2.4 磁场的概念及线电流磁感应强度的计算.

1、磁场的定义

2、磁感应强度的定义

3、磁感应强度的计算

1. 什么是磁场?

存在于载流回路或永久磁铁周围空间，能对运动电荷施力的特殊物质称为磁场。

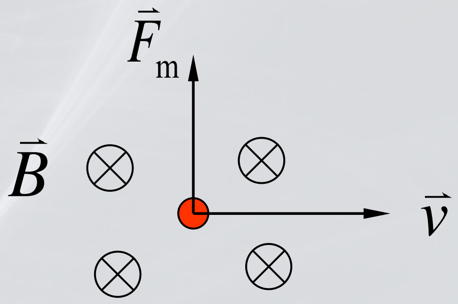
产生磁场的源： a.永久磁铁

b.电流周围，即运动的电荷

c.变化的电场

2. 磁感应强度 $\vec{B}$的定义

磁感应强度：描述磁场对运动电荷的作用力的的大小和方向的特性。



$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

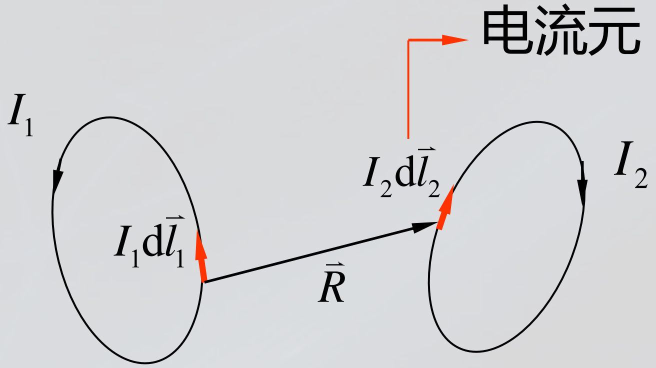
磁感应强度定义： 单位正电荷以单位速度在磁场中运动时，受到的最大磁场力为磁感应强度的大小，磁感应强度的方向与磁场力方向和运动方向三者相互垂直，且满足右手螺旋法则。

磁感应强度的数学表达式：

$$\boxed{\vec{B} = \lim_{q_{\mathrm{t}} \to 0} \frac{\vec{F}_{\mathrm{m}} \times \hat{a}_v}{q_{\mathrm{t}} v}}$$

3. 磁感应强度的计算

安培力实验定律：



$$\mathrm{d}\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{a}_R)}{R^2}$$

其中：μ_0为真空磁导率。 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\quad \mathrm{H/m}$

$$I_2\mathrm{d}\vec{l}_2=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=\mathrm{d}q_2\frac{\mathrm{d}\vec{l}_2}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}q_2\vec{v}_2$$

得到： $\mathrm{d}\vec{F}_{21}=\mathrm{d}q_2\vec{v}_2\times[\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{a}_R}{R^2}]$ 比较 $\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$

电流元 $I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$在空间所产生的磁感应强度为：

$$\mathrm{d}\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{a}_R}{R^2}$$

该式称为毕奥—萨伐定律。

闭合电流回路在空间所产生的磁感应强度：

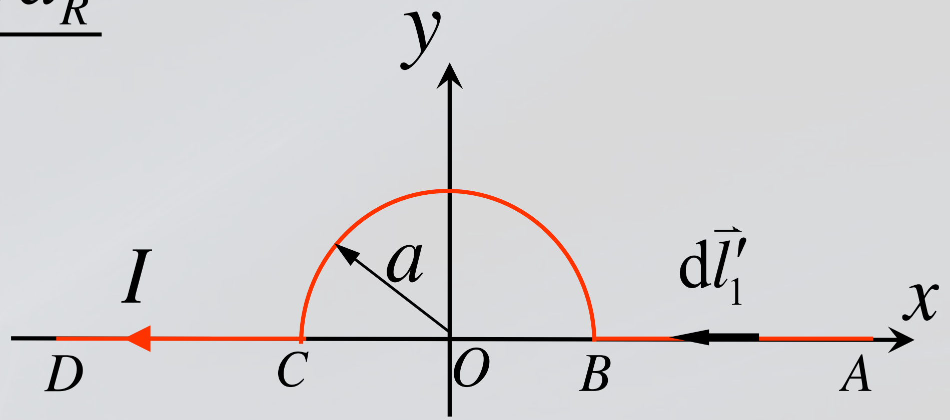
$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\,'\times\hat{a}_R}{R^2}$$ 特斯拉(T)

a. 线电流在空间所产生的磁感应强度：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\,'\times\hat{a}_R}{R^2}$$ 特斯拉(T)

例：求如图所示的电流线 I 在O点产生的磁感应强度。

解：取圆柱坐标系 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}$



将电流线分成AB, BC, CD 三段分别求这三段电流在O点产生的磁感应强度。

（1）AB 段在O点产生的 $\vec{B}_1$

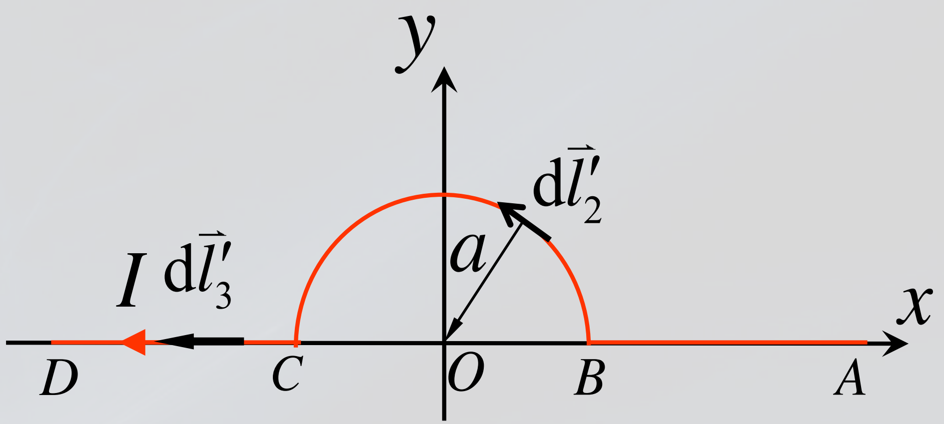
$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{l}_1'=\mathrm{d}r(-\hat{a}_r)\\ \hat{a}_{R1}=(-\hat{a}_r)\end{cases}$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_1'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}_1'\times\hat{a}_{R1}}{R_1^{\,2}}=0$$

(2) BC 段在 O 点产生的 $\vec{B}_2$

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{l}_2' = a\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi \\ \hat{a}_{R2} = (-\hat{a}_r) \\ R_2 = a \end{cases}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\pi \frac{Ia\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi \times (-\hat{a}_r)}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4a}\hat{a}_z$$



O点的磁感应强度:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4a}\hat{a}_z$$

(3) CD 段在 O 点产生的 $\vec{B}_3$

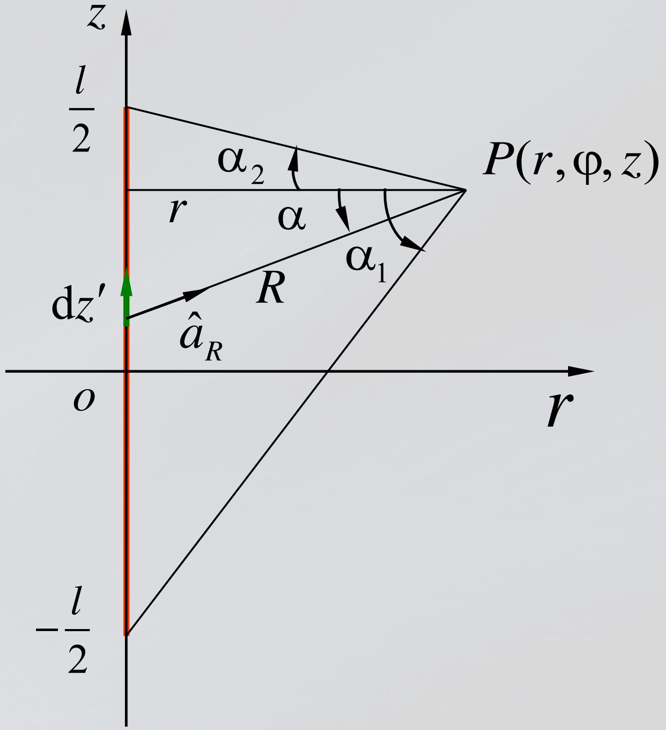
$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{l}_3' = \mathrm{d}r\hat{a}_r \\ \hat{a}_{R3} = (-\hat{a}_r) \end{cases}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_3'} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}_3{}' \times \hat{a}_{R3}}{R_3{}^2}$$

$$= 0$$

例：求长为l，载有电流 I的细直导线在P点产生的磁感应强度。

解：如图所示，选用圆柱坐标系



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\,' \times \hat{a}_R}{R^2}$$

式中：$\mathrm{d}\vec{l}' = \mathrm{d}z'\hat{a}_z$

$$z' = z - r\tan\alpha$$

$$\mathrm{d}z' = -r\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

$$R = r\sec\alpha$$

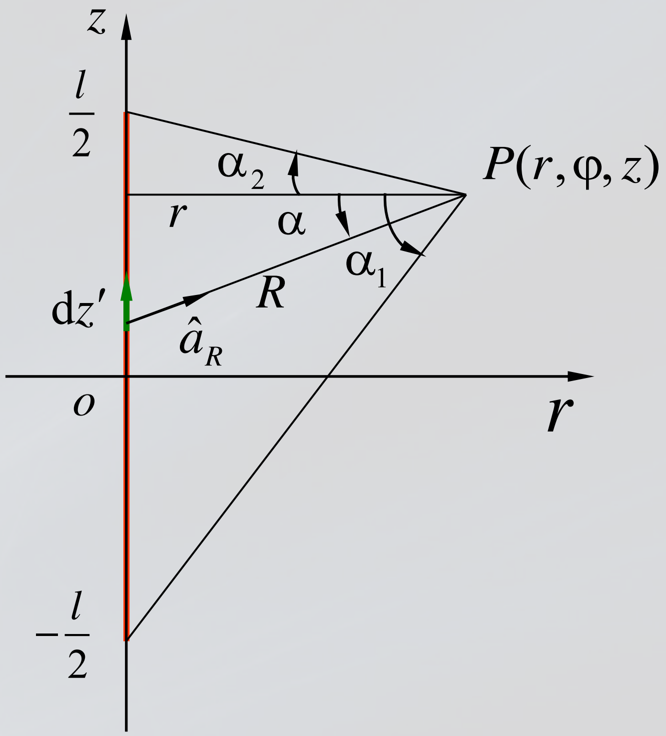
$$\hat{a}_R = \hat{a}_r\cos\alpha + \hat{a}_z\sin\alpha$$

所以：$\mathrm{d}\vec{l}' \times \hat{a}_R = \hat{a}_z\mathrm{d}z' \times (\hat{a}_r\cos\alpha + \hat{a}_z\sin\alpha) = -\hat{a}_\varphi r\sec^2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{-\hat{a}_\varphi r\sec^2\alpha\cos\alpha}{r^2\sec^2\alpha}\mathrm{d}\alpha = \hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

有限长度电流线磁感应强度：

$$\vec{B}=\hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)$$



式中：

$$\sin\alpha_1=\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+(z+\frac{l}{2})^2}}$$

$$\sin\alpha_2=\frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+(z-\frac{l}{2})^2}}$$

无限长载流直导线周围磁感应强度：

即： $l\to\infty$ $\begin{cases}\alpha_1\to\pi/2\\ \alpha_2\to-\pi/2\end{cases}$ 于是得： $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

小结： 1、磁场的定义

2、磁感应强度的定义 $$\vec{B} = \lim_{q_t \to 0} \frac{\vec{F}_m \times \hat{a}_v}{q_t v}$$

3、磁感应强度的计算 $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I \mathrm{d}\vec{l}\,' \times \hat{a}_R}{R^2}$$ （线电流计算公式）

2.5 面电流和体电流磁感应强度的计算

1、面电流磁感应强度的计算

2、体电流磁感应强度的计算

回顾：

a. 线电流在空间所产生的磁感应强度：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\,'\times\hat{a}_R}{R^2}$$ 特斯拉(T)

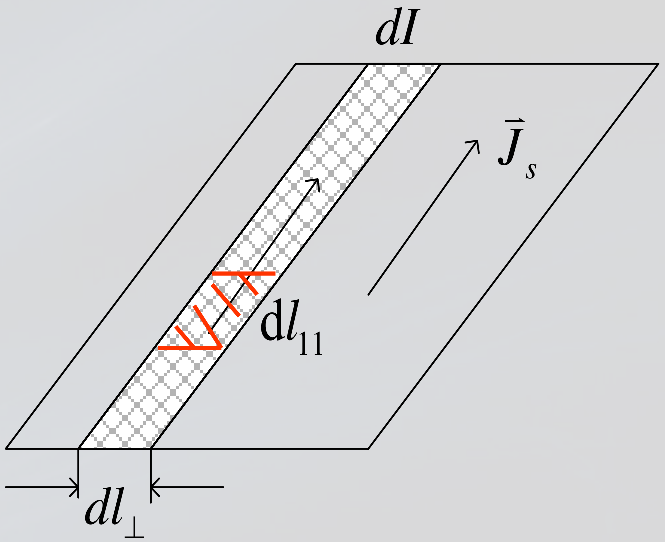
无限长载流直导线周围磁感应强度：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

b. 面电流情况: 电流在某一曲面上流动。

面电流密度：在与电流线垂直的方向上单位长度流过的电流。

$$\vec{J}_S = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l_\perp}\hat{a}_I \quad \text{(A/m)}$$



$\mathrm{d}l_\perp$上流过的电流量： $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{J}_S \mathrm{d}l_\perp$

$\mathrm{d}\vec{I}$ 产生的磁感应强度为:

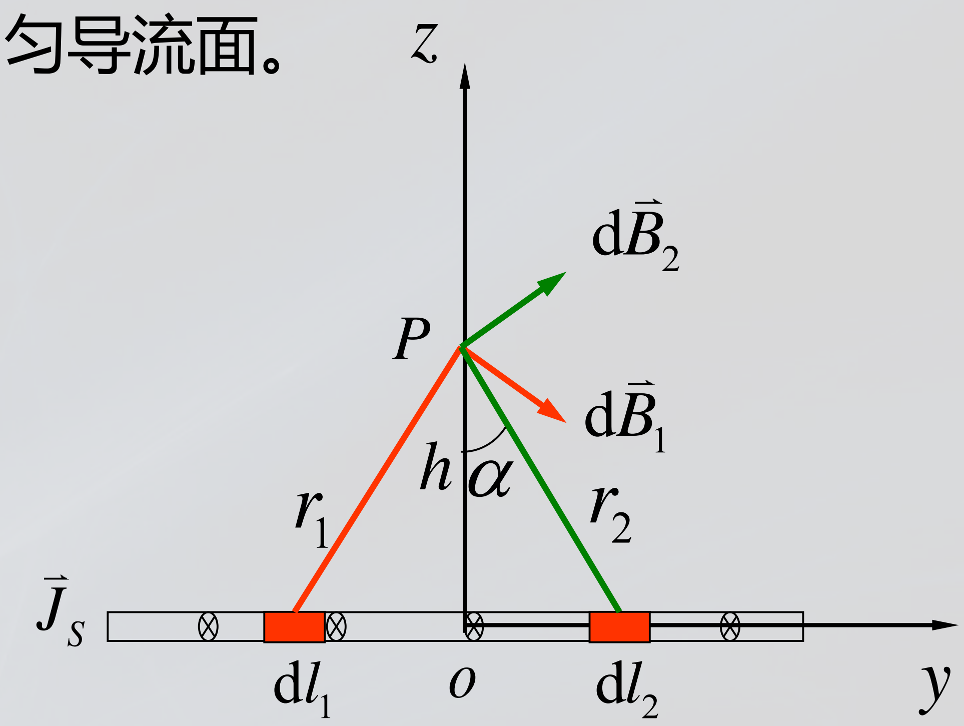
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}} \frac{\vec{J}_S \mathrm{d}l_\perp \mathrm{d}l_{11} \times \hat{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}} \frac{\vec{J}_S \times \hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}l_\perp \mathrm{d}l_{11}$$

整个面电流产生的磁场: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\vec{J}_S \times \hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}S'}$

例：设一面电流密度为 $\vec{J}_S$ 的无限大均匀导流面。

求：距该平面 h 高处的磁感应强度？

解：如图，选用直角坐标系



$\mathrm{d}l_1$上流过的电流为 $\vec{J}_S\mathrm{d}l_1$

$$\mathrm{d}\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 J_S \mathrm{d}l_1}{2\pi r_1}\hat{a}_{\varphi_1}$$

与 $\mathrm{d}l_1$对称的取线元 $\mathrm{d}l_2$

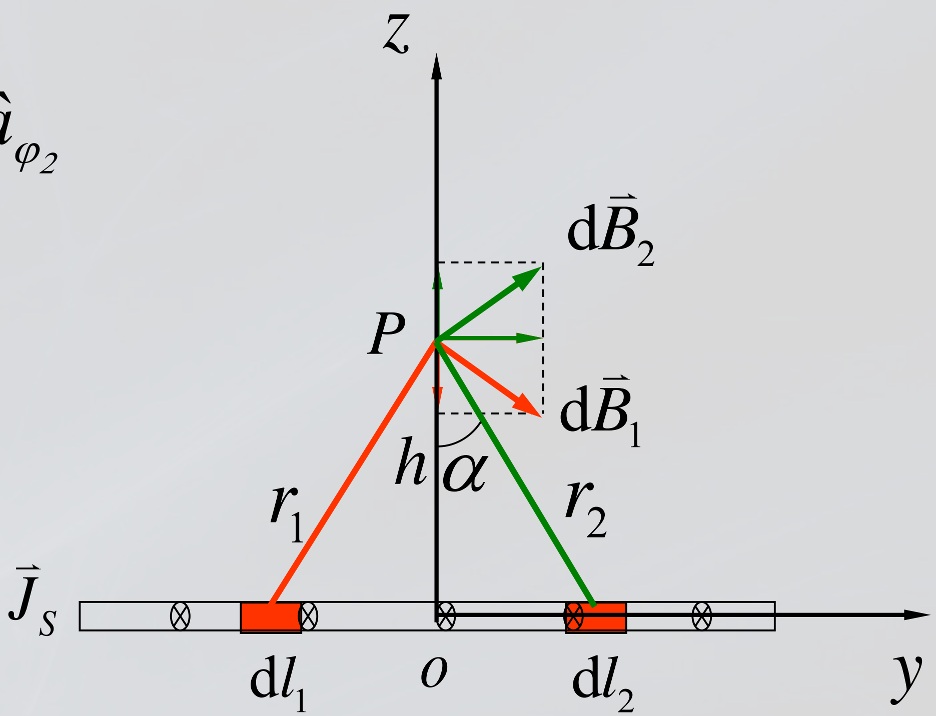
$$\mathrm{d}\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_S \mathrm{d}l_2}{2\pi r_2}\hat{a}_{\varphi_2}$$

其中：$\mathrm{d}l_1 = \mathrm{d}l_2 = \mathrm{d}y$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{h^2 + y^2}$$

$$d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_S dy}{2\pi r_1}\hat{a}_{\varphi_1} + \frac{\mu_0 J_S dy}{2\pi r_2}\hat{a}_{\varphi_2}$$

$$= \frac{\mu_0 J_S dy}{2\pi r_1}(\hat{a}_{\varphi_1} + \hat{a}_{\varphi_2})$$



其中:

$$\hat{a}_{\varphi_1} = \cos\alpha\hat{a}_y - \sin\alpha\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_{\varphi_2} = \cos\alpha\hat{a}_y + \sin\alpha\hat{a}_z$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + y^2}}$$

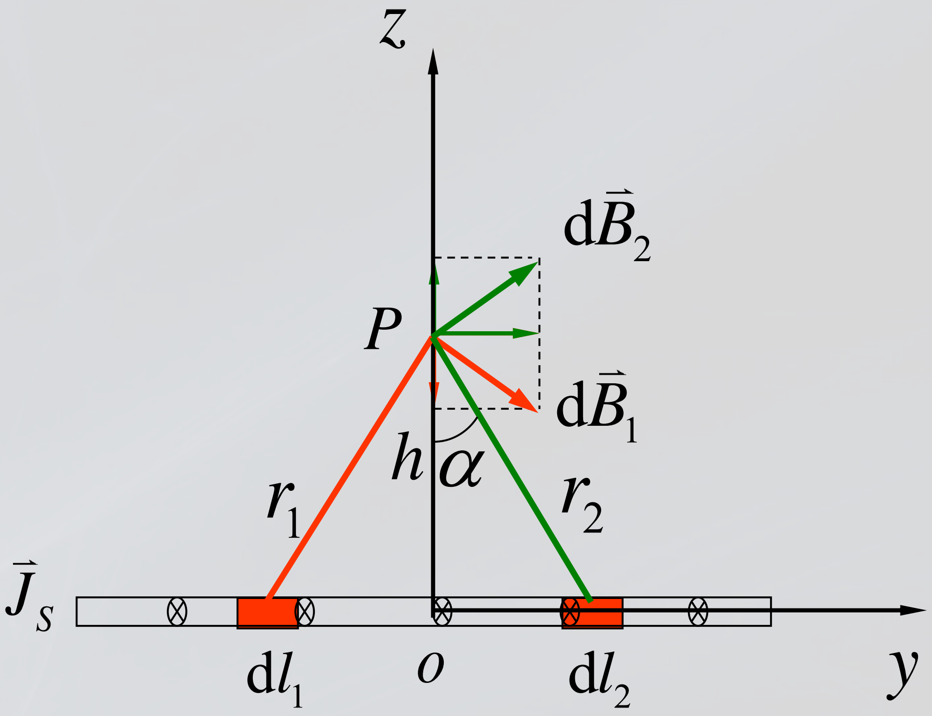
可得: $d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = 2\dfrac{\mu_0 J_S h dy}{2\pi(h^2 + y^2)}\hat{a}_y$

该面电流在P点产生的磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_S h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{h^2+y^2}\hat{a}_y$$

$$= \frac{\mu_0 J_S h}{\pi}\left[\frac{1}{h}\arctan(\frac{y}{h})\right]_0^{\infty}\hat{a}_y$$

$$= \frac{\mu_0 J_S}{2}\hat{a}_y$$



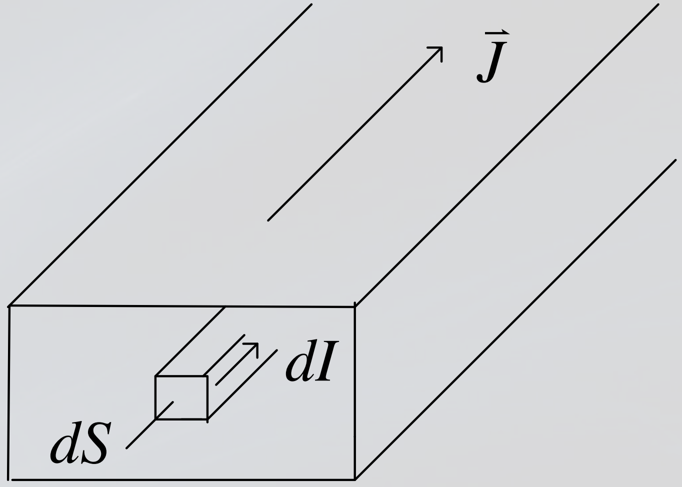
无限大均匀导流面两侧的磁感应强度：

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{J}_S \times \hat{a}_n}{2}}$$

c. **体电流情况: 电流在某一体积内流动。**

体电流密度：在与电流线垂直的方向上平面内单位面积流过的电流。

$$\vec{J} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\hat{a}_I \qquad (\mathrm{A/m^2})$$



$\mathrm{d}S$上流过的电流量： $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{J}\mathrm{d}S$

$\mathrm{d}\vec{I}$ 产生的磁感应强度为：

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}} \frac{\vec{J}\mathrm{d}S\mathrm{d}l_{11} \times \hat{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{11}} \frac{\vec{J} \times \hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}S\mathrm{d}l_{11}$$

整个体电流产生的磁场：

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{R^2}\mathrm{d}V'}$$

小结：

连续分布的电流源磁感应强度的计算

面电流产生的磁场： $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\dfrac{\vec{J}_S\times\hat{a}_R}{R^2}\mathrm{d}S'$

体电流产生的磁场： $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\vec{J}\times\vec{a}_R}{R^2}\mathrm{d}V'$

2.6 矢量磁位的引入与计算

1. 磁通量的连续性
2. 矢量磁位的引入
3. 矢量磁位的计算

1. 磁通量的连续性

磁通量： 磁感应强度对一个曲面的面积分称为穿过该曲面的磁通量。

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

若曲面闭合： $\psi = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

磁感应强度： $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\,' \times \hat{a}_R}{R^2}$

则有： $\boxed{\psi = \oint_S \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}' \times \hat{a}_R}{R^2} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

根据高斯定律：

$$\left\{ \begin{aligned} & \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} \mathrm{d}V \\ & \frac{I\mathrm{d}\vec{l}' \times \hat{a}_R}{R^2} = \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \times I\mathrm{d}\vec{l}' \end{aligned} \right.$$

$$\psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \oint_{l'} \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \times I\mathrm{d}\vec{l}' \mathrm{d}V = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \oint_{l'} \nabla \cdot \left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \times I\mathrm{d}\vec{l}'\right] \mathrm{d}V$$

$$\psi = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \oint_{l'} \nabla\cdot[\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}']\mathrm{d}V$$

利用矢量恒等式：$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\nabla\times\vec{F} - \vec{F}\cdot\nabla\times\vec{G}$

$$\nabla\cdot[\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}'] = I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\nabla\times\nabla(\frac{1}{R}) - \nabla(\frac{1}{R})\cdot\nabla\times I\mathrm{d}\vec{l}'$$

已知：$\nabla\times\nabla(\frac{1}{R}) \equiv 0$　和　$\nabla\times I\mathrm{d}\vec{l}' = 0$

$$\psi = \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \oint_{l'} \nabla\cdot[\nabla(\frac{1}{R})\times I\mathrm{d}\vec{l}']\mathrm{d}V = 0$$

结论： 穿过任意闭合曲面的磁通量恒为零。这就是磁通连续性原理。它说明磁感线是连续的闭合矢线，磁场是无散场。

2. 矢量磁位的引入

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} \mathrm{d}V = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

根据矢量恒等式： $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F} \equiv 0$

引入矢量 $\vec{A}$，令： $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

则： $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$

该矢量 $\vec{A}$ 称为矢量磁位，单位为韦伯/米（Wb/m）。

3. 矢量磁位的计算

a.线电流矢量磁位计算

对线电流的磁感应强度： $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\dfrac{Id\vec{l}'\times\hat{a}_R}{R^2}$

已知： $\nabla(\dfrac{1}{R})=-\dfrac{\hat{a}_R}{R^2}$ $\qquad \vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\nabla(\dfrac{1}{R})\times Id\vec{l}'$

利用矢量恒等式： $\nabla\times(f\vec{G})=\nabla f\times\vec{G}+f\nabla\times\vec{G}$

为零！

得到： $\nabla\times(\dfrac{Id\vec{l}'}{R})=\nabla(\dfrac{1}{R})\times Id\vec{l}'+\dfrac{1}{R}\nabla\times Id\vec{l}'$

则： $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\nabla\times(\dfrac{Id\vec{l}'}{R})$

得到：$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\nabla\times\left(\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R}\right) \longrightarrow \vec{B}=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\left(\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R}\right)$

由：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

矢量磁位：$\boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R}}$

该式为线电流矢量磁位的计算公式。

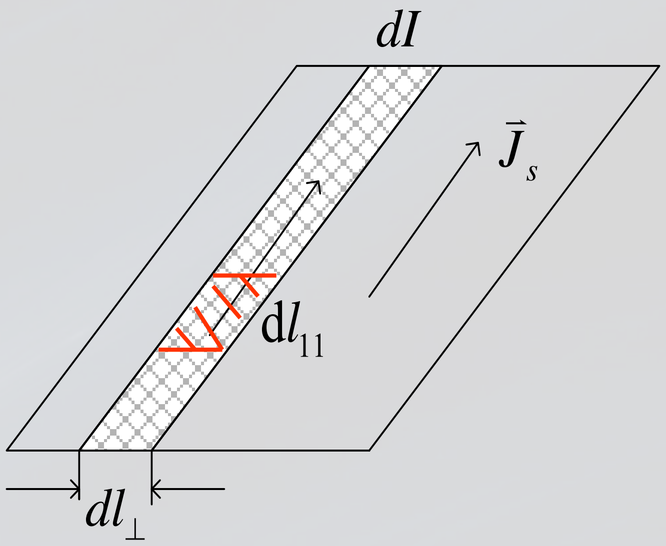
b.面电流矢量磁位计算

面电流密度：$\vec{J}_S = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l_\perp}\hat{a}_I$　(A/m)

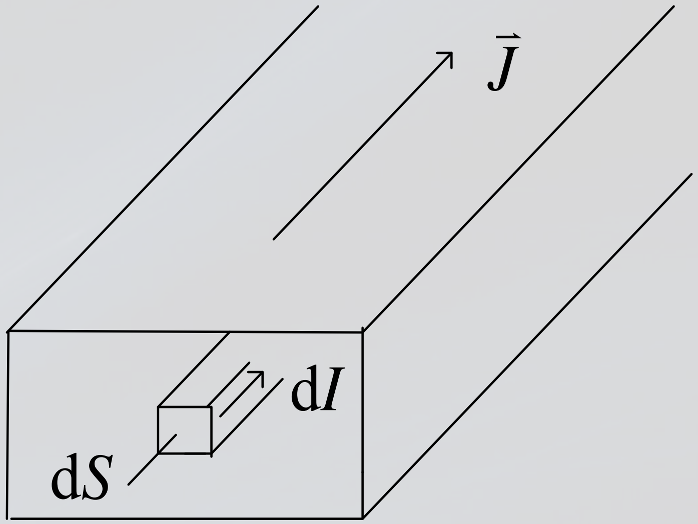
$\mathrm{d}l_\perp$上流过的电流量：$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{J}_S \mathrm{d}l_\perp$

$\mathrm{d}\vec{I}$ 产生的矢量磁位：$\mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'_\parallel} \dfrac{J_s \mathrm{d}l'_\perp \mathrm{d}\vec{l}'_\parallel}{R}$

面电流的矢量磁位：$\boxed{\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'} \dfrac{\vec{J}_S}{R}\mathrm{d}S'}$



c.体电流矢量磁位计算



体电流密度： $\vec{J} = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\hat{a}_I$ (A/m²)

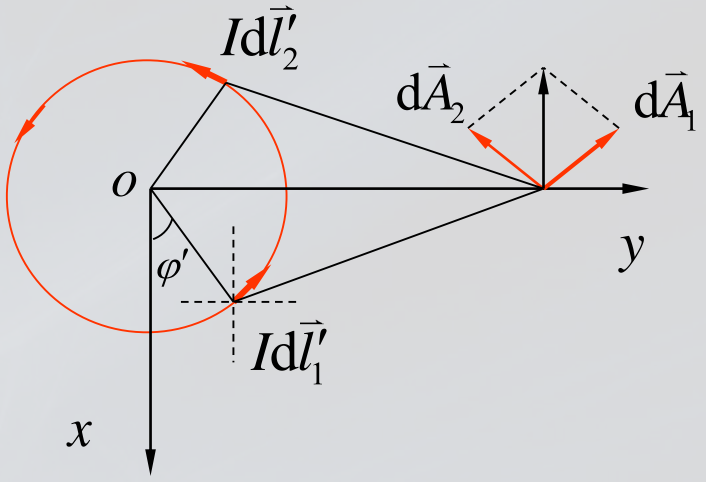
$\mathrm{d}S$上流过的电流量： $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{J}\mathrm{d}S$

$\mathrm{d}\vec{I}$ 产生的矢量磁位： $\mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'_{\|}} \dfrac{J\mathrm{d}S'\mathrm{d}\vec{l}'_{\|}}{R}$

体电流的矢量磁位： $\boxed{\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V'} \dfrac{\vec{J}}{R}\mathrm{d}V'}$

例：试求电流为I, 半径为a 的小圆环在远离圆环处的磁感应强度。

解：先求 $\vec{A}$ 再求 $\vec{B}$ ，选用球坐标系，



已知：
$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{Id\vec{l}'}{R'}$$

$$Id\vec{l}'=Iad\varphi'\hat{a}_{\varphi'}$$

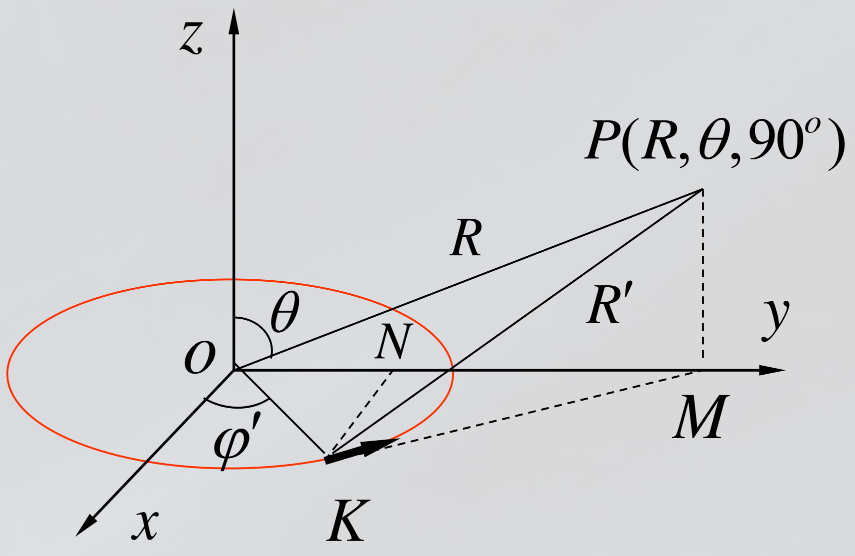
在直角坐标系中：

$$Id\vec{l}_1'=Iad\varphi'\left(-\hat{a}_x\sin\varphi'+\hat{a}_y\cos\varphi'\right)$$

$$Id\vec{l}_2'=Iad\varphi'\left(-\vec{a}_x\sin\varphi'-\vec{a}_y\cos\varphi'\right)$$

所以：
$$Id\vec{l}_1'+Id\vec{l}_2'=-2Ia\sin\varphi'd\varphi'\hat{a}_x \quad =2Ia\sin\varphi'd\varphi'\hat{a}_\varphi$$

如图： $R'^2 = PM^2 + MK^2$



其中： $PM^2 = (R\cos\theta)^2$

$$MK^2 = NK^2 + NM^2$$

$$= (a\cos\varphi')^2 + (R\sin\theta - a\sin\varphi')^2$$

$$= a^2 + (R\sin\theta)^2 - 2aR\sin\theta\sin\varphi'$$

可得： $R'^2 = R^2 + a^2 - 2aR\sin\theta\sin\varphi'$

当： $R \gg a \longrightarrow R' = R[1 - \frac{2a}{R}\sin\theta\sin\varphi']^{\frac{1}{2}}$

二项式展开，忽略高阶无穷小量： $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}(1 + \frac{a}{R}\sin\theta\sin\varphi')$

将： $$\left.\begin{aligned} I\mathrm{d}\vec{l}_1' + I\mathrm{d}\vec{l}_2' &= 2Ia\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'\hat{a}_\varphi \\ \frac{1}{R'} &= \frac{1}{R}(1+\frac{a}{R}\sin\theta\sin\varphi') \end{aligned}\right\} \longrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R'}$$

得： $$\vec{A} = \hat{a}_\varphi\frac{2\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{R}(1+\frac{a}{R}\sin\theta\sin\varphi')\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 SI}{4\pi R^2}\sin\theta$$

式中 $S=\pi a^2$ 为圆环的面积。小电流环的磁矩：$\vec{m}=IS\hat{a}_n$

因为 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，最后得：

$$\vec{B} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta\hat{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & R\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 SI}{4\pi R^3}\left(2\cos\theta\hat{a}_R+\sin\theta\hat{a}_\theta\right)$$

小结：

1. **磁通量的连续性** $\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$

2. **矢量磁位的引入** $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

3. **矢量磁位的计算**

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'}{R}$$ （线电流计算公式）

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{J}_S}{R}\mathrm{d}S'$$ （面电流计算公式）

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}\mathrm{d}V'$$ （体电流计算公式）

麦克斯韦方程组的建立

1 全电流定律

2 电磁感应定律

3 电磁场高斯定律

4 电流连续性方程

2.7 全电流定律——麦克斯韦第一方程

1. 安培环路定律
2. 位移电流的引入
3. 全电流定律

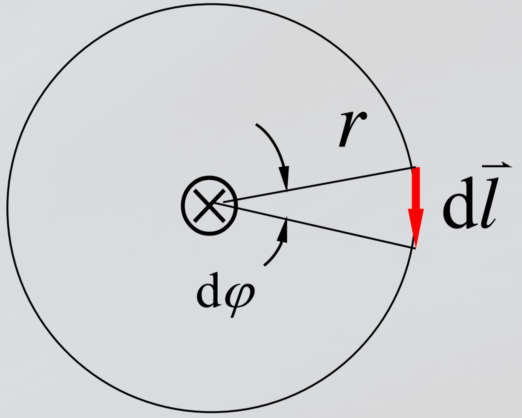
1. 安培环路定律

试求：无限长载流直导线的磁感应强度在圆环上的环量，如图所示。

已知：无限长载流直导线周围的磁感应强度为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

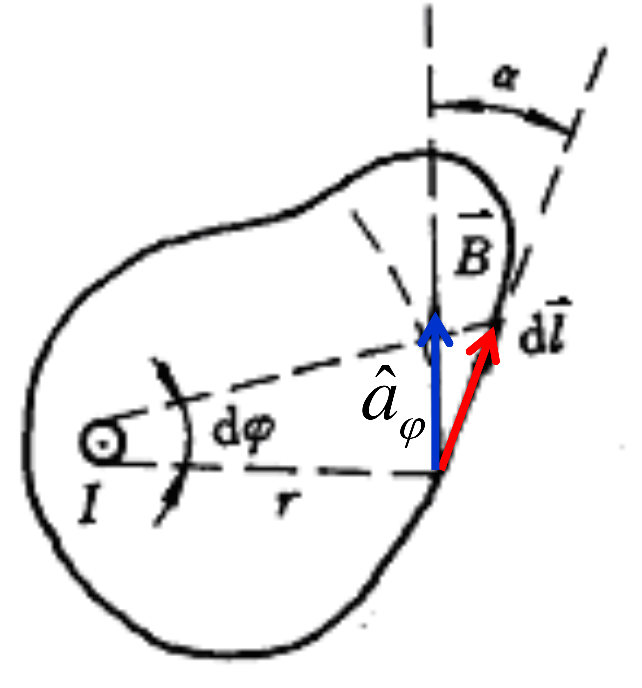
$$\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi$$



$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_\varphi)r\mathrm{d}\varphi$$

可得：$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}l = \mu_0 I$

试求： 无限长载流直导线的磁感应强度在任意闭合曲线上的环量，如图所示。



$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

其中：$\hat{a}_\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \cos\alpha \mathrm{d}l = r\mathrm{d}\varphi$

可得：$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$

结论：若积分回路中包含多个电流则 $\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$

已知： $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$

引入一个新矢量 $\vec{H}$，令 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

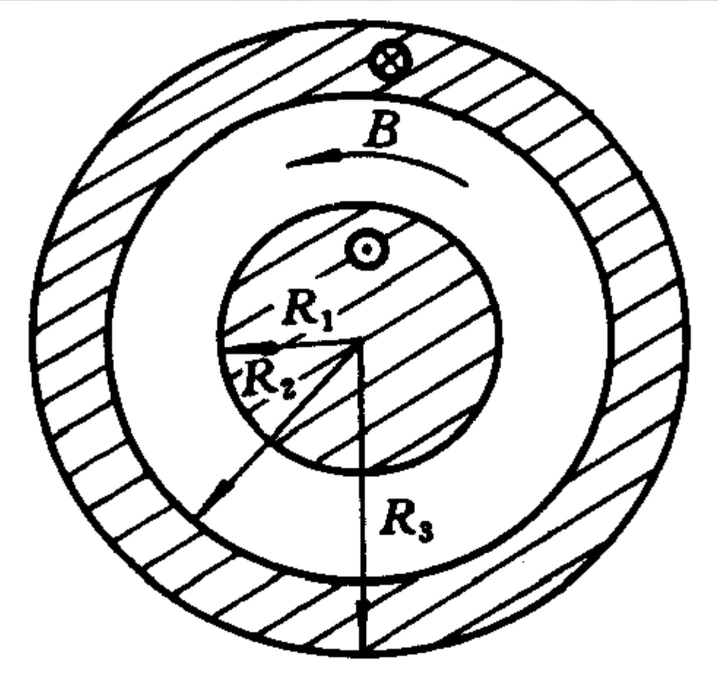
则： $\boxed{\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i}$ ——安培环路定律

矢量 $\vec{H}$ 称为磁场强度，单位为安培/米（A/m）。

安培环路定律的含义：

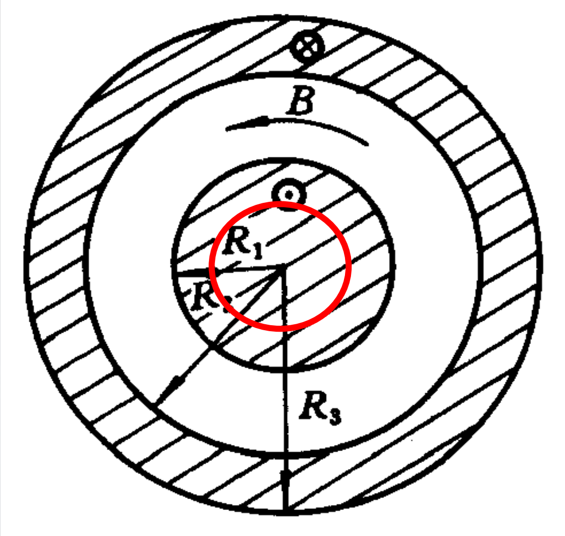
在真空中，磁场强度沿任意回路的线积分，等于该回路所限定的曲面上穿过的总电流。

例：如图所示，一无限长同轴电缆芯线通有均匀分布的电流*I*，外导体通有均匀的等量反向电流，求各区域的磁感应强度。



解: 根据题意，取圆柱坐标系。

(1) $r < R_1$ **区域**



内导体的电流密度为: $\vec{J}_1 = \hat{a}_z I / \pi R_1^2$

取半径为 r 的圆环为积分回路,

根据安培环路定理:

$$\oint_l \vec{H}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \vec{J}_1 \cdot r\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \hat{a}_z = \frac{I}{R_1^2} r^2$$

其中: $\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\varphi \hat{a}_\varphi \longrightarrow \oint_l \vec{H}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_{1\varphi} \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi = 2\pi r H_{1\varphi}$

可得: $2\pi r H_{1\varphi} = \frac{I}{R_1^2} r^2 \longrightarrow \vec{H}_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \hat{a}_\varphi \qquad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2} \hat{a}_\varphi$

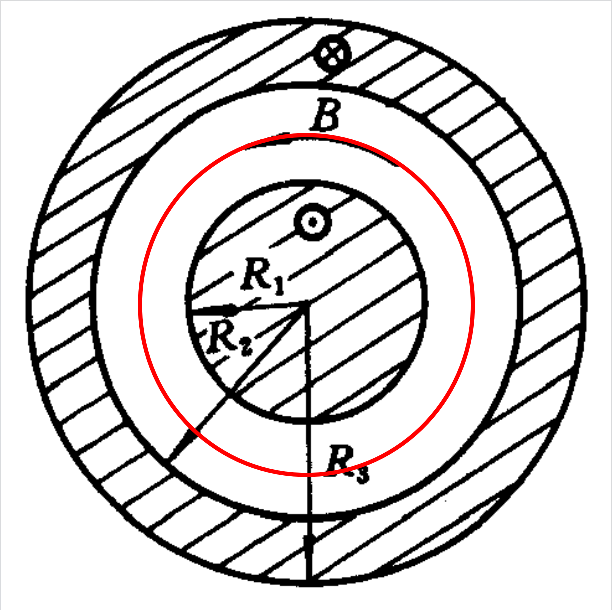
(2) $R_1 < r < R_2$ **区域**

同理取半径为r 的圆为积分回路，则有:

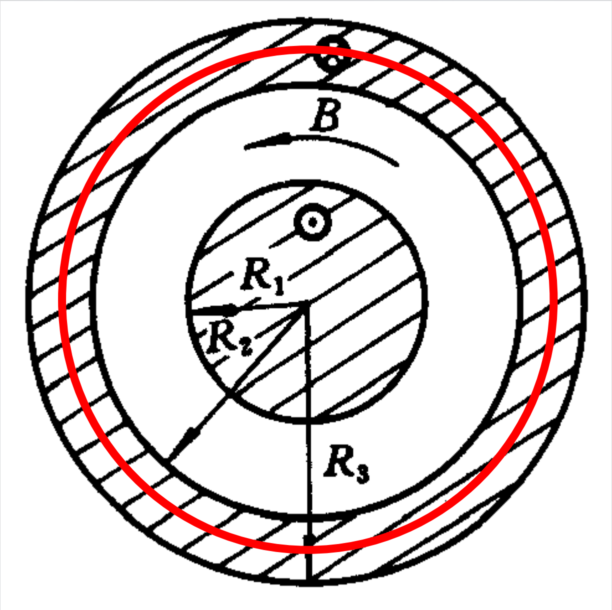
$$\oint_l \vec{H}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

$$\oint_l \vec{H}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r H_{2\varphi}$$

可得: $\vec{H}_2 = \dfrac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$ $\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$



(3) $R_2 < r < R_3$ 区域



外导体的电流密度为: $\vec{J}_2 = -\hat{a}_z I / \pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)$

同理，取半径为r的圆为积分回路，则有:

$$\oint_l \vec{H}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I - \int_{R_2}^{r}\int_0^{2\pi} J_2 r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

其中: $\oint_l \vec{H}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r H_{3\varphi}$

$$I - \int_{R_2}^{r}\int_0^{2\pi} J_2 r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{(R_3^2 - r^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} I$$

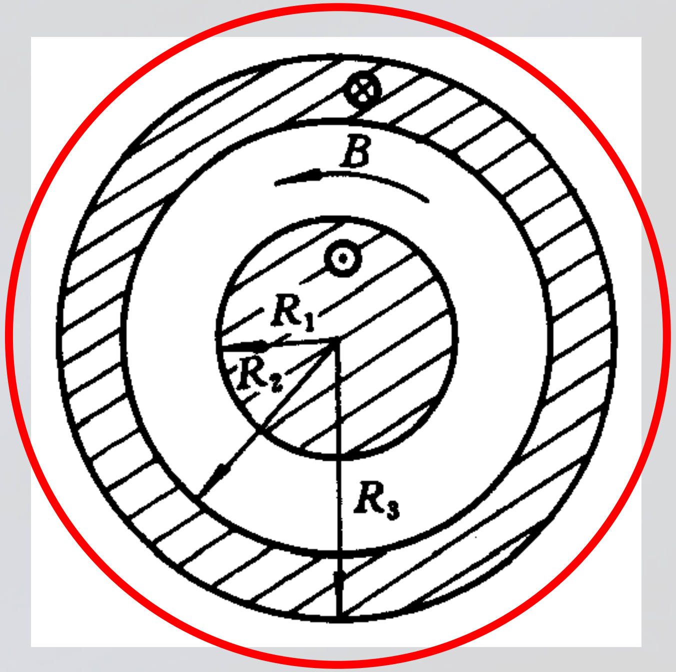
可得: $\vec{H}_3 = \dfrac{I(R_3^2 - r^2)}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)r}\hat{a}_\varphi$　　$\vec{B}_3 = \dfrac{\mu_0 I(R_3^2 - r^2)}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)r}\hat{a}_\varphi$

(3) $r > R_3$ 区域

同理，取半径为r的圆为积分回路，则有:

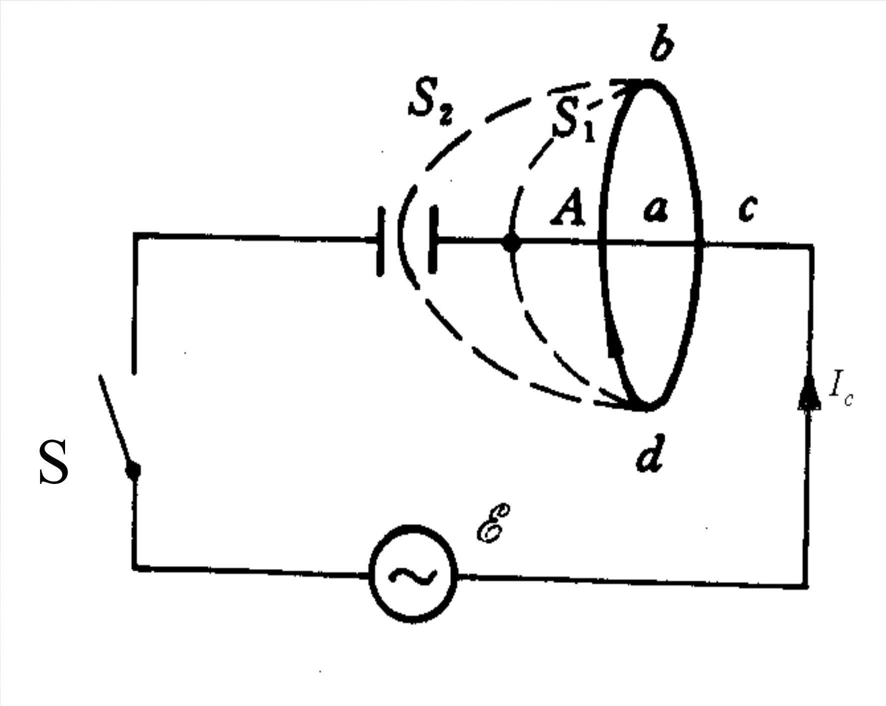
$$\oint_l \vec{H}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

可得: $\vec{H}_4 = 0$ $\vec{B}_4 = 0$



2. 位移电流的引入

传导电流连续是安培环路定律成立的前提。



穿过 S_1 的传导电流为 I_C，则：

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C$$

穿过 S_2 的传导电流为0 ，则：

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

矛盾?

位移电流的引入：在电容器两极板间，由于电场随时间的变化而存在位移电流，其数值等于流向正极板的传导电流。

位移电流的计算

传导电流： $I_{\mathrm{C}}=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

平板电容器极板上的电荷： $q=CV=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}Ed=\varepsilon_0 ES$

位移电流： $I_{\mathrm{d}}=I_{\mathrm{C}}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\varepsilon_0 E\right)}{\mathrm{d}t}S$

引入一个新矢量 $\vec{D}$ ，在真空中令 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$,

则位移电流密度： $J_{\mathrm{d}}=\dfrac{I_{\mathrm{d}}}{S}=\dfrac{\mathrm{d}(\varepsilon_0 E)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$

某曲面上的位移电流： $I_{\mathrm{d}}=\int_S\vec{J}_d\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

3. 全电流定律

引入位移电流之后，穿过 S 面的总电流为： $I = I_{\mathrm{C}} + I_{\mathrm{d}}$

总电流密度为： $\vec{J} = \vec{J}_{\mathrm{C}} + \vec{J}_{\mathrm{d}} = \vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

某曲面上全电流为： $I = \int_{S} (\vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

全电流定律： $\boxed{\oint_{l} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S} (\vec{J}_{\mathrm{C}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$ ——麦克斯韦第一方程。

该式的物理意义：表明磁场不仅由传导电流产生，也能由随时间变化的电场，即位移电流产生。

小结：

1. **安培环路定律** $\oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i$

2. **位移电流的引入** $J_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

3. **全电流定律** $$\boxed{\oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{J}_\mathrm{C} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

——麦克斯韦第一方程。