第16周讲稿及作业

Edited by Hu Chen

OUC

June 17, 2020

目录

贝塞尔方程

在柱坐标系下用分离变量法求解膜振动方程会得到如下的常微分方程

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda+\alpha-\frac{\beta}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<l \tag{1}$$

中, λ 一般作为拉普拉斯算子特征值问题的特征值出现, 从而有$\lambda\geq 0$. 在实际应用中, 一般有$\alpha>0,\beta\geq 0$. 当$\lambda+\alpha>0$时, 记$\sigma=\lambda+\alpha$,
令$x=\sqrt{\sigma}\,r$, 记$y(x)=R(x/\sqrt{\sigma})=R(r),\beta=\nu^2$, 则方程(1)可以变为

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

这个方程称为ν阶贝塞尔方程, 它的解统称为贝塞尔函数或圆柱函数.

在球坐标系下用分离变量法求解膜振动方程会得到如下的常微分方程

$$R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{\gamma}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < l \tag{2}$$

作变换$x = \sqrt{\lambda}\,r$, 记$y(x) = R(x/\sqrt{\sigma}) = R(r)$, 则方程(2)可以变为

$$x^2y'' + 2xy' + (x^2 - \gamma)y = 0.$$

当$\gamma = n(n+1)$（n为整数）时, 这个方程称为n阶球贝塞尔方程, 它的解统称为球贝塞尔函数.

如果$x=x_0$是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{3}$$

的系数$p(x)$的一阶极点, $q(x)$的二阶极点, 则称$x=x_0$是方程(3)的正则奇点.

因为物理中提出的二阶变系数常微分方程基本上都属于正则奇点的情形, 所以下面我们只讨论正则奇点的情形.

设$x=x_0$是方程(3)的正则奇点, 则$p_1(x)=(x-x_0)p(x)$和$q_1(x)=(x-x_0)^2q(x)$都在点x_0解析. 在方程(3)两端同乘以$(x-x_0)^2$得

$$(x-x_0)^2y''+(x-x_0)p_1(x)y'+q_1(x)y=0.$$

下面不失一般性, 为讨论方便起见, 设$x_0=0$, 于是我们要讨论的方程变为

$$x^2y''+xp_1(x)y'+q_1(x)y=0. \tag{4}$$

由于$p_1(x)$和$q_1(x)$都在$x=0$解析, 所以有

$$p_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \quad q_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n.$$

当$x \to 0$时，我们有$p_1(x) = a_0 + O(x), q_1(x) = b_0 + O(x)$. 忽略高阶无穷小量，在$x = 0$的充分小的邻域内，方程(4)可近似为

$$x^2 y'' + a_0 x y' + b_0 y = 0. \tag{5}$$

这是一个二阶欧拉方程. 只需令$x = \mathrm{e}^t$，记$y(t) = y(\mathrm{e}^t) = y(x)$，于是有

$$y'(t) = xy'(x), \quad y''(t) = xy'(x) + x^2 y''(x) = y'(t) + x^2 y''(x),$$

则欧拉方程(5)变为

$$y''(t) + (a_0 - 1)y'(t) + b_0 y(t) = 0.$$

这个方程有形如$\mathrm{e}^{\rho t}, t\mathrm{e}^{\rho t}, \mathrm{e}^{\rho t}\cos\beta t, \mathrm{e}^{\rho t}\sin\beta t$的特解，所以欧拉方程(5)有形如

$$x^\rho, x^\rho \ln|x|, x^\rho \cos(\beta \ln|x|), x^\rho \sin(\beta \ln|x|)$$

的特解. 因为当$x > 0$或$x < 0$时，$\ln|x|, \cos(\beta\ln|x|)$和$\sin(\beta\ln|x|)$都可以展成幂级数，这启发我们考虑方程(4)的解是否也可以表示为

$$x^\rho \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

的形式.

弗罗贝尼乌斯级数是一种特殊的分数阶幂级数, 具有如下的形式

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^{n+\rho},$$

其中 ρ 为实数.

只需将弗罗贝尼乌斯级数重写为如下形式

$$(x - x_0)^{\rho} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^{n},$$

就可知道它与幂级数有着相同的的收敛性质.

与常点邻域内的幂级数解法相比, 正则奇点邻域内的弗罗贝尼乌斯级数解法不仅需要确定系数 c_n, 还需要确定参数 ρ. 设

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+\rho},$$

代入方程

$$x^2 y'' + x p_1(x) y' + q_1(x) y = 0. \tag{4}$$

可得

$$x^{\rho}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)c_n x^n+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\rho)c_n x^n\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n\right)\right]=0. \tag{6}$$

由此可得零次幂项的系数$[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]c_0=0$. 为确定 ρ, 我们令$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$, 即

$$\rho^2+(a_0-1)\rho+b_0=0. \tag{7}$$

此方程称为方程(4)在正则奇点$x=0$处的指标方程. 由于$a_0=p_1(0), b_0=q_1(0)$, 所以指标方程也可以写为

$$\rho^2+[p_1(0)-1]\rho+q_1(0)=0.$$

通过指标方程确定出 ρ 后, 利用方程(6)中的其余幂次项的系数也都为零可得到关于系数 c_n 的递推关系式, 从而可解出 c_n.

Theorem 1

设$x=0$是方程(4)的正则奇点, $p_1(x), q_1(x)$在$|x|<r$内解析, ρ_1和ρ_2为指标方程(7)的根. 则有

(1) 若$\rho_1 \neq \rho_2$且$\rho_1-\rho_2 \neq$整数, 则方程(4)有两个线性无关的解

$$y_1(x)=|x|^{\rho_1}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad y_2(x)=|x|^{\rho_2}\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

(2) 若$\rho_1=\rho_2$, 则方程(4)有两个线性无关的解

$$y_1(x)=|x|^{\rho_1}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad y_2(x)=y_1(x)\ln|x|+|x|^{\rho_1}\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

(3) 若$\rho_1-\rho_2=m$（m为正整数）, 则方程(4)有两个线性无关的解

$$y_1(x)=|x|^{\rho_1}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad y_2(x)=cy_1(x)\ln|x|+|x|^{\rho_2}\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n,$$

其中c是一个可能为0的常数. 这些解的收敛范围至少为$0<|x|<r$.

Example 2

求解ν阶贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

解　易知$x = 0$是ν阶贝塞尔方程的正则奇点, 故设

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+\rho}, \tag{8}$$

于是有

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+\rho)c_k x^{k+\rho-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+\rho-1)(k+\rho)c_k x^{k+\rho-2}.$$

将上面的级数展式代入贝塞尔方程得

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\rho-1)(k+\rho)c_k x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+\rho)c_k x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+\rho+2} - \sum_{k=0}^{+\infty}\nu^2 c_k x^{k+\rho} = 0.$$

为方便合并同幂次项, 对第三个级数的求和指标做变换, 得

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\rho-1)(k+\rho)c_k x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+\rho)c_k x^{k+\rho} + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^{k+\rho} - \sum_{k=0}^{+\infty}\nu^2 c_k x^{k+\rho} = 0.$$

合并同幂次项并化简得

$$(\rho^2-\nu^2)c_0x^\rho+[(\rho+1)^2-\nu^2]c_1x^{\rho+1}+\sum_{k=2}^{+\infty}[(\rho+k+\nu)(\rho+k-\nu)c_k+c_{k-2}]x^{k+\rho}=0.$$

由此可知

$$\begin{aligned}&(\rho^2-\nu^2)c_0=0,\\&[(\rho+1)^2-\nu^2]c_1=0,\\&(\rho+k+\nu)(\rho+k-\nu)c_k+c_{k-2}=0,\quad k=2,3,\cdots.\end{aligned}\tag{9}$$

从第一个等式中可得到指标方程

$$\rho^2-\nu^2=0.$$

由此可知指标$\rho=\pm\nu$. 于是由第二个等式可推出$c_1=0$.

(1) 若$\rho=\nu\,(\nu\geq 0)$, 则从等式(9)中可得递推公式

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)},\quad k=2,3,\cdots.$$

由于$c_1=0$, 从而有

$$c_{2k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

我们有

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2(2+2\nu)}, \\
c_4 &= -\frac{c_2}{4(4+2\nu)} = (-1)^2 \frac{c_0}{2\cdot 4(2+2\nu)(4+2\nu)}, \\
c_6 &= -\frac{c_4}{6(6+2\nu)} = (-1)^3 \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6(2+2\nu)(4+2\nu)(6+2\nu)}, \\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

归纳可得

$$
\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{(-1)^k c_0}{2\cdot 4\cdots 2k(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2k+2\nu)} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} \\
&= \frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)} c_0.
\end{aligned}
$$

对任意的实数 c_0, 只要将上面所得的系数公式代入展式(8), 便可得到贝塞尔方程的一个特解. 为得到一个形式简洁的特解, 特取

$$
c_0 = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)},
$$

则得一个特解, 记作

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},\quad |x|<+\infty, \tag{10}$$

称为ν阶第一类贝塞尔函数.

(2) 若$\rho=-\nu\,(\nu>0)$, 则从等式(9)中可得递推公式

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(k-2\nu)},\quad k=2,3,\cdots. \tag{11}$$

当2ν不为正整数时, 经过类似于情形(1)中的讨论, 取

$$c_0=\frac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1)},$$

可得贝塞尔方程的另一特解, 记作

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu},\quad 0<|x|<+\infty, \tag{12}$$

称为$-\nu$阶第一类贝塞尔函数. 当2ν为正奇数时, 只需令$c_{2\nu}=0$, 便仍可推出$c_{2k-1}=0$, $k=1,2,\cdots$, 从而一样可以得到特解$J_{-\nu}(x)$.

综上所述，当 ν 不为整数或2ν为正奇数时，我们有$J_\nu(0)=0, J_{-\nu}(0)=\infty$. 这说明$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$线性无关. 所以贝塞尔方程的通解为

$$y(x)=AJ_\nu(x)+BJ_{-\nu}(x), \quad 0<|x|<+\infty,$$

其中A和B为任意常数.

现在还剩2ν为正偶数即 ν 为正整数的情形没有讨论. 当$\nu=n\geq 0$为整数时，由(10)式我们有

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{13}$$

形式地，由(12)式有

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

但当$k<n$时，$\Gamma(-n+k+1)=\infty$, 所以上式右端前 n 项系数为 0. 实际上，我们有

$$\begin{aligned}J_{-n}(x)&=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\xlongequal{m=k-n}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\\&=(-1)^n\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(m+n)!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^nJ_n(x).\end{aligned}$$

这表明$J_n(x)$和$J_{-n}(x)$线性相关. 因此为了求得贝塞尔方程的通解, 我们必须寻找一个与$J_n(x)$线性无关的特解. 为此先取贝塞尔方程的与$J_\nu(x)$线性无关的一个特解为

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{14}$$

因为

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = J_n(x)\cos n\pi,$$

所以当$\nu \to n$时, 公式(14)的右端是 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 利用洛必达法则, 经过复杂的计算后我们可以证明极限 $\lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(x)$存在, 因此我们可以定义

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + c\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left[\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+n}\frac{1}{m}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 c 为欧拉常数（$c = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772157\cdots$）. 可以验证$Y_n(x)$就是贝塞尔方程的一个与$J_n(x)$线性无关的特解.

称由公式(14)和(15)定义的函数$Y_\nu(x)$为ν阶第二类贝塞尔函数或ν阶诺依曼函数.

当$\nu \geq 0$ 时，无论ν是否为整数，贝塞尔方程的通解总可以表示为

$$y(x) = CJ_\nu(x) + DY_\nu(x), \quad 0 < |x| < +\infty,$$

其中C和D为任意常数. $\blacksquare$

类似于正、余弦函数$\sin x, \cos x$与指数函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$的关系，在复域内可引进第三类贝塞尔函数

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + \mathrm{i}Y_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - \mathrm{i}Y_\nu(x).$$

这两类函数又分别称为第一类和第二类汉克尔函数. 汉克尔函数出现在波的散射问题中. 当允许贝塞尔方程的解取复值时，$H_\nu^{(1)}(x)$和$H_\nu^{(2)}(x)$ 的线性组合也可以表示它的通解.

贝塞尔函数的性质与应用

在用分离变量法求解圆柱区域内的含第一类齐次边界条件的偏微分方程定解问题时，会遇到如下的参数形式的贝塞尔方程特征值问题

$$\begin{cases} R''(r) + \dfrac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \dfrac{\nu^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < l, \\ |R(0)| < +\infty, |R'(0)| < +\infty, R(l) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

其中参数 λ 是特征值. 在实际应用中参数 ν 常取值为整数或半奇数, 即$\nu = n$或$n + 1/2$, 其中 n 为整数. 也就是说, 在实际应用中, 整数阶和半奇数阶贝塞尔函数是最重要的. 但这里为了方便将两者放在一起统一讨论, 我们允许 ν 为实数.

在方程

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

两端同乘以$rR(r)$, 并整理可得

$$-[rR'(r)]'R(r)+\frac{\nu^2}{r}R^2(r)=\lambda rR^2(r).$$

对这个方程两端在区间$[0,l]$上积分, 可得

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^l rR^2(r)\mathrm{d}r &= -\int_0^l [rR'(r)]'R(r)\mathrm{d}r+\int_0^l \frac{\nu^2}{r}R^2(r)\mathrm{d}r\\ &= -rR'(r)R(r)\Big|_0^l+\int_0^l r|R'(r)|^2\mathrm{d}r+\int_0^l \frac{\nu^2}{r}R^2(r)\mathrm{d}r\\ &= \int_0^l r|R'(r)|^2\mathrm{d}r+\int_0^l \frac{\nu^2}{r}R^2(r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

由此分析可知: 若λ是特征值问题(16)的特征值, 则$\lambda>0$.

令$x=\sqrt{\lambda}\,r$, 记$y(x)=R(x/\sqrt{\lambda})=R(r)$, 则特征值问题(16)可变为如下的$\nu$阶贝塞尔方程边值问题

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, & 0<x<\sqrt{\lambda}l, \\ |y(0)|<+\infty, |y'(0)|<+\infty, y(\sqrt{\lambda}l)=0. \end{cases} \quad (17)$$

在例2中我们已经求得ν阶贝塞尔方程的通解为

$$y(x)=CJ_n(x)+DY_n(x), \quad n=0,1,2,\cdots$$

或

$$y(x)=AJ_\nu(x)+BJ_{-\nu}(x), \quad \nu\neq n, \nu>0.$$

由定义式(10)有$J_0(0)=1, J_\nu(0)=0\,(\nu>0)$, 而由定义式(12)和(15)分别有

$$\lim_{x\to 0} J_{-\nu}(x)=\infty \quad 和 \quad \lim_{x\to 0} Y_n(x)=\infty.$$

所以由$x=0$处的有界性条件, 边值问题(17)的解只可能为第一类贝塞尔函数$J_\nu(x)\,(\nu\geq 0)$.

下面我们讨论贝塞尔函数$J_\nu(x)$的有关性质.

同勒让德多项式一样，我们可以得到一些关于贝塞尔函数$J_\nu(x)$的递推关系式，从而方便我们讨论它的性质.

在定义式(10)两端同乘以x^ν，这里ν为任一实数，然后再求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2^\nu\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+\nu)}\right]\\ &= 2^\nu\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(k+\nu)}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+\nu)-1}\\ &= x^\nu\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1},\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{18}$$

特别地，当$\nu=1$时有

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x). \tag{19}$$

同理可证
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \tag{20}$$
特别地，当$\nu = 0$时有
$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{21}$$
将式(18)和(20)左端的导数项展开并化简，可得
$$xJ_\nu'(x) + \nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x), \tag{22}$$
$$xJ_\nu'(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x). \tag{23}$$
将这两式相加减又可得递推关系式
$$2J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \tag{24}$$
$$2\nu x^{-1}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x). \tag{25}$$

高阶贝塞尔函数可以化为低阶贝塞尔函数来计算.
特别地，任意整数阶贝塞尔函数都可以用$J_0(x)$和$J_1(x)$来表示.

Example 3

计算不定积分: (1) $\displaystyle\int x^3 J_0(x)\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle -\int x^2 J_2(x)\mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
\int x^3 J_0(x)\mathrm{d}x = \int x^2 \cdot x J_0(x)\mathrm{d}x &= \int x^2 \mathrm{d}[x J_1(x)] \\
&= x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)\mathrm{d}x \\
&= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C \\
&= x^3 J_1(x) - 2x^2[2x^{-1} J_1(x) - J_0(x)] + C \\
&= (x^3 - 4x) J_1(x) + 2x^2 J_0(x) + C,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int x^2 J_2(x)\mathrm{d}x = \int x^3 \mathrm{d}[x^{-1} J_1(x)] &= x^2 J_1(x) - 3\int x J_1(x)\mathrm{d}x \\
&= x^2 J_1(x) + 3\int x \mathrm{d}J_0(x) \\
&= x^2 J_1(x) + 3x J_0(x) - 3\int J_0(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

现在回到边值问题

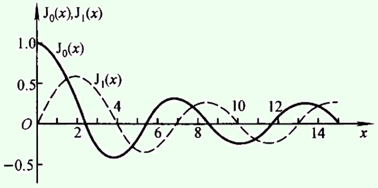
$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, & 0 < x < \sqrt{\lambda}l, \\ |y(0)| < +\infty, |y'(0)| < +\infty, y(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

我们已经知道它的解只与$J_\nu(x)$有关, 但要完全确定它的解, 还需要考察边界条件$J_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0$. 这就需要我们考虑$J_\nu(x)$在正实轴上是否有零点以及它的零点分布问题. 下面的定理回答了这个问题.

Theorem 4

(1) 对任一实数ν, $J_\nu(x)$在正实轴上有无穷多个零点, 这些零点都是孤立的, 构成一个可由小到大排序的无界点列.
(2) 对任一实数ν, $J_\nu(x)$和$J_{\nu+1}(x)$在正实轴上的零点是互相交错排列的.

因为$J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$, 所以$J_\nu(x)$在整个实数轴上的零点分布是关于原点对称的. 不过为求解边值问题(17), 我们只需要关注正实轴上的零点分布情况.



清楚了$J_\nu(x)$的零点分布情况后, 我们就可以求解特征值问题

$$\begin{cases} R''(r)+\dfrac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\dfrac{\nu^2}{r^2}\right)R(r)=0, \quad 0<r<l, \\ |R(0)|<+\infty, |R'(0)|<+\infty, R(l)=0 \end{cases} \tag{16}$$

了.

设$\{j_{\nu,m}\}_{m=1}^{+\infty}$是$J_\nu(x)$ $(\nu\geq 0)$的零点列,

$$0<j_{\nu,1}<j_{\nu,2}<\cdots<j_{\nu,m}<\cdots,$$

则特征值问题(16)的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_{\nu,m}=\left(\frac{j_{\nu,m}}{l}\right)^2, \quad R_{\nu,m}(r)=J_\nu\left(\frac{j_{\nu,m}}{l}r\right), \qquad m=1,2,\cdots. \tag{26}$$

既然$J_\nu(x)$的零点如此重要，我们就有必要进一步讨论它们. 遗憾的是，想求出零点的精确值是不可能的，我们只能用数值计算的方法或直接用数学软件（例如Matlab）中的现成命令求出排在前面的一些零点的近似值. 然而，数值计算方法最多只能给出有限个零点的近似值. 对远离原点的无穷多个零点，我们还得用分析方法给出它们的渐近估计式. 当$x \to +\infty$时，$J_\nu(x)$有如下的渐近估计式

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

我们可以用右端余弦函数的零点值作为$J_\nu(x)$的零点的渐近估计值，即

$$j_{\nu,m} \approx \left(m + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi.$$

这表明当$x \to +\infty$时，$J_\nu(x)$的两个相邻零点的间距趋向于π.

在特征值问题中，第一个特征值总是有着特别的重要性．在8.1.3小节中我们对基音和泛音的区别就是一个例证．也就是说，$j_{\nu,1}$比其它零点都重要．

在讨论圆柱形波导的截止频率时，会用到这样一个事实：$j_{0,1}$是$\{j_{n,1}\}_{n=0}^{+\infty}$中最小的．我们将说明这只是一个一般事实的特殊推论．为此，我们需要换一个角度考察$j_{\nu,m}$的性质．因为ν是一个实数，显然$j_{\nu,m}$依赖于ν．因此我们可以把$j_{\nu,m}$看作是关于ν的函数．可以证明$j_{\nu,m}$是关于ν单调递增的函数．特别地，我们有

$$0 < j_{0,1} < j_{1,1} < j_{2,1} < \cdots j_{n,1} < \cdots .$$

Theorem 5

对$\nu \geq 0$, 设$j_{\nu,m}(m=1,2,\cdots)$是$J_\nu(x)$的正零点, 则贝塞尔函数系$\{J_\nu(j_{\nu,m}r/l)\}_{m=1}^{+\infty}$是$L^2[0,l]$ 中关于权函数$w(r)=r$的正交函数系, 即当$k \neq m$ 时有

$$\int_0^l rJ_\nu(j_{\nu,m}r/l)J_\nu(j_{\nu,k}r/l)\mathrm{d}r = 0, \quad k,m=1,2,\cdots;$$

而当$k=m$时有

$$\int_0^l r[J_\nu(j_{\nu,m}r/l)]^2\mathrm{d}r = \frac{l^2}{2}J_{\nu-1}^2(j_{\nu,m}) = \frac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(j_{\nu,m}), \quad m=1,2,\cdots. \tag{27}$$

Theorem 6

对$\nu \geq 0$, 设$j_{\nu,m}(m=1,2,\cdots)$是$J_\nu(x)$的正零点, 则贝塞尔函数系$\{J_\nu(j_{\nu,m}r/l)\}_{m=1}^{+\infty}$是$L^2[0,l]$ 中关于权函数$w(r)=r$的正交坐标系, 即对任一$L^2[0,l]$中的函数$f(r)$有如下的广义傅里叶级数展式成立

$$f(r) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m J_\nu(j_{\nu,m}r/l), \tag{28}$$

其中系数 $$c_m = \frac{1}{N_{\nu,m}^2}\int_0^l rf(r)J_\nu(j_{\nu,m}r/l)\mathrm{d}r,\ N_{\nu,m}^2 = \frac{l^2}{2}J_{\nu-1}^2(j_{\nu,m}) = \frac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(j_{\nu,m}). \tag{29}$$

函数项级数(28)称为函数$f(r)$的傅里叶–贝塞尔级数或简称为贝塞尔级数.

对贝塞尔级数也有完全类似于定理7.1的逐点收敛性结果.

Theorem 7

若函数$f(r)$在$(-l,l)$上分段光滑, 则$f(r)$的傅里叶–贝塞尔级数展式(28)在$(-l,l)$上收敛, 并且在$f(r)$的连续点收敛于$f(r)$; 在不连续点收敛于$\dfrac{f(r+0)+f(r-0)}{2}$.

Example 8

将常数函数$f(r)=u_0$在区间$(0,1)$上按0阶贝塞尔函数系$\{J_0(j_{0,m}r)\}_{m=1}^{+\infty}$展开，这里$j_{0,m}(m=1,2,\cdots)$是$J_0(x)$的正零点.

解　设

$$f(r)=u_0=\sum_{m=1}^{+\infty}c_mJ_0(j_{0,m}r).$$

由系数公式(29)有

$$c_m=\frac{2}{J_1^2(j_{0,m})}\int_0^1 ru_0J_0(j_{0,m}r)\mathrm{d}r \xlongequal{x=j_{0,m}r} \frac{2u_0}{j_{0,m}^2J_1^2(j_{0,m})}\int_0^{j_{0,m}} xJ_0(x)\mathrm{d}x.$$

由公式(19)我们有

$$c_m=\frac{2u_0}{j_{0,m}^2J_1^2(j_{0,m})}[xJ_1(x)]_0^{j_{0,m}}=\frac{2u_0}{j_{0,m}J_1(j_{0,m})}.$$

所以

$$u_0=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2u_0}{j_{0,m}J_1(j_{0,m})}J_0(j_{0,m}r).$$

Example 9 (圆形膜振动问题)

考虑一个边界固定的圆形膜振动问题，在极坐标形式下它的数学模型为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) r \in (0,l), \theta \in \mathbb{R}, t > 0, & \text{(30a)}\\
u(l,\theta,t) = 0, \qquad \theta \in \mathbb{R}, t \geq 0, & \text{(30b)}\\
u(r,\theta,0) = \varphi(r,\theta), u_t(r,\theta,0) = \psi(r,\theta), \qquad 0 \leq r \leq l, \theta \in \mathbb{R}. & \text{(30c)}
\end{cases}
$$

解 设$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, 代入方程(30a)得

$$R(r)\Theta(\theta)T''(t) = a^2\left[R''(r)\Theta(\theta)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)T(t) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)T(t)\right].$$

两端同除以$a^2R(r)\Theta(\theta)T(t)$得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{R''(r) + r^{-1}R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

注意到等式两端为不同自变量的函数，所以等式两端的函数必为同一常数，记为$-\lambda$, 由此得

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{31}$$

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

注意到上面第二式又是变量分离的形式, 所以等式两端的函数必为同一常数, 记为β. 于是可得

$$\Theta''(\theta) + \beta\Theta(\theta) = 0, \tag{32}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \beta)R(r) = 0. \tag{33}$$

- 对方程(32)可自然地附加周期性条件$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$而得到一个周期特征值问题. 这是我们已经求解过的特征值问题, 利用前面的结果有

$$\beta = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

- 利用边界条件(30b)可得$R(l) = 0$. 而在圆心$r = 0$处, 由于极坐标在原点无意义, 故要附加自然边界条件条件$|R(0)| < +\infty$和$|R'(0)| < +\infty$. 结合方程(33)就得到了特征值问题

$$\begin{cases} R''(r) + \dfrac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < l, \\ |R(0)| < +\infty, |R'(0)| < +\infty, R(l) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

特征值问题(34)就是本节开头提出的特征值问题(16)的参数$\nu = n$的特殊情形. 所以特征值问题(34)的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{j_{n,m}}{l}\right)^2, \quad R_{nm}(r) = J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right), \qquad m = 1, 2, \cdots,$$

其中$j_{n,m}$为$J_n(x)$的正零点. 将$\lambda_{n,m}$的值代入方程(31), 解得

$$T_{nm}(t) = C_{nm}\cos\left(\frac{aj_{n,m}t}{l}\right) + D_{nm}\sin\left(\frac{aj_{n,m}t}{l}\right).$$

于是叠加所有变量分离形式的特解得

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \Bigg\{ \left[A_{nm}\cos\left(\frac{aj_{n,m}t}{l}\right) + B_{nm}\sin\left(\frac{aj_{n,m}t}{l}\right)\right]\cos n\theta \\ + \left[\alpha_{nm}\cos\left(\frac{aj_{n,m}t}{l}\right) + \beta_{nm}\sin\left(\frac{aj_{n,m}t}{l}\right)\right]\sin n\theta\Bigg\} J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right), \end{aligned}$$

其中$A_{nm} = A_nC_{nm}, B_{nm} = A_nD_{nm}, \alpha_{nm} = B_nC_{nm}, \beta_{nm} = B_nD_{nm}$都是待定常数. 由初始条件(30c)有

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}(A_{nm}\cos n\theta+\alpha_{nm}\sin n\theta)J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right),$$

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{aj_{n,m}}{l}(B_{nm}\cos n\theta+\beta_{nm}\sin n\theta)J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right).$$

于是利用正交性可得

$$A_{0m}=\frac{1}{\pi l^2J_1^2(j_{0,m})}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}r\varphi(r,\theta)J_0\left(\frac{j_{0,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$A_{nm}=\frac{2}{\pi l^2J_{n+1}^2(j_{n,m})}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}r\varphi(r,\theta)(\cos n\theta)J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$\alpha_{nm}=\frac{2}{\pi l^2J_{n+1}^2(j_{n,m})}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}r\varphi(r,\theta)(\sin n\theta)J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$B_{0m}=\frac{1}{\pi alj_{0,m}J_1^2(j_{0,m})}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}r\psi(r,\theta)J_0\left(\frac{j_{0,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$B_{nm}=\frac{2}{\pi alj_{n,m}J_{n+1}^2(j_{n,m})}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}r\psi(r,\theta)(\cos n\theta)J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$\beta_{nm}=\frac{2}{\pi alj_{n,m}J_{n+1}^2(j_{n,m})}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}r\psi(r,\theta)(\sin n\theta)J_n\left(\frac{j_{n,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

修正贝塞尔函数

为了让读者明白修正贝塞尔函数的出处和用处，我们将通过一个实际问题来引出它.

考虑一个半径为 a 高为 h 的均匀圆柱体，上下底的温度保持为零度，侧面有热流流入，求柱内稳定的温度分布. 由于上下底的温度分布都是径向对称的，所以所求的稳定的温度分布也是径向对称的. 这个问题的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < r < a, 0 < z < h, \\ u_r(a, z) = g(z), & 0 \leq z \leq h, \\ u(r, 0) = 0, u(r, h) = 0, & 0 \leq r \leq a. \end{cases}$$

设$u(r, z) = R(r)Z(z)$，代入方程，分离变量可得

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \qquad 0 < z < h, \tag{35}$$

$$R''(r) + r^{-1}R'(r) - \lambda R(r) = 0, \qquad 0 < r < a. \tag{36}$$

对方程(35)结合边界条件可得特征值问题

$$\begin{cases} Z''(z)+\lambda Z(z)=0, \quad 0<z<h, \\ Z(0)=Z(h)=0. \end{cases}$$

这就是我们最早求解过的特征值问题, 可解得特征值和特征函数

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z, \qquad n=1,2,\cdots.$$

比较方程(36)和

$$R''(r)+r^{-1}R'(r)+\lambda R(r)=0,$$

可以发现虽然两者很像, 但在左端最后一项差了一个正负号. 因此方程(36)并不是参数形式的贝塞尔方程. 令$x=\sqrt{\lambda_n}r, y(x)=R(x/\sqrt{\lambda_n})$, 则方程(36)变为

$$x^2y''+xy'-x^2y=0.$$

这个方程称为零阶修正贝塞尔方程.

一般地, 称二阶变系数常微分方程

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0 \tag{37}$$

为ν阶修正贝塞尔方程.

从前面的例子中不难知道，如果圆柱上下底面为齐次边界条件，而侧面为非齐次边界条件，并且所求物理量不再径向对称时，就会出现一般的修正贝塞尔方程.

修正贝塞尔方程的解称为修正贝塞尔函数. 在当前文献中，修正贝塞尔函数还有虚宗量（或虚变量）的贝塞尔函数、变型贝塞尔函数、双曲贝塞尔函数等叫法. 修正贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{37}$$

也有相应的种种其它叫法.

对修正贝塞尔方程(37)做自变量变换$\xi = \mathrm{i}x$，它就会变成贝塞尔方程

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + (\xi^2 - \nu^2)y = 0.$$

于是利用$J_\nu(\xi)$是贝塞尔方程的解，我们可以得到修正贝塞尔方程(37)的一个解

$$I_\nu(x) = \mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}x), \tag{38}$$

其中的常数因子$\mathrm{i}^{-\nu}$是为了保证$I_\nu(x)$是实函数. 我们称$I_\nu(x)$为第一类修正贝塞尔函数.

由公式(38) 和(10)立即可得$I_\nu(x)$的级数表达式

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad |x| < +\infty, \tag{39}$$

当ν不为整数时，由于$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$线性无关，从而$I_\nu(x)$与$I_{-\nu}(x)$线性无关. 于是修正贝塞尔方程(37) 的通解可表示为

$$y(x) = AI_\nu(x) + BI_{-\nu}(x),$$

其中A, B为任意常数.

当ν为整数时，由于$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$线性相关，从而$I_\nu(x)$与$I_{-\nu}(x)$线性相关. 因此为得到修正贝塞尔方程(37) 的通解，我们需要求修正贝塞尔方程(37)的另一个与$I_\nu(x)$线性无关的解. 同9.2节中第二类贝塞尔函数$Y_n(x)$的定义方式一样，我们先定义

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu}, \tag{40}$$

然后定义$K_n(x) = \lim\limits_{\nu\to n} K_\nu(x)$. 我们称$K_\nu(x)$为第二类修正贝塞尔函数或麦克唐纳函数.

$K_\nu(x)$可以用汉克尔函数表示. 事实上, 利用公式(38)和(14)我们有

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{i}^\nu J_{-\nu}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}x)}{\sin\nu\pi} = \frac{\pi\mathrm{i}^\nu}{2}\frac{J_{-\nu}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}^{-2\nu}J_\nu(\mathrm{i}x)}{\sin\nu\pi} \\ &= \frac{\pi\mathrm{i}^\nu}{2}\frac{J_{-\nu}(\mathrm{i}x) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(\mathrm{i}x)}{\sin\nu\pi} = \frac{\pi\mathrm{i}^\nu}{2}\frac{J_{-\nu}(\mathrm{i}x) - \cos\nu\pi J_\nu(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\sin\nu\pi J_\nu(\mathrm{i}x)}{\sin\nu\pi} \\ &= \frac{\pi\mathrm{i}^{\nu+1}}{2}\left[J_\nu(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\frac{\cos\nu\pi J_\nu(\mathrm{i}x) - J_{-\nu}(\mathrm{i}x)}{\sin\nu\pi}\right] = \frac{\pi\mathrm{i}^{\nu+1}}{2}[J_\nu(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}Y_\nu(x)] \\ &= \frac{\pi\mathrm{i}^{\nu+1}}{2}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x). \end{aligned} \tag{41}$$

因为无论ν取什么值, $H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x)$和$J_\nu(\mathrm{i}x)$都线性无关, 所以$K_\nu(x)$与$I_\nu(x)$也线性无关. 于是修正贝塞尔方程(37)的通解总可表示为

$$y(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x),$$

其中A, B为任意常数.

由公式(38), 不难从已知的$J_\nu(x)$的性质推出$I_\nu(x)$满足的相应的性质, 例如递推公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} I_\nu(x)] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x).$$

特别地, 有

$$I_0'(x) = I_1(x).$$

现在回到本节开头提出的定解问题的求解. 由于$I_\nu(x)$在$x=0$有界, 而$K_\nu(x)$在$x=0$无界, 所以方程

$$R''(r)+r^{-1}R'(r)-\lambda R(r)=0, \quad 0<r<a \tag{36}$$

的解为

$$R_n(r)=A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right).$$

于是叠加所有变量分离的特解得

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi}{h}z.$$

代入尚未用到的边界条件得

$$g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{h}A_n I_0'\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\sin\frac{n\pi}{h}z=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{h}A_n I_1\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\sin\frac{n\pi}{h}z.$$

利用傅里叶正弦级数的系数公式有

$$A_n=\frac{2}{n\pi I_1\left(\frac{n\pi}{h}a\right)}\int_0^h g(z)\sin\frac{n\pi}{h}z\mathrm{d}z.$$

球贝塞尔函数

在用分离变量法求解球体区域内的含第一类齐次边界条件的偏微分方程定解问题时, 会遇到如下的参数形式的球贝塞尔方程特征值问题

$$\begin{cases} R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < l, n = 0, 1, 2, \cdots, \\ |R(0)| < +\infty, |R'(0)| < +\infty, R(l) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

此特征值问题中的方程可重写为

$$-[r^2R'(r)]' + n(n+1)R(r) = \lambda r^2 R(r).$$

于是模仿9.5节开头对特征值问题(16)的讨论可得$\lambda > 0$. 令$x = \sqrt{\lambda}\, r$,
记$y(x) = R(x/\sqrt{\lambda}) = R(r)$, 则特征值问题(42)可变为如下的$n$阶球贝塞尔方程边值问题

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + [x^2 - n(n+1)]y = 0, \quad 0 < x < \sqrt{\lambda}l, , n = 0, 1, 2, \cdots, \\ |y(0)| < +\infty, |y'(0)| < +\infty, y(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \tag{43}$$

再令$w(x) = \sqrt{x}\, y(x)$, 则n阶球贝塞尔方程就可化为$n + 1/2$阶贝塞尔方程

$$x^2w'' + xw' + \left[x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]w = 0.$$

由此可知 n 阶球贝塞尔方程的通解可表示为

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) + \frac{B}{\sqrt{x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

其中A, B为任意常数. 记

$$\mathrm{j}_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad \mathrm{y}_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x), \tag{44}$$

分别称它们为 n 阶第一类和第二类球贝塞尔函数. 第二类球贝塞尔函数$\mathrm{y}_n(x)$又称为球诺依曼函数. 于是 n 阶球贝塞尔方程的通解又可表示为

$$y(x) = C\,\mathrm{j}_n(x) + D\,\mathrm{y}_n(x),$$

其中C, D为任意常数.

由公式(44), (10)和(14)可知, $\mathrm{j}_n(x)$在$x = 0$处有界, 而$\mathrm{y}_n(x)$在$x = 0$处无界. 所以为求边值问题(43)的解, 必须舍掉$\mathrm{y}_n(x)$. 设$a_{n,m}$是$\mathrm{j}_n(x)$的第 m 个正零点. 由公式(44)有$a_{n,m} = j_{n+\frac{1}{2},m}$, 这里$j_{n+\frac{1}{2},m}$是$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$的正零点. 于是特征值问题(42)的特征值和特征函数为

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{a_{n,m}}{l}\right)^2, \quad R_{n,m}(r) = \mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l} r\right), \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

由定理5不难推出，$\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right)$和$\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,k}}{l}r\right)$（$m\neq k$）在区间$[0,l]$上关于权函数 r^2 加权正交，即有

$$\int_0^l r^2\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right)\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,k}}{l}r\right)\mathrm{d}r=0,\quad k,m=1,2,\cdots.$$

还可推出

$$\begin{aligned}\int_0^l r^2\left[\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right)\right]^2\mathrm{d}r=&\frac{\pi l}{2a_{n,m}}\int_0^l r\left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right)\right]^2\mathrm{d}r\\=&\frac{\pi l}{2a_{n,m}}\times\frac{l^2}{2}J^2_{n+\frac{3}{2}}(a_{n,m})=\frac{l^3}{2}\mathrm{j}^2_{n+1}(a_{n,m}),\quad m=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

进一步，由定理6可以推出球贝塞尔函数系$\{\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right)\}_{m=1}^{+\infty}$是$L^2[0,l]$中关于权函数 r^2 的正交坐标系，即对任一$L^2[0,l]$中的函数$f(r)$有如下的广义傅里叶级数展式成立

$$f(r)=\sum_{m=1}^{+\infty}c_m\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right),\tag{45}$$

其中系数

$$c_m=\frac{2}{l^3\mathrm{j}^2_{n+1}(a_{n,m})}\int_0^l r^2f(r)\mathrm{j}_n\left(\frac{a_{n,m}}{l}r\right)\mathrm{d}r,\quad m=1,2,\cdots.$$

由公式(44), 要想进一步了解$\mathrm{j}_n(x)$的性质, 需要先了解半奇数阶贝塞尔函数$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$的性质. 由公式(10)有

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(k+1)!2^{2(k+1)}}{(2k+2)!\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

类似地可得

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

于是利用递推公式(25)可知所有半奇数阶贝塞尔函数$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$都是初等函数, 且可求出解析表达式. 例如

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right).$$

从而可知$\mathrm{j}_n(x)$都是初等函数.

特别地, 我们有

$$\mathrm{j}_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \mathrm{j}_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}. \tag{46}$$

由递推公式(25)和定义式(44)可得球贝塞尔函数的递推公式

$$\mathrm{j}_{n-1}(x)+\mathrm{j}_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}\mathrm{j}_n(x).$$

利用这个递推公式可以求出其它的球贝塞尔函数的解析表达式.

Example 10

半径为 l 的均匀圆球, 初始温度为 0, 在加热过程中, 球面温度始终保持为 u_0, 求球内的温度变化.

解　由于初始温度是球对称的, 即与角度无关, 故可设球内温度 u 也是球对称的, 则球内温度 u 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0<r<l, t>0, \\ u(l,t)=u_0, & t\geq 0, \\ u(r,0)=0, & 0\leq r\leq l. \end{cases}$$

首先把边界条件齐次化. 设 $u=v+u_0$, 则 v 满足混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}\right), & 0<r<l, t>0, \\ v(l,t)=0, & t\geq 0, \\ v(r,0)=-u_0, & 0\leq r\leq l. \end{cases}$$

设$v(r,t)=R(r)T(t)$, 代入方程和边界条件, 可分离得特征值问题

$$\begin{cases} R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)+\lambda R(r)=0, & 0<r<l,\cdots, \\ |R(0)|<+\infty, |R'(0)|<+\infty, R(l)=0 \end{cases} \tag{47}$$

和常微分方程

$$T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0.$$

注意到特征值问题(47)就是特征值问题(42)的$n=0$特殊情形, 于是特征值问题(47)的特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{a_n}{l}\right), \quad R_n(r)=\mathrm{j}_0\left(\frac{a_n}{l}r\right), \qquad n=1,2,\cdots,$$

其中 a_n 为$\mathrm{j}_0(x)$的第 n 个正零点. 由公式(46)可知$a_n=n\pi$, 所以有

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad R_n(r)=\mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right)=\frac{l}{n\pi r}\sin\frac{n\pi}{l}r, \qquad n=1,2,\cdots.$$

相应地解得

$$T_n(t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

于是叠加所有变量分离的特解得

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}.$$

代入初始条件得

$$-u_0=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right).$$

利用级数展式(45)的系数公式有

$$\begin{aligned}C_n&=-u_0\frac{2}{l^3\mathrm{j}_1^2(n\pi)}\int_0^l r^2\mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right)\mathrm{d}r=-u_0\frac{2n\pi}{l^2}\int_0^l r\sin\frac{n\pi}{l}r\mathrm{d}r\\&=-u_0\frac{2n\pi}{l^2}\times\frac{(-1)^{n+1}l^2}{n\pi}=(-1)^n2u_0.\end{aligned}$$

所以解为

$$u(r,t)=u_0\left[1+\frac{2l}{\pi r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi r}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\right].$$

可化为贝塞尔方程的微分方程

有不少二阶微分方程的解都可以借助贝塞尔函数来表示. 这是贝塞尔函数在特殊函数理论中有着根本重要性的一大原因.

但是, 很难判别一个给定的微分方程是否可以化为贝塞尔方程. 不过转换一下思路, 反其道而行之, 我们就可以得到一些可化为贝塞尔方程的微分方程类. 简单地说, 就是对贝塞尔方程

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{48}$$

做一些自变量和因变量的变换, 看它能变成什么样的微分方程. 例如做变换$w(x) = x^{\beta}\mathrm{e}^{\alpha x} y(ax^{\gamma})$, 贝塞尔方程(48)就变为

$$w'' + \left(\frac{1-2\beta}{x} - 2\alpha\right) w' + \left[\gamma^2 a^2 x^{2\gamma-2} + \alpha^2 + \frac{\alpha(2\beta-1)}{x} + \frac{\beta^2 - \gamma^2\nu^2}{x^2}\right] w = 0. \tag{49}$$

由贝塞尔方程的通解可知它的通解可表示为

$$w(x) = x^{\beta}\mathrm{e}^{\alpha x}\left[C J_{\nu}(ax^{\gamma}) + D Y_{\nu}(ax^{\gamma})\right],$$

其中C, D为任意的常数. 方程(49)基本上覆盖了所有的在实际应用中出现的可化为贝塞尔方程的微分方程.

习题十六作业

3.试由表达式

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta$$

证明

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

3.若x 为实数，n为整数, 试证

$$|J_n(x)| \le 1.$$

8. 试证

$$(1) J_2 - J_0 = 2J_0''. \qquad (2) J_3 + 3J_0' + 4J_0'' = 0.$$
$$(3) x^2 J_n'' = (n^2 - n - x^2)J_n + xJ_{n+1}.$$

9. 试证

$$(1) \cos x = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(x).$$

$$(2) \sin x = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(x).$$