力的时间累积效应 ⇨ 冲量、动量、动量定理.

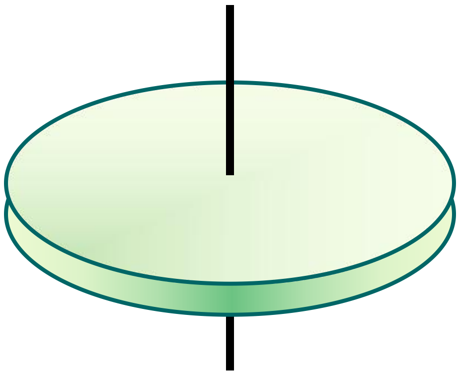
力矩的时间累积效应 ⇨ 冲量矩、角动量、角动量定理.

一 质点的角动量定理和角动量守恒定律

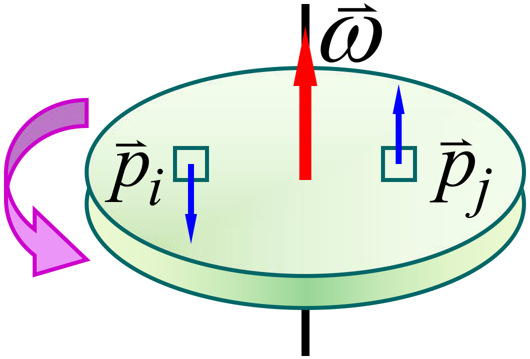
质点运动状态的描述 $\vec{p}=m\vec{v}$ $E_{\mathrm{k}}=mv^2/2$

刚体定轴转动运动状态的描述 $\vec{L}=J\vec{\omega}$ $E_{\mathrm{k}}=J\omega^2/2$

$\vec{\omega}=0,\ \vec{p}=0$



$\vec{\omega}\neq 0,\ \vec{p}=0$



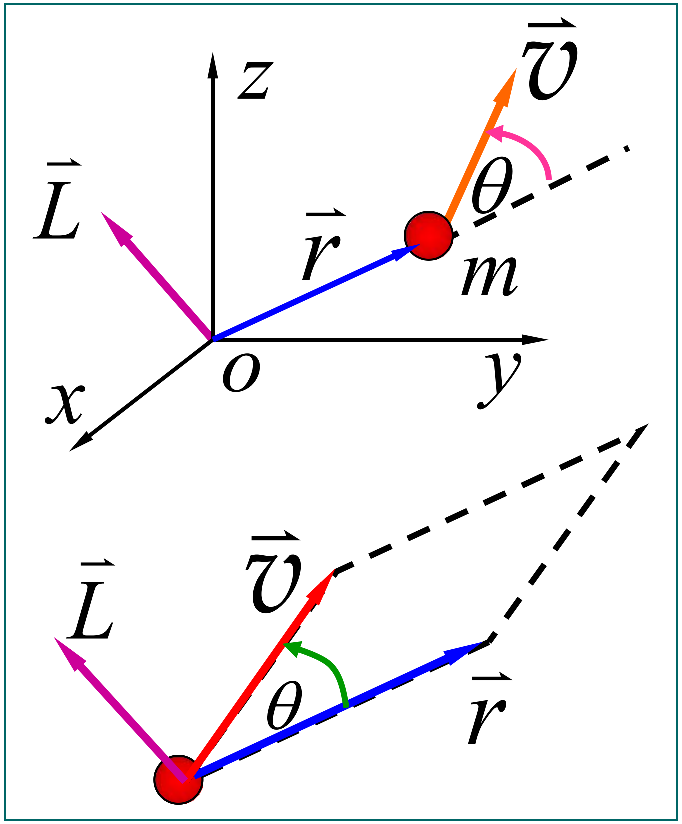
1 质点的角动量

质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 o 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

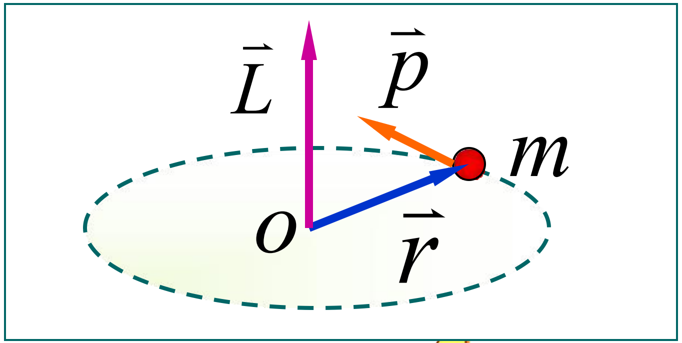
大小 $L=rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.

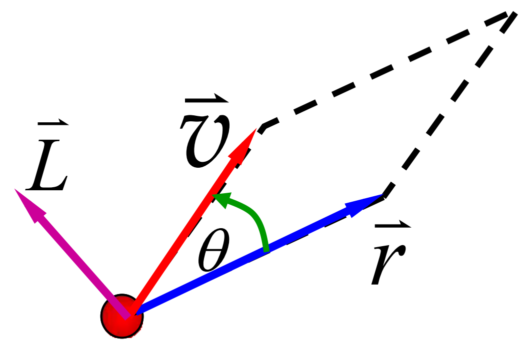


质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

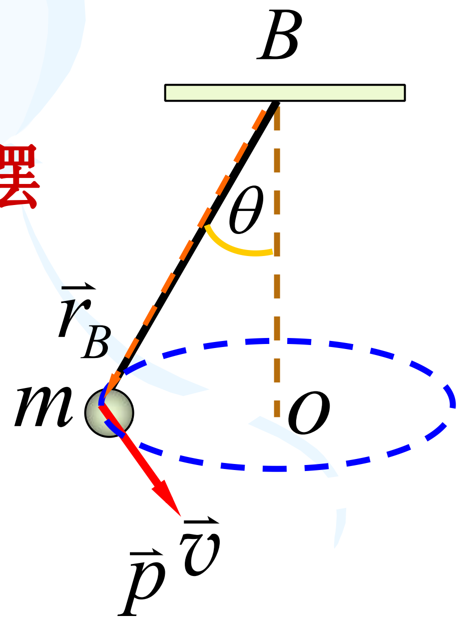
$$L=mr^{2}\omega=J\omega$$



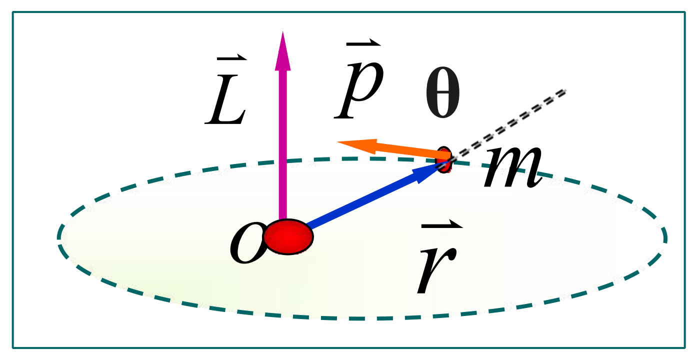
$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p} \qquad L = rmv\sin\varphi$$



单摆



太阳系中的行星



说明

- 1). 并非质点作周期性曲线运动才有角动量.
- 2). 质点的角动量是相对于选定的参考点定义的.

$\vec{L}$ 是矢量,是状态量.它与参考系和参考点都有关.

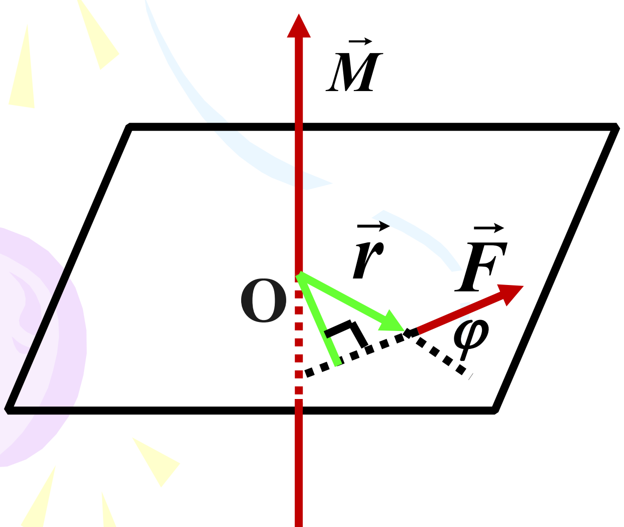
$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}$$

直角坐标系中角动量的分量表示

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases}$$

力矩 $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ $M = Fr\sin\varphi$

单位：牛·米（N · m）



力矩的分量式:

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

2 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F},\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v},\quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

作用于质点的合力对**参考点** O 的力矩，等于质点对该点 O 的**角动量**随时间的**变化率**.

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$ 角动量定理的微分形式

作用在质点上的力矩等于角动量对时间的变化率。

$$\int_{t_0}^{t}\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$ 角动量定理的积分形式

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量.

3 质点的角动量守恒定律

$$\vec{M}=0,\quad \vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$$ 恒矢量

质点所受对参考点 ***O*** 的合力矩为零时，质点对该参考点 ***O*** 的角动量为一恒矢量.

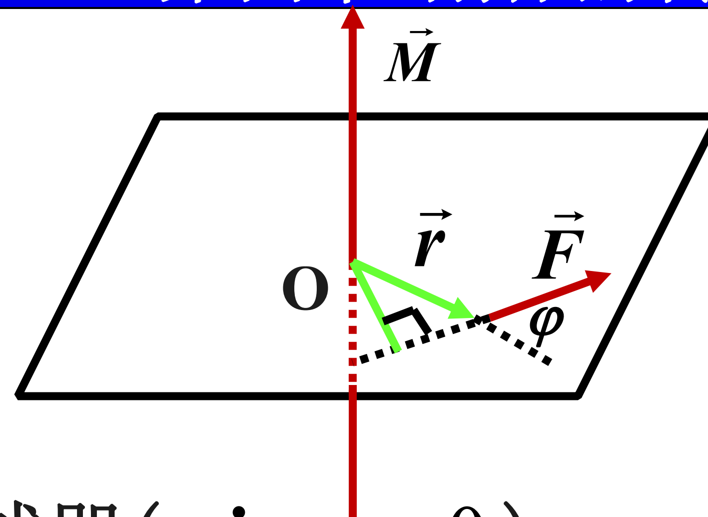
——质点的角动量守恒定律。

1)质点对某点角动量守恒,对另一点不一定不一定守恒

2)角动量守恒,动量不一定守恒

3)普遍规律,适用范围惯性系,宏观,微观都适用.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



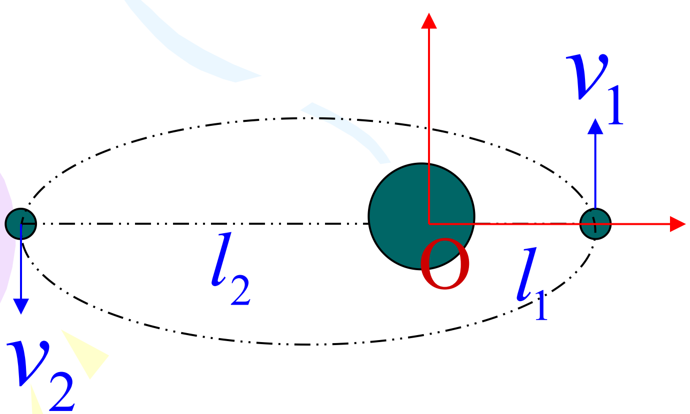
力矩为零的情况：

（1）力 $\vec{F}$ 等于零；

（2）力 $\vec{F}$ 的作用线与矢径 $\vec{r}$ 共线即（ $\sin\varphi = 0$ ）。

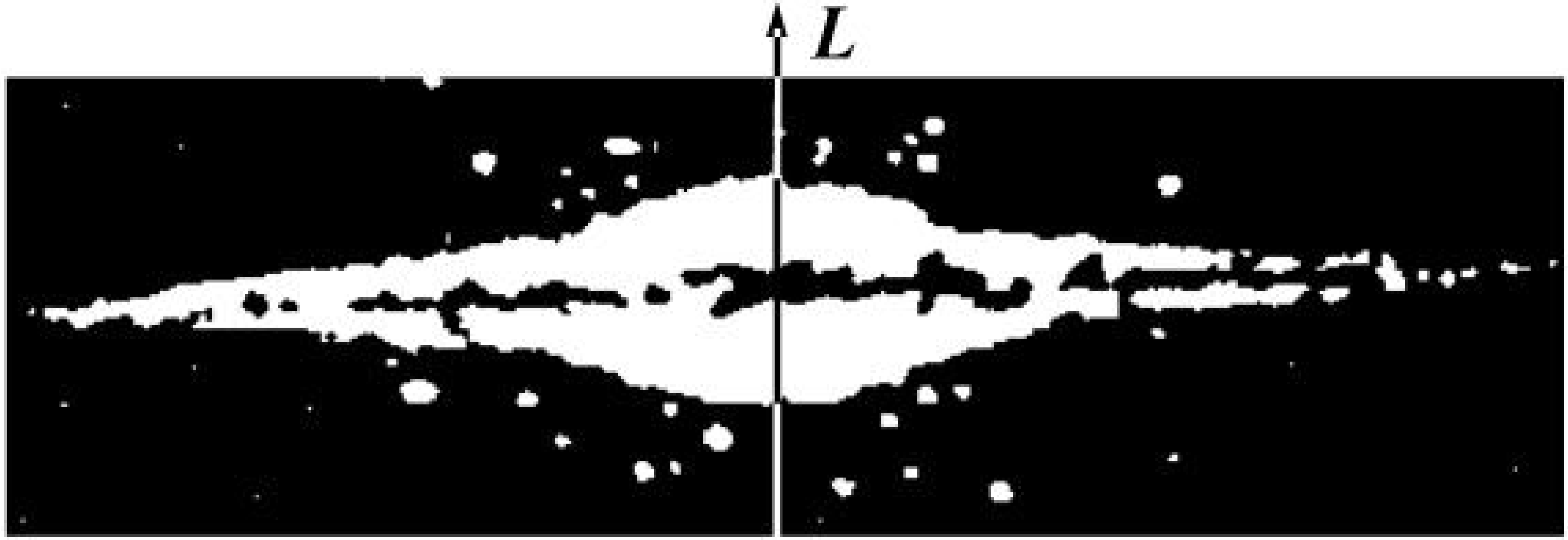
有心力：

物体所受的力始终指向（或背离）某一固定点



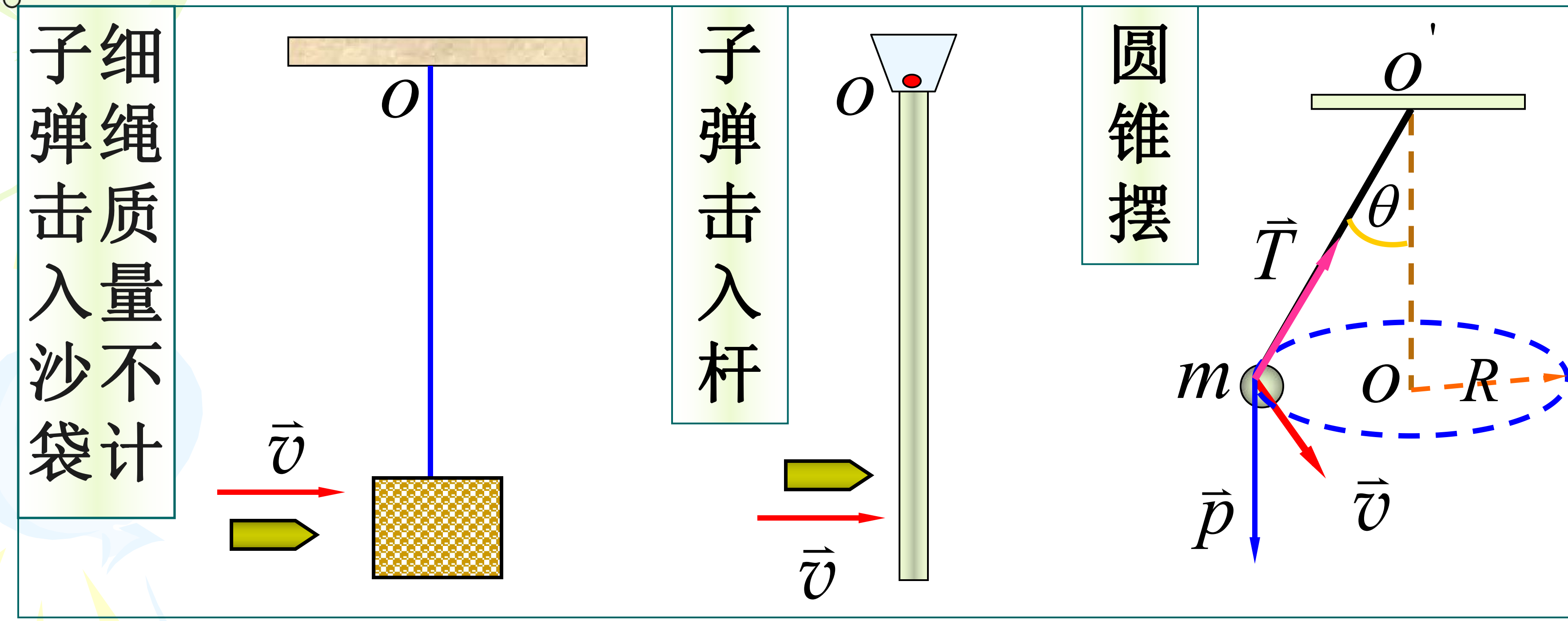
孤立或在有心力作用下的系统角动量守恒。

宇宙中的天体可以认为是孤立体系。它们具有旋转盘状结构，成因是角动量守恒。



球形原始气云具有初始角动量L，在垂直于L方向，引力使气云收缩，角动量守恒，粒子的旋转速度↑，惯性离心力↑，离心力与引力达到平衡，维持一定的半径。但在与L平行的方向无此限制，所以形成了旋转盘状结构。

讨 论



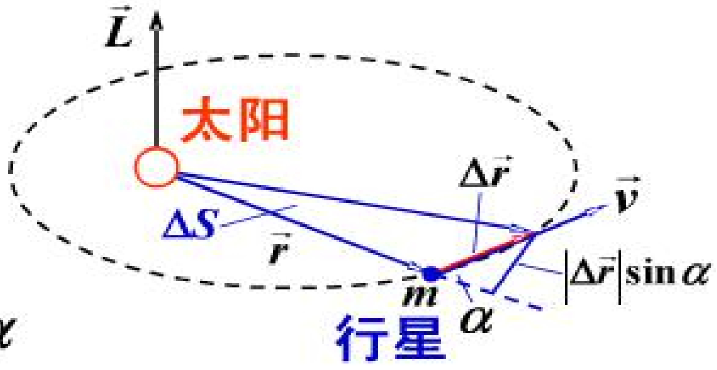
以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	对O点角动量守恒；
机械能不守恒.	机械能不守恒.	机械能守恒.

【例】证明开普勒第二定律：行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。

有心力 $\vec{f}=f(r)\hat{r}\rightarrow$ 力矩为零 $\rightarrow$ 角动量为常矢量

角动量方向不变：行星轨道平面方位不变

角动量大小不变：$\left|\vec{L}\right|=$ 常数



$$\left|\vec{L}\right|=rm\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|\sin\alpha$$

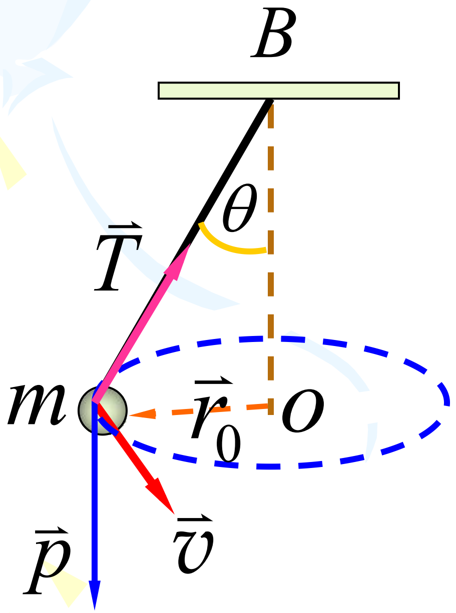
$$=m\frac{r\left|\Delta\vec{r}\right|\sin\alpha}{\Delta t},\quad \Delta S=\frac{1}{2}r\left|\Delta\vec{r}\right|\sin\alpha$$

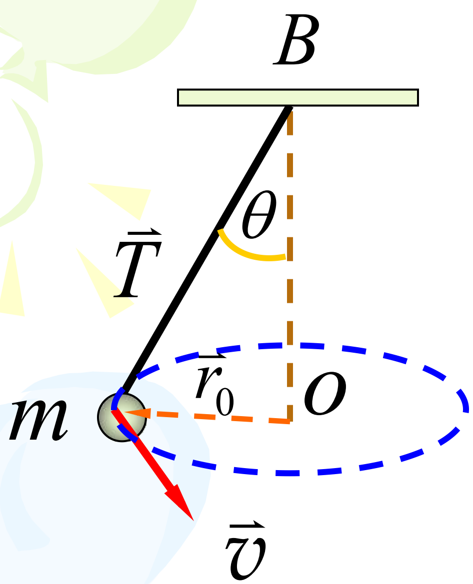
$$=2m\frac{\Delta S}{\Delta t}=\text{常数}$$

所以，面速度 $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=$ 常数。

行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。在近日点转得快，在远日点转得慢。

练习： 一质点m被一长为l的轻线悬于天花板上的B点，质点m在水平面内作匀角速ω的圆周运动，设圆轨道半径为r_o. 计算（1）质点m对圆心O和悬点B的角动量L_o和L_B；（2）作用在质点m上的重力mg和张力T对圆心O和悬点B的力矩M_o和M_B（3）讨论m对O点或B点的角动量是否守恒





由圆心O点向质量m引矢量 $\vec{r}_0$

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{v}$$

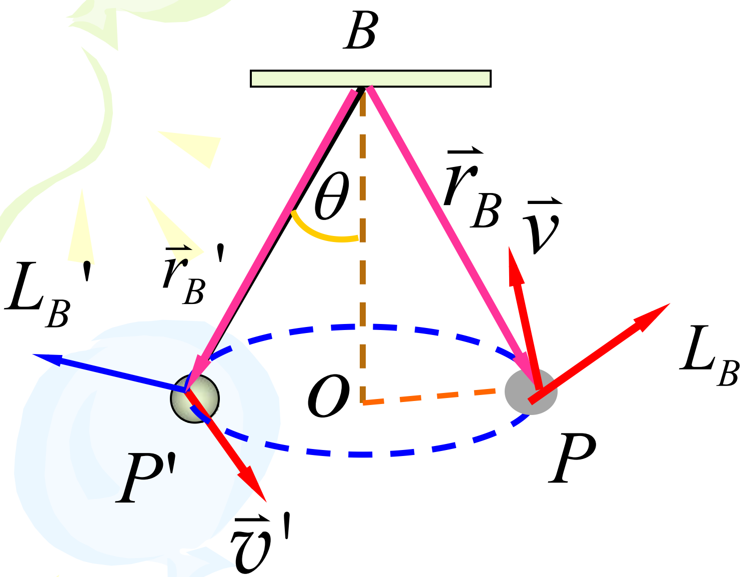
其方向垂直于轨道平面沿O B方向向上，因为

$$\vec{r}_0 \perp m\vec{v}$$

故

$$L_0 = r \cdot mv = mr^2\omega$$

圆锥摆对圆心O点的角动量L $_0$ 是个沿O B向上的大小和方向都不变的恒矢量。



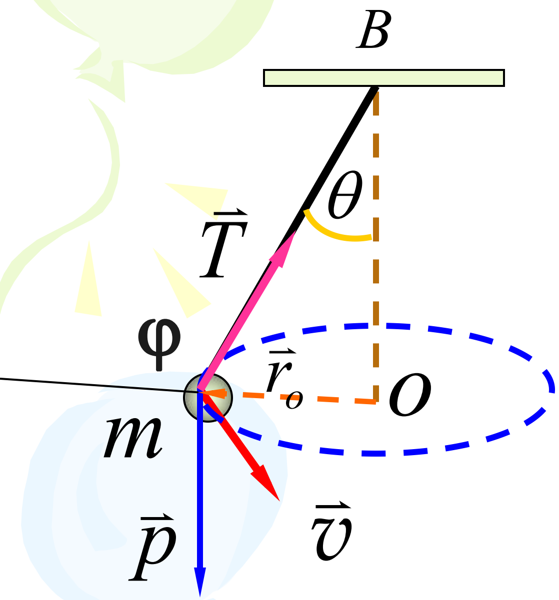
由悬点B向在某位置P处的质点m引矢径 $\vec{r}_B$ ，则

$$\vec{L}_B = \vec{r}_B \times m\vec{v}$$

即 $\vec{L}_B$ 的方向垂直于 $\vec{r}_B$ 与$m\vec{v}_B$ 所组成的平面。显然，质点m在不同的位置处例如在 p' 点处，其矢径 $\vec{r}_B'$ 与 $m\vec{v}'$

各不相同．因此，其矢积 $\vec{L}_B'$ 也不相同．即 $\vec{L}_B$ 的方向是不断变化着的．其大小为

$$\left|\vec{L}_B\right| = \left|\vec{r}_B\right|\left|m\vec{v}\right|\sin\frac{\pi}{2} = l \cdot mv = mlr\omega$$



质点m所在位置对于圆心O，张力T的力矩为

$$\vec{M}_{T_0} = \vec{r}_0 \times \vec{T}$$

方向垂直于纸面向里，大小为

$$M_{T_0} = r_0 T \sin\varphi = r_0 T \cos\theta$$

在竖直方向有 $T\cos\theta = mg$，所以

$$M_{T_0} = r_0 T \sin\varphi = r_0 T \cos\theta$$

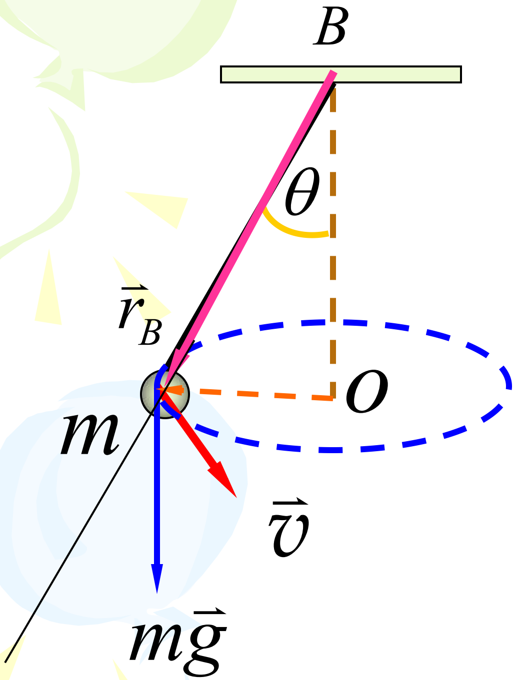
此时重力对圆心的力矩为 $\vec{M}_{mg_0} = \vec{r}_0 \times m\vec{g}$

其方向垂直纸面向外．因m g始终垂直于轨道平面，所以

$\vec{r}_0 \perp m\vec{g}$，故 $M_{mg_0} = r_0 mg$

作用在质点m上的张力T和重力m g对圆心O的合力矩为

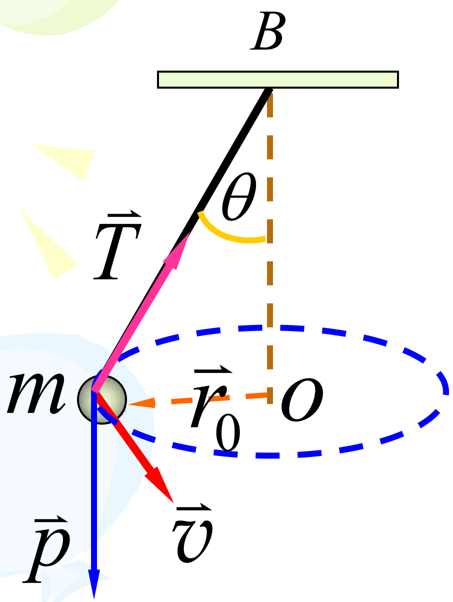
$$M_0 = M_{T_0} + M_{mg_0}$$



对于悬点B，张力T因与 r_B 始终共线，故T对B点的力矩为0．重力mg对B点的力矩为

$$\vec{M}_{mg_B}=\vec{r}_B\times m\vec{g}$$

其方向始终垂直于 $\vec{r}_B$ 与重力作用线mg所组成的平面．由于 $\vec{r}_B$ 的方向在不断变化，所以 $\vec{M}_{mg_B}$ 的方向也在不断变化，图示的方向在垂直于板面向外



（３）重力和拉力对Ｏ点的合力矩为０，
（两个力构成了m做圆周运动的向心力，为有心力，其对Ｏ点的合力矩必为０）
所以质点m对Ｏ的角动量守恒

因为ｍｇ对Ｂ点的力矩方向始终变化，即对Ｂ点的力矩不为０，故质点m对Ｂ点的角动量不守恒

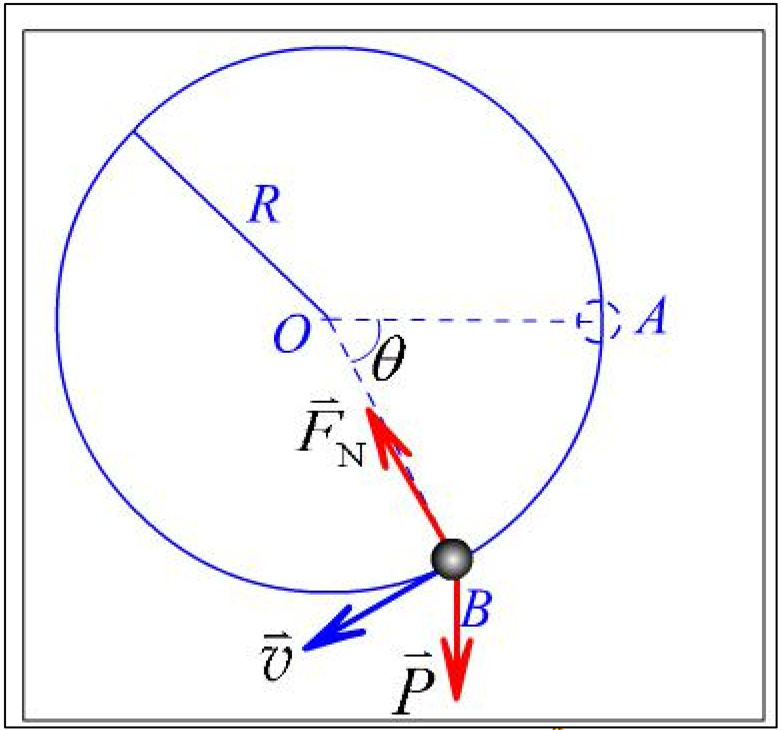
例3　一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内.一质量为 m 的小球穿在圆环上, 并可在圆环上滑动. 小球开始时静止于圆环上的点 A (该点在通过环心 O 的水平面上), 然后从 A 点开始下滑.设小球与圆环间的摩擦略去不计.求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度.

解　小球受重力和支持力作用, 支持力的力矩为零, 重力矩垂直纸面向里

$$M = mgR\cos\theta$$

由质点的角动量定理

$$mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$



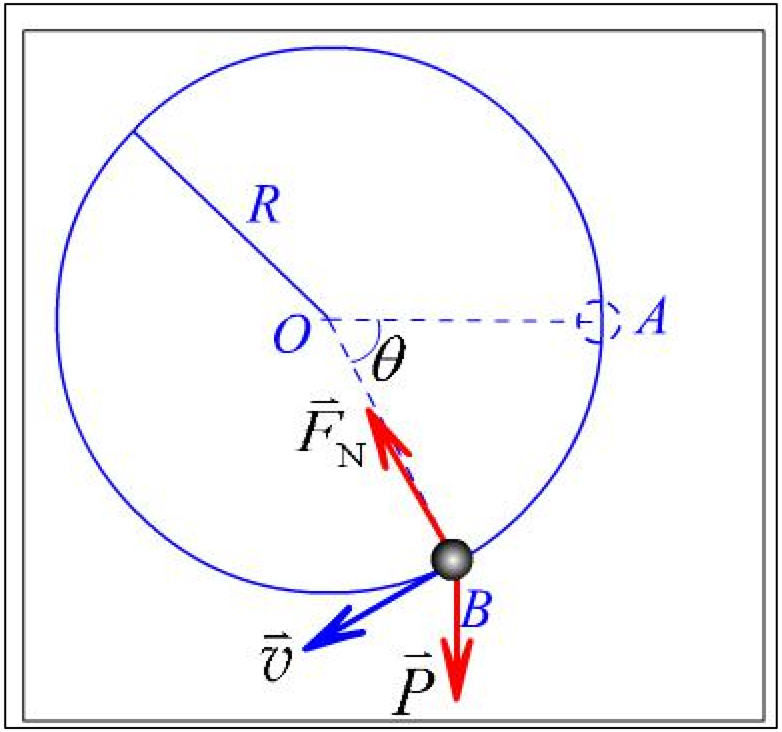
$$mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}L = mgR\cos\theta\mathrm{d}t$$

考虑到

$$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t,\ L = mRv = mR^2\omega$$

得 $LdL = m^2 gR^3\cos\theta\mathrm{d}\theta$

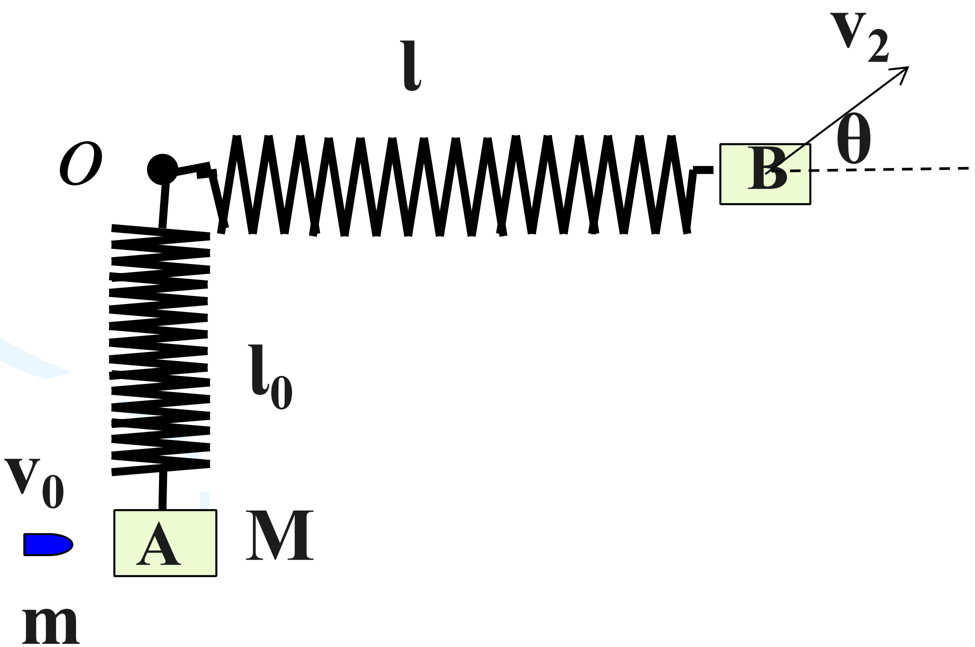


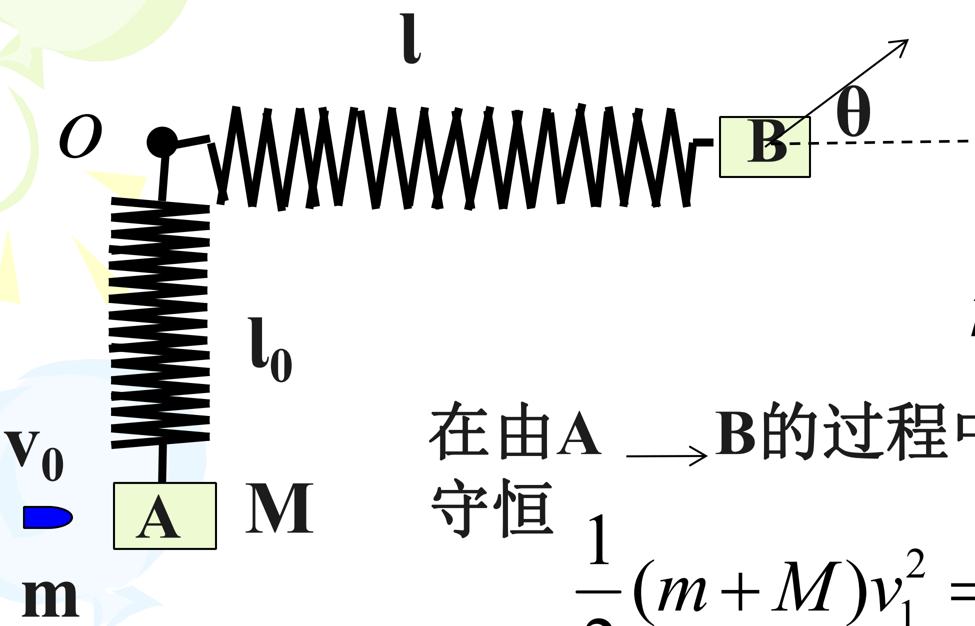
由题设条件积分上式

$$\int_0^L L\mathrm{d}L = m^2 gR^3\int_0^\theta \cos\theta\mathrm{d}\theta \qquad \because\ L = mR^2\omega$$

$$L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2} \qquad \omega = \left(\frac{2g}{R}\sin\theta\right)^{1/2}$$

练习：在光滑的水平桌面上，放有质量为M的木块，木块与一弹簧相连，弹簧的另一端固定在O点，弹簧的劲度系数为k，设有一质量为m的子弹以初速度v_0垂直于OA射向M并嵌入木块内，弹簧原长为l_0，子弹击中木块后，木块M运动到B点时刻，弹簧长度变为l，此时OB垂直于OA，求在B点时，木块的运动速度v_2





解： 击中瞬间，在水平面内，子弹与木块组成的系统沿v0。方向动量守恒

$$mv_0=(m+M)v_1 \quad ①$$

在由A $\longrightarrow$ B的过程中，子弹与木块系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2=\frac{1}{2}(m+M)v_2^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \quad ②$$

在由A→B的过程中木块在水平面内只受指向O点的弹性有心力，故木块对O点的角动量守恒，设v_2与OB方向成θ角，则

$$l_0(m+M)v_1=l(M+m)v_2\sin\theta \quad ③$$

由式一和式二联立可求得ｖ$_2$的大小为

$$v_2=\sqrt{\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2-\frac{k(l-l_0)^2}{m+M}}$$

由式三求得ｖ$_2$与ＯＢ的夹角为

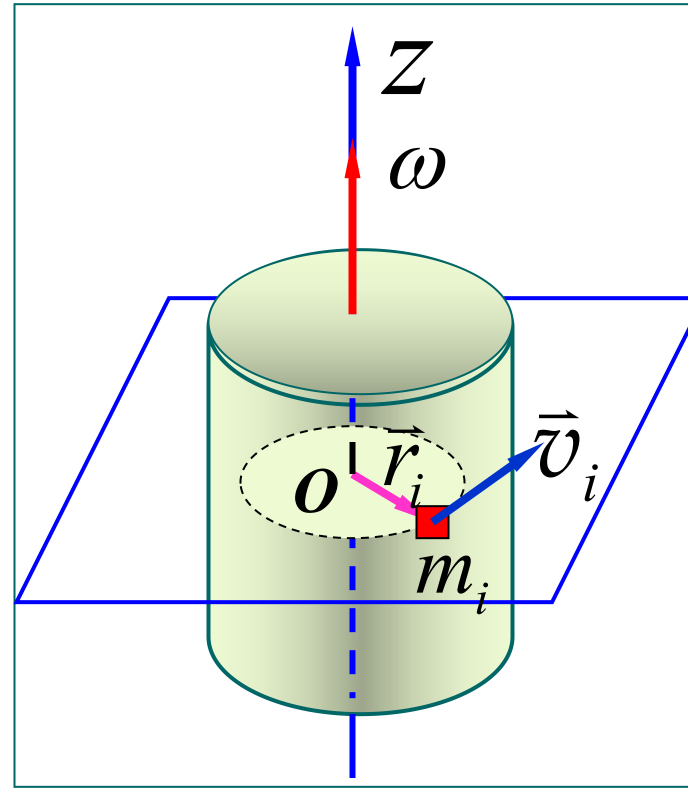
$$\theta=\arcsin\frac{l_0 m v_0}{l\sqrt{m^2 v_0^2-k(l-l_0)^2(M+m)}}$$

二 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1 刚体定轴转动的角动量

$$L=\sum_i m_i r_i v_i=(\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L=J\omega}$$



2 刚体定轴转动的角动量定理

对于质元有：

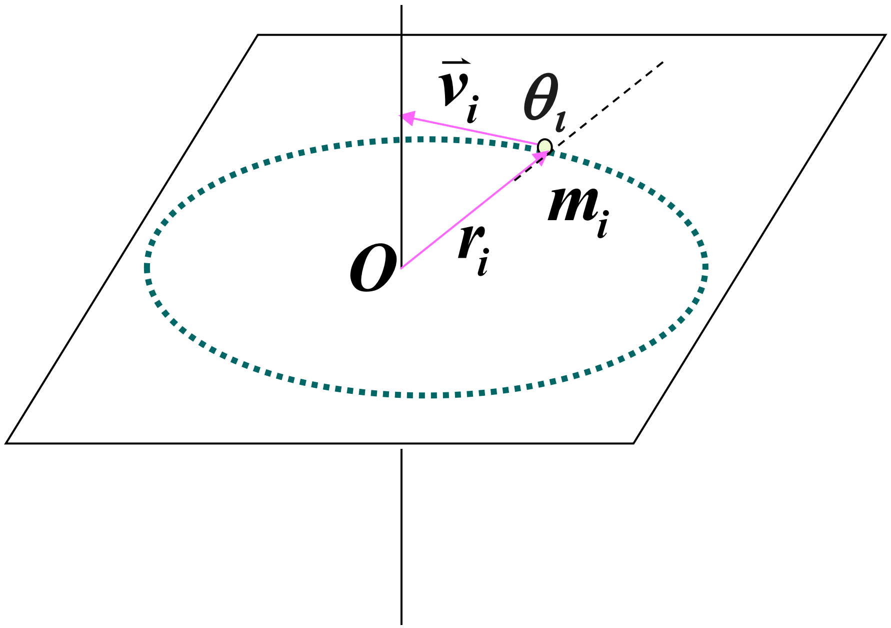
$$M_i^{ex}+M_i^{in}=\frac{dL_i}{dt}=\frac{d(m_i r_i^2\omega)}{dt}$$

对i求和有：

$$\sum_i M_i^{ex}=\frac{d(\sum_i L_i)}{dt}=\frac{d(\sum_i m_i r_i^2\omega)}{dt}$$

刚体各质元均在各自的转动平面内绕同一轴转动

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \frac{d}{dt}[\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2)\omega]$$



$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2)}$$

转动惯量

$$\boxed{L = J\omega}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \frac{d}{dt}(J\omega) = \frac{dL_z}{dt}$$

$$M_Z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \frac{d}{dt}(J\omega) = \frac{dL_z}{dt}$$

刚体绕某定轴转动时，作用于刚体的外力矩的矢量和等于刚体绕此定轴的角动量对时间的变化率。

力矩对给定轴的冲量矩

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$$

转轴给定，作用在刚体上的冲量矩等于角动量的增量

——刚体定轴转动的角动量定理

非刚体定轴转动的角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$$

刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M \mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1$

3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $M = 0$ ，则 $\boxed{L = J\omega = 常量}$

讨论

- 守 恒条件 $M = 0$

若 J 不变, ω 不变；若 J 变, ω 也变，但 $L = J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的角动量.
- 在冲击等问题中 $\because M^{\text{in}} >> M^{\text{ex}} \therefore L \approx$ 常量
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

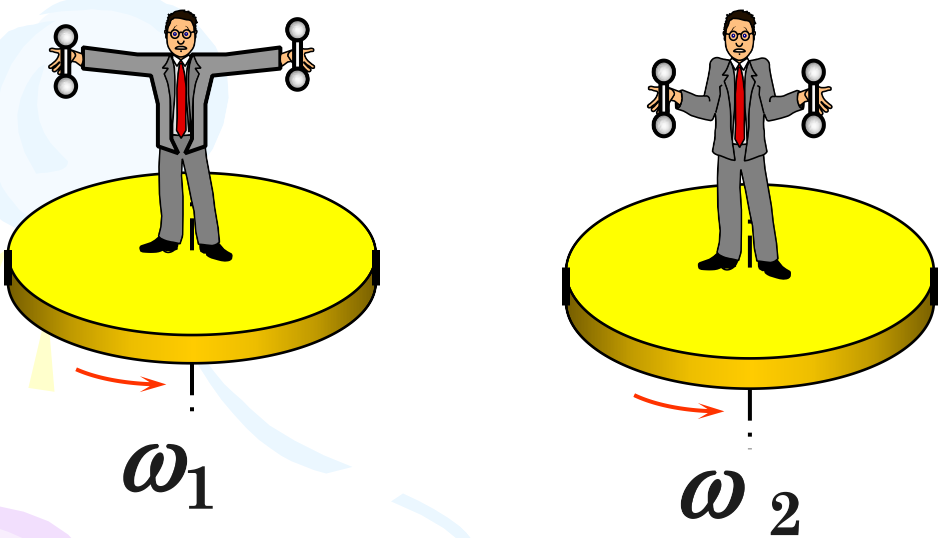
有许多现象都可以用角动量守恒来说明.

- 花样滑冰
- 跳水运动员跳水

角动量守恒实例

茹科夫斯基转椅

练习 人与转盘的转动惯量$J_0=60kg\cdot m^2$，伸臂时臂长为 $1m$，收臂时臂长为 $0.2m$。人站在摩擦可不计的自由转动的圆盘中心上，每只手抓有质量 $m=5kg$的哑铃。伸臂时转动角速度 $\omega_1=3\ s^{-1}$，求收臂时的角速度 ω_2？



解：整个过程角动量守恒

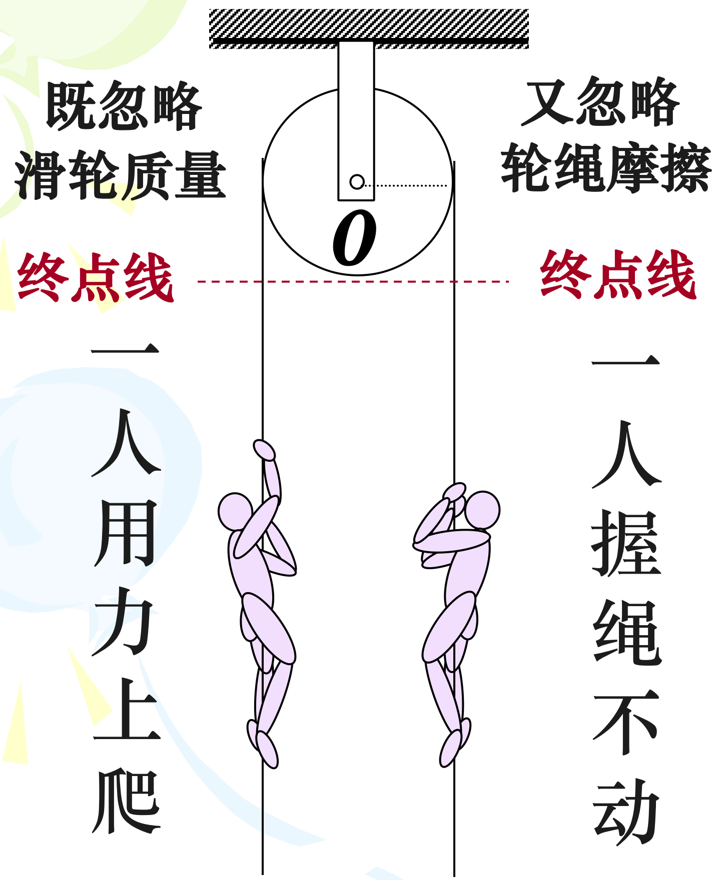
$$J_1=J_0+2ml_1^2=70\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$J_2=J_0+2ml_2^2=60.4\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

由

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2$$

得 $$\omega_2=\frac{J_1\omega_1}{J_2}=3.5\,\mathrm{s^{-1}}$$



两人质量相等

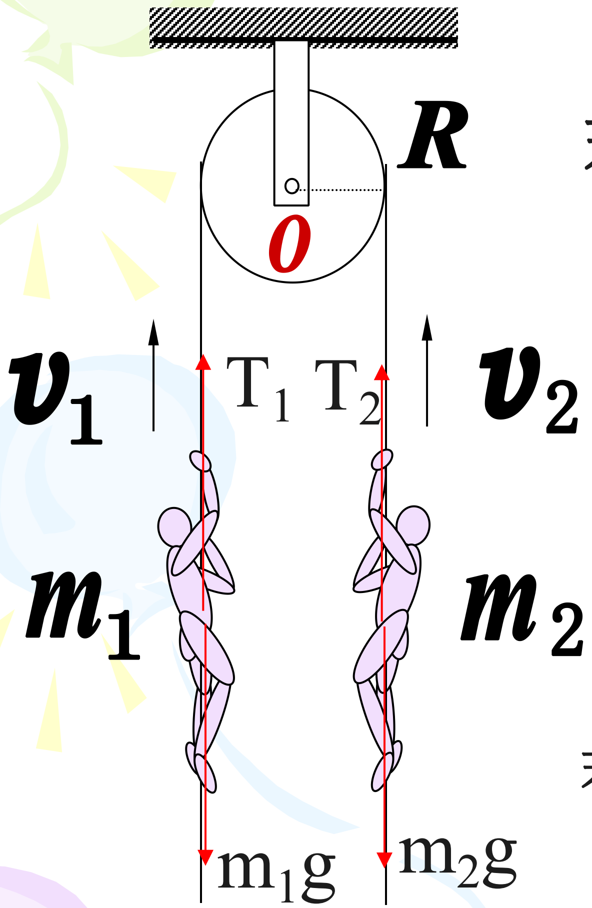
可能出现的情况是

（1）两人同时到达；

（2）用力上爬者先到；

（3）握绳不动者先到；

（4）以上结果都不对。



同高从静态开始往上爬

质点系 m_1、m_2，　忽轮、绳质量及轴摩擦

若 $m_1 = m_2$ 系统受合外力矩为零，角动量守恒。

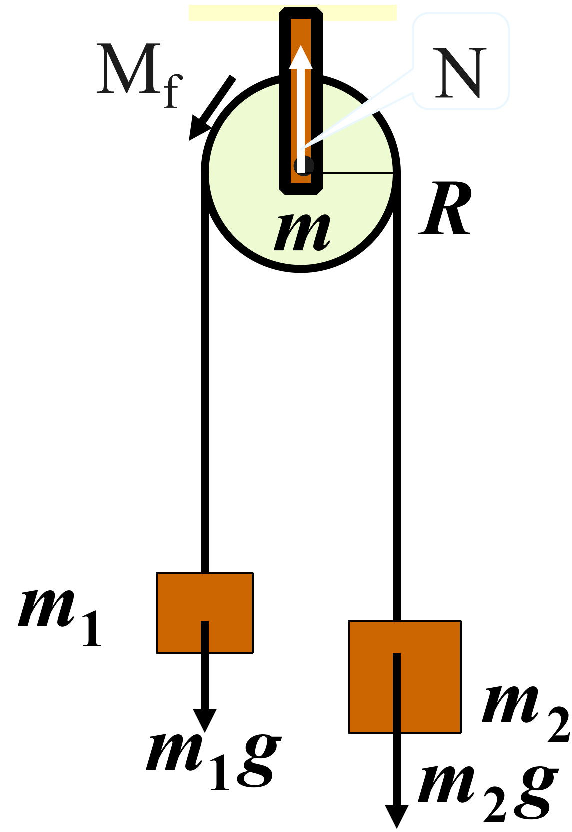
系统的末态角动量　$m_2 v_2 R - m_1 v_1 R = 0$　系统的初态角动量

得　$v_2 = v_1$

不论体力强弱，两人等速上升。

若 $m_1 \neq m_2$ 系统受合外力矩不为零，角动量不守恒。

例、一根轻绳跨过一定滑轮（滑轮 视为圆盘），绳的两端分别 悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体，$m_1<m_2$，滑轮的 质量为 m，半径为 R，所受的摩擦阻力矩为 M_f，绳与滑轮间无相对滑动。试求：物体的加速度。



解：把m_1、m_2和m看作一系统,系统所受合外力有重力m_1g、m_2g,这两个力对轴 的力矩分别为m_1gR、m_2gR;支撑力N通过转轴,对轴的力矩为零.加上阻力矩M_f,系统所受合外力矩为(顺时针为正)

$$M=m_2gR-m_1gR-M_f$$

系统的角动量包括
$$\left\{\begin{aligned} &m:\quad J\omega \\ &m_1:\ Rm_1v \\ &m_2:\ Rm_2v \end{aligned}\right.$$

系统的总角动量为(顺时针为正)

$$L=J\omega+Rm_1v+Rm_2v$$

根据角动量定理

$$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}(J\omega+Rm_1v+Rm_2v)$$

$$=J\frac{d\omega}{dt}+Rm_1\frac{dv}{dt}+Rm_2\frac{dv}{dt}$$

$$=J\alpha+R(m_1+m_2)a$$

利用　$\alpha=a/R,\qquad J=\frac{1}{2}mR^2$

解得

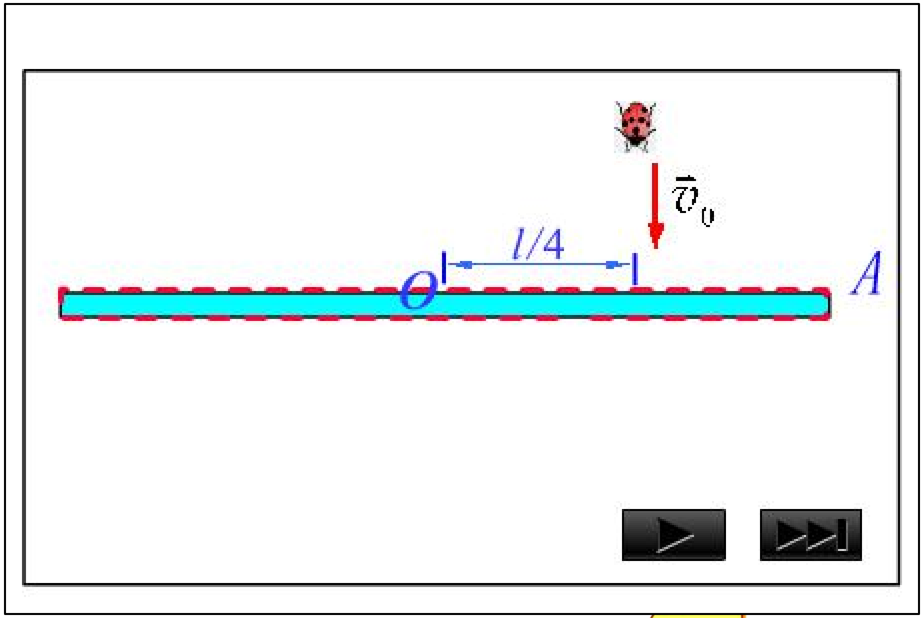
$$a=\frac{(m_2-m_1)g-M_f/R}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m}$$

例3 质量很小长度为l 的均匀细杆,可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动.当细杆静止于水平位置时, 有一只小虫以速率v_0 垂直落在距点O为 $l/4$ 处, 并背离点O 向细杆的端点A 爬行.设小虫与细杆的质量均为m.问:欲使细杆以恒定的角速度转动, 小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

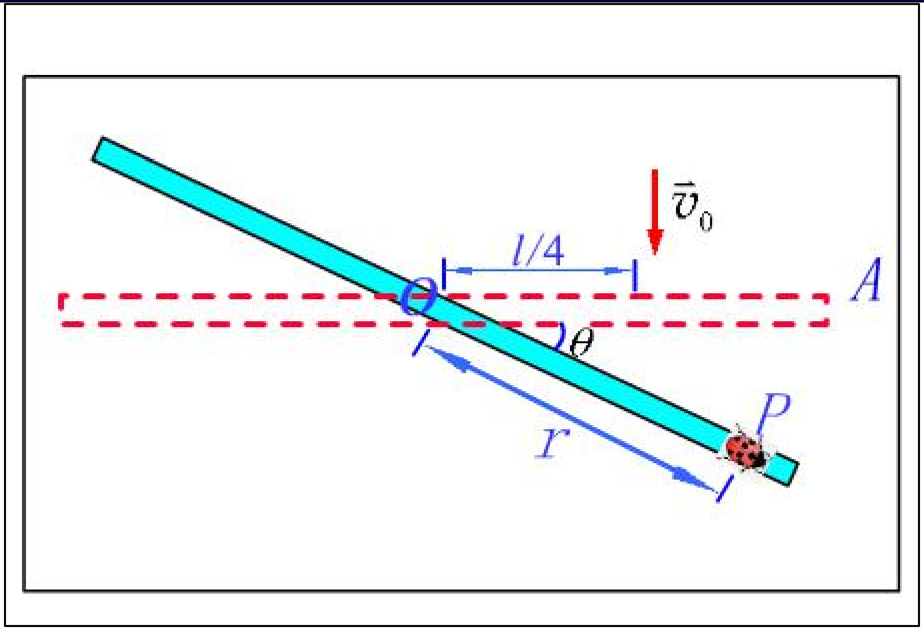
解 小虫与细杆的碰撞视为完全非弹性碰撞，碰撞前后系统角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



$$\omega = \frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



由角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

即

$$mgr\cos\theta = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{12}ml^2 + mr^2) = 2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\theta = \omega t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t = \frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$$

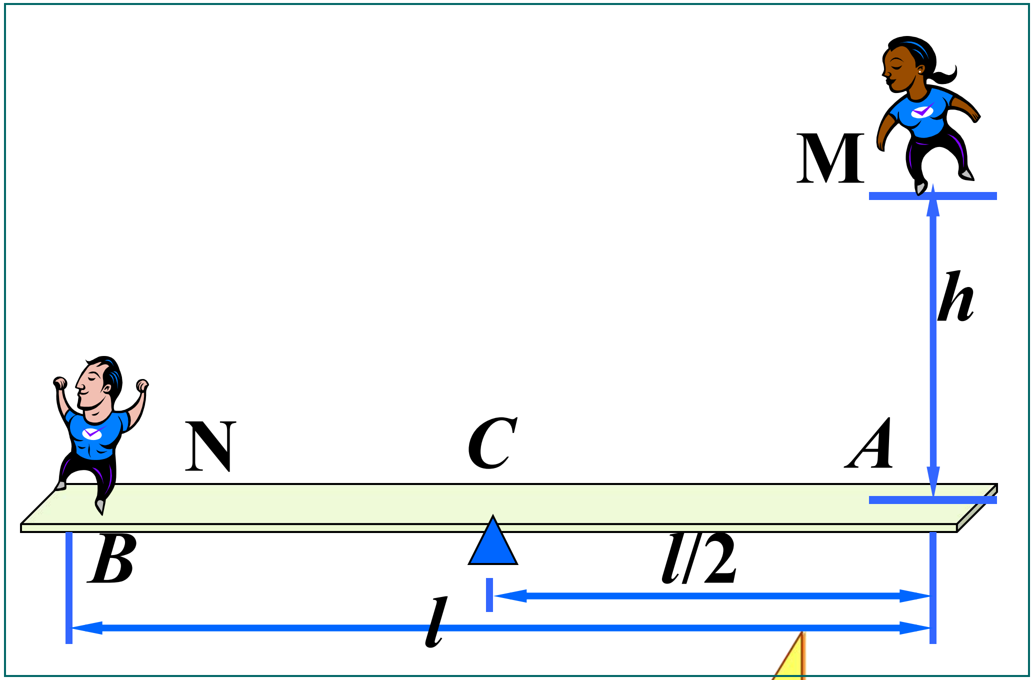
例4 一杂技演员 M 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端A,并把跷板另一端的演员N 弹了起来.设跷板是匀质的,长度为l,质量为m',跷板可绕中部支撑点C在竖直平面内转动,演员的质量均为m.假定演员M落在跷板上,与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞.问演员N可弹起多高?

解 碰撞前 M 落在 A点的速度

$$v_{\mathrm{M}} = (2gh)^{1/2}$$

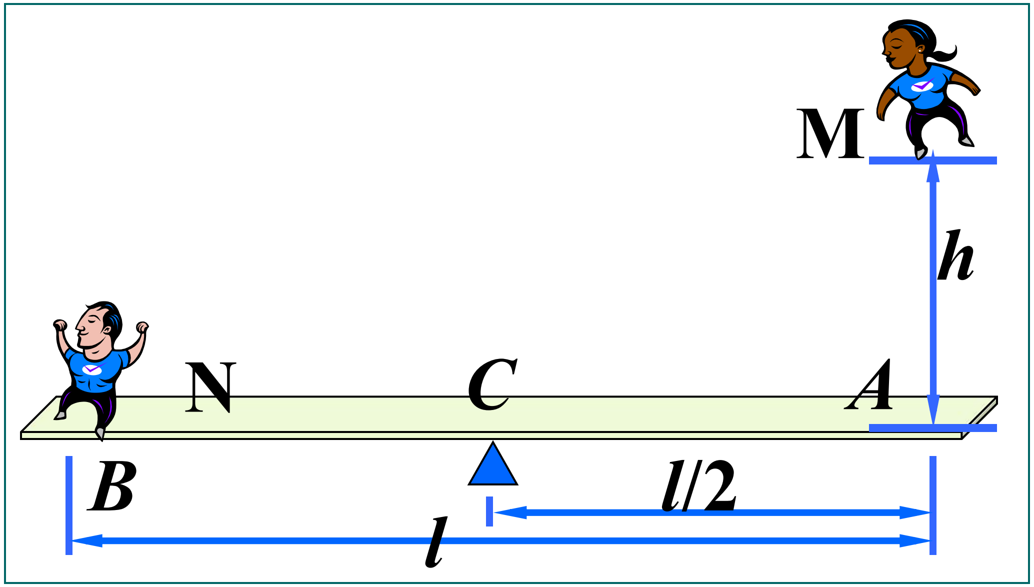
碰撞后的瞬间, M、N具有相同的线速度

$$u = \frac{l}{2}\omega$$



$$v_{\mathrm{M}}=(2gh)^{1/2}$$

$$u=\frac{l}{2}\omega$$



把M、N和跷板作为一个系统，角动量守恒

$$mv_{\mathrm{M}}\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=\frac{1}{12}m'l^{2}\omega+\frac{1}{2}ml^{2}\omega$$

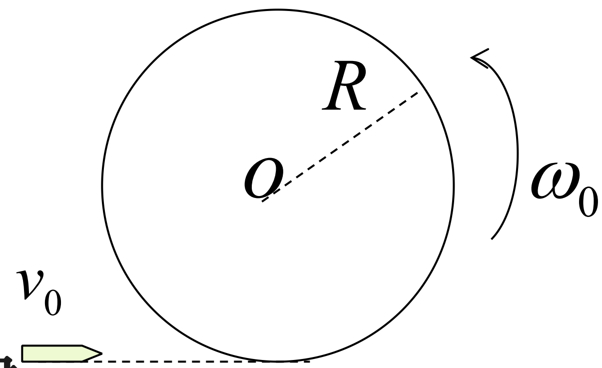
解得

$$\omega=\frac{mv_{\mathrm{M}}l/2}{m'l^{2}/12+ml^{2}/2}=\frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l}$$

演员 N 以 u 起跳，达到的高度

$$h'=\frac{u^{2}}{2g}=\frac{l^{2}\omega^{2}}{8g}=(\frac{3m}{m'+6m})^{2}h$$

例：如图，圆盘的M、R、及ω$_0$已知。子弹m, 以v$_0$射入盘边缘，求此后盘转动的角速度。



解：对M和m,用动量守恒律，有：

$$mv_0 + MV_0 = (m+M)u$$

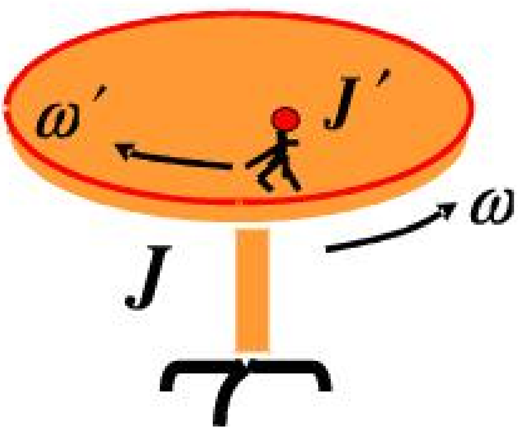
其中：$V_0 = R\omega_0$ 错

正确解：对M和m,用角动量守恒律

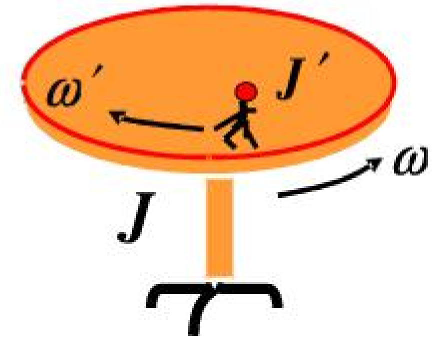
$$mRv_0 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0 = (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega$$

$$\omega = \frac{mRv_0 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0}{(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)}$$

例3 质量为M半径为R的转台可绕通过中心的竖直轴转动,设阻力可忽略不计,质量为m的一人站在台的边缘,人和台原来都静止,如果人沿台的边缘跑一周,问相对于地面来说,人和台各转了多少角度?



解:如果以人和转台为一系统,该系统未受到外力矩作用,故角动量守恒.开始时角动量为0,由角动量守恒知



$$J\omega - J\omega' = 0$$

转台转动惯量 $\frac{1}{2}MR^2$,人的转动惯量 mR^2

$$\frac{1}{2}MR^2\omega - mR^2\omega' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = 2m\omega' / M$$

人相对转台的角速度 $\Omega = \omega + \omega' = (M + 2m)\omega' / M$

人奔跑一圈所需时间

$$t = 2\pi / \Omega = 2\pi M / [(M + 2m)\omega']$$

人相对于地面绕行的角度为

$$\theta = \omega' t = 2\pi M / (M + 2m)$$

转台转过的角度为

$$\varphi = \omega t = 4\pi m / (M + 2m)$$

$$\theta + \varphi = 2\pi$$