

**考试说明：**本课程为闭卷考试，满分为：100 分。

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、选择题（共 28 分）

1. 函数  $f(x)$  有连续二阶导数，且  $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 1$ ， $f''(0) = -2$ ，

则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = ( \quad )$ .

- (A) 不存在； (B) 0； (C) -1； (D) -2.

2. 设  $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续， $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ，则  $a, b$  满足 ( ).

- (A)  $a < 0, b < 0$ ； (B)  $a > 0, b > 0$ ； (C)  $a \leq 0, b > 0$ ； (D)  $a \geq 0, b < 0$ .

3. 设  $f(x)$  在  $x = a$  连续但不可导， $g(x)$  在  $x = a$  可导，记  $F(x) = f(x)g(x)$ ，

$g(a) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = a$  可导的 ( ).

- (A) 充分非必要条件； (B) 必要非充分条件；  
(C) 充要条件； (D) 既非充分又非必要条件.

4. 方程  $xe^{2x} - 2x - \cos x + \frac{1}{2}x^2 = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有且仅有 ( ).

- (A) 1 个实根； (B) 2 个实根； (C) 3 个实根； (D) 0 个实根.

5. 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数，则  $F(x) + f(x)$  必满足 ( ).

- (A) 连续； (B) 可导； (C) 初等函数； (D) 一定存在原函数.

6. 设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ ，则  $F(x)$  为 ( ).

- (A) 正常数； (B) 负常数； (C) 零； (D) 非常数函数.

座号

授课教师

姓名

学号

优选专业年级

7. 设有直线  $l: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$  与平面  $\pi: 4x-2y+z-2=0$ , 则直线  $l$  ( ).

(A) 平行但不在平面  $\pi$  上; (B) 在平面  $\pi$  上; (C) 垂直于  $\pi$ ; (D) 与  $\pi$  斜交.  
二、填空题 (共 24 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x \sin x} = ( \quad ).$

2. 设方程  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  确定隐函数  $y = y(x)$ , 则  $y'(x) = ( \quad ).$

3. 曲线  $y = (x+3)e^{\frac{1}{x}}$  的斜渐近线为 ( ).

4. 质点以速度  $t \sin t^2$  米/秒作直线运动, 则从时刻  $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  秒到  $t_2 = \sqrt{\pi}$  秒内质点所经过的路程等于 ( ) 米.

5.  $\int_{-2}^2 (x \sin^4 x + \sqrt{4-x^2}) dx = ( \quad ).$

6. 若广义积分  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2} \right) dx$  收敛, 则常数  $c = ( \quad ).$

三、计算题 (每题 8 分, 共 40 分)

1. 已知可微函数  $y = f(x)$  在  $x$  点满足  $\Delta y = \frac{x}{1+x^2} \Delta x + o(\Delta x)$ , 且  $f(0) = 1$ , 求函数  $f(x)$ .

2. 设  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = t \cos t^2 - \int_1^{t^2} \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du \end{cases}$  确定, 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$

3. 设  $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ , 求  $F(x)$  的极值及曲线  $y = F(x)$  的拐点, 且计算  $\int_{-2}^3 x^2 F'(x) dx$  的值.

4. 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ , 求  $\phi(x) = \int_{-1}^x f(t) dt.$

5. 设曲线  $y = ax^2 + bx + c$  通过原点, 且当  $0 \leq x \leq 1$  时  $y \geq 0$ . 又设它与  $x$  轴, 直线  $x=1$  围成的图形  $D$  的面积为  $\frac{1}{3}$ . 求使  $D$  绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体体积  $V_x$  最小时的常数  $a, b, c$  的值.

四、证明题 (共 8 分)

已知  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  上可导, 且满足  $f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx$  ( $k > 1$ ), 证明: 至少存在一点  $\eta \in (0,1)$ , 使  $f'(\eta) = (1-\eta^{-1})f(\eta)$ .

授课教师命题教师或  
命题负责人签字

年 月 日

院系负责人  
签字

年 月 日

