第10周讲稿及其作业

Edited by Hu Chen

OUC

May 6, 2020

目录

考虑热传导方程初值问题（空间全无界）

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程得

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

其中λ是待定常数. 由此可得$X(x)$和$T(t)$分别满足下面的常微分方程

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,\ t > 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ -\infty < x < +\infty.$$

对这两个方程都没有什么限制条件可用, 该选哪个作为特征值问题?

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & -\infty<x<+\infty, \\ |X(\pm\infty)|<+\infty. \end{cases} \tag{1}$$

分三类情况讨论:

1) 当$\lambda<0$时, 方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$的通解为

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}\,x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}\,x}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

当$x\to+\infty$时, 若$A\neq 0$, 则有$X(x)\to\infty$. 所以有$A=0$. 同样, 令$x\to-\infty$, 可得$B=0$. 因此在此情形下无解.

2) 当$\lambda=0$时, 方程$X''(x)+\lambda X(x)=0$的通解为

$$X(x)=A+Bx, \quad -\infty<x<+\infty.$$

同理, 当$x\to\pm\infty$时, $X(x)$应有界, 故有$B=0$. 所以在此情形下, 常数函数$X(x)=A$为特征函数.

3) 当$\lambda > 0$时，方程$X''(x) + \lambda X(x) = 0$的通解为

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中$\omega = \sqrt{\lambda} > 0$. 这个通解显然满足自然边界条件$|X(\pm\infty)| < +\infty$，所以每一个$\lambda > 0$都是特征值，而上述通解便是相应的特征函数. 为区分这些特征函数，我们将它们重写为

$$X_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

注意这里$\cos\omega x$和$\sin\omega x$是两个线性无关的特征函数.

综上所述，$\lambda = \omega^2 \geq 0$都是特征值，相应的特征函数为

$$X_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

当$\lambda = \omega^2 \geq 0$时，方程$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$的通解都可以表示为

$$T_\omega(t) = C(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

所以对任一$\omega \geq 0$，我们都有非零特解

$$u_\omega(x,t) = e^{-a^2\omega^2 t}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x].$$

叠加所有的特解, 关于 ω 在 $[0,+\infty)$ 积分得

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega.$$

为确定 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$, 由初始条件可得

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega. \tag{2}$$

- 这个展式在什么范围内成立？即对哪些定义在整个实数轴上的函数成立？
- 如何求出函数 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$？

设$f(x)$是一个定义在$(-\infty,+\infty)$上的非周期函数. 因为傅里叶级数展开的适用对象是周期函数, 所以不能期望对$f(x)$可以直接作傅里叶级数展开.

虽然$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不能展成傅里叶级数, 但把它限制在有限区间$[-l,l]$上后就可以将其展成傅里叶级数了, 而且这个区间可以任意大.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x\in[-l,l], \tag{3}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, \quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

将a_n,b_n的表示式代入展式(3), 我们可得

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{l}d\xi, \quad x\in[-l,l].$$

为了保证积分

$$\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi \quad 和 \quad \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{l}d\xi$$

的极限存在, 我们需假定$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

于是令$l \to +\infty$, 则对任意的$x \in (-\infty,+\infty)$, 我们有

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{l}d\xi.$$

为了能够更好地预测这个极限的结果, 我们需要适当地改变一下它的写法. 记$\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}, \Delta\omega_n = \omega_{n+1}-\omega_n = \dfrac{\pi}{l}, n = 1,2,3,\cdots$, 将上面的极限重写为

$$f(x) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\omega_n(x-\xi)d\xi,$$

其中$\Delta\omega = \Delta\omega_n = \dfrac{\pi}{l}$.

对黎曼积分定义熟悉的读者会发现和式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\omega_n(x-\xi)d\xi$$

形式上很像是由含参变量的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega(x-\xi)d\xi$$

定义的关于ω的函数的积分和式, 只是现在关于ω的积分定义的范围是$[0,\infty)$. 虽然通常无穷区间上的黎曼积分是通过有限区间上的积分对积分（上下）限取极限定义的, 但实际上它也可以通过分割、（无穷级数）求和、取极限的步骤直接定义. 因此我们可猜到取极限后的结果为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\omega(x-\xi)d\xi \mathrm{d}\omega, \quad x \in (-\infty,+\infty). \tag{4}$$

这个公式称为**傅里叶积分表示公式**.

利用$\cos\omega(x-\xi)=\cos\omega x\cos\omega\xi+\sin\omega x\sin\omega\xi$, 傅里叶积分表示公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\omega(x-\xi)d\xi\mathrm{d}\omega,\quad x\in(-\infty,+\infty)\tag{4}$$

可重写为与傅里叶级数展式(3)相对应的形式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]\mathrm{d}\omega,\quad x\in(-\infty,+\infty),\tag{5}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x dx,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x dx.$$

回到原来的解

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega. \tag{6}$$

为确定$A(\omega)$和$B(\omega)$, 由初始条件可得

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega. \tag{7}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cos\omega x dx,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\sin\omega x dx.$$

接下来我们把$A(\omega)$, $B(\omega)$ 代入到解(6):

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)[\cos\omega\xi\cos\omega x+\sin\omega\xi\sin\omega x]d\xi\right\}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_0^{+\infty}e^{-a^2\omega^2 t}\cos\omega(\xi-x)d\omega\right]d\xi
\end{aligned}
$$

由泊松积分

$$
\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}}
$$

得

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}d\xi. \tag{8}
$$

一端有界的热传导问题（半无界问题）

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

考虑将半无界问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

延拓为初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

两者的差别只在边界条件, 若$u(x,t)$关于 x 是奇函数, 则边界条件$u(0,t) = 0$将会被自然满足. 若要解$u(x,t)$关于 x 为奇函数, 初值$\varphi(x)$必为奇函数. 这说明对$\varphi(x)$应当做奇延拓, 即将$\varphi(x)$延拓为整个实数轴上的奇函数. 只是对$\varphi(x)$做奇延拓能保证使以它为初值的初值问题的解$u(x,t)$成为关于 x 的奇函数吗?

定理2.1

如果$\widetilde{\varphi}$是奇函数（或偶函数），则初值问题
的解$u(x,t)$关于 x 也是奇函数（或偶函数）.

证 我们仅证明 $\widetilde{\varphi}$ 为奇函数的情形, 偶函数的情形读者可类似证明. 由热传导方程初值问题的解的公式(8)可知

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

于是有

$$u(-x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \xlongequal{\xi=-\eta}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}(-\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta$$
$$=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}(\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta=-u(x,t). \qquad \blacksquare$$

将$\varphi(x)$奇延拓为

$$\varphi_o(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}$$

则当$x\geq 0, t>0$时有

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_o(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[-\int_{-\infty}^{0}\varphi(-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right].\end{aligned}$$

令$\xi=-\eta$, 则有

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\int_{0}^{+\infty}\varphi(\eta)e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}}d\eta.$$

于是有

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi. \tag{10}$$

容易验证$u(0,t)=0$. 所以不管它是不是古典解, 它都是半无界问题(9)的解.

左端点为第二类齐次边界条件

若将上述半无界问题中的边界条件替换为

$$u_x(0,t) = 0,$$

则应该使用偶延拓的方法求解. 定理2.1同样为偶延拓法奠定了理论基础.(偶函数在原点的导数为0)

例2.1

一个具有定常初始温度 u_0 的无限长的细杆，已知它的一端温度恒为零，求杆以后的温度分布情况.

解 这个问题可归结为半无界问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0, & x \geq 0. \end{cases}$$

由公式(10)可得它的解为

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \right].$$

为了化简，对两个积分分别作变量替换$\eta = \dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$, $\zeta = \frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}}$, 于是有

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \right) \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\xi^2} d\xi + \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi - \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0} e^{-\xi^2} d\xi - \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right) \\ &= \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

从解的公式中可以看出，若初始温度$u_0 > 0\,(< 0)$，则温度 $u(x,t)$ 关于 t 单调递减 (递增)，关于 x 单调递增（递减）．利用**误差函数**

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

解可以简写为

$$u(x,t) = u_0\, \mathsf{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

例2.2 (杂质扩散问题)

在半导体工艺中，需要将气体杂质从一个侧面扩散到硅片中．杂质在硅片中的浓度分布满足扩散方程．由于杂质在硅片中扩散的很慢，扩散深度远小于硅片厚度，故可把硅片内部视为半无界空间$[0,+\infty)$．在$x=0$端，气体杂质的数量非常大，以至于可认为气体杂质的浓度N_0恒定不变．气体杂质在硅片中的扩散过程可描述为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = N_0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

解 令$u(x,t)=v(x,t)+N_0$, 则$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_t=a^2v_{xx}, & x>0, t>0, \\ v(0,t)=0, & t\geq 0, \\ v(x,0)=-N_0, & x\geq 0. \end{cases}$$

于是由例2.1的结果有

$$u(x,t)=N_0-N_0\,\mathsf{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi. \qquad \blacksquare$$

从解的表达式中可以看出, 对固定的x, 当$t\to+\infty$时杂质浓度u趋向于表面浓度N_0. 利用**余误差函数**

$$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi=1-\mathrm{erf}(x),$$

解可以简写为

$$u(x,t)=N_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

边界条件齐次化

下面是常见的几类边界条件齐次化时可选取的辅助函数$w(x,t)$的形式:

(1) $u(0,t)=g_1(t), u_x(l,t)=g_2(t), w(x,t)=g_2(t)x+g_1(t);$

(2) $u_x(0,t)=g_1(t), u(l,t)=g_2(t), w(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t);$

(3) $u_x(0,t)=g_1(t), u_x(l,t)=g_2(t), w(x,t)=g_1(t)x+\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2.$

(4) $u(0,t)=g_1(t), u(l,t)=g_2(t), w(x,t)=g_1(t)+\frac{x}{l}(g_2(t)-g_1(t)).$

故做变换$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$ 得到关于$v(x,t)$ 的齐次边界条件.

线性叠加原理

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t)=\mu_1(t);\ u(l,t)=\mu_2(t), & t\geq 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq l \end{array}\right. \tag{11}$$

其中$\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $f(x,t)$ 为已知函数.
由线性叠加原理, 可以分成下面三个定解问题分别求解，即

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} u_t=a^2u_{xx}, \\ u(0,t)=0;\ u(l,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \end{array}\right. \quad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{l} u_t=a^2u_{xx}, \\ u(0,t)=\mu_1(t);\ u(l,t)=\mu_2(t), \\ u(x,0)=0, \end{array}\right.$$

$$\mathrm{III}\left\{\begin{array}{l} u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \\ u(0,t)=0;\ u(l,t)=0, \\ u(x,0)=0. \end{array}\right.$$

齐次化原理

$t = \tau$ 时的“瞬时” 热源$f(x,\tau)$ 所产生的温度分布$v(x,t)$ 应满足定解问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, t > \tau, \\ v(0,t) = 0;\ \ v(l,t) = 0, & t \geq \tau, \\ v(x,\tau) = f(x,\tau), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{12}$$

记此解为$v(x,t;\tau)$, 则问题III 的解为

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)d\tau. \tag{13}$$

由线性叠加原理，我们之前学的弦振动非齐次问题可分解为两个更基本的定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{14}$$

和

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), w_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{15}$$

定解问题(15)可用分离变量法求解. 下面我们用齐次化原理来求解(14). 我们需要先求出齐次定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > \tau, \\ w(0,t;\tau) = w(l,t;\tau) = 0, & t \geq \tau, \\ w(x,\tau;\tau) = 0, w_t(x,\tau;\tau) = f(x,\tau), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{16}$$

的解$w(x,t;\tau)$, 其中$\tau \geq 0$代表初始时刻. 然后定解问题(14)的解由

$$v(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

作自变量变换$s=t-\tau$, 可将定解问题(16)变为在新的时间变量s下初始时刻为0的初值问题. 记

$$W(x,s):=w(x,s+\tau;\tau)=w(x,t;\tau),$$

则$W(x,s)$满足

$$\begin{cases} W_{ss}=a^2W_{xx}, & 0<x<l, s>0,\\ W(0,s)=W(l,s)=0, & s\geq 0,\\ W(x,0)=0, W_s(x,0)=f(x,\tau), & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

利用分离变量法或直接使用解的公式, 可得到它的解为

$$W(x,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}D_n(\tau)\sin\frac{n\pi as}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad D_n(\tau)=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

于是有

$$\begin{aligned} w(x,t;\tau)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi a}\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\cdot\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{l}{n\pi a}f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

其中

$$f_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

再由公式(17), 可得定解问题(14)的解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

拉普拉斯方程的圆的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<l^2, \\ u|_\Gamma = g(x,y), & \Gamma: x^2+y^2=l^2. \end{cases} \tag{18}$$

对方程可将其分离变量, 但由于区域为圆域, 无法获得限制条件来筛选变量分离后所引出的常数取值.
所以可考虑利用极坐标变换将圆域上的边值问题(18)化为矩形区域上的边值问题.

记$u(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)=u(x,y)$. 于是有

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \quad u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

将其视为线性方程组, 解得

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

从而有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

由此得

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},\quad r>0. \tag{19}$$

所以在极坐标下边值问题(18)化为

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & 0<r<l,-\infty<\theta<+\infty,\\ u(l,\theta)=f(\theta), & -\infty<\theta<+\infty, \end{cases} \tag{20}$$

其中$f(\theta)=g(l\cos\theta,l\sin\theta)$.

因为在极坐标下，(r,θ)与$(r,\theta+2\pi)$表示同一点，所以有

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi),\quad 0<r\le l,-\infty<\theta<+\infty. \tag{21}$$

它称为周期性条件.

在坐标变换后，虽然圆盘中心点$r=0$不是物理意义上的边界，但它不在极坐标的表示范围内，应当作边界点处理，故在该点应给出边界条件. 由于圆盘的温度不可能无限高，特别是圆盘中心的温度应有限，所以可加自然边界条件

$$|u(0,\theta)|<+\infty, \tag{22}$$

其中

$$u(0,\theta)=\lim_{r\to 0}u(r,\theta).$$

下面用分离变量法求解边值问题

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < l, -\infty < \theta < +\infty, \\ u(l,\theta) = f(\theta), & -\infty < \theta < +\infty. \end{cases} \tag{20}$$

设

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta). \tag{23}$$

将其代入边值问题(20)的方程得

$$r^2R''(r)\Theta(\theta) + rR'(r)\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

即

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

由此得两个常微分方程

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0,$$
$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

由边界条件(21)和(22)得

$$|R(0)| < +\infty, \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi).$$

于是得到两个常微分方程问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, & -\infty<\theta<+\infty, \\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi), & -\infty<\theta<+\infty, \end{cases} \tag{24}$$

和

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0, & 0<r<l, \\ |R(0)|<+\infty. \end{cases} \tag{25}$$

这两个边值问题哪一个应当作为特征值问题处理，或者说应先求解哪一个，取决于哪一个可以更有效地帮助我们筛选参数 λ 的值. 在后面读者会看到边值问题(25)中的条件太弱，根本无法起到筛选参数 λ 的作用. 所以我们先求解边值问题(24). 由于边值问题(24)中的条件为周期性条件，故称它为**周期特征值问题**.

先求解周期特征值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, & -\infty<\theta<+\infty, \\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi), & -\infty<\theta<+\infty, \end{cases} \tag{24}$$

(1) 当$\lambda<0$时, 特征值问题(24)中的方程的通解为

$$\Theta(\theta)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\theta}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}.$$

取$\theta=-\pi$, 由$\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)$可得$\Theta(-\pi)=\Theta(\pi)$. 将通解代入可得

$$A\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}+B\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}.$$

整理得

$$(A-B)\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}-\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}\right)=0.$$

由此可知$A=B$. 而若$A\neq 0$, 则$\Theta(\theta)=A\left(\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\theta}+\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}\right)$不可能为以$2\pi$为周期的周期函数. 事实上, 如果假定$\Theta(\theta)$是以$2\pi$为周期的周期函数, 则对任意的自然数$n$应有$2A=\Theta(0)=\Theta(2n\pi)$, 于是有

$$2A=\lim_{n\to+\infty}\Theta(2n\pi)=\lim_{n\to+\infty}A\left(\mathrm{e}^{2n\pi\sqrt{-\lambda}}+\mathrm{e}^{-2n\pi\sqrt{-\lambda}}\right)=\infty.$$

这是不可能的. 所以$\lambda<0$不可能为特征值.

(2) 当$\lambda = 0$时, 特征值问题(24)中的方程的通解为

$$\Theta(\theta) = A\theta + B.$$

若要使$\Theta(\theta)$为周期函数, 必须有$A = 0$. 这时有非零周期解

$$\Theta_0(\theta) = B_0 \neq 0.$$

(3) 当$\lambda > 0$时, 特征值问题(24)中的方程的通解为

$$\Theta(\theta) = A\cos\omega\theta + B\sin\omega\theta,$$

其中$\omega = \sqrt{\lambda} > 0$. 因为$\sin\theta$和$\cos\theta$都以$2\pi$为基本周期, 所以$\cos(\omega\theta)$和$\sin(\omega\theta)$都以$2\pi/\omega$为基本周期, 要想它们以$2\pi$为周期, 必须有$2n\pi/\omega = 2\pi$, 其中$n$为正整数. 因此$\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \cdots$都是特征值, 而$\Theta_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta$就是相应的特征函数. 这时$\cos n\theta$和$\sin n\theta$都是特征值$\omega_n = n$的线性无关的特征函数.

综上所述, 我们得到特征值和特征函数

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

接下来求解边值问题

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad 0 < r < l, \\ |R(0)| < +\infty. \end{cases} \tag{25}$$

(25)中的方程是**欧拉方程**, 有固定的解法. 只需作自变量变换$r = \mathrm{e}^t$, 记$R(t) = R(\mathrm{e}^t) = R(r)$, 便可得

$$R'(t) = rR'(r), \quad R''(t) = rR'(r) + r^2R''(r).$$

于是边值问题(25)中的欧拉方程就变为

$$R''(t) - n^2R(t) = 0.$$

它的通解为

$$R_n(t) = \begin{cases} C_0 + D_0 t, & n = 0, \\ C_n\mathrm{e}^{nt} + D_n\mathrm{e}^{-nt}, & n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

逆变换回去, 便可得边值问题(25)中的方程的通解为

$$R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r, & n = 0, \\ C_n r^n + D_n r^{-n}, & n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

为保证$|R(0)| < +\infty$, 必须令$D_n = 0, n = 0, 1, 2, \cdots$. 所以

$$R_n(r) = C_n r^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

于是得到满足边值问题

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < l, -\infty < \theta < +\infty, \\ u(l, \theta) = f(\theta), & -\infty < \theta < +\infty \end{cases} \tag{20}$$

中的方程以及条件(21)和(22)的一系列非零特解

$$u_0(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = \frac{a_0}{2},$$
$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n, \; n = 1, 2, 3, \cdots ,$$

其中$a_0 = 2A_0C_0, a_n = A_nC_n, b_n = B_nC_n$.

现在叠加所有变量分离形式的特解，可得

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n, \tag{26}$$

代入边值问题(20)中的边界条件得

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)l^n.$$

这是周期函数$f(\theta)$的傅里叶级数展式，于是由傅里叶系数公式得

$$a_n=\frac{1}{\pi l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{27}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad n=1,2,\cdots. \tag{28}$$

把系数公式(27)和(28)代入解(26)中可得

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\mathrm{d}\varphi+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{\pi l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)[\cos n\varphi\cos n\theta+\sin n\varphi\sin n\theta]\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)\right]\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

利用欧拉公式，当$|k| < 1$时，有

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} k^n \cos n(\varphi - \theta) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} k^n \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\varphi-\theta)}\right]$$

$$= 1 + \frac{k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)}}{1 - k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)}} + \frac{k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\theta)}}{1 - k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\theta)}}$$

$$= \frac{1-k^2}{1 - 2k\cos(\varphi-\theta) + k^2}.$$

取$k = r/l$，则有

$$u(r,\theta) = \frac{l^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{l^2 - 2lr\cos(\varphi-\theta) + r^2}\mathrm{d}\varphi.$$

这个公式称为**圆域内的泊松公式**.

这里介绍的利用极坐标求解拉普拉斯方程狄利克雷边值问题的方法还可用来求解扇形、圆外或圆环形区域的拉普拉斯方程狄利克雷边值问题.

δ 函数的引入

一般公认 δ 函数是由理论物理学家狄拉克于1927年在研究量子力学时引入的, 因此 δ 函数又常被称为是狄拉克 δ 函数. 但实际上, δ 函数的思想渊源可一直追溯到傅里叶、泊松、柯西、基尔霍夫, 亥维赛等人的著作中. 不过可以肯定的是, δ 函数这个名称是狄拉克首先提出的.

力学和物理学中许多连续分布的量（如质量分布、电荷分布、热源分布等）都是用密度函数表示的. 例如

- 在静电场的物理背景下, 泊松方程$-\Delta u = f$的非齐次项f就是通过描述带电体的电荷密度分布（在相差一个介电常数ε_0的意义下）来给出电荷分布情况的.
- 弦振动方程中的外力作用是通过外力密度函数刻划的.
- 热传导方程中的热源是用热源密度函数刻划的.

通过密度函数来刻划连续分布的物理量的描述方式体现了从局部入手刻划整体的思想, 是我们描述连续分布的物理量的常用方式. 说的具体点, 设$f(M)$是某物理量的密度函数（这里M表示空间中的点）, 则分布在区域Ω上的该物理量的总量便可以通过积分

$$Q = \int_\Omega f(M)\mathrm{d}M$$

得到.

除了连续分布的物理量外, 我们还会遇到许多集中分布的物理量, 例如质点、点电荷、点热源、集中力等. 集中分布的物理量可以看作是连续分布的物理量的一种极限形式, 是理想化的概念.

为了从数学的角度描述集中分布的物理量, δ 函数将作为集中分布物理量的密度函数而被自然地引出.

例5.1 (单位点电荷的线密度函数)

点电荷是一个理想化的概念, 它可以看成是分布电荷的一种极限形式. 设直线上有电荷关于原点对称地分布在一个小区间上, 其密度函数为

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|\le\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

对任意的$\varepsilon>0$, 直线上的电量为

$$Q=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1.$$

当$\varepsilon\to0^+$时, 直观上, 上述分布电荷的极限就是集中在$x=0$处的单位点电荷. 于是自然地, 单位点电荷的密度函数应为$\rho_\varepsilon(x)$ 的极限

$$\rho(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq0,\end{cases}$$

一般地, 任何在原点$x=0$集中分布的单位物理量的密度函数都可用上面例子中的密度函数$\rho(x)$来表示. 这个$\rho(x)$就是狄拉克提出的δ **函数**, 通常记为$\delta(x)$. 形式上, δ 函数是满足条件

$$\delta(x)=\begin{cases} +\infty, & x=0, \\ 0, & x\neq 0 \end{cases} \tag{29}$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1 \tag{30}$$

的函数. 而对位于点$x=\xi$的单位集中分布的物理量, 它的密度函数可用$\delta(x)$的平移$\delta(x-\xi)$来表示:

$$\delta(x-\xi)=\begin{cases} +\infty, & x=\xi, \\ 0, & x\neq \xi \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=1.$$

无论是关于空间变量还是关于时间变量的集中分布物理量都可用δ函数来描述. 关于时间变量的集中分布物理量常称为脉冲, 例如脉冲力、脉冲电流、脉冲信号等.

δ 函数的性质

对一个任意的连续函数$\varphi(x)$, 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0), \tag{31}$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x-\xi)dx = \varphi(\xi). \tag{32}$$

δ函数的概念刚出现时, 由于其有鲜明的物理意义, 很快便得到了物理学家和工程师们的广泛认可, 但却遭到了许多数学家的抵制. 因为由公式(29)和(30)定义的δ函数虽然看起来非常直观, 但若仔细想想, 就会发现这样定义的δ函数并不是函数.

- 公式(29)不符合函数的定义, 因为$+\infty$ 不是实数, 普通实函数是不可能取值$+\infty$的;
- 公式(30)也与我们熟知的积分性质矛盾, 因为被积函数改变一点处的值, 积分值是不变的, 所以式(30)左端的积分应等于0, 而不是1.

用微积分理论根本无法说清δ函数是什么. 直到20世纪40年代左右, 在索伯列夫等人的工作基础之上, 法国数学家施瓦兹创立了广义函数论（又称为分布论）, 才为δ函数奠定了严格的数学理论基础.

广义函数论是一个人为创造痕迹十分明显的数学理论, 对习惯追求现实意义的人来说, 接受它是件困难的事. 复数的历史已经说明了这一点. 数学知识包含人为创造性是正常的. 而且点电荷（一般地, 集中分布物理量）本就是人为创造的概念, 不是用来直接刻划客观实体的, 那么对它的数学描述超出函数的范围就是自然的, 而由同样是人为创造的理论来描述它就是合理的.

δ 函数的数学理论简介

弱收敛与弱极限

函数序列$\{f_n(x), n = 1, 2, 3, \ldots\}$ 弱收敛于函数$f(x)$: 对于任意一个连续函数$\varphi(x)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)[f_n(x) - f(x)]dx = 0, \tag{33}$$

或

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)f_n(x)dx = \int_a^b \varphi(x)f(x)dx, \tag{34}$$

记为$f_n(x) \xrightarrow{\text{弱}} f(x)$, $n \to \infty$.

考虑脉冲函数

$$S_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & \left(|x|\le\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ 0 & \left(|x|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{cases} \tag{35}$$

我们有$S_\varepsilon(x)\xrightarrow{\text{弱}}\delta(x)$, $\varepsilon\to 0$.
因为对于任何一个连续函数$\varphi(x)$ 都有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)S_\varepsilon(x)dx&=\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(x)\frac{1}{\varepsilon}dx\\&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(x)dx\\&=\varphi(\xi),\quad -\frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to 0$, 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)S_\varepsilon(x)dx=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x)dx. \tag{36}$$

高维空间中的δ函数及δ函数的其它性质

以三维空间为例，$\delta(x,y,z)$ 定义为, 对任意连续函数$\varphi(x,y,z)$

$$\iiint \varphi(x,y,z)\delta(x,y,z)dxdydz = \varphi(0,0,0). \tag{37}$$

$\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$ 定义为, 对任意连续函数$\varphi(x,y,z)$

$$\iiint \varphi(x,y,z)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)dxdydz = \varphi(\xi,\eta,\zeta). \tag{38}$$

1. $\delta(x,y,z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$.
2. δ 函数是偶函数.
3. $x\delta(x) = 0$.

习题八作业

5. 有一两端无界的枢轴，其初始温度为

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & (|x|<1),\\ 0 & (|x|\geq 1),\end{cases}$$

试求在枢轴上温度的分布为

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)e^{-a^2\mu^2 t}d\mu.$$

8. 求解初值问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\\ u(x,0)=0\end{cases}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中$f(x,t)$ 为已知的连续函数.

9. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \dfrac{u_0}{l} x & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中u_0 为已知常数.
12. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中h 为已知正常数, $\varphi(x)$ 为已知的连续函数.

习题九作业

3. 求解狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \\ u(1,\theta) = A\cos\theta \end{cases} \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

其中A 为已知常数.

5. 考察由下列定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \\ u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = f(x), & u(x,b) = 0, \end{cases}$$

描述的矩形平板$(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ 上的温度分布, 其中$f(x)$ 为已知的连续函数.

7. 在以原点为圆心，a 为半径的圆内，试求泊松方程

$$u_{xx} + u_{yy} = -4$$

的解，使它满足边界条件

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2} = 0$$

(提示：可以先采用观察法构造特解v满足方程$v_{xx} + v_{yy} = -4$,再令$w = u - v$,则化成关于w 的拉普拉斯方程；亦可参考之前求解弦振动方程非齐次问题的方法).

11. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u_x(0, y) = A,\ u_x(a, y) = A & (0 \le y \le b), \\ u_y(x, 0) = B,\ u_y(x, b) = B & (0 \le x \le a), \end{cases}$$

其中A, B 为已知常数.