◆ 以弹簧振子为例

$$F=-kx \quad \begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

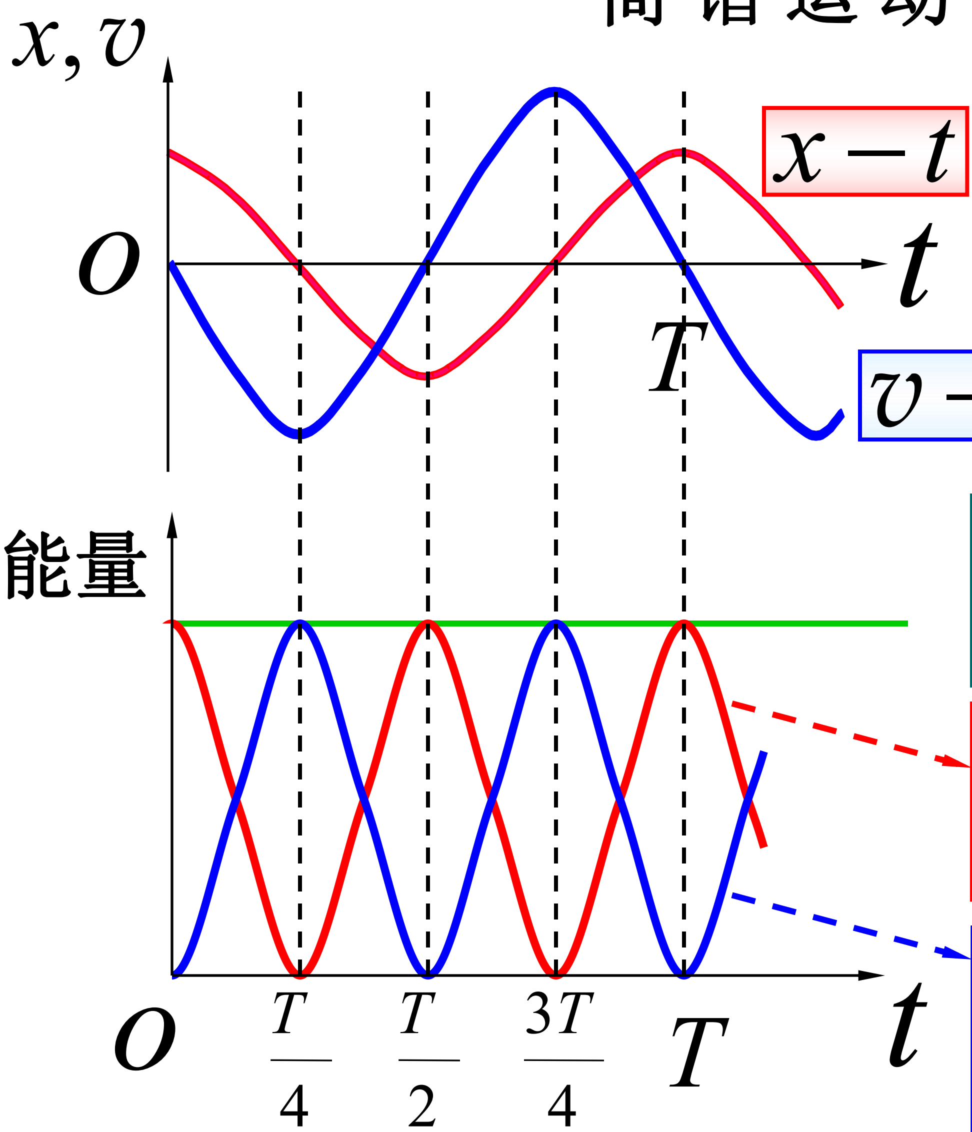
$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$\omega^2 = k/m$$

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$$ （振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

简谐运动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

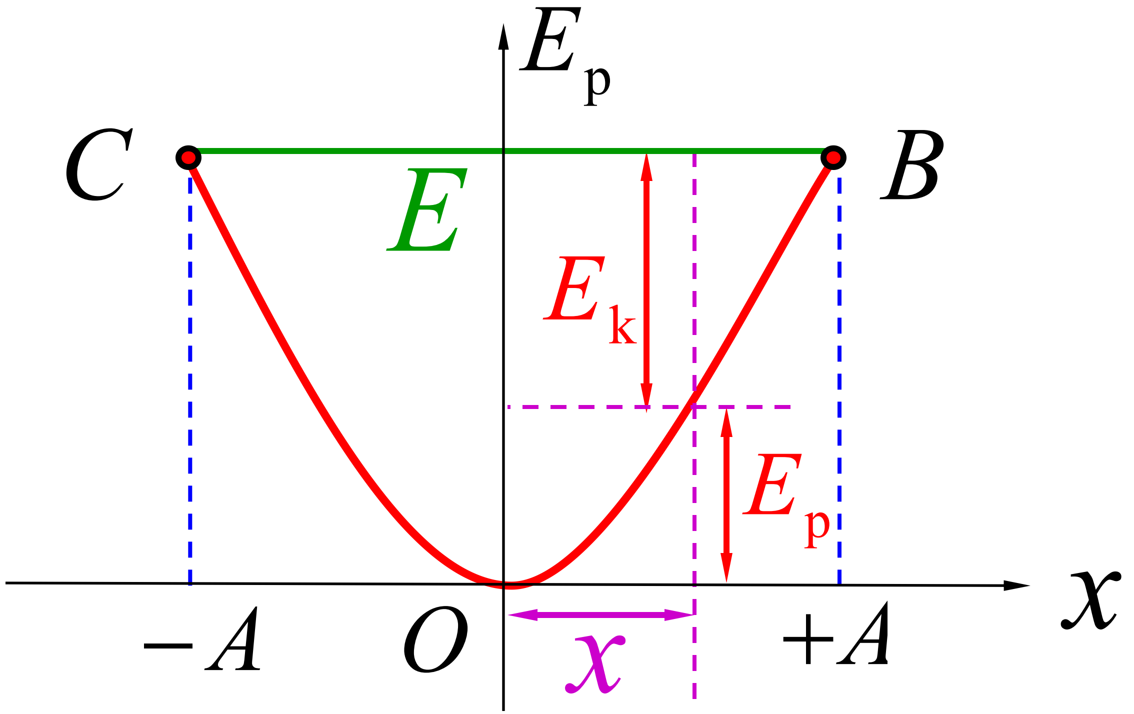
$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐运动能量守恒，振幅不变

简谐运动势能曲线



能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

•谐振过程中只有保守力作功，系统的机械能守恒，等于最大位移处的势能或平衡位置处的动能.

•谐振动系统的能量与振幅的平方成正比。谐振动是等幅振动。

由起始能量求振幅

$$E=\frac{1}{2}kA^2 \qquad A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$	$E_{k\max} = \frac{1}{2}kA^2$　$E_{k\min} = 0$ $\overline{E_k} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_k dt = \frac{1}{4}kA^2$
势能 $E_p = {}^1\!/_2\, kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$	$E_{p\max}$, $E_{p\min}$, $\overline{E_p}$ 情况同动能。
机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$	简谐振动系统机械能守恒

一质点作简谐振动，已知振动周期为T，则其振动动能变化的周期是

（A）T/4　　**（B）T/2** √

（C）T　　**（D）2T**

例 质量为0.10kg的物体，以振幅$1.0\times10^{-2}\,\text{m}$作简谐运动，其最大加速度为$4.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，**求**：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

解 （1） $a_{\max}=A\omega^2$ $\qquad \omega=\sqrt{\dfrac{a_{\max}}{A}}=20\text{s}^{-1}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\text{s}$$

（2） $E_{\mathrm{k,max}} = \dfrac{1}{2} m v_{\mathrm{max}}^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2.0\times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3） $E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

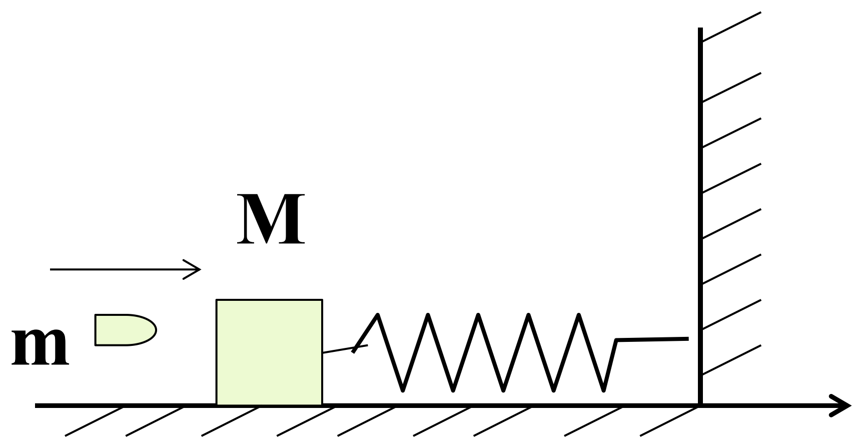
（4） $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $E_{\mathrm{p}} = 1.0\times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2} = 0.5\times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

$$x = \pm 0.707\,\mathrm{cm}$$

例 光滑水平面上的弹簧振子由质量为M的木块和劲度系数为k的轻弹簧构成。现有一个质量为m，速度为u_0的子弹射入静止的木块后陷入其中，此时弹簧处于自由状态。（1）写出该谐振子的振动方程；（2）求出x=A/2处系统的动能和势能



解：子弹射入木块过程中，水平方向动量守恒，设子弹陷入木块后两者的共同速度

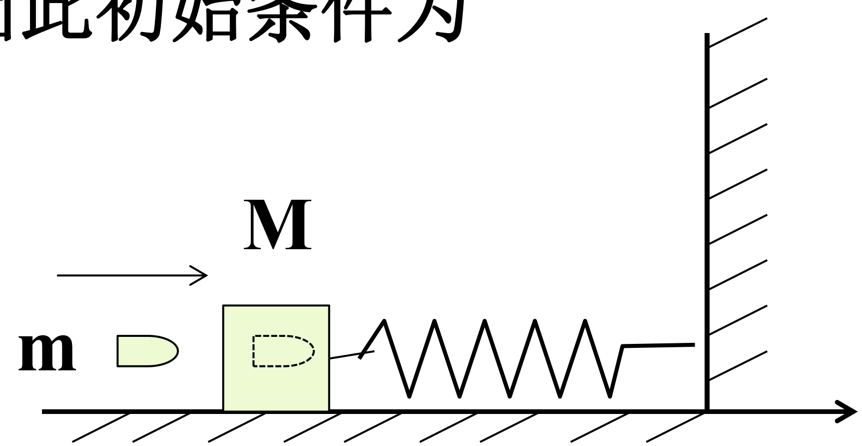
$$mu_0 = (M+m)V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{m}{M+m}u_0$$

取弹簧处于自由状态时，木块的平衡位置为坐标原点，水平向右为x轴的正方向，并取木块和子弹一齐开始向右运动的时刻为计时起点。因此初始条件为

$$x_0 = 0 \quad v_0 = V_0 > 0$$

子弹射入木块后的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$



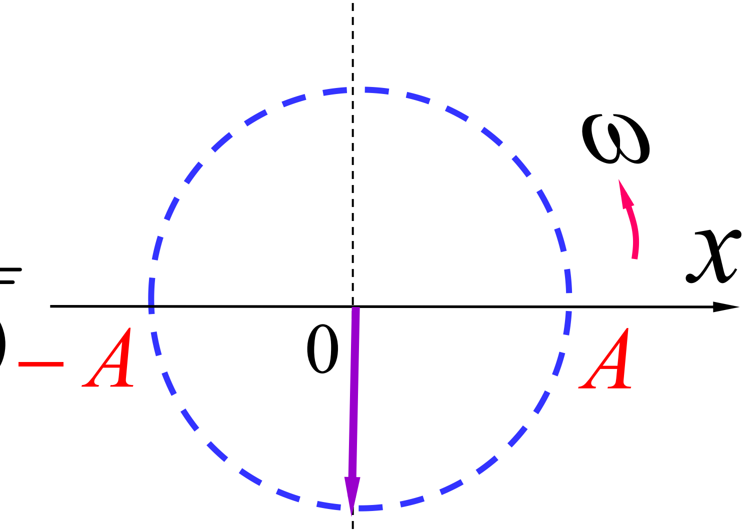
设谐振系统的振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

将初始条件带入得 $A\cos\varphi_0 = 0$

$$V_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0$$

联立求出 $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$

$$A = -\frac{V_0}{\omega\sin\varphi_0} = \frac{mu_0}{\sqrt{k(M+m)}}$$



所以谐振子的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{mu_0}{\sqrt{k(M+m)}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

（2）x=A/2处振动系统的动能和势能

$$A=\frac{mu_0}{\sqrt{k(M+m)}}$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2=\frac{m^2u_0^2}{8(M+m)}$$

$$E_k=E-E_p=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2$$

$$=\frac{3}{8}kA^2=\frac{3m^2u_0^2}{8(M+m)}$$