一　参考系　质点

- 物质的运动具有绝对性

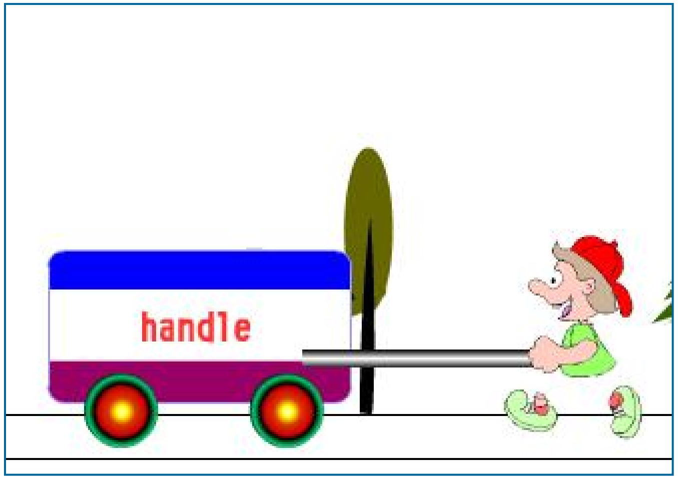
1 参考系

为描述物体的运动而选择的标准物叫做参考系.

- 描述物质运动具有相对性

选取的参考系不同，对物体运动情况的描述不同，这就是运动描述的相对性.

默认：地面参考系



2 质点

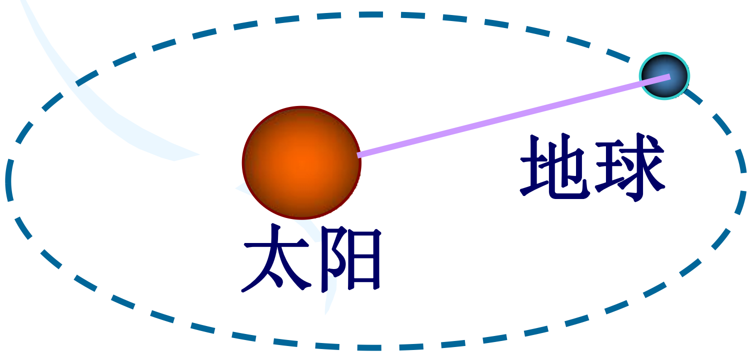
如果我们研究某一物体的运动，而可以忽略其大小和形状对物体运动的影响，若不涉及物体的转动和形变，我们就可以把物体当作是一个具有质量的点（即质点）来处理 .

质点是经过科学抽象而形成的理想化的物理模型 . 目的是为了突出研究对象的主要性质 , 暂不考虑一些次要的因素 .

质点（particle）：具有一定质量的几何点

- 物体能否抽象为质点，视具体情况而定.

物体大小和形状的变化对其运动的影响可忽略时的理想模型.



地—日平均间距：

1.53×10^{8} km

地球半径：

6.373×10^{3} km

两种可以把物体看作质点来处理的情况:

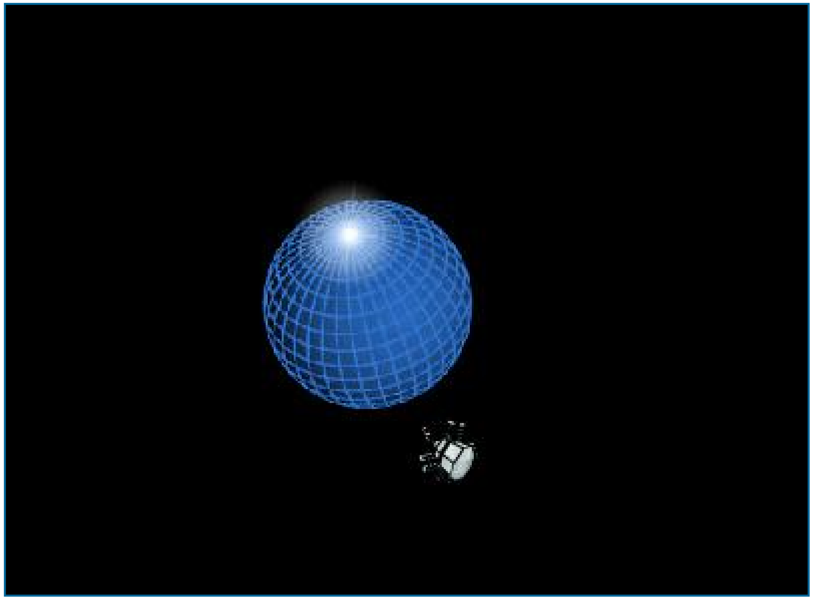
- 两相互作用着的物体，如果它们之间的 距离远大于本身的线度，可以把这两物体看作质点。

- 作平动的物体，可以被看作质点。

注意

- 相对的

- 理想化模型



坐标系（coordinate system）:

用以标定物体的空间位置而设置的坐标系统。

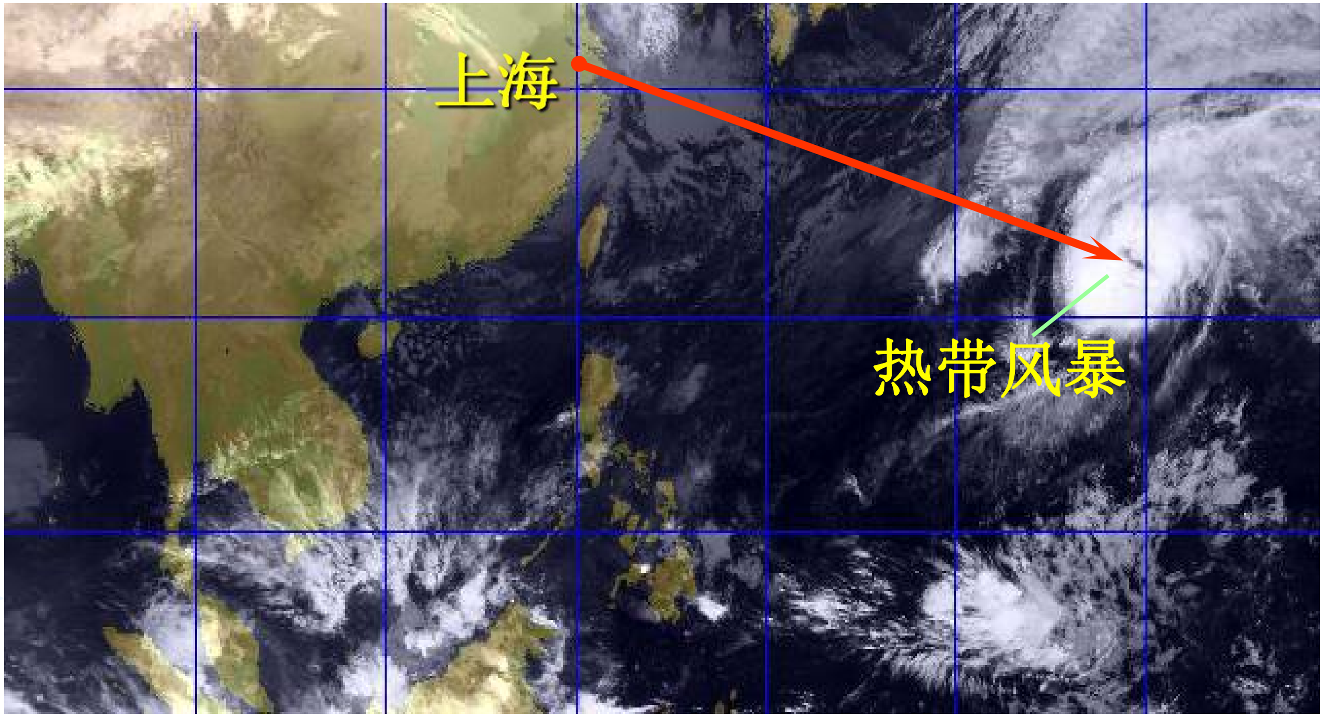
实物构成的参考系的数学抽象。

定量描述物体的运动。

主要坐标

- 直角坐标
- 球坐标
- 柱坐标
- 极坐标
- 自然坐标…

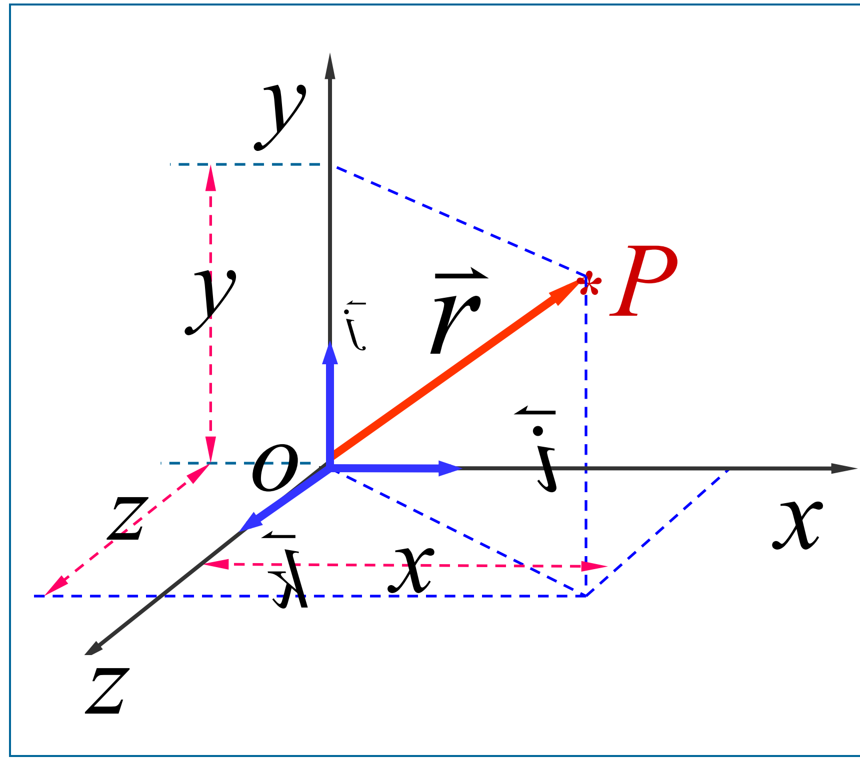
位置矢量与运动方程



二　位置矢量　运动方程　位移

1　位置矢量

确定质点P某一时刻在坐标系里的位置的物理量称位置矢量，简称位矢$\vec{r}$.



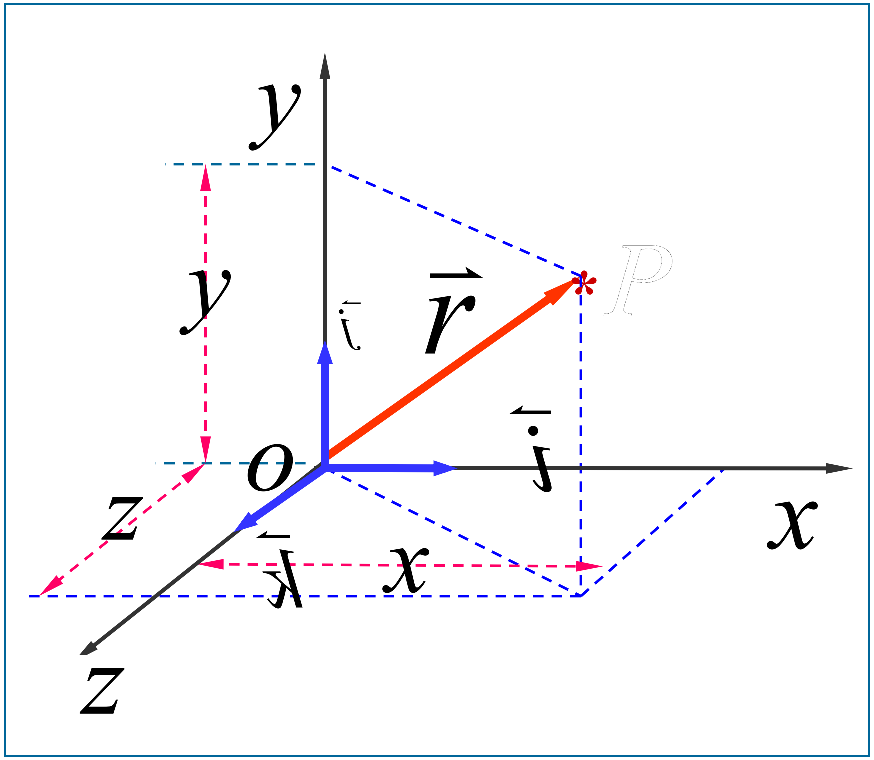
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

式中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别为x、y、z方向的单位矢量.

位矢$\vec{r}$的值为　$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

矢量
- 方向：从原点指向质点
- 大小：质点到坐标原点的距离

$$d=|\vec{r}|=\sqrt{x_{(t)}^{2}+y_{(t)}^{2}+z_{(t)}^{2}}$$



位矢 $\vec{r}$ 的方向余弦

$$\begin{cases}\cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r\end{cases}$$

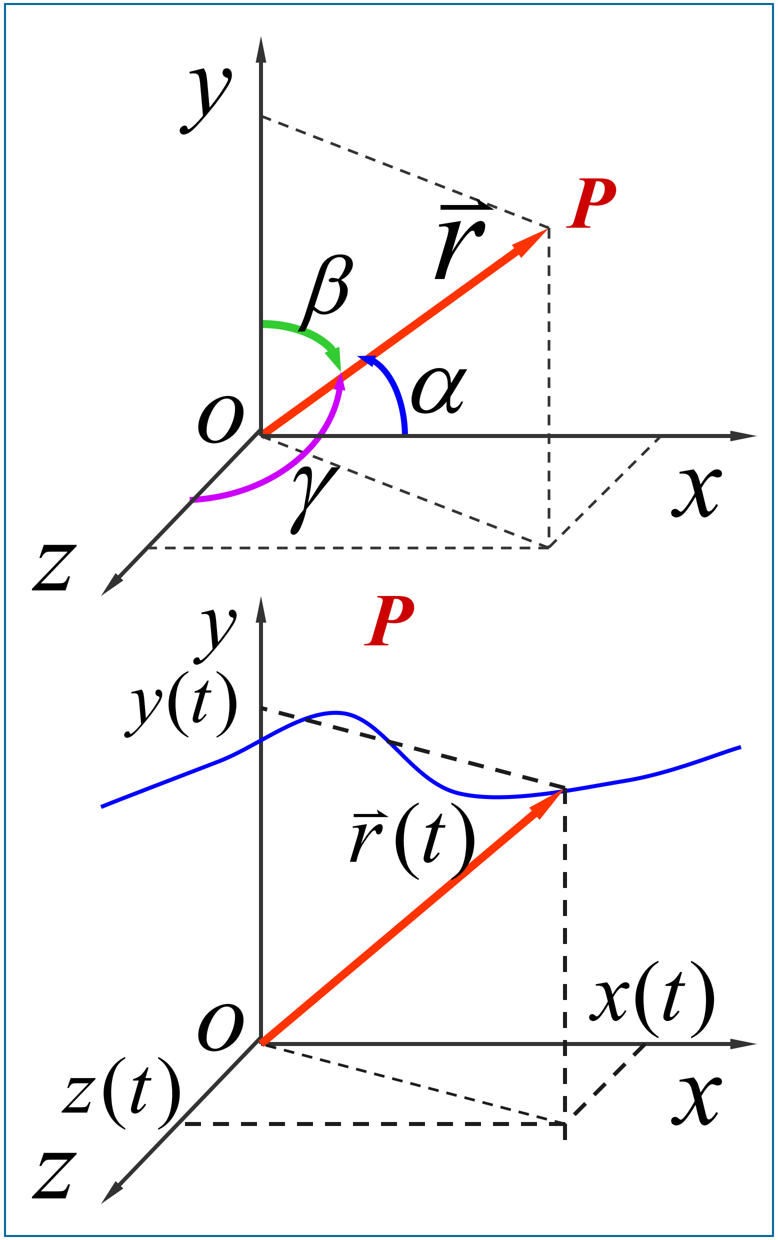
2 运动方程

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

分量式 $\begin{cases}x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)\end{cases}$

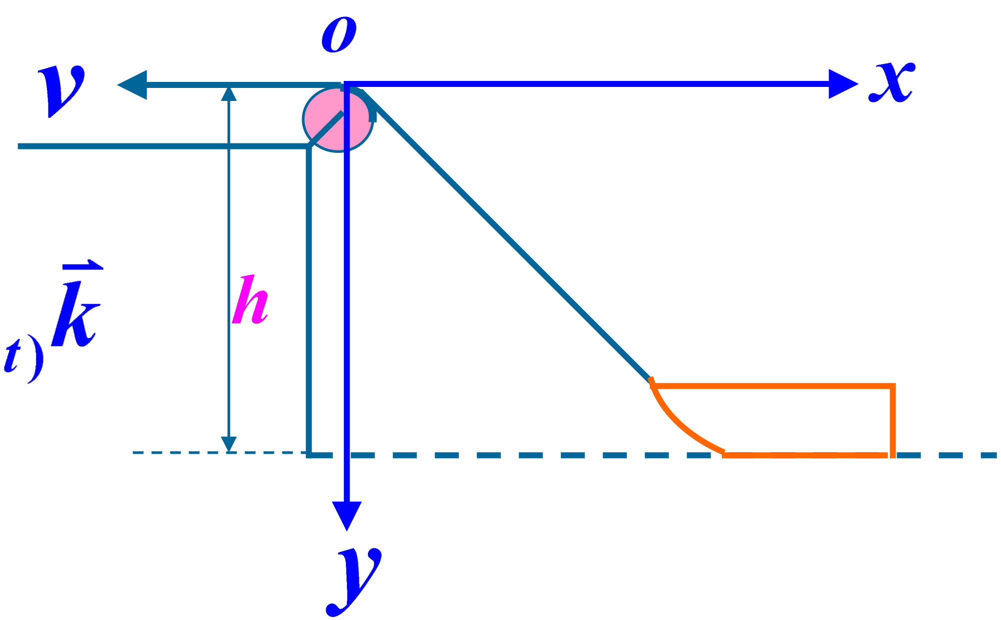
从中消去参数 t 得轨迹方程

$$f(x,y,z) = 0$$



说明：$\vec{r}$矢量性、瞬时性、相对性

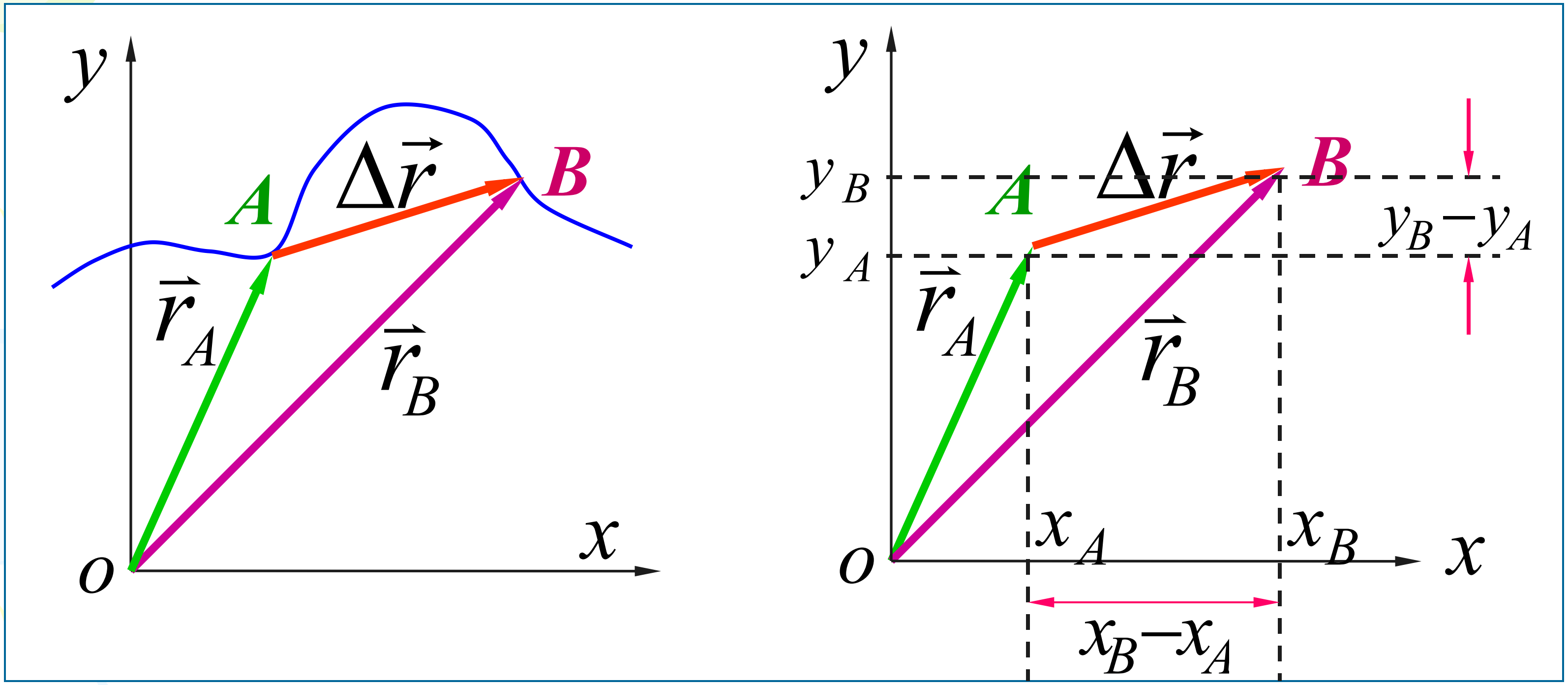
例如：



$$\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j} + z_{(t)}\vec{k}$$

$$= x_{(t)}\vec{i} + h\vec{j}$$

3 位移



经过时间间隔 Δt 后，质点位置矢量发生变化，由始点 A 指向终点 B 的有向线段 AB 称为点 A 到 B 的位移矢量 $\Delta\vec{r}$. 位移矢量也简称位移.

$$\because \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r}$$

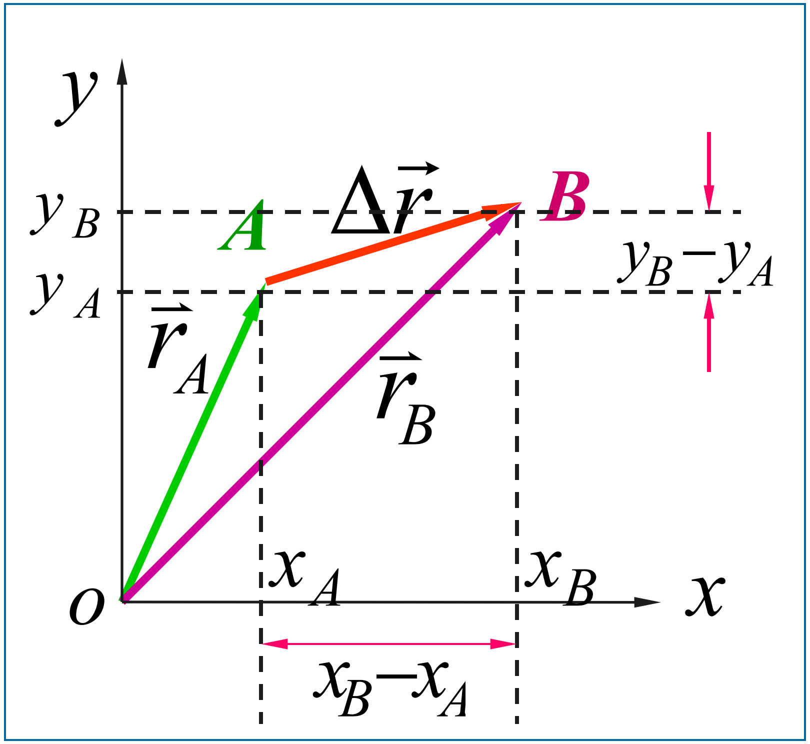
$$\therefore \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

又 $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$

$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$

所以位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



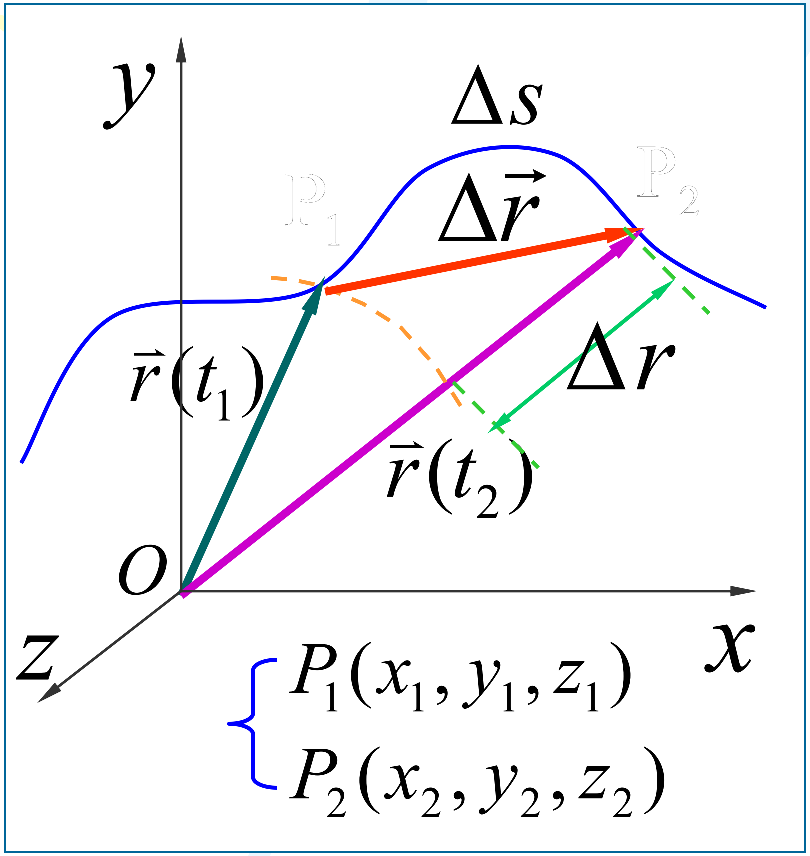
若质点在三维空间中运动，则在直角坐标系 $Oxyz$ 中其位移为

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

位移的大小为 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

4 路程（Δs）：质点实际运动轨迹的长度.

一般 $\left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta S$



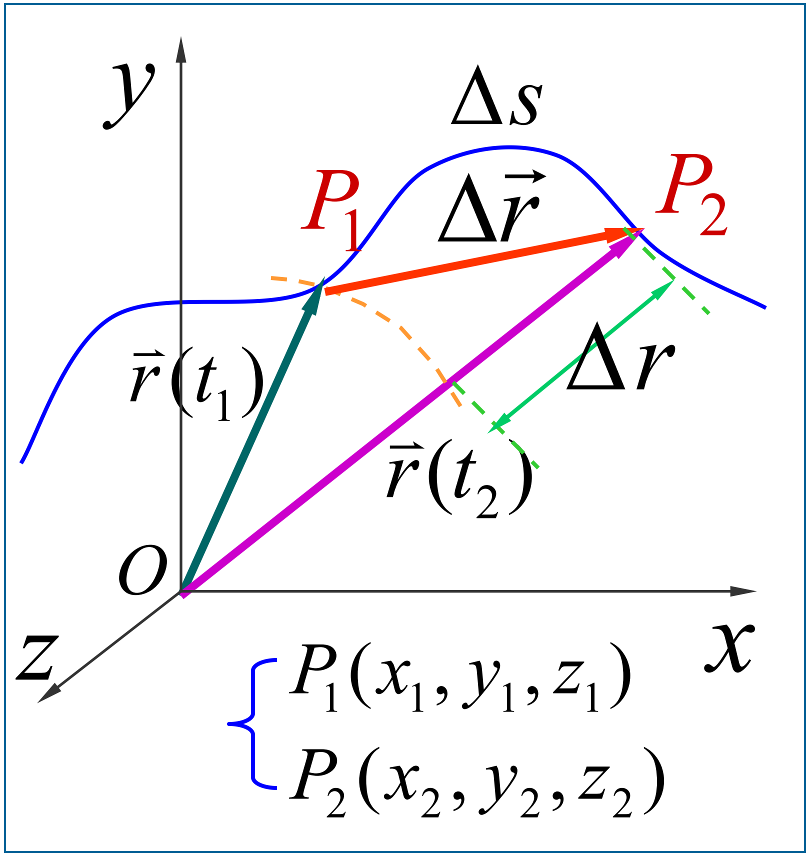
位移的物理意义

A) 确切反映物体在空间位置的变化, 与路径无关, 只决定于质点的始末位置.

B） 反映了运动的矢量性和叠加性.

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$



注意

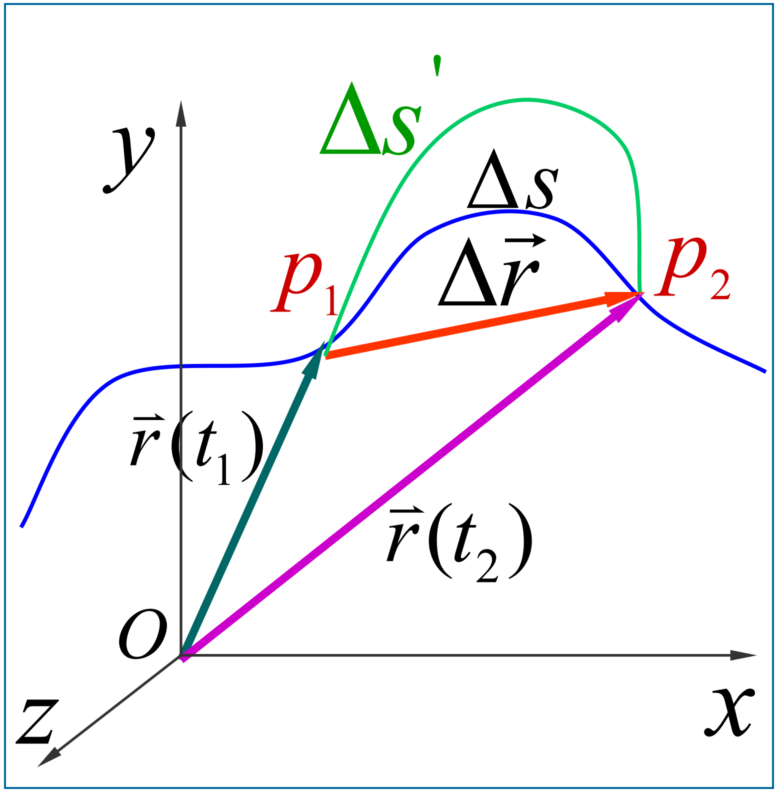
$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta r$$

位矢长度的变化

$$\Delta r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

讨论　位移与路程

（**A**）P_1P_2 两点间的路程是不唯一的，可以是Δs或 $\Delta s'$ 而位移$\Delta\vec{r}$是唯一的.



（**B**） 一般情况，位移大小不等于路程. $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$

（**C**）什么情况 $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$？

不改变方向的直线运动；当 $\Delta t \to 0$ 时 $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$.

（**D**）位移是矢量，路程是标量.

注意

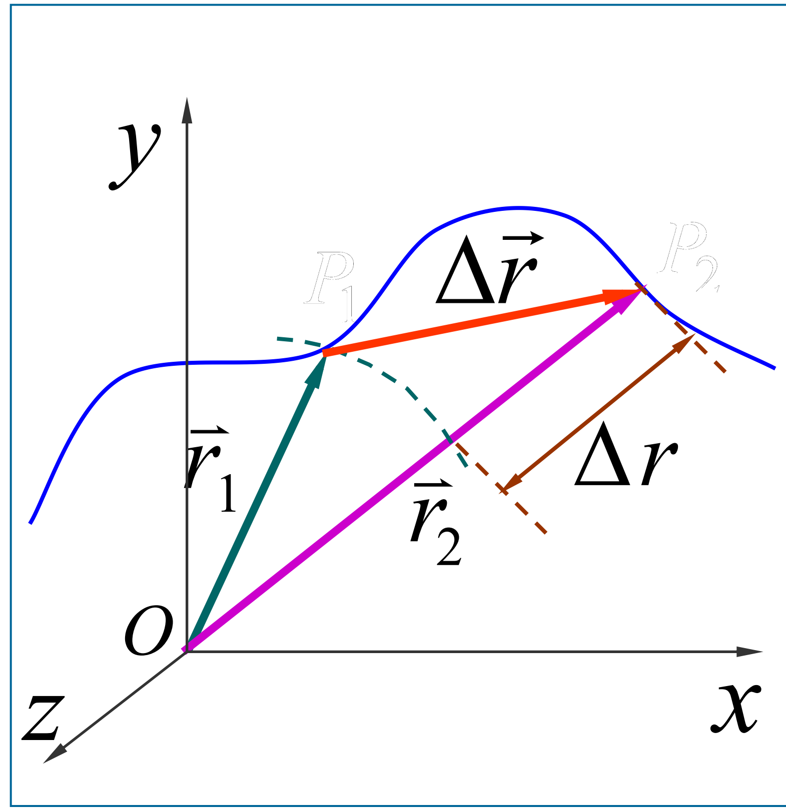
$\Delta\vec{r},\ \left|\Delta\vec{r}\right|,\ \Delta r$

的意义不同.

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

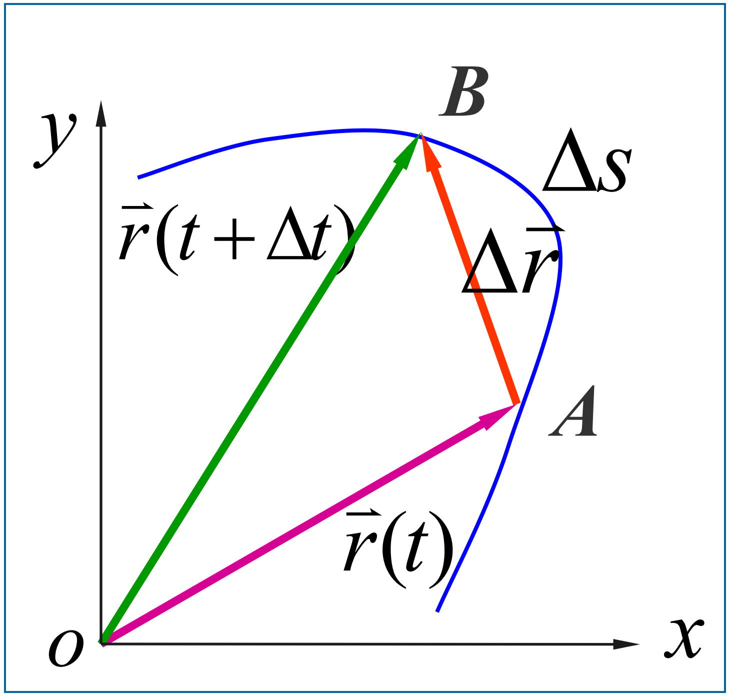
$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\Delta r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$



三　速度

1　平均速度



在Δt时间内，质点从点 A 运动到点 B，其位移为

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

Δt时间内，质点的平均速度

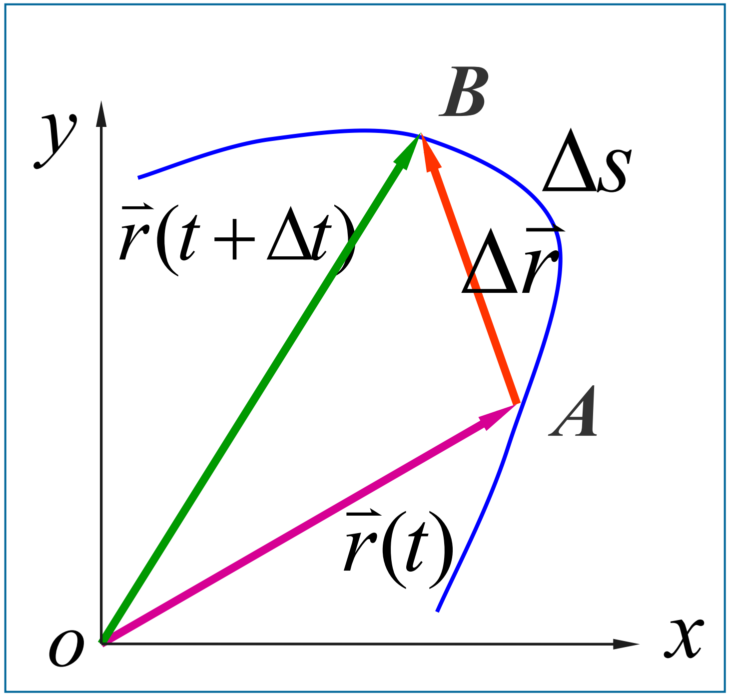
$$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

或　$\overline{\vec{v}}=\overline{v}_x\vec{i}+\overline{v}_y\vec{j}$　　平均速度 $\overline{\vec{v}}$ 与 $\Delta\vec{r}$ 同方向.

平均速度大小　$|\overline{\vec{v}}|=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

平均速度： $\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ **单位：** $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

平均速度的方向与 Δt 时间内位移的方向一致



2 瞬时速度

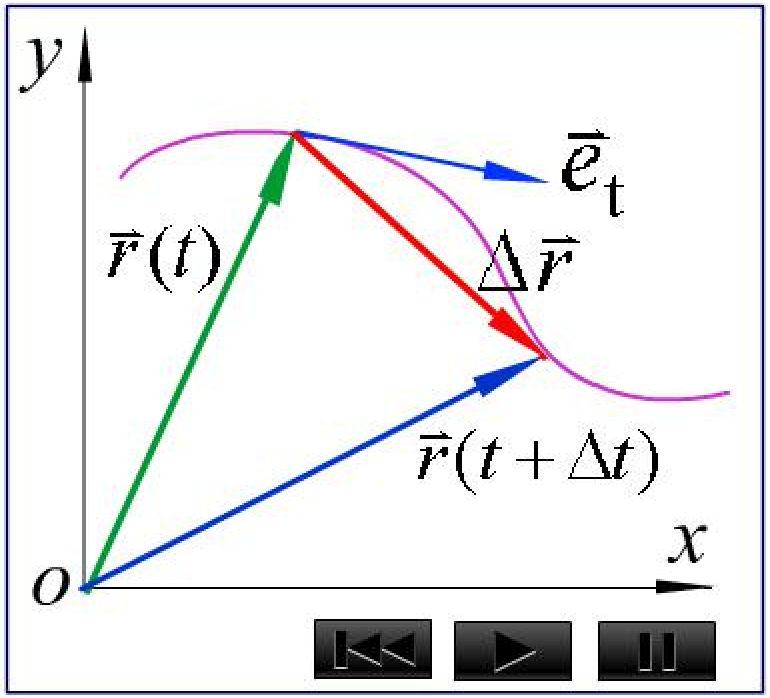
当 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限值叫做瞬时速度，简称速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$

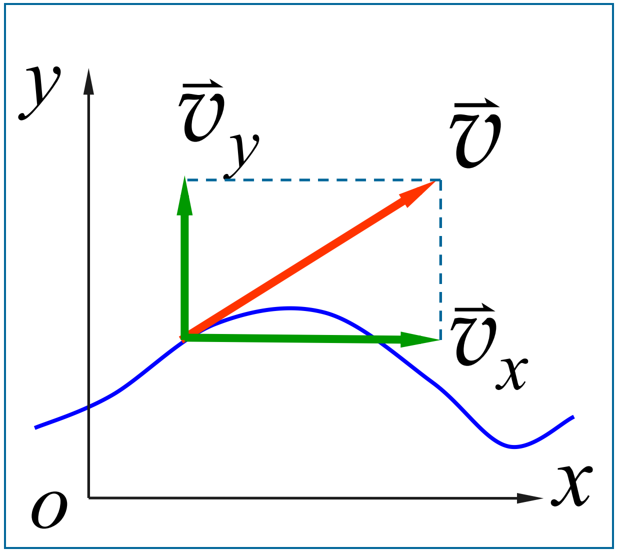
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$



当质点做曲线运动时，质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$



若质点在三维空间中运动，其速度为

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

瞬时速率：速度 $\vec{v}$ 的大小称为速率

$$\because \ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

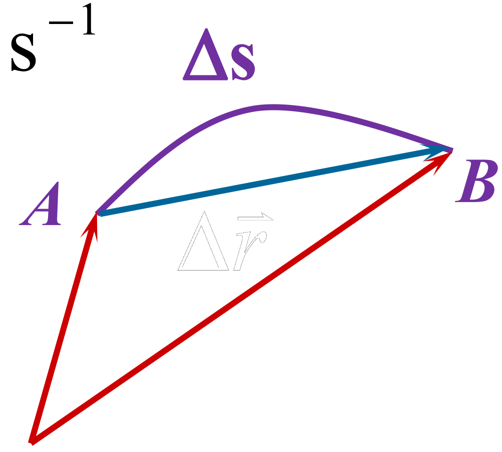
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\therefore \ v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

• 速率

在Δt时间内，质点所经过路程 Δs 对时间的变化率

平均速率： $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 单位： $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$



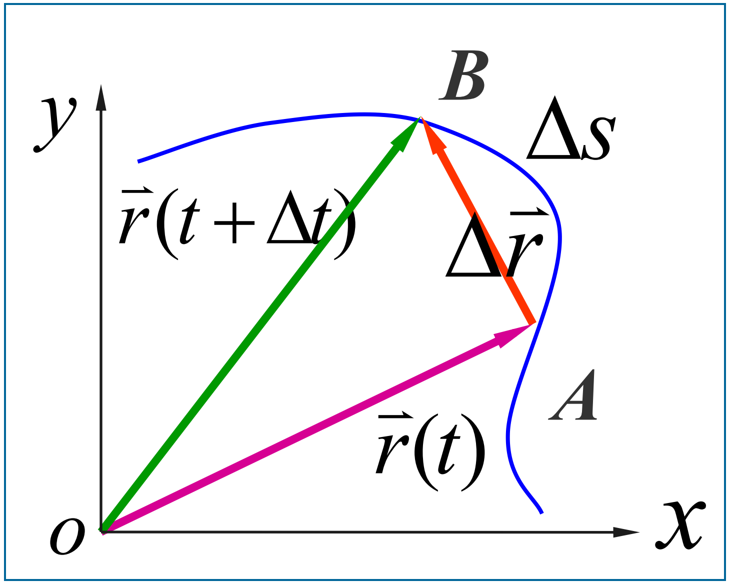
瞬时速率： $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$

一般情况： $\left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta s$ 因 此 $\left|\bar{\vec{v}}\right| \neq \bar{v}$

当$\Delta t \to 0$时： $\left|\Delta \vec{r}\right| \to \left|d \vec{r}\right| = ds$ $\left|\vec{v}\right| = v$

平均速率 $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



讨论

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

（A） $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　（B） $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

$\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$

注意

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

例 1 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=(1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})t+2\mathrm{m}$, $y(t)=(\frac{1}{4}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2+2\mathrm{m}$.（1）求 $t=3\ \mathrm{s}$ 时的速度.（2） 作出质点的运动轨迹图.

解 （1）由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(\frac{1}{2}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t$$

$t=3\ \mathrm{s}$ 时速度为 $\vec{v}=(1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\vec{i}+(1.5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\vec{j}$

速度 $\vec{v}$ 与 x 轴之间的夹角

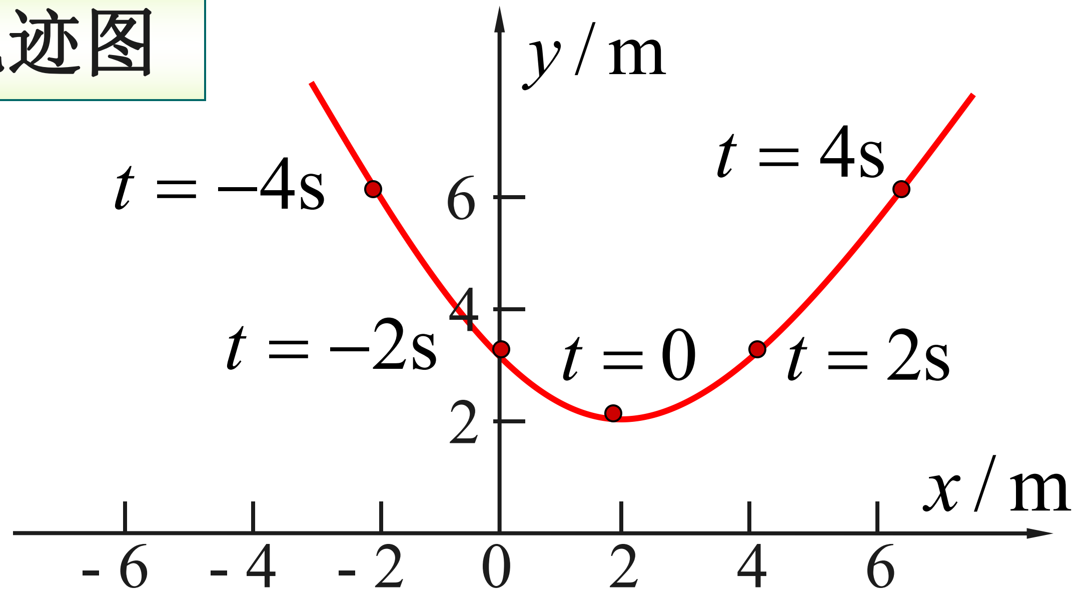
$$\theta=\arctan\frac{1.5}{1}=56.3^\circ$$

（2） 运动方程 $\begin{cases} x(t) = (1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})t + 2\mathrm{m} \\ y(t) = (\frac{1}{4}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2 + 2\mathrm{m} \end{cases}$

由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

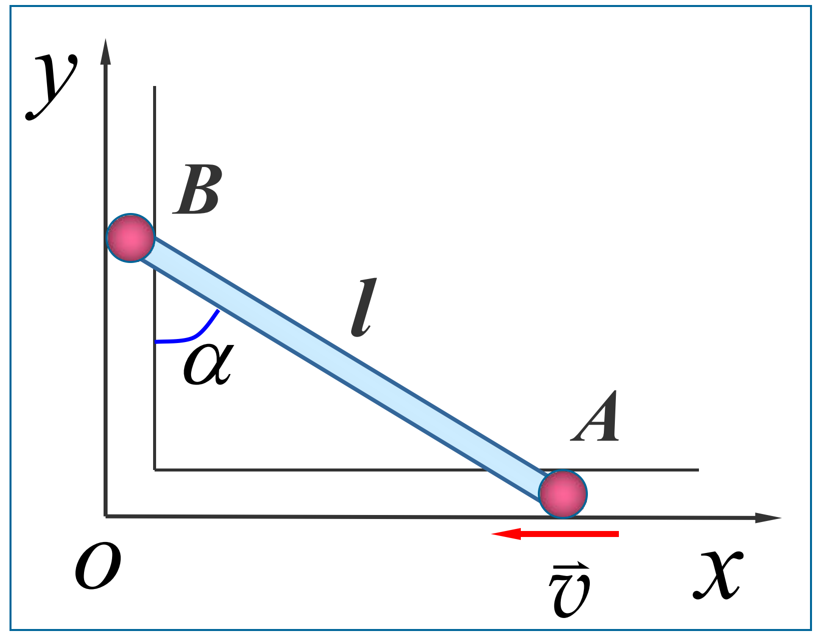
$$y = (\frac{1}{4}\mathrm{m}^{-1})x^2 - x + 3\mathrm{m}$$

轨迹图



例2　如图所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行.如物体 A 以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha=60^{\circ}$ 时，物体 B 的速率为多少？

解　建立坐标系如图，



物体 A 的速度

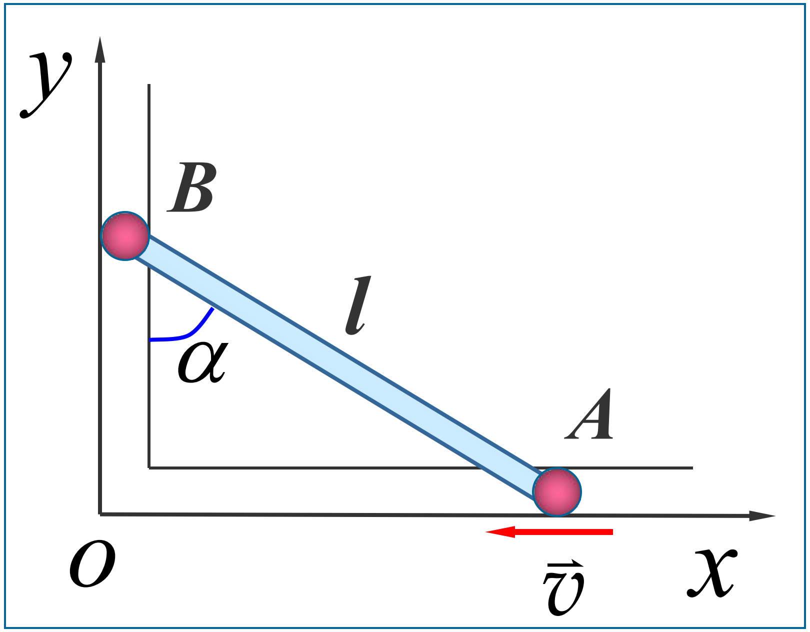
$$\vec{v}_A = v_x \vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体 B 的速度

$$\vec{v}_B = v_y \vec{i} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

OAB 为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$



两边求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ $$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v, \quad \tan\alpha = \frac{x}{y}$$ $$\therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$ 时 $v_B = 1.73v$

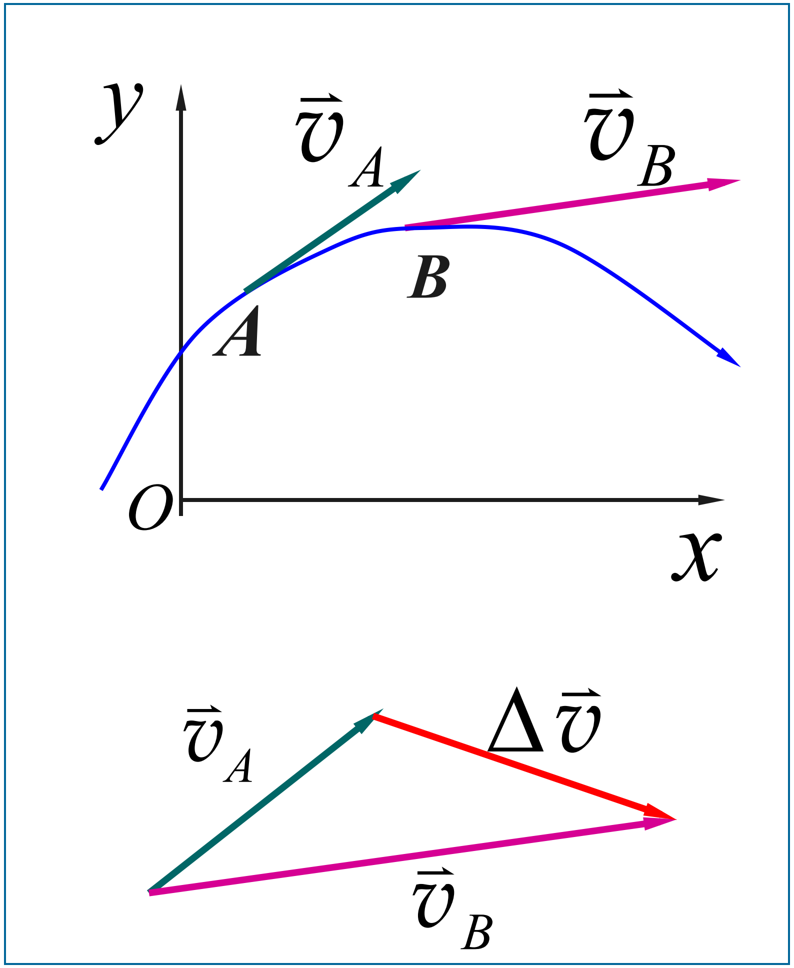
四　加速度（反映速度变化快慢的物理量）

1）平均加速度

单位时间内的速度增量即平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$\bar{\vec{a}}$ 与 $\Delta\vec{v}$ 同方向．



2）（瞬时）加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$

加速度大小 $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

质点作三维运动时加速度为

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

加速度大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

加速度大小 $a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

加速度方向

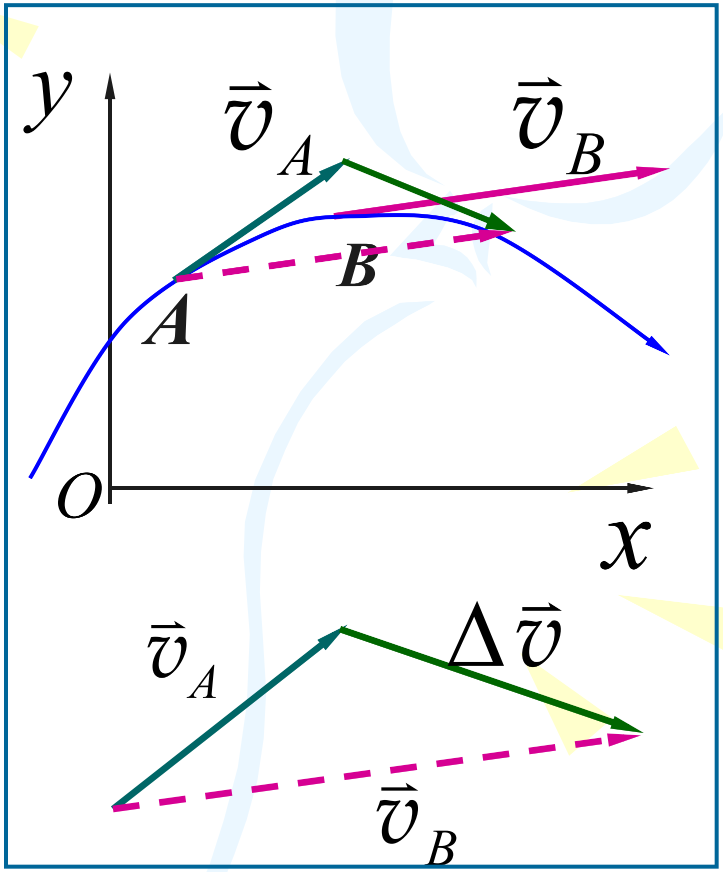
直线运动 $\vec{a} \,//\, \vec{v}$

曲线运动 指向凹侧

说明： 矢量性

瞬时性

相对性



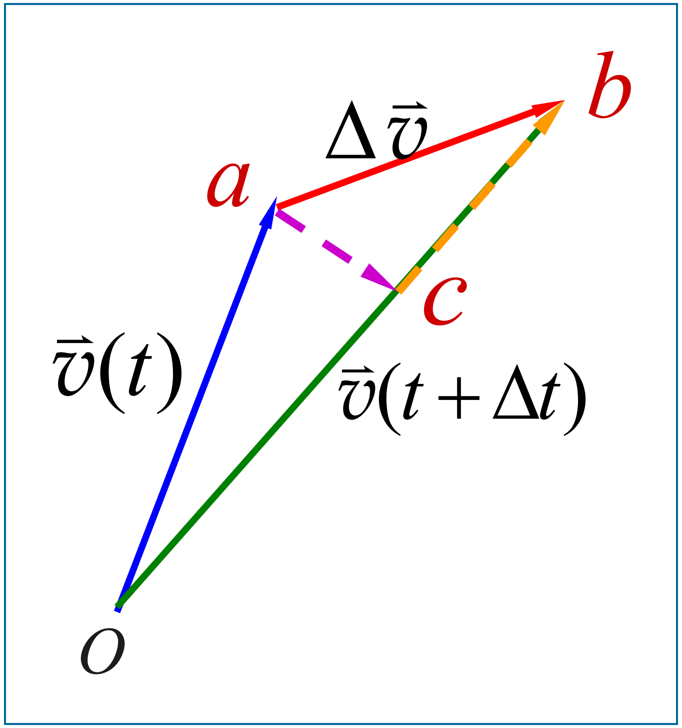
讨论 $\left|\Delta\vec{v}\right| \neq \Delta v$ 吗？

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \left|\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right|$$

在*Ob*上截取 $\overline{oc} = \overline{oa}$

有 $\Delta v = \overline{cb}$



$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$$

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} = ac$ $\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}} = cb$

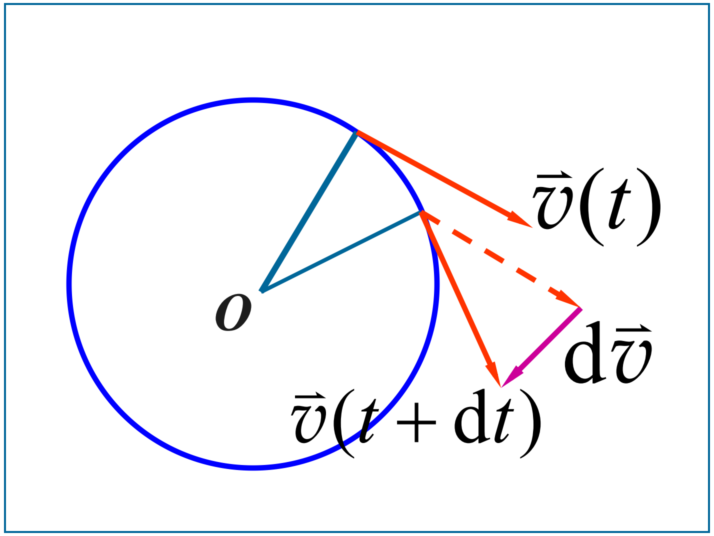
速度方向变化

速度大小变化

讨论

问 $|\vec{a}| = a \cancel{=} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗?

例 匀速率圆周运动



因为 $v(t) = v(t+\mathrm{d}t)$

所以 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0$

而 $|\vec{a}| = a \neq 0$ 所以 $a \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

直线运动

位置矢量： $\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i}$

速度： $\vec{v} = \dfrac{dx_{(t)}}{dt}\vec{i}$

加速度： $\vec{a} = \dfrac{dv_{(t)x}}{dt}\vec{i} = \dfrac{d^2 x_{(t)}}{dt^2}\vec{i}$

质点运动学两类基本问题

一　由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

二　已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，可求质点速度及其运动方程．

$$\vec{r}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

一维运动方程（a=常数）

$$v = v_0 + at \qquad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + at$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

速度与位移的关系

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v$$

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

例 3 设某一质点以初速度 $\vec{v}_0 = 100\vec{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 作直线运动，其加速度为 $\vec{a} = -10v\vec{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。问：质点在停止前运动的路程有多长？

解：

$$a = \frac{dv}{dt} = -10v \qquad \frac{dv}{v} = -10dt$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -10\int_0^t dt \ ,\quad \ln\frac{v}{v_0} = -10t$$

$$v = v_0 e^{-10t}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \ ,\quad dx = vdt = v_0 e^{-10t}dt$$

两边积分：

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-10t} dt$$

$$x = v_0 \left[-\frac{1}{10} \left(e^{-10t} - 1 \right) \right]$$

$$x = 10(1 - e^{-10t})$$

$$x_0 = 10(1 - e^{-10\times 0}) = 10(1-1) = 0$$

$$x_\infty = 10(1 - e^{-10\infty}) = 10(1-0) = 10\text{（m）}$$

$$\Delta x = x_\infty - x_0 = 10 \text{ m}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-10v$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-10 \qquad \mathrm{d}v=-10\mathrm{d}x$$

$$\int_{100}^{0}\mathrm{d}v=-\int_{0}^{x}10\mathrm{d}x$$

$$0-100=-10(x-0)$$

$$x=10\mathrm{m}$$

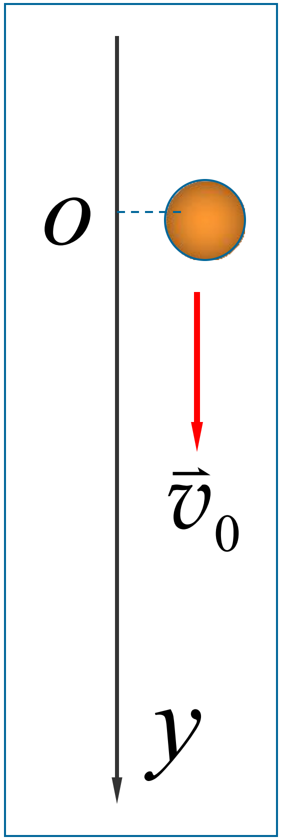
例4 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0=(10\mathrm{m\cdot s^{-1}})\vec{j}$， 它的加速度为 $\vec{a}=(-1.0\mathrm{s^{-1}})v\vec{j}$ 问 （1）经过多少时间后可以认为小球已停止运动，（2）此球体在停止运动前经历的路程有多长？

解：由加速度定义 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(-1.0\mathrm{s^{-1}})v$

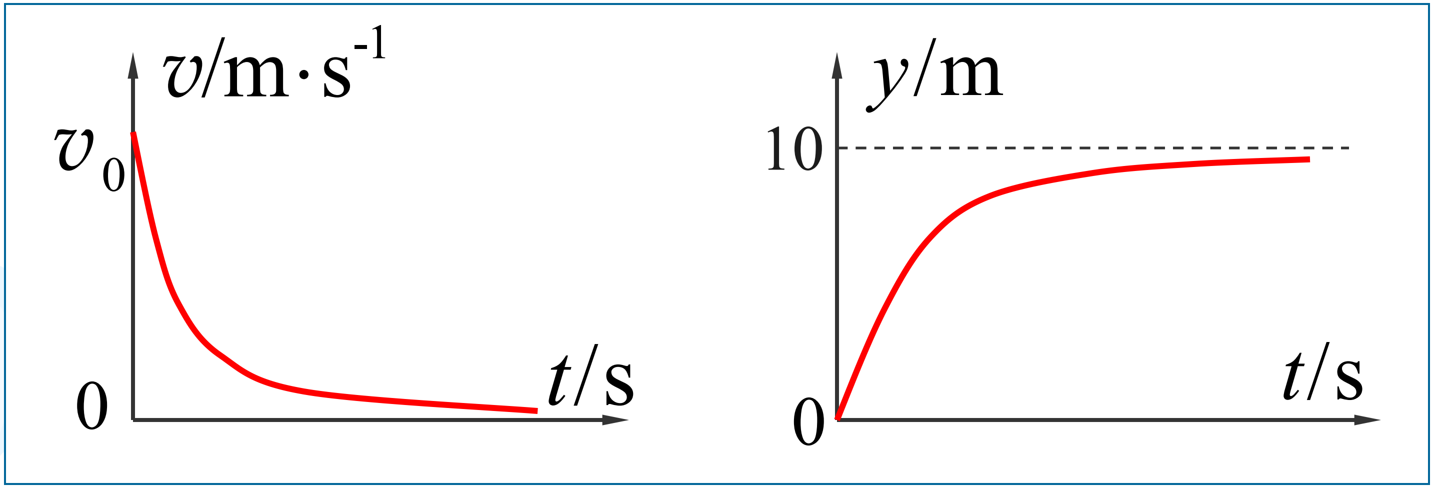
$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=(-1.0\mathrm{s}^{-1})\int_0^{t}\mathrm{d}t,\ v=v_0\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}\qquad\int_0^{y}\mathrm{d}y=v_0\int_0^{t}\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}\mathrm{d}t$$

$$y=10[1-\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}]\mathrm{m}$$



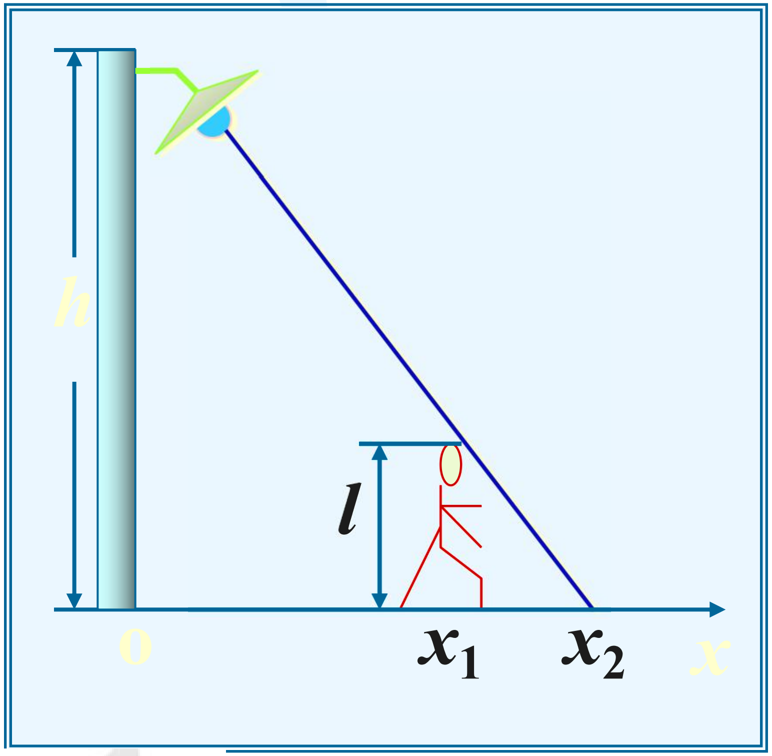
$$v = v_0 e^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t} \qquad y = 10[1 - e^{(-1.0s^{-1})t}]\mathrm{m}$$



v	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1000$	$v_0/10000$
t/s	2.3	4.6	6.9	9.2
y/m	8.9974	9.8995	9.9899	9.9990

$$t = 9.2\mathrm{s}, \quad v \approx 0, \quad y \approx 10\mathrm{m}$$

例 5 路灯距地面高度为h，身高为l的人以速度v_0在路上匀速行走。求：（1）人影头部的移动速度。（2）影长增长的速率。



解：

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{x_2}{h}$$

$$(h-l)x_2 = hx_1$$

两边求导：

$$(h-l)\frac{dx_2}{dt} = h\frac{dx_1}{dt}$$

其中：$\frac{dx_2}{dt} = v$ ， $\frac{dx_1}{dt} = v_0$ 　 $v = \frac{hv_0}{h-1}$

令 $b = x_2 - x_1$ 为影长

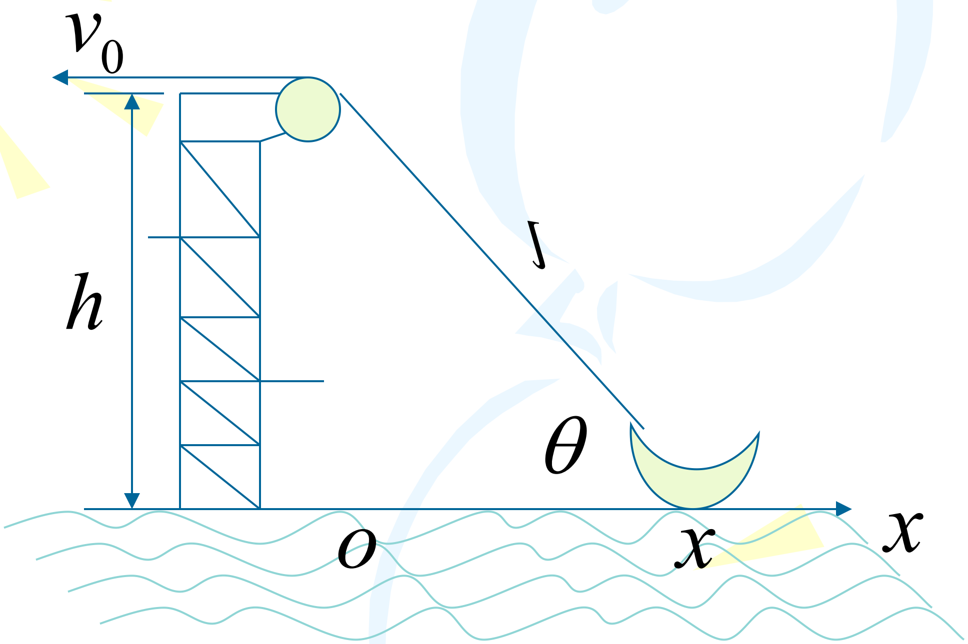
$$b = \frac{l}{h} x_2 \qquad v' = \frac{db}{dt} = \frac{l}{h}\frac{dx_2}{dt}$$

以 $\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{hv_0}{h-l}$ 代入

得: $$v' = \frac{lv_0}{h-l}$$

例6 拉船靠岸

如图所示，绞车以恒定的速率 v_0 收拢系在小船上的不可伸长的绳子，求小船的速度和加速度随 θ 角的变化关系。



解：首先建立运动方程

如图所示.

$$x = \sqrt{l^2 - h^2}$$

而 $$l = l_0 - v_0 t$$

l_0为初时时刻的绳长

船的速度为 $$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}(-v_0)$$

$$= -\frac{v_0}{\cos\theta}$$

小船的加速度为 $$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-\frac{h^2}{\left(l^2-h^2\right)^{3/2}}v_o{}^2=-\frac{v_0{}^2}{h}\tan^3\theta$$

讨论：

小船的速率和加速度随 θ 角的增大而增大，而且加速度和速度方向相同，小船的运动越来越快。