第11周作业及参考答案

Edited by Hu Chen

OUC

May 21, 2020

目录

习题十作业

5.一根无限长的弦与x轴的正半轴重合，并处于平衡状态中，弦的左端点位于原点. 当$t>0$ 时左端点作微小振动$A\sin\omega t$, 试证弦的振动规律为

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & (t\le \frac{x}{a}),\\ A\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & (t>\frac{x}{a}),\end{cases}$$

解 由题意, 初始时刻弦处于平衡状态, 故初始位移和速度都为0, 所以弦的位移$u(x,t)$ 满足如下半无界问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<+\infty,\ t>0)\\ u(0,t)=A\sin\omega t & (t>0),\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0 & (0\le x<+\infty),\end{cases}$$

方程的通解为为

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at). \tag{1}$$

把它代入初始条件得

$$f(x)+g(x)=0,\quad x\ge 0,$$
$$-af'(x)+ag'(x)=0,\quad x\ge 0.$$

对上面第二式从x_0到x积分得

从上面的方程中解出

$$f(x) = -\frac{c}{2a}, \quad x \geq 0, \tag{2}$$
$$g(x) = \frac{c}{2a}, \quad x \geq 0. \tag{3}$$

观察式(2)和(3), 它们其实只给出了 f 和 g 在正 x 轴上的解析表达式. 而从通解的表达式(1)中可知, 当$x < at$时, 我们还需要知道函数$f(x)$在负 x 轴上的解析表达式. 为此, 把通解(1)代入边界条件中得

$$f(-at) + g(at) = A\sin\omega t.$$

令$\xi = -at$, 则得

$$f(\xi) = -g(-\xi) + A\sin\omega(-\frac{\xi}{a}), \quad \xi < 0,$$

即

$$f(x) = A\sin\omega(-\frac{x}{a}), \quad x < 0. \tag{4}$$

当$x \geq at$时, 把式(2)和(3)代入通解(1)中得

$$u(x,t) = 0;$$

当$0 \leq x < at$时, 把式(4)和(3)代入通解(1)中得

$$u(x,t) = A\sin\omega(t - \frac{x}{a}).$$

9. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + \dfrac{2}{x}u_x\right) & \\ u(x,0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty), \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为充分光滑的已知函数.

提示：令$v(x,t) = xu(x,t)$.

解 令$v(x,t) = xu(x,t)$, 则有

$$v_{tt} = xu_{tt},$$
$$v_x = u + xu_x,$$
$$v_{xx} = 2u_x + xu_{xx}.$$

所以由原方程我们得v 满足如下定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & \\ v(x,0) = x\varphi(x) & (-\infty < x < +\infty), \\ v_t(x,0) = x\psi(x) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

故由达朗贝尔公式可得

$$v(x,t)=\frac{(x-at)\varphi(x-at)+(x+at)\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

所以原问题的解

$$u(x,t)=\frac{(x-at)\varphi(x-at)+(x+at)\varphi(x+at)}{2x}+\frac{1}{2ax}\int_{x-at}^{x+at}\xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

15. 利用三维泊松公式求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & \\ u(x,y,z,0)=x^3+y^2z & (-\infty<x,y,z<+\infty), \\ u_t(x,y,z,0)=0 & (-\infty<x,y,z<+\infty). \end{cases}$$

解 设$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$, $u_t(x,y,z)=\psi(x,y,z)$. 则解的泊松公式为

$$
\begin{aligned}
u(M,t) = u(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[t\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint_{S_{at}^M}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S\right] \\
&\quad + t\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint_{S_{at}^M}\psi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right] \\
&\quad + \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\xi,\eta,\zeta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\xi &= x + at\sin\theta\cos\phi, \\
\eta &= y + at\sin\theta\sin\phi, \\
\zeta &= z + at\cos\phi.
\end{aligned}
$$

由题意我们有$\varphi(x,y,z) = x^3 + y^2z$, $\psi(x,y,z) = 0$.

故

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z,t)\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[(x+at\sin\theta\cos\phi)^3+(y+at\sin\theta\sin\phi)^2(z+at\cos\phi)]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right]\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}[2x^3+4t^2xa^2\cos^2\phi+2y^2z+\frac{4}{3}za^2t^2\sin^2\phi]\mathrm{d}\phi\right]\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\left[x^3t+xa^2t^3+y^2zt+\frac{1}{3}za^2t^3\right]\\
=&x^3+3a^2t^2x+zy^2+a^2t^2z.
\end{aligned}
$$

17. 求解定解问题

$$
\begin{cases}
v_{tt}=a^2(v_{xx}+v_{yy})+c^2v, & \\
v(x,y,0)=\varphi(x,y) & (-\infty<x,y<+\infty),\\
v_t(x,y,0)=\psi(x,y) & (-\infty<x,y<+\infty),
\end{cases}
$$

其中c 为已知正常数, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ 为充分光滑的已知函数.

提示：在三维波动方程中令$u(x,y,z,t)=e^{\frac{cz}{a}}v(x,y,t)$.

解 令$u(x,y,z,t)=e^{\frac{cz}{a}}v(x,y,t)$, 则容易验证$u$ 满足如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ u(x,y,z,0)=e^{\frac{cz}{a}}\varphi(x,y) & (-\infty<x,y,z<+\infty), \\ u_t(x,y,z,0)=e^{\frac{cz}{a}}\psi(x,y) & (-\infty<x,y,z<+\infty), \end{cases}$$

此问题的解为(直接利用三维的解的泊松公式)

$$u(M,t)=u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[t\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint_{S_{at}^M}e^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}S\right] + t\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint_{S_{at}^M}e^{\frac{c\zeta}{a}}\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}S,$$

其中S_{at}^M 是以点M为中心, 半径为at 的球面.

所以原问题的解为

$$v(x,y)=e^{-\frac{cz}{a}}u(x,y,z,t)=e^{-\frac{cz}{a}}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint_{S_{at}^M}e^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}S\right] + t\frac{e^{-\frac{cz}{a}}}{4\pi a^2t^2}\iint_{S_{at}^M}e^{\frac{c\zeta}{a}}\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}S.$$