2.8 电磁感应定律——麦克斯韦第二方程

1. 法拉第电磁感应定律

2. 电磁感应定律的推广

1. 法拉第电磁感应定律

磁场中的一个闭合导体回路的磁通量发生变化时，回路中就产生了感应电流，表示回路中感应了电动势，且感应电动势的大小正比于磁通对时间的变化率 。

数学表达式为：$\varepsilon_{\text{in}} = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$

闭合回路中的磁通量为： $\psi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

该闭合回路中的感应电动势为： $\varepsilon_{\text{in}} = \oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

可得： $\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

讨论：引起磁通量变化的原因

(1) 闭合回路是静止的，但与之交链的磁场是随时间变化的，这是回路中产生的感应电动势称为感生电动势。

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(2) 磁场是恒定的，闭合回路与恒定磁场之间存在相对运动,，这时回路中的感应电动势称为动生电动势。

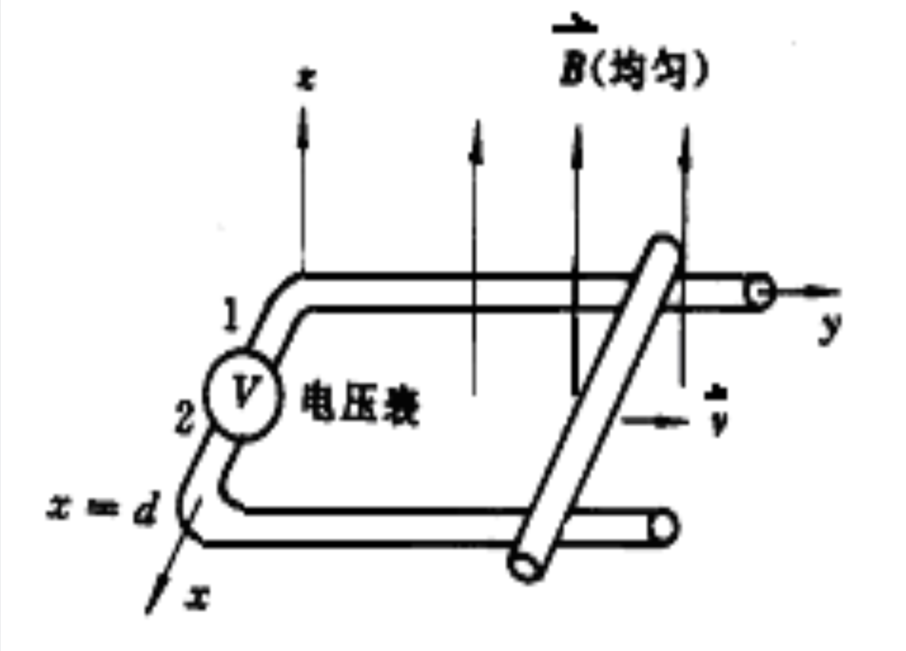
$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(3) 既存在时变磁场又存在回路的相对运动，则总的感应电动势为:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

例：如图所示，一个矩形金属框的宽度d 是常数，其滑动的一边以匀速v 向右移动。求：下列情况下线框里的感应电动势。

（1）$\vec{B}$ 恒定均匀；（2）$\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\hat{a}_z$



解：**（1）**已知 $\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

其中：$\vec{B} = B_0\hat{a}_z \qquad \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{a}_z$

则：$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{y_0+vt}\int_0^d B_0\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{y_0+vt}\int_0^d B_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial}{\partial t}[B_0 d(y_0+vt)] = -B_0 dv$$

(2）已知 $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\hat{a}_z$

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{y_0+vt}\int_0^{d} B_0 \sin(\omega \mathrm{t})\mathrm{d}x\mathrm{dy}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}[B_0 \sin(\omega t) d(y_0 + vt)]$$

$$= -B_0 \omega \cos(\omega t) d(y_0 + vt) - B_0 \sin(\omega t) dv$$

2. 电磁感应定律的推广

当空间某曲面内的磁通随时间变化时，该空间存在感应电场，感应电场沿曲面边界的积分为该曲线上的感应电动势。

经麦克斯韦推广的电磁感应定律为：

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$ ——麦克斯韦第二方程。

该式的物理意义：变化的磁场产生电场。即电场不仅由电荷源产生，也可由时变的磁场产生。

小结：

1. 法拉第电磁感应定律 $$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

2. 电磁感应定律的推广 $$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

——麦克斯韦第二方程。

2.9 电磁场的高斯定律和电流连续性方程

1、电场的高斯定律

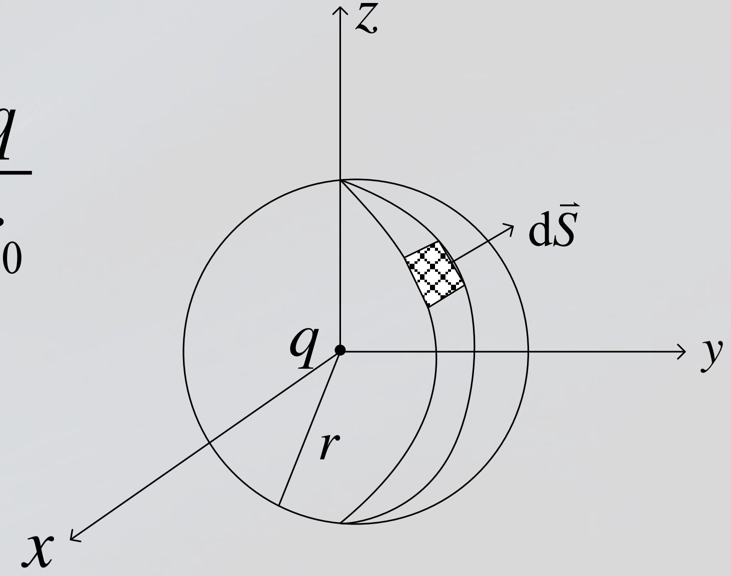
2、磁场的高斯定律

3、电流连续性方程

1、电场的高斯定律

若以点电荷q为中心，做一半径为R 的球面，则电场强度穿出该球面的通量为：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R\cdot\hat{a}_R R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



如果闭合曲面内包含n个点电荷，则：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

如果闭合曲面内含有连续分布的电荷，则： $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_V \mathrm{d}V$

已知：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

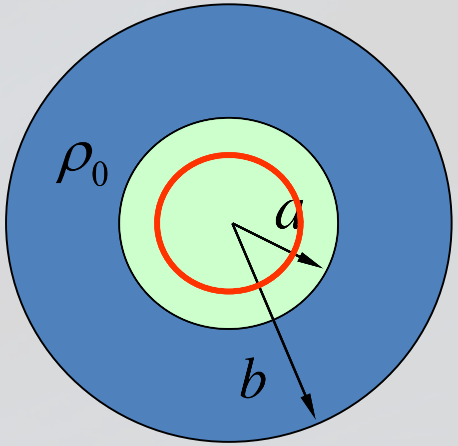
$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V}$$

——麦克斯韦第三方程。

该式的物理意义：穿过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的总电荷量。

例： 一均匀带电球壳，电荷密度为 ρ_0 ，球壳内外半径分别为a、b，

求： 各区域中的电位移矢量 $\vec{D}$ 。



解： 如图，选球坐标系，由于球壳内均匀带电，所产生的电场具有中心对称性。

(1) $R<a$ 区域

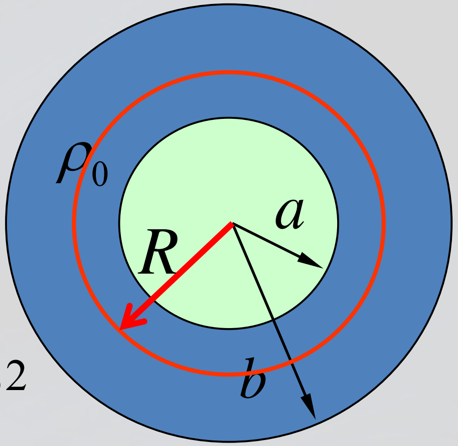
取半径为 R 的球面为高斯面，根据电高斯定律:

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \quad = 0$$

可得： $\vec{D}_1 = 0$

(2) $a<R<b$ 区域

取半径为 R 的球面为高斯面，根据电高斯定律:



$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{D}_2 \cdot R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \hat{a}_R = D_{2R} 4\pi R^2$$

$$\int_V \rho_V \mathrm{d}V = \rho_0 (\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi a^3) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (R^3 - a^3)$$

可得: $$\vec{D}_2 = \frac{\rho_0 (R^3 - a^3)}{3R^2} \hat{a}_R$$

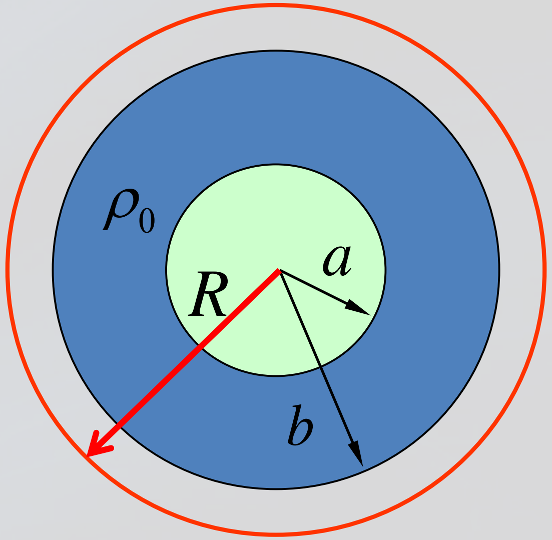
(3) $R > b$ 区域

同理取半径为 $\boldsymbol{R}$ 的球面为高斯面，根据电高斯定律:

$$\oint_S \vec{D}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{D}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{D}_3 \cdot R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \hat{a}_R = D_{3R} 4\pi R^2$$

$$\int_V \rho_V \mathrm{d}V = \rho_0 (\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (b^3 - a^3)$$



可得: $$\vec{D}_3 = \frac{\rho_0 (b^3 - a^3)}{3R^2} \hat{a}_R$$

2、磁场的高斯定律

根据磁场线的连续性：$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0}$ ——麦克斯韦第四方程。

该式的物理意义：

通过任何闭合曲面的磁通量恒为零。磁场线总是连续的，它不会在闭合曲面内积累或中断，故称磁通连续性原理。

3、电流连续性方程

封闭曲面内的总电荷为： $Q=\int_V \rho_V \mathrm{d}V$

流出封闭曲面的电流为： $I_C=\oint_S \vec{J}_C \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

从封闭曲面流出的电流，必然等于封闭曲面内正电荷的减少率。

则： $I_C=-\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \boxed{\oint_S \vec{J}_C \cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\int_V \dfrac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V}$

——麦克斯韦第五方程。

该式的物理意义：从封闭曲面流出的电流，必然等于该封闭曲面内正电荷的减少率，反之亦然。

小结：

1、电场的高斯定律 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$

2、磁场的高斯定律 $\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

3、电流连续性方程 $\oint_S \vec{J}_C \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V$

2.10 麦克斯韦方程的积分形式及应用

1、麦克斯韦方程组的积分形式

2、麦克斯韦方程组的积分形式的应用

1、麦克斯韦方程组的积分形式

一般情况：

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{J}_C + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{J}_C \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \dfrac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V
\end{cases}
$$

$\longrightarrow$

无源的情况：$(\rho_V = 0, \vec{J}_c = 0)$

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0
\end{cases}
$$

一般情况:

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \end{cases}$$

$$\longrightarrow$$

恒定电磁场(存在直流电流)

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

一般情况：

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_C + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$

正弦电磁场

（存在时间因子 $e^{j\omega t}$）

$$\begin{cases} \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_C + j\omega\vec{D})\cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -j\omega\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

注意：利用积分形式的麦克斯韦方程可直接求解具有对称性的场。

如：中心对称性场，轴对称性场，平面对称性场。

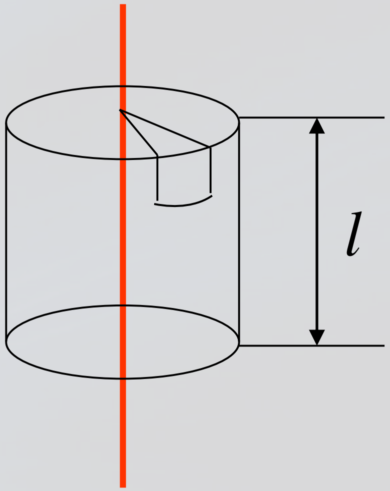
例：一无限长均匀带电直导线，线电荷密度为ρ_l，

求：该导线周围的电场强度。

解：该导线周围的电场具有轴对称性，选圆柱坐标系，高斯面选柱面。

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V = Q = \rho_l l$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^l \int_0^{2\pi} D_r r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = D_r 2\pi r l$$



可得：$\vec{D} = \dfrac{\rho_l}{2\pi r}\hat{a}_r$　　已知：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

电场强度：$\vec{E} = \dfrac{\rho_l}{2\pi \varepsilon_0 r}\hat{a}_r$

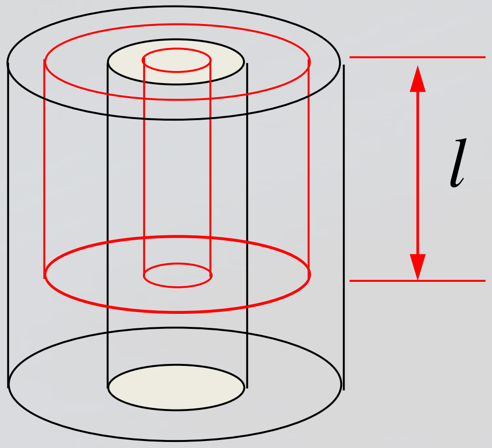
例：一无限长同轴线内外导体带有电荷密度为 ρ_S 的异号面电荷，内外导体半径分别为 a 和 b，外导体很薄。

求：空间各区域的电场强度。

解：依题意，该电场具有轴对称性，选柱坐标系，高斯面选柱面。

(1) $r < a$ 区域 $\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

$$\vec{D}_1 = 0 \qquad \vec{E}_1 = 0$$



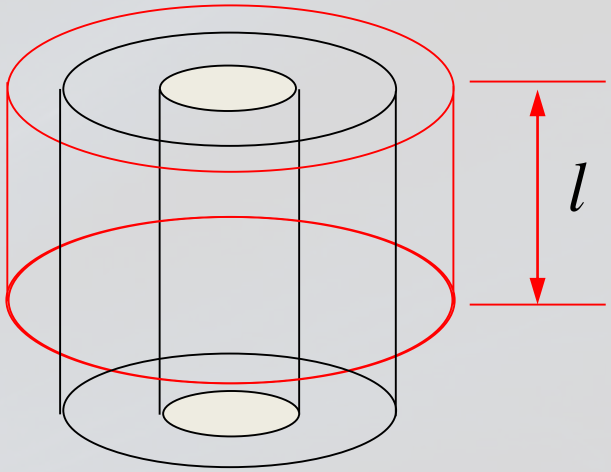
(2) $a < r < b$ 区域

$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_{2r} 2\pi r l = \rho_S 2\pi a l$$

可得：$\vec{D}_2 = \dfrac{\rho_S a}{r}\hat{a}_r \qquad \vec{E}_2 = \dfrac{\rho_S a}{\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$

（3）$r > b$区域

$$\oint_S \vec{D}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_{3r} 2\pi r l = \rho_S (2\pi a l - 2\pi b l)$$



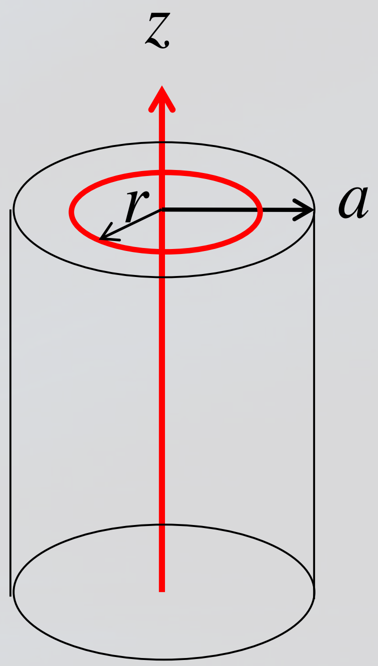
可得： $$\vec{D}_3 = \frac{\rho_S (a-b)}{r} \hat{a}_r$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\rho_S (a-b)}{\varepsilon_0 r} \hat{a}_r$$

例：一无限长圆柱导体中通有恒定电流 I，该圆柱半径为a。

求：空间各区域的磁场强度和磁感应强度。

解：根据题意，该磁场具有轴对称性，选柱坐标系。



（1）$r < a$区域 $\oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

其中： $\vec{J}_{\mathrm{C}} = \dfrac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z$

$$\oint_l \vec{H}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_1 2\pi r \qquad \int_S \vec{J}_{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Ir^2}{a^2}$$

可得： $\vec{H}_1 = \dfrac{Ir}{2\pi a^2} \hat{a}_\varphi \qquad \vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\varphi$

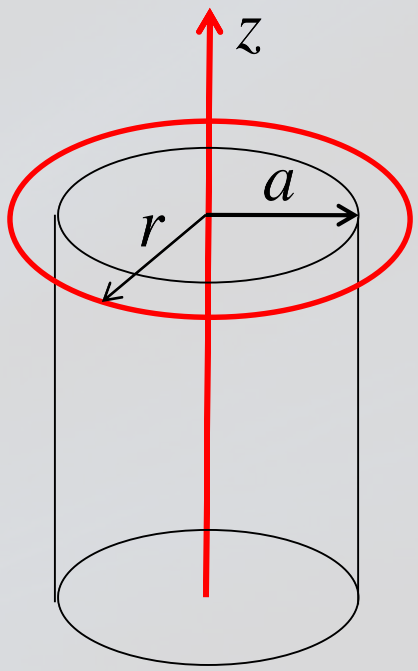
(2) $r > a$ 区域 $\oint_l \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S}$

其中: $\oint_l \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = H_2 2\pi r$

$$\int_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S} = I$$

可得: $\vec{H}_2 = \dfrac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$



小结：

1、麦克斯韦方程组的积分形式

2、麦克斯韦方程组的积分形式的应用

2.11 麦克斯韦方程组的微分形式及应用

1、麦克斯韦方程组的微分形式

2、麦克斯韦方程组的微分形式的应用

1、麦克斯韦方程组的微分形式

积分形式:

$$\left\{\begin{aligned}
&\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \\
&\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
&\oint_S \vec{J}_C\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V
\end{aligned}\right.$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{H})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$$

微分形式:

$$\left\{\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
&\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\nabla\cdot\vec{D} = \rho_V \\
&\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\
&\nabla\cdot\vec{J}_C = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}
\end{aligned}\right.$$

一般情况：

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{C}}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_V \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{J}_{\mathrm{C}}=-\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t} \end{cases}$$

$$\longrightarrow$$

无源的情况：$(\rho_V=0,\vec{J}_c=0)$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

一般情况：

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_C+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_V \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{J}_C=-\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t} \end{cases}$$

$\longrightarrow$

恒定电磁场(存在直流电流)

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_C \\ \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_V \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

一般情况：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_V \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J}_C = -\dfrac{\partial \rho_V}{\partial t} \end{cases}$$

$\longrightarrow$

正弦电磁场： $(e^{j\omega t})$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + j\omega \vec{D} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_V \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J}_C = -j\omega \rho_V \end{cases}$$

微分形式的麦克斯韦方程组给出了空间某点场量之间的关系。

注意：麦克斯韦方程的微分形式只适用于媒体的物理性质不发生突变的区域。

2、麦克斯韦方程组的微分形式的应用

例：已知自由空间磁感应强度为 $\vec{B}=33\times10^{-12}\cos(3\times10^{9}t-10z)\hat{a}_y$

(1)求位移电流密度 $\vec{J}_{\mathrm{d}}$；

(2)若 $t=0, z=1.1\,\mathrm{m}$时，$\vec{E}=0$，求$t=1$ ms时，$z=9\,\mathrm{km}$处的 $\vec{E}$ 。

解：(1)按题意，空间无传导电流，故：$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}_{\mathrm{d}}$

$$\vec{J}_{\mathrm{d}}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & B_y & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\mu_0}\left[-\hat{a}_x\frac{\partial B_y}{\partial z}+\hat{a}_z\frac{\partial B_y}{\partial x}\right]$$

$$=-2.626\times10^{-4}\sin(3\times10^{9}t-10z)\hat{a}_x \qquad (\mathrm{A/m^2})$$

(2)由 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{\mathrm{d}}$ 得： $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\vec{J}_d}{\varepsilon_0} = \dfrac{-2.626\times10^{-4}\sin(3\times10^9 t-10z)\hat{a}_x}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \int -\frac{2.626\times10^{-4}}{\varepsilon_0}\sin(3\times10^9 t-10z)\mathrm{d}t\hat{a}_x$$

$$=9.90\times10^{-3}\cos(3\times10^9 t-10z)\hat{a}_x + C$$

若 $t=0, z=1.1\mathrm{m}$时，$\vec{E}=0$，则： $C=0$

所以： $\vec{E}=9.90\times10^{-3}\cos(3\times10^9 t-10z)\hat{a}_x$ （mV/m）

当 $t=1$ ms时，$z=9$ km处的电场强度：

$$\vec{E}=9.90\times10^{-3}\cos(3\times10^9\times10^{-3}-10\times9\times10^3)\vec{a}_x=7.401\times10^{-3}\hat{a}_x$$ （mV/m）

例： 已知一半径为 a 的球体内的电场强度为 $\vec{E} = 90R^3\hat{a}_R$ V/m

求：球体内的电荷分布。

解： 应用麦克斯韦方程的微分形式 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V$

$$\rho_V = \nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 \frac{1}{R^2} \frac{\partial (E_R R^2)}{\partial R}$$

$$= 450\varepsilon_0 R^2$$

麦克斯韦方程组包含着丰富的内容和深刻的含义。伟大的物理学家爱因斯坦曾这样评价麦克斯韦方程：

“这个方程组的提出是牛顿时代以来物理学上一个重要的事情，这是关于场定律的定量的描述。方程中所包含的内容比我们所指出的要丰富得多。在它们简单的形式下隐藏着深奥的内容。这些内容只有靠仔细的研究才能显示出来。它是描述场的结构的定律，它不像牛顿定律那样把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是此处此刻的场只与最近的刚过去的场发生关系。假使我们知道此处此刻所发生的事件，这些方程便可帮助我们预测在空间上稍远一些，在时间上稍迟一些将会发生什么。”

小结：

1、麦克斯韦方程组的微分形式

2、麦克斯韦方程组的微分形式的应用