5.1 场论和路论的统一关系

1. 欧姆定律
2. 焦耳定律
3. 基尔霍夫定律和麦克斯韦方程

电路理论

基本物理量：电压 U 电流 I

电路参数：　电阻 R 电感 L 电容 C

电磁场理论

基本场量：电场强度 $\vec{E}$ 电位移矢量 $\vec{D}$

磁感应强度 $\vec{B}$ 磁场强度 $\vec{H}$

媒质参数：电导率 σ 磁导率 μ 介电常数 ε

场论和路论关系：统一、不可分割的。

场论强调普遍性，一切宏观的电磁现象都遵循的普遍规律。

路论给出的是特殊性，即在静态情况下，或在电路尺寸远小于工作波长时即准静态情况下，由麦克斯韦方程组导出的近似理论。

一、欧姆定律

1. 概念

欧姆定律反映的是电阻两端电压和流经电阻的电流的关系，即

$$U = IR$$

2. 条件

欧姆定律只是在线性、各向同性媒质的假设下才成立。

3. 欧姆定律的微分形式

电阻率

$$\boxed{\vec{J}_C=\sigma\vec{E}} \rightarrow \vec{E}=\frac{1}{\sigma}\vec{J}_C=\rho\vec{J}_C$$

$$U=-\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$U=-\int_l \rho\vec{J}_C\cdot d\vec{l}=I\rho\int_l\frac{dl}{S}=\rho\frac{Il}{S}$$

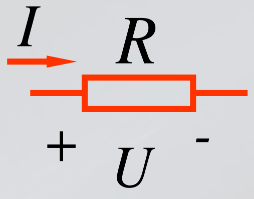
对于均匀直导线的电阻：

$$R=\rho\frac{l}{S}$$

可得：$U=IR$

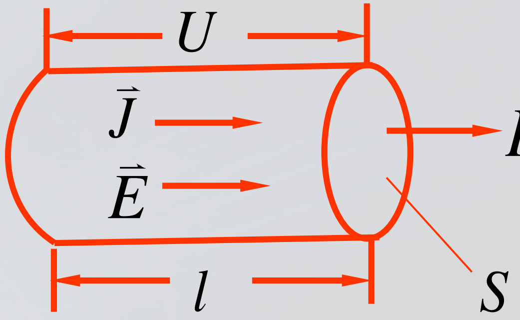
4. 两者之间的关系

路论：



$$U=IR$$

场论：



$$\vec{J}_C=\sigma\vec{E}$$

由此可见，从场论出发，可以导出路论中的欧姆定律表达式。

二、焦耳定律

1. 概念

在一段含有电阻的电路中，计算损耗功率的关系式为：

$$P = UI \Longleftrightarrow P = I^2R$$

2. 功率损耗的含义

导电媒质中自由电子在电场力作用下运动，运动过程中电子和结晶点阵不断发生碰撞作用，电子的动能被转化为热能称为功率损耗。

3. 焦耳定律的微分形式

电子电荷 q 在电场力作用下移动距离 Δl ，则电场力做功为：

$$\Delta W = q\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$$

为电子漂移速度

相应的功率为： $p = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$

体积元 $\mathrm{d}V$ 中全部自由电子的损耗功率为:

$$\mathrm{d}P = \sum p = \vec{E}\cdot(Nq\vec{v})\mathrm{d}V = \vec{E}\cdot\vec{J}_C\mathrm{d}V$$

$$\vec{J}_C = \sigma\vec{E} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \vec{E}\cdot\vec{J}_C \longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \sigma E^2}$$

4. 场论与路论的关系

在体积为 V 的一段导体中，总的损耗功率为:

$$P=\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_C \mathrm{d}V$$

对于一段均匀直导体的情况，令 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}l\mathrm{d}S$ ，

$\mathrm{d}\vec{l}$ 和电流线一致，$\mathrm{d}\vec{S}$ 和电流线垂直，则:

$$P=\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_C \mathrm{d}V=\int_l E\mathrm{d}l\cdot\int_S J_C\mathrm{d}S=UI$$

结论：从场论出发，可以导出路论中的焦耳定律表达式。这又一次反映了场论和路论的统一关系。

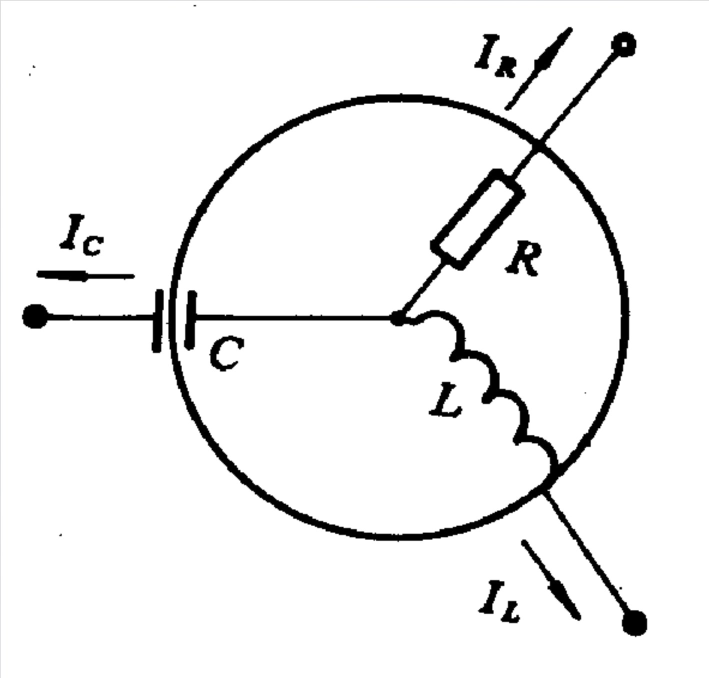
三、基尔霍夫定律和麦克斯韦方程的统一

1. 基尔霍夫电流定律

（1）概念

任一瞬时任一节点的电流的代数和恒为零。

$$\sum_{j=1}^{N} I_j = 0$$



（2）物理意义

表明电荷是守恒的，电荷不会在节点处积累或消失，换句话说，电流在节点处是连续的。

(3）由场论中的推导

根据电流连续性定律：$\oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV$

S 为围绕一节点的任意封闭曲面。

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV, \qquad -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = -I_d$$

$$\oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^{N} I_{cj} = -I_d \longrightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{N} I_j = 0}$$

结论：由场论中的电流连续性方程可以推到出路论中的基尔霍夫电流定律。再次反映了场论和路论的统一关系。

2. 基尔霍夫电压定律

（1）概念

电路中任一回路内全部电压降的代数和为零，即

$$\sum_{j=1}^{N} U_j = 0$$

（2）物理意义

基尔霍夫电压定律实际上是能量守恒原理的体现。

（3）由场论中的推导

法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\longrightarrow \oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_l \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_l (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\longrightarrow \nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \longrightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \longrightarrow \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

其中： $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_0$

电源电场　　电路中的电场 $\vec{E}_0 = \dfrac{\vec{J}_C}{\sigma}$

则： $\vec{E}_a = -\dfrac{\vec{J}_C}{\sigma} - \nabla \phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

等号右边三项分别为电阻、电容和电感元件中的电场。

$$-\vec{E}_a=\frac{\vec{J}}{\sigma}+\nabla\phi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

等号右边三项分别为电阻、电容和电感元件中的电场。

积分形式：$$-\oint_l \vec{E}_a\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_l \frac{\vec{J}_C}{\sigma}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\oint_l \nabla\phi\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\oint_l \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$U_\mathrm{S}+U_R+U_L+U_C=0 \longrightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{N}U_j=0}$$

结论：由场论中的法拉第电磁感应定律可以推到出路论中的基尔霍夫电压定律。再次反映了场论和路论的统一关系。

小结：

场论和路论的统一关系

场论是宏观电磁现象遵循的普遍规律

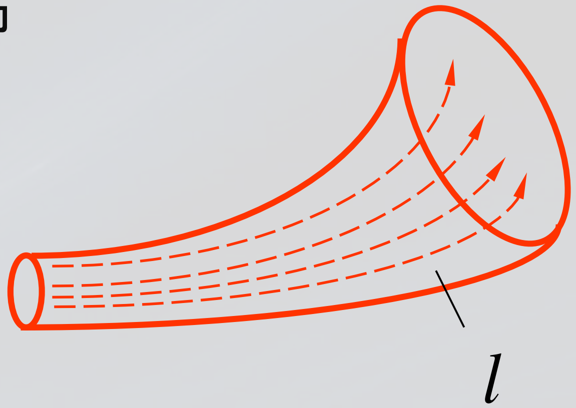
路论是静态或准静态情况下由场论推到的特例

5.2 电阻的计算

电阻的计算

设和电流线垂直的两个端面为等位面，两端面之间的电压降为：

$$U=-\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



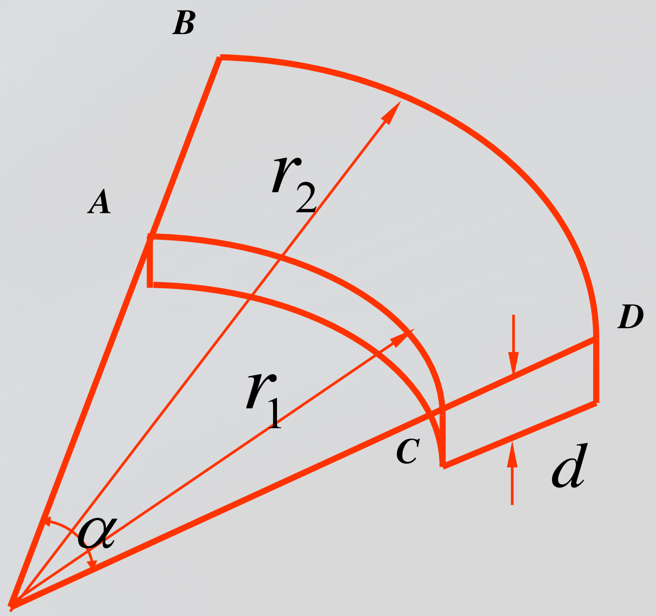
通过任意横截面S的电流为：

$$I=\int_S \vec{J}_c\cdot d\vec{S}=\int_S \sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

根据定义可得到两端面间导电媒质的电阻R为：

★ $$R=\frac{U}{I}=\frac{-\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\int_S \sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

例 1：有一扇形导体，电导率为σ，厚度为d，圆弧半径分别为r_1和r_2，两侧平面的夹角为α，如图所示。求:(1)沿厚度方向的电阻；(2)两圆弧面间的电阻；(3)两侧平面间的电阻。



扇形导体

解 （1）上、下扇面分别为等位面，其中电场为均匀场，设该电场为E_0，上、下底面间的电压为：

$$U = E_0 d$$

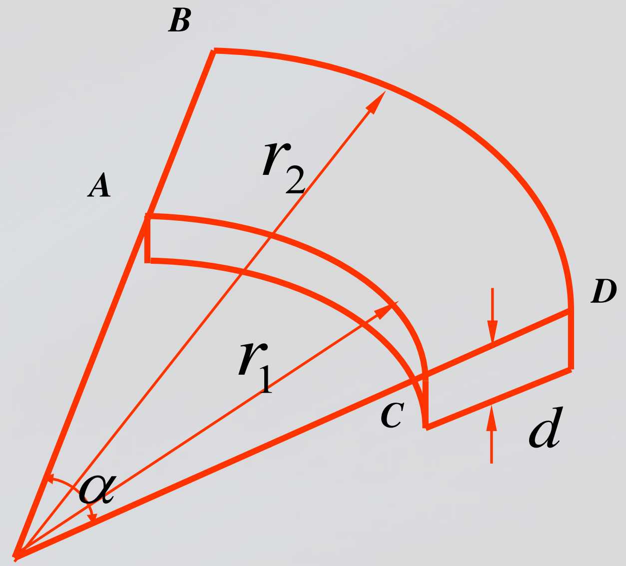
上、下面间的电流密度为： $J_c = \sigma E_0$

于是总电流为： $I = J_c S = \dfrac{\sigma E_0 \alpha (r_2^2 - r_1^2)}{2}$

厚度方向的电阻为： $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{2d}{\sigma \alpha (r_2^2 - r_1^2)} \quad (\Omega)$

（2）两圆弧面为等位面，其中电场沿径向变化，设沿径向流过的电流为 I，则其间任意弧面S上的电流密度为：

$$\vec{J}_c = \frac{I}{S}\hat{a}_r = \frac{I}{d\alpha r}\hat{a}_r$$



又因为： $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$

所以其间电场为： $\vec{E} = \dfrac{I}{\sigma d\alpha r}\hat{a}_r$

两弧面之间的电压为：$U = \int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{I}{\sigma d\alpha r}dr = \frac{I}{\sigma d\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$

于是电阻为： $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{\sigma d\alpha}\ln\dfrac{r_2}{r_1} \quad (\Omega)$

(3)两侧面分别为等位面，其中电场与r有关，与φ无关，设两侧面间电压为U，则：

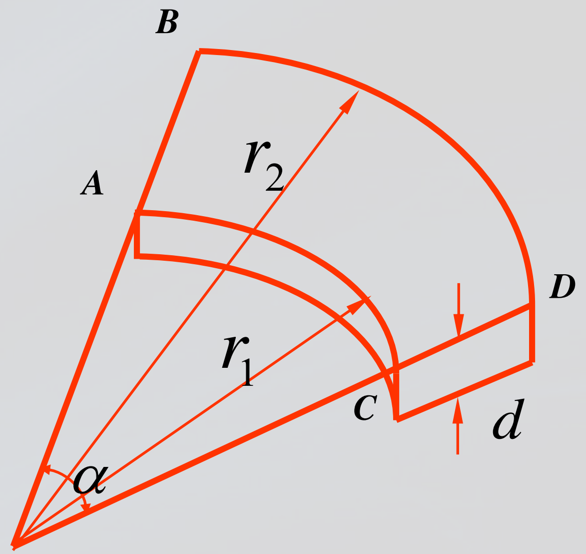
$$U=\int_0^{\alpha}E(r)r\mathrm{d}\varphi=E(r)r\alpha$$

得电场：$$E(r)=\frac{U}{\alpha r}$$

电流密度为：$$\vec{J}_{c}=\sigma\vec{E}=\frac{\sigma U}{\alpha r}\hat{a}_{\varphi}$$

电流为：$$I=\int\vec{J}_{c}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_0^d\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sigma U}{\alpha r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z=\frac{\sigma dU}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

两侧平面间的电阻为：$$R=\frac{U}{I}=\frac{\alpha}{\sigma d\ln r_2/r_1}\quad(\Omega)$$



小 结:

电阻的计算 $$R=\frac{U}{I}=\frac{-\int_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\int_S \sigma\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

计算思路

$$\text{设}E\rightarrow\begin{cases}\vec{J}_{\mathrm{c}}\rightarrow I\\ U\end{cases}\rightarrow R$$

$$\text{设}I\rightarrow\vec{J}_{\mathrm{c}}\rightarrow\vec{E}\rightarrow U\rightarrow R$$

$$\text{设}U\rightarrow\vec{E}\rightarrow\vec{J}_{\mathrm{c}}\rightarrow I\rightarrow R$$

5.3　电容的计算

1. 孤立导体的电容
2. 双导体系统的电容
3. 多导体的部分电容

1. 孤立导体的电容

$$C=\frac{Q}{\phi}$$ 式中：Q为导体所带的电荷量，ϕ为导体的电位。

孤立导体的电容指的是该导体与零电位参考导体之间的电容。

例：在无限大接地导体平面上方h高处，有一半径为 a 的长直圆柱导体，其轴线与平面平行，求：圆柱导体单位长度上的电容。

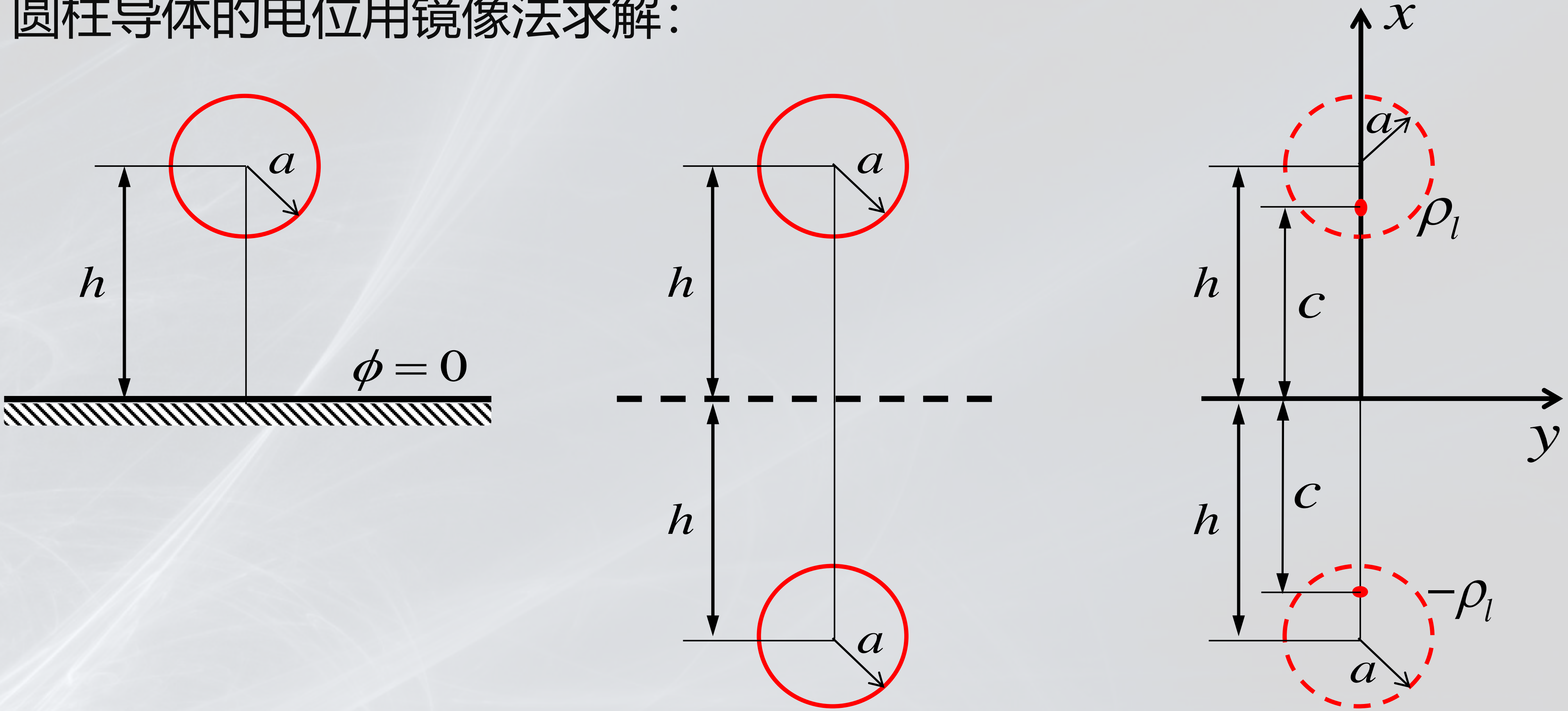
解： 圆柱导体单位长度上的电容指的是该导体与导体平面之间的电容。

$$C=\frac{Q}{\phi}$$

Q → 圆柱导体单位长度上的电荷量

ϕ → 圆柱导体的电位

圆柱导体的电位用镜像法求解：



圆柱导体的电位计算:

根据电轴法: $c=\sqrt{h^2-a^2}$

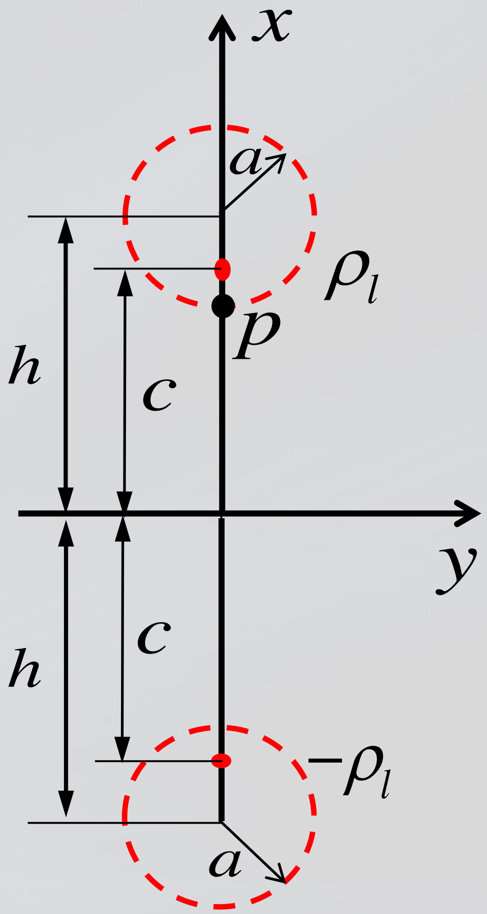
假设：电轴的线电荷密度为 ρ_l

圆柱导体表面P点的电位:

$$\phi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{c+(h-a)}{c-(h-a)}$$

圆柱导体单位长度上的电荷量:

$$Q=\rho_l$$



导体圆柱单位长度的电容：

$$Q = \rho_l$$

$$C = \frac{Q}{\phi}$$

$$\phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{c + (h - a)}{c - (h - a)}$$

可得：

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(c + h - a) - \ln(c - h + a)}$$

其中：$c = \sqrt{h^2 - a^2}$

2. 双导体系统的电容

$C = \dfrac{Q}{U}$ 式中 Q 为带正电导体的电荷量，U 为两导体间的电压。

$$Q = \oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$U = -\int_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$C = \frac{\oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{-\int_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

由上式可见：

欲计算两导体间的电容 C，必须求出其间的电场 $\vec{E}$。

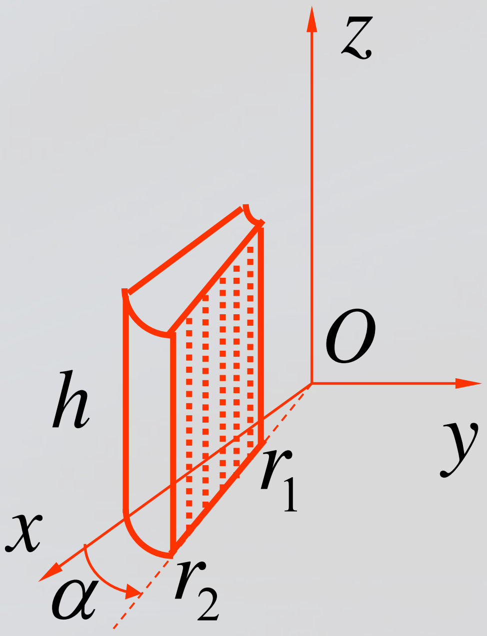
例： 如图所示，电容器可以用圆柱坐标系表示，一极板位于 xoz 平面，另一极板和 xoz 面成 α 角，电容器高为h，径向尺寸 $r = r_2 - r_1$，内部填充介质的介电常数为 ε 。求：电容。

解： 忽略边缘效应，由边界条件判断，则极板间电场与 r有关，与 φ无关，$\vec{E} = E(r)\hat{a}_\phi$

设两极板间电压为 U

$$U = -\int_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^\alpha E(r) r \mathrm{d}\varphi = E(r) r\alpha$$

则： $E(r) = \dfrac{U}{\alpha r}$



在 $\varphi = 0$ 的极板处，根据电场边界条件：

$$\rho_S = D_n = \varepsilon E_n \quad = \frac{\varepsilon U}{r\alpha}$$

在极板上总电荷为：

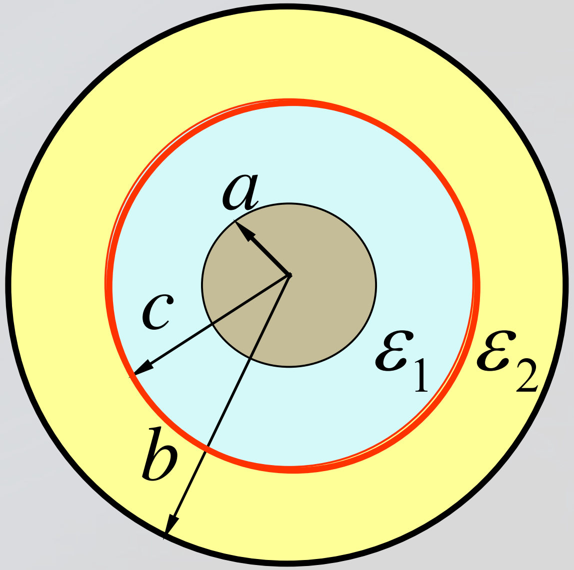
$$Q = \int_S \rho_S \mathrm{d}S = \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon U}{r\alpha} \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon U h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

所以电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

例： 一无限长同轴电缆的内外半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的两层介质，如图所示。

求：同轴电缆单位长度的电容。



解： 在场域中有不同的介质时，首先要分析介质分界面处的边界条件：

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$$

设内导体单位长度带电荷量为 Q，

应用高斯定律：

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q \longrightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{a}_r$$

所以: $\vec{E}_1 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_1 r}\hat{a}_r, \qquad \vec{E}_2 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_2 r}\hat{a}_r$

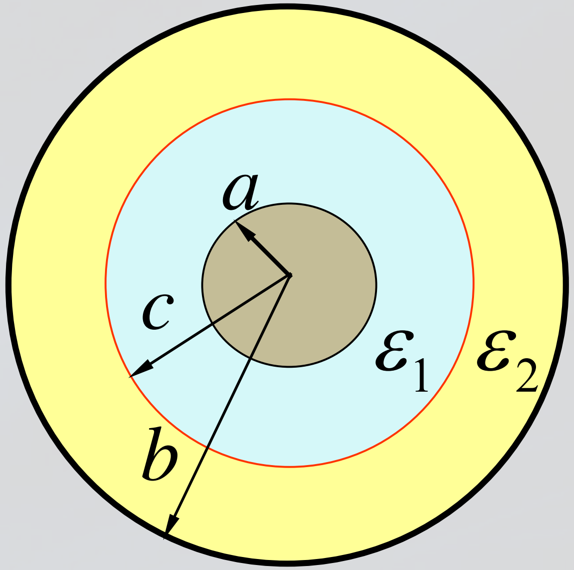
内外导体间的电压为:

$$U = \int_a^c \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}r\hat{a}_r + \int_c^d \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}r\hat{a}_r$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{c}{a} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{b}{c}$$

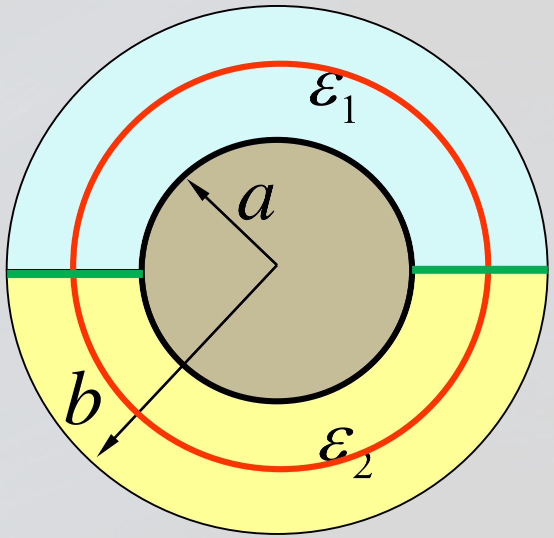
同轴线单位长度电容为:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln(c/a) + \varepsilon_1 \ln(b/c)}$$



例： 一无限长同轴电缆的内外半径分别为 a 和 b，其间填充介电常数为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的两层介质，如图所示。

求：同轴电缆单位长度的电容。



解： 在场域中有不同的介质时，首先要分析介质分界面处的边界条件：

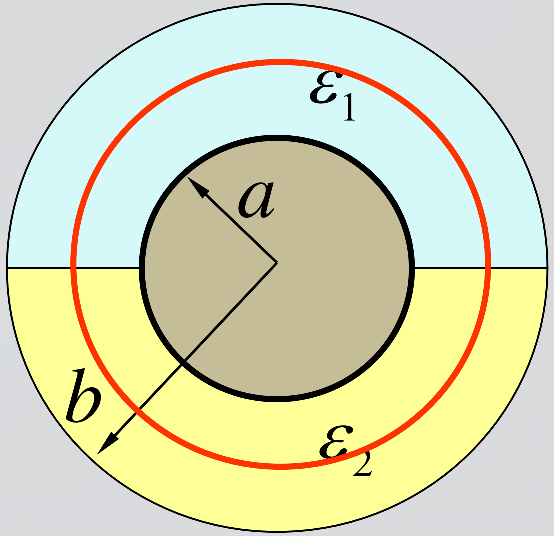
$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

设内导体单位长度带电荷量为 Q，

应用高斯定律：

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q \longrightarrow D_1 \pi r + D_2 \pi r = Q$$

$$D_1\pi r + D_2\pi r = Q \longrightarrow \varepsilon_1 E_1 \pi r + \varepsilon_2 E_2 \pi r = Q$$



所以：$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \dfrac{Q}{\pi r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\hat{a}_r$

内外导体间的电压为：

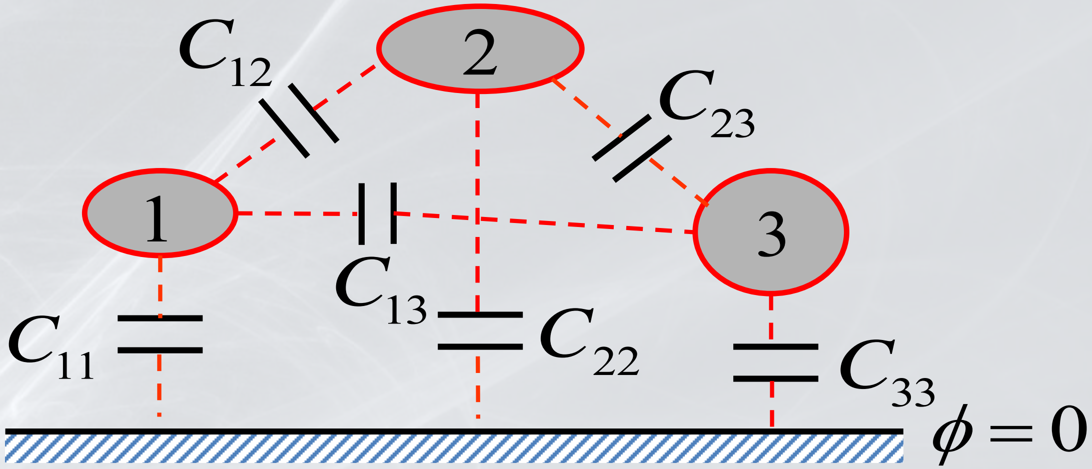
$$U = \int_a^b \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}r\hat{a}_r = \frac{Q}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\ln\frac{b}{a}$$

同轴线单位长度电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln(b/a)}$$

3. 多导体的部分电容

多导体的电容，每个导体的电位不仅与导体本身电荷有关，同时还与其他导体上的电荷有关，对于三个导体以上的多导体系统用部分电容来描述。



其中：

C_{11}, C_{22}, C_{33} 称为自电容

C_{12}, C_{13}, C_{23} 称为互电容

在该系统中，有如下关系式：

$$q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}(\phi_1 - \phi_2) + C_{13}(\phi_1 - \phi_3)$$

$$q_2 = C_{21}(\phi_2 - \phi_1) + C_{22}\phi_2 + C_{23}(\phi_2 - \phi_3)$$

$$q_3 = C_{31}(\phi_3 - \phi_1) + C_{32}(\phi_3 - \phi_2) + C_{33}\phi_3$$

小 结:

1. 孤立导体的电容 $C = \dfrac{Q}{\phi}$

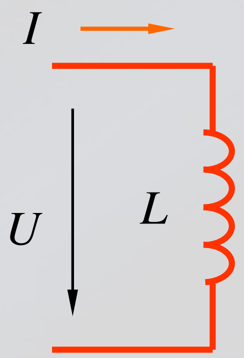
2. 双导体系统的电容 $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{-\int_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$

3. 多导体的部分电容

5.4 电感的计算

1. **电感的概念**
2. **自感的计算**
3. 互感的计算

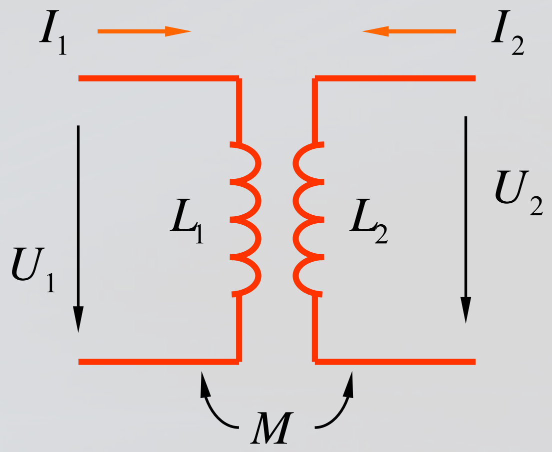
1. 电感的概念: 包括自感 L 和互感 M 。



在正弦交流电路中，若只含一个纯电感时，如图所示。电感上的电压和电流的关系为

$$U = j\omega LI$$

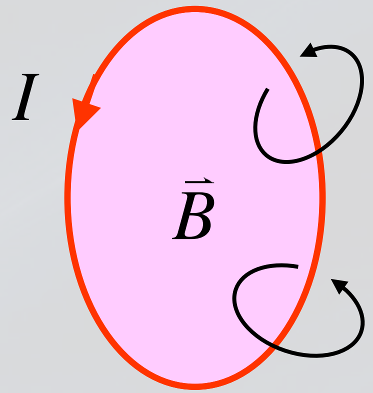
当电路包括两个以上电感线圈时，如图所示。电感上的电压和电流的关系为:



$$\left.\begin{aligned} U_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ U_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned}\right\}$$

2. 自感的计算

（1）单匝线圈的自感



如图所示。

假设线圈内外不存在铁磁性物质，则 I 和 Ψ之间存在线性关系，比值是一个常数

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

式中 L称为自感系数，简称为自感，它取决于线圈的几何形状和尺寸以及磁介质的磁导率。

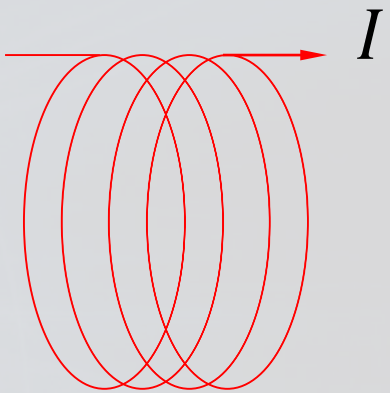
磁通为 $\Psi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

根据矢量磁位的定义 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

由斯托克斯定理，得到 $\Psi = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\oint_l \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{I}$$

（2）多匝线圈的自感



若有 N 匝相同的线圈，则得磁链

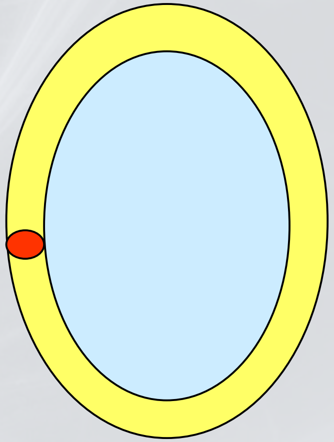
$$\Lambda = N\Psi$$

相应回路的电感：$L = \dfrac{N\Psi}{I}$

（3）内自感和外自感

内自感：导线内部的磁链与导线中电流的比值。

外自感：导线外部环面内的磁链与导线中电流的比值。



$$L_i = \frac{\Psi_i}{I}$$

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I}$$

单个载流回路的自感应为内自感和外自感之和，即

$$L = L_i + L_0$$

式中 L_i 为内自感， L_0 为外自感。

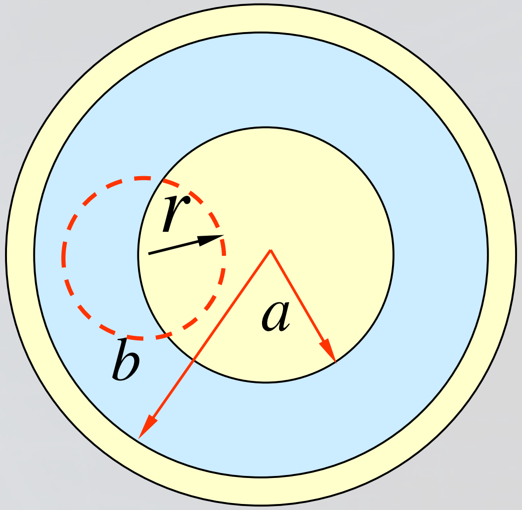
例1：一空气同轴线，内导体的半径为a，外导体的内半径为b，设外导体的壁厚很小，求同轴线单位长度的电感。

解：同轴线单位长度的电感可分为内导体中的内自感、内外导体之间的外自感和外导体中的内自感三部分。

(1)内导体的内自感 $(0 \le r \le a)$

如图所示，由安培环路定律得

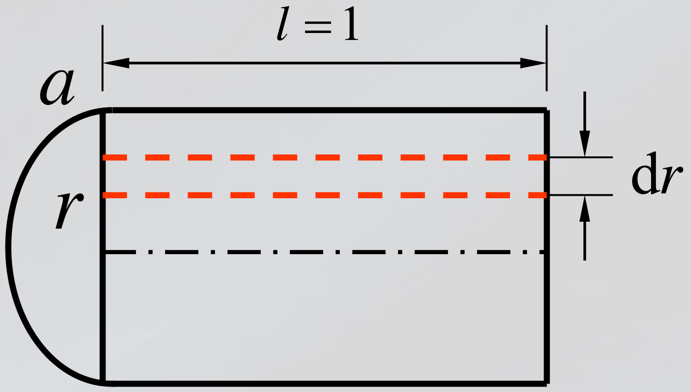
$$\oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I' \quad \begin{cases} \oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_\varphi 2\pi r \\ I' = \dfrac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = \dfrac{r^2}{a^2} I \end{cases}$$



所以： $$\vec{B}_\mathrm{i} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\varphi$$

单位长度内导体截面的磁通量为

$$\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}} = \vec{B}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\mathrm{d}r$$



$\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}}$ 只和半径为*r*的圆截面内的电流 I' 交链，与总电流 I 相交链的磁链为：

$$I' = \frac{r^2}{a^2}I$$

$$\mathrm{d}\Lambda_{\mathrm{i}} = \frac{r^2}{a^2}\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{i}} \quad = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 r^3 I}{2\pi a^4}\mathrm{d}r$$

在内导体内的总磁链为： $\Lambda_{\mathrm{i}} = \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} r^3 \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$

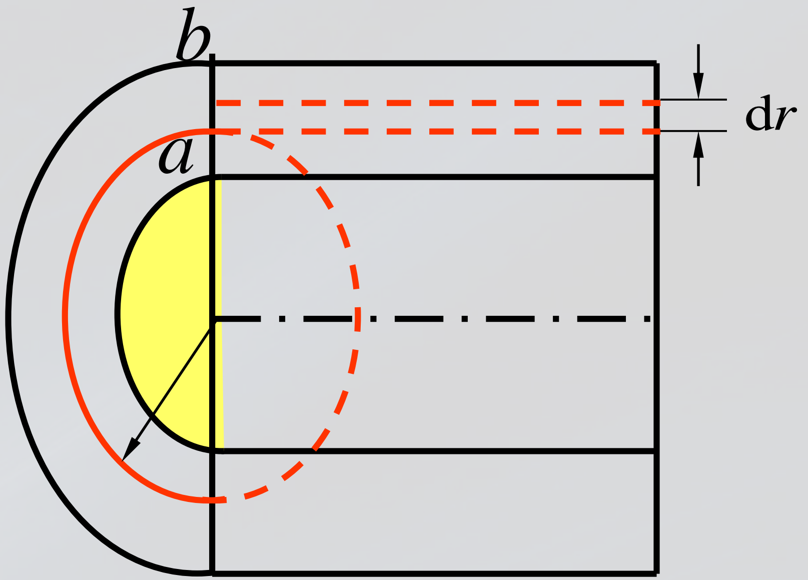
所以：内导体单位长度的内自感为 $L_{\mathrm{i}} = \frac{\Lambda_{\mathrm{i}}}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}$ (H/m)

(2) 内外导体间的外自感 $(a \le r \le b)$

根据安培环路定律

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

所以: $\vec{B}_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$



内外导体之间单位长度上的磁通为:

$$\Psi_0 = \int_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \int_a^b \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r}\right) dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

同轴线单位长度的外自感为:

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \qquad \text{(H/m)}$$

(3) 外导体中的内自感

按题意，外导体的壁很薄，可以认为电流只在 $r=b$ 的壁面上流动，这样外导体中的内自感为零。 $L_3=0$

于是同轴线单位长度的总电感为

$$L=L_i+L_0=\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\qquad \text{(H/m)}$$

若考虑外导体的壁厚 $(b\le r\le c)$，c 为外导体的外半径，需给出外导体的内自感 L_i' 。

利用能量关系也可方便地算出：

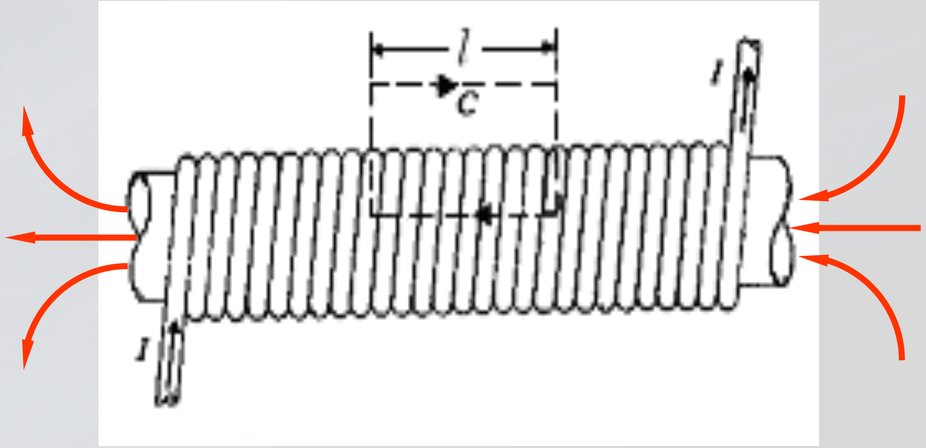
$$L_i'=\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{c^4\ln\frac{c}{b}}{(c^2-b^2)^2}+\frac{b^2-3c^2}{4(c^2-b^2)}\right]\qquad \text{(H/m)}$$

此时，同轴线单位长度的总电感为：$L=L_i+L_0+L_i'$

例2：一非常长的非磁性圆柱的半径为a，每单位长度上紧密缠绕 n 匝线圈，形成空心电感器(螺线管)，若通过线圈的电流 I是恒定的。求该电感器单位长度上的电感。

解：该螺线管内部的磁感应强度可由安培环路定律求出。如图所示，构造一个长度为 l 的矩形围线，显然，螺线管外部没有磁场，则：

$$Bl = \mu_0 nlI \longrightarrow \vec{B} = \mu_0 nI\hat{a}_z$$



可见，半径为a的圆柱体内的磁通量为：

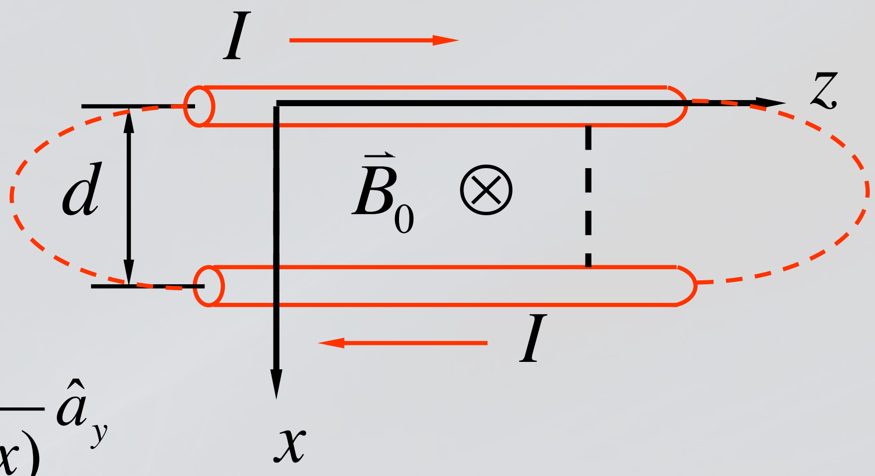
$$\Psi = B \cdot \pi a^2 = \mu_0 nI\pi a^2$$

所以，该电感器单位长度的电感为：$L = \dfrac{n\Psi}{I} = \mu_0 \pi n^2 a^2 \quad (\mathrm{H/m})$

例3：无限长双导线单位长度上的电感。导线半径为 a 。

解：已知单位长度的内自感为：

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi}$$



外自感： $\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

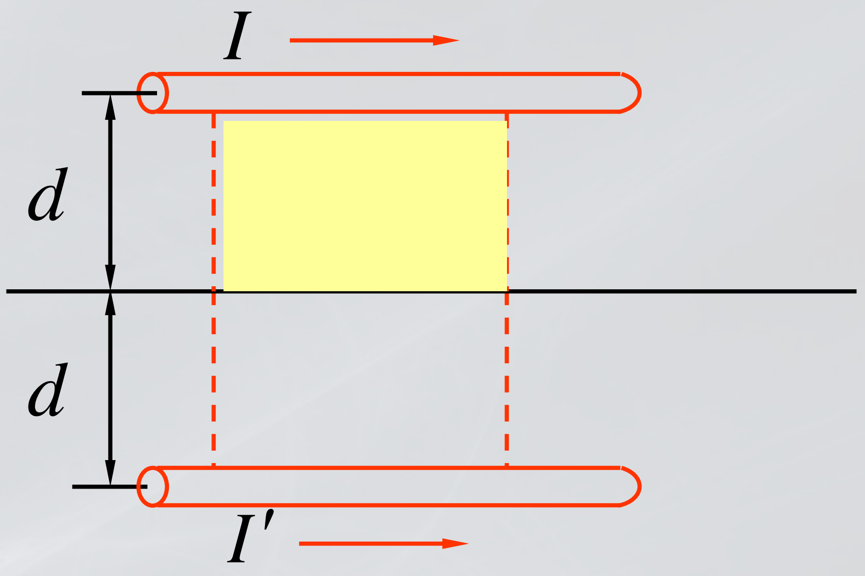
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{a}_y \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}\hat{a}_y$$

$$\Psi_0 = \int_S (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)\cdot d\vec{S} = \int_0^1\int_a^{d-a} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)\cdot dxdz\hat{a}_y$$

单位长度上的外自感： $L_0 = \dfrac{\Psi_0}{I} = \dfrac{\mu_0}{\pi}\ln\dfrac{d-a}{a}$

双导线单位长度上的电感： $L = 2L_i + L_0 = \dfrac{\mu_0}{4\pi} + \dfrac{\mu_0}{\pi}\ln\dfrac{d-a}{a}$

思考：一无限长导线平行于无限大导磁面，导线半径为a，求：单位长度上的电感。



单位长度上的电感：　$L = L_i + L_0$

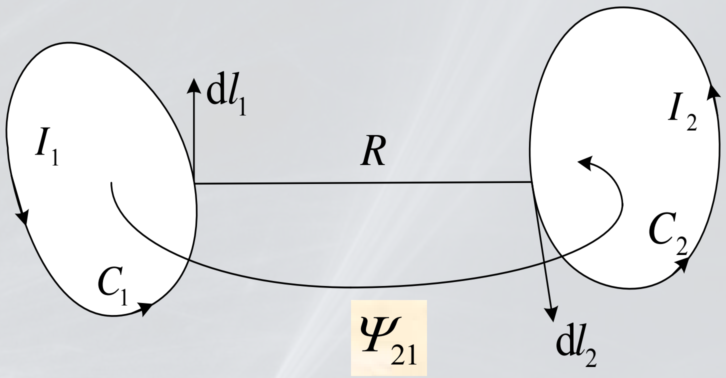
小结:

自感的计算：内自感和外自感

5.5 电感的计算

1. 电感的概念
2. 自感的计算
3. **互感的计算**

3. 互感的计算



C_1线圈对 C_2线圈的互感为

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

式中： $\Psi_{21}=\int_{S_2}\vec{B}_1\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

同理，C_2线圈对 C_1线圈的互感为

$$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

如果两个载流回路分别由 N_1、N_2匝线圈组成，则互感变为

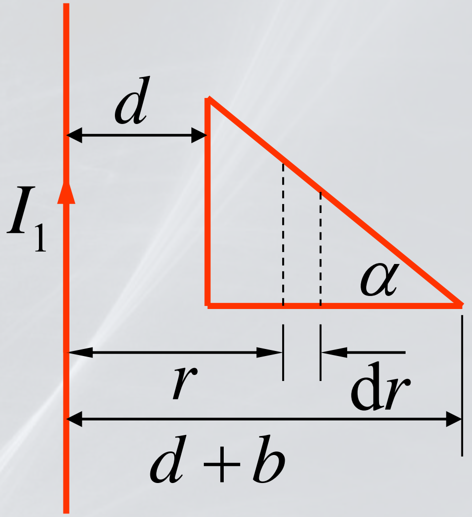
$$M_{21}=\frac{N_2\Psi_{21}}{I_1}$$

$$M_{12}=\frac{N_1\Psi_{12}}{I_2}$$

不难证明，线圈回路间的互感是互易的，即

$$M_{12}=M_{21}$$

例4：如图所示，求无限长直导线和直角三角形导线回路间的互感。



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\Psi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\mathrm{d}\vec{S} = z\mathrm{d}r\hat{a}_\varphi$$

$$z = (d+b-r)\tan\alpha$$

解：根据互感定义

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$\Psi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

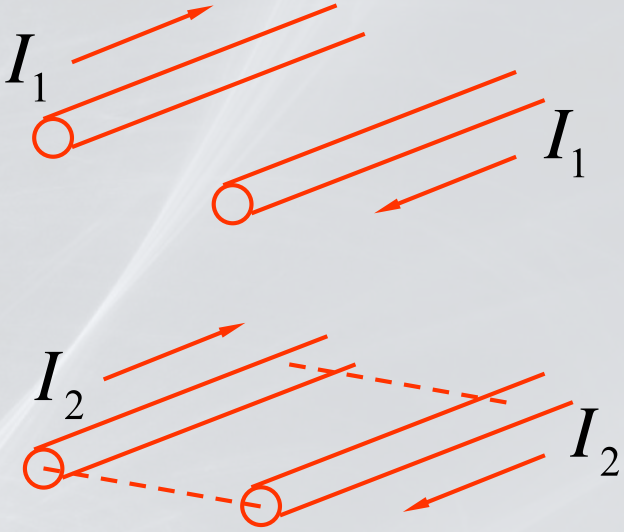
$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 \tan\alpha}{2\pi}\int_d^{d+b} \frac{(d+b-r)}{r}\mathrm{d}r$$

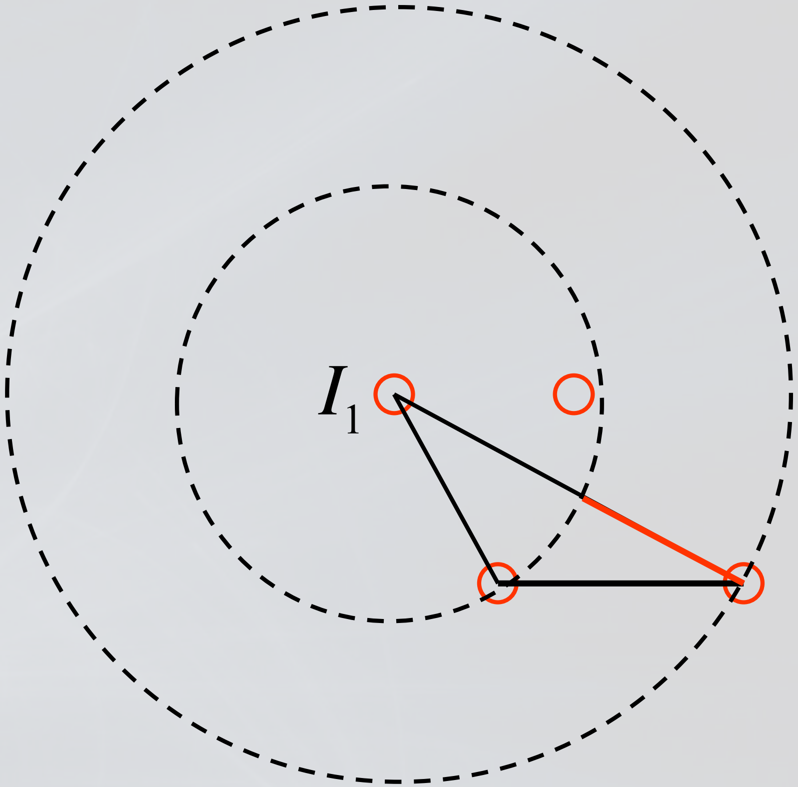
$$= \frac{\mu_0 I_1 \tan\alpha}{2\pi r}[(d+b)\ln(1+\frac{b}{d})-b]$$

得：

$$M_{21} = \frac{\mu_0 \tan\alpha}{2\pi}[(d+b)\ln(1+\frac{b}{d})-b]$$

思考：如图所示，求两对无限长双导线单位长度上的的互感。





小结：

互感的概念与计算