基础：极限理论、连续函数

极限

一、定义

1. 理解$\boldsymbol{\varepsilon}$-N($\boldsymbol{\varepsilon}$-$\boldsymbol{\delta}$)语言;

2. 无穷小语言;

3. 函数单侧极限$f(x_0+0), f(x_0-0)$;

4. 数列极限与函数极限的关系。

二、性质

1. 唯一性;

2. (局部)有界性;

3. 局部保序性(变量、极限两个方向);

4. 四则运算法则(前提：有限个，极限必须存在且有限，分母极限非零)。

三、判定法则

1. 两边夹准则（可以用来求极限);

2. 单调有界数列必有极限（只能判断极限存在有限，若知道数列递推关系则可以继续求极限)。

四、计算

1. 两个重要极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$

2. 0/0，∞/∞，∞ •0，∞－∞待定式的计算:（可与后面的变限积分求导结合）洛必达法则+<u>等价无穷小替换</u>+恒等变形技巧

3. 1^∞型待定式：第二个重要极限+洛必达法则；先取对数再用洛必达法则。

4. 幂指函数极限计算公式：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$,（注意条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$）.

5. 无穷小量：极限为零的变量，若是常数必为零；阶的比较；在极限计算中的应用；无穷小与无穷大之间的关系。

6. 必须考虑左右极限的情况：分段函数分段点处的极限、$e^{1/x}$在 x=0 处的极限、

$\frac{x}{|x|}$在 x=0 处的极限…

连续

一、定义及判定

1. f(x)在x_0处连续

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

2. 单侧连续
3. 间断点分类

第一类： $f(x_0+0)$、$f(x_0-0)$ 均存在有限

① 可去：$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$

② 跳跃：$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$

第二类：$f(x_0+0)$、$f(x_0-0)$中至少一个不存在或为无穷大

① 震荡间断点（典型例子 sin(1/x)在 x=0 处）

② 无穷间断点

二、性质

1. 四则运算保持连续性
2. 复合函数连续性：若 f 连续， 则 lim 与 f 可交换顺序
3. 反函数连续性
4. 初等函数在定义区间内都是连续的—可用来求连续函数的极限
5. 闭区间连续函数的性质

①零点存在定理——用来说明零点的存在性，可与单调性结合在一起考察零点个数。

②最值定理，有界性定理

③介值定理——重要应用：证明积分中值定理

（2012）一、1；二、1；三、2

（2013）一、4

（2014）一、1，2，3；二、1

（2015）一、1；二、1；三、2，4；（2016）二、2,3；

一元函数微分学（导数与微分+导数应用）

导数与微分

一、导数

1. 定义

① $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$，几何意义

② 左右导数 $f'_-(x_0),f'_+(x_0)$

③ 高阶导数 $f^{(n)}(x_0)$

2. 性质

① 四则运算

② 复合函数求导链式法则

③ 反函数求导公式

$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$; $\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

3. 计算

① 基本初等函数求导公式

② 参数方程确定的函数求导（一阶、二阶）

③ F(x, y)=0 确定的 y=y(x)求导（一阶、二阶）

④ 变限积分函数求导公式

⑤ 幂指函数求导——对数求导法 and 指数求导法

⑥ 分段函数在分段点处的导数计算——用定义!

⑦ 高阶导数计算：常见几种函数的高阶导数公式，莱布尼兹公式

二、微分

1. 微分定义、几何意义

2. 可导等价于可微，导数也称为微商

3. $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

$\Delta\mathrm{y}-\mathrm{d}y=o(\Delta x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$

（2012）一、2，3, 5；二、2；三、1

（2013）一、1, 3, 6, 10；二、1

（2014）一、4；二、2,3,4；三、1

（2015）一、2；三、1,2；四、1，3；

（2016）一、2；三、1；

导数的应用

一、洛必达法则：注意三个条件

二、微分中值定理

1. 罗尔定理

① 三个条件：闭区间连续、开区间可导、端点处函数值相等

② 结论：函数在开区间内某一点处导数为零

③ 应用：构造合适的辅助函数，利用罗尔定理证明包含中值的等式

④ 定理证明

2. Lagrange 中值定理

① 两个条件：闭区间连续、开区间可导

② 结论：函数在开区间内某一点处导数等于割线斜率——Lagrange 中值公式

③ 推论：函数在某区间内导数恒为零的充要条件是在该区间内函数恒为常数

3. Cauchy 中值定理：包含两个函数

4. Taylor 定理：$\mathrm{f(x)} = P_n(x) + R_n(x)$

① 皮亚诺型余项 —— 一般用于计算极限

② Lagrange 型余项 —— 用于误差估计、不等式证明、推论（函数在某区间内为 n 次多项式的充要条件是在该区间内(n+1)阶导数恒为零）

③ Maclaurin 公式：在 x=0 点的 Taylor 公式（书上例题出现的指数函数、三角函数)

（2014）四、2；

三、导数在函数形态上的应用

1. 单调性

① 单调性判断、单调区间的确定

② 单调性的应用：证明不等式、找方程根的个数

（2013）一、5；（2014）四、1；

2. 极值

① 必要条件：可导的极值点一定是驻点 — 反之不对，缺少可导的条件也不对

② 充分条件：第一充分条件；第二充分条件 — 推广形式（课后题 P95 第四题）

③ 求函数极值（点）的步骤：极值嫌疑点包括驻点和不可导的点

（2013）三、1；（2014）三、2；

3. 最值

① 求函数最值（点）的步骤：最值嫌疑点包括驻点、不可导的点、区间端点

② 实际应用问题：需要先写目标函数和目标区间，结合实际问题背景

③ 一个结论：如果 f(x) 在 (a, b) 内可导且有唯一驻点x_0，那么若x_0是极值点则必为最值点。

（2013）二、3；（2016）二、5；（2015）四、6

4. 凹凸性、拐点

① 凹凸性定义（割线之上和之下）、判定（二阶导数符号，只是充分条件）

② 拐点定义、必要条件（二阶可导的拐点必有二阶导数等于零）、充分条件（两侧二阶导数异号）

③ 确定函数的凹凸区间及拐点的步骤

（2012）二、4；四、2；（2014）二、5；（2016）二、6；

5. 渐近线

① 斜渐近线 y=kx+b ： $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$， $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-k)=\mathrm{b}$

特殊情况：水平渐近线

② 铅直渐近线 $\mathrm{x}=x_0$ ： $\mathrm{f}(x_0+0)=\pm\infty$ 或 $\mathrm{f}(x_0-0)=\pm\infty$

（2012）三、4；（2013）一、7；（2015）四、2；（2016）三、2；

6. 曲率

① 计算公式，参数方程表示的曲线计算曲率　　② 曲率半径

（2015）三、3；

一元函数积分学（不定积分+定积分+定积分的应用）

不定积分

一、定义：带任意常数项的原函数

1. 原函数存在定理：连续函数必存在原函数

① 原函数一定可导、连续

② 利用变限积分函数求导来构造原函数

2. P112 页的四个等式：求不定积分和求导在差一个常数的前提下互为逆运算

二、性质：线性性质

三、计算：<u>＋常数 C</u>

1. 公式法：基本积分公式+线性性质
2. 凑微分法：9 种常见的凑微分形式
3. 第二换元积分法：常用 6 种代换，消根号+积分完要还原回老的积分变量
4. 分部积分法：三类不定积分必须使用分部积分公式
5. 分段函数不定积分的计算：分段计算，然后根据原函数在分段点处连续确定任意常数之间的关系
6. 有理函数不定积分：一般方法，特殊问题特殊计算
7. 被积函数含根号：考虑第二换元积分，做代换去根号
8. $\int sin^m x \cdot cos^n x\, dx$
9. 三角有理函数不定积分：一般方法（万能代换），特殊问题特殊计算

（2012）一、4；（2013）一、9；二、5；（2014）三、3；

（2015）三、7；四、4；（2016）一、3；三、3；

定积分

一、定义：分割+取点+作和+求极限 —— 理解、会用

1. 利用定积分定义计算一些特殊和式的极限
2. 几何意义
3. 可积的条件：必要条件，充分条件

（2016）一、1；二、1；（2014）一、5；（2013）一、2；

二、性质

1. 线性性质
2. 对积分区间的有限可加性
3. 保序性：严格保序，且与个别点的函数值无关；书上的不等式结论前提条件是积分上限>积分下限

4. 积分中值定理：书上的定理，推广形式（课后题）；注意条件

三、变限积分函数

1. 连续性

2. 可导性：求导公式（书上证明）

3. 应用：证明原函数存在定理，N-L 公式

（2012）一、5；二、1；三、1；（2013）一、10；三、2；

（2014）二、4；（2015）一、4；四、6；（2016）二、3；四

四、定积分的计算

1. 公式法：N-L 公式（应用条件是被积函数在积分区间连续）+线性性质

2. 分段函数定积分的计算：两种题型（固定区间+不定区间）

利用积分区间内的分段点将积分区间分为若干小区间，然后利用定积分对积分区间的有限可加性，分别计算小区间的积分，再相加。

3. 定积分换元法：做变量代换后，注意更换积分上下限

① 定积分的凑微分，若不明确写出新的积分变量则不换限

② 用换元法可以证明一些积分恒等式（比如三角函数定积分公式第一组）

4. 分部积分法

① 必须使用分部积分的四类定积分

② 用分部积分公式可以证明一些积分递推关系（比如华里士公式）

五、几个重要的定积分公式

1. 对称区间上奇偶函数定积分公式

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x$$

2. 周期函数定积分公式

(1) $\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{a}^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathrm{N})$

3. 三角函数定积分公式（两组）

（2016）二、4；三、4,5；（2015）三、5；四、5；

（2013）二、6；（2012）三、3；（课本）P140 例 7-8

定积分的应用—微元分析法

一、几何应用—注意利用图形本身的对称性

1. 面积

① 直角坐标：X-型区域，Y-型区域，参数方程给出的曲线围成的区域；（会分析，记公式）

② 极坐标：曲边扇形面积（记公式）

2. 弧长（记公式）

① 曲线弧由直角坐标方程给出 $s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ （a<b）

② 曲线弧由参数方程给出 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ （α<β）

③ 曲线弧由极坐标方程给出 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ （α<β）

3. 体积

① 旋转体体积 — 体积微元的两种建立方法

② 平行截面已知的立体体积

（2012）三、6；（2013）一、8； 二、4；（2014）二、6； 三、4；

（2015）三、6； 四、6；（2016）三、6；

几何应用部分书上的例题+课上讲的例题+作业题

二、物理应用

1. 变力沿直线做功

2. 水压力

3. 引力

（2012）二、3； 书上的例题

三、广义积分

1. 无穷积分：定义

① 积分上限无穷大

② 积分下限无穷大

③ 积分上下限均为无穷大 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

④ P161 例 3

2. 瑕积分：定义，瑕点 —— 注意区分瑕积分与一般的定积分

① 积分上限（或下限）是瑕点

② 瑕点位于积分区间内：利用瑕点拆开成两个形如①的瑕积分

③ P162 例 5-6

3. 广义积分的计算

① 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零” 的性质，否则会出现错误。

② 用定义转化成定积分的极限，先算定积分，再算极限。

4. 混合型积分：积分上限无穷大，积分下限是瑕点

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

（2012）三、5；（2014）一、2； 三、5；（2015）一、3；（2016）一、5

讲过的例题+作业题