高等数学Ⅱ1 期末试题参考答案（B 卷）

一、填空题（共 18 分）

1． $\frac{1}{3}$　　2． $\frac{-1}{4}$　　3． $f(x)$　　4． $2x+2y-3z=0$

5． $-2<k<2$　　6． $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x+1)+C$

二、选择题（共 12 分）

1．（D）　2．（C）　3．（B）　4．.（C）

三、计算题（共 54 分）

1．解　$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & 0<x<1\\ x^2-\frac{1}{3}, & x\ge 1\end{cases}$，$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$。

易知，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ 为极小值。　9 分

2．解　原式$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=(\tan x-\frac{1}{\cos x})\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2$。　9 分

9 分

3．解　原式$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}$。　9 分

4．解　$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-5)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}(x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}})$，

$y''=\frac{5}{3}(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}})=\frac{10}{9}\frac{1+x}{\sqrt[3]{x^4}}$。

易知，$(-1,-6)$ 是拐点，而 $(0,0)$ 非拐点，　9 分

5．解　作变换　$x=t^2$ 得　　原式$=2\int_0^{+\infty}(e^{-t^2}-e^{-t})dt=\sqrt{\pi}-2$，　9 分

6．设切点 (x_0,y_0)，则切线方程为　$y=-\frac{1}{x_0}x$。

因它与 $y=1-\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 相切，故有

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{x_0}x \\ y = 1 - \ln x \\ x = x_0 \end{cases}$$ 。

解得切点$(e^2,-1)$，所求面积　$A = \int_{-1}^{0}(e^{1-y} - e^2 y)dy = \frac{1}{2}e^2 - e$ 。　9 分

四、　证明题（共 16 分）

1. 证　令 $f(x) = e^x - 1 - (1+x)\ln(1+x)$，$f(0) = 0$；

$f'(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$，　$f'(0) = 0$；

$f''(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x}$ 。

当 $x > 0$ 时，$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$，

即当 $x > 0$ 时，有　$e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$ 。　8 分

2. 证　原式$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\cdot\frac{x}{f(x)}} == e^{-\frac{1}{2f'(0)}} = e^{-\frac{1}{4}}$ 。　8 分