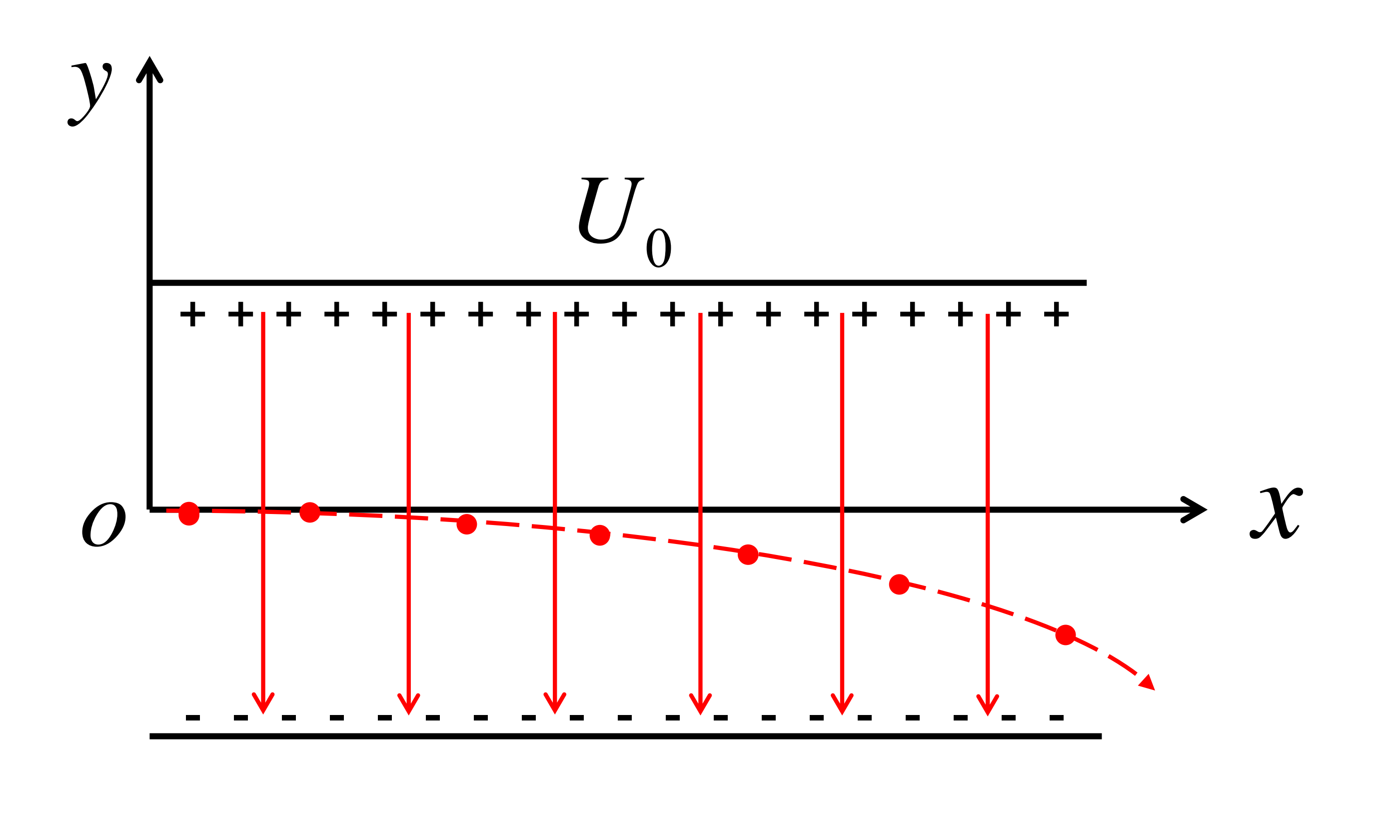
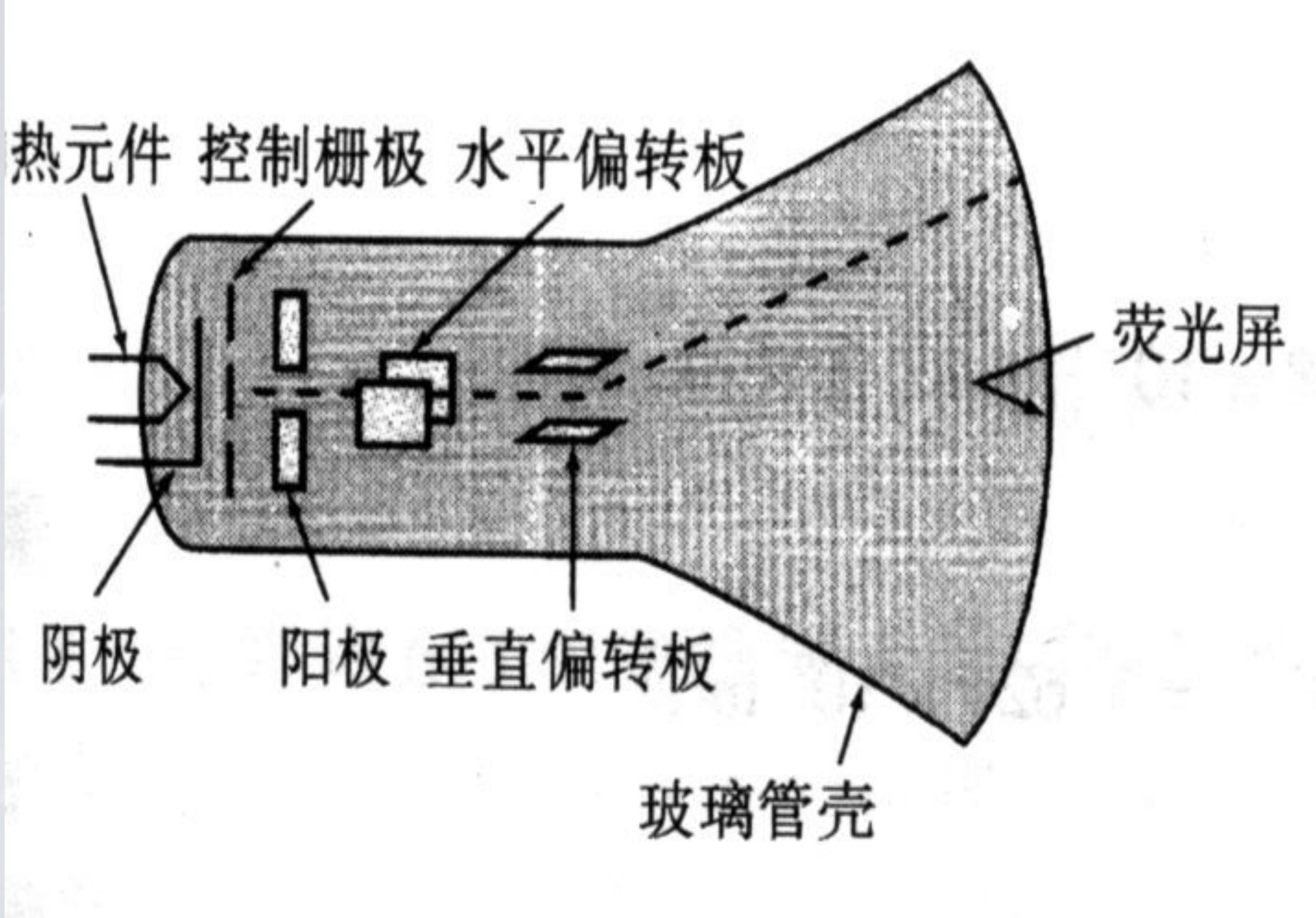
第4章　静态场分析

- 静态场的工程应用
- 静态场的特性及方程
- 静态场的重要原理
- 镜像法
- 分离变量法
- 复变函数法

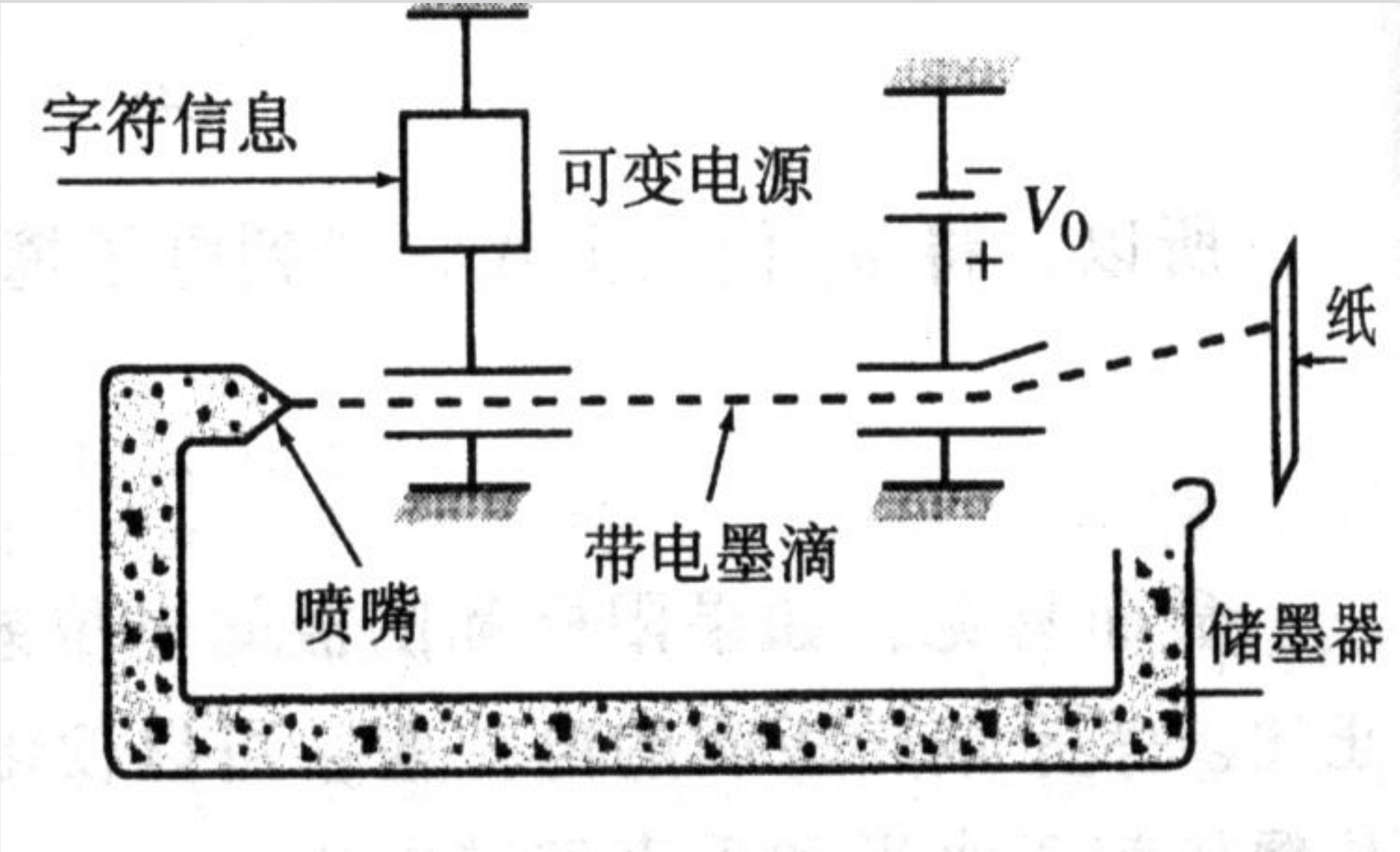
均匀电场中带电粒子的轨迹



阴极射线示波器原理

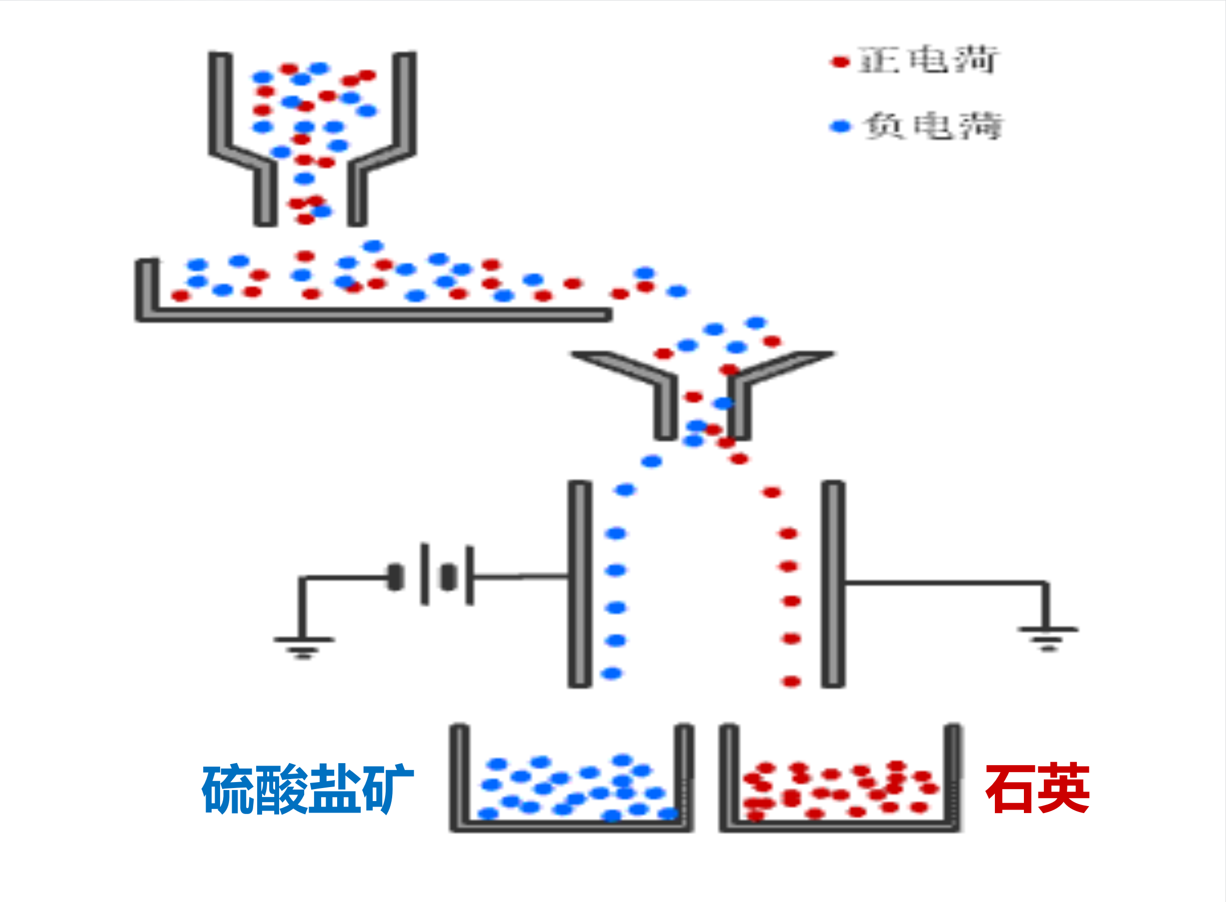


喷墨打印机工作原理

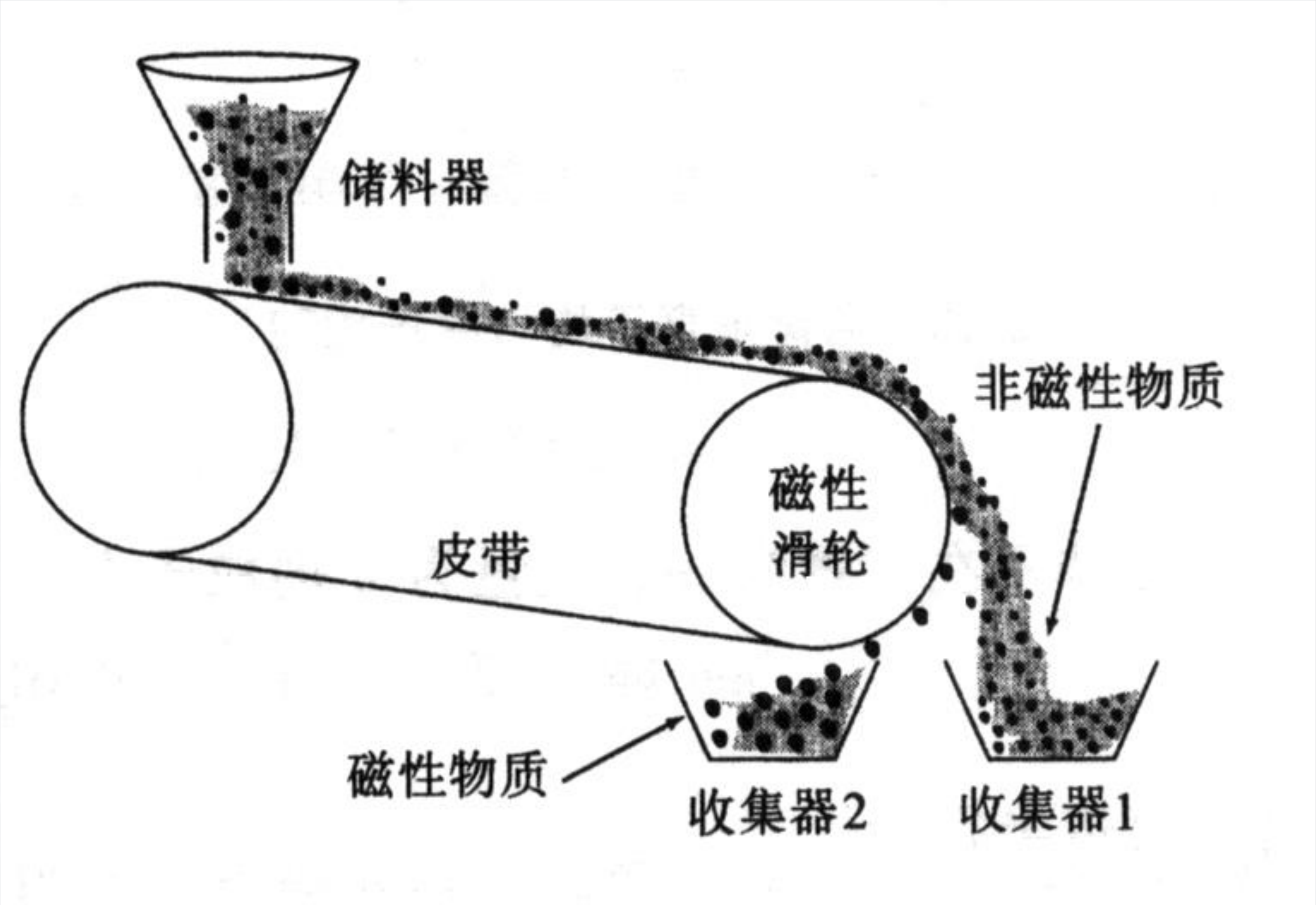


选矿器

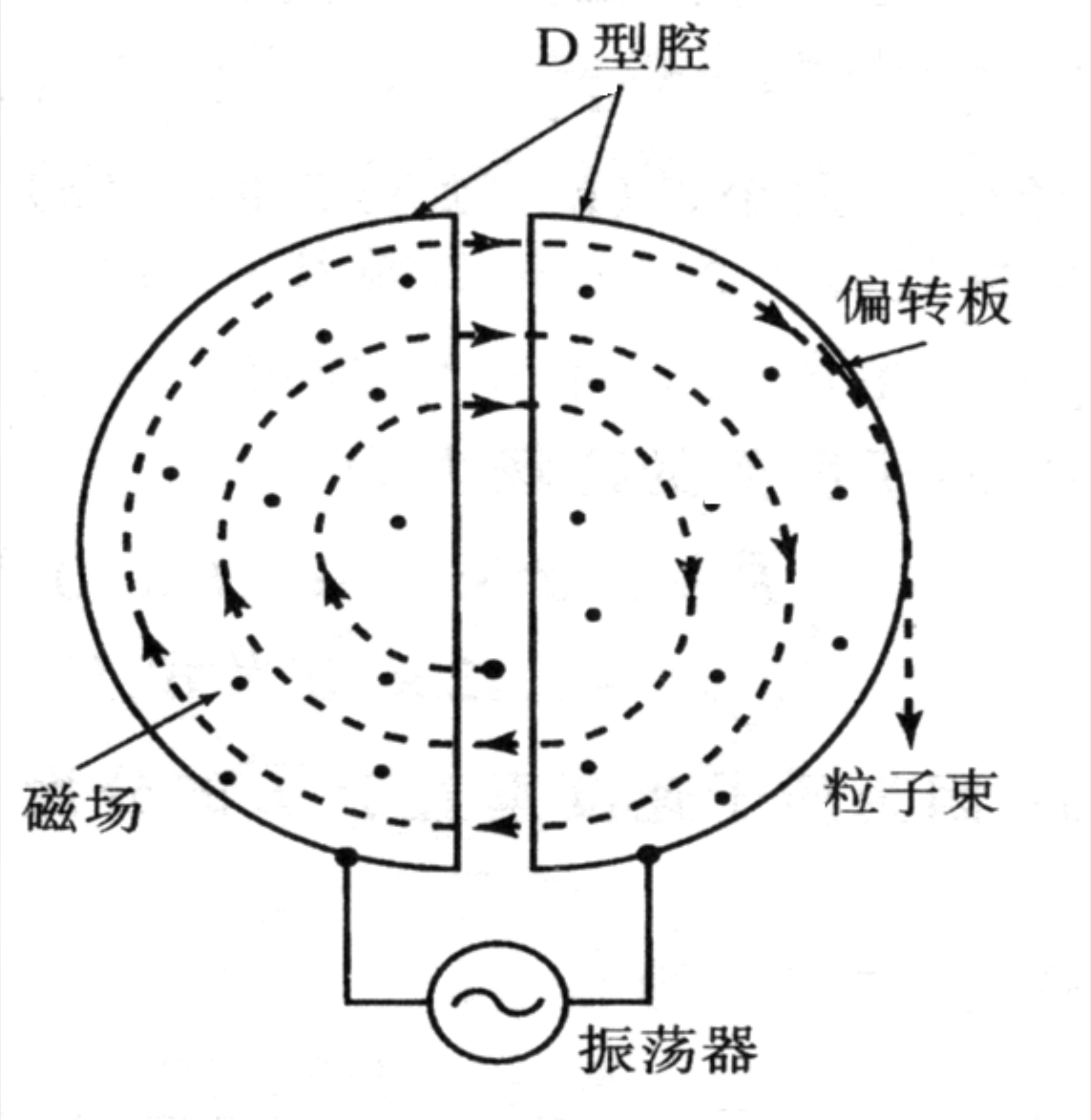
含石英硫酸盐矿



磁分离器



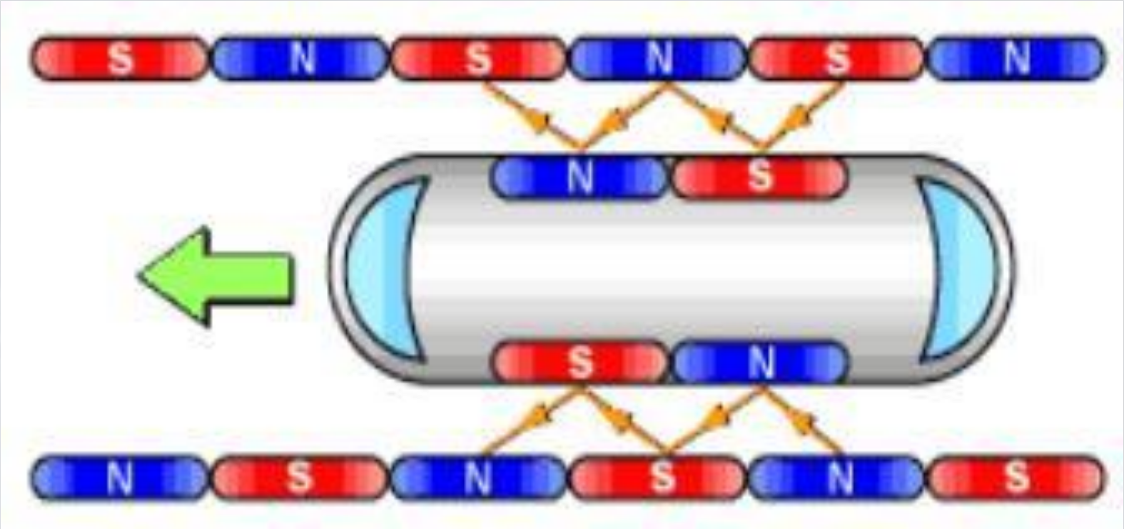
回旋加速器



磁悬浮列车

磁悬浮列车原理：

利用磁场同极相斥，异极相吸的原理，主要包括两部分：一是悬浮部分，是车体与基轨形成同极相斥状态，将车体悬浮起来；二是车体的牵引部分，形成向前的合力。



小结：

这一讲 静态场的工程应用

下一讲 静态场的特性及方程

4.2 静态场的特性及方程

1. 静态场的基本概念

2. 静态场的泊松方程和拉普拉斯方程

1. 静态场的基本概念

静态场：是指电磁场中的源量和场量都不随时间发生变化的场。

$$\boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=0,\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0,\ \frac{\partial \rho_V}{\partial t}=0}$$

静态场包括：静电场、恒定电场及恒定磁场。

静 电 场：由静止的且其电荷量不随时间变化的电荷产生的电场。

恒定电场：导电媒质中，由恒定电流产生的电场。

恒定磁场：由恒定电流或永久磁体产生的磁场。

2. 静态场的麦克斯韦方程组

一般形式：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_c + \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\Rightarrow$

静态场方程：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_c$$

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_V$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

静态场中的电场和磁场是彼此独立存在的。

3. 泊松方程和拉普拉斯方程

(1) 静电场的泊松方程和拉普拉斯方程

静电场基本方程:

$$\boxed{\begin{aligned}\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} &= 0\\ \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int_V \rho_V \mathrm{d}V\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{D} &= \rho_V\end{aligned}}\qquad \boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$$

——静电场是有散(有源)无旋场，是保守场。

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\phi\\ \nabla\cdot\vec{D} = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} &= \rho_V\end{aligned}\right. \longrightarrow \varepsilon\nabla\cdot(-\nabla\phi)=\rho_V \longrightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}}$$

——泊松方程

$$\xrightarrow[\rho_V = 0]{\text{无源区域}} \boxed{\nabla^2\phi = 0}$$

——拉普拉斯方程

(2) 恒定电场的拉普拉斯方程

恒定电场基本方程：

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0\\&\oint_S \vec{J}_{\mathrm{c}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\nabla\times\vec{E}=0\\&\nabla\cdot\vec{J}_c=0\end{aligned}}\qquad \boxed{\vec{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\vec{E}}$$

——恒定电场具有无散、无旋场的特征，是保守场。

$$\vec{E}=-\nabla\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\longrightarrow \sigma\nabla\cdot(-\nabla\phi)=0$$

$$\longrightarrow \boxed{\nabla^2\phi=0}$$

——拉普拉斯方程

(3) 恒定磁场的矢量泊松方程

恒定磁场基本方程：

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_\mathrm{c}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\ &\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_\mathrm{c}\\ &\nabla\cdot\vec{B} = 0\end{aligned}} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

——恒定磁场是无散有旋场。

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu\nabla\times\vec{H} = \mu\vec{J}_\mathrm{c} \longrightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \mu\vec{J}_\mathrm{c}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J}_\mathrm{c} \longrightarrow \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}_\mathrm{c}}$$ ——矢量泊松方程

洛仑兹规范：$\nabla\cdot\vec{A} = 0$

矢量泊松方程可以分解为三个标量泊松方程：

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_c} \xrightarrow{\text{分解}} \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}$$

——标量泊松方程

无源区域 $\vec{J}_c = 0$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = 0}$$

——矢量拉普拉斯方程

无源区域： $\vec{J}_c = 0 \longrightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = 0}$

引入标量磁位 ϕ_m ，令 $\vec{H} = -\nabla \phi_m$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{H} = 0 \longrightarrow \boxed{\nabla^2 \phi_m = 0}$ ——标量拉普拉斯方程

注意： 标量磁位只有在无源区才能应用，而矢量磁位则无此限制。

◆ 拉普拉斯算子 ∇^2

直角坐标系：

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

圆柱坐标系：

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

球坐标系：

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R})+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta})+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

小 结:

1. 静态场的基本概念

2. 静态场的泊松方程和拉普拉斯方程

	无源区	有源区
静 电 场	$\nabla^2\phi = 0$	$\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho_V}{\varepsilon}$
恒定电场	$\nabla^2\phi = 0$	
恒定磁场	$\nabla^2\vec{A} = 0$	$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}_c$

4.3 静态场的重要原理和定理

1. 对偶原理
2. 叠加原理
3. 惟一性定理

1. 对偶原理

（1）**概念**：如果描述两种物理现象的方程具有相同的数学形式，并且具有相同的边界条件，那么它们解的数学形式也是相同的，这就是对偶原理，亦称为二重性原理。

对偶方程：具有同样数学形式的两个方程。

对偶量：在对偶方程中，处于同等地位的量。

(2)静电场与恒定电场的对偶关系

- 对偶方程
- 对偶量

静电场(无源区域)	恒定电场(电源外区域)
$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$
$\vec{E}=-\nabla\phi$	$\vec{E}=-\nabla\phi$
$\nabla\cdot\vec{D}=0$	$\nabla\cdot\vec{J}_{\mathrm{c}}=0$
$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$	$\vec{J}_{c}=\sigma\vec{E}$
$\nabla^{2}\phi=0$	$\nabla^{2}\phi=0$
$q=\oint_{S}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$	$I=\oint_{S}\vec{J}_{\mathrm{c}}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

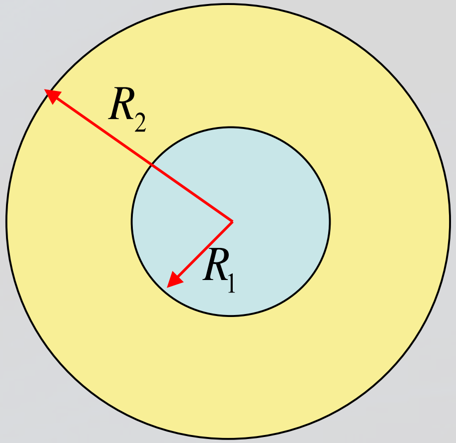
(3)静电场与恒定磁场的对偶关系

- 对偶方程
- 对偶量

静电场(无源区域)	恒定磁场(无源区域)
$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{H}=0$
$\nabla\cdot\vec{D}=0$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$
$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$	$\vec{B}=\mu\vec{H}$
$q=\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$	$q_m=\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
$\nabla^2\phi=0$	$\nabla^2\phi_{\mathrm{m}}=0$

例1: 已知无限长同轴电缆内、外半径分别为 R_1 和 R_2，如图所 示，电缆中填充均匀介质，内外导体间的电位差为 U，外导体接地。

求：其间各点的电位和电场强度。



解：根据轴对称的特点和无限长的假设，可确定电位函数满足一维拉普拉斯方程，采用圆柱坐标系

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)=0 \xrightarrow{\text{积分}} \phi = A\ln r + B$$

由边界条件

$$\begin{cases} U = A\ln R_1 + B \\ 0 = A\ln R_2 + B \end{cases} \longrightarrow A = \frac{U}{\ln\dfrac{R_1}{R_2}} \qquad B = -\frac{U}{\ln\dfrac{R_1}{R_2}}\ln R_2$$

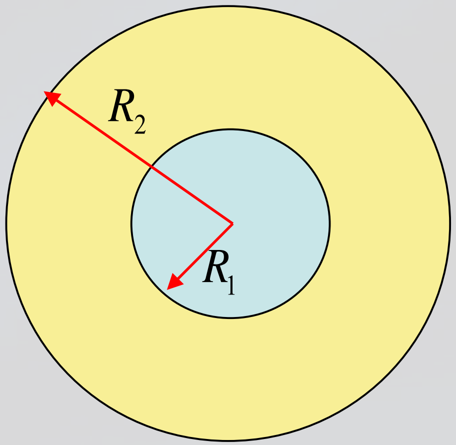
则：

$$\phi = \frac{U}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\ln\frac{R_2}{r} \xrightarrow{\vec{E} = -\nabla\phi} \vec{E} = \frac{U}{r\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\hat{a}_r$$

例2: 如图所示，在电缆中填充电导媒质，其他条件同“例1”

求: (1)内外导体间的电位及电场强度。

(2)单位长度上该同轴线的漏电流。



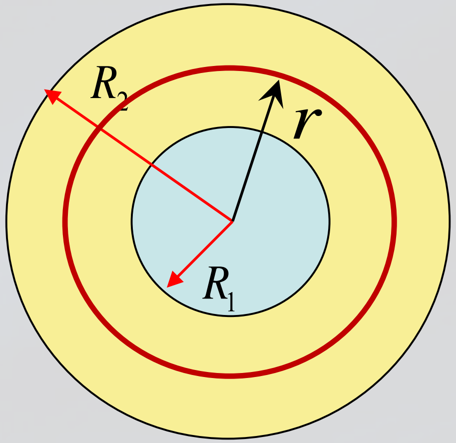
解: (1)由于内、外导体的电导率很高，可以认为电力线仍和导体表面垂直，和静电场的边界条件一致，利用对偶原理，可以立即得到

$$\phi_1 = \frac{U}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \ln\frac{R_2}{r} \qquad \phi_2 = \frac{U}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \ln\frac{R_2}{r}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{U}{r\ln\frac{R_2}{R_1}} \hat{a}_r \qquad \vec{E}_2 = \frac{U}{r\ln\frac{R_2}{R_1}} \hat{a}_r$$

(2)单位长度同轴线漏电流密度为

$$\vec{J}_{\mathrm{c}} = \sigma \vec{E}_2 = \frac{\sigma U}{r \ln \dfrac{R_2}{R_1}} \hat{a}_r$$



则漏电流为

$$I = \oint_S \vec{J}_{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{J}_{\mathrm{c}} \cdot r\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \hat{a}_r = \frac{2\pi\sigma U}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$$

2. 叠加原理

◆若 ϕ_1和 ϕ_2分别满足拉普拉斯方程，则 ϕ_1和 ϕ_2的线性组合

$\phi = a\phi_1 + b\phi_2$ 必然满足拉普拉斯方程。

◆证明： $$\nabla^2\phi = \nabla^2(a\phi_1 + b\phi_2) = \nabla^2(a\phi_1) + \nabla^2(b\phi_2)$$

$$= a\nabla^2\phi_1 + b\nabla^2\phi_2$$

已知 ϕ_1和 ϕ_2 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = 0$

所以： $$\nabla^2\phi = 0$$

➢ 利用叠加定理，可以把比较复杂的场问题分解为较简单问题的组合，便于求解。

3. 惟一性定理

惟一性定理：在给定边界条件下，泊松方程或拉普拉斯方程的解是惟一的。

惟一性定理为某些复杂电磁问题求解方法的建立提供了理论根据。镜像法就是惟一性定理的直接应用。

例：很薄的导体球壳上的电位为U，

球壳内为无源空腔。

求：球壳内空腔中的电位分布。

解：由唯一性定理可得

$$\phi_{内} = U$$

◆边值问题的构成

- 微分方程
  - 泊松方程 $\nabla^2\phi = -\rho_V/\varepsilon$
  - 拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$
- 边界条件
  - 场域边界条件 $\phi|_S = f(S)$
  - 分界面衔接条件
    - $\phi_1 = \phi_2$
    - $\varepsilon_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial n} = \rho_s$
  - 自然边界条件 $\lim\limits_{r\to\infty} \phi = 0$
- 初始条件

- ◆**边值问题的解法**
  - 实验法
    - 实测法
    - 模拟法
  - 计算法
    - 解析法
      - 直接积分法
      - 镜像法
      - 分离变量法
      - 复变函数法
      - 保角变换法
      - ······
    - 数值法
      - 有限差分法
      - 有限元法
      - 边界元法
      - 矩量法
      - 积分方程法
      - ······

小 结:

1. 对偶原理
2. 叠加原理
3. 惟一性定理

4.4镜像法

1. 无限大导体平面的镜像

2. 半无限大导体角域平面的镜像

镜像法概念：

在一定条件下，可以用一个或多个位于待求场域边界以外虚设的假想电荷来代替导体表面上感应电荷的作用，且保持原有边界上边界条件不变，则根据惟一性定理，空间电场可由原来的电荷和所有假想电荷产生的电场叠加得到。这些假想电荷称为镜像电荷，这种求解方法称为镜像法。

理论依据：惟一性定理是镜像法的理论依据。

例如：

镜 子

实物　　　　镜像

镜像法的三个要点：

①镜像源位于待求场域边界之外。

②将有边界的不均匀空间处理为无限大均匀空间，该均匀空间中媒质特性与待求场域中一致。

③实际源和镜像源共同作用保持原边界处的边界条件不变。

1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

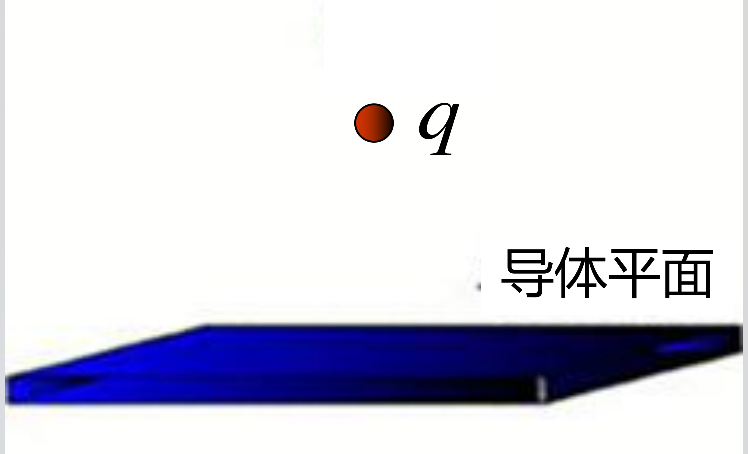
待求场域：上半空间

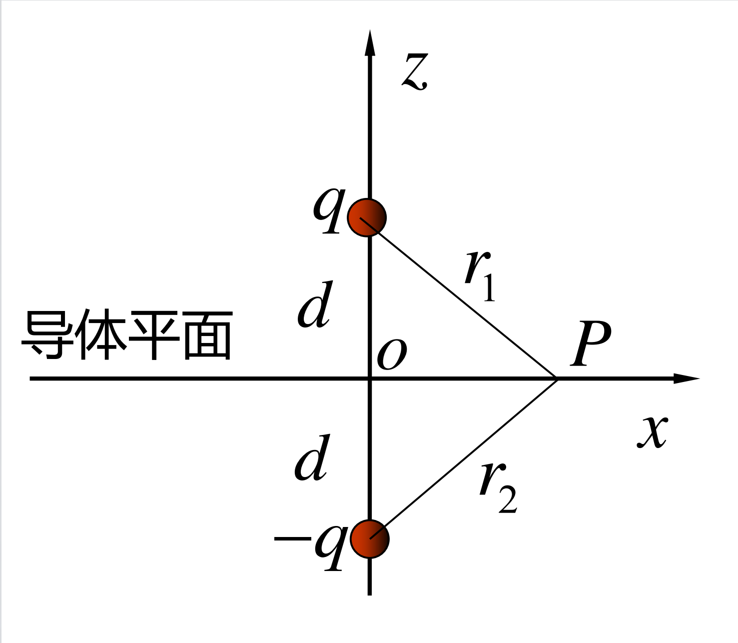
边界： 无限大导体平面

边界条件：$\phi=0$

由平面镜像可知，如图镜像电荷位于导体平面下方对称点处。

由边界条件可知，镜像电荷为与原电荷大小相等、性质相反的点电荷-q。



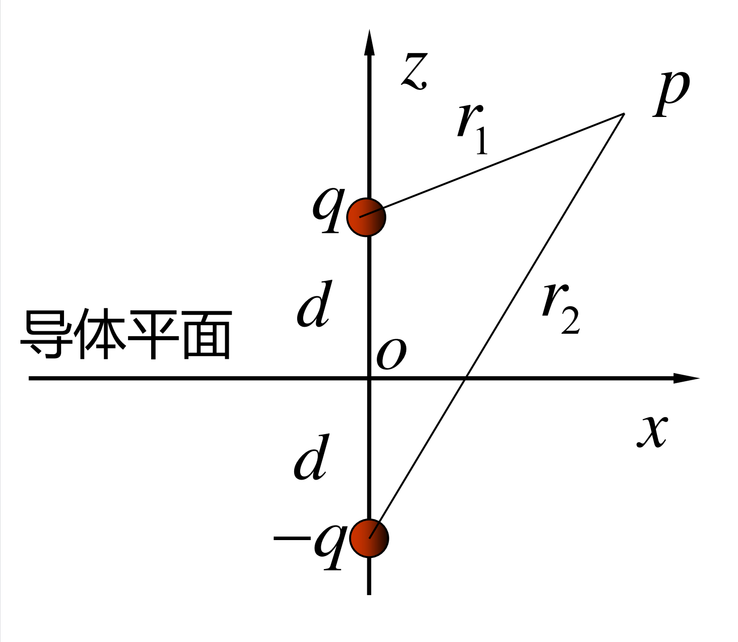


在空间 p点的电位为点电荷q 和镜像电荷 $-q$ 所产生的电位叠加，即

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\}$$

其中: $$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$



上半空间的电场强度：　　$\vec{E} = -\nabla\phi$

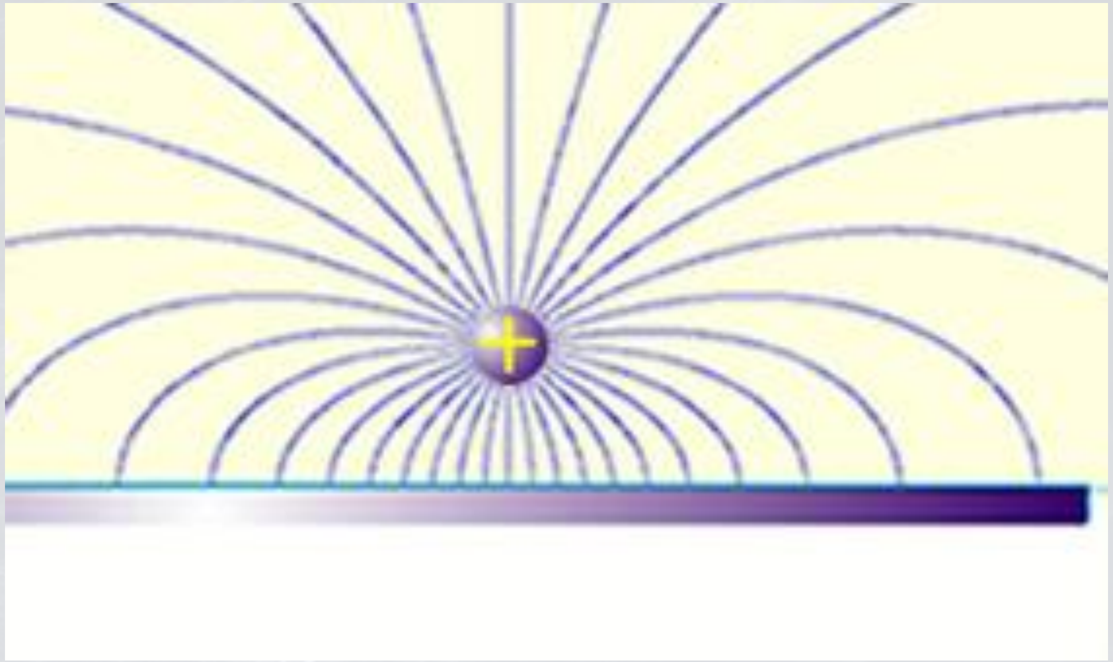
$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}} - \frac{x}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

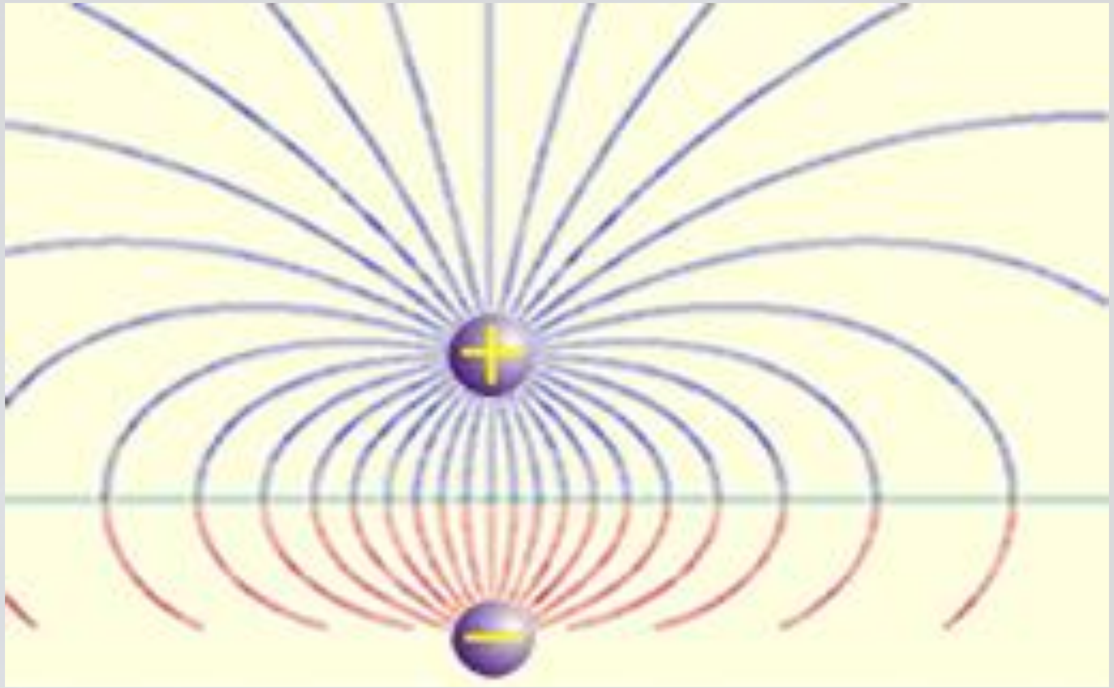
$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z-d}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}} - \frac{z+d}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

上半空间的电场分布：



原始问题的场分布



镜像法求出的场分布

导体表面感应电荷：

$$\rho_S = D_n = \varepsilon_0 E_z(z=0) = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

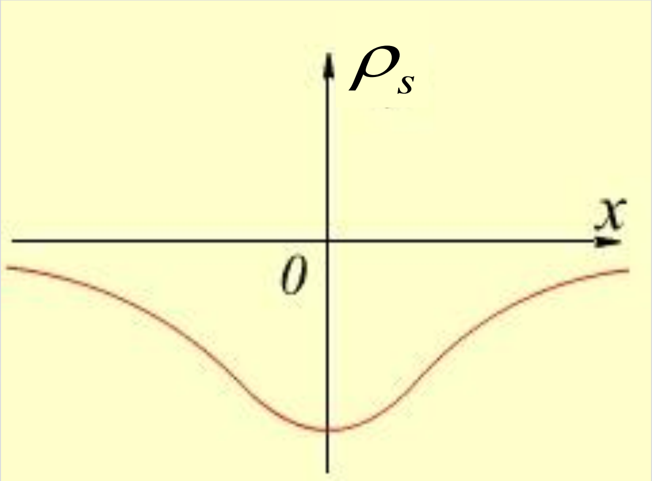
导体表面上感应电荷总量：

$$q_S = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

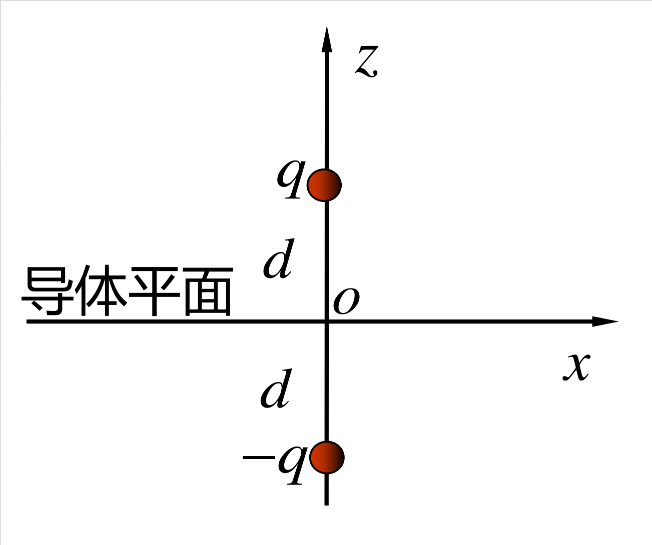
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -q$$

导体表面上感应电荷对点电荷的作用力：

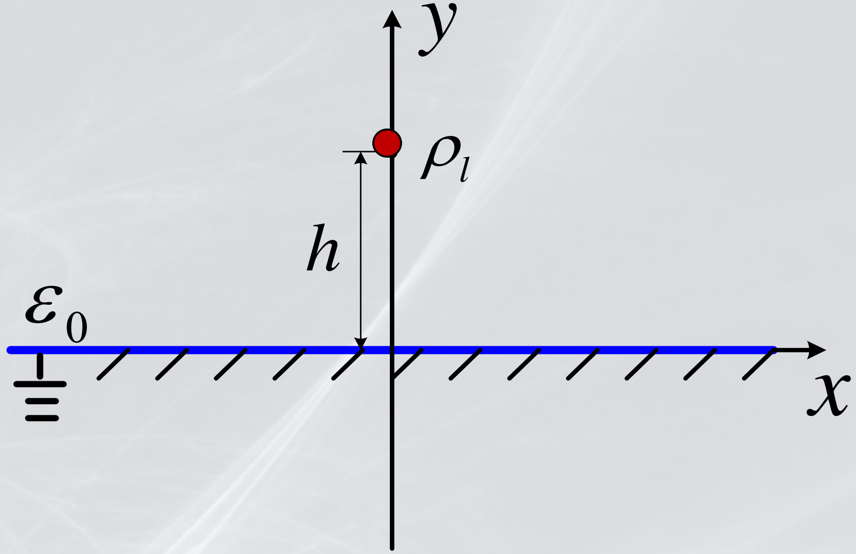
$$\vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{a}_z$$

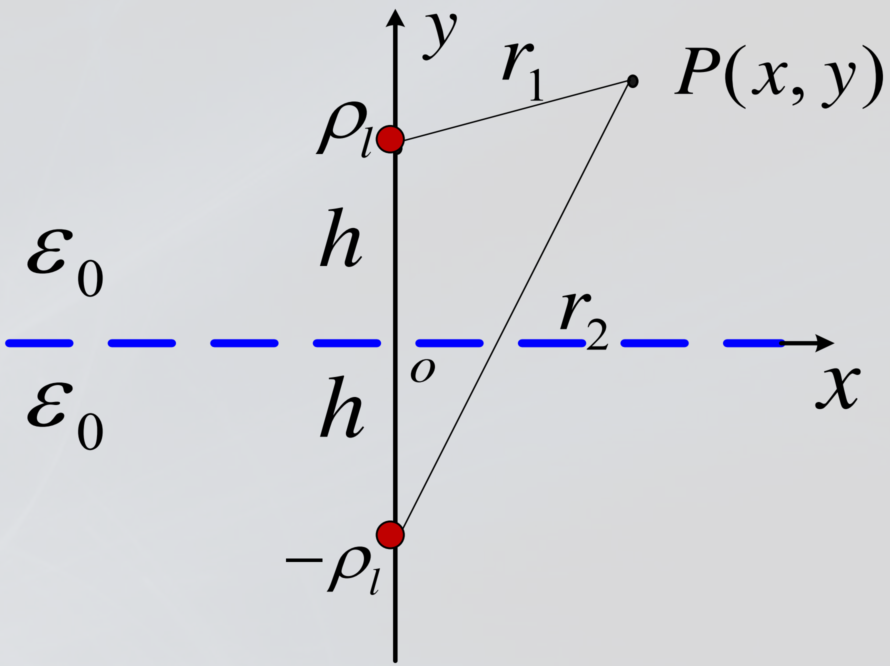


导体上电荷分布



2. 线电荷对无限大接地导体平面的镜像



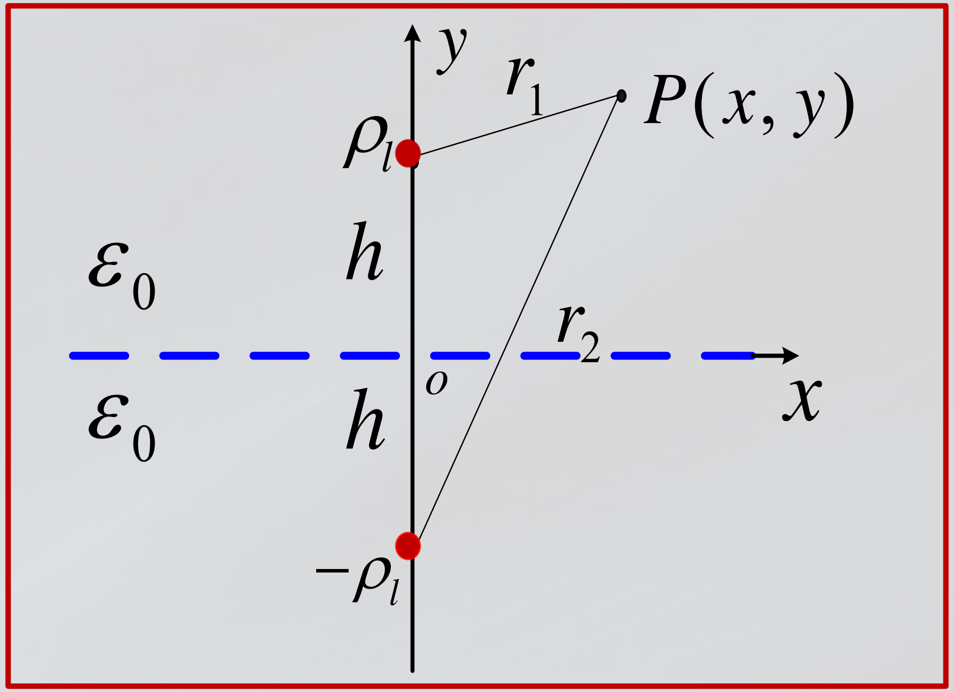


待求场域中的电位

$$\phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (y>0)$$

上半空间的电场

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\hat{a}_{r1} + \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\hat{a}_{r2}$$



其中： $r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$ $\qquad$ $r_2 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$

镜像法总结

镜像法的理论依据是：惟一性定理

镜像法的关键是：根据边界条件，确定镜像电荷（或电流）的个数、大小及位置。

镜像法的实质是：用在待求场域外假想的镜像电荷（或电流）替代边界上的作用，将场域视为无限大均匀媒质，待求场为实际源和镜像源产生的场的叠加。

小 结:

1. 镜像法的原理
2. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像
3. 线电荷对无限大接地导体平面的镜像

4.6 半无限大导体平面角域的镜像

1. 直角域的镜像

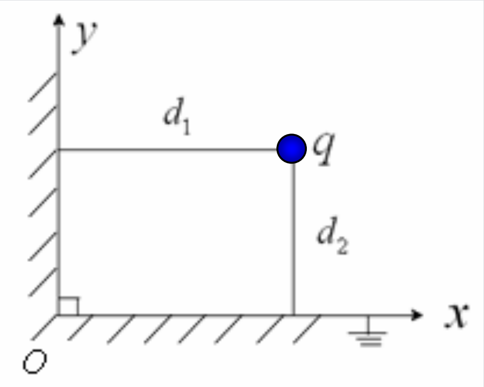
2. 60度角域的镜像

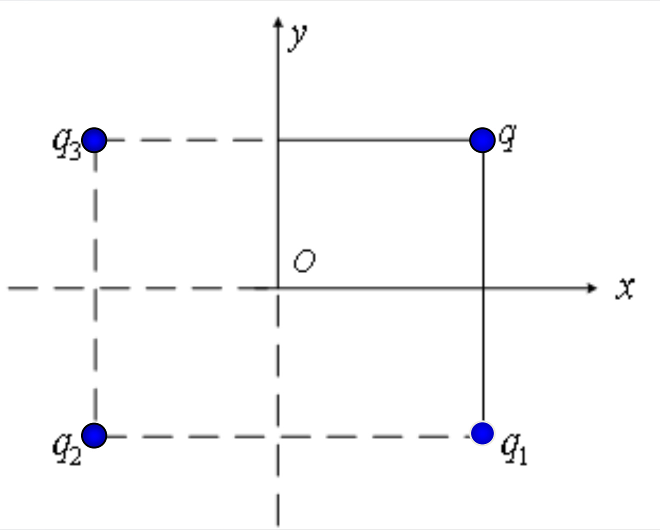
3. 在π/n（n为整数）角域的镜像

1. 点电荷对半无限大接地导体直角域的镜像

➢ 由两个半无限大接地导体平面形成角形边界，当其夹角 $\alpha=\dfrac{\pi}{n},n$ 为整数时，该角域中的点电荷将有个镜像电荷，该角域中的场可以用镜像法求解

◆ 当n=2时：

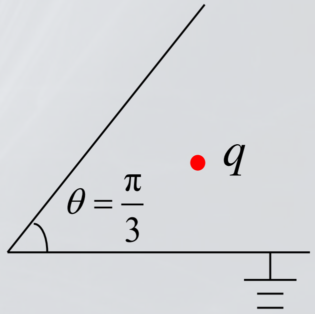


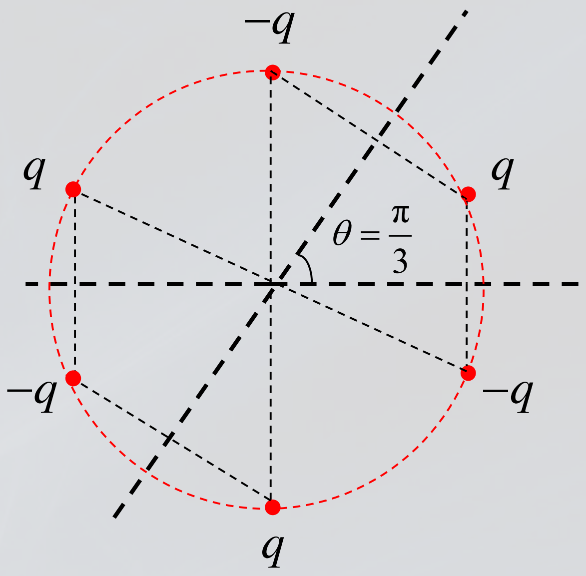


◆ 该角域外有3个镜像电荷 q_1、 q_2和q_3，位置如图所示。其中

$$q_1=-q,\quad q_2=q,\quad q_3=-q$$

◆ 当n=3时：





➢ 角域外有5个镜像电荷，大小和位置如图所示。所有镜像电荷都正、负交替地分布在同一个圆周上，该圆的圆心位于角域的顶点，半径为点电荷到顶点的距离。

- 角域夹角为π/n，n为整数时，有$(2n - 1)$个镜像电荷，它们与水平边界的夹角分别为：

$$\left.\begin{aligned}&(2m\cdot\frac{\pi}{n}\pm\theta),m=1,2,\cdots,(n-1)\\&\text{及}(2\pi-\theta)\end{aligned}\right\}$$

- n不为整数时，镜像电荷将有无数个，镜像法就不再适用了；当角域夹角为钝角时，镜像法亦不适用。

小 结:

1. 直角域的镜像

2. 60度角域的镜像

3. 在π/n（n为整数）角域的镜像

4.9 分离变量法的原理与应用

1. 分离变量法的原理和步骤
2. 直角坐标系中的分离变量法
3. 圆柱坐标系中的分离变量法
4. 球坐标系中的分离变量法

1.分离变量法的原理和步骤

- ◆ 分离变量法的理论基础：

  惟一性定理

- ◆ 分离变量法的原理：

  经变量分离将偏微分方程化简为常微分方程来求解。

◆分离变量法的主要步骤:

(1) 根据给定的边界形状，选择适当的坐标系，正确写出该坐标系下拉普拉斯方程的表达式，及其边界条件。

(2) 经变量分离将偏微分方程化简为常微分方程，并给出常微分方程的通解。

(3) 利用给定的边界条件，确定通解中的待定常数，获得该问题的特解。

2. 直角坐标系中二维拉普拉斯方程的分离变量法

(1) 变量分离

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0 \longleftarrow \phi(x,y)=\boxed{X(x)}\boxed{Y(y)}$$

本征函数

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=0 \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}&=-k_x^2\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}&=-k_y^2\end{aligned}}\right.$$

本征方程

$$k_x^2+k_y^2=0$$

本征值

(2) 本征方程的求解

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}&=-k_x^2\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}&=-k_y^2\end{aligned}}$$

a. 当 $k_x=k_y=0$ 时

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}&=0\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}&=0\end{aligned}}$$

可得：

$$\begin{cases}X_0(x)=A_{10}x+A_{20}\\ Y_0(y)=B_{10}y+B_{20}\end{cases}\longrightarrow \phi_1(x,y)=(A_{10}x+A_{20})(B_{10}y+B_{20})$$

b. 当 $k_x^2 > 0$ 时，设 $k_x = k_m (m = 1, 2, \cdots, \infty)$

由 $k_x^2 + k_y^2 = 0$ $\longrightarrow$ $k_y = jk_m$

本征方程为:

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} = -k_m^2 X(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} = k_m^2 Y(y)$$
$$\longrightarrow \begin{cases} X_m(x) = A_{1m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_m x} + A_{2m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_m x} \\ Y_m(y) = B_{1m} \mathrm{e}^{k_m y} + B_{2m} \mathrm{e}^{-k_m y} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} X_m(x) = A_{1m} \cos\left(k_m x\right) + A_{2m} \sin\left(k_m x\right) \\ Y_m(y) = B_{1m} \cosh\left(k_m y\right) + B_{2m} \sinh\left(k_m y\right) \end{cases}$$

则:

$$\phi_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m} \cos k_m x + A_{2m} \sin k_m x)(B_{1m} \cosh k_m y + B_{2m} \sinh k_m y)$$

c. 当 $k_x^2 < 0$ 时，设 $k_x = \mathrm{j}k_m' (m = 1, 2, \cdots, \infty)$

由 $k_x^2 + k_y^2 = 0 \longrightarrow k_y = k_m'$

本征方程为：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} &= k_m'^2 X(x) \\ \frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} &= -k_m'^2 Y(y) \end{aligned}\right. \longrightarrow \begin{cases} X_m(x) = A_{1m}' \mathrm{e}^{k_m' x} + A_{2m}' \mathrm{e}^{-k_m' x} \\ Y_m(y) = B_{1m}' \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_m' y} + B_{2m}' \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_m' y} \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} X_m(x) = A_{1m}' \cosh k_m' x + A_{2m}' \sinh k_m' x \\ Y_m(y) = B_{1m}' \cos k_m' y + B_{2m}' \sin k_m' y \end{cases}$$

则：
$$\phi_3(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m}' \cosh k_m' x + A_{2m}' \sinh k_m' x)(B_{1m}' \cos k_m' y + B_{2m}' \sin k_m' y)$$

d. 应用叠加原理，可将三种解叠加组成拉普拉斯方程的通解

$$\phi(x,y)=(A_{10}x+A_{20})(B_{10}y+B_{20})+$$

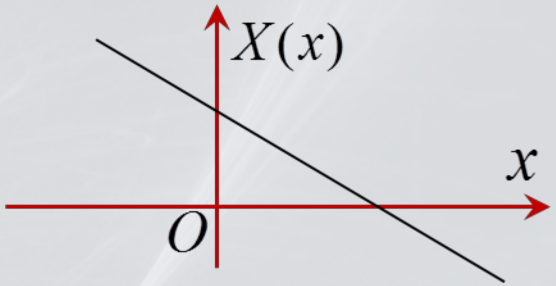
$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{1m}\cos\left(k_m x\right)+A_{2m}\sin\left(k_m x\right)\right]\left[B_{1m}\cosh\left(k_m y\right)+B_{2m}\sinh\left(k_m y\right)\right]+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[A'_{1m}\cosh\left(k'_m x\right)+A'_{2m}\sinh\left(k'_m x\right)\right]\left[B'_{1m}\cos\left(k'_m y\right)+B'_{2m}\sin\left(k'_m y\right)\right]$$

(3) 根据边界条件，确定通解中的待定常数，获得方程的特解。

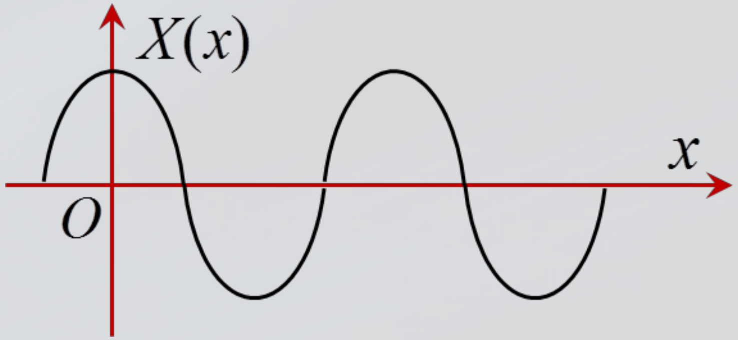
三种解的特点：

（1）$X(x)$和$Y(y)$为常数或线性函数，说明它们最多只有一个零点；

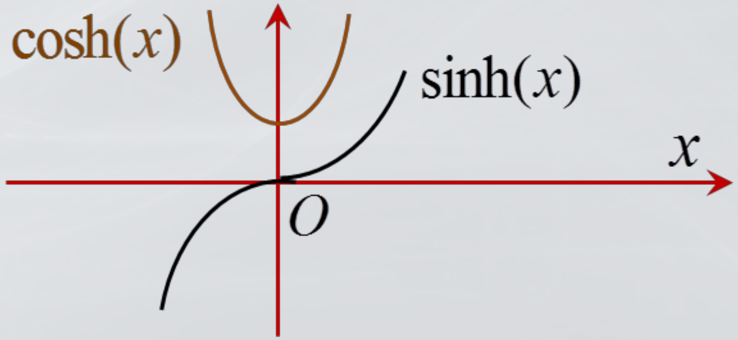


$$X_0(x) = A_{10}x + A_{20}$$

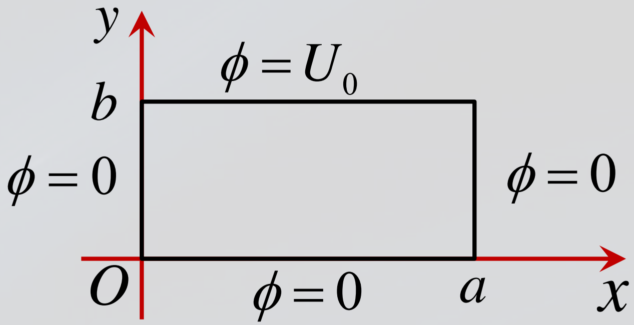
（2） $X(x)$为三角函数，有多个零点；



（3） $X(x)$为双曲函数，最多有一个零点。



例：一接地金属槽如图所示，其侧壁和底壁电位均为零，顶盖与侧壁绝缘，其电位为U_0，求槽内电位分布。



解: 选直角坐标系，电位函数满足二维拉普拉斯方程

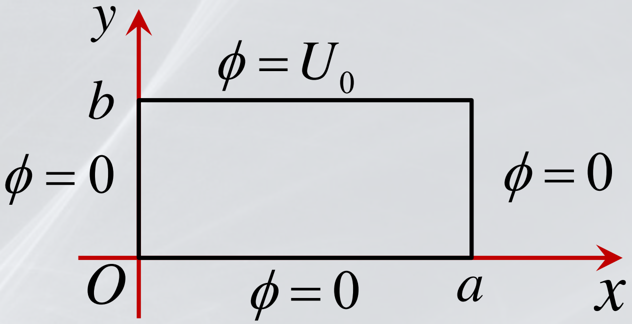
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

边界条件：

$$\begin{cases} \phi = 0 & x = 0 & 0 < y < b & (2) \\ \phi = 0 & x = a & 0 < y < b & (3) \\ \phi = 0 & y = 0 & 0 < x < a & (4) \\ \phi = U_0 & y = b & 0 < x < a & (5) \end{cases}$$

设 $\phi(x,y)=X(x)Y(y)$ ，代入式(1) 中得:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=0 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}=-k_x^2\\[2ex] \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=-k_y^2\\[2ex] k_x^2+k_y^2=0\end{cases}$$



根据边界条件，函数$X(x)$沿x方向有两个零点，因此$X(x)$应为三角函数形式，又因为$X(0)=0$，所以$X(x)$应选取正弦函数，即

$$X(x)=A_m\sin k_m x$$

$X(x)$应选取正弦函数，即 $X(x) = A_m \sin k_m x$

由边界条件：$X(a) = 0 \Rightarrow \sin k_m a = 0 \quad k_m = \dfrac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, \cdots, \infty)$

则：$\boxed{X(x) = A_m \sin(\dfrac{m\pi}{a} x)}$

对应的$Y(y)$函数为双曲函数，且$Y(0)=0$，于是$Y(y)$的形式为

$$\boxed{Y(y) = B_m \sinh(\frac{m\pi}{a} y)}$$

电位可表示为：$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\dfrac{m\pi}{a} x) \sinh(\dfrac{m\pi}{a} y)$

由边界条件可知：

$$U_0 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sinh(\frac{m\pi}{a}b)$$

令：$C'_m = C_m \sinh(\frac{m\pi}{a}b)$

$$U_0 = \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \sin(\frac{m\pi}{a}x)$$

对上式两边同乘以 $\sin(\frac{n\pi}{a}x)$ ，再对 x 从 0 到 a 进行积分，即

$$\int_0^a U_0 \sin(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{d}x = \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^a U_0 \sin(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{d}x = \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{d}x$$

方程左边: $\int_0^a U_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x = \boxed{\frac{aU_0}{n\pi}[-\cos(\frac{n\pi}{a}x)]_0^a} = \frac{2aU_0}{n\pi} \quad (n=1,3,5,\cdots)$

方程右边: $\int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{d}x = \boxed{\int_0^a C'_n \sin^2(\frac{n\pi}{a}x)\mathrm{d}x} = \frac{aC'_n}{2}$

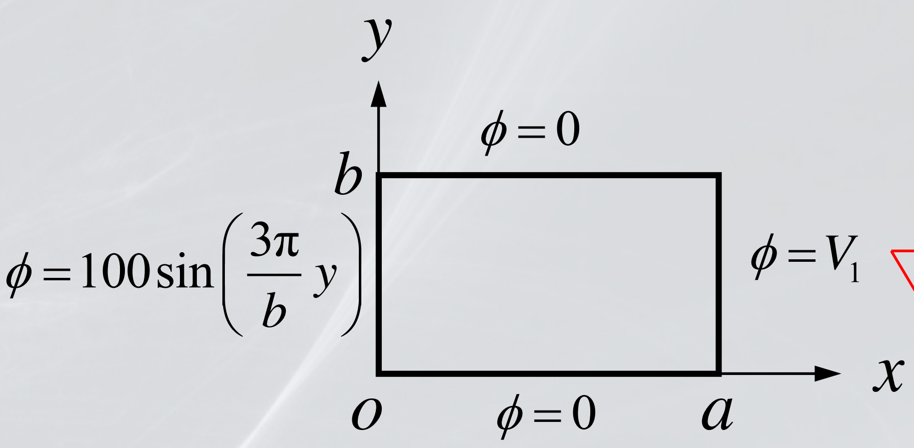
$$\Rightarrow \quad C'_n = \frac{4U_0}{n\pi} \quad (n=1,3,5,\cdots) \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{4U_0}{n\pi\sinh(\frac{n\pi}{a}b)} \quad (n=1,3,5,\cdots)$$

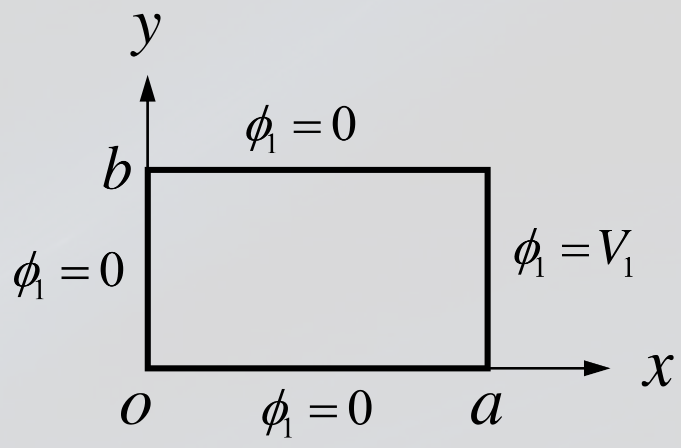
满足边界条件的特解为：

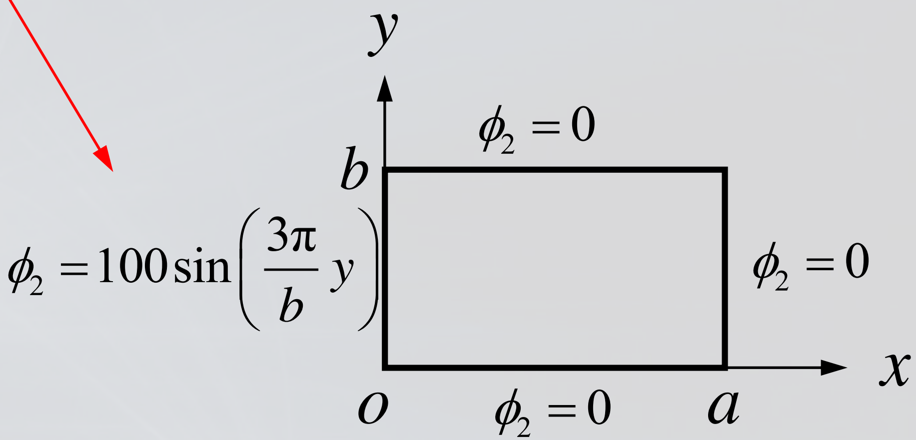
$$\phi(x,y)=\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}C_m\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sinh(\frac{m\pi}{a}y)$$

$$=\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4U_0}{m\pi\sinh(\frac{m\pi}{a}b)}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sinh(\frac{m\pi}{a}y)$$

例: 一矩形区域边界条件如图所示，求区域内的电位分布。





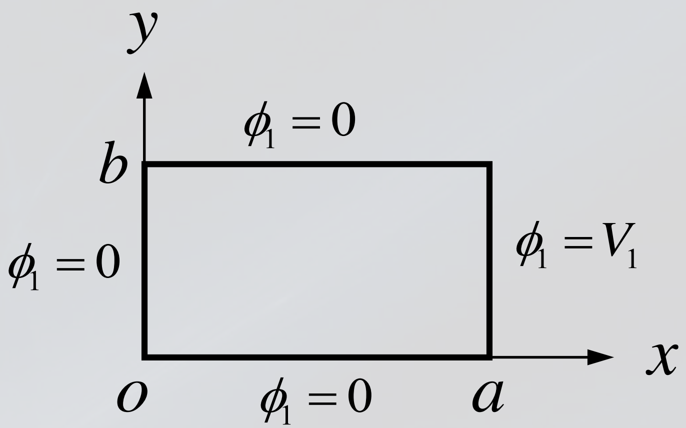


解: 从图可见，在 x=0 和 x=a 的两个边界上出现非零情况，将原问题分解为两种边界条件情况。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

(1) 求 $\phi_1(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \\ \phi_1 = 0 \quad y = 0 \quad 0 < x < a \\ \phi_1 = 0 \quad y = b \quad 0 < x < a \\ \phi_1 = 0 \quad x = 0 \quad 0 < y < b \\ \phi_1 = V_1 \quad x = a \quad 0 < y < b \end{cases}$$



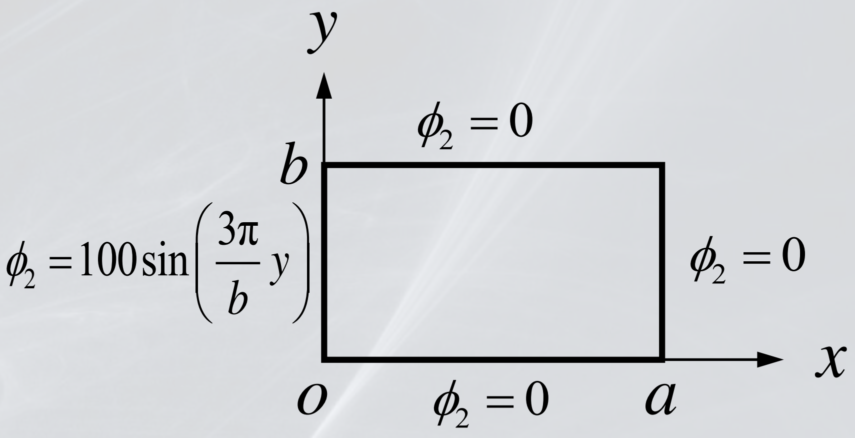
类似于“上例”求解过程，形式为:

由非零边界条件确定C_m

$$\phi_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(\frac{m\pi}{b}x) \longleftarrow C_m = \frac{4V_1}{m\pi\sinh(\frac{m\pi}{b}a)}$$

则: $$\phi_1(x,y) = \sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{4V_0}{m\pi\sinh(\frac{m\pi}{b}a)} \sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(\frac{m\pi}{b}x)$$

(2) 求 $\phi_2(x,y)$:



$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2}=0\\ \phi_2=0 \quad y=0 \quad 0<x<a\\ \phi_2=0 \quad y=b \quad 0<x<a\\ \phi_2=0 \quad x=a \quad 0<y<b\\ \phi_2=100\sin(\dfrac{3\pi}{b}y) \quad x=0 \quad 0<y<b\end{cases}$$

其解为:

$$\phi_2(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\boxed{\sin(\frac{m\pi}{b}y)}\sinh[\frac{m\pi}{b}(a-x)]$$

由非零边界条件得

$$100\sin(\frac{3\pi}{b}y)=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(\frac{m\pi}{b}a)$$

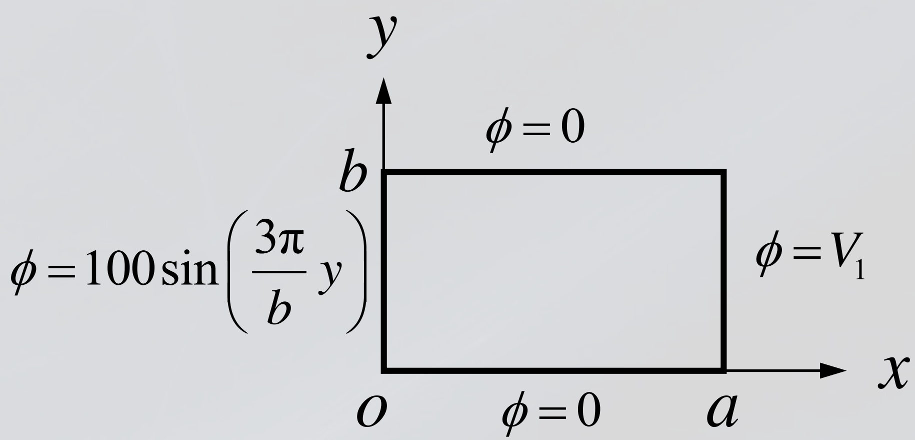
可见，当$m\neq3$时， $D_m=0$

当$m=3$时: $D_3=100/\sinh(\frac{3\pi}{b}a)$

则:

$$\phi_2(x,y)=\frac{100}{\sinh(\frac{3\pi}{b}a)}\sin(\frac{3\pi}{b}y)\sinh[\frac{3\pi}{b}(a-x)]$$

因此，得到该问题的特解

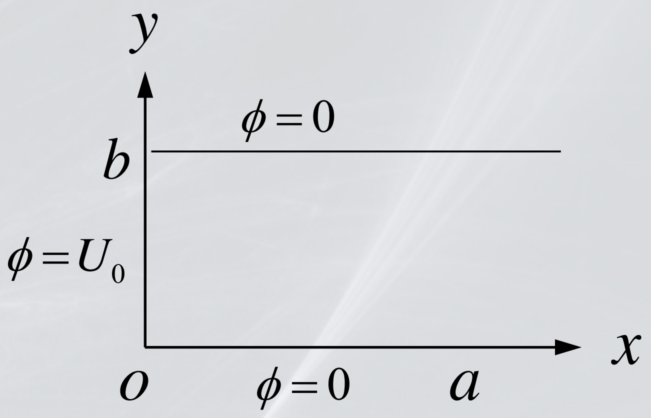


$$\phi=\phi_1+\phi_2$$

$$\phi(x,y)=\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4V_0}{m\pi\sinh(\frac{m\pi}{b}a)}\sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(\frac{m\pi}{b}x)$$

$$+\frac{100}{\sinh(\frac{3\pi}{b}a)}\sin(\frac{3\pi}{b}y)\sinh[\frac{3\pi}{b}(a-x)]$$

例: 如图所示的边界条件下；求：$x \geq 0, b \geq y \geq 0$ 区域内的电位分布。



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \phi = 0 \quad y = 0 \quad 0 < x < a \\ \phi = 0 \quad y = b \quad 0 < x < a \\ \phi = 0 \quad x \to \infty \quad 0 < y < b \\ \phi = U_0 \quad x = 0 \quad 0 < y < b \end{cases}$$

由边界条件知，函数 Y 沿 y 方向有两个零点，

因此:

$$Y(y) = B_m \sin(\frac{m\pi}{b} y)$$

对应有:

$$X(x) = A_{1m} e^{\frac{m\pi}{b} x} + A_{2m} e^{-\frac{m\pi}{b} x}$$

由边界条件知

$$X(x) = A_{2m} e^{-\frac{m\pi}{b} x}$$

则:

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\frac{m\pi}{b} y) \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{b} x}$$

待定系数C_m由非零边界条件确定。

3. 直角坐标系中三维拉普拉斯方程分离变量法

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \longleftarrow \phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}=-k_x^2 \\ \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=-k_y^2 \\ \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}=-k_z^2 \\ k_x^2+k_y^2+k_z^2=0 \end{cases}$$

根据本征值的不同取值，可以得到类似于二维情况的解的形式。

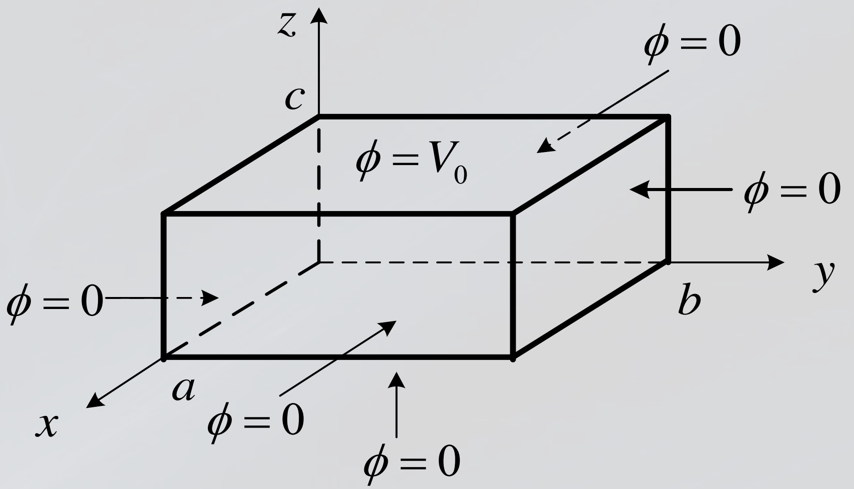
例7: 求图示长方形体积内的电位函数。

解: 电位函数满足三维拉普拉斯方程

及边界条件

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

$$\begin{cases}\phi=0 & x=0 & 0\le y\le b, 0\le z\le c\\ \phi=0 & x=a & 0\le y\le b, 0\le z\le c\\ \phi=0 & y=0 & 0\le x\le a, 0\le z\le c\\ \phi=0 & y=b & 0\le x\le a, 0\le z\le c\\ \phi=0 & z=0 & 0\le x\le a, 0\le y\le b\\ \phi=V_0 & z=c & 0\le x\le a, 0\le y\le b\end{cases}$$



由边界条件可以判断，特征函数可表示为:

$$X(x)=A_m\sin k_m x$$

$$Y(y)=B_n\sin k_n y$$

$$Z(z)=C_{mn}\sinh k_{mn} z$$

电位函数可表示为:

$$\phi(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}D_{mn}\sin(k_m x)\sin(k_n y)\sinh(k_{mn}z)$$

由边界条件可得:

$$\phi(a,y,z)=0 \Rightarrow \sin k_m a=0 \Rightarrow k_m=\frac{m\pi}{a} \quad m=1,2,3,\cdots$$

$$\phi(x,b,z)=0 \Rightarrow \sin k_n b=0 \Rightarrow k_n=\frac{n\pi}{b} \quad n=1,2,3,\cdots$$

由本征值关系可得:

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=0 \Rightarrow k_{mn}=[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2]^{1/2}$$

则:

$$\phi(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}D_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sinh[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}\,z]$$

由最后一个边界条件得：

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} D_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sinh[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}c]$$

上式两端同乘以 $\sin(\frac{s\pi}{a}x)\sin(\frac{t\pi}{b}y)$ ，并对 x, y 积分，利用三角函数正交性可得：

$$D_{mn} = \frac{16V_0}{mn\pi^2\sinh[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}c]} \qquad m=1,3,5,\cdots;n=1,3,5,\cdots$$

于是所求的电位函数为：

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\ \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{16V_0}{mn\pi^2\sinh[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}c]}\cdot$$

$$\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sinh[\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}z]$$

小结:

1. 分离变量法的原理和步骤
2. 直角坐标系中的分离变量法