2.3 初等解析函数

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 8 日

目录

2.3.1 初等单值函数

1. 指数函数

由例 2.3 我们可知, 函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析, 且 $f'(z)=f(z)$. 当把它限制到实轴上时, 即令 $y=0$, 则有 $z=x$, $f(x)=\mathrm{e}^x$. 这说明 $f(z)$ 是实指数函数在复平面上的延拓.

所以对任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 我们定义函数

$$w=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

为复变量 z 的指数函数, 记作 $w=\mathrm{e}^z$.

复指数函数的性质

(1) 实指数函数 e^x 是复指数函数 e^z 在实轴上的限制, 也可以反过来说后者是前者在复平面上的延拓.

复指数函数的性质

(1) 实指数函数 e^x 是复指数函数 e^z 在实轴上的限制, 也可以反过来说后者是前者在复平面上的延拓.

(2) 利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 指数函数 e^z 的表示形式可写为 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, 这里 e^x 是模, y 是辐角. 由 e^z 的模 $\mathrm{e}^x > 0$ 立即可推出 $\mathrm{e}^z \neq 0, z \in \mathbb{C}$. 这一性质是实指数函数 e^x 恒大于零的性质的推广.

复指数函数的性质

(1) 实指数函数 e^x 是复指数函数 e^z 在实轴上的限制, 也可以反过来说后者是前者在复平面上的延拓.

(2) 利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 指数函数 e^z 的表示形式可写为 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, 这里 e^x 是模, y 是辐角. 由 e^z 的模 $\mathrm{e}^x > 0$ 立即可推出 $\mathrm{e}^z \neq 0, z \in \mathbb{C}$. 这一性质是实指数函数 e^x 恒大于零的性质的推广.

(3) e^z 在整个 z 平面上解析, 且 $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$. 这是例 2.3 中证明了的结论.

复指数函数的性质

(1) 实指数函数 e^x 是复指数函数 e^z 在实轴上的限制, 也可以反过来说后者是前者在复平面上的延拓.

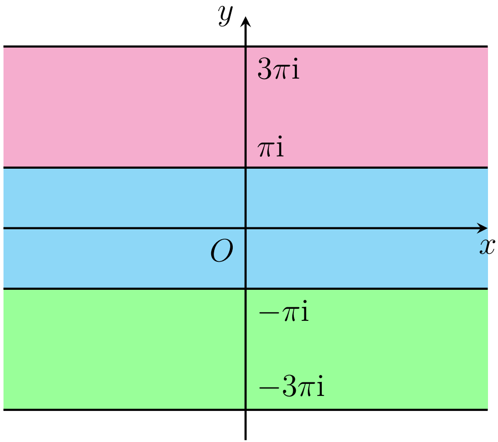
(2) 利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 指数函数 e^z 的表示形式可写为 $e^z = e^x e^{iy}$, 这里 e^x 是模, y 是辐角. 由 e^z 的模 $e^x > 0$ 立即可推出 $e^z \neq 0, z \in \mathbb{C}$. 这一性质是实指数函数 e^x 恒大于零的性质的推广.

(3) e^z 在整个 z 平面上解析, 且 $(e^z)' = e^z$. 这是例 2.3 中证明了的结论.

(4) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. 利用指数函数的定义和指数表示形式下的复数乘法公式 (1.3) 即可证明.

复指数函数的性质

(5) 对任一整数 k, 都有 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}$, 即 e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为（基本）周期的周期函数.



这一点利用定义和实三角正弦和余弦函数的周期性即可推出.

复指数函数的性质

除常数函数外, 一个函数是不能同时为单调函数和周期函数的.

$\boxed{\text{实指数函数 } \mathrm{e}^x \text{ 是单调函数, 为什么复指数函数 } \mathrm{e}^z \text{ 是周期函数呢?}}$

这是否矛盾呢?

复指数函数的性质

除常数函数外，一个函数是不能同时为单调函数和周期函数的.

实指数函数 e^x 是单调函数，为什么复指数函数 e^z 是周期函数呢?

这是否矛盾呢？其实一点也不矛盾. 实指数函数 e^x 的单调性是沿实轴方向表现出来的，而复指数函数 e^z 的周期性是沿着虚轴方向表现出来的. 性质不同只是因为观察的角度不同，正所谓"横看成岭侧成峰".

复指数函数的性质

除常数函数外, 一个函数是不能同时为单调函数和周期函数的.

实指数函数 e^x 是单调函数, 为什么复指数函数 e^z 是周期函数呢?

这是否矛盾呢? 其实一点也不矛盾. 实指数函数 e^x 的单调性是沿实轴方向表现出来的, 而复指数函数 e^z 的周期性是沿着虚轴方向表现出来的. 性质不同只是因为观察的角度不同, 正所谓“横看成岭侧成峰”.

(6) 极限 $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, 因为当 z 沿实轴的正负两个方向趋于 ∞ 时, e^z 分别趋于 ∞ 和 0.

2. 三角函数

由欧拉公式, 我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta.$$

于是可得

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}.$$

2. 三角函数

由欧拉公式, 我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta.$$

于是可得

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}.$$

注意到把这两个公式中的 θ 替换为复数 z 后, 右端仍有意义, 但左端意义不明.

2. 三角函数

由欧拉公式, 我们有

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

于是可得

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

注意到把这两个公式中的 θ 替换为复数 z 后, 右端仍有意义, 但左端意义不明. 这启发我们做出如下的定义:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

分别称 $\sin z$ 和 $\cos z$ 为 z 的正弦函数和余弦函数.

2. 三角函数

由欧拉公式, 我们有

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

于是可得

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

注意到把这两个公式中的 θ 替换为复数 z 后, 右端仍有意义, 但左端意义不明. 这启发我们做出如下的定义:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

分别称 $\sin z$ 和 $\cos z$ 为 z 的正弦函数和余弦函数.

由此又可得 $e^z = \cos z + i\sin z$, 这表明欧拉公式在复数情形下依然成立.

正（余）弦函数的性质

(1) 实正（余）弦函数是复正（余）弦函数在实轴上的限制.

正（余）弦函数的性质

(1) 实正（余）弦函数是复正（余）弦函数在实轴上的限制.

(2) 在 z 平面上解析, 且有

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

正（余）弦函数的性质

(1) 实正（余）弦函数是复正（余）弦函数在实轴上的限制.

(2) 在 z 平面上解析, 且有

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

因为

$$(\sin z)' = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos z.$$

正（余）弦函数的性质

(1) 实正（余）弦函数是复正（余）弦函数在实轴上的限制.

(2) 在 z 平面上解析, 且有

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

因为

$$(\sin z)' = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos z.$$

同理可证另一个.

正（余）弦函数的性质

(1) 实正（余）弦函数是复正（余）弦函数在实轴上的限制.

(2) 在 z 平面上解析, 且有

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

因为

$$(\sin z)' = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos z.$$

同理可证另一个.

(3) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数, 即 $\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$. 利用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义式就可直接验证.

正（余）弦函数的性质

(1) 实正（余）弦函数是复正（余）弦函数在实轴上的限制.

(2) 在 z 平面上解析, 且有

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

因为

$$(\sin z)' = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos z.$$

同理可证另一个.

(3) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数, 即 $\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$. 利用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义式就可直接验证.

(4) $\sin z$ 和 $\cos z$ 是以 2π 为周期的周期函数. 因为指数函数 e^z 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.

正（余）弦函数的性质

(5) 常见的三角公式仍成立, 例如:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

等等.

正（余）弦函数的性质

(5) 常见的三角公式仍成立, 例如:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

等等.

利用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义式直接计算便可验证这些等式成立. 我们仅以其中一个为例给出证明, 其余读者可类似证明.

正（余）弦函数的性质

$$\sin(z_1 + z_2) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2\mathrm{i}}$$

正（余）弦函数的性质

$$\begin{aligned}\sin(z_1+z_2) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2\mathrm{i}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}\end{aligned}$$

正（余）弦函数的性质

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$

正（余）弦函数的性质

$$\begin{aligned}\sin(z_1+z_2) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}} \\ &= \sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.\end{aligned}$$

正（余）弦函数的性质

(6) $\sin z$ 的全部零点为 $z = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

$\cos z$ 的全部零点为 $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

正（余）弦函数的性质

(6) $\sin z$ 的全部零点为 $z = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

$\cos z$ 的全部零点为 $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

事实上, 由方程 $\sin z = 0$, 即

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 0$$

可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}.$$

正（余）弦函数的性质

(6) $\sin z$ 的全部零点为 $z = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

$\cos z$ 的全部零点为 $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

事实上, 由方程 $\sin z = 0$, 即

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 0$$

可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}.$$

由此可知 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 = \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}}$,

正（余）弦函数的性质

(6) $\sin z$ 的全部零点为 $z = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

$\cos z$ 的全部零点为 $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

事实上，由方程 $\sin z = 0$，即

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 0$$

可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}.$$

由此可知 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 = \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}}$，所以 $z = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 是 $\sin z$ 的零点.

同理可推得 $\cos z$ 的零点.

正（余）弦函数的性质

(7) 在复数域里, 不但 $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不再成立, 而且 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在复平面上都是无界的.

正（余）弦函数的性质

(7) 在复数域里，不但 $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不再成立，而且 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在复平面上都是无界的.

例如，取 $z = \mathrm{i}y(y > 0)$，则

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{2} \to +\infty, \ y \to +\infty.$$

正（余）弦函数的性质

(7) 在复数域里，不但 $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不再成立，而且 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在复平面上都是无界的.

例如，取 $z = \mathrm{i}y (y > 0)$，则

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{2} \to +\infty, \ y \to +\infty.$$

如前所述，实三角正（余）弦函数的有界性与复三角正（余）弦函数的无界性也不矛盾. 这只是“横看成岭侧成峰”的又一个例子.

利用 $\sin z, \cos z$ 我们可以如下定义正切函数、余切函数、正割函数和余割函数:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

这些函数都在一定区域内解析, 并且与相对应的实变三角函数有类似的性质. 在这里我们就不展开讨论了.

3. 双曲函数

双曲正弦函数和双曲余弦函数分别定义为

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{2.4}$$

3. 双曲函数

双曲正弦函数和双曲余弦函数分别定义为

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{2.4}$$

它们有如下性质：

(1) 在复平面内解析且 $(\sinh z)' = \cosh z, (\cosh z)' = \sinh z;$

3. 双曲函数

双曲正弦函数和双曲余弦函数分别定义为

$$\sinh z=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2},\quad \cosh z=\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{2.4}$$

它们有如下性质：

(1) 在复平面内解析且 $(\sinh z)'=\cosh z, (\cosh z)'=\sinh z$;

(2) 与三角函数有如下关系

$$\cosh(\mathrm{i}z)=\cos z,\quad \cos(\mathrm{i}z)=\cosh z,$$

$$\sinh(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\sin z,\quad \sin(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\sinh z.$$

由此可利用三角函数的公式导出

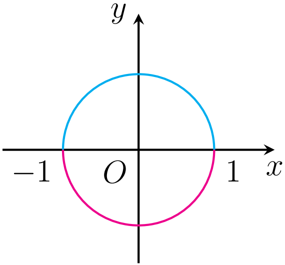
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$
$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \tag{2.5}$$
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.$$

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, \\
\sinh(z_1 + z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \\
\cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

例如

$$
\begin{aligned}
\sinh(z_1 + z_2) &= \sinh[-\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}(z_1 + z_2)] = -\mathrm{i} \sin(\mathrm{i}z_1 + \mathrm{i}z_2) \\
&= -\mathrm{i} \sin(\mathrm{i}z_1) \cos(\mathrm{i}z_2) - \mathrm{i} \cos(\mathrm{i}z_1) \sin(\mathrm{i}z_2) \\
&= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.
\end{aligned}
$$

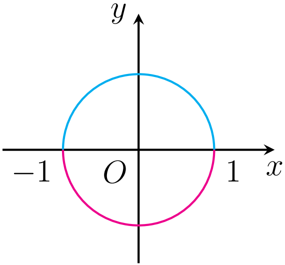
2.3.2 初等多值函数



实多值函数可用单值函数替代, 例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$

2.3.2 初等多值函数



实多值函数可用单值函数替代, 例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$

讨论多值函数的自然思路：将其转化为单值函数.

多值函数的单值分支：从该多值函数中分解出来的单值函数.

多值函数的单值分支有共同的定义域, 分解一个多值函数为单值分支要从观察值域入手.

- 实多值函数分解为单值函数的方法是明确、唯一的;
- 复多值函数分解为单值函数的分法不再是明确、唯一的.

我们要注意学习的是

$\boxed{\text{如何将复多值函数分解为单值函数?}}$

4. 根式函数 $\sqrt[n]{z}$

下面以 $w = \sqrt[3]{z}$ 为例来讲如何把多值函数分解为单值分支的方法.

4. 根式函数 $\sqrt[n]{z}$

下面以 $w=\sqrt[3]{z}$ 为例来讲如何把多值函数分解为单值分支的方法.

对任一复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 都有三个不同的 w 值

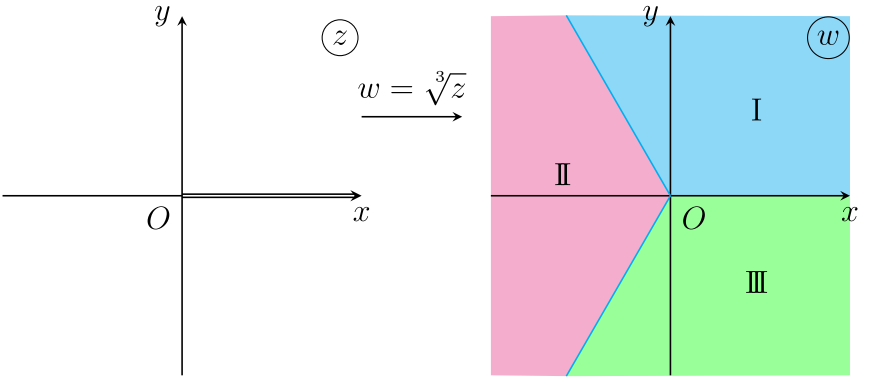
$$w_1=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{3}},\quad w_2=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{3}},\quad w_3=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}.$$

w_1,w_2,w_3 都是 z 的函数, 复平面是它们共同的定义域.

根式函数的多值性的根源在于复数辐角的无穷多值性.

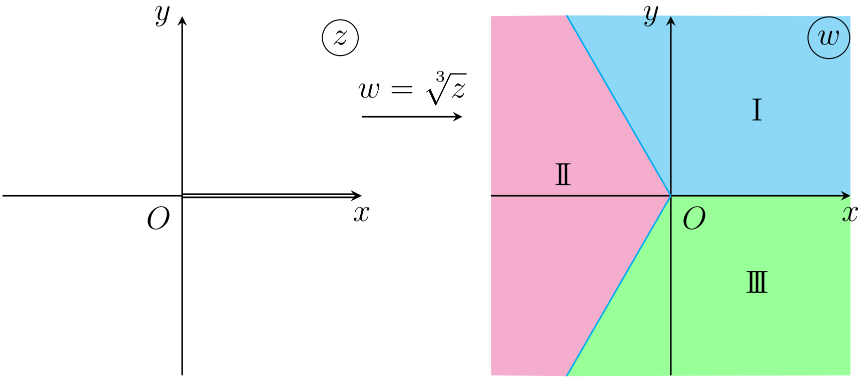
$$w_1 = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{3}}, \quad w_2 = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{3}}, \quad w_3 = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$$

限制辐角 $\theta \in (0, 2\pi)$



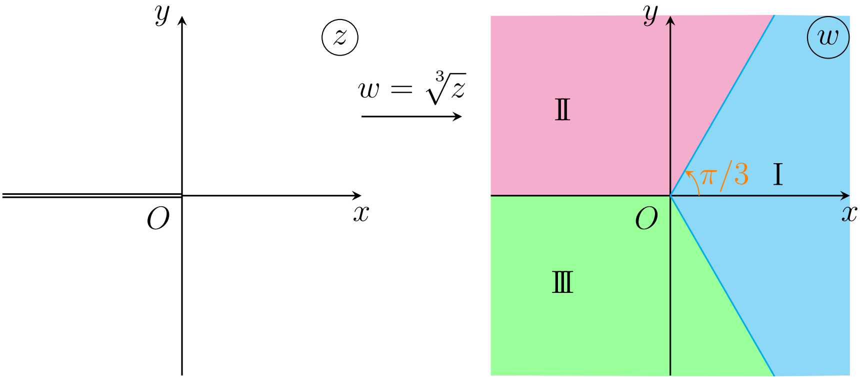
$$w_1 = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{3}}, \quad w_2 = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{3}}, \quad w_3 = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$$

限制辐角 $\theta \in (0, 2\pi)$



称从原点出发的射线为根式函数 $w = \sqrt[3]{z}$ 的支割线.

限制辐角 $\theta \in (-\pi, \pi)$



例 2.7

设 $w = \sqrt[3]{z}$ 在以正实轴为支割线的 z 平面上, 并且 $w(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$, 求 $w(-\mathrm{i}) =?$

解

- 以正实轴为支割线相当于将辐角 θ 的取值范围限制为 $(0, 2\pi)$. 这时先画出三个单值分支的值域分布图.

例 2.7

设 $w=\sqrt[3]{z}$ 在以正实轴为支割线的 z 平面上, 并且 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 求 $w(-\mathrm{i})=?$

解

- 以正实轴为支割线相当于将辐角 θ 的取值范围限制为 $(0,2\pi)$. 这时先画出三个单值分支的值域分布图.
- 由条件 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$ 可知, w 是根式函数 $\sqrt[3]{z}$ 的某一个单值分支. 要想确定 $w(-\mathrm{i})$ 的取值, 需要先确定 w 是根式函数 $\sqrt[3]{z}$ 的哪个单值分支. 仍由 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 可知 w 是根式函数 $\sqrt[3]{z}$ 的第三单值分支 $w_3=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$, 因为函数值 $-\mathrm{i}$ 落在图中的角形区域 III 内.

例 2.7

设 $w=\sqrt[3]{z}$ 在以正实轴为支割线的 z 平面上, 并且 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 求 $w(-\mathrm{i})=?$

解

- 以正实轴为支割线相当于将辐角 θ 的取值范围限制为 $(0,2\pi)$. 这时先画出三个单值分支的值域分布图.
- 由条件 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$ 可知, w 是根式函数 $\sqrt[3]{z}$ 的某一个单值分支. 要想确定 $w(-\mathrm{i})$ 的取值, 需要先确定 w 是根式函数 $\sqrt[3]{z}$ 的哪个单值分支. 仍由 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 可知 w 是根式函数 $\sqrt[3]{z}$ 的第三单值分支 $w_3=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$, 因为函数值 $-\mathrm{i}$ 落在图中的角形区域 III 内.
- 要注意辐角 θ 被限制在 $(0,2\pi)$ 的范围内取值. 所以从 $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$ 中可知

$$r=1,\theta=\frac{3}{2}\pi,\ 于是\ w_3(-\mathrm{i})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

$\blacksquare$

例 2.8

设 $w=\sqrt[3]{z}$ 在以负实轴为支割线的 z 平面上, 并且 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 求 $w(-\mathrm{i})=?$

解

- 以负实轴为支割线意味着辐角 θ 的取值范围为 $(-\pi,\pi)$. 这时画出 $w=\sqrt[3]{z}$ 的三个单值分支的值域分布图.
- 由 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 可知应取第三分支 $w_3=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$, 因为函数值 $-\mathrm{i}$ 落在图中的角形区域 III 内.
- 又由 $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$, 可知 $r=1,\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$w_3(-\mathrm{i})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{6}\pi}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

■

例 2.8

设 $w=\sqrt[3]{z}$ 在以负实轴为支割线的 z 平面上, 并且 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 求 $w(-\mathrm{i})=?$

解

- 以负实轴为支割线意味着辐角 θ 的取值范围为 $(-\pi,\pi)$. 这时画出 $w=\sqrt[3]{z}$ 的三个单值分支的值域分布图.
- 由 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 可知应取第三分支 $w_3=r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$, 因为函数值 $-\mathrm{i}$ 落在图中的角形区域 III 内.
- 又由 $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$, 可知 $r=1,\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$w_3(-\mathrm{i})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{6}\pi}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

■

取 $\theta\in(\pi,3\pi)$ 该如何做?

要想确定应在哪个单值分支上取值, 除了上面的例子中介绍的图解法之外, 还可以利用单值分支的解析表达式. 以例2.8为例, 由 $z=\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ 可知, 要想使 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi/2+2k\pi}{3}}=-\mathrm{i}\,(k=0,1$ 或 $2)$ 成立, 只能取 $k=2$. 这说明应取第三分支.

要想确定应在哪个单值分支上取值, 除了上面的例子中介绍的图解法之外, 还可以利用单值分支的解析表达式. 以例2.8为例, 由 $z=\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ 可知, 要想使 $w(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, 即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi/2+2k\pi}{3}}=-\mathrm{i}\,(k=0,1$ 或 $2)$ 成立, 只能取 $k=2$. 这说明应取第三分支.

从上面的两个例子里我们看到, 都是第三分支却代表着不同的函数. 由此可见不同的分解方法对单值分支的取法有着直接的影响.

一般地, 根式函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 总是可以分解为 n 个单值函数, 它们的解析表达式总是由公式

$$w_{k+1} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

给出.

一般地, 根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 总是可以分解为 n 个单值函数, 它们的解析表达式总是由公式

$$w_{k+1}=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ k=0,1,2,\cdots,n-1$$

给出.

随着支割线（即从原点出发的射线）的取法不同, 将得到不同的单值分支的分解结果.

一般地, 根式函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 总是可以分解为 n 个单值函数, 它们的解析表达式总是由公式

$$w_{k+1} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

给出.

随着支割线（即从原点出发的射线）的取法不同, 将得到不同的单值分支的分解结果.

因为根式函数分解为单值分支的分法有无穷多种, 为今后讨论方便, 我们约定以负实轴为支割线的分法（同主辐角的取法保持一致）为默认的标准分法.

一般地, 根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 总是可以分解为 n 个单值函数, 它们的解析表达式总是由公式

$$w_{k+1}=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ k=0,1,2,\cdots,n-1$$

给出.

随着支割线（即从原点出发的射线）的取法不同, 将得到不同的单值分支的分解结果.

因为根式函数分解为单值分支的分法有无穷多种, 为今后讨论方便, 我们约定以负实轴为支割线的分法（同主辐角的取法保持一致）为默认的标准分法.

在以负实轴为支割线而得到的根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个单值分支中, 我们称第一单值分支为根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的主值支. 它可以表示为

$$(\sqrt[n]{z})_1=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}\ (-\pi<\theta<\pi).$$

当我们把根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的主值支

$$(\sqrt[n]{z})_1 = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} \ (-\pi < \theta < \pi).$$

限制到正实轴上时, 它与实根式函数一致. 这正是我们取这一单值分支为主值支的原因.

当我们把根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的主值支

$$(\sqrt[n]{z})_1 = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} \ (-\pi < \theta < \pi).$$

限制到正实轴上时, 它与实根式函数一致. 这正是我们取这一单值分支为主值支的原因.

今后当我们需要把根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 作为单值函数讨论时, 在没有特别说明的情况下, 默认讨论的是主值支. 因此根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的主值支也记为 $\sqrt[n]{z}$.

当我们把根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的主值支

$$(\sqrt[n]{z})_1 = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} \ (-\pi < \theta < \pi).$$

限制到正实轴上时, 它与实根式函数一致. 这正是我们取这一单值分支为主值支的原因.

今后当我们需要把根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 作为单值函数讨论时, 在没有特别说明的情况下, 默认讨论的是主值支. 因此根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的主值支也记为 $\sqrt[n]{z}$.

今后要根据具体的讨论背景来区分 $\sqrt[n]{z}$ 代表的是多值根式函数还是它的主值支.

最后我们来说明根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的每一单值分支都是解析函数.

最后我们来说明根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 的每一单值分支都是解析函数.

考虑单值分支

$$(\sqrt[n]{z})_{k+1} = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

设 $(\sqrt[n]{z})_{k+1} = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, 则利用欧拉公式可知

$$u(r,\theta) = r^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\theta+2k\pi}{n}, \quad v(r,\theta) = r^{\frac{1}{n}} \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

根据高等数学的知识, $u(r,\theta)$ 和 $v(r,\theta)$ 是处处可微的.

7. 设 $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta), z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 若 $u(r,\theta), v(r,\theta)$ 在 (r,θ) 点是可微的, 并满足极坐标下的 C – R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (r > 0),$$

试证 $f(z)$ 在 z 点是可微的, 并且

$$f'(z) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

读者可验证

$$u(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad v(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

还满足极坐标形式下的 C – R 条件.

读者可验证

$$u(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad v(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

还满足极坐标形式下的 C – R 条件. 于是由上题的结论可知, $(\sqrt[n]{z})_k$ 是解析函数. 而且, 我们可求出 $(\sqrt[n]{z})_{k+1}$ 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sqrt[n]{z})_{k+1}&=\frac{1}{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{i}nr\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(-\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\&=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{nr\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{nr\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\frac{1}{n}\frac{(\sqrt[n]{z})_{k+1}}{z}.\end{aligned}$$

读者可验证

$$u(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad v(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

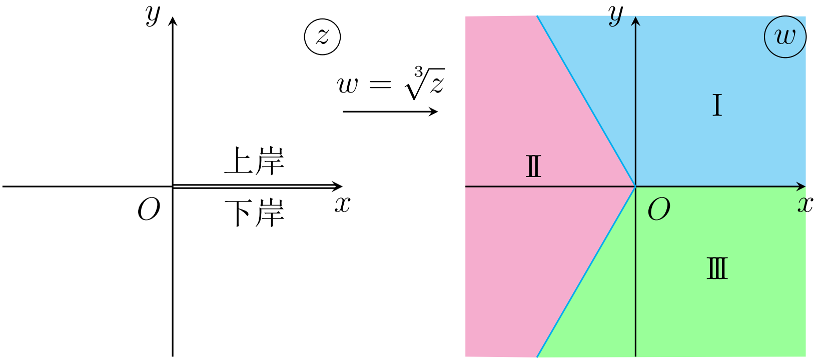
还满足极坐标形式下的 C – R 条件. 于是由上题的结论可知, $(\sqrt[n]{z})_k$ 是解析函数. 而且, 我们可求出 $(\sqrt[n]{z})_{k+1}$ 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sqrt[n]{z})_{k+1}&=\frac{1}{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{i}nre^{\mathrm{i}\theta}}\left(-\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\&=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{nre^{\mathrm{i}\theta}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\frac{r^{\frac{1}{n}}}{nre^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\frac{1}{n}\frac{(\sqrt[n]{z})_{k+1}}{z}.\end{aligned}$$

形式上, 这个公式与实根式函数的求导公式是一致的.

将支割线区分为两岸

$$w_1 = r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{3}}, \quad w_2 = r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{3}}, \quad w_3 = r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{3}}$$



根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 在支割线上不连续，从而不解析.

5. 对数函数

设 $z \neq 0$, 若有复数 w 满足 $z = \mathrm{e}^w$, 则称复数 w 称为复变量 z 的对数函数, 记作 $w = \mathrm{Ln}\, z$.

5. 对数函数

设 $z \neq 0$, 若有复数 w 满足 $z = \mathrm{e}^w$, 则称复数 w 称为复变量 z 的对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

为导出对数函数的解析表达式, 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, w = u + \mathrm{i}v$, 则

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z = \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}v}.$$

于是有

$$r = \mathrm{e}^u, \quad \theta = v + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

即

$$u = \ln r = \ln |z|, \quad v = \theta + 2k\pi = \operatorname{Arg} z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

所以

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{2.6}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

例 2.9

设 $a > 0$, 则 $-a = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. 于是

$$\operatorname{Ln}(-a) = \ln a + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$$

例 2.9

设 $a > 0$, 则 $-a = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. 于是

$$\operatorname{Ln}(-a) = \ln a + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

这个例子说明在实数范围内“负数无对数”的说法, 在复数范围内不再成立. 正确的说法应更正为“负数无实对数, 正实数的复对数也是无穷多值的”.

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

例 2.9

设 $a > 0$, 则 $-a = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. 于是

$$\operatorname{Ln}(-a) = \ln a + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

这个例子说明在实数范围内“负数无对数”的说法, 在复数范围内不再成立. 正确的说法应更正为“负数无实对数, 正实数的复对数也是无穷多值的”.

例 2.10

$$\operatorname{Ln}\mathrm{i} = \ln 1 + \mathrm{i}(\pi/2 + 2k\pi) = \mathrm{i}(1/2 + 2k)\pi.$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

显然, 对数函数是无穷多值函数, 它的多值性完全由辐角函数 $\operatorname{Arg} z$ 决定.

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + \mathrm{i}\, \mathrm{Arg}\, z$$

显然, 对数函数是无穷多值函数, 它的多值性完全由辐角函数 $\mathrm{Arg}\, z$ 决定.

有了将根式函数分解为单值分支的经验后, 前面的讨论可照搬过来. 易知从原点出发的每一条射线都决定了将对数函数分解为无穷多个单值分支的一种分法.

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$$

显然, 对数函数是无穷多值函数, 它的多值性完全由辐角函数 $\mathrm{Arg}\, z$ 决定.

有了将根式函数分解为单值分支的经验后, 前面的讨论可照搬过来. 易知从原点出发的每一条射线都决定了将对数函数分解为无穷多个单值分支的一种分法.

称从原点出发的射线为对数函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的支割线.

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

显然, 对数函数是无穷多值函数, 它的多值性完全由辐角函数 $\operatorname{Arg} z$ 决定.

有了将根式函数分解为单值分支的经验后, 前面的讨论可照搬过来. 易知从原点出发的每一条射线都决定了将对数函数分解为无穷多个单值分支的一种分法.

称从原点出发的射线为对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 的支割线.

如前, 取以负实轴为支割线的分法为默认分法. 以负实轴为支割线可以得到对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 的无穷多个单值分支

$$(\ln z)_k = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i},\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{2.7}$$

我们称 $k = 0$ 的单值分支为对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 的主值支, 记作

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z. \tag{2.8}$$

当把对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 的主值支

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$$

限制到正实轴上时，得到的便是实对数函数．这是我们取这一单值分支为主值支的原因．

当把对数函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 的主值支

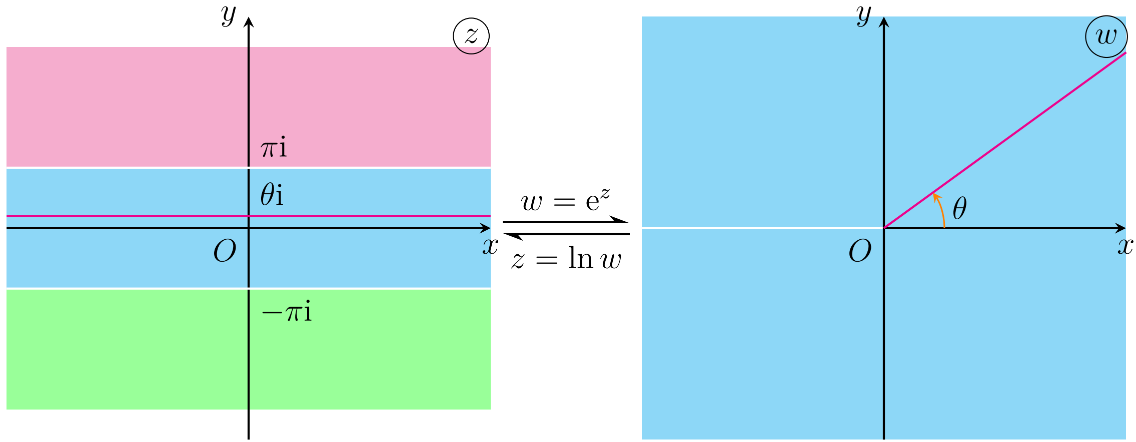
$$\ln z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z$$

限制到正实轴上时，得到的便是实对数函数. 这是我们取这一单值分支为主值支的原因.

例 2.11

求 $\operatorname{Ln} 2$ 的主值.

解　因为 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi\mathrm{i}$, 所以它的主值是 $\ln 2$. ∎



$$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\ (-\infty<x<+\infty)$$

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 有如下的性质:

(1) 利用公式 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$ 可以证明对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 满足如下的运算法则

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

这两个公式是在“集合相等”的意义下成立的.

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 有如下的性质:

(1) 利用公式 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$ 可以证明对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 满足如下的运算法则

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

这两个公式是在“集合相等”的意义下成立的.

我们仅对第一个公式做出证明, 第二个公式可类似证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z_1 z_2)\\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z_1 + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z_2\\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.\end{aligned}$$

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 有如下的性质:

(1) 利用公式 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$ 可以证明对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 满足如下的运算法则

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

这两个公式是在“集合相等”的意义下成立的.

利用上面的第一个公式, 我们有

$$\operatorname{Ln} z^2 = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z.$$

由此是否立即可得 $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z$?

对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 的性质

(2) 由公式 $(\ln z)_k = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z + 2k\pi\mathrm{i}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 给出的单值分支 $(\ln z)_k$ 都是解析的.

对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 的性质

(2) 由公式 $(\ln z)_k = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 给出的单值分支 $(\ln z)_k$ 都是解析的.

事实上, 在区域 $|z| > 0, -\pi < \arg z < \pi$ 内, 主值支 $w = \ln z$ 的反函数 $z = \mathrm{e}^w$ 是单值的. 于是由反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{(\mathrm{e}^w)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^w} = \frac{1}{z}.$$

对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 的性质

(2) 由公式 $(\ln z)_k = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 给出的单值分支 $(\ln z)_k$ 都是解析的.

事实上, 在区域 $|z| > 0, -\pi < \arg z < \pi$ 内, 主值支 $w = \ln z$ 的反函数 $z = \mathrm{e}^w$ 是单值的. 于是由反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{(\mathrm{e}^w)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^w} = \frac{1}{z}.$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}(\ln z)_k}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}.$$

6. 一般幂函数

对任意复数 α, 当 $z \neq 0$ 时, 我们定义一般幂函数为

$$w = z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \tag{2.9}$$

在 α 为正实数的情形, 我们补充规定: 当 $z = 0$ 时, $z^{\alpha} = 0$.

这个定义是实的一般幂函数的定义式

$$x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \ (x > 0, \alpha\text{为实数})$$

在复数域中的推广.

由于 $\operatorname{Ln} z$ 是多值函数, 所以 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ 一般也是多值函数.

由于 $\operatorname{Ln} z$ 是多值函数, 所以 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ 一般也是多值函数.

z^α 的取值情况具体为

(1) 当 α 为整数时, z^α 是单值函数.

(2) 当 α 为一有理数 $\dfrac{m}{n}$（既约分数）时, z^α 为 n 值函数.

(3) 当 α 为无理数或虚数时, z^α 为无穷多值函数.

在第三种情况下, z^α 的多值性完全被对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 决定, 因此 z^α 的单值分支可完全对照对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 来划分, 例如取一般幂函数的主值支为 $\mathrm{e}^{\alpha \ln z}$.

由于 $\mathrm{Ln}\, z$ 是多值函数, 所以 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \,\mathrm{Ln}\, z}$ 一般也是多值函数.

z^α 的取值情况具体为

(1) 当 α 为整数时, z^α 是单值函数.

(2) 当 α 为一有理数 $\dfrac{m}{n}$（既约分数）时, z^α 为 n 值函数.

(3) 当 α 为无理数或虚数时, z^α 为无穷多值函数.

在第三种情况下, z^α 的多值性完全被对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 决定, 因此 z^α 的单值分支可完全对照对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 来划分, 例如取一般幂函数的主值支为 $\mathrm{e}^{\alpha \ln z}$.

当选定 $\mathrm{Ln}\, z$ 的一个单值解析分支 $(\ln z)_k$ 后, 就确定了 z^α 的一个单值解析分支 $(z^\alpha)_k = \mathrm{e}^{\alpha(\ln z)_k}$， 并有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\alpha)_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\alpha(\ln z)_k} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln z)_k} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \frac{\mathrm{e}^{\alpha(\ln z)_k}}{\mathrm{e}^{(\ln z)_k}} = \alpha \mathrm{e}^{(\alpha-1)(\ln z)_k} = \alpha\big(z^{\alpha-1}\big)_k.$$

7. 一般指数函数

设 $a \neq 0, \infty$ 为一复常数, 称

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} a}$$

为一般指数函数.

7. 一般指数函数

设 $a \neq 0, \infty$ 为一复常数, 称

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$$

为一般指数函数. 上面定义式中的 $\mathrm{Ln}\,a$ 决定了一般指数函数是无穷多值的.

7. 一般指数函数

设 $a \neq 0, \infty$ 为一复常数, 称

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$$

为一般指数函数. 上面定义式中的 $\mathrm{Ln}\,a$ 决定了一般指数函数是无穷多值的.

对照一般幂函数的第三种情形, 一般指数函数有无穷多个单值解析分支. 当 $a = \mathrm{e}, \mathrm{Ln}\,\mathrm{e}$ 取主值时, 它便是本节开头定义的单值指数函数 e^z.

7. 一般指数函数

设 $a \neq 0, \infty$ 为一复常数, 称

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$$

为一般指数函数. 上面定义式中的 $\mathrm{Ln}\,a$ 决定了一般指数函数是无穷多值的.

对照一般幂函数的第三种情形, 一般指数函数有无穷多个单值解析分支. 当 $a = \mathrm{e}, \mathrm{Ln}\,\mathrm{e}$ 取主值时, 它便是本节开头定义的单值指数函数 e^z.

例 2.12

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解

7. 一般指数函数

设 $a \neq 0, \infty$ 为一复常数, 称

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$$

为一般指数函数. 上面定义式中的 $\mathrm{Ln}\,a$ 决定了一般指数函数是无穷多值的.

对照一般幂函数的第三种情形, 一般指数函数有无穷多个单值解析分支. 当 $a = \mathrm{e}, \mathrm{Ln}\,\mathrm{e}$ 取主值时, 它便是本节开头定义的单值指数函数 e^z.

例 2.12

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解 $1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = \mathrm{e}^{2\sqrt{2}k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi)\ (k = 0, \pm 1 \pm 2, \cdots)$,

7. 一般指数函数

设 $a \neq 0, \infty$ 为一复常数, 称

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z \,\mathrm{Ln}\, a}$$

为一般指数函数. 上面定义式中的 $\mathrm{Ln}\, a$ 决定了一般指数函数是无穷多值的.

对照一般幂函数的第三种情形, 一般指数函数有无穷多个单值解析分支. 当 $a = \mathrm{e}, \mathrm{Ln}\, \mathrm{e}$ 取主值时, 它便是本节开头定义的单值指数函数 e^z.

例 2.12

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解 $1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\, 1} = \mathrm{e}^{2\sqrt{2}k\pi\mathrm{i}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi)\ (k = 0, \pm 1 \pm 2, \cdots)$,

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}\ (k = 0, \pm 1 \pm 2, \cdots).$$

■

8. 反三角函数

见教材. 感兴趣的同学自学.

2.3.3 支点和支割线

前面我们将多值函数分解为单值分支, 都是通过观察所讨论的多值函数的解析表达式便可将其分解. 但当我们面对比较复杂的多值函数, 例如 $w=\sqrt{z(1-z)}$, 不再能从它们的解析表达式得到单值分支的解析表达式时, 我们就需要发展一般的方法了.

2.3.3 支点和支割线

前面我们将多值函数分解为单值分支，都是通过观察所讨论的多值函数的解析表达式便可将其分解. 但当我们面对比较复杂的多值函数，例如 $w = \sqrt{z(1-z)}$，不再能从它们的解析表达式得到单值分支的解析表达式时，我们就需要发展一般的方法了.

若多值函数 $F(z)$ 在点 z_0（可以为无穷远点）的一个空心邻域内有定义. 在 z_0 的一个充分小的空心邻域内，任取一条环绕 z_0 的简单闭曲线 C. 取定一点 $z_1 \in C$ 和多值函数 $F(z)$ 在点 z_1 上的一个值. 让动点 z 从 z_1 出发，按某一方向沿 C 绕行，同时使 $F(z)$ 的值连续地变化. 当 z 绕行一周回到 z_1 时，若函数 $F(z)$ 的值没变回出发时的值，则称点 z_0 为 $F(z)$ 的一个支点.

2.3.3 支点和支割线

前面我们将多值函数分解为单值分支, 都是通过观察所讨论的多值函数的解析表达式便可将其分解. 但当我们面对比较复杂的多值函数, 例如 $w=\sqrt{z(1-z)}$, 不再能从它们的解析表达式得到单值分支的解析表达式时, 我们就需要发展一般的方法了.

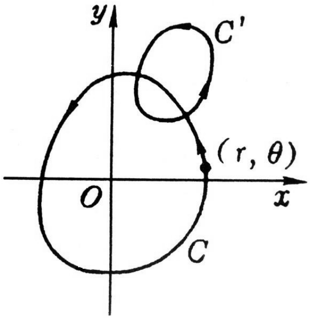
若多值函数 $F(z)$ 在点 z_0（可以为无穷远点）的一个空心邻域内有定义. 在 z_0 的一个充分小的空心邻域内, 任取一条环绕 z_0 的简单闭曲线 C. 取定一点 $z_1\in C$ 和多值函数 $F(z)$ 在点 z_1 上的一个值. 让动点 z 从 z_1 出发, 按某一方向沿 C 绕行, 同时使 $F(z)$ 的值连续地变化. 当 z 绕行一周回到 z_1 时, 若函数 $F(z)$ 的值没变回出发时的值, 则称点 z_0 为 $F(z)$ 的一个支点.

我们称将所有支点依次连接起来的简单连续曲线（可以无界）为支割线.

函数 $w = \sqrt[3]{z}$ 的支点和支割线

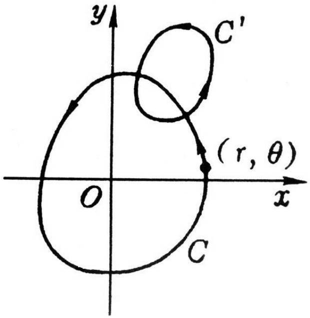
$$w = r^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{3}},\ z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, k = 0, 1, 2.$$

- $z = 0$ 是函数 $w = \sqrt[3]{z}$ 的支点. 因为当 z 沿环绕原点的一条简单闭曲线 C 正向绕行一周后, z 的辐角增加了 2π, 因而函数 $w = \sqrt[3]{z}$ 的取值发生变化.
- $z = \infty$ 也是函数 $w = \sqrt[3]{z}$ 的支点. 取半径充分大的圆周为绕行路径, 同上分析可知.
- 除此之外, 这个函数再没有其它的支点, 因为在 z 平面上动点 z 沿着任一不包含原点在内的简单闭曲线 C' 绕行时, 函数值不会改变.



函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 的支点和支割线

- $z=0$ 是函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 的支点. 因为当 z 沿环绕原点的一条简单闭曲线 C 正向绕行一周后, z 的辐角增加了 2π, 因而函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 的取值发生变化.
- $z=\infty$ 也是函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 的支点. 取半径充分大的圆周为绕行路径, 同上分析可知.
- 除此之外, 这个函数再没有其它的支点, 因为在 z 平面上动点 z 沿着任一不包含原点在内的简单闭曲线 C' 绕行时, 函数值不会改变.



由此可知任一连接支点 $z=0,\infty$ 的无界简单连续曲线都是根式函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 的支割线, 从而任一从原点出发的射线都是根式函数 $w=\sqrt[3]{z}$ 的支割线.

同样可以分析对数函数的支点和支割线.

由 $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{Arg}\, z$ 可知对数函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的支点为 $z = 0, \infty$.

由此可知任一连接支点 $z = 0, \infty$ 的无界简单连续曲线都是对数函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的支割线, 从而任一从原点出发的射线都是对数函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的支割线.

作业

习题二

18. 试解方程

(1) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$;　(2) $\ln z = \dfrac{i\pi}{2}$;

20. 试求 $e^{2+i}, \mathrm{Ln}(1+i), (1+i)^i, 3^i, (-i)^i$.（与原题计算顺序有改动，按现在的顺序写作业）

21. 证明如果函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在点 z_0 解析，且有 $f(z_0) = g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$，则 $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

22. 求证 $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.

23. 讨论函数 $w = \mathrm{e}^z$ 将 z 平面上的带形区域 $0 < y < 2\pi$ 变成 w 平面上的什么图形.

提示：先讨论直线 $y = y_0\,(0 < y_0 < 2\pi)$ 的像曲线.