第2章　规则金属波导

2. 1导波原理

2.2矩形波导

2.3圆形波导

2.4波导的激励与耦合

主要内容：

1. 规则金属波导的定义
2. 波导内电磁波的表达式
3. 电磁波的传输特性
4. 导行波的分类

基本要求：

1. **掌握规则金属波导的定义**
2. 掌握横纵分离法和纵向分量法
3. 掌握波导传输特性的主要参数：相移常数、截止波长、相速、波导波长、群速、波阻抗及传输功率
4. 掌握导行波的分类

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

1、问题出发点和假定条件

◆(1)波导一般解的出发点是频域的**Maxwell**方程组

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}(a) \\ \nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}(b) \\ \nabla\cdot\vec{E} = 0(c) \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0(d) \end{cases}$$

◆(2)假定条件

①波导条件：假定截面不随**z**而变化

②理想均匀条件：波导内**ε**、**μ**均匀，波导内壁**σ**无限大

③无源条件：波导内 ρ、$\vec{J}=0$

④无限条件：波导在**z**方向无限长

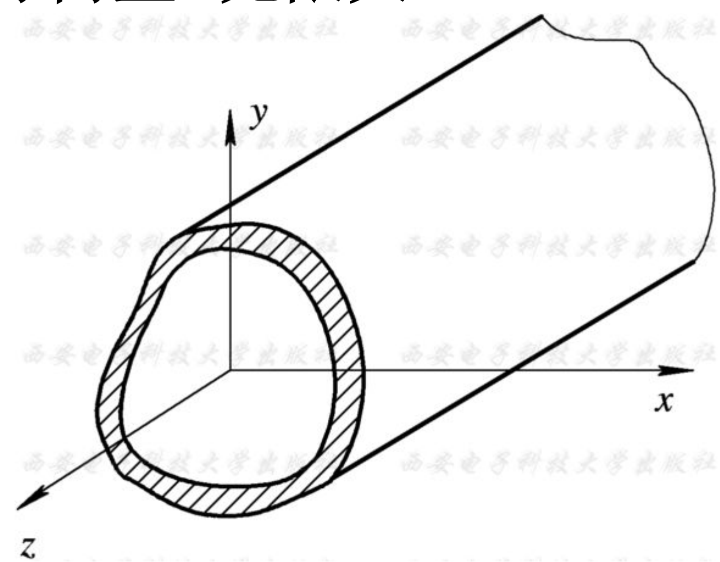

图2-1 金属波导管结构图

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解（横纵分解、纵向分量法）

◆(1)无源自由空间**E**和**H**满足矢量**Hemhez**方程:
$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases}\quad(2\text{-}1\text{-}1)$$

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

◆(2)将电场和磁场分解为横向分量和纵向分量:
$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_t+\hat{z}E_z\\ \vec{H}=\vec{H}_t+\hat{z}H_z\end{cases}\quad(2\text{-}1\text{-}2)$$

◆(3)将式**(2-1-2)**代入式**(2-1-1)**, 整理后可得

$$\begin{cases}\nabla^2 E_z+k^2E_z=0\\ \nabla^2\vec{E}_t+k^2\vec{E}_t=0\\ \nabla^2 H_z+k^2H_z=0\\ \nabla^2\vec{H}_t+k^2\vec{H}_t=0\end{cases}\quad(2\text{-}1\text{-}3)$$

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

$$\begin{cases}\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 \vec{E}_t + k^2 \vec{E}_t = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \\ \nabla^2 \vec{H}_t + k^2 \vec{H}_t = 0\end{cases} \quad \text{(2-1-3)}$$

◆(4)<u>将拉普拉斯算子分解为横向的和纵向的</u> $\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ (2-1-4)

◆(5)利用分离变量法，令 $E_z(x,y,z) = E_z(x,y)Z(z)$ (2-1-5)

◆(6)代入式(2 -1 -3)，并整理得 $-\dfrac{(\nabla_t^2 + k^2)E_z(x,y)}{E_z(x,y)} = \dfrac{\dfrac{d^2}{dz^2}Z(z)}{Z(z)}$ (2-1-6

◆(7)上式中左边是横向坐标(x, y)的函数，与z无关；而右边是z的函数，与(x, y)无关。只有二者均为一常数，上式才能成立，设该常数为γ²，则有

$$\begin{cases}\nabla_t^2 E_z(x,y) + (k^2 + \gamma^2)E_z(x,y) = 0 \quad \text{(a)} \\ \dfrac{d^2}{dz^2}Z(z) - \gamma^2 Z(z) = 0 \quad \text{(b)}\end{cases} \quad \text{(2-1-7)}$$

2.1 导波原理

$$\begin{cases}\nabla_t^2 E_z(x,y)+(k^2+\gamma^2)E_z(x,y)=0 \text{(a)}\\ \dfrac{d^2}{dz^2}Z(z)-\gamma^2 Z(z)=0 \text{(b)}\end{cases} \quad (2-1-7)$$

一、规则金属管内电磁波

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U(z)}{dz^2}-\gamma^2 U(z)=0\\ \dfrac{d^2I(z)}{dz^2}-\gamma^2 I(z)=0\end{cases} \quad (1-1-6)$$

2、 Maxwell方程组的解

◆⑻ (2-1-7)中(b)式的形式与传输线方程(1-1-6)相同，其通解为

$$Z(z)=A_+e^{-\gamma z}+A_-e^{\gamma z} \quad (2-1-8)$$

◆⑼由前面假设，规则金属波导为无限长，没有反射波，故A_=0，即纵向电场的纵向分量应满足的解的形式为 $Z(z)=A_+e^{-\gamma z}$ (2-1-9)

⊕A_+为待定常数，对无耗波导γ =jβ，而β为相移常数

◆⑽现设$E_{oz}(x, y) = A_+E_z(x, y)$，则纵向电场可表达为

$$E_z(x,y,z)=E_{0z}(x,y)e^{-j\beta z} \quad (2-1-10a)$$

◆⑾同理，纵向磁场也可表达为

$$H_z(x,y,z)=H_{0z}(x,y)e^{-j\beta z} \quad (2-1-10b)$$

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

◆⑿而$E_{oz}(x, y)$, $H_{oz}(x, y)$满足以下方程

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_{0z}(x,y) + k_c^2 E_{0z}(x,y) = 0 \\ \nabla_t^2 H_{0z}(x,y) + k_c^2 H_{0z}(x,y) = 0 \end{cases} \quad (2\text{-}1\text{-}11)$$

⌖式中, $k_c^2=k^2-\beta^2$为传输系统的本征值

◆⒀由麦克斯韦方程, 无源区电场和磁场应满足的方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \end{cases} \quad (2\text{-}1\text{-}12)$$

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

$$E_z(x,y,z)=E_{0z}(x,y)e^{-j\beta z} \quad (2\text{-}1\text{-}10a)$$

$$H_z(x,y,z)=H_{0z}(x,y)e^{-j\beta z} \quad (2\text{-}1\text{-}10b)$$

◆⒁将它们用直角坐标展开, 并利用式（**2-1-10**）可得

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E} \qquad\qquad \nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon(E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}) \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu(H_x\vec{i}+H_y\vec{j}+H_z\vec{k})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma H_y=j\omega\varepsilon E_x \quad (1) \\ -\gamma H_x-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon E_y \quad (2) \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_z \quad (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y}+\gamma E_y=-j\omega\mu H_x \quad (4) \\ -\gamma E_x-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-j\omega\mu H_y \quad (5) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z \quad (6) \end{cases}$$

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

◆⒂先整理E_x，H_y方程组

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon E_x - \gamma H_y = \dfrac{\partial H_z}{\partial y} \quad (1) \\ -\gamma E_x + j\omega\mu H_y = \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \quad (5) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\varepsilon & -\gamma \\ -\gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k^2 - \gamma^2 = -k_c^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} & -\gamma \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \gamma\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} j\omega\varepsilon & \dfrac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\gamma & \dfrac{\partial E_x}{\partial x} \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{1}{k_c^2}\left(\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ H_y = -\dfrac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \end{cases}$$

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

◆⒃再整理E_y，H_x方程组

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon E_y + \gamma H_x = -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} & (2) \\ \gamma E_y + j\omega\mu H_x = -\dfrac{\partial E_y}{\partial y} & (4) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\varepsilon & \gamma \\ \gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k_c^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} & \gamma \\ -\dfrac{\partial E_z}{\partial y} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} j\omega\varepsilon & -\dfrac{\partial H_z}{\partial z} \\ \gamma & -\dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix} = -j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\boxed{\begin{cases} E_y = \dfrac{1}{k_c^2}\left(-\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_x = \dfrac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \end{cases}}$$

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

◆⒄进一步归纳成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

任何坐标系，变换矩阵不变

*Ez*和*Hz*的横向函数要依赖具体的边界条件。

2.1 导波原理

一、规则金属管内电磁波

2、 Maxwell方程组的解

◆结论:

⊕ ① 在规则波导中场的纵向分量满足标量齐次波动方程, 结合相应边界条件即可求得纵向分量E_z和H_z, 而场的横向分量即可由纵向分量求得;

⊕② 既满足上述方程又满足边界条件的解有许多, 每一个解对应一个波型也称之为模式,不同的模式具有不同的传输特性;

⊕③ k_c是微分方程（2-1-11）在特定边界条件下的特征值, 它是一个与导波系统横截面形状、尺寸及传输模式有关的参量。由于当相移常数$\beta=0$时, 意味着波导系统不再传播, 亦称为截止, 此时$k_c=k$, 故将k_c称为截止波数。

2.1 导波原理

二、传输特性

描述波导传输特性的主要参数有：相移常数、截止波数、 相速、波导波长、群速、波型阻抗及传输功率。

◆(1)相移常数和截止波数 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\boxed{\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = k\sqrt{1 - k_c^2/k^2} \quad (2-1-14)}$$

◆(2)相速υ_p与波导波长λ_g、群速υ_g

①**相速(Phase Velocity)**：等相位面移动速率称为相速

$$\boxed{\upsilon_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} = \frac{c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} \quad (2-1-15)}$$

导行波(Guided Wave)：$k > k_c$ 对应快波:$\upsilon_p > c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$

②**波导波长**：导行波的波长 $\boxed{\lambda_g = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{2\pi}{k}\dfrac{1}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} > \lambda \quad (2-1-16)}$

2.1 导波原理

二、传输特性

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = k\sqrt{1 - k_c^2/k^2} \quad (2-1-14)$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} = \frac{c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} \quad (2-1-15)$$

◆(2)相速u_p与波导波长λ_g、相速u_g

③**色散关系**：相移常数β及相速u_p随频率ω的变化关系

④**群速(Group Velocity)**：表征了波能量的传播速度

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{1 - k_c^2/k^2} \quad (2-1-17)$$

◆(3)波阻抗

波阻抗：某波型的横向电场和横向磁场之比

$$Z = \left|\frac{E_t}{H_t}\right| \quad (2-1-18)$$

◆(4)传输功率

$$P = \frac{1}{2}Re\int_S (E \times H^*)\cdot dS = \frac{1}{2}Re\int_S (E_t \times H_t^*)\cdot a_z dS$$

$$= \frac{1}{2Z}\int_S |E_t|^2 dS = \frac{Z}{2}\int_S |H_t|^2 dS \quad (2-1-19)$$

2.1 导波原理

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=k\sqrt{1-k_c^2/k^2} \quad (2-1-14)$$

三、导行波的分类

导波结构里的导行波根据截止波数的不同分三种情况：

- 1、$k_c^2=0$即$k_c=0$

- ①$E_z=0$，$H_z=0$
- ②TEM(Transverse Electromagnetic)：即电和磁都只有横向分量
- ③ $\beta=k$， 故相速、波长及波阻抗和无界空间均匀媒质中相同
- ④截止波数$k_c=0$， 理论上任意频率均能在此类传输线上传输
- ⑤不能用纵向场分析法， 而可用二维静态场分析法或前述传输线方程法进行分析

2.1 导波原理

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = k\sqrt{1 - k_c^2/k^2} \quad (2-1-14)$$

三、导行波的分类

◆2、$k_c^2 > 0$

这时$\beta^2>0$，而E_z和H_z不能同时为零，否则E_t和H_t必然全为零，系统将不存在任何场。一般情况下，只要E_z和H_z中有一个不为零即可满足边界条件，这时又可分为TM、TE两种情形:

Case1：TM波(Hz=0，Ez≠0)(E波)

- ①TM(Transverse Magnetic)即横磁情况，Hz=0
- ②满足的边界条件应为 $E_z|_S = 0 \quad (2-1-20)$
- ③波阻抗

$$Z_{TM} = \left|\frac{E_x}{H_y}\right| = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1 - k_c^2/k^2} \quad (2-1-21)$$

2.1 导波原理

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=k\sqrt{1-k_c^2/k^2}\quad(2-1-14)$$

三、导行波的分类

◆2、$k_c^2>0$

Case2：TE波(Ez=0，Hz≠0)(H波)

- ①TE(Transverse Electric)横电情况，即Ez=0
- ②满足的边界条件应为 $\left.\dfrac{\partial H_Z}{\partial n}\right|_S=0\quad(2-1-22)$
- ③波阻抗

$$z_{TE}=\left|\frac{E_x}{H_y}\right|=\frac{\omega\mu}{\beta}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-k_c^2/k^2}}\quad(2-1-23)$$

- **注意：** 无论是TM波还是TE波，均为快波

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{1-k_c^2/k^2}}>c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

2.1 导波原理

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = k\sqrt{1 - k_c^2/k^2} \quad (2-1-14)$$

三、导行波的分类

◆3、$k_c^2 < 0$

⊕对应**慢波**：$v_p = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{c/\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} < c/\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} > k$$

⊕光滑导体壁构成的导波系统中不可能存在此种情况，只有当某种阻抗壁存在时才有这种可能。

2.1 导波原理

作业：2.1