

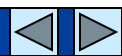
刚体：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

说明：(1) 刚体是理想模型

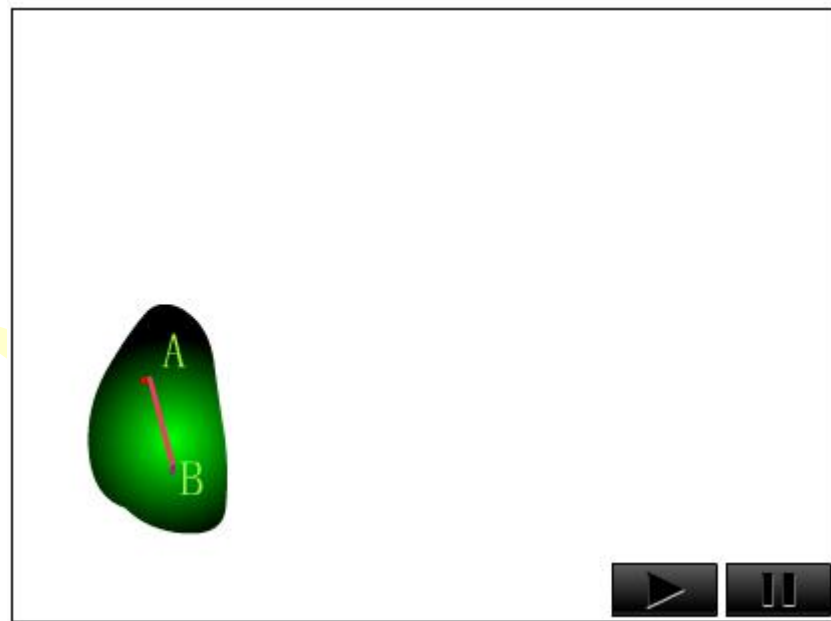
(2) 刚体模型是为简化问题引进的。

考虑物体大小、形状，忽略形变

刚体的运动形式：平动、转动。



平动：若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线。



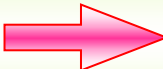
特点： 1、所有点的运动轨迹都完全相同

2、各点位移都相同，运动状态一样，如：
 \bar{v} 、 \bar{a} 等都相同。

3、刚体中任意一点的运动都可代替整个刚体的运动，通常以**质心**的运动来代表整个刚体的平动。

质心运动定理： $\vec{F} = m\vec{a}_c$

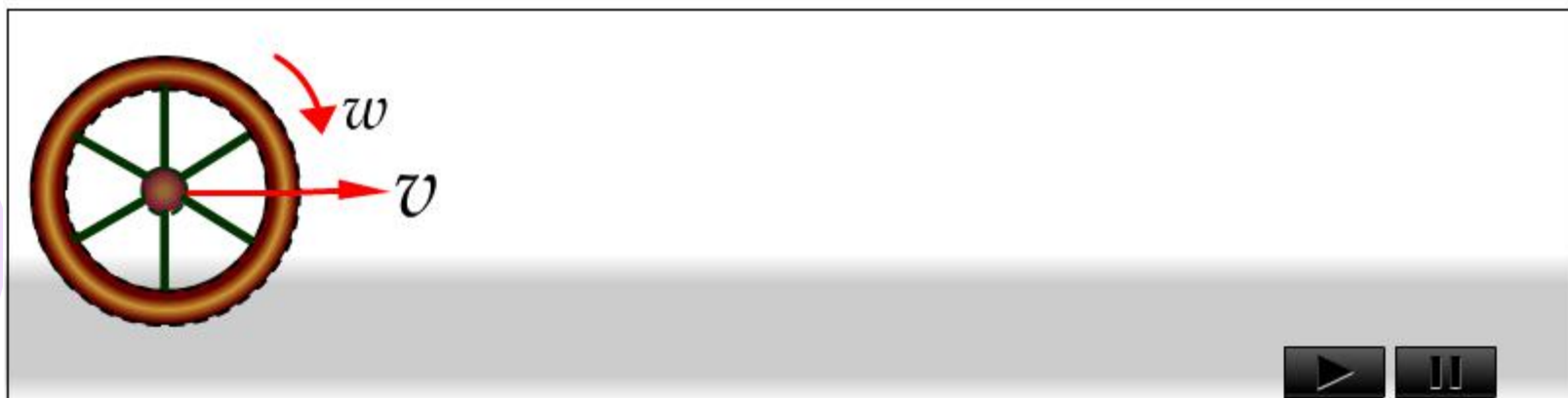
不管物体的质量如何分布、外力作用在什么地方，质心的运动就象物体的全部质量都集中于此，而且所有的外力都作用于其上的一个质点的运动一样。

刚体平动  质点运动

➤ 转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动。转动又分定轴转动和非定轴转动。



➤ 刚体的平面运动。



➤ 刚体的一般运动 = 质心的平动 + 绕质心的转动

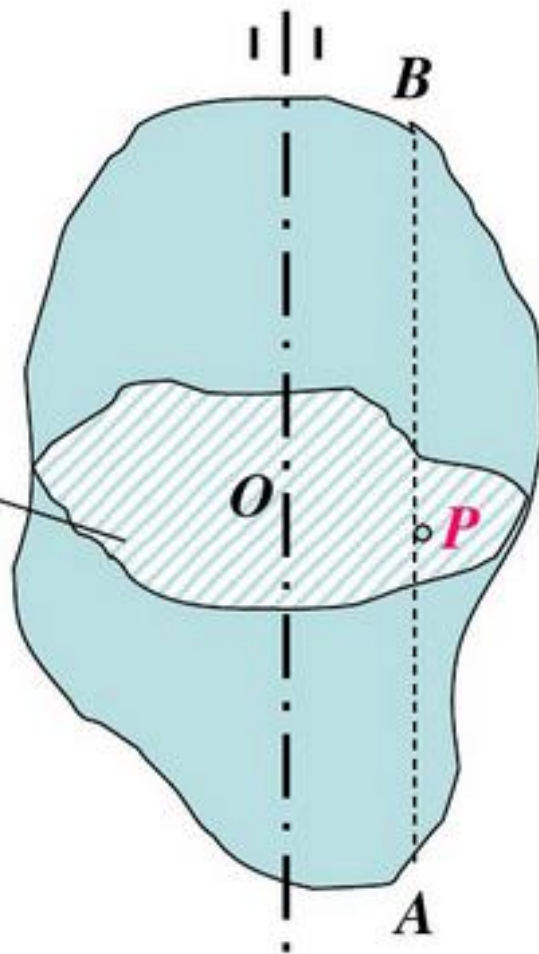


一 刚体转动的角速度和角加速度

参考平面

参考面

直线AB 在做平动，
其上各点可用参考面
上的点 P代替



角坐标 $\theta = \theta(t)$

约定

\vec{r} 沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

\vec{r} 沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

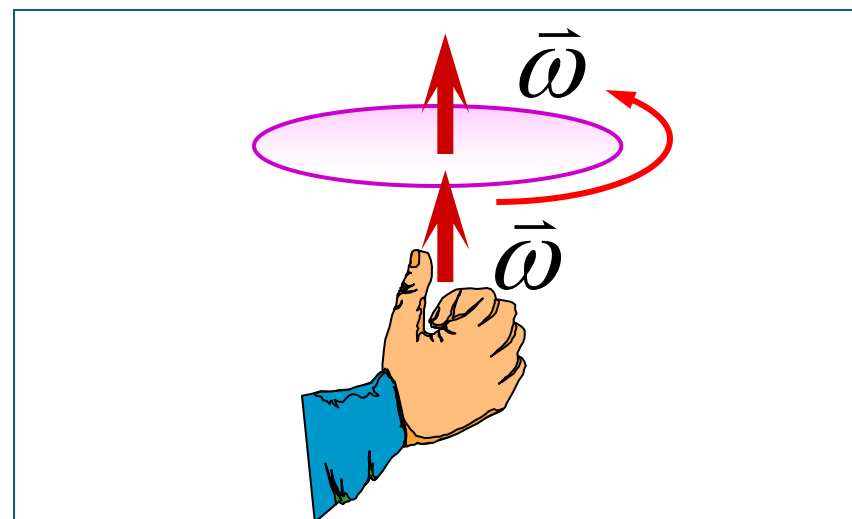
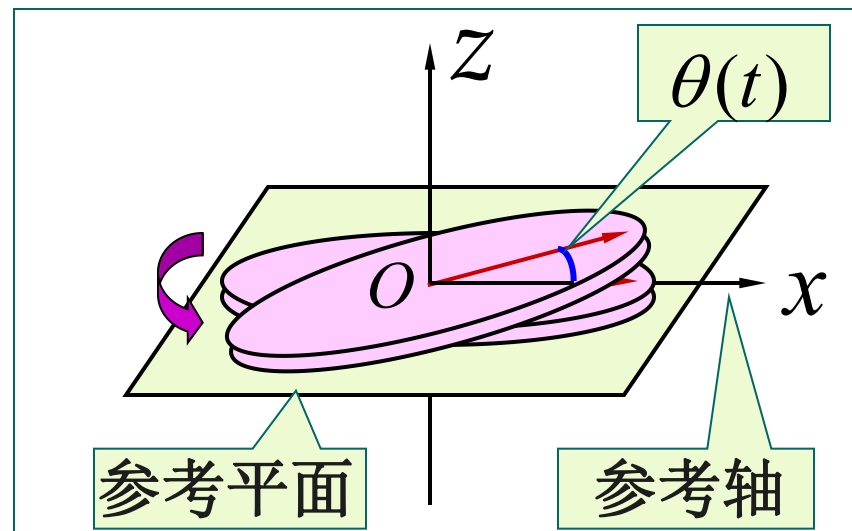
角位移

$$\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$$

角速度矢量

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$\vec{\omega}$ 方向：右手螺旋方向

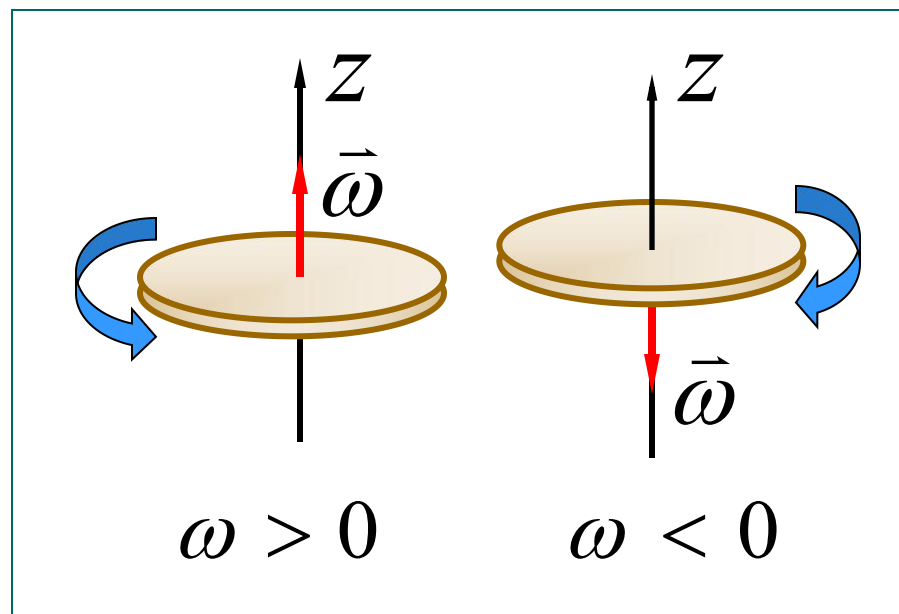


刚体**定轴**转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示。

$$\text{角加速度 } \bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

定轴转动的**特点**

- 1) 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；
- 2) 任一质点运动 $\Delta\theta, \bar{\omega}, \bar{\alpha}$ 均相同，但 \bar{v}, \bar{a} 不同；
- 3) 运动描述仅需一个坐标。



二 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动。

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$



三角量与线量的关系

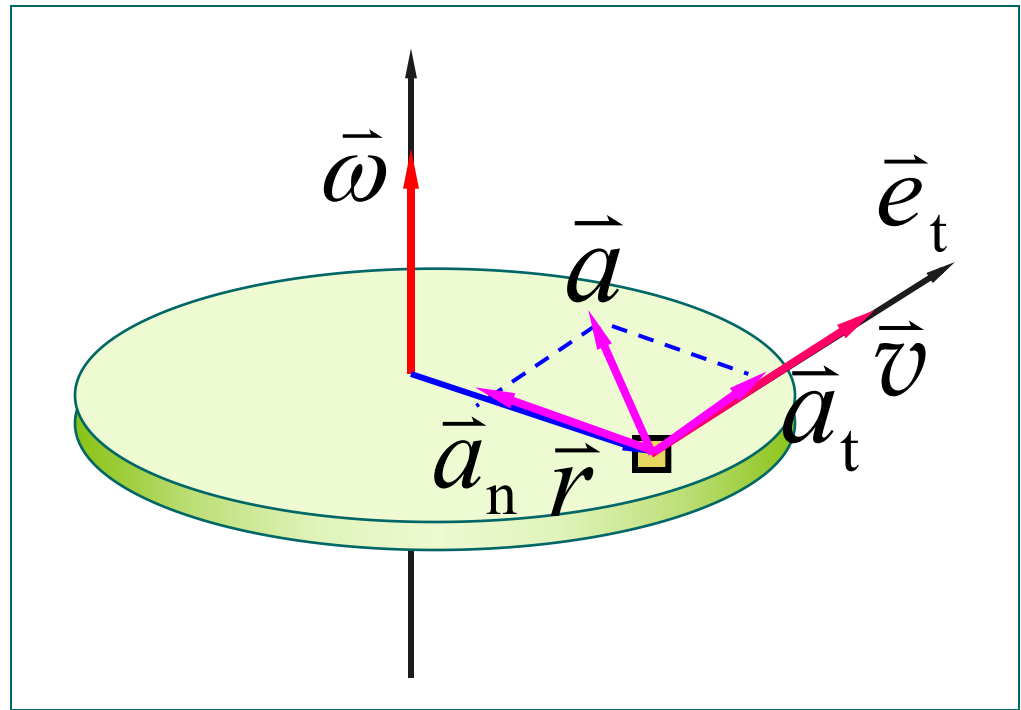
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{v} = r \omega \vec{e}_t$$

$$a_t = r \alpha$$

$$a_n = r \omega^2$$



$$\vec{a} = r \alpha \vec{e}_t + r \omega^2 \vec{e}_n$$

例1 一飞轮半径为 0.2m 、转速为 $150\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$ ，因受制动而均匀减速，经 30 s 停止转动。试求：（1）角加速度和在此时间内飞轮所转的圈数；（2）制动开始后 $t = 6\text{ s}$ 时飞轮的角速度；（3） $t = 6\text{ s}$ 时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度。

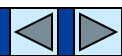
解 （1） $\omega_0 = 5\pi\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ， $t = 30\text{ s}$ 时， $\omega = 0$ 。

设 $t = 0\text{ s}$ 时， $\theta_0 = 0$ 。飞轮做匀减速运动

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 5\pi}{30}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = -\frac{\pi}{6}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

飞轮 30 s 内转过的角度

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(5\pi)^2}{2 \times (-\pi/6)} = 75\pi\text{ rad}$$



转过的圈数 $N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{75\pi}{2\pi} = 37.5 \text{ r}$

(2) $t = 6\text{s}$ 时, 飞轮的角速度

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = (5\pi - \frac{\pi}{6} \times 6) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) $t = 6\text{s}$ 时, 飞轮边缘上一点的线速度大小

$$v = r\omega = 0.2 \times 4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

该点的切向加速度和法向加速度

$$a_t = r\alpha = 0.2 \times (-\frac{\pi}{6}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = -0.105 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.2 \times (4\pi)^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 31.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



例2 在高速旋转的微型电机里，有一圆柱形转子可绕垂直其横截面通过中心的轴转动. 开始时，它的角速度 $\omega_0 = 0$ ，经300s 后，其转速达到 $18000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$. 已知转子的角加速度与时间成正比. 问在这段时间内，转子转过多少转？

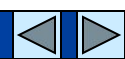
解 由题意，令 $\alpha = ct$ ，即 $\frac{d\omega}{dt} = ct$ ，积分

$$\int_0^{\omega} d\omega = c \int_0^t t dt \quad \text{得} \quad \omega = \frac{1}{2} ct^2$$

当 $t=300\text{s}$ 时

$$\omega = 18000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1} = 600\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以
$$c = \frac{2\omega}{t^2} = \frac{2 \times 600\pi}{300^2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} = \frac{\pi}{75} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3}$$



$$c = 2\omega/t^2 = (\pi/75) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3}$$

转子的角速度

$$\omega = \frac{1}{2} ct^2 = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} t^2$$

由角速度的定义

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} t^2$$

得

$$\int_0^\theta d\theta = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} \int_0^t t^2 dt$$

有

$$\theta = \frac{\pi}{450} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} t^3$$

在 300 s 内转子转过的转数

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi \times 450} (300)^3 = 3 \times 10^4$$

