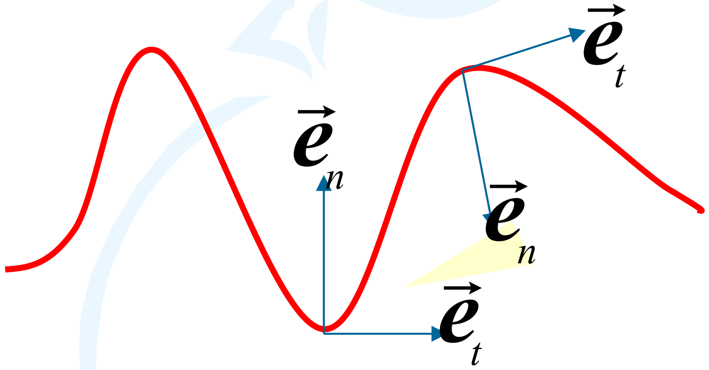
自然坐标系： 把坐标建立在运动轨迹上的坐标系统。

在运动轨道上任一点建立正交坐标系,其一根坐标轴沿轨道切线方向,正方向为运动的前进方向；一根沿轨道法线方向,正方向指向轨道内凹的一侧。



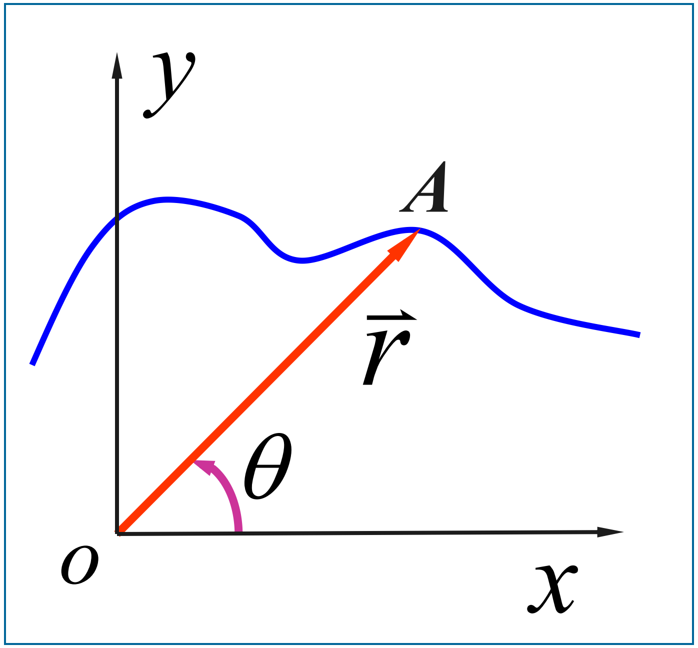
切向单位矢量 $\vec{e}_t$

法向单位矢量 $\vec{e}_n$

显然，轨迹上各点处，自然坐标轴的方位不断变化。

一 平面极坐标

设一质点在 Oxy 平面内运动，某时刻它位于点 A.矢径 $\vec{r}$ 与 x 轴之间的夹角为 θ. 于是质点在点 A 的位置可由 $A(r,\theta)$ 来确定.



以 (r,θ) 为坐标的参考系为**平面极坐标系**.

它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

二 圆周运动的角速度和角加速度

角坐标 $\theta(t)$

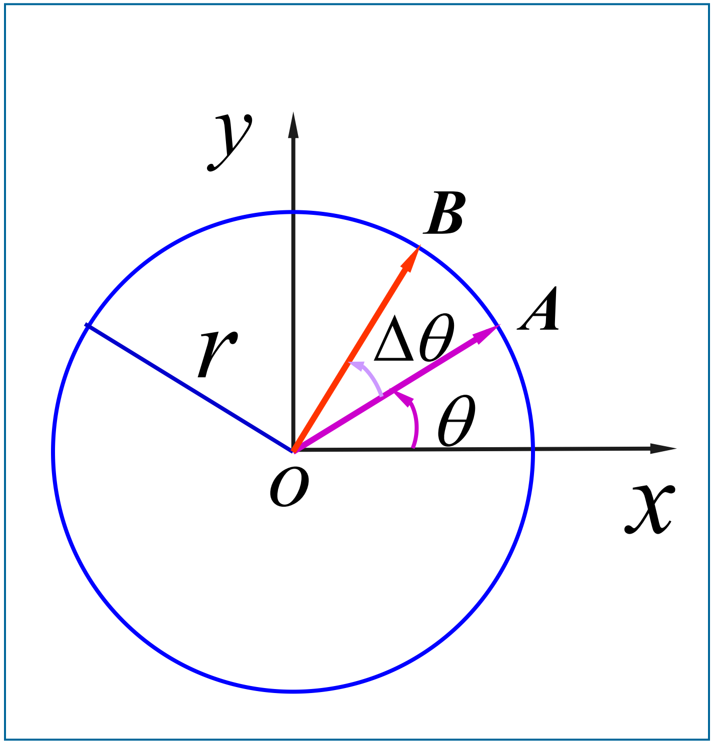
角速度 $\omega(t)=\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$

速 率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad v(t)=r\omega(t)$$

角加速度 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$



三 圆周运动的切向加速度和法向加速度 角加速度

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}=v\vec{e}_{\mathrm{t}}=r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

质点作变速率圆周运动时

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$$

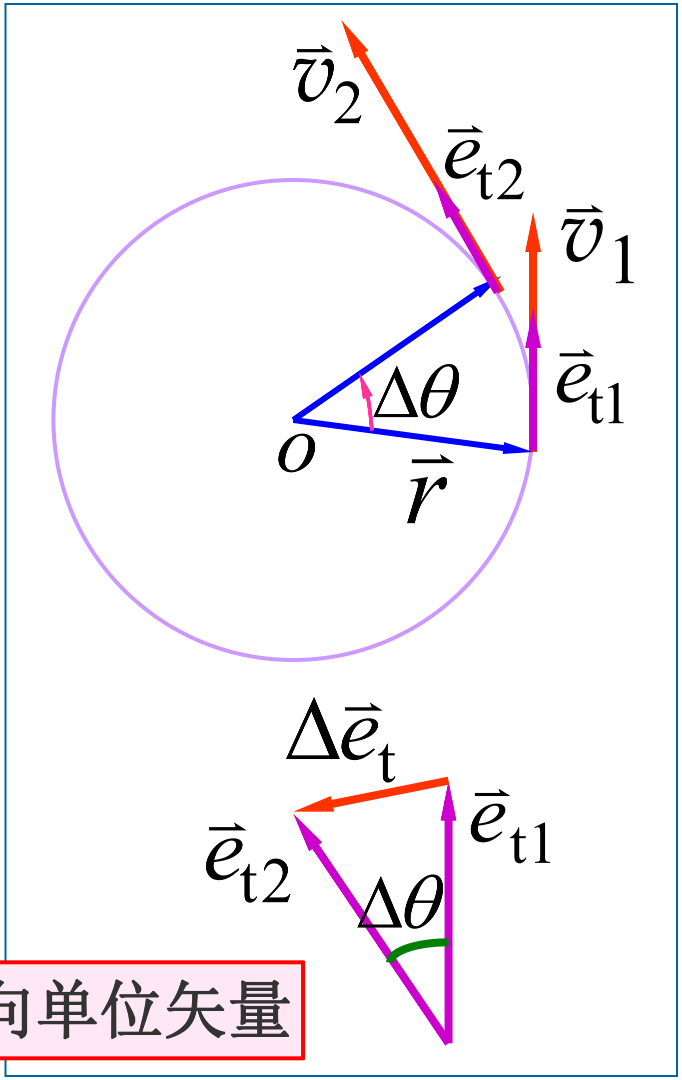
切向加速度

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

切向单位矢量的时间变化率

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

法向单位矢量



$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+v\omega\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

切向加速度（速度大小变化引起）

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

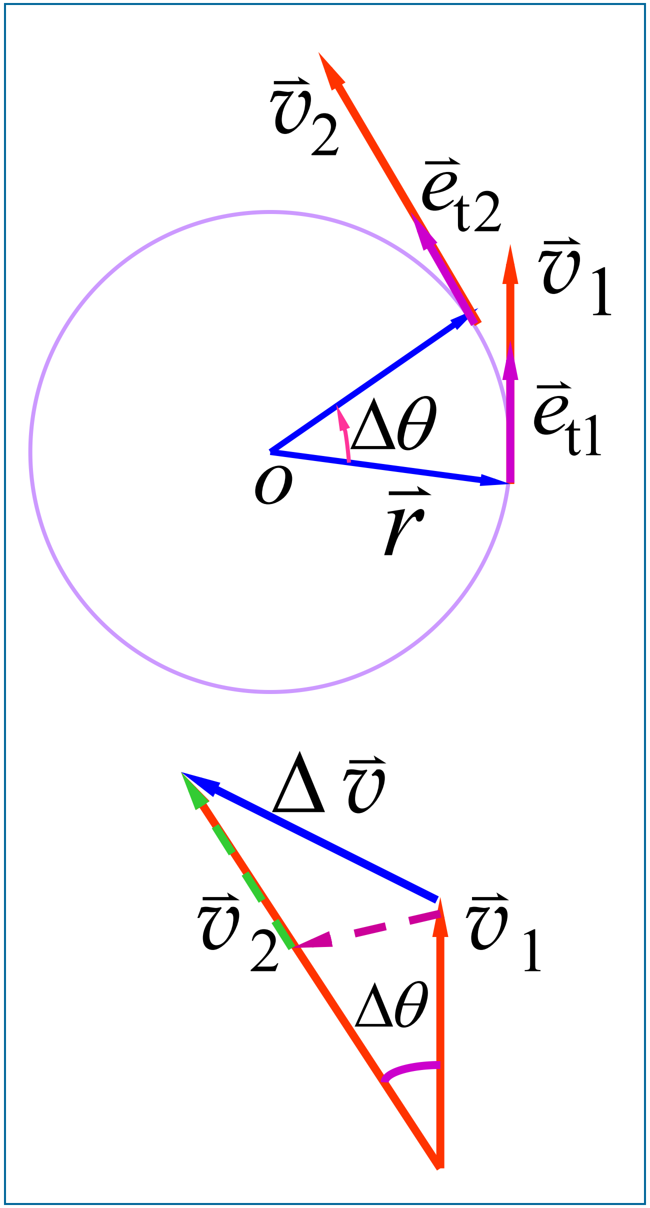
法向加速度（速度方向变化引起）

$$a_{\mathrm{n}}=v\omega=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$$

圆周运动加速度

$$\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$$



$$\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

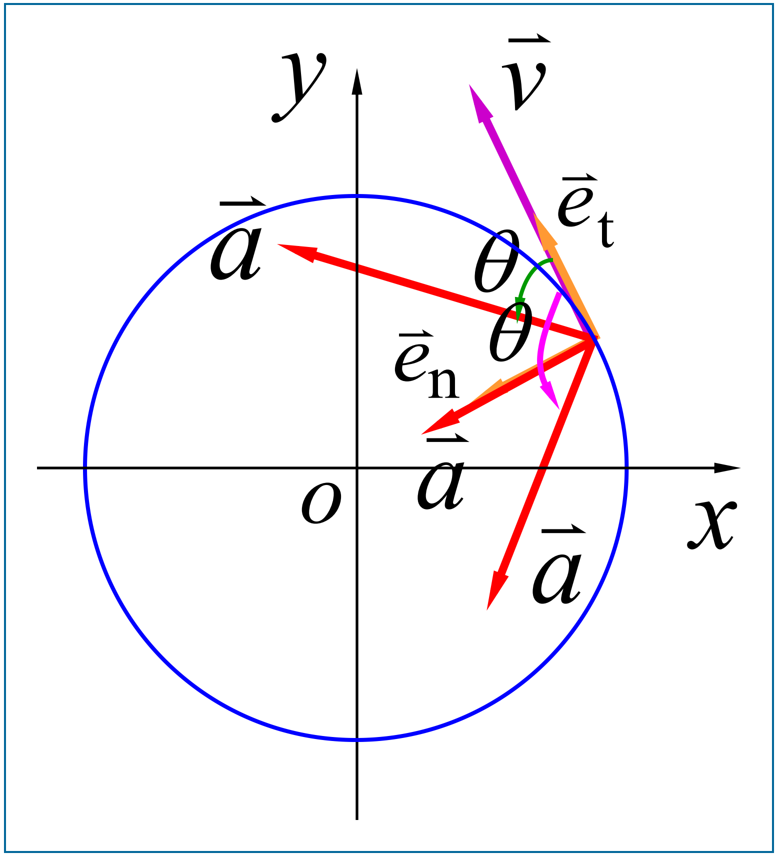
$$\theta=\tan^{-1}\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$$

$$\because a_{\mathrm{n}}>0 \quad \therefore 0<\theta<\pi$$

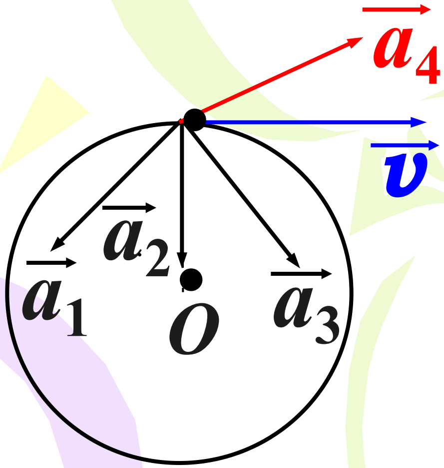
切向加速度

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha$$

$$a_{\mathrm{t}}\begin{cases} >0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ v\text{ 增大} \\ =0,\ \theta=\dfrac{\pi}{2},\ v\equiv\text{常量} \\ <0,\ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi,\ v\text{ 减小} \end{cases}$$



思考：



左图中分别是什么情形？

是否都能存在？

一般曲线运动（自然坐标）

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

其中 $\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 曲率半径.

四 匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

1 匀速率圆周运动：速率 v 和角速度 ω 都为常量.

$$a_{\mathrm{t}}=0 \qquad \vec{a}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}=r\omega^2\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

2 匀变速率圆周运动

$$\alpha=\text{常量}$$

如 $t=0$ 时，$\theta=\theta_0,\omega=\omega_0$

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

直线运动与圆周运动比较

直线运动	圆周运动
位置x、位移Δx	角位置θ、角位移$\Delta\theta$
速度$v=\dfrac{dx}{dt}$	角速度$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$
加速度$a=dv/dt=d^2x/dt^2$	角加速度$\alpha=\mathrm{d}\omega/\mathrm{dt}=\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{dt}^2$
匀速直线运动$x=x_0+vt$	匀速圆周运动$\theta=\theta_0+\omega t$
匀变速直线运动 $x=x_0+vt+\frac{1}{2}at^2$ $v=v_0+at$ $v^2=v_0{}^2+2a(x-x_0)$ $\overline{v}=(v_0+v)/2$	匀变速圆周运动 $\theta=\theta_0+\omega t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega=\omega_0+\alpha t$ $\omega^2=\omega_0{}^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$ $\overline{\omega}=(\omega_0+\omega)/2$

讨 论

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（A）切向加速度必不为零；

★（B）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（E）若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动．

思考题

质点作曲线运动，判断下列说法的正误。

$|\Delta\vec{r}| = \Delta r$　　$\Delta|\vec{r}| = \Delta r$　　$\Delta s = \Delta r$

$|\Delta\vec{r}| = \Delta s$　　$\Delta|\vec{r}| = \Delta s$

质点的运动学方程为x=6+3t-5t^3(SI),判断正误:

质点作匀加速直线运动，加速度为正。

质点作匀加速直线运动，加速度为负。

质点作变加速直线运动，加速度为正。

质点作变加速直线运动，加速度为负。

例题　讨论下列情况时，质点各作什么运动：

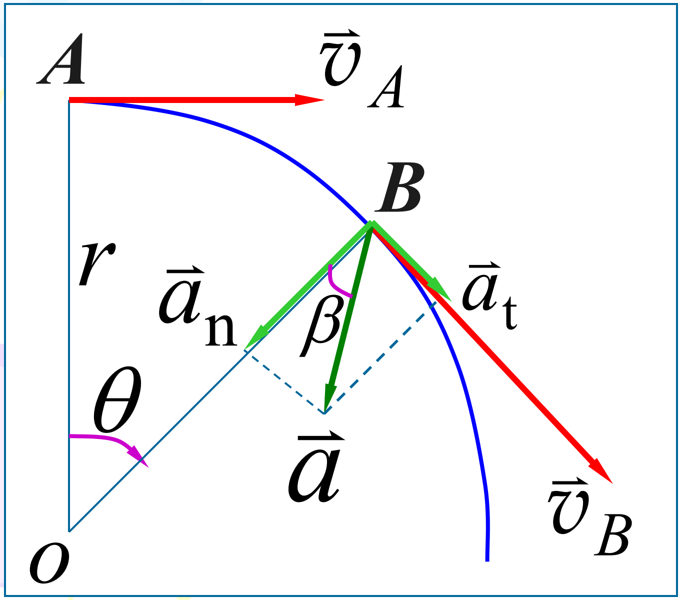
a_t 等于0, a_n等于0, 质点做什么运动?

a_t 等于0, a_n不等于0 , 质点做什么运动?

a_t 不等于0, a_n等于0 , 质点做什么运动?

a_t 不等于0, a_n不等于0 , 质点做什么运动?

例 如图一超音速歼击机在高空 A 时的水平速率为 1940 km/h， 沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 B ,其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从 A 到 B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点 B 的加速度；(2) 飞机由点 A 到点 B 所经历的路程．



解（1）因飞机作匀变速率运动所以 a_t 和 α 为常量．

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

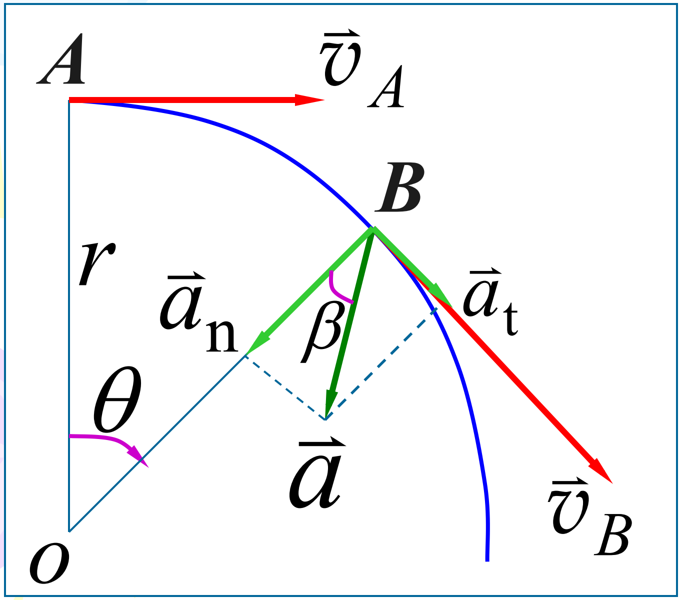
分离变量有 $\int_{v_A}^{v_B} dv = \int_0^t a_t dt$

已知：$v_A = 1940\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $v_B = 2192\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t = 3\text{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\text{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} v\mathrm{d}v = \int_0^t a_\mathrm{t}\mathrm{d}t \qquad a_\mathrm{t} = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

在点 B 的法向加速度 $a_\mathrm{n} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$



在点 B 的加速度

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = 109\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 β 为

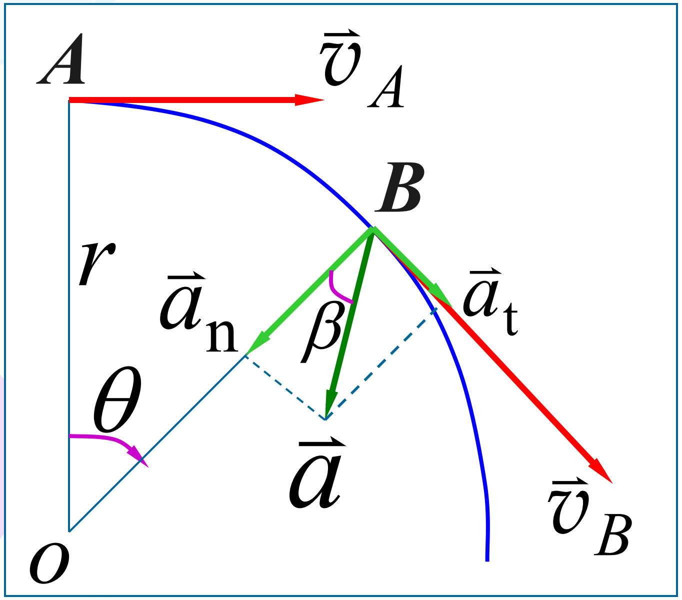
$$\beta = \arctan\frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{n}} = 12.4^\circ$$

已知： $v_A = 1940\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ $v_B = 2192\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

$t = 3\mathrm{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\mathrm{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\ \mathrm{m}$$

例 一质点沿半径为R的圆周按规律$s=v_0t-bt^2/2$运动，v_0、b都是正的常量。求：

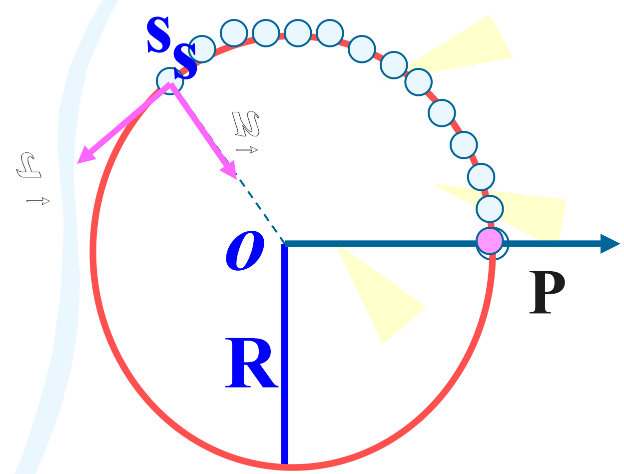
（1） t 时刻质点的总加速度的大小；

（2） t 为何值时，总加速度的大小为b；

（3）当总加速度大小为b 时，质点沿圆周运行了多少圈。

解： 先作图如右，$t=0$ 时，质点位于$s=0$ 的p点处。

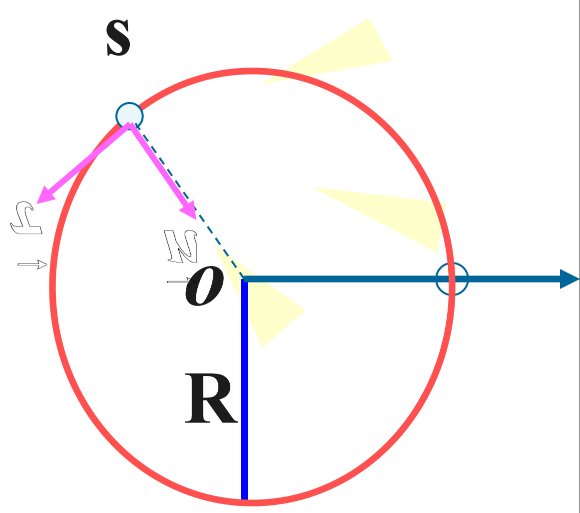
在t 时刻，质点运动到位置 s 处。



（1）t 时刻切向加速度、法向加速度及加速度大小:

$$\begin{cases} a_{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -b \\ a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(v_0 - bt)^2}{R} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^2 + (bR)^2}}{R}$$



（2）令 $a = \mathrm{b}$， 即

$$a = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^2 + (bR)^2}}{R} = b$$

得 $$t = v_0 / b$$

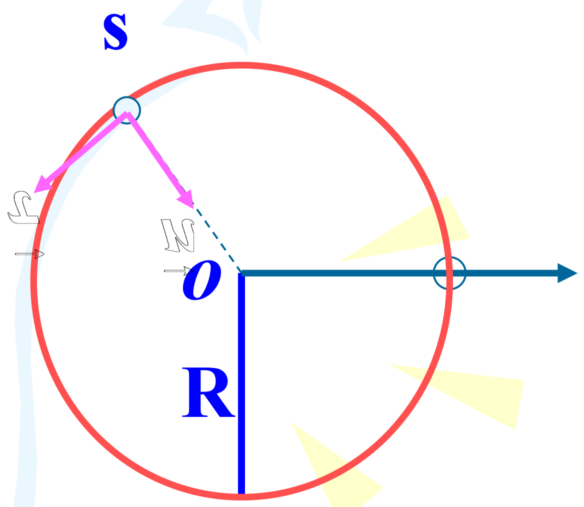
（3）当$a = b$ 时，$t = v_0/b$ ， 由此可求得质点历经的弧长为

$$s = v_0 t - bt^2/2$$

$$= v_0^2/2b$$

它与圆周长之比即为圈数：

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$



例 半径为**r = 0.2m**的飞轮，可绕**o**轴转动。已知轮缘上一点**M**的运动方程为**$\varphi = -t^2+4t$**，求在**1**秒时刻**M**点的速度和加速度。

解:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -2t + 4 \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = -2$$

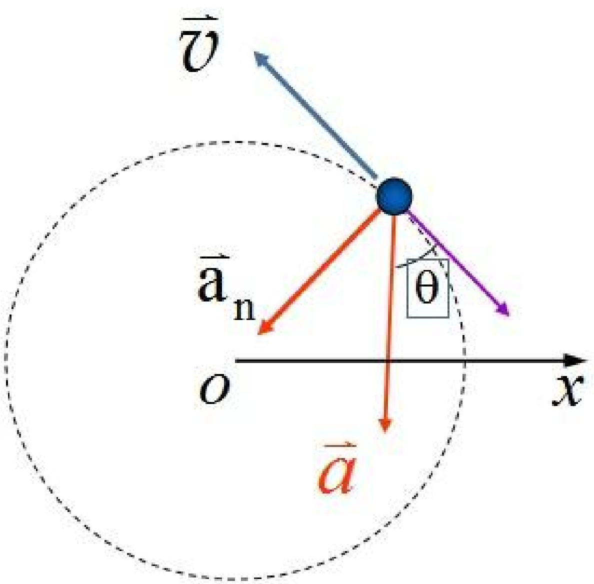
$$v = r\omega = r(-2t+4) = 0.2\times(-2\times1+4) = 0.4\,(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$a_\tau = \alpha r = (-2)\times0.2 = -0.4\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.2(-2\times1+4)^2 = 0.8\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0.89\,(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{a_n}{a_\tau}\right| = \tan^{-1}\frac{0.8}{0.4} = 63.4^\circ$$



例 一质点沿半径为R的圆周运动，其路程s随时间t的变化规律为 $s = bt - 1/2 \cdot ct^2$ ，式中b，c为大于零的常数，且 $b^2 > Rc$ 。求（1）质点的切向加速度和法向加速度。（2）经过多长时间，切向加速度等于法向加速度。

（1） $$v = \frac{ds}{dt} = b - ct$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -c \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

（2） $a_\tau = a_n$ 解得 $t = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{R}{c}}$