

一、选择题 (请把选项直接写在题后括号内) (共 5 题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则全微分  $df = ( \quad )$

- A.  $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$     B.  $\frac{ydx + xdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$     C.  $\frac{xdx + ydy}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$     D.  $\frac{\sqrt{x}dx + \sqrt{y}dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2. 设  $f(x, y)$  为连续函数, 交换  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$  的积分次序, 正确的是 ( )

- A.  $\int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$     B.  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$   
C.  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$     D.  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

3. 设  $L$  是从  $A(1, 0)$  到  $B(-1, 2)$  的线段, 则曲线积分  $\int_L (x + y) ds = ( \quad )$

- A.  $2\sqrt{2}$     B.  $\sqrt{2}$     C. 2    D. 0

4. 已知  $\frac{(x + ay)dx + ydy}{(x + y)^2}$  为某函数的全微分, 则  $a = ( \quad )$

- A. 2    B. 1    C. -1    D. 0

5. 下列级数中绝对收敛的是 ( )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$     B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$   
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$     D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2}$

二、简答题 (共 5 题, 每题 6 分, 共 30 分)

1. 设  $z = e^{x^2 y^3}$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

2. 函数  $u = z^4 - 3xz + x^2 + y^2$  在点  $M(1, 1, 1)$  处沿方向  $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial r}$  是多少?

3. 已知直线  $y = x + 1, y = 2x, y = -x$  所围平面区域为  $D$ , 试求  $I = \iint_D dx dy$ 。

4. 已知  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 它在  $[-\pi, \pi]$  上表达式为  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ ,

将  $f(x)$  展成如下傅里叶级数时:  $f(x): \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 其系数  $b_3$  是多少?

5. 已知微分方程  $x^2 \frac{dy}{dx} + 3xy = 1, (x > 0)$ , 求其通解。

### 三、计算题 (共 5 题, 每题 8 分, 共 40 分)

1. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $xz = \ln(yz)$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

2. 计算  $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中:  $\Omega$  是由圆柱面  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , 平面  $z = 0, z = 2, y = 0$  在第一卦限所围闭区域。

3. 计算  $I = \iint_{\Sigma} z^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  的下侧。

4. 将函数  $f(x) = \frac{1}{3+x}$  展开成  $x$  的幂级数。

5. 求微分方程  $y'' + 4y' + 3y = -e^{2x}$  的通解。

### 四、应用与证明题 (共 2 题, 第一题 10 分, 第二题 5 分, 共 15 分)

1. 要建造一个敞口长方体水池, 要求水池的表面积为 108 平方米, 问不考虑水池壁的厚度时, 水池的长、宽、高尺寸如何设计, 才能使其容积最大?

2. 设数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛于  $s$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 。证明: 数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  也收敛于  $s$ 。