3.1 复变积分的概念及其简单性质

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 14 日

目录

3.1.1 复变积分的定义及其计算方法

为叙述方便起见，我们先做一些术语上的简化约定.

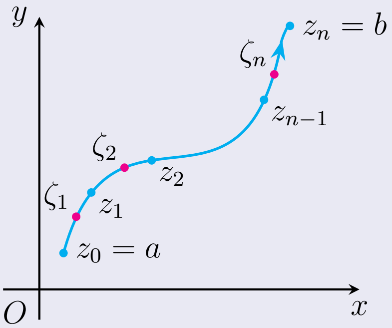
- 今后我们提到曲线，除特别声明外，均指光滑曲线或逐段光滑曲线. 特别地，逐段光滑的简单闭曲线称为围线（或周线）（contour）.
- 对曲线还需要规定方向.
  - 对于简单曲线，只需指明起点和终点就可以了;
  - 对于围线，按之前约定的，如果围线内部在观察者的左手方，就规定这个环行方向为围线的正向，反之为负向.

定义 3.1 (复曲线积分)

设有向曲线 C: $z = z(t)\,(\alpha \le t \le \beta)$ 以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点, 函数 $f(z)$ 在 C 上有定义. 顺着 C 的正向在 C 上取分点:

$$a = z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = b,$$

把曲线 C 分成若干个弧段. 在从 z_{k-1} 到 $z_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的每一弧段上任取一点 ζ_k, 作和式



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{3.1}$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 当分点增多, 这些弧段的长度的最大值趋于零时, 如果和式

定义 3.1 (复曲线积分续)

S_n 的极限存在且等于 J, 则称函数 $f(z)$ 沿 C 可积, 并称 J 为函数 $f(z)$ 沿 C 的积分, 记作

$$J = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中 $f(z)$ 称为被积函数, C 称为积分路径. 当 C 为闭曲线时, 积分 J 又可记作

$$J = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

定义 3.1 (复曲线积分续)

S_n 的极限存在且等于 J, 则称函数 $f(z)$ 沿 C 可积, 并称 J 为函数 $f(z)$ 沿 C 的积分, 记作

$$J = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中 $f(z)$ 称为被积函数, C 称为积分路径. 当 C 为闭曲线时, 积分 J 又可记作

$$J = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

注意一般不能再像实积分一样, 把复积分 J 记为 $\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$ 的形式, 因为 J 现在依赖于整条积分路径 C, 而不是仅仅依赖于 C 的起点 a 和终点 b.

复变函数曲线积分的定义既没有告诉我们积分什么时候存在，也没有给出计算复积分的方法．下面我们来解决这两个问题．

复变函数曲线积分的定义既没有告诉我们积分什么时候存在, 也没有给出计算复积分的方法. 下面我们来解决这两个问题.

首先考虑积分路径 C 为实轴上的线段即闭区间 $[a,b]$ 的特殊情形. 这时复自变量 z 退化为实变量, 记为 t, 相应地记 $f(z)$ 为实自变量复值函数 $f(t), a \le t \le b$. 在这种特殊情形下, 由于积分路径可被起点和终点完全确定, 我们可将积分值记作

$$J = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

若记 $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, 则由定义3.1有

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [u(t) + \mathrm{i}v(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

等式右端的积分就是通常意义下的实函数积分, 因为这时复积分与实积分的定义是一致的. 由此可知, 只要 $u(t)$ 和 $v(t)$ 可积就可保证 $f(t)$ 可积.

现在来考虑一般积分路径的情形. 和前面的思路一样, 要先将其转化为实函数的表述形式.

现在来考虑一般积分路径的情形. 和前面的思路一样, 要先将其转化为实函数的表述形式.

记

$$\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k,\ \Delta z_k = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k,\ f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\xi_k, \eta_k) = u_k + \mathrm{i}v_k,$$

则和式(3.1)可重写为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k + \mathrm{i}v_k)(\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k). \end{aligned}$$

现在来考虑一般积分路径的情形. 和前面的思路一样, 要先将其转化为实函数的表述形式.

记

$$\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k,\ \ \Delta z_k = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k,\ \ f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\xi_k, \eta_k) = u_k + \mathrm{i}v_k,$$

则和式(3.1)可重写为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k + \mathrm{i}v_k)(\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k). \end{aligned}$$

注意到上式右端的两个和式正是多元微积分中的第二类曲线积分的和式, 所以我们有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在积分路径 C 上连续时, 右端的两个第二类曲线积分有意义.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在积分路径 C 上连续时, 右端的两个第二类曲线积分有意义. 由此可知 $f(z)$ 在积分路径 C 上连续可保证 $f(z)$ 沿积分路径 C 可积. 至此我们已经解决了积分的存在性问题.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在积分路径 C 上连续时, 右端的两个第二类曲线积分有意义. 由此可知 $f(z)$ 在积分路径 C 上连续可保证 $f(z)$ 沿积分路径 C 可积. 至此我们已经解决了积分的存在性问题.

为方便记住公式(3.3), 读者可利用如下的形式推导记忆它.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在积分路径 C 上连续时, 右端的两个第二类曲线积分有意义. 由此可知 $f(z)$ 在积分路径 C 上连续可保证 $f(z)$ 沿积分路径 C 可积. 至此我们已经解决了积分的存在性问题.

为方便记住公式(3.3), 读者可利用如下的形式推导记忆它.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

虽然利用第二类曲线积分的计算公式, 公式(3.3)看似已提供了一种计算复积分的方法. 但第二类曲线积分又该如何计算呢?

设积分路径 C 的参数方程为 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \alpha \le t \le \beta$. 为方便推导, 简记 $u(t) = u[x(t), y(t)], v(t) = v[x(t), y(t)]$,

设积分路径 C 的参数方程为 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\alpha\leq t\leq\beta$. 为方便推导, 简记 $u(t)=u[x(t),y(t)],v(t)=v[x(t),y(t)]$, 则由第二类曲线积分的计算公式有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y\\ &=\int_\alpha^\beta[u(t)x'(t)-v(t)y'(t)]\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta[v(t)x'(t)+u(t)y'(t)]\,\mathrm{d}t\\ &=\int_\alpha^\beta\{[u(t)x'(t)-v(t)y'(t)]+\mathrm{i}\,[v(t)x'(t)+u(t)y'(t)]\}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_\alpha^\beta[u(t)+\mathrm{i}v(t)][x'(t)+\mathrm{i}y'(t)]\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是我们得到了一个简单的复积分计算公式

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

于是我们得到了一个简单的复积分计算公式

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

它把一般的复积分的计算问题转化为实自变量复值函数的积分的计算问题. 这种利用积分路径的参数方程计算复积分的方法称为参数方程法.

于是我们得到了一个简单的复积分计算公式

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

它把一般的复积分的计算问题转化为实自变量复值函数的积分的计算问题. 这种利用积分路径的参数方程计算复积分的方法称为参数方程法.

设实自变量复值函数 $f(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且存在函数 $F(t)$ 使得 $F'(t)=f(t)$, 则由公式(3.2)和实函数的 N–L 公式可得

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a). \tag{3.5}$$

这个公式的具体推导过程留给读者作为练习.

例 3.1

计算 $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$

解 因为 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, 从而利用公式(3.5)有

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big|_0^{\pi} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 2\mathrm{i}.$$

∎

例 3.2

(一个重要的常用积分)

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n \neq 1\text{且为整数}, \end{cases}$$

这里 C 是圆周: $|z-a| = r\ (>0)$.

例 3.2

(一个重要的常用积分)

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n \neq 1 \text{ 且为整数}, \end{cases}$$

这里 C 是圆周: $|z-a| = r\,(>0)$.

证 设圆周 C 的参数方程为: $z-a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0 \le t \le 2\pi$. 利用公式(3.4)和(3.2)有

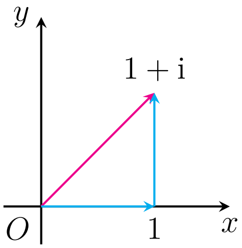
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i};$$

当 n 为整数且 $n \neq 1$ 时

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}}{(1-n)r^{n-1}}\Bigg|_0^{2\pi} = 0. \qquad \blacksquare$$

例 3.3

计算积分 $\int_C \mathrm{Re}\, z\, \mathrm{d}z$, 其中积分路径 C 为:
(1) 连接原点 O 到点 $1+\mathrm{i}$ 的直线段;
(2) 连接由原点 O 到点 1 的直线段, 以及连接由点 1 到点 $1+\mathrm{i}$ 的直线段所组成的折线.



解 (1) 设连接 O 和 $1+\mathrm{i}$ 的直线段的参数方程为

$$z = (1+\mathrm{i})t,\ 0 \le t \le 1,$$

则由公式(3.4)有

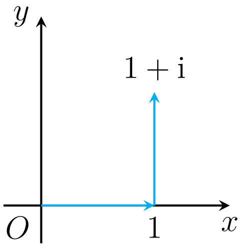
$$\int_C \mathrm{Re}\, z\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{Re}\,[(1+\mathrm{i})t](1+\mathrm{i})\, \mathrm{d}t = (1+\mathrm{i})\int_0^1 t\, \mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{2}.$$

(2) 设连接 O 和 1 的直线段 C_1 的参数方程为：

$$z = t,\ 0 \le t \le 1,$$

连接点 1 和 $1+\mathrm{i}$ 的直线段 C_2 的参数方程为：

$$z = 1 + \mathrm{i}t,\ 0 \le t \le 1,$$



则由公式(3.4)有

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \operatorname{Re}\, t\cdot 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.\end{aligned}$$

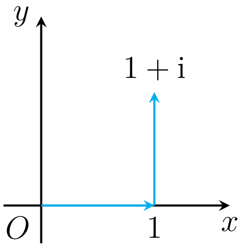
$\blacksquare$

(2) 设连接 O 和 1 的直线段 C_1 的参数方程为:

$$z = t,\ 0 \le t \le 1,$$

连接点 1 和 $1+\mathrm{i}$ 的直线段 C_2 的参数方程为:

$$z = 1 + \mathrm{i}t,\ 0 \le t \le 1,$$



则由公式(3.4)有

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \operatorname{Re} t \cdot 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.\end{aligned}$$ $\blacksquare$

这个例子表明复积分的确是与其积分路径有关的.

3.1.2 复变积分的简单性质

从定义3.1可直接推出复积分的一些基本性质，它们与实积分的性质是一致的. 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿曲线 C 可积，则有

(1) $\displaystyle\int_C \mathrm{d}z = z_1 - z_0,$, 其中 z_0 是 C 的起点，z_1 是 C 的终点;

(2) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z;$

(3) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$ 其中 C 是由曲线 C_1 和 C_2 衔接而成;

(4) $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$ 其中 C^- 表示与 C 方向相反的同一条曲线.

在许多理论和实际应用中，我们并不需要知道确切的积分值，而是只需要知道它的一个适当的上界就可以了．为此，我们有下面的积分估计定理．

定理 3.1 (积分估计定理)

设函数 $f(z)$ 在曲线 C 上连续，且 $|f(z)| \le M, z \in C$，则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \le ML,$$

其中 L 是 C 的长度，中间的积分为第一类曲线积分．

定理 3.1 (积分估计定理)

设函数 $f(z)$ 在曲线 C 上连续, 且 $|f(z)| \le M, z \in C$, 则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \le ML,$$

其中 L 是 C 的长度, 中间的积分为第一类曲线积分.

证 根据复积分的定义, 对下面的不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k \le ML$$

两边取极限即得所证, 其中 Δs_k 是第 k 段弧的弧长. ∎

设曲线 C 的参数方程为 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\alpha\leq t\leq\beta$, 则有

$$|\,\mathrm{d}z|=|z'(t)\,\mathrm{d}t|=|z'(t)|\,\mathrm{d}t=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}s.$$

所以第一类曲线积分 $\displaystyle\int_C|f(z)|\,\mathrm{d}s$ 又常记为 $\displaystyle\int_C|f(z)||\,\mathrm{d}z|$.

作业

习题三

2. 计算积分 $\int_C |z|\,\mathrm{d}z$, 这里积分路径 C 分别为从 $-\mathrm{i}$ 到 i 的 (1) 直线段; (2) 右半单位圆周; (3) 左半单位圆周.
4. 利用积分估计定理证明

   (2) $\left|\int_C (x^2+\mathrm{i}y^2)\,\mathrm{d}z\right| \le \pi$, 这里积分路径 C 是从 $-\mathrm{i}$ 到 i 的右半圆周.

   (3) $\left|\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right| \le 2$, 这里积分路径 C 是从 i 到 $2+\mathrm{i}$ 的直线段.