3.2 柯西积分定理及其推广

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 15 日

目录

3.2.1 柯西积分定理

例 3.3 说明复积分是与积分路径有关的.

3.2.1 柯西积分定理

例 3.3 说明复积分是与积分路径有关的.

观察上一节推导出的

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

在高等数学中, 我们学过第二类曲线积分有路径无关性, 那么

上式左端的复积分也会与积分路径无关吗?

格林公式

设 D 是由逐段光滑闭曲线所围的平面单连通区域, ∂D 为它的边界. 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都在 D 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

格林公式

设 D 是由逐段光滑闭曲线所围的平面单连通区域, ∂D 为它的边界. 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都在 D 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是单连通区域 D 内的解析函数, 且 u 和 v 有一阶连续偏导数时, 我们有

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D (-v_x - u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= 0 + \mathrm{i}0 = 0.\end{aligned}$$

定理 3.2 (柯西积分定理)

设 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的解析函数, C 是 D 内的任一周线, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

历史上, 解析函数的定义一开始并不是我们现在给出的形式, 而是要求导函数存在且连续的. 一直到 1900 年, 法国数学家古尔萨首先发现导函数连续的条件是不必要的, 并证明了上述现代形式的柯西积分定理.

定理 3.2 (柯西积分定理)

设 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的解析函数, C 是 D 内的任一周线, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

历史上, 解析函数的定义一开始并不是我们现在给出的形式, 而是要求导函数存在且连续的. 一直到 1900 年, 法国数学家古尔萨首先发现导函数连续的条件是不必要的, 并证明了上述现代形式的柯西积分定理.

注: 定理3.2中的条件可减弱为函数 $f(z)$ 在周线 C 所围区域 D 内解析, 在闭区域 $\overline{D}$ 上连续. 下文中基于定理3.2导出的一系列结果的条件均可相应减弱.

3.2.2 不定积分

柯西积分定理实际上说, 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内以 z_0 为起点, z_1 为终点的简单曲线, 则 $f(z)$ 在沿简单曲线 C 的积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 只与起点 z_0 和终点 z_1 有关.

3.2.2 不定积分

柯西积分定理实际上说, 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内以 z_0 为起点, z_1 为终点的简单曲线, 则 $f(z)$ 在沿简单曲线 C 的积分 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 只与起点 z_0 和终点 z_1 有关.

所以我们可记

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3.2.2 不定积分

柯西积分定理实际上说, 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内以 z_0 为起点, z_1 为终点的简单曲线, 则 $f(z)$ 在沿简单曲线 C 的积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 只与起点 z_0 和终点 z_1 有关.

所以我们可记

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

如果固定 z_0 而让 z_1 在 D 内可随意变动, 则上面的（变上限）积分定义了一个 D 内的单值函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{3.6}$$

定理 3.3

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则由公式(3.6)定义的函数 $F(z)$ 在 D 内解析, 且 $F'(z)=f(z)$.

证 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, $\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$, 则由公式 (3.3) 有

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u\,\mathrm{d}\xi-v\,\mathrm{d}\eta+\mathrm{i}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v\,\mathrm{d}\xi+u\,\mathrm{d}\eta,$$

定理 3.3

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则由公式(3.6)定义的函数 $F(z)$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

证 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$, 则由公式 (3.3) 有

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u\,\mathrm{d}\xi - v\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{i}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v\,\mathrm{d}\xi + u\,\mathrm{d}\eta,$$

这里由于 $f(z)$ 在 D 内的积分与路径无关, 所以等式最右端的两个第二类曲线积分也与路径无关.

定理 3.3

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则由公式(3.6)定义的函数 $F(z)$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

证 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$, 则由公式 (3.3) 有

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u\,\mathrm{d}\xi - v\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{i}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v\,\mathrm{d}\xi + u\,\mathrm{d}\eta,$$

这里由于 $f(z)$ 在 D 内的积分与路径无关, 所以等式最右端的两个第二类曲线积分也与路径无关. 于是由它们定义了两个二元实函数, 记为

$$P(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y, \quad Q(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

由于这两个曲线积分与路径无关, 故有

$$P_x = u, P_y = -v, \quad Q_x = v, Q_y = u.$$

$$P_x = u, P_y = -v, \quad Q_x = v, Q_y = u.$$

由此可得

$$P_x = Q_y, P_y = -Q_x.$$

$$P_x = u, P_y = -v, \quad Q_x = v, Q_y = u.$$

由此可得

$$P_x = Q_y, P_y = -Q_x.$$

这表明函数 $F(z) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$ 的实部 $P(x, y)$ 与虚部 $Q(x, y)$ 满足 C–R 条件.

$$P_x = u, P_y = -v, \quad Q_x = v, Q_y = u.$$

由此可得

$$P_x = Q_y, P_y = -Q_x.$$

这表明函数 $F(z) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$ 的实部 $P(x, y)$ 与虚部 $Q(x, y)$ 满足 C–R 条件. 又因为 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 所以 $f(z)$ 在 D 内连续. 从而可知 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内连续, 即 P_x, P_y, Q_x, Q_y 在 D 内连续.

$$P_x = u, P_y = -v, \quad Q_x = v, Q_y = u.$$

由此可得

$$P_x = Q_y, P_y = -Q_x.$$

这表明函数 $F(z) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$ 的实部 $P(x, y)$ 与虚部 $Q(x, y)$ 满足 C–R 条件. 又因为 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 所以 $f(z)$ 在 D 内连续. 从而可知 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内连续, 即 P_x, P_y, Q_x, Q_y 在 D 内连续. 于是由推论 2.1 和定理 2.1 可知, 函数 $F(z) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$ 在 D 内解析, 且

$$F'(z) = P_x + \mathrm{i}Q_x = u + \mathrm{i}v = f(z).$$

∎

定义 3.3

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义. 如果存在函数 $F(z)$ 使得

$$F'(z) = f(z),\ z \in D,$$

则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数或不定积分, 记作 $F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z$.

定义 3.3

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义. 如果存在函数 $F(z)$ 使得

$$F'(z) = f(z),\ z \in D,$$

则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数或不定积分, 记作 $F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z$.

定理3.3说明由公式(3.6)定义的 $F(z)$ 就是 $f(z)$ 的一个原函数. 不仅如此, 我们还可以证明 $f(z)$ 的任何一个原函数 $\Phi(z)$ 都可以写成如下形式

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + C,$$

其中 C 为一常数.

事实上, 我们有

$$[\Phi(z) - F(z)]' = f(z) - f(z) = 0.$$

于是由命题 2.1 有

$$\Phi(z) - F(z) = C, \text{ 即 } \Phi(z) = F(z) + C.$$

如令 $z = z_0$, 则得 $C = \Phi(z_0)$. 这样我们就得到关于复积分的 N–L 公式.

定理 3.4

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数, 则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z, z_0 \in D. \tag{3.7}$$

例 3.4

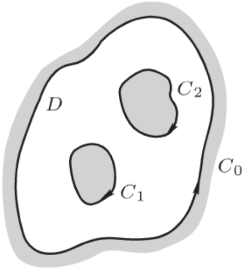
计算 $\displaystyle\int_a^b z\cos z^2\,\mathrm{d}z.$

解 易知 $z\cos z^2$ 在复平面上解析. 利用与微积分中求不定积分完全相同的方法可得 $z\cos z^2$ 的一个原函数为 $\frac{1}{2}\sin z^2$. 所以由公式(3.7)有

$$\int_a^b z\cos z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\sin b^2 - \sin a^2). \qquad \blacksquare$$

3.2.3 柯西积分定理推广到复围线的情形

虽然单连通区域内的柯西积分定理不能从围线积分为零的角度推广到多连通区域，但却可以从边界积分为零的角度推广到以多条周线组成的“复围线”为边界的有界多连通区域.



定义 3.4

设有界多连通区域 D 的边界由 $n+1$ 条周线 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成, 其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中的每一条都在其余各条的外部, 但它们都在 C_0 的内部. 我们称 D 的边界为一条复周线, 记作

$$C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-,$$

其中除 C_0 取正向外, 其余周线都取负向.

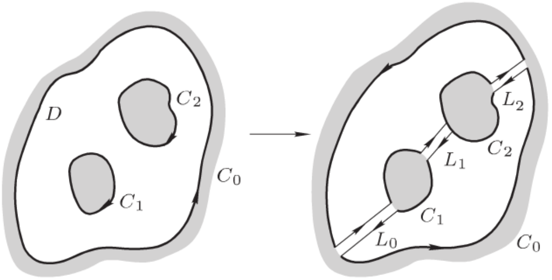
定理 3.5

设 D 是由复周线 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 所围成的区域. 若函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

即

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



证 以 $n=2$ 的情形为例. 区域 D 被分成两个单连通区域 D_1 和 D_2, 其边界各是一条周线, 分别记为 Γ_1 和 Γ_2. 于是有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

因为沿 Γ_1 和 Γ_2 积分时, 沿辅助线 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 的正反方向各积分了一次, 所以第一个等式成立. 又由定理 3.2, 第二个等式成立. ∎

当 $n=1$ 时, 可得下面的推论.

推论 3.1 (围线变形原理)

设 C_1 和 C_2 是两条周线, 其中 C_2 在 C_1 的内部. 若函数 $f(z)$ 在 C_1 和 C_2 所围成的闭区域上解析, 则

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

这个推论特别重要, 因为它说明：在区域 D 内的一个解析函数沿闭曲线的积分, 不会因闭曲线在区域内连续变形（不越过被积函数的奇点）而改变积分的值.

当 $n=1$ 时, 可得下面的推论.

推论 3.1 (围线变形原理)

设 C_1 和 C_2 是两条周线, 其中 C_2 在 C_1 的内部. 若函数 $f(z)$ 在 C_1 和 C_2 所围成的闭区域上解析, 则

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

这个推论特别重要, 因为它说明：在区域 D 内的一个解析函数沿闭曲线的积分, 不会因闭曲线在区域内连续变形（不越过被积函数的奇点）而改变积分的值.

如果说柯西积分定理描述的是两点之间的简单曲线上的积分路径无关性, 那么围线变形原理描述的就是围线线积分的路径无关性.

当 $n=1$ 时, 可得下面的推论.

推论 3.1 (围线变形原理)

设 C_1 和 C_2 是两条周线, 其中 C_2 在 C_1 的内部. 若函数 $f(z)$ 在 C_1 和 C_2 所围成的闭区域上解析, 则

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

这个推论特别重要, 因为它说明：在区域 D 内的一个解析函数沿闭曲线的积分, 不会因闭曲线在区域内连续变形（不越过被积函数的奇点）而改变积分的值.

如果说柯西积分定理描述的是两点之间的简单曲线上的积分路径无关性, 那么围线变形原理描述的就是围线线积分的路径无关性. 如果我们能够善用这些积分的路径无关性, 我们就可以把不规则曲线上的积分转化为规则曲线（例如圆周、折线等）上的积分进行讨论.

例 3.5

设 n 为整数, a 是围线 C 内的一点, 证明

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n\neq 1. \end{cases}$$

证　以 a 为圆心作圆周 C_1, 使 C_1 在 C 的内部. 由推论3.1有

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}.$$

再由例 3.2 便得所证. ∎

例 3.6

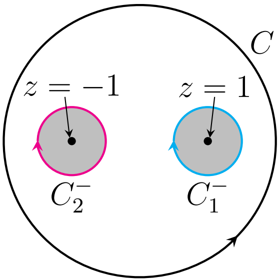
计算 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$, 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解 除 $z=\pm1$ 外, 函数 $\dfrac{1}{z^2-1}$ 在复平面上解析.

例 3.6

计算 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$, 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解 除 $z=\pm 1$ 外, 函数 $\frac{1}{z^2-1}$ 在复平面上解析. 于是由定理3.5有

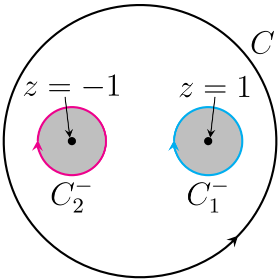


$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}.$$

例 3.6

计算 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$, 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解 除 $z=\pm 1$ 外, 函数 $\frac{1}{z^2-1}$ 在复平面上解析. 于是由定理3.5有



$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}.$$

利用柯西积分定理和例 3.2 的结果, 可分别计算得

$$\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \frac{1}{2}\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = \pi \mathrm{i},$$

$$\oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \frac{1}{2}\oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = -\pi \mathrm{i}.$$

所以

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} = \pi \mathrm{i} - \pi \mathrm{i} = 0. \qquad \blacksquare$$

作业

习题三

5. 不用计算, 证明下列积分之值均为 0.

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+2}$;

6. 计算积分：(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{|z|}$; (3) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{|\mathrm{d}z|}{z}$; (4) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$.

7. 由积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z+2}$ 之值证明 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.