

- ◆ **动量定理** 在给定的时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

- ◆ **质点系动量定理** 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{ex}} dt = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i0}$$

- ◆ **动能定理** 合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

### 一 质点系的动能定理

◆ 对第  $i$  个质点，有

$$W_i^{\text{ex}} + W_i^{\text{in}} = E_{ki} - E_{ki0}$$

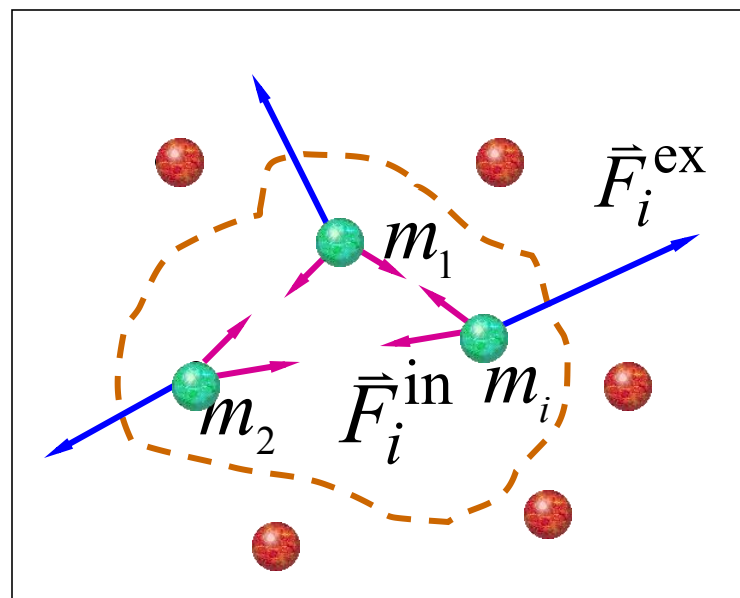
外力功

内力功

对质点系，有

$$\sum_i W_i^{\text{ex}} + \sum_i W_i^{\text{in}} = \sum_i E_{ki} - \sum_i E_{ki0} = E_k - E_{k0}$$

◆ 质点系动能定理  $W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = E_k - E_{k0}$



**注意**

内力可以改变质点系的动能

不能先求合力，再求合力的功；只能先求每个力的功，再对这些功求和。

### 一对内力的功

系统内任意二质点1, 2

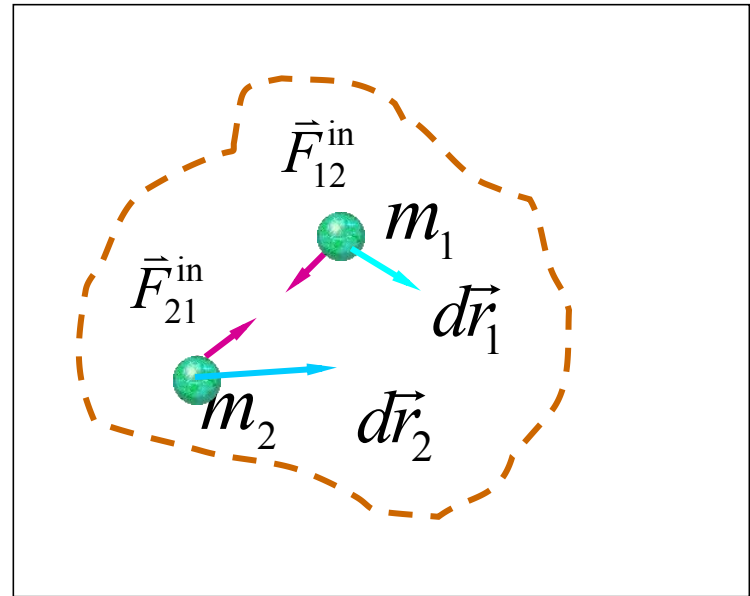
一对内力  $\vec{F}_{12}^{\text{int}}$   $\vec{F}_{21}^{\text{int}}$  位移  $d\vec{r}_1$   $d\vec{r}_2$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_2 \\ = \vec{F}_{12}^{\text{int}} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12}$  为质点1相对质点2的相对位移

一对内力做功写成:

$$\vec{F}_{12}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_{12} = \vec{F}_{21}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_{21}$$



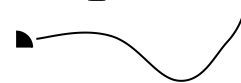
### 结论

一对内力做功与参考系无关,只与两质点的相对位移有关,等于其中一个质点所受的力与其相对于另一质点的元位移的标积.

另外对质点系: 各力做功之和等于合力做的功?

$$\sum_i W_i = \sum_i \int_A^b \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \stackrel{?}{=} \int_A^b \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$m_1$



$m_2$

如图:两个质点走的路径不同

$$d\vec{r}_1 \neq d\vec{r}_2 \neq d\vec{r}_i$$

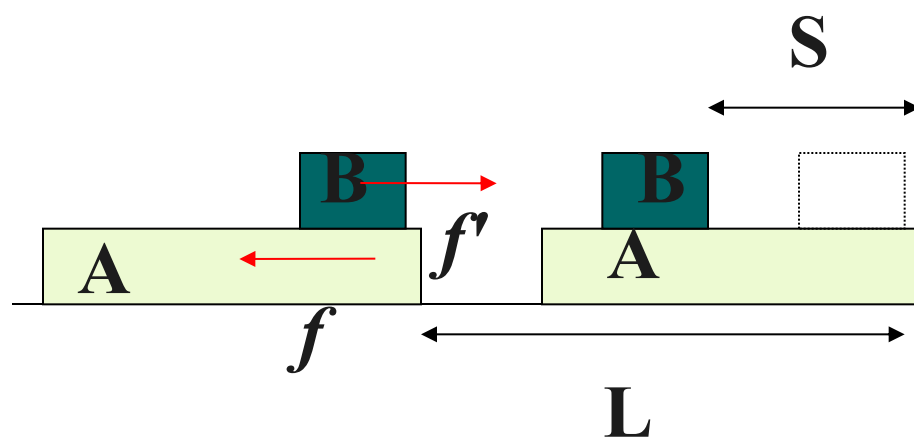
### 结论

各力做功之和不一定等于合力做的功

### 常见的“一对力”的功

- ①一对正压力的功恒为零。（更普遍的，无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况）
- ②一对静摩擦力的功恒为零
- ③一对滑动摩擦力的功恒为负

**讨论：**滑块A置于光滑的水平面上,物体B放在滑块A上,假设滑块A足够长。现用外力 $F$ 拉动A由静止开始运动,则B在A上滑动, A, B间的滑动摩擦因数为 $\mu$ , 设A, B的质量分别为 $m$ ,  $m'$ , 求在此过程中A, B间的一对摩擦力所做的功之和为多少?



以地面为参考系

滑块A	$W_1 = -fL$
滑块B	$W_2 = f'(L - S)$

这对摩擦力做功

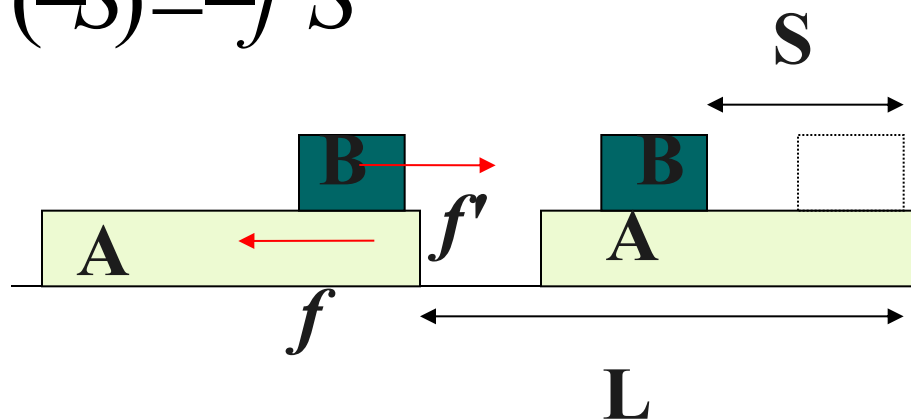
$$W_1 + W_2 = -f'S$$

对滑块A:

$$W = -fS$$

对滑块B:

$$W = f'(-S) = -f'S$$



**讨论：**一对作用力和反作用力，大小相等方向相反，但这对力作功的总和不一定为**0**。

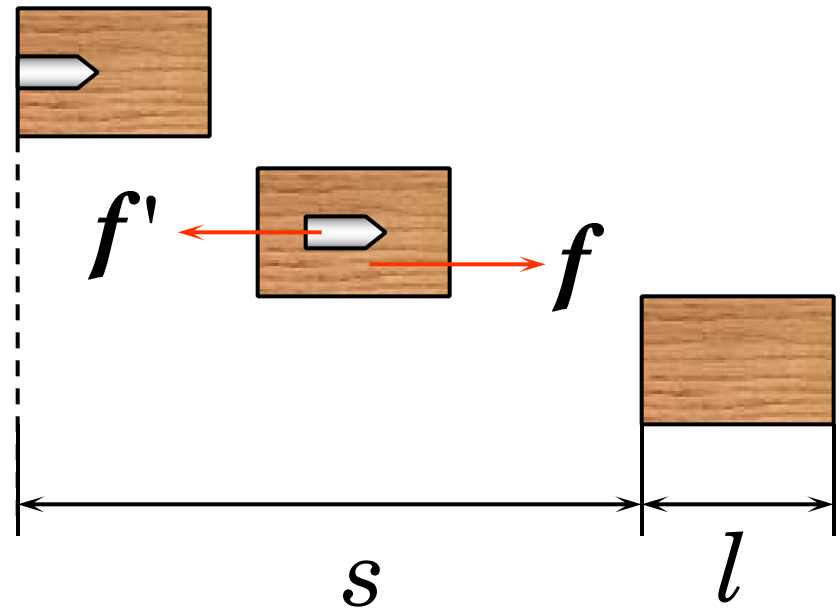
例：子弹穿过木块过程. 子弹对木块的作用力为 $f$ ，木块对子弹的反作用力为 $f'$ ，木块的位移为 $s$ ，子弹的位移为 $(s+l)$ 。

$f$  对木块做功：  $fs > 0$

$f'$  对子弹做功：  $-f'(s+l) < 0$

合功为：

$$fs - f'(s+l) = -f'l$$

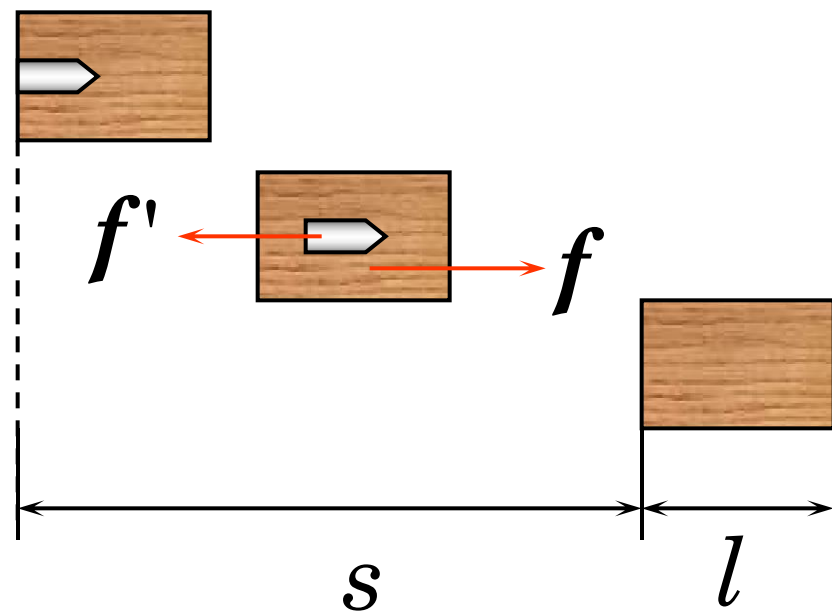




合功为:  $fs - f'(s + l) = -f'l = -fl$

子弹减少的能量转变成木块的动能和热,

摩擦生热, 为一对作用力和反作用力做功之和。



## 质点系的功能原理

### 质点系动能定理

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = E_k - E_{k0}$$

$$W^{\text{in}} = \sum_i W_i^{\text{in}} = W_c^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$$

非保守  
力的功

$$W_c^{\text{in}} = -\left(\sum_i E_{pi} - \sum_i E_{pi0}\right) = -(E_p - E_{p0})$$

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} - (E_p - E_{p0}) = E_k - E_{k0}$$

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

机械能

$$E = E_k + E_p$$

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = E - E_0$$

◆ 质点系的功能原理  
保守内力做功之和。

质点系机械能的增量等于外力和非

**说明：**1、动能是状态量，任一运动状态对应一定的动能。

2、功是过程量，它与能量的改变有联系。

3、 $\Delta E_K$ 为动能的增量，增量可正可负，视功的正负而变。

4、动能是质点因运动而具有的做功本领。

5、动能与动量的异同：

**相同点** ●二者都是描述质点或质点系的状态的物理量，都是状态量；

●二者都与质点或质点系的质量和速度有关。

**不同点：**首先二者定义不同、量纲不同。另外，动量是矢量，它与速度的大小和方向都有关，

动能是标量，它与速度的大小有关，而与速度的方向无关。

∴ 速度的大小改变，动量和动能都会改变（当然改变的程度不同）；而速度的大小不变、只是方向改变，那么，动能不会改变，而动量会发

● 动量的增量= 外力的冲量，与内力的冲量无关；

动能的增量= 外力和内力作的总功，与内力有关。

### 三 机械能守恒定律

◆ 功能原理  $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = (E_{\text{k}} + E_{\text{p}}) - (E_{\text{k}0} + E_{\text{p}0})$

当  $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$  时, 有  $E = E_0$

◆ **机械能守恒定律** 只有保守内力做功的情况下, 质点系的机械能保持不变.

$$E_{\text{k}} - E_{\text{k}0} = -(E_{\text{p}} - E_{\text{p}0})$$

$$\Delta E_{\text{k}} = -\Delta E_{\text{p}}$$

◆ 守恒定律的**意义**

不究过程细节而能对系统的状态下结论, 这是各个守恒定律的特点和优点.

**【思考】** 系统对某一惯性系的机械能守恒, 对另一惯性系该体系的机械能也一定守恒吗?

注意：

- 1) 机械能守恒定律只适用于惯性系，不适用于非惯性系。这是因为惯性力可能做功。
- 2) 在某一惯性系中机械能守恒，但在另一惯性系中机械能不一定守恒。这是因为外力的功与参考系的选择有关。

小结：应用守恒定律解题时的思路与用牛顿定律解题不同

(1) 无需具体分析系统中间过程的受力细节。

(2) 守恒定律形式中只涉及到系统的始末状态物理量。

(3) 解题步骤大致是：

①明确研究对象和它的运动过程

②分析研究对象在运动中的受力情况，判断机械能是否守恒

③分析运动的始末状态，选定零势能参考面，确定物体在始末状态的机械能

④根据功能原理或机械能守恒定律列方程求解

说明:

- 1、机械能守恒的条件：作用于质点系的外力和非保守内力不作功 （  $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = 0$  ） 或 只有保守内力作功。
- 2、机械能守恒：系统的总机械能不变。而质点系内的动能和势能都不是不变的，二者之间的转换是通过系统内的保守力作功来实现的。
- 3、要区分功、能两种概念，  
功是能量变化的量度，能是物体具有的做功本领。  
能是状态量，功是过程量。





### 守恒定律的意义

#### 1.守恒定律

- 力学中：动量守恒定律

- 机械能守恒定律

- 角动量守恒定律

- 自然界中还有：

- 质量守恒定律、 电荷守恒定律；

- (粒子物理中的)重子数、轻子数、 奇异数、  
宇称守恒定律



### 2.守恒定律的特点

- (1)方法上：针对一过程，但不究过程细节，给出始末态的情况。
- (2)适用范围广：宏观、微观、高速、低速均适用。

### 讨论

(1) 内力和为零, 内力功的和是否为零?

(2) 内力的功也能改变系统的动能

例: 炸弹爆炸, 过程内力和为零, 但内力所做的功转化为弹片的动能。



### 思考

“由于作用于质点系内所有质点上的一切内力的矢量和恒为零，所以内力不能改变质点系的总动能。”这句话对吗？

虽然质点系内一对作用力和反作用力的矢量和为零，但它们分别作用于系内不同的质点，各质点的位移可以不同，所以一对内力做功的代数和不一定为零。“内力不能改变质点系的总动能”的说法是错误的。

### 讨论

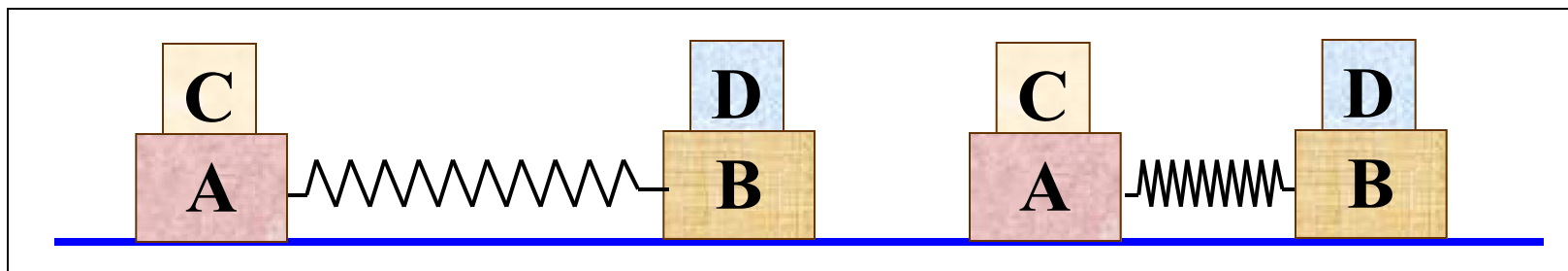
如图的系统，物体 A，B 置于光滑的桌面上，物体 A 和 C，B 和 D 之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，使弹簧压缩，后拆除外力，则 A 和 B 弹开过程中，对 A、B、C、D 组成的系统

(A) 动量守恒，机械能守恒。

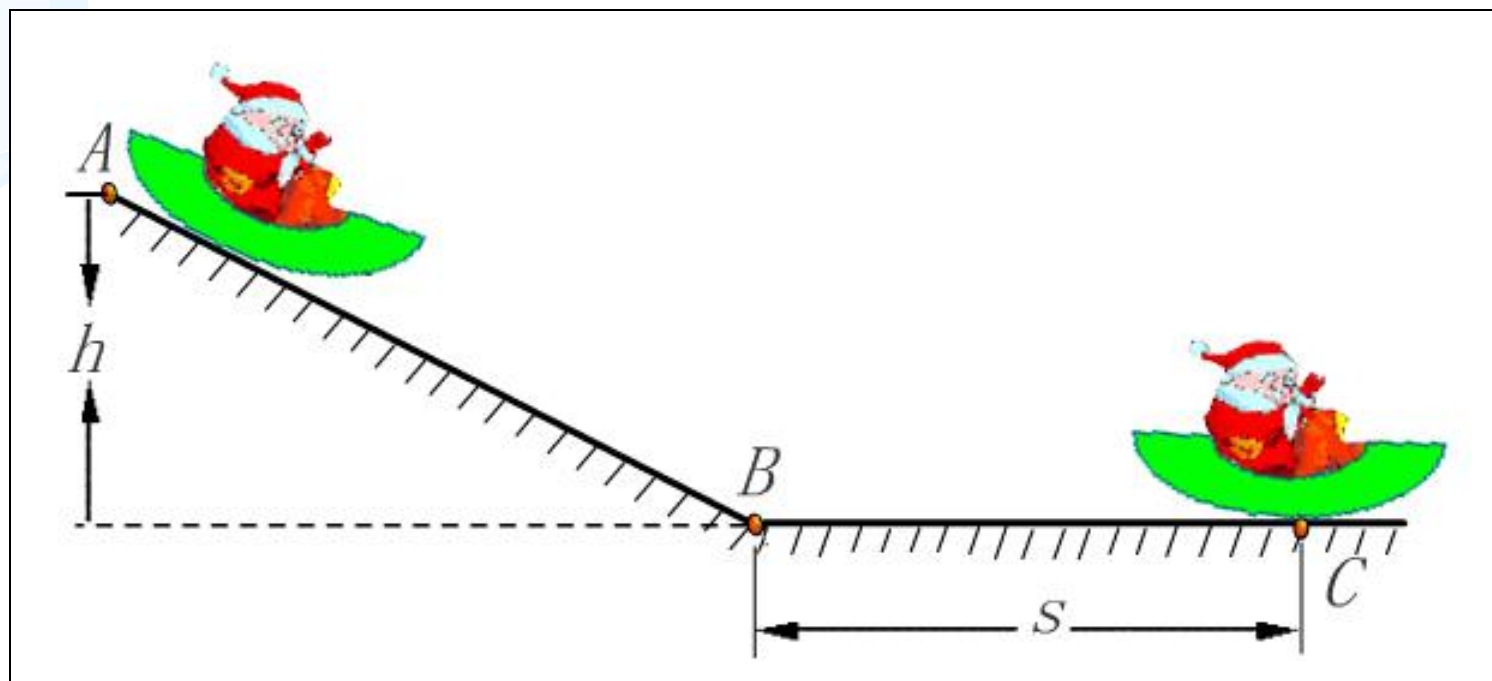
(B) 动量不守恒，机械能守恒。

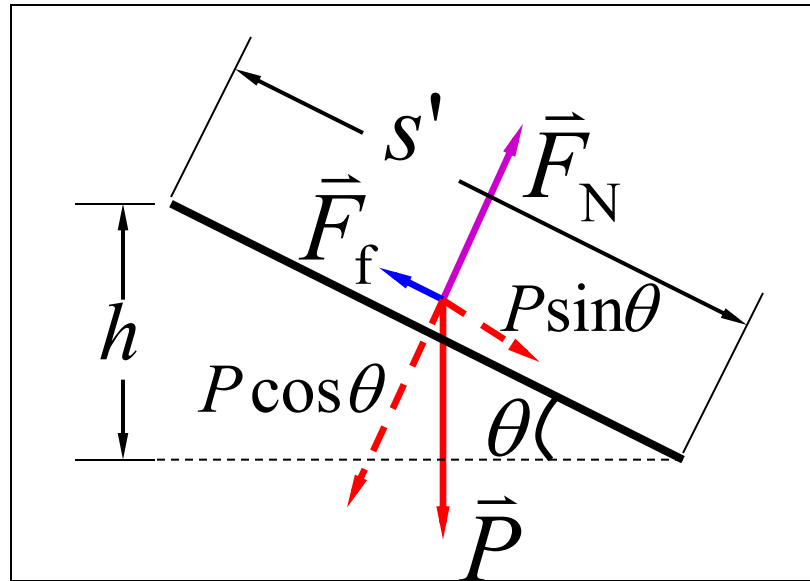
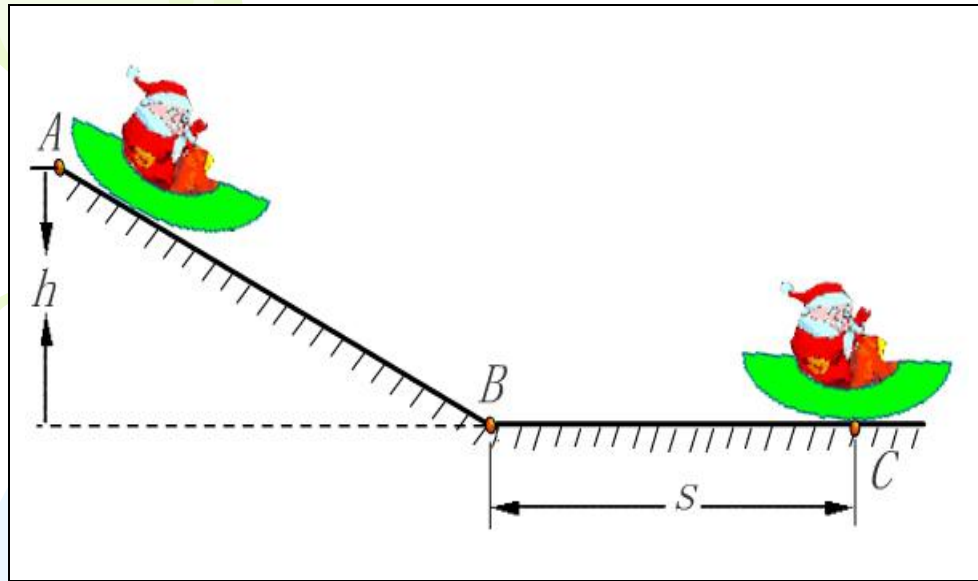
(C) 动量不守恒，机械能不守恒。

★(D) 动量守恒，机械能不一定守恒。



**例 1** 一雪橇从高度为 $50\text{m}$ 的山顶上点 $A$ 沿冰道由静止下滑,山顶到山下的坡道长为 $500\text{m}$ .雪橇滑至山下点 $B$ 后,又沿水平冰道继续滑行,滑行若干米后停止在 $C$ 处.若摩擦因数为 $0.050$ .求此雪橇沿水平冰道滑行的路程.(点 $B$ 附近可视为连续弯曲的滑道.忽略空气阻力.)





**已知**  $h = 50\text{m}$ ,  $\mu = 0.050$ ,  $s' = 500\text{m}$ , **求**  $s$ .

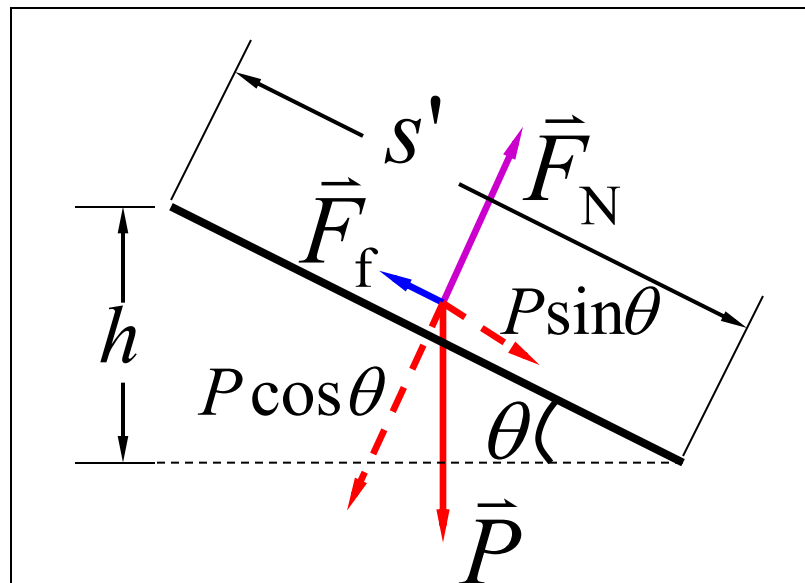
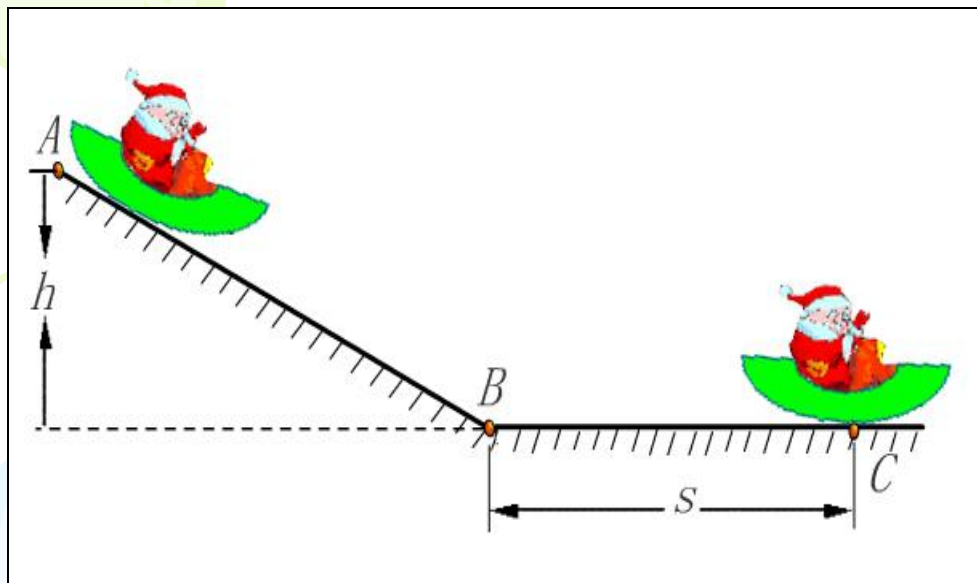
**解** 以雪橇、冰道和地球为一系统，由功能原理得

$$W_f = E_2 - E_1$$

$$\therefore W_f = -\mu mg \cos \theta s' - \mu mgs \approx -\mu mg(s' + s)$$

又

$$E_2 - E_1 = -mgh$$



$$h = 50\text{m}, \mu = 0.050, s' = 500\text{m}, W_f \approx -\mu mg(s' + s)$$

由功能原理

$$W_f = E_2 - E_1$$

可得

$$-\mu mg(s' + s) = -mgh$$

代入已知数据有

$$s = \frac{h}{\mu} - s' = 500\text{m}$$



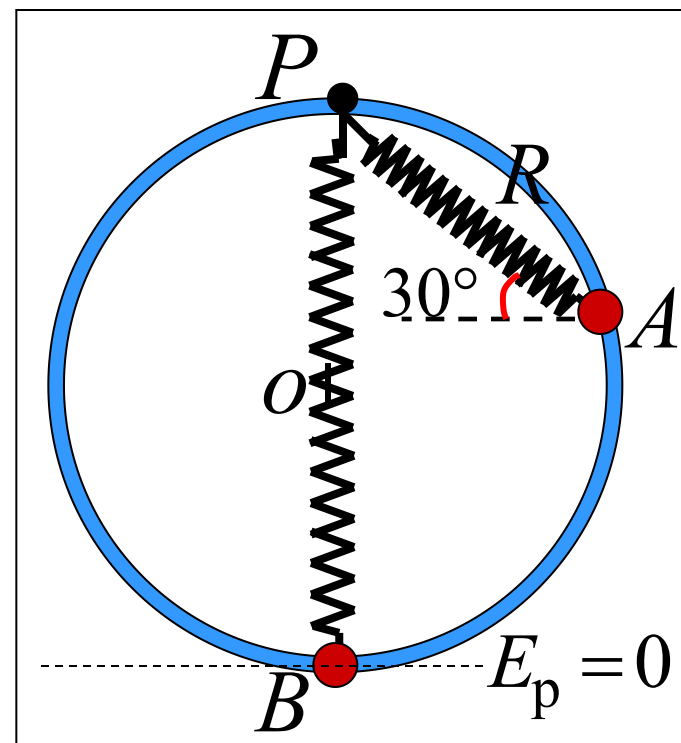
**例 2** 有一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点  $P$ ，另一端系一质量为  $m$  的小球，小球穿过圆环并在圆环上运动(不计摩擦). 开始小球静止于点  $A$ ，弹簧处于自然状态，其长度为圆环半径  $R$ ；当小球运动到圆环的底端点  $B$  时，小球对圆环没有压力. 求弹簧的劲度系数.

**解** 以弹簧、小球和地球为一系统，

$\therefore A \rightarrow B$  只有保守内力做功

$\therefore$  系统机械能守恒  $E_B = E_A$

取图中点  $B$  为重力势能零点

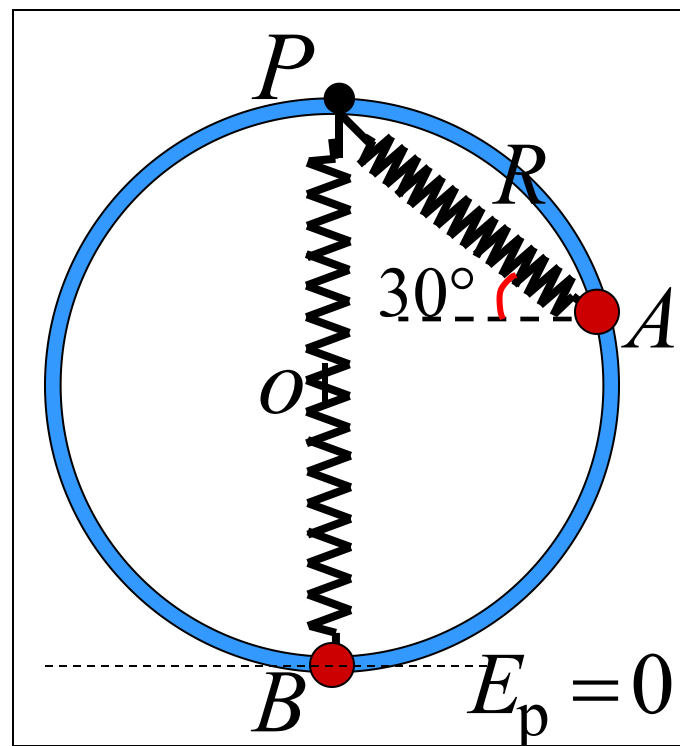


系统机械能守恒  $E_B = E_A$ ，图中  $B$  点为重力势能零点

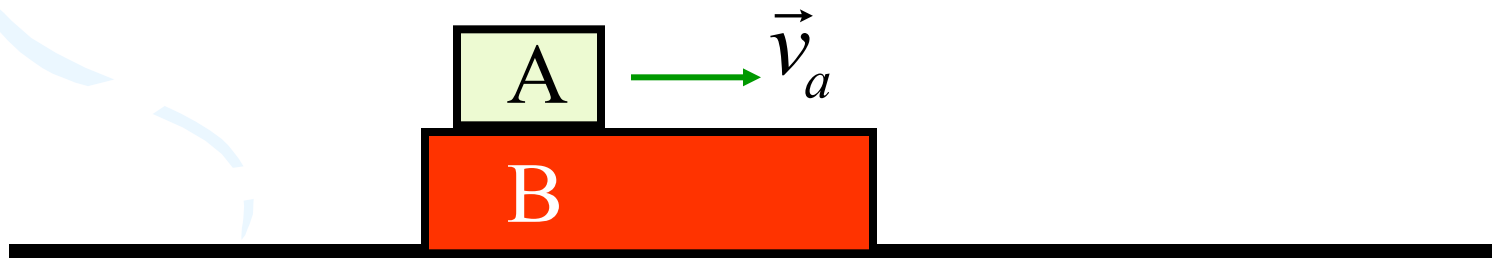
即 
$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mgR(2 - \sin 30^\circ)$$

又 
$$kR - mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

所以 
$$k = \frac{2mg}{R}$$



**例3、** 在光滑的水平面上，有一质量为  $m_b$  的静止物体 B，在 B 上又有一质量为  $m_a$  的静止物体 A，A 受冲击，以  $\vec{v}_a$ （相对于水平面）向右运动，A 和 B 之间的摩擦系数为  $\mu$ ，A 逐渐带动 B 一起运动，问 A 从开始运动到相对于 B 静止时，在 B 上运动多远？

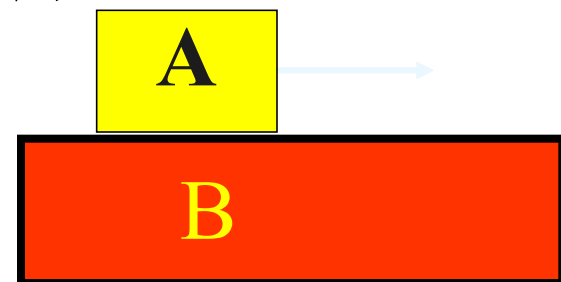


解：取A和B组成的系统，根据动量守恒

$$m_a v_a = (m_a + m_b) v$$

内力做功不为零，由系统的功能原理

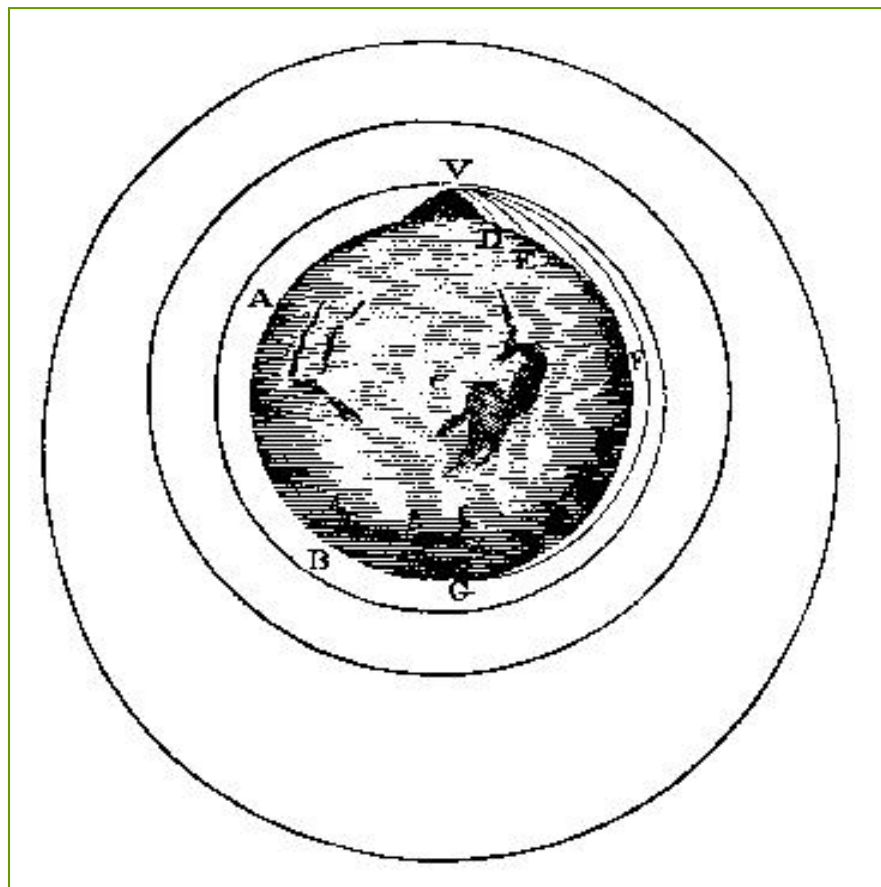
$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = \Delta E_k$$



$$-\mu m_a g x = \frac{1}{2} (m_a + m_b) v^2 - \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

$$\longrightarrow x = \frac{m_b v_a^2}{2 \mu g (m_a + m_b)}$$

## 宇宙速度



牛顿的《自然哲学的数学原理》插图，抛体的运动轨迹取决于抛体的初速度

第一宇宙速度是要使航天器绕地球旋转而不掉落到地面的最低发射速度（**7.91km/s**），我们也之称为环绕速度。第二宇宙速度是航天器如欲飞离地球而不再返回的最低的发射速度

（**11.19km/s**）；我们也之称为逃逸速度（脱离速度）。第三宇宙速度是航天器飞出太阳系的最低发射速度（**16.66km/s**）。

在现代的火箭技术上，人类已实现了三种宇宙速度。

第四宇宙速度是指使航天器冲出银河系的最低的发射速度。由于人类对银河系的了解尚在进行中，它的精确质量和半径尚未清楚。

因此，飞出银河系的第四宇宙速度的数值只能估算，大约在**110~220km/s**之间。目前，人类还没能实现第四宇宙速度。

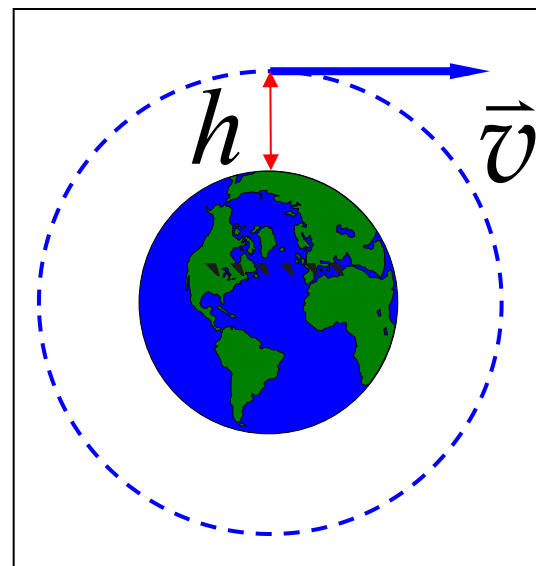
### 1) 人造地球卫星 第一宇宙速度

第一宇宙速度  $v_1$ ，是在地面上发射人造地球卫星所需的最小速度。

**设** 地球质量  $m_E$ ，抛体质量  $m$ ，地球半径  $R_E$ 。

**解** 取抛体和地球为一系统，系统的机械能  $E$  **守恒**。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \left( -G \frac{m m_E}{R_E} \right) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 + \left( -G \frac{m m_E}{R_E + h} \right) \end{aligned}$$

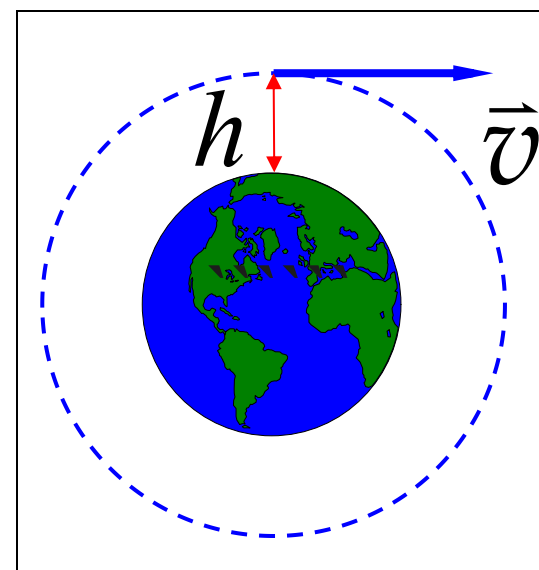


$$\because E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-G\frac{mm_E}{R_E}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{mm_E}{R_E + h}\right)$$

由牛顿第二定律和万有引力定律得

$$m\frac{v^2}{R_E + h} = G\frac{mm_E}{(R_E + h)^2}$$

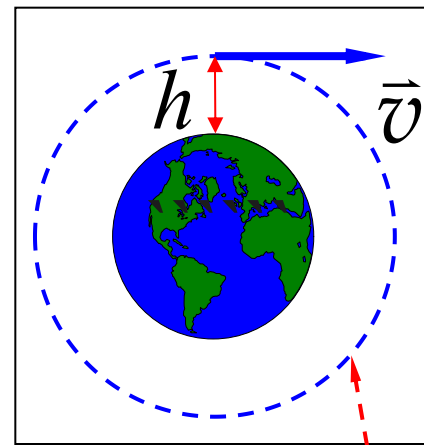
解得  $v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E} - \frac{Gm_E}{R_E + h}}$





$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E} - \frac{Gm_E}{R_E + h}}$$

$$\because g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \therefore v_1 = \sqrt{gR_E \left(2 - \frac{R_E}{R_E + h}\right)}$$



地球表面附近  $R_E \gg h$  故  $v_1 = \sqrt{gR_E}$   $E < 0$

计算得  $v_1 = 7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$  第一宇宙速度

$$E = -\frac{Gmm_E}{2(R_E + h)} < 0$$

### 2) 人造行星 第二宇宙速度

第二宇宙速度  $v_2$ ，是抛体脱离地球引力所需的最小发射速度。

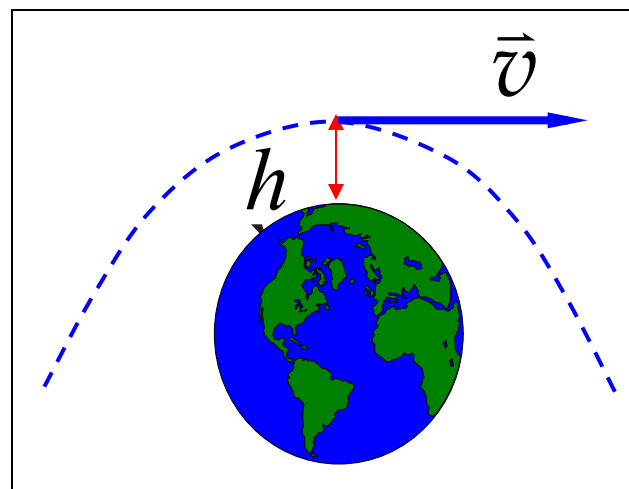
**设** 地球质量  $m_E$ ，抛体质量  $m$ ，地球半径  $R_E$ 。

取抛体和地球为一系统 系统机械能  $E$  **守恒**。

当  $r \rightarrow \infty$ ， $F \rightarrow 0$ ；若此时  $v \rightarrow 0$  则

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left( -G \frac{m_E m}{R_E} \right)$$

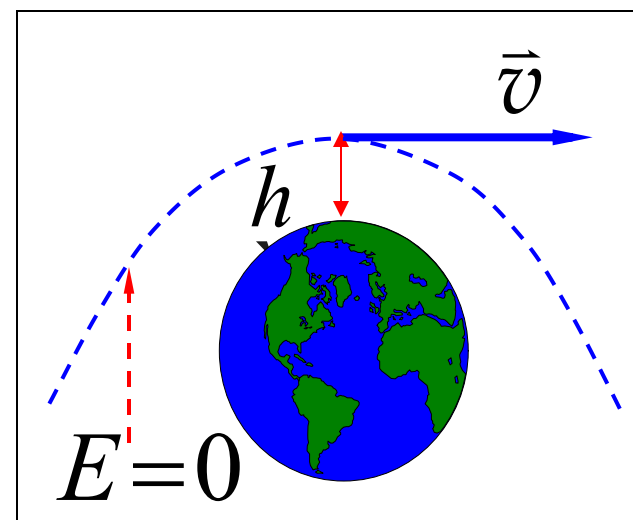
$$= E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$



$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left( -G \frac{m_E m}{R_E} \right) = 0$$

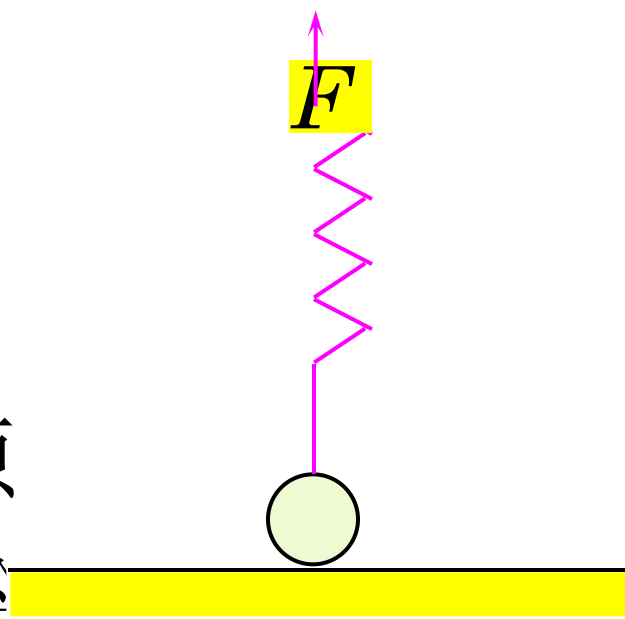
$$v_2 = \sqrt{\frac{2 G m_E}{R_E}} = \sqrt{2 g R_E}$$

计算得  $v_2 = 11.2 \text{ km/s}$



第二宇宙速度

**练习.** 今有劲度系数为 $k$ 的弹簧(质量忽略不计)竖直放置, 下端悬一小球, 球的质量为 $m$ , 开始使弹簧为原长而小球恰好与地接触, 今将弹簧上端缓慢提起, 直到小球刚能脱离地面为止, 在此过程中外力做功为



$$\frac{m^2 g^2}{2k}$$