# 第15周讲稿及作业

Edited by Hu Chen

OUC

June 10, 2020

# 目录

# 特殊函数的引出

随着理论研究和工程实践范围的扩大, 初等函数早已不能满足理论与应用的需要, 一些非初等但在理论和实际应用中又经常出现的函数便被归类为特殊函数. 特殊函数作为一个函数类并没有明确的界限划分.

利用分离变量法在高维空间中求解有界空间区域$\Omega$上的波动方程或热传导方程混合问题的关键在于求解由如下的方程

$$-\Delta v(\boldsymbol{x}) = \lambda v(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1}$$

这个方程称为亥姆霍兹方程, 在附加适当的边界条件后便会成为拉普拉斯算子特征值问题. 当$\lambda = 0$时亥姆霍兹方程就是拉普拉斯方程.

如果$\Omega$为圆柱, 即$\Omega = \{(x, y, z) | \, x^2 + y^2 < l, 0 < z < h\}$, 这时$\Delta v(\boldsymbol{x}) = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$, 那么在圆柱坐标系

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; z = z$$

下, 亥姆霍兹方程(1)变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0, \quad 0 < r < l, -\infty < \theta < +\infty, 0 < z < h.$$

设$v(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 代入方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\lambda v=0 \tag{2}$$

得

$$[R''(r)+r^{-1}R'(r)]\Theta(\theta)Z(z)+r^{-2}R(r)\Theta''(\theta)Z(z)+R(r)\Theta(\theta)Z''(z) \\ +\lambda R(r)\Theta(\theta)Z(z)=0.$$

两端同除以$R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 得

$$\frac{R''(r)+r^{-1}R'(r)}{R(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}+\lambda=0.$$

这说明上式中的三个分式所表示的函数都是常数. 于是方程(2)可分离为如下的三个常微分方程

$$Z''(z)-\alpha Z(z)=0,\quad 0<z<h, \tag{3}$$

$$\Theta''(\theta)+\beta\Theta(\theta)=0,\quad -\infty<\theta<+\infty,$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda+\alpha-\frac{\beta}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<l. \tag{4}$$

如果 $\Omega$ 为球体, 即$\Omega = \{(x,y,z) |\, x^2+y^2+z^2 < l\}$, 在球坐标系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad 0 \le \theta \le \pi, -\infty \le \varphi < +\infty, 0 \le r \le l \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{5}$$

下, 亥姆霍兹方程

$$-\Delta v(\boldsymbol{x}) = \lambda v(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{1}$$

变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0. \tag{6}$$

设$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 代入上面的方程得

$$\begin{aligned} [R''(r) + 2r^{-1}R(r)]\Theta(\theta)\Phi(\varphi) + \frac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2\sin\theta}[\sin\theta\Theta'(\theta)]' + \frac{R(r)\Theta(\theta)}{r^2\sin^2\theta}\Phi''(\varphi) \\ + \lambda R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

两端同除以$R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得

$$\frac{R''(r) + 2r^{-1}R(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right] + \lambda = 0.$$

方程(6)被分离为三个常微分方程

$$\Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0, \qquad -\infty<\varphi<+\infty,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\Theta'(\theta)\right]'+\left(\gamma-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0, \quad 0<\theta<\pi, \tag{7}$$

$$R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\gamma}{r^2}\right)R(r)=0, \quad 0<r<l. \tag{8}$$

常系数的偏微分方程经过坐标变换后变成了变系数的偏微分方程, 从中分离出了变系数的常微分方程. 历史上, 正是对这些常微分方程的求解引出了特殊函数.

在方程

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda+\alpha-\frac{\beta}{r^2}\right)R(r)=0, \quad 0<r<l \tag{4}$$

中, $\lambda$ 一般作为拉普拉斯算子特征值问题的特征值出现, 从而有$\lambda\geq 0$. 在实际应用中, 一般有$\alpha>0, \beta\geq 0$. 当$\lambda+\alpha>0$时, 记$\sigma=\lambda+\alpha$, 令$x=\sqrt{\sigma}\,r$,
记$y(x)=R(x/\sqrt{\sigma})=R(r), \beta=\nu^2$, 则方程(4)可以变为

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

这个方程称为$\nu$阶贝塞尔方程, 它的解统称为贝塞尔函数或圆柱函数.

许多文献中把方程

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda+\alpha-\frac{\beta}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<l \tag{4}$$

也称为贝塞尔方程. 为区别两者, 我们把方程(4)称为参数形式的贝塞尔方程.

当$\lambda>0$ 时, 若是对方程

$$R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\gamma}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<l \tag{8}$$

作变换$x=\sqrt{\lambda}\,r$, 记$y(x)=R(x/\sqrt{\sigma})=R(r)$, 则方程(8)可以变为

$$x^2y''+2xy'+(x^2-\gamma)y=0.$$

当$\gamma=n(n+1)$（$n$ 为整数）时, 这个方程称为$n$ 阶球贝塞尔方程, 它的解统称为球贝塞尔函数. 同贝塞尔方程的情形一样, 方程(8)一般也被称为球贝塞尔方程.

令$x=\cos\theta$, 记$y(x)=\Theta(\arccos x)=\Theta(\theta)$, 则方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\Theta'(\theta)\right]'+\left(\gamma-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0,\quad 0<\theta<\pi \tag{7}$$

可化为

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\gamma-\frac{\mu}{1-x^2}\right)y=0,\quad -1<x<1.$$

这个方程称为连带勒让德方程, 它的解统称为连带勒让德函数.

为方便讨论, 连带勒让德方程中的参数$\gamma$常写为$\gamma=l(l+1)$（$l$为实数）的形式.

当$\mu=0$时, 连带勒让德方程称为勒让德方程, 它的解统称为勒让德函数.

# 常点邻域内的幂级数解法

由于一些初等函数的原函数不再是初等函数，即$y' = f(x)$的解可能不是初等函数，所以对于求解变系数常微分方程来说初等函数类并不足够大.

解析函数类是一个比初等函数类更大的函数类，而且对微分和积分运算有封闭性.

在解析函数类里寻找方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{9}$$

的解. 如果 $y$ 是解析函数的话，它就可以展成幂级数. 由于幂级数相加和相乘都仍是幂级数，所以若系数$p(x)$和$q(x)$也是解析函数的话，即它们都可以展成幂级数，我们就可以用幂级数为工具去求解方程(9).

如果在点$x_0$处$p(x)$和$q(x)$都解析，则称点$x_0$为方程(9)的常点或正则点，否则称为奇点.

## Example 1

用幂级数解法求解
$$y'' + y = 0.$$

解 设
$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots .$$

于是有
$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots ,$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \cdots .$$

将上述幂级数展式代入常微分方程, 可得
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0.$$

对第一个幂级数的求和指标做变换, 然后合并同幂次项得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n]x^n = 0.$$

由此可知

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

当$n=0$时，我们有

$$c_2 = -\frac{c_0}{2\cdot 1}.$$

当$n=2$时，我们有

$$c_4 = -\frac{c_2}{4\cdot 3} = \frac{c_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

继续下去，可归纳得到

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2m\cdot(2m-1)\cdot(2m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = (-1)^m\frac{c_0}{(2m)!}, \ m = 1,2,\cdots.$$

类似地，对奇数次幂项系数归纳可得

$$c_{2m+1} = (-1)^m\frac{c_1}{(2m+1)!}, \quad m = 1,2,\cdots.$$

所以方程的通解为

$$y = c_0\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + c_1\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} = c_0\cos x + c_1\sin x,$$

其中$c_0, c_1$为任意常数. $\blacksquare$

## Example 2

用幂级数解法求解勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0,$$

其中 $l$ 是一个任意的实常数.

解　首先将勒让德方程重写为标准形式

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0.$$

由于$x=0$是两个系数的解析点, 所以它是勒让德方程的常点.
设

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots.$$

计算可得

$$y'=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}.$$

从计算的角度看, 勒让德方程的最初形式比标准形式更容易计算. 所以我们从它开始计算, 我们有

$$-x^2y''=-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nx^n,\quad -2xy'=-\sum_{n=1}^{+\infty}2nc_nx^n.$$

代入方程可得

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nc_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0.$$

为合并同幂次项, 对第一个和式的求和指标做变换, 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2nc_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0,$$

即

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} + (l+n+1)(l-n)c_n]x^n = 0.$$

由此可得递推关系式

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (l+n+1)(l-n)c_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

即

$$c_{n+2} = -\frac{(l+n+1)(l-n)}{(n+2)(n+1)}c_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

计算可得

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{l(l+1)}{2}c_0,\\
c_3 &= -\frac{(l-1)(l+2)}{2\cdot 3}c_1,\\
c_4 &= -\frac{(l-2)(l+3)}{3\cdot 4}c_2 = \frac{(l-2)l(l+1)(l+3)}{4!}c_0,\\
c_5 &= -\frac{(l-3)(l+4)}{4\cdot 5}c_3 = \frac{(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)}{5!}c_1,\\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

归纳可得

$$
c_{2m} = (-1)^m \frac{(l-2m+2)(l-2m+4)\cdots l\times(l+1)\cdots(l+2m-3)(l+2m-1)}{(2m)!}c_0,
$$

$$
c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(l-2m+1)(l-2m+3)\cdots(l-1)\times(l+2)\cdots(l+2m-2)(l+2m)}{(2m+1)!}c_1,
$$

$$
m = 1,2,3,\cdots.
$$

当 $c_0$ 和 $c_1$ 都不为零时，记

$$
y_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{c_{2m}}{c_0}x^{2m}, \qquad y_2(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{c_{2m+1}}{c_1}x^{2m+1},
$$

则勒让德方程的通解为

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x), \tag{11}$$

其中$c_0, c_1$为任意常数. $\blacksquare$

## Theorem 3

若$x = x_0$是方程(9)的常点，且系数$p(x), q(x)$在$|x - x_0| < r$内解析，则在$|x - x_0| < r$内，方程(9)有如下形式的幂级数解

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

其中系数 $c_0$ 和 $c_1$ 为任意常数，而系数$c_n$ $(n \geq 2)$则由 $c_0$ 和 $c_1$ 确定.

对勒让德方程，由于它的标准形式中的系数有奇点$x = \pm 1$，利用定理3可知，我们所得通解的有效范围为$|x| < 1$.

在求解拉普拉斯算子特征值问题时，我们需要求解的并不仅仅是连带勒让德方程，而是如下的连带勒让德方程特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+\left(\gamma-\dfrac{\mu}{1-x^2}\right)y=0, & -1<x<1, \\ |y(\pm 1)|<+\infty. \end{cases}$$

这里的有界性边界条件$|y(\pm 1)|<+\infty$是根据物理意义而添加的自然边界条件.

在这一节里，我们先求解参数$\mu=0$的特殊情形，即如下的勒让德方程特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+\gamma y=0, & -1<x<1, \\ |y(\pm 1)|<+\infty. \end{cases} \tag{12}$$

这个特征值问题属于奇异型斯图姆–刘维尔特征值问题，在本节中我们将会看到它几乎保持了正则斯图姆–刘维尔特征值问题的所有结论.

记$\gamma = l(l+1)$, 在例2中我们已经得到了勒让德方程的通解（见公式(11)）.

- 当$l$不为整数时, 两个特解$y_1(x)$ 和$y_2(x)$都是无穷级数, 利用高斯判别法可以证明它们在端点$x=\pm1$处发散, 不满足有界性条件.
- 当$l$为整数时, 由递推公式(10)可知, 两个特解$y_1(x)$和$y_2(x)$一个为多项式, 另一个为无穷级数. 这时仍由高斯判别法可知为无穷级数的特解在端点$x=\pm1$处发散, 不满足有界性条件.

可以证明特征值问题(12)中的特征值$\gamma = l(l+1) \geq 0$. 所以特征值问题(12)的特征值为$\gamma = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 相应的特征函数为$n$次多项式函数, 记作$P_n(x)$.

现在我们来求$P_n(x)$的具体表达形式. 首先, 将递推公式(10)改写为

$$c_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(k+n+1)} c_{k+2}, \quad 0 \leq k \leq n-2.$$

这样我们就可以通过多项式函数$P_n(x)$的最高次项的系数$c_n$来确定其它各项的系数（比由$c_0$或$c_1$来确定其它各项的系数要简单）.

计算过程具体见如下:

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}c_n,$$

$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}c_{n-2} = (-1)^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}c_n,$$

$$c_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)}c_{n-4} = (-1)^3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)}c_n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_{n-2m} = (-1)^m\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2m+2)(n-2m+1)}{2^m m!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)}c_n, \quad n \geq 2m.$$

我们知道, 特征函数不是唯一的, 对一个特征函数乘以任意一个常数, 得到的仍是特征函数. 为使特征函数$P_n(x)$的形式简单并满足$P_n(1)=1$, 取

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则可得

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!},$$

$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}\left[-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}\right] = (-1)^2\frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!},$$

$$c_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)}\left[(-1)^2\frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}\right] = (-1)^3\frac{(2n-6)!}{2^n 3!(n-3)!(n-6)!},$$

$\cdots\cdots$

$$c_{n-2m} = (-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}, \quad 2m \le n.$$

于是有

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}, \tag{13}$$

其中

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{n-1}{2}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

这就是勒让德多项式, 也称为第一类勒让德函数. 勒让德方程的另一个与勒让德多项式线性无关的特解, 即前面提到的无穷级数解, 称为第二类勒让德函数, 一般记作$Q_n(x)$.

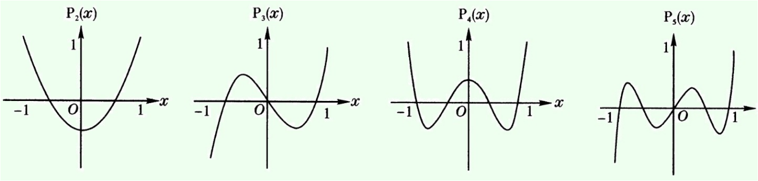
# 勒让德多项式的定义及性质

由勒让德多项式的表达式(13), 容易证明

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

由此可知, 奇数阶勒让德多项式是奇函数, 偶数阶勒让德多项式是偶函数. 特别地, 当$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$时, 我们有

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned}$$



## Theorem 4 (罗德里格斯公式)

勒让德多项式(13)可以表示为如下的微分形式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n. \tag{14}$$

## Corollary 5

设$f(x)$是一个 $k$ 次多项式. 若$k < n$, 则有

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

## Theorem 6

对$n = 1, 2, \cdots$, 勒让德多项式(13)满足如下递推关系式:

$$P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) = nP_{n-1}(x); \tag{15}$$

$$(1-x^2)P_{n-1}'(x) = n\left[xP_{n-1}(x) - P_n(x)\right]; \tag{16}$$

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x); \tag{17}$$

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x); \tag{18}$$

$$(1-x^2)P_n'(x) = n\left[P_{n-1}(x) - xP_n(x)\right]; \tag{19}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \tag{20}$$

## Corollary 7

勒让德多项式(13)满足$P_n(1)=1$, $n=0,1,2,\cdots$.

## Example 8

计算$\displaystyle\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x, \quad n\geq 1.$

解 利用递推公式(18), 有

$$\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}\int_0^1\left[P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right]_0^1.$$

由推论7, 有

$$\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(0)-P_{n-1}(0)\right].$$

再由递推公式(20)有

$$\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{P_{n-1}(0)}{n+1}.$$

所以

$$\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数;}\\ (-1)^m\dfrac{(2m)!}{2^{2m+1}m!(m+1)!}, & n\text{ 为奇数.}\end{cases}$$

$\blacksquare$

## Example 9

设$m \geq 1, n \geq 1$, 试证

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

证　由递推公式(17), 有

$$\begin{aligned}
& n\int_0^1 x^m P_n(x)\mathrm{d}x \\
=& \int_0^1 x^m \left[xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{m+1}P_n'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x^m P_{n-1}'(x)\mathrm{d}x \\
=& x^{m+1}P_n(x)\Big|_0^1 - (m+1)\int_0^1 x^m P_n(x)\mathrm{d}x - x^m P_{n-1}(x)\Big|_0^1 + m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\mathrm{d}x \\
=& -(m+1)\int_0^1 x^m P_n(x)\mathrm{d}x + m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

将其整理后即得所证. $\blacksquare$

勒让德多项式作为特征值问题(12)的特征函数, 和之前的特征函数一样, 具有正交性和完备性.

## Theorem 10

勒让德多项式系$\{P_n(x)\}$是$L^2[-1,1]$中的正交函数系, 即当$m \neq n$时有

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots;$$

当$m = n$时有

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{21}$$

## Theorem 11

勒让德多项式系$\{P_n(x)\}$是$L^2[-1,1]$中的正交坐标系, 即对$L^2[-1,1]$中的任一函数$f(x)$, 有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n(x), \tag{22}$$

其中系数

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{23}$$

函数项级数(22)称为函数$f(x)$的傅里叶–勒让德级数或勒让德级数, 简称为F–L级数.

## Example 12

将函数$f(x) = x^3$按勒让德多项式展开.

解法一　将递推公式(20)重写为

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

于是有

$$\begin{aligned} x^2 &= xP_1(x) = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x), \\ x^3 &= x \cdot x^2 = x\left[\frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)\right] = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x). \end{aligned}$$

解法二　由F–L级数的系数公式(23)和推论5可知

$$x^3 = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x).$$

由于$x^3$是奇函数，而$P_0(x), P_2(x)$是偶函数，故有$c_0 = c_2 = 0$. 所以

$$x^3 = c_1 P_1(x) + c_3 P_3(x).$$

由系数公式(23)和例9有

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 P_1(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^3 P_1(x)\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{3}{5}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{3}{5},$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^3 P_3(x)\mathrm{d}x = 7\int_0^1 x^3 P_3(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^2 P_2(x)\mathrm{d}x \\ &= 3\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 x P_1(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

因此有

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x). \qquad \blacksquare$$

## Example 13

将函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ 1, & 0\le x<1\end{cases}$$

展成*F–L*级数.

解　设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nP_n(x),$$

其中系数

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

由于$f(x)$是奇函数，由勒让德多项式$P_n(x)$的奇偶性可知，当$n$为偶数时，系数$c_n=0$;
当$n$为奇数时，

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x=(2n+1)\int_{0}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x=(2n+1)\int_{0}^{1}P_n(x)\mathrm{d}x.$$

于是由例8的结果有

$$f(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{(2m)!(4m+3)}{2^{2m+1}m!(m+1)!}P_{2m+1}(x).$$

球体区域内的拉普拉斯方程边值问题, 如果具有对称轴, 则我们可取该对称轴为球坐标系的极轴, 这样球坐标系下的未知函数$u(r,\theta,\varphi)$就与角度$\varphi$无关, 即$u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta)$. 于是具有轴对称性的拉普拉斯方程就可表示为

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0. \tag{24}$$

设$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, 代入上面的方程可分离得欧拉方程

$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0 \tag{25}$$

和特征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta(\theta)=0, \quad 0<\theta<\pi,\\ |\Theta(0)|<+\infty, |\Theta(\pi)|<+\infty.\end{cases} \tag{26}$$

令$x=\cos\theta, y(x)=\Theta(\arccos x)$, 这个特征值问题就变成了本节讨论过的特征值问题(12). 因此特征值问题(26)的特征值和特征函数为

$$\lambda_n=n(n+1), \quad \Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta), \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

前面定理11的结果现在可重述为: 函数$g(\theta)$的F–L级数为

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nP_n(\cos\theta),$$

其中

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

将$\lambda_n=n(n+1)$代入欧拉方程(25), 解得

$$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}.$$

在球心$r=0$处应附加有界性条件$R(0)<+\infty$, 这推出$D_n=0$. 所以实际上

$$R_n(r)=C_nr^n.$$

现在叠加所有变量分离形式的特解, 便可得到有轴对称性的拉普拉斯方程(24)的解的一般形式

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta). \tag{27}$$

为确定系数$C_n$，我们需要一个边界条件．当球的半径为$a$时，如果有第一类边界条件$u(a,\theta)=g(\theta)$，则可得

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^nC_nP_n(\cos\theta),$$

其中

$$C_n=\frac{2n+1}{2a^n}\int_0^\pi g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

如果拉普拉斯方程所在的空间区域是球体的外部，则称为外问题．这时对$R(r)$应附加的条件需更改为$|R(+\infty)|<+\infty$．相应的解的一般形式应更改为

$$u(r,\theta)=C_0+\sum_{n=0}^{+\infty}D_nr^{-(n+1)}P_n(\cos\theta). \tag{28}$$

## Example 14

试求半径为1的球体的定常温度分布. 假定球面上的温度分布恒为$u(1,\theta)=\cos^2\theta$.

解 此问题可归结为如下的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0<r<1, 0<\theta<\pi, 0\le\varphi\le 2\pi, \\ u(1,\theta)=\cos^2\theta, & 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

由于定解数据与变量$\varphi$无关, 故可推断所求函数$u$只与$r$和$\theta$有关, 而与$\varphi$无关. 在球坐标系下, 此定解问题可具体表示为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, & 0<r<1, 0<\theta<\pi, \\ u(1,\theta)=\cos^2\theta, & 0\le\theta\le\pi. \end{cases}$$

这是一个轴对称的拉普拉斯方程球体边值问题. 利用解的公式(27)可得

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n r^n P_n(\cos\theta).$$

代入边界条件得

$$\cos^2\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n P_n(\cos\theta).$$

令$x=\cos\theta$, 则上式变为

$$x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x).$$

由例12的解法一中的结果可知

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x).$$

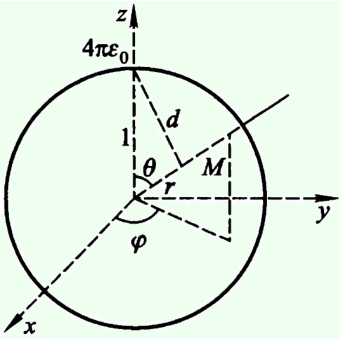
因此所求定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r^2 P_2(\cos\theta) = \frac{1}{3} + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)r^2.$$

勒让德多项式的引出有好几种途径，作为特征值问题的解只是其中之一．历史上，勒让德多项式最早是由勒让德在1785年研究位势论时引出的． 下面我们从电势的角度引出勒让德多项式的一个重要性质．设在单位球北极有一个电量为$4\pi\varepsilon_0$的正点电荷，则在球内任一点$M$的电势为

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}}\ (r < 1),$$

其中$d$和$r$分别是点$M$到球的北极点和球心的距离．



# 勒让德多项式的母函数

另一方面, 电势$1/d$应满足拉普拉斯方程, 且以球坐标系的极轴为对称轴. 因此$1/d$应该可以表示为轴对称的拉普拉斯方程的解的一般形式, 即

$$\frac{1}{d} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta).$$

于是有

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta).$$

为确定系数$C_n$, 令$\theta = 0$, 则可得

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^n P_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^n.$$

由此可知$C_n = 1, n = 0, 1, 2, \cdots$. 所以有

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n P_n(\cos\theta).$$

令$x = \cos\theta$, 即得

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n P_n(x). \tag{29}$$

勒让德多项式$P_n(x)$恰好是函数$1/\sqrt{1-2rx+r^2}$关于 $r$ 的幂级数展式的系数. 因此我们称函数$1/\sqrt{1-2rx+r^2}$为勒让德多项式的母函数（或生成函数）.

## Example 15

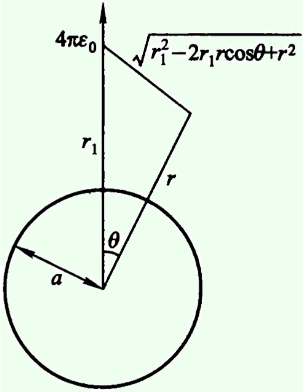
如图所示，在点电荷$4\pi\varepsilon_0$的电场中放置一个接地导体球，球的半径为$a$，球心到点电荷的距离为$r_1$ $(r_1 > a)$. 求球外的电势分布.

解 取球心为球坐标系的原点，过点电荷的轴为极轴，则极轴为对称轴，电势$u$的分布与$\varphi$无关. 如果没有导体球，则电势$u(r,\theta)$本应为

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r\cos\theta + r^2}}.$$

但有了导体球后，由于静电感应，在导体球的表面会产生感应电荷分布. 于是球外任意一点的电势应当为原来的电势加上感应电荷的电势$v$，即

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r\cos\theta + r^2}} + v(r,\theta).$$




因此我们需要做的就是求出$v(r,\theta)$. 而$v(r,\theta)$在球外满足拉普拉斯方程定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)=0, & r>a, 0<\theta<\pi,\\
v(a,\theta)=\dfrac{-1}{\sqrt{r_1^2-2r_1a\cos\theta+a^2}}, & 0\le\theta\le\pi,\\
\lim\limits_{r\to+\infty} v(r,\theta)=0, & 0\le\theta\le\pi.
\end{cases}
$$

这里的边界条件是因为球体接地意味着球面的电势$u(a,\theta)=0$. 由解的公式(28)有

$$
v(r,\theta)=C_0+\sum_{n=0}^{+\infty}D_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta).
$$

而由$\lim\limits_{r\to+\infty} v(r,\theta)=0$可知$C_0=0$. 所以有

$$
v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}D_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta).
$$

于是由球面处的边界条件可得

$$
\frac{-1}{\sqrt{r_1^2-2r_1a\cos\theta+a^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}D_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta).
$$

而由公式(29)有

$$
\frac{-1}{\sqrt{r_1^2-2r_1a\cos\theta+a^2}}=\frac{-1}{r_1\sqrt{1-2(a/r_1)\cos\theta+(a/r_1)^2}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\theta).
$$

比较两个F–L级数展式可得

$$D_n = -\frac{a^{2n+1}}{r_1^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

因此有

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{r_1^{n+1}} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{a}{rr_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a^2}{rr_1}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ &= -\frac{a/r_1}{\sqrt{r^2 - 2(a^2/r_1)r\cos\theta + (a^2/r_1)^2}}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

本例表明感应电荷产生的感应电场等效于一个点电荷产生的电场. 这个点电荷位于从球心到原有的点电荷的射线上, 到球心距离为$a^2/r_1$（由此可知在球内）, 电量为$-4\pi\varepsilon_0(a^2/r_1)$.

## Example 16

设半径为 $a$ 的半球球面保持恒温$u_0$, 底面保持零度. 求半球内的温度分布.

解　设半球内温度为 $u$, 取球心为坐标原点, 半球底面为$xy$平面, 则温度分布是轴对称的. 温度分布 $u$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0, & 0 < r < a, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ u(a,\theta) = u_0, & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ u(r,\pi/2) = 0, & 0 \le r \le a. \end{cases}$$

设$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 可分离得欧拉方程

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{30}$$

和特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta(\theta) = 0, & 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ |\Theta(0)| < +\infty, |\Theta(\pi/2)| = 0. \end{cases} \tag{31}$$

令$x = \cos\theta, y(x) = \Theta(\arccos x)$, 此特征值问题就变成了特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, |y(1)| < +\infty. \end{cases}$$

将此问题奇延拓（见傅里叶正弦级数的导出）到对称开区间$[-1, 1]$, 就得到了勒让德方程特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < +\infty, \end{cases} \tag{12}$$

只是多了解是奇函数的条件. 因此特征值问题(31)的特征值和特征函数为

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad \Theta_n(\theta) = P_{2n+1}(\cos\theta), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

将$\lambda_n = (2n+1)(2n+2)$代入欧拉方程(30), 解得

$$R_n(r) = C_n r^{2n+1} + D_n r^{-(2n+2)}.$$

在球心$r = 0$处应附加有界性条件$R(0) < +\infty$, 所以实际上

$$R_n(r) = C_n r^{2n+1}.$$

现在叠加所有变量分离形式的特解, 便可得到解的一般形式

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

由边界条件得

$$u_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n a^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

等式右端的级数和F–L级数之间的关系与傅里叶正弦级数和傅里叶级数之间的关系是一样的. 特征函数系$\{P_{2n+1}(x)\}$是$L^2(0,1)$中的正交坐标系. 它的正交性可利用勒让德多项式的正交性推出. 所以系数

$$C_n = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0 P_{2n+1}(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta}{a^{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [P_{2n+1}(\cos\theta)]^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta} = u_0 \frac{\displaystyle\int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x}{a^{2n+1}\displaystyle\int_0^1 [P_{2n+1}(x)]^2 \mathrm{d}x}.$$

由例8和公式(21)可得

$$C_n = u_0 \frac{(-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!}}{a^{2n+1} \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{2(2n+1)+1}} = (-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{(2a)^{2n+1} n!(n+1)!} u_0. \qquad \blacksquare$$

# 连带勒让德函数的定义及性质

我们开始讨论上一节提出的连带勒让德方程特征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\gamma - \dfrac{\mu}{1-x^2}\right) y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < +\infty. \end{cases} \tag{32}$$

在求解球域内的偏微分方程定解问题时，这里的参数 $\mu$ 实际上是一个周期特征值问题的特征值，所以可设$\mu = m^2$, $m = 0, 1, 2, \cdots$. 我们称

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\gamma - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0 \tag{33}$$

为 $m$ 阶连带勒让德方程. 当$m=0$时，连带勒让德方程特征值问题就是上一节讨论过的勒让德方程特征值问题. 在上一节我们已经把它应用到了有轴对称性的球域问题. 当我们面对的球域问题不再有轴对称性时，我们就必须考虑$m \neq 0$的情形.

常微分方程的特征值问题一般都是先求方程的通解，然后再利用定解条件确定特征值和特征函数．然而，对连带勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\gamma-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \tag{33}$$

哪怕是求幂级数解（包括弗罗贝尼乌斯级数解），都是困难的．困难在于由于系数递推公式过于复杂而难以求出系数的一般表示式（读者不妨自行写出系数递推公式）．因此要想求解连带勒让德方程(33)，我们只能另辟蹊径．

易知$x=\pm1$是$m$阶连带勒让德方程的正则奇点．不难求出连带勒让德方程在$x=\pm1$处的指标为$\rho=\pm\frac{m}{2}$．因此可设$y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$，则有

$$\begin{aligned}
y' &=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u'-mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u,\\
y'' &=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u''-2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u'+(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\left[\frac{m(m-2)x^2}{1-x^2}-m\right]u,
\end{aligned}$$

将它们代入$m$阶连带勒让德方程(33)，便可知$u(x)$满足如下的常微分方程

$$(1-x^2)u''-2x(m+1)u'+[\gamma-m(m+1)]u=0. \tag{34}$$

现在考虑对勒让德方程

$$(1-x^2)v''-2xv'+\gamma v=0 \tag{35}$$

关于 $x$ 求一阶导数，则可得

$$(1-x^2)(v')''-2x(1+1)(v')'+[\gamma-1\cdot(1+1)]v'=0.$$

容易发现，它恰好就是$m=1$时的方程

$$(1-x^2)u''-2x(m+1)u'+[\gamma-m(m+1)]u=0. \tag{34}$$

也就是说，勒让德方程的解$v(x)$的一阶导函数$v'(x)$是$m=1$时的方程(34)的解，即$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}v'(x)$是 1 阶连带勒让德方程的解.

一般地，对勒让德方程(35)求 $m$ 阶导数，（或由数学归纳法）可得

$$(1-x^2)v^{(m+2)}-2x(m+1)v^{(m+1)}+[\gamma-m(m+1)]v^{(m)}=0.$$

因此，若$v(x)$是勒让德方程(35)的解，则$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}v^{(m)}(x)$就是 $m$ 阶连带勒让德方程(33)的解.

所以我们可以利用勒让德方程的通解来得到 $m$ 阶连带勒让德方程(33)的通解.

在9.3.1小节，我们已经知道只有当$\gamma=n(n+1)$, $(n=0,1,2,\cdots)$时，勒让德方程(35)才有在$x=\pm1$有界的解，即勒让德多项式$P_n(x)$. 这时勒让德方程的通解可表示为

$$y(x)=AP_n(x)+BQ_n(x).$$

利用我们刚刚发现的$m$ $(m\geq 1)$阶连带勒让德方程和勒让德方程之间的联系，可以证明只有当$\gamma=n(n+1)$, $(n=0,1,2,\cdots)$时，连带勒让德方程(33)才会有在$x=\pm1$有界的解，这时连带勒让德方程(33)的通解可表示为

$$y(x)=AP_n^m(x)+BQ_n^m(x),$$

其中

$$\begin{aligned}P_n^m(x)=&(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m)}(x)\ (0\leq m\leq n),\\ Q_n^m(x)=&(1-x^2)^{\frac{m}{2}}Q_n^{(m)}(x),\end{aligned}\tag{36}$$

分别称为$m$阶$n$次第一类和第二类连带勒让德函数.

在本节中需要注意符号

$P_n^m(x)$：连带勒让德函数；　　$P_n^{(m)}(x)$：勒让德多项式的$m$阶导数.

由于第二类连带勒让德函数$Q_n^m(x)$在$x=1$处不满足有界性条件, 所以当$\mu=m^2, m=0,1,2,\cdots$时, 连带勒让德方程特征值问题(32)的特征值和特征函数分别为

$$\gamma_n=n(n+1), \quad y_n(x)=P_n^m(x), \qquad n=m,m+1,m+2,\cdots.$$

我们只讨论第一类连带勒让德函数$P_n^m(x)$, 今后简称为连带勒让德函数.

应当指出, 如果允许连带勒让德方程(33)中的参数$m$取负整数值, 容易看出这不会改变特征值问题(32). 因此连带勒让德函数$P_n^m(x)$可以推广到$m$取负整数值的情形.

由连带勒让德函数$P_n^m(x)$的定义式(36)和勒让德多项式的罗德里格斯公式(14)立即可得

$$P_n^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^n. \tag{37}$$

这个公式也称为罗德里格斯公式. 利用它我们不难求出一些低阶次的连带勒让德函数:

$$\begin{aligned}
&P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, && P_2^1(x)=3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, && P_2^2(x)=3(1-x^2),\\
&P_3^1(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1), && P_3^2(x)=15x(1-x^2), && P_3^3(x)=15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

类似地, 由连带勒让德函数$P_n^m(x)$的定义式(36), 从勒让德多项式的诸多递推公式中我们可以推出连带勒让德函数$P_n^m(x)$满足如下的递推关系式:

$$(2n+1)xP_n^m(x)=(n+m)P_{n-1}^m(x)+(n-m+1)P_{n+1}^m(x), \tag{38}$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^m(x)=P_{n+1}^{m+1}(x)-P_{n-1}^{m+1}(x), \tag{39}$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^m(x)=(n-m+2)(n-m+1)P_{n+1}^{m-1}(x) \tag{40}$$

$$-(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(x), \tag{41}$$

$$(2n+1)(1-x^2)[P_n^m(x)]'=(n+1)(n+m)P_{n-1}^m(x)-n(n-m+1)P_{n+1}^m(x). \tag{42}$$

连带勒让德函数作为特征值问题(32)的特征函数, 具有正交性和完备性.

## Theorem 17

对$m=0,1,2,\cdots$, 连带勒让德函数系$\{P_n^m(x)\}_{n=m}^{+\infty}$是$L^2[-1,1]$中的正交函数系, 即当$k\neq n$时有

$$\int_{-1}^{1} P_k^m(x)P_n^m(x)\mathrm{d}x=0,\quad k,n=m,m+1,m+2,\cdots;$$

当$k=n$时有

$$\int_{-1}^{1}|P_n^m(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1},\quad n=m,m+1,m+2,\cdots. \tag{43}$$

## Theorem 18

对$m=0,1,2,\cdots$, 连带勒让德函数系$\{P_n^m(x)\}_{n=m}^{+\infty}$是$L^2[-1,1]$中的正交坐标系, 即对$L^2[-1,1]$中的任一函数$f(x)$, 有如下的广义傅里叶级数展式

$$f(x)=\sum_{n=m}^{+\infty}c_nP_n^m(x), \tag{44}$$

其中系数

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_n^m(x)\mathrm{d}x,\quad n=m,m+1,m+2,\cdots. \tag{45}$$

## Example 19

把函数$f(x)=1-x^2$在区间$[-1,1]$上按连带勒让德函数系$\{P_n^2(x)\}_{n=2}^{+\infty}$展开为广义傅里叶级数.

解 设

$$f(x)=1-x^2=\sum_{n=2}^{+\infty} c_n P_n^2(x).$$

由系数公式(45)和定义式(36)有

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2P_n''(x)\mathrm{d}x.$$

利用分部积分可得

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2P_n''(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}4x(1-x^2)P_n'(x)\mathrm{d}x=4\int_{-1}^{1}(3x^2-1)P_n(x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$c_n=2(2n+1)\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)P_n(x)\mathrm{d}x.$$

由推论5可知, $c_n=0, n=3,4,\cdots$. 又由$3x^2-1$是偶函数而$P_1(x)$是奇函数可知$c_1=0$. 现在只剩下 $c_2$ 需要计算, 我们有

$$c_2 = \frac{5}{12}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)P_2(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int_{0}^{1}(3x^2-1)P_2(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{2}\int_{0}^{1} x^2 P_2(x)\mathrm{d}x + \frac{5}{6}\int_{0}^{1} P_2(x)\mathrm{d}x.$$

利用例8和9的结果可得

$$c_2 = \int_0^1 xP_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

所以所求展式为

$$1-x^2 = \frac{1}{3}P_2^2(x).$$

实际上，当我们已知$1-x^2 = c_2P_2^2(x)$时，利用$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$便可直接推出$c_2 = 1/3$. 只是这种方法缺乏一般性.

在球坐标系下，三维拉普拉斯方程为

$$\Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{46}$$

设$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$，代入上面的方程可得

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{47}$$

和特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \lambda Y, & 0 < \theta < \pi, -\infty < \varphi < +\infty, \\ Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta,\varphi), & 0 \le \theta \le \pi, -\infty < \varphi < +\infty, \\ |Y(0,\varphi)| < +\infty, |Y(\pi,\varphi)| < +\infty, & -\infty < \varphi < +\infty. \end{cases} \tag{48}$$

此特征值问题的解称为球面调和函数或球谐函数，常简称为球函数，是拉普拉斯方程的球坐标系形式解的角度部分．因而特征值问题(48)中的方程被称为球函数方程．

为求解特征值问题(48), 我们继续分离变量. 设$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得两个特征值问题

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0, & -\infty<\varphi<+\infty, \\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi), & -\infty<\varphi<+\infty \end{cases} \tag{49}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\left[\sin\theta\Theta'(\theta)\right]'+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0, \quad 0<\theta<\pi, \\ \Theta(0),\Theta(\pi)\text{有界}. \end{cases} \tag{50}$$

注意到特征值问题(49)实际上是已讨论过的周期特征值问题, 因此它的特征值和相应的特征函数分别为

$$\mu_m=m^2, \quad \Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi, \qquad m=0,1,2,\cdots.$$

令$x=\cos\theta$, 记$y(x)=\Theta(\arccos x)=\Theta(\theta)$, 则特征值问题(50)就化为本节开头讨论的特征值问题(32). 现在已知参数$\mu=m^2, m=0,1,2,\cdots$, 所以它的特征值和相应的特征函数分别为

$$\lambda_n=n(n+1), \quad \Theta_{mn}(\theta)=P_n^m(\cos\theta), \qquad n=m,m+1,m+2,\cdots.$$

因此特征值问题(48)的特征值和相应的特征函数分别为

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$Y_{mn}(\theta, \varphi) = (C_{mn}\cos m\varphi + D_{mn}\sin m\varphi)\, P_n^m(\cos\theta),$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots, \ m = 0, 1, \cdots, n.$$

由此可知

$$P_n(\cos\theta), \cos m\varphi P_n^m(\cos\theta), \sin m\varphi P_n^m(\cos\theta), \quad m = 1, 2, \cdots, n$$

都是特征值$\lambda_n$的特征函数, 所以它们都是球面调和函数, 称为$n$阶球面调和函数, 在线性无关的意义下共有$2n+1$个. 特别地, 勒让德多项式是球面调和函数.

球面调和函数系是单位球面上的完备正交函数系, 即对任一单位球面上的平方可积函数$f(\theta, \varphi)$, 可按球面调和函数系$\{P_n(\cos\theta), \cos m\varphi P_n^m(\cos\theta), \sin m\varphi P_n^m(\cos\theta)\}$展开为如下的二重广义傅里叶级数

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_{mn}\cos m\varphi + D_{mn}\sin m\varphi)\, P_n^m(\cos\theta), \tag{51}$$

其中系数

$$C_{mn} = \frac{1}{M_{mn}^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\cos m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

$$D_{mn} = \frac{1}{N_{mn}^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin m\varphi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

$$D_{0n} = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots, \ m = 0,1,\cdots,n,$$

这里$M_{mn}^2$和$N_{mn}^2$为

$$M_{0n}^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |P_n^0(\cos\theta)|^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} |P_n^0(\cos\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\begin{aligned} M_{mn}^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 m\varphi |P_n^m(\cos\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} |P_n^m(\cos\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{mn}^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 m\varphi |P_n^m(\cos\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} |P_n^m(\cos\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

将$\lambda = n(n+1)$代入欧拉方程

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{47}$$

可得通解

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}.$$

叠加拉普拉斯方程(46)的所有的变量分离的特解可得它的解的一般形式

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)\left(C_{mn}\cos m\varphi + D_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta). \tag{52}$$

根据定解问题所在的空间区域是球内还是球外，可确定$B_n = 0,\ n = 0,1,2,\cdots$或$A_n = 0,\ n = 1,2,\cdots$. 最终的系数确定则要由所给的边界条件和展式(51)的系数公式来确定.

## Example 20

将函数$f(\theta,\varphi)=(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$展开成球面调和函数的广义傅里叶级数.

解 球面调和函数的广义傅里叶级数展式(51)可利用关于$\varphi$的傅里叶级数展式和关于$\theta$（即关于$x=\cos\theta$）的连带勒让德函数系展式分两次展开得到. 为求一个二元函数的球面调和函数的广义傅里叶级数展式, 一般可先将其展为关于$\varphi$的傅里叶级数展式.

注意到$f(\theta,\varphi)=(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$已经是$\varphi$的傅里叶级数展式, 只不过仅有关于$\cos\varphi$的项, 系数为$(1+3\cos\theta)\sin\theta$. 接下来, 只需将系数函数$(1+3\cos\theta)\sin\theta$展开为关于连带勒让德函数系$\{P_n^1(x)\}_{n=1}^{+\infty}$的展式. 令$x=\cos\theta$,
则$(1+3\cos\theta)\sin\theta=(1+3x)\sqrt{1-x^2}$. 于是可设

$$(1+3x)\sqrt{1-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_{1n}P_n^1(x).$$

由系数公式(45)和定义式(36)有

$$\begin{aligned}C_{1n}&=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(1+3x)\sqrt{1-x^2}P_n^1(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(1+3x)(1-x^2)P_n'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用分部积分可得

$$\int_{-1}^{1}(1+3x)(1-x^2)P_n'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(9x^2+2x-3)P_n(x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$C_{1n}=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-2)!}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(9x^2+2x-3)P_n(x)\mathrm{d}x.$$

由推论5可知, $C_{1n}=0, n=3,4,\cdots$. 因此我们有

$$(1+3x)\sqrt{1-x^2}=C_{11}P_1^1(x)+C_{12}P_2^1(x)=C_{11}\sqrt{1-x^2}+C_{12}3x\sqrt{1-x^2},$$

即

$$1+3x=C_{11}+3C_{12}x.$$

显然有$C_{11}=C_{12}=1$. 所以

$$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi=P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi.$$ $\blacksquare$

## Example 21

半径为$r_0$的球体内部没有电荷分布, 球面上的电势为$u_0 \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$, 求球体内部的电势分布.

解 这是静电场电势分布问题, 可描述为如下的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \\ u(r_0,\theta,\varphi) = u_0\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi, \\ |u(0,\theta,\varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

它的解的一般形式可由(52)式给出. 由球心处的有界性条件可知$B_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$. 于是解的一般形式为

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n\left(C_{mn}\cos m\varphi + D_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta).$$

由球面上的边界条件可得

$$u_0\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} r_0^n\left(C_{mn}\cos m\varphi + D_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta).$$

利用上一例题中的方法我们可得

$$u_0\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}u_0(1-\cos^2\theta)\sin 2\varphi = \frac{1}{6}u_0 P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi.$$

比较前面两式右端的级数展式的系数可得

$$D_{22} = \frac{u_0}{6r_0^2},\ D_{mn} = 0,\ m \neq 2, n \neq 2,\ C_{mn} = 0,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots,\ m = 0, 1, \cdots, n.$$

所以球体内部的电势分布为

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{u_0 r^2}{6r_0^2} P_2^2(\cos\theta) \sin 2\varphi. \qquad \blacksquare$$

# 习题十五作业

3.试证$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

5.试证$\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x) = P'_n(x) + P'_{n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

提示：可用数学归纳法.

6. 试证$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P'_n(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

9. 求解定解问题

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + 2r u_r + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} u_\theta + u_{\theta\theta} = 0, \\ u(R, \theta) = u_0 \cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi). \end{cases}$$