tau \geq 0. \end{cases}$$

通过自变量变换, 这个初值问题可转化为更基本的初值问题

$$\begin{cases} G_t - a^2 G_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ G(x,0) = \delta(x), & -\infty < x < +\infty, t \geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

它的解$G(x,t)$表示在原点的单位点热源产生的稳定温度分布.

Definition 14

初值问题(25)的解称为初值问题(24)的格林函数（许多书中称为基本解）.

容易验证初值问题(24)的解可以用它的格林函数$G(x,t)$表示为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi.$$

利用初值问题(24)的格林函数$G(x,t)$可得初值问题(23)的格林函数$G(x,t;\xi,\tau)=G(x-\xi,t-\tau)$. 于是由叠加原理可得初值问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), & -\infty<x<+\infty, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases} \tag{26}$$

的解

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

这样初值问题(26)的求解就被归结为初值问题(25)的求解. 利用傅里叶变换容易求得

$$G(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Definition 15

混合问题

$$\begin{cases} G_t - a^2 G_{xx} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau), & 0 < x, \xi < l, t, \tau > 0, \\ G\big|_{x=0} = G\big|_{x=l} = 0, & 0 \le \xi \le l, t, \tau \ge 0, \\ G\big|_{t=0} = 0, & 0 \le x, \xi \le l, \tau \ge 0, \end{cases} \tag{27}$$

的解$G(x,t;\xi,\tau)$称为混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{28}$$

的格林函数.

容易证明混合问题(28)的解可以表示为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

类似于前面对初值问题的讨论, 利用齐次化原理和特征函数展开法, 可得格林函数

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \tau\in[0,t],\ x,\xi\in[0,l].$$

同上一小节一样, 我们只限于讨论一维波动方程.

Definition 16

初值问题

$$\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau), & -\infty < x, \xi < +\infty, t, \tau > 0, \\ G\big|_{t=0} = G_t\big|_{t=0} = 0, & -\infty < x, \xi < +\infty, \tau \geq 0 \end{cases}$$

的解$G(x,t;\xi,\tau)$称为初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{29}$$

的格林函数.

利用齐次化原理, 我们可以给出一个更基本的等价定义.

Definition 17

初值问题

$$\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ G(x,0) = 0, G_t(x,0) = \delta(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的解$G(x,t)$称为初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{30}$$

的格林函数.

利用傅里叶变换容易求得格林函数

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x| \le at, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

Theorem 18

若$G(x,t)$是初值问题(30)的基本解, 则初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的解

$$u(x,t) = G(x,t) * \psi(x) + \frac{\partial}{\partial t}[G(x,t) * \varphi(x)] + \int_0^t G(x,t-\tau) * f(x,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

所有的卷积运算都是关于x的, 其中$G(x,t) * \psi(x)$是初值问题(30)的解, $\dfrac{\partial}{\partial t}[G(x,t) * \varphi(x)]$是初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的解, $\displaystyle\int_0^t G(x,t-\tau) * f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$是初值问题(29)的解.

Definition 19

混合问题

$$\begin{cases} G_{tt} - a^2 G_{xx} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau), & 0 < x, \xi < l, t, \tau > 0, \\ G\big|_{x=0} = G\big|_{x=l} = 0, & 0 \le \xi \le l, t, \tau \ge 0, \\ G\big|_{t=0} = G_t\big|_{t=0} = 0, & 0 \le x, \xi \le l, \tau \ge 0, \end{cases}$$

的解$G(x,t;\xi,\tau)$称为混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{31}$$

的格林函数.

利用格林函数, 混合问题(31)的解可以表示为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

利用特征函数展开法, 可得格林函数

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad t\geq\tau\geq 0,\ x,\xi\in[0,l].$$

习题十二作业

1.求下列函数的傅氏变换:

$$(1)\ f(x) = \sin(\eta x^2).$$

$$(2)\ f(x) = \cos(\eta x^2).$$

其中$\eta > 0$.
4. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, & \\ u(x,0) = f(x) & (-\infty < x < +\infty), \\ u_t(x,0) = 0 & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

bn