第12周作业及答案

Edited by Hu Chen

OUC

May 28, 2020

目录

习题十一作业

2.求圆$x^2+y^2\le R^2$的格林函数，并由此对平面拉普拉斯方程导出求解圆的狄利克雷内问题的泊松公式.

解 设O是圆心，点M_0 坐标为(x_0,y_0)，是圆内任意一点，点$M(x,y)$ 是动点，$|OM_0|=\rho$，$|M_0M|=r:=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 通过课本上和球内拉普拉斯方程的狄利克雷问题一样的图，我们可知在圆外存在与M_0 关于圆对称的点M_1,设$|OM_1|=\rho_1$，且$\rho\rho_1=R^2$，并设$|M_1M|=r_1$. 则当M落在圆上时，我们有$\frac{1}{r}=\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}$.

另外我们知道平面上拉普拉斯的狄利克雷问题的格林函数为$G(M_0;M)=\ln\frac{1}{r}-g$，其中$r=|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，$g$ 在所考虑的区域内调和(本题即g在圆内调和)，且在区域的边界上与$\ln\frac{1}{r}$的函数值相等(本题即要求g 在圆上与$\ln\frac{1}{r}$的函数值相等). 由上面的分析我们知道函数$g=\ln(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1})$ 在圆内是调和函数且在圆上与$\ln\frac{1}{r}$的函数值相等. 所以此题的格林函数为$G(M_0;M)=\ln\frac{1}{r}-\ln(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1})$.

将格林函数代入平面上拉普拉斯的狄利克雷问题的解的公式有

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^O} f\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s, \tag{1}$$

其中$C_R^O: x^2+y^2=R^2$ 是O为圆心，半径为R的圆，$\boldsymbol{n}$ 为圆的外法向量. 剩下的是如果计算$\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial\boldsymbol{n}}$ 和$\frac{\partial\ln(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1})}{\partial\boldsymbol{n}}$. 设$\boldsymbol{n}^0$ 是圆C_R^O 的单位外法向量，则

$$\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{1}{r}\mathsf{grad} r \cdot \boldsymbol{n}^0 = -\frac{1}{r}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}}),$$

同理

$$\frac{\partial \ln(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1})}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{1}{r_1}\cos(\widehat{\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}}).$$

又因为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}}) = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{n}}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1},$$

并结合$\rho\rho_1 = R^2$ 和在圆上$\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}$, 我们有

$$\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial \ln(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1})}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2}$$

代入(1) 我们有

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R^O} f(M')\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}\mathrm{d}s, \tag{2}$$

引入以圆心为坐标原点的极坐标系, 设点M' 的极坐标为(R, φ'), 点M_0 的极坐标为(ρ, θ), 再将OM_0 和OM' 之间的夹角记作α, 则上式可重新写为

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi') \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi' - \theta) + \rho^2}\mathrm{d}\varphi'. \tag{3}$$

称之为圆的泊松积分.

5. 求区域$0 \le x < +\infty$, $0 \le y < +\infty$ 的格林函数, 并由此求解狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(0,y) = f(y) & (0 \le y < +\infty), \\ u(x,0) = 0 & (0 \le x < +\infty), \end{cases}$$

其中f 为已知的连续函数. 且$f(0) = 0$.

解 设点M_0 坐标为(x_0, y_0), 是区域内任意一点, 点$M(x,y)$ 是动点, $|M_0 M| = r := \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. 我们知道平面上拉普拉斯的狄利克雷问题的格林函数为$G(M_0; M) = \ln \frac{1}{r} - g$, g 在所考虑的区域内调和且在区域的边界上与$\ln \frac{1}{r}$的函数值相等. 利用对称性我们知道在区域外存在点$M_1(x_0, -y_0)$, $M_2(-x_0, y_0)$, $M_3(-x_0, -y_0)$, 并设$|M_1 M| = r_1$, $|M_2 M| = r_2$, $|M_1 M| = r_3$.
令$g = \ln \frac{1}{r_1} + \ln \frac{1}{r_2} - \ln \frac{1}{r_3}$,, 则$g$ 在区域内调和, 且在边界上与函数$\ln \frac{1}{r}$的值相等. 所以此题的格林函数为

$$\begin{aligned} G(M_0; M) &= \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r_1} - \ln \frac{1}{r_2} + \ln \frac{1}{r_3} = \ln \frac{r_1 r_2}{r r_3} \\ &= \ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}}. \end{aligned}$$

则该问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_l f(M')\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} 0\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[G(M;M_0)\right]_{y=0}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} f(y)\frac{\partial}{\partial x}\left[G(M;M_0)\right]_{x=0}\mathrm{d}y \\
&= \frac{x_0}{\pi}\int_0^{+\infty} f(y)\left[\frac{1}{x_0^2+(y-y_0)^2}-\frac{1}{x_0^2+(y+y_0)^2}\right]\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$