第14周讲稿及作业

Edited by Hu Chen

OUC

June 3, 2020

目录

傅里叶正弦变换和余弦变换是定义在$[0,+\infty)$上的积分变换, 这启发我们考虑关于时间自变量作积分变换.

同傅里叶正（余）弦变换一样, 拉普拉斯变换也可从傅里叶变换导出. 傅里叶正（余）弦变换是奇函数（偶函数）的傅里叶变换, 是傅里叶变换的特殊情形. 拉普拉斯变换则起始于在负实轴上恒为零的函数的傅里叶变换. 导出傅里叶正（余）弦变换时我们对定义在$[0,+\infty)$上的函数做了奇（偶）延拓, 现在我们将定义在$[0,+\infty)$上的函数零延拓到$\mathbb{R}$上, 即补充定义它在$(-\infty,0)$上的函数值全为零.

我们引入**单位阶跃函数**(又称为亥维赛【Heaviside】函数)

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t\leq 0,\end{cases}$$

于是定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(t)$零延拓到$\mathbb{R}$上后可表示为$H(t)f(t)$. 不过这种表示方法只能帮助我们方便地表示出零延拓后的结果, 对扩大可作傅里叶变换的函数类是无用的.

如何扩大可作傅里叶变换的函数类？

注意到趋于无穷远时，以足够快的速度趋于零的有界函数就可以作傅里叶变换. 我们可以考虑对想作傅里叶变换的函数乘上一个趋于无穷远时，以足够快的速度趋于零的有界函数，从而使它们的乘积就可以作傅里叶变换和逆变换了. 由于乘上的是一个已知的函数，这等于间接地对原来的函数作了傅里叶变换，从而也就扩大了可作傅里叶变换的函数范围.

文献

I. Stakgold and M. Holst, Green's Functions and Boundary Value Problems, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011.

的2.4节中关于缓增函数的部分提到了以函数$e^{-\varepsilon|t|}$为辅助函数的推广方法，它将傅里叶变换的推广引向了广义函数论.

如果我们只考虑在负实轴上恒为零的函数, 辅助函数的寻找就会变得很容易. 只需考虑以指数函数$\mathrm{e}^{-\sigma t}$为辅助函数, 我们就打开了通向拉普拉斯变换的大门.

假设函数$H(t)f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$可作傅里叶变换, 于是由傅里叶积分公式有

$$H(t)f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\xi)f(\xi)\mathrm{e}^{-\sigma\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\quad -\infty<t<+\infty.$$

现在将这个公式限制到$[0,+\infty)$上, 并且在两端同乘以$\mathrm{e}^{\sigma t}$, 便可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)\xi}\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega,\quad t\geq 0.$$

若记$s=\sigma+\mathrm{i}\omega$, 则利用复积分变量替换公式, 上面的公式便可写为更简洁的形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-s\xi}\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\quad t\geq 0, \tag{1}$$

其中关于s的积分是沿直线$\mathrm{Re}s=\sigma$由下往上积分, 而且积分应理解为柯西主值型积分.

同前面定义积分变换的方式一样, 将公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\int_0^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-s\xi}\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\quad t\geq 0 \tag{1}$$

分拆开来, 我们便可以定义拉普拉斯变换及其逆变换.

Definition 1

如果对定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(t)$, 存在$\sigma_0>0$, 使得当$\sigma\geq\sigma_0$时公式(1)成立, 则称

$$\widehat{f}(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{2}$$

为$f(t)$的拉普拉斯变换, 其中$s=\sigma+\mathrm{i}\omega$, 记作$\widehat{f}(s)=\mathcal{L}[f(t)]$或$\mathcal{L}[f]$; 而称

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_0-\mathrm{i}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{i}\infty}\widehat{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{3}$$

为$\widehat{f}(s)$的拉普拉斯逆变换, 记作$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\widehat{f}(s)]$或$\mathcal{L}^{-1}[\widehat{f}]$. 公式(3)称为拉普拉斯变换反演公式或黎曼–梅林反演公式.

从上面的公式(1)的推导过程可知, 函数$f(t)$可作拉普拉斯变换的条件就是函数$H(t)f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$可作傅里叶变换的条件. 所以, 若函数$f(t)$满足下述条件:

1) 当$t<0$时, $f(t)=0$; 当$t\geq 0$时, $f(t)$在任一有限区间上满足狄利克雷条件;
2) 当$t\to+\infty$时, $f(t)$的增长速度不超过某一指数函数, 即存在两个正数M和α使得

$$|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{\alpha t},\quad 0\leq t<+\infty,$$

则当$\sigma_0>\alpha$时, $f(t)$的拉普拉斯变换$\widehat{f}(s)$存在且反演公式(3)成立.

函数$f(t)$的拉普拉斯变换$\widehat{f}(s)$在右半平面$\mathrm{Re}\, s>\alpha$内解析. 由于解析函数可以解析延拓, 我们常在整个复平面上考虑$\widehat{f}(s)$. 在左半闭平面$\mathrm{Re}\, s\leq\alpha$内, $\widehat{f}(s)$可以有奇点.

拉普拉斯变换源自傅里叶变换, 所以它有与傅里叶变换相对应的一些性质. 这些性质的证明与傅里叶变换的性质的证明很相似, 因此, 除微分性质外, 我们对这些性质述而不证.

性质1 (线性性质) 对任意复数 α 和 β 有

$$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathcal{L}[f]+\beta\mathcal{L}[g],\ \mathcal{L}^{-1}[\alpha\widehat{f}+\beta\widehat{g}]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[\widehat{f}]+\beta\mathcal{L}^{-1}[\widehat{g}].$$

性质2 (延迟性质) $\mathcal{L}[f(t-\tau)H(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-\tau s}\widehat{f}(s)\ (\tau>0)$.

这里由于函数 $f(t-\tau)$ 涉及到了 $f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的值，为了强调函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上取值为零，我们特意将函数 $f(t-\tau)$ 用 $f(t-\tau)H(t-\tau)$ 的形式表示.

性质3 (相似性质) $\mathcal{L}[f(ct)]=\dfrac{1}{c}\widehat{f}\left(\dfrac{s}{c}\right)$, $c>0$.

性质4 (微分性质) $\mathcal{L}[f'(t)]=s\widehat{f}(s)-f(0)$.

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\widehat{f}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

证

$$\mathcal{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=s\widehat{f}(s)-f(0).$$

这里用到了 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}=0$，这是因为从拉普拉斯变换的导出过程中可以看出应该有 $\mathrm{Re}s>0$.

至于 n 阶导函数的拉普拉斯变换公式可用数学归纳法证明. $\blacksquare$

特别地，当$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$时有$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\widehat{f}(s)$.

性质5 (像函数的微分性质) $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)=\mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$.

性质6 (积分性质) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$.

性质7 (像函数的位移性质) 对任何一个复数s_0有$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{s_0 t}f(t)]=\widehat{f}(s-s_0)$.

在讨论傅里叶变换时，我们定义了两个$\mathbb{R}$上的函数的卷积，现在我们讨论的是只在$[0,+\infty)$上有定义的函数，所以需要对函数的卷积概念做相应的修改. 设$f(t)$和$g(t)$是两个在$\mathbb{R}$上有定义但在$(-\infty,0)$上取值为零的函数，则

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \\
=&\int_{-\infty}^{0} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \\
=&\int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

因此我们做出如下的定义.

Definition 2

设函数$f(t), g(t)$在$[0, +\infty)$上有定义. 如果积分

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

在$t \in [0, +\infty)$上存在, 则称由该积分定义的函数为$f(t)$和$g(t)$的卷积, 记作

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

性质8 (卷积性质) $\mathcal{L}[f * g(t)] = \widehat{f}(s)\widehat{g}(s)$.

Example 3

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

Example 4

由像函数的微分性质有

$$\mathcal{L}[t^n] = (-1)^n L[(-t)^n \cdot 1] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}},\ n = 1, 2, \cdots .$$

Example 5

对任一复数 a, 由前面两例的结果利用像函数的位移性质可得

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\right] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}\left[t^n \mathrm{e}^{at}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n = 1, 2, \cdots .$$

Example 6

由线性性质和上例的结果有

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] - \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

类似地可得

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Example 7

求解一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t), \quad t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

解　对方程两边作拉普拉斯变换得

$$s\widehat{y}(s) - y_0 + a\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

解得

$$\widehat{y}(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{\widehat{f}(s)}{s+a}.$$

两边作逆变换, 由例5和卷积性质即得

$$y(t) = y_0 \mathrm{e}^{-at} + \int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau. \qquad \blacksquare$$

Example 8

求解二阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t), \quad t > 0, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \end{cases}$$

其中$\omega \neq 0$为实数.

解　对方程两边作拉普拉斯变换得

$$s^2 \widehat{y}(s) - s y_0 - y_1 + \omega^2 \widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

解得

$$\widehat{y}(s) = y_0 \frac{s}{s^2+\omega^2} + y_1 \frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{\widehat{f}(s)}{s^2+\omega^2} = y_0 \frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{\omega} \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega \widehat{f}(s)}{s^2+\omega^2}.$$

两边作逆变换, 由例6和卷积性质即得

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{y_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega (t - \tau) \mathrm{d}\tau. \qquad \blacksquare$$

在19世纪80年代, 英国的数学物理学家亥维赛提出了一套将微分方程形式地转化为代数方程的方法, 被称之为运算微积（许多文献把运算微积的发明归功于亥维赛, 现在我们知道这是不完全正确的.）或算子演算（operational calculus）, 受到了电气工程师们的欢迎, 但因为缺乏数学理论支持而遭到了数学家的质疑.

鉴于亥维赛的方法往往行之有效, 进入20世纪后, 数学家们开始为它寻找理论基础. 最先寻找到的理论基础是积分变换, 特别是拉普拉斯变换.

不同于傅里叶变换真是由傅里叶所创, 拉普拉斯变换其实与拉普拉斯没多大关系. 现代形式的拉普拉斯变换成形于20世纪20年代之后, 而拉普拉斯在1827年便已经去世了. 即便是早期形式的拉普拉斯变换, 也只是在拉普拉斯的著作中出现过而已, 它的源头可追溯到欧拉的著作中.

拉普拉斯变换理论并不能十分令人满意地解释亥维赛在运算微积方面的工作. 这推动了广义函数论的产生以及广义函数的拉普拉斯变换的产生.

亥维赛（1850–1925）的功绩常被世人忽视，至今许多书中称他为电气工程师，但他是英国皇家学会会员，是1912年诺贝尔物理学奖的候选人之一．他对电磁学理论有重大贡献．今天我们熟知的麦克斯韦方程组原本有20个变量20个方程，正是亥维赛将它简化为了两个变量四个方程．他是向量理论的创始人之一，他提出的运算微积曾被评价为“19世纪晚期的三大重要发现之一”．亥维赛幼年得过猩红热，导致听力损伤，后来耳聋加剧，这可能是他一生拒绝参加社交活动的原因．他16岁从学校退学，靠自学成才．因不愿被金钱束缚，1874年亥维赛辞去了工作，全身心投入到了学术研究中．但因为与学术权威观点相左且不愿屈服，亥维赛的论文曾长期被专业期刊拒稿，只能发表在一个商业期刊上．亥维赛终身未婚，父母过世后，晚年靠朋友为他申请的政府津贴生活，从1916年后独自一人生活，于1925年2月3日悄然离世．

现在我们使用拉普拉斯变换求二阶常微分方程$y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$的通解．由于拉普拉斯变换的微分性质中涉及到了初值，在没有初值的情况下似乎不能使用拉普拉斯变换求解常微分方程．但不要忘了，求这个方程的通解等价于求初值任意的初值问题

$$\begin{cases} y''(x)+ay'(x)+by(x)=0, \quad x>0, \\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1. \end{cases}$$

作拉普拉斯变换后可得

$$s^2\widehat{y}(s) - sy_0 - y_1 + as\widehat{y}(s) - ay_0 + b\widehat{y}(s) = 0.$$

由此容易解出

$$\widehat{y}(s) = \frac{sy_0 + ay_0 + y_1}{s^2 + as + b}.$$

设 s_1 和 s_2 为二次多项式方程$s^2 + as + b = 0$的两个根. 根据有理函数的部分分式展式理论,

(1) 若$s_1 \neq s_2$, 则有

$$\widehat{y}(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2},$$

其中系数 c_1 和 c_2 依赖于初值 y_0 和 y_1. 由于初值 y_0 和 y_1 是任意的实数（或复数），从而系数 c_1 和 c_2 也是任意的实数（或复数）. 作逆变换便可得

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{s_1 x} + c_2\mathrm{e}^{s_2 x}.$$

进一步, 当 s_1 和 s_2 为一对共轭复根时, 设$s_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, 则利用欧拉公式可得

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(d_1 \cos\beta x + d_2 \sin\beta x),$$

其中$d_1 = c_1 + c_2, d_2 = (c_1 - c_2)\mathrm{i}$.

(2) 若$s_1 = s_2$, 则有

$$\widehat{y}(s) = \frac{c_2}{(s-s_1)^2} + \frac{c_1}{s-s_1},$$

其中系数 c_1 和 c_2 依赖于初值 y_0 和 y_1, 从而为任意的常数. 作逆变换可得

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{s_1 x} + c_2 x \mathrm{e}^{s_1 x}.$$

由于拉普拉斯变换线性性质中的系数可以为复数, 当方程中的系数 a 和 b 为复数时, 上述讨论仍成立, 只是最后所得的通解中的系数 c_1 和 c_2 的取值应扩至复数范围.

Example 9

求解三阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t, \quad t > 0, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

解　对方程两边作拉普拉斯变换得

$$s^3\widehat{y}(s) + 3s^2\widehat{y}(s) + 3s\widehat{y}(s) + \widehat{y}(s) = \frac{1}{s-1}.$$

解得
$$\widehat{y}(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)^3}.$$
可用卷积性质求此逆变换，但我们更愿意借此机会介绍一个更一般的求逆变换的方法.
根据有理函数的部分分式展式理论可得
$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^3}=\frac{a}{s-1}+\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{s+1}. \tag{4}$$
下面我们借这个例子来说明如何计算有理函数的部分分式展式的系数. 在式(4)两端同乘以 $s-1$, 再令$s=1$即得$a=1/8$. 在式(4)两端同乘以$(s+1)^3$得
$$\frac{1}{s-1}=\frac{a(s+1)^3}{s-1}+b_3+b_2(s+1)+b_1(s+1)^2.$$
令$s=-1$即得$b_3=-1/2$. 在上式两端同时关于 s 求导得
$$-\frac{1}{(s-1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{a(s+1)^3}{s-1}+b_2+2b_1(s+1).$$
令$s=-1$即得$b_2=-1/4$. 继续关于 s 求导得
$$2\frac{1}{(s-1)^3}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{1}{s-1}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{a(s+1)^3}{s-1}+2b_1.$$
令$s=-1$即得$b_1=-1/8$.

对式(4)两边作逆变换，由例5即得

$$y(t)=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-t}-\frac{t}{4}\mathrm{e}^{-t}-\frac{t^{2}}{4}\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{t}-\left(\frac{1}{2}+t+t^{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}.$$

■

回顾上面的系数计算过程，容易发现这些系数的计算实际上是彼此独立的. 特别是系数 a 和 b_1 的计算，实际上就是计算留数

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)^{3}};1\right]\quad 和 \quad \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)^{3}};-1\right].$$

而且上述计算系数 a 和 b_1 的过程与定理5.2给出的计算极点处的留数的方法是一样的. 至于系数 b_2 和 b_3 的计算过程也可以从留数计算的角度作出解释. 例如，对式(4)两端同乘以$s+1$得

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^{2}}=\frac{a(s+1)}{s-1}+\frac{b_3}{(s+1)^{2}}+\frac{b_2}{s+1}+b_1,$$

则

$$b_2=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)^{2}};-1\right].$$

当然上述计算系数 b_2 的过程与定理5.2给出的计算极点处的留数的方法仍是一样的.

理论上, 可以用拉普拉斯变换求解任意阶的线性常系数的常微分方程. 下面我们用它来导出任意n阶齐次常微分方程的通解形式. 这等价于求初值任意的初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=0, \quad t>0, \\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}. \end{cases} \tag{5}$$

作拉普拉斯变换, 利用微分性质可得

$$\widehat{y}(s)=\frac{P_{n-1}(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n},$$

其中$P_{n-1}(s)$是一个至多$n-1$次的多项式, 来自微分性质中涉及初值的项. 我们不需要知道$P_{n-1}(s)$的具体形式, 知道$\widehat{y}(s)$是一个真有理函数就足够了. 于是由有理函数的部分分式展式理论有

$$\widehat{y}(s)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{c_{kj}}{(s-s_k)^j},$$

其中s_k $(k=1,2,\cdots,m)$为$\widehat{y}(s)$的全部极点, n_k 为极点 s_k 的阶. 两边作逆变换, 由线性性质和例5即得

$$y(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{c_{kj}}{(j-1)!}t^{j-1}\mathrm{e}^{s_kt}. \tag{6}$$

当

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

时，我们称由初值问题(5)描述的物理系统是稳定的. 从解的公式(6)中可以看出，一个由上述常微分方程描述的物理系统是稳定的当且仅当它的极点全部位于左半平面.

由于阿贝尔证明了一般一元五次以上（包括五次）的多项式方程无根式解，即一般无法精确求出一元五次及以上的多项式方程的全部根，所以即便有了解的公式(6)，也不一定意味着可以真正求出精确解.

利用拉普拉斯变换不但可以求解常微分方程，还可以求解线性常微分方程组. 对常微分方程组作拉普拉斯变换就是对方程组中包含的常微分方程逐个作拉普拉斯变换.

Example 10

求解线性常微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = \mathrm{e}^t, \\ y'(t) + 3x(t) - 2y(t) = 2\mathrm{e}^t, \end{cases}$$

其初始条件为$x(0) = y(0) = 1$.

解 作拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} s\widehat{x}(s) - 1 + \widehat{x}(s) - \widehat{y}(s) = \dfrac{1}{s-1}, \\ s\widehat{y}(s) - 1 + 3\widehat{x}(s) - 2\widehat{y}(s) = \dfrac{2}{s-1}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s+1)\widehat{x}(s) - \widehat{y}(s) = \dfrac{s}{s-1}, \\ 3\widehat{x}(s) + (s-2)\widehat{y}(s) = \dfrac{s+1}{s-1}. \end{cases}$$

解得

$$\widehat{x}(s) = \widehat{y}(s) = \frac{1}{s-1}.$$

两边作逆变换即得

$$x(t) = y(t) = \mathrm{e}^t.$$

$\blacksquare$

使用向量和矩阵的语言, 我们可以把这个例子中常微分方程组写成如下的形式

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

定义向量值函数的导数为对每个分量函数求导. 例如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

一般地, 设$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^\top$, $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^\top$, 则任意的线性常系数常微分方程组都可以写成如下的形式

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t),$$

其中A为一个n阶矩阵. 对它作拉普拉斯变换得

$$s\widehat{\boldsymbol{x}}(s) - \boldsymbol{x}(0) = A\widehat{\boldsymbol{x}}(s) + \widehat{\boldsymbol{f}}(s),$$

即

$$(sI - A)\widehat{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \widehat{\boldsymbol{f}}(s),$$

其中 I 为单位矩阵.

如果矩阵$sI-A$可逆, 即行列式$|sI-A|\neq 0$, 则

$$\widehat{\boldsymbol{x}}(s)=(sI-A)^{-1}\boldsymbol{x}(0)+(sI-A)^{-1}\widehat{\boldsymbol{f}}(s).$$

由线性代数中的一个逆矩阵表示公式可得

$$(sI-A)^{-1}=\frac{(sI-A)^*}{|sI-A|},$$

其中$(sI-A)^*$为矩阵$sI-A$的伴随矩阵, 它的元素为$sI-A$的代数余子式. 由此可知逆矩阵$(sI-A)^{-1}$的每个元素都是一个s的有理函数.

元素为有理函数的矩阵称为有理函数矩阵.

如果说线性代数方程组的求解可归结为对矩阵性质的研究, 那么现在我们看到, 线性常系数常微分方程组的求解可归结为对有理函数矩阵的研究.

由于无论是线性常系数常微分方程还是常微分方程组, 都可以使用拉普拉斯变换统一讨论它们, 这决定了拉普拉斯变换在以常微分方程（组）为模型的线性系统理论中有着极其重要的应用.

Example 11

求解积分方程

$$y(t) = at + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

解　对方程组两边作拉普拉斯变换得

$$\widehat{y}(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{\widehat{y}(s)}{s^2+1}.$$

解得

$$\widehat{y}(s) = a\frac{s^2+1}{s^4} = \frac{a}{s^2} + \frac{a}{s^4}.$$

两边作逆变换即得

$$y(t) = a\left(t + \frac{t^3}{6}\right).$$

如果对方程(7)两端关于 t 求导，可得

$$y'(t) = a + \int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

继续求导得

$$y''(t) = y(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用方程(7)可得

$$y''(t) = y(t) - y(t) + at = at. \tag{9}$$

从方程(7)和(8)中可以得出$y(0) = 0, y'(0) = a$. 这说明积分方程(7)可以转化为一个常微分方程初值问题求解. 反之, 将方程(9)重写为如下形式

$$y''(t) + y(t) = y(t) + at.$$

视右端项为非齐次项, 利用例8的结果, 可得

$$\begin{aligned} y(t) &= a\sin t + \int_0^t [y(\tau) + a\tau]\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= a\sin t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t a\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

利用分部积分公式可计算出

$$\begin{aligned} \int_0^t a\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau &= a\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t - a\int_0^t \cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= at + a\sin(t-\tau)\Big|_0^t = at - a\sin t. \end{aligned}$$

将其代入上式便又得到了积分方程(7). 这个例子说明常微分方程初值问题和卷积型积分方程可以互相转化. 所以卷积型积分方程虽然看似特殊, 却很重要.

Example 12

求解半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = f(t), \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

解　对方程两边关于 t 作拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\widehat{u}(x,s)}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{s^2}{a^2}\widehat{u}(x,s), \\ \widehat{u}(0,s) = \widehat{f}(s), \lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{u}(x,s) = 0. \end{cases}$$

由它的特征方程$p^2 - (s/a)^2 = 0$有两个相异的复根$p = \pm s/a$可知，此常微分方程的通解为

$$\widehat{u}(x,s) = C_1(s)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x} + C_2(s)\mathrm{e}^{\frac{s}{a}x}.$$

因为$\mathrm{Re}\, s > 0$，于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{u}(x,s) = 0$有$C_2(s) = 0$．又由$\widehat{u}(0,s) = \widehat{f}(s)$可知

$$\widehat{u}(x,s) = \widehat{f}(s)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}.$$

由延迟性质有$u(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{a}\right) H\left(t - \dfrac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{x}{a}, \\ f\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & t \geq \dfrac{x}{a}. \end{cases}$ ■

Example 13

求解端点温度已知的半无限长杆上的温度分布

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = f(t), \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

解　对方程两边关于 t 作拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \widehat{u}(x,s)}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{s}{a^2}\widehat{u}(x,s), \\ \widehat{u}(0,s) = \widehat{f}(s), \lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{u}(x,s) = 0. \end{cases}$$

此常微分方程的通解为

$$\widehat{u}(x,s) = C_1(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x} + C_2(s)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s}}{a}x},$$

其中$\sqrt{s}$为二次根式函数的主值支. 由$\mathrm{Re}s > 0$可推出$\mathrm{Re}\sqrt{s} > 0$. 于是由$\lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{u}(x,s) = 0$有$C_2(s) = 0$. 又由$\widehat{u}(0,s) = \widehat{f}(s)$可知

$$\widehat{u}(x,s) = \widehat{f}(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}.$$

查拉普拉斯变换表可知

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right] = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi.$$

由微分性质得

$$L^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]=L^{-1}\left[s\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

所以由卷积性质得

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau. \qquad \blacksquare$$

Theorem 14

如果$F(s)$是亚纯函数, 并且满足条件

(1) 它的所有极点s_k（有限或无穷个）都分布在左半平面$\mathrm{Re}s < \sigma_0$内;

(2) 存在一族以$s=\sigma_0$为心以R_n为半径的左半圆周C_n, 且有

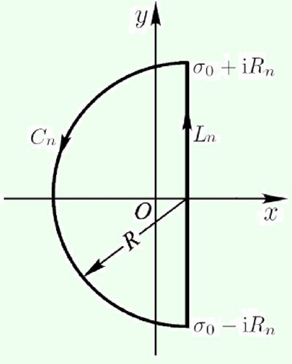
$$R_1 < R_2 < \cdots < R_n \to +\infty,$$

在这族半圆周C_n上, 当$n \to +\infty$时, $F(s)$一致趋于零.
则$F(s)$的拉普拉斯逆变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma_0 - \mathrm{i}\infty}^{\sigma_0 + \mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = \sum_k \mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st}; s_k\right],$$

右端和式表示对全部极点处的留数求和. 特别地,
当$F(s) = \dfrac{G(s)}{H(s)}$, 其中$G(s), H(s)$皆为解析函数, s_k为$H(s)$的一阶零点, 且$G(s_k) \neq 0$, 则

$$f(t) = \sum_k \frac{G(s_k)}{H'(s_k)} \mathrm{e}^{s_k t}.$$



Example 15

求解有限长弦的强迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = A\sin\omega t, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

解 对方程两边关于 t 作拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \widehat{u}(x,s)}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{s^2}{a^2}\widehat{u}(x,s), & 0 < x < l, \\ \widehat{u}(0,s) = 0, \widehat{u}_x(l,s) = \dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}. \end{cases}$$

这个常微分方程的通解可表示为

$$\widehat{u}(x,s) = C(s)\sinh\frac{s}{a}x + D(s)\cosh\frac{s}{a}x.$$

利用边界条件可得解为

$$\widehat{u}(x,s)=\frac{Aa\omega}{s(s^2+\omega^2)\cosh\frac{l}{a}s}\sinh\frac{x}{a}s.$$

易知$\widehat{u}(x,s)$的全部孤立奇点为可去奇点$s=0$，一阶极点$s=\pm\mathrm{i}\omega$和$s=\pm\dfrac{(2k-1)\pi a\mathrm{i}}{2l}$，$k=1,2,3,\cdots$. 记$\omega_k=\dfrac{(2k-1)\pi a}{2l}$，于是由定理14有

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\mathrm{Res}\left[\widehat{u}(x,s)\mathrm{e}^{st};\mathrm{i}\omega\right]+\mathrm{Res}\left[\widehat{u}(x,s)\mathrm{e}^{st};-\mathrm{i}\omega\right]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\mathrm{Res}\left[\widehat{u}(x,s)\mathrm{e}^{st};\mathrm{i}\omega_k\right]+\mathrm{Res}\left[\widehat{u}(x,s)\mathrm{e}^{st};-\mathrm{i}\omega_k\right]\right\}\\
&=2\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Res}\left[\widehat{u}(x,s)\mathrm{e}^{st};\mathrm{i}\omega\right]\right\}+\sum_{k=1}^{+\infty}2\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Res}\left[\widehat{u}(x,s)\mathrm{e}^{st};\mathrm{i}\omega_k\right]\right\}\\
&=2\mathrm{Re}\left[\frac{Aa\omega\sinh\left(\frac{x}{a}s\right)\mathrm{e}^{st}}{s(s+\mathrm{i}\omega)\cosh\left(\frac{l}{a}s\right)}\right]_{s=\mathrm{i}\omega}+\sum_{k=1}^{+\infty}2\mathrm{Re}\left[\frac{Aa\omega\sinh\left(\frac{x}{a}s\right)\mathrm{e}^{st}}{s(s^2+\omega^2)\sinh\left(\frac{l}{a}s\right)}\right]_{s=\mathrm{i}\omega_k}\\
&=\frac{Aa}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t+16Aa\omega l^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{\omega_k x}{a}\sin\omega_k t}{(2k-1)\pi[4l^2\omega^2-(2k-1)^2\pi^2a^2]}.
\end{aligned}$$

习题十三作业

1.求下列函数的拉氏变换:

$$(1)\ \frac{1-\cos\omega t}{\omega};\ (2)\ \cosh(\omega t).$$

3. 设$f_1(t)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t,\ f_2(t)=\cosh\omega t$, 其中$\omega\neq 0$, 求

$$f_1(t)*f_2(t).$$

5. 求解

$$\begin{cases} x'-x=-3e^{2t}, \\ x(0)=2. \end{cases}$$

7. 求解

$$\begin{cases} x''-x=e^{t}, \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1. \end{cases}$$