一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知 $P(\mathrm{A})=0.5, P(\mathrm{A}\cup \mathrm{B})=0.8$, A 和 B 相互独立，则 $P(\mathrm{B})=$ _____.

2. 将不同的两封信随机地投入 3 个邮筒中，则第一个邮筒中有一封信的概率是_____.

3. 随机变量 X 服从期望是 2 的指数分布，则 $P(X<1)=$ ________.

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,4)$，Y 服从 $N(2,1)$，且 X 和 Y 相互独立, 则 $2X-3Y$ 服从________分布（要求分布包括参数）.

5. 设总体 X 服从正态 $N(0,1)$，X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的简单随机样本，统计量 $Y=\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 服从_______分布(要求包括自由度).

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，样本容量 $n=16$，样本均值的观察值为 5.2，则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为______________（已知 $z_{0.025}=1.96, t_{0.025}(15)=2.1315$）.

二、单项选择题(共 6 题, 每题 3 分，共 18 分)

1. 下列函数中，可作为随机变量的概率密度函数的是(　　).

(A) $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<1, \\ 0, 其他 \end{cases}$　　(B) $f(x)=\begin{cases} \cos x, 0<x<\pi, \\ 0, 其他 \end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases} \sin x, 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, 其他 \end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases} \sin x, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, 其他 \end{cases}$

2. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y=e^X$, 关于 Y 的概率密度函数，正确的是(　　).

(A) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e, & y>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y\le 0 \end{cases}$　　(B) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$

(C) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$　　(D) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} 0, & y>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y\le 0 \end{cases}$

3. 若方差 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，则下列一定正确的是(　　).

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　(B) X与Y 相互独立

(C) X与Y不相互独立　　　　　　　(D) $E(XY)=E(X)E(Y)$

4. 随机的掷 6 个骰子，利用切比雪夫不等式估计， 6 个骰子出现点数之和在 15 点到 27 点之间的概率不小于(　).

(A) $\frac{37}{72}$　　(B) $\frac{53}{72}$　　(C) $\frac{25}{36}$　　(D) $\frac{29}{36}$

5. 设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数， $X_i=\begin{cases}1, & \text{事件A发生} \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$ ， i=1,2,⋯, 100 ，且 $P(\text{A})=0.8$ ，X_1，$X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$ ，则由中心极限定理知， $P(Y\le y)$ 的值近似于(　).

(A) $\Phi(\frac{y-80}{4})$　　(B) $\Phi(y)$　　(C) $\Phi(16y+80)$　　(D) $\Phi(\frac{y-80}{16})$

6. 在假设检验问题中，显著性水平α的意义是(　).

(A) 原假设 H_0 成立，经检验被拒绝的概率　(B) 原假设 H_0 成立，经检验被接受的概率

(C) 原假设 H_0 不成立，经检验被拒绝的概率　(D) 原假设 H_0 不成立，经检验被接受的概率

三、 计算题(共 5 题，共 58 分)

1.（12 分）某人去外地参加会议，乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 0.3、0.2、0.1 和 0.4，若乘飞机不会迟到，乘火车、轮船、汽车迟到的概率分别为 0.25、0.5 和 0.5，求

(1) 此人迟到的概率.　(2) 若此人迟到，求他乘火车去开会的概率.

2.（8 分）设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) 判断 X 和 Y 是否相互独立, 并说明原因.

3. (12 分) 随机变量 X 的分布律为 $\begin{pmatrix} X & -1 & 1 \\ p_k & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，随机变量 Y 的概率密度是 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$,X与Y相互独立，$Z=XY$，求

(1) Y 的分布函数 .　(2) 概率 $P\{Y<E(Y)\}$.　(3) 协方差 $Cov(X,Z)$.

4. （18 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta-1}, 1\le x\le\theta \\ 0, \quad 其他\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。求：

(1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$，并判断 $\hat{\theta}_1$ 是否为无偏估计, 说明原因.

(2) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_2$，并求 $\hat{\theta}_2$ 的概率密度函数.

5.（8 分）设某次考试的考生成绩服从期望是 μ 的正态分布。从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得这 36 位考生的平均成绩为 66.5 分，样本标准差为 15 分。在显著水平 0.05 下，试检验假设：$H_0:\mu=70,\quad H_1:\mu\neq70$.（已知 $t_{0.025}(35)=2.0301;\ t_{0.05}(35)=1.6896$；

$t_{0.025}(36)=2.0281;\ t_{0.05}(36)=1.6883$）.

四、证明题（共 6 分）

设总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一组简单随机样本。记

$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，证明 $\hat{\sigma}^2$ 和 S^2 都是 σ^2 的无偏估计。