二、天线概述

天线

- 第1章 天线基础知识
  - 专题一：基本辐射元
  - 专题二：天线的电参数
  - 专题三：对称振子
  - 专题四：有关天线阵
- 第2章 简单线天线 → 专题五：简单线天线
- 第3章 行波天线、第4章 非频变天线 → 专题六：宽带天线
- 第5章 缝隙天线与微带天线 → 专题七：缝隙天线与微带天线
- 第8章 面天线 → 专题八：面天线
- 第6章:手机天线、第7章:测向天线、第9章:新型天线 → 专题九：移动通信天线进展及天线设计软件简介

专题一：基本振子（基本辐射元）

Elementary radiation elements

1. 1 基本振子的辐射

基本振子（基本辐射元）

- 电基本振子（电流元）
- 磁基本振子（磁流元）

专题一：基本辐射元

辐射——电磁场能量脱离场源，以电磁波的形式在空间传播。

辐射问题——求场源在周围空间产生的电磁场分布。

主要内容

1、时谐电磁场的位函数

2、电基本振子的辐射

3、对偶原理、磁基本振子的辐射

1. 时谐电磁场的位函数

- 由场源求空间场有两种方法——**直接法**和**间接法**。

- 较简单的方法是采用间接法，即引入位函数。

专题一：基本辐射元

一、时谐场位函数的定义与方程

矢量位和标量位：

$$\overline{B}=\nabla\times\overline{A},\quad \overline{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\overline{A}$$

$$\overline{E}=-\nabla\phi-j\omega\overline{A}$$

对于时谐电磁场 $\partial/\partial t\rightarrow j\omega$ ，洛仑兹规范化为 $\nabla\cdot\overline{A}=-j\omega\mu\varepsilon\phi$

因此 $$\overline{E}=-j\omega\overline{A}+\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\overline{A})$$

可见电场和磁场都可以由矢位 $\bar{A}$ 求出。

方程 $$\nabla^2\overline{A}+k^2\overline{A}=-\mu\overline{J}\qquad \nabla^2\phi+k^2\phi=-\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

其中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$

二、时谐场位函数的求解

a) 标位函数的解

标量方程比矢量方程简单，我们先求标量方程，由标量方程的解推出矢量方程的解。

设在无界空间中的原点有一单位点源电荷作时谐变化，这个点电荷源可以用 δ 函数来描述：

$$\delta(\bar{r}-\bar{r}')=0 \qquad \bar{r}\neq\bar{r}'$$

$$\int_V \delta(\bar{r}-\bar{r}')dv=1$$

$$\int_V f(\bar{r})\delta(\bar{r}-\bar{r}')dv=f(\bar{r}')$$

因单位点源置于原点, 故$\delta(\bar{r}-\bar{r}')=\delta(\bar{r})=\delta(r)$

专题一：基本辐射元

标位方程化为 $$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi)+k^2\phi=-\frac{\delta(r)}{\varepsilon}$$

$$r\neq 0,\delta(r)=0$$

即标量位为： $$\phi=C_1\frac{e^{-jkr}}{r}+C_2\frac{e^{jkr}}{r}$$

专题一：基本辐射元

$$\phi = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 \frac{e^{jkr}}{r}$$

第一项代表向外传播的波，第二项代表向内传播的波.

对**无界空间**只取前一项: $\phi = C_1 \dfrac{e^{-jkr}}{r}$

对于静电场 $k = 0$ $\phi = \dfrac{C_1}{r}$; 而静电场单位点电荷的电位 $\phi_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon r}$.

比较两式，得 $C_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$

因此，标位(是复数) $$\phi = G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\varepsilon r}$$

此即为无界空间中**单位点源电荷**在场点 r 处的格林函数。

思考 **如何求整个源在空间的“反应”** ？

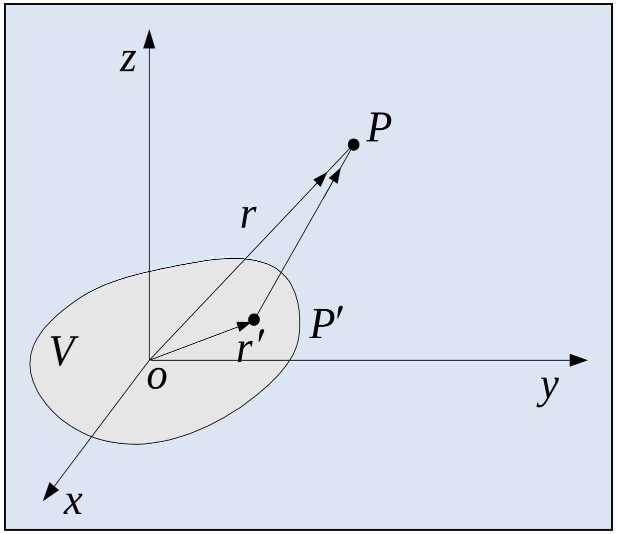
专题一：基本辐射元

一旦求得格林函数，就可用叠加原理求出整个场源的合成场(积分法).

设时谐电荷体密度为 ρ_v ，分布于体积V中, 则

$$\phi(r)=\int_V G(r-r')\rho_v(r')dv$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \rho_v(r')\frac{e^{-jkR}}{R}dv$$



计算位函数的坐标关系

专题一：基本辐射元

b)矢位函数的解

矢位方程的三个标量方程的解式应与上式类似。因此，

若时谐电流以体密度 $\bar{J}$ 分布在体积中，则它们在场点r处产生的矢位为

$$\bar{\mathrm{A}}(r) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \bar{\mathrm{J}}(r')\frac{e^{-jkR}}{R}dv$$

其中 $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$

对离开源点距离R的场点，滞后相位 $kR = \omega R / v_p = \omega t_p$；滞后时间 $t_p = R / v_p$ ，这个时间正是电磁波传播距离R所需时间。

也就是说，滞后原因在于电磁波以有是限的速度v_p传输的，因此称它们为滞后位。

2. 电基本振子的辐射 Radiation by Electric Short Dipole

一、定义及其电磁场

a）电基本振子的定义

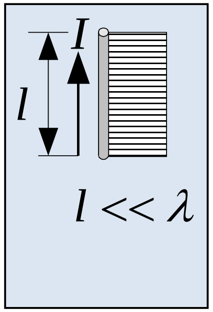
电基本振子也称为电流元（Current Element）；

电基本振子：设想的从实际的线电流上取出的一段非常短的直线电流；

1. $l<<\lambda$

2. I=const.

电矩：Il



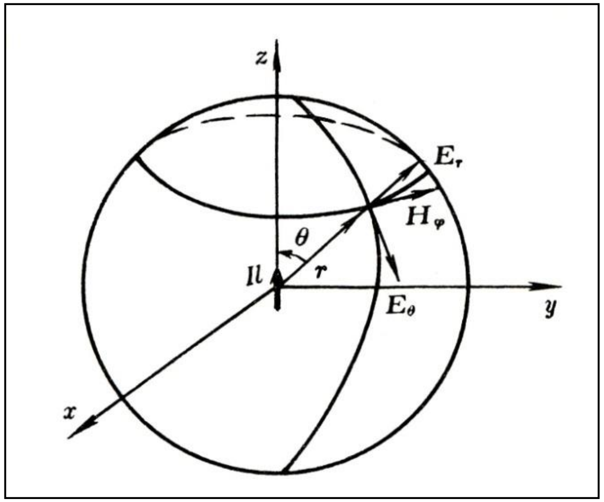
- 实际天线上的电流分布可看成是由很多这样的电流元所组成的；
- 研究**电基本振子**的辐射是研究更复杂天线辐射的基础；

b） 矢位法求电磁场

如图，电流元置于坐标原点，电流方向在z方向，电流密度$\bar{J}$

$$\bar{\mathrm{J}}\,dv = \bar{\mathrm{J}}\,dsdl = \hat{z}Idz$$

故矢位 $\bar{\mathrm{A}}(r) = \dfrac{\mu}{4\pi}\int_l \hat{z}I\dfrac{e^{-jkr}}{r}\mathrm{dz} = \hat{z}\dfrac{\mu Il}{4\pi r}e^{-jkr} = \hat{z}A_z$



电流元的电磁场分量

矢位在直角坐标系中只有z向，变换到球坐标系

$$\bar{\mathrm{A}} = \hat{r}A_z\cos\theta - \hat{\theta}A_z\sin\theta = \hat{r}A_r + \hat{\theta}A_\theta$$

从而求得磁场强度矢量

$$\bar{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\bar{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mu r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\varphi}\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right] = \hat{\varphi}H_\varphi$$

得

$$H_\varphi = j\frac{kIl}{4\pi r}\sin\theta\left(1+\frac{1}{jkr}\right)e^{-jkr}$$

思考 如何从磁场求得电场？

知道磁场后，可以根据Maxwell方程求得电场

$\because$ 场点无源 $\quad \bar{J} = 0$

$$\therefore \quad \overline{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \overline{H}$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi \sin\theta) - \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right] = \hat{r}E_r + \hat{\theta}E_\theta$$

得

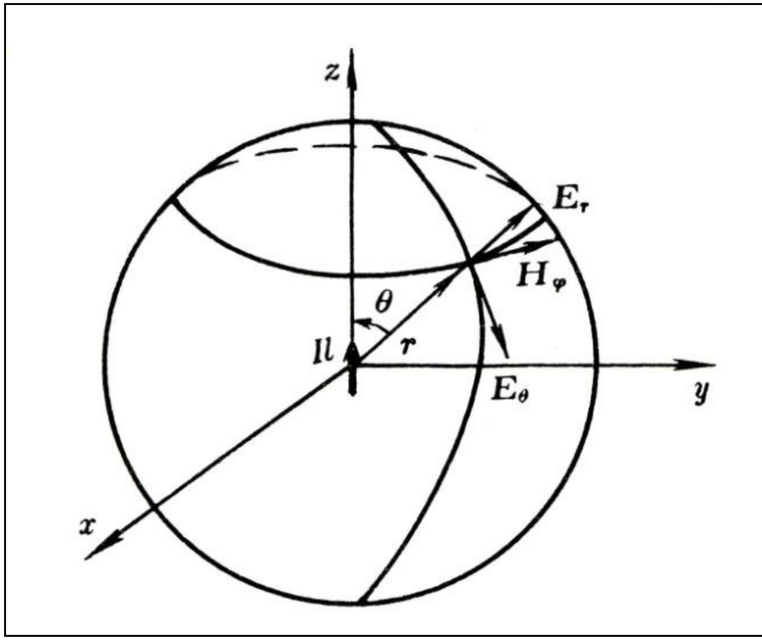
$$\begin{cases} E_r = \eta \dfrac{Il}{2\pi r^2}\cos\theta\left(1 + \dfrac{1}{jkr}\right)e^{-jkr} \\ E_\theta = j\eta \dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta\left(1 + \dfrac{1}{jkr} - \dfrac{1}{k^2 r^2}\right)e^{-jkr} \end{cases}$$

专题一：基本辐射元

电基本振子的辐射场：

$$H_{\varphi}=j\frac{kIl}{4\pi r}\sin\theta(1+\frac{1}{jkr})e^{-jkr}$$

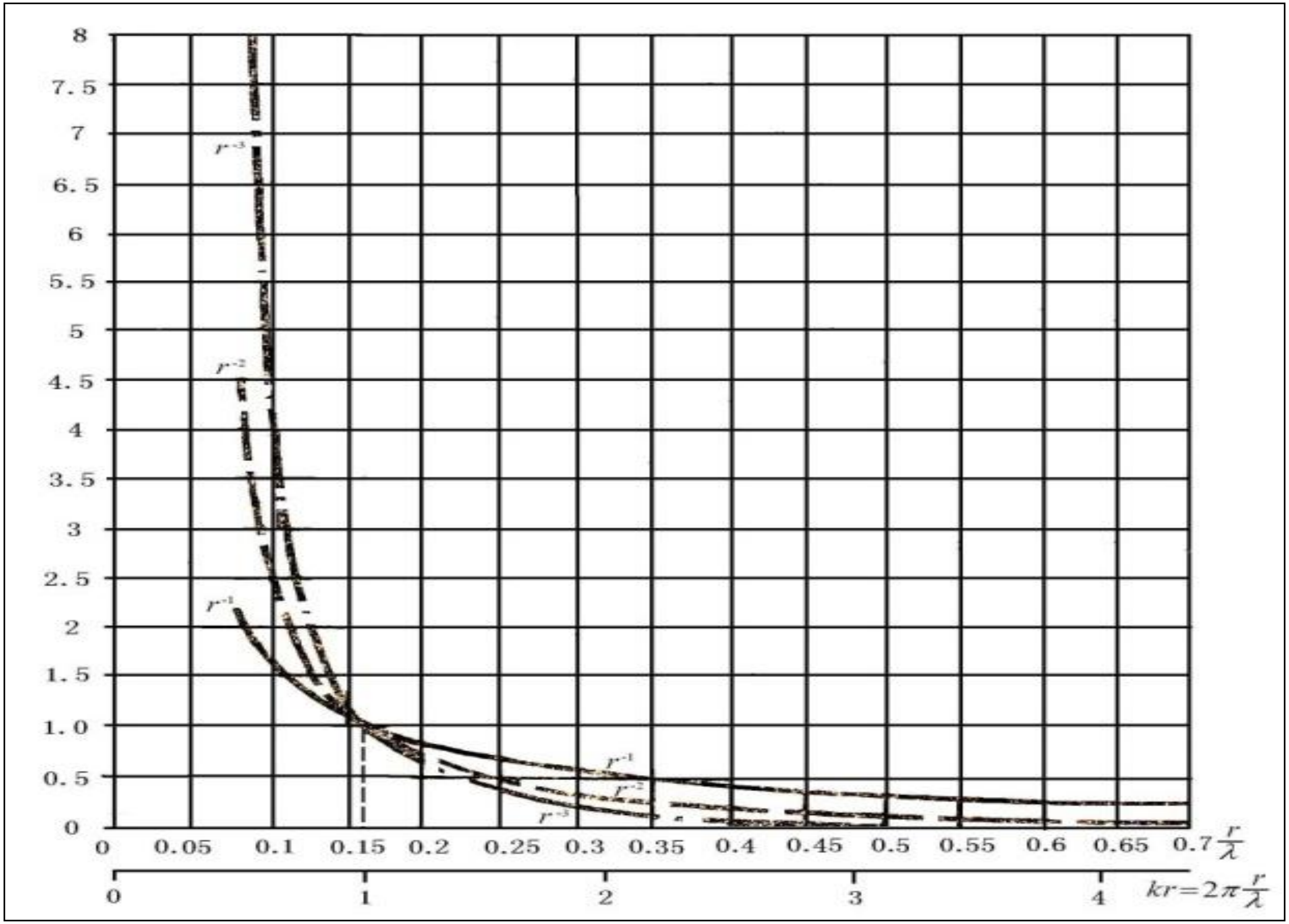
$$\begin{cases}E_r=\eta\dfrac{Il}{2\pi r^2}\cos\theta(1+\dfrac{1}{jkr})e^{-jkr}\\ E_{\theta}=j\eta\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta(1+\dfrac{1}{jkr}-\dfrac{1}{k^2r^2})e^{-jkr}\end{cases}$$



电基本振子的坐标

磁场强度只有 $\hat{\varphi}$ 分量，电场强度有 E_r 和 E_{θ} 分量，它们都随r的增加而减小。

专题一：基本辐射元



场分量各成分随r/λ的变化曲线

二、近区场

近区是指$kr \ll 1$，即$r \ll \lambda/2\pi \sim \lambda/6$的区域，在这个区域中

$$1 \ll \frac{1}{kr} \ll \frac{1}{k^2 r^2}, \qquad e^{-jkr} \approx 1$$

因此**近区的电场强度和磁场强度**可以近似为：

$$\begin{cases} E_r = -j\eta \dfrac{Il}{2\pi k r^3}\cos\theta \\ E_\theta = -j\eta \dfrac{Il}{4\pi k r^3}\sin\theta \\ H_\varphi = \dfrac{Il}{4\pi r^2}\sin\theta \end{cases}$$

专题一：基本辐射元

$$\begin{cases} E_r = -j\eta \dfrac{Il}{2\pi k r^3}\cos\theta \\ E_\theta = -j\eta \dfrac{Il}{4\pi k r^3}\sin\theta \\ H_\varphi = \dfrac{Il}{4\pi r^2}\sin\theta \end{cases}$$

- 近区的电场表示式与静电偶极子的电场表示式相同；
- 磁场的表示式与恒定电流元的磁场表示式相同，称之为**似稳场**；
- 其原因在于近区的滞后效应不明显：$e^{-jkr} \approx 1.$

•**磁场*H*与电场*E*间有 $\pi/2$相差。**

• 平均功率流密度 $\mathbf{S}^{av} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = 0$ ，**无实功率，只有虚功率**。

•能量没有辐射，所以近区场也称为**感应场**。

注意： 忽略的较小项仍然存在，其中有的传输实功率，电流元向外辐射的净功率正是由它们携带和传送的。

三、远区场

远区： $kr >> 1$ 即 $r >> \lambda/2\pi.$

如$f = 900MHz, r >> 0.33/2\pi = 0.053m,$即$r > 0.53m.$

这是最有实用意义的区域。

$$1 >> \frac{1}{kr} >> \frac{1}{k^2r^2} >> \frac{1}{k^3r^3}$$

远区场近似为：

$$\begin{cases} E_\theta = j\eta\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{\eta Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} \\ H_\varphi = j\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} = \dfrac{E_\theta}{\eta} \end{cases}$$

式中$\eta = \eta_0 = 120\pi\Omega$

专题一：基本

远区场特点

$$\begin{cases} E_\theta = j\eta \dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{\eta Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} \\ H_\varphi = j\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} = \dfrac{E_\theta}{\eta} \end{cases}$$

（1）**方向：** 电场只有 E_θ 分量，磁场只有 H_φ 分量。

坡印亭矢量为 $\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^* = \frac{1}{2}\hat{\theta}E_\theta \times \hat{\varphi}H_\varphi^* = \hat{r}\frac{1}{2}E_\theta H_\varphi^*$

——**横电磁波（TEM波）**

（2）**相位：** 电场和磁场的空间相位因子都是 $-kr$，等r的球面为其等相面，是**球面波**。相当于从球心一点发出，故称为点源，球心称为相位中心。

波阻抗 $\eta = \frac{E_\theta}{H_\varphi} = 120\pi\ \Omega$， 电场和磁场在时间上同相

平均功率流密度： $\bar{S}^{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\bar{E}\times\bar{H}^*] = \hat{r}\frac{1}{2}E_\theta H_\varphi^* = \hat{r}\frac{1}{2}|E_\theta|^2/\eta_0$

即**向 $\hat{r}$ 方向传输实功率，所以远区场也称为辐射场**。

专题一：基本辐射元

$$\begin{cases} E_\theta = j\eta \dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{\eta Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} \\ H_\varphi = j\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} = \dfrac{E_\theta}{\eta} \end{cases}$$

（3）振幅：

※**场的振幅与r成反比，功率流密度与 r^2成反比；**

——这是球面波的振幅特点 (e^{-jkr}/r 称为球面波因子);

※场的振幅与电流I成正比，与天线的电长度l/λ成正比;

※场的振幅还与 $\sin\theta$ 正比——**电基本振子辐射具方向性**:

$\theta = 90^\circ$, 最大;　　$\theta = 0^\circ$(轴向), 零辐射.

3. 对偶原理，磁基本振子的辐射

Duality Theorem, Radiation by Magnetic Current Element

一、广义麦克斯韦方程组

自然界不存在单独的磁荷和磁流.但为便于处理某些电磁场问题，可引入磁荷和磁流作为等效场源。如：小电流环⟷磁基本振子.

广义Maxwell方程组：

$$\nabla\times\overline{E} = -\overline{J}^{m} - j\omega\mu\overline{H}$$

$$\nabla\times\overline{H} = \overline{J} + j\omega\varepsilon\overline{E}$$

$$\nabla\cdot\overline{E} = \rho_{v}/\varepsilon$$

$$\nabla\cdot\overline{H} = \rho_{v}^{m}/\mu$$

广义边界条件：

$$\hat{n}\times\left(\overline{E}_2 - \overline{E}_1\right) = -\overline{J}_s^{m}$$

$$\hat{n}\times\left(\overline{H}_2 - \overline{H}_1\right) = \overline{J}_s$$

二、对偶原理

电基本振子源产生的场:

$$\nabla\times\bar{E}^e = -j\omega\mu\bar{H}^e$$

$$\nabla\times\bar{H}^e = \bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E}^e$$

由电基本振子所等效的磁基本振子产生的场:

$$\nabla\times\bar{E}^m = -\bar{J}^m - j\omega\mu\bar{H}^m$$

$$\nabla\times\bar{H}^m = j\omega\varepsilon\bar{E}^m$$

二者数学形式完全相同，它们的解也必取相同的数学形式，只是对偶量互换.

- -----对偶原理（*Duality theorem*）

注意：1) 对偶方式不是唯一的;

2) 对偶量的边界条件形式也需相同 .

电基本振子与磁基本振子的对偶量

$\bar{J}$（$\bar{J}^m$=0）	$\bar{J}^m$（$\bar{J}$=0）
$\bar{E}^e$	$\bar{H}^m$
$\bar{H}^e$	$-\bar{E}^m$
$\bar{J}$	$\bar{J}^m$
$\bar{A}$	$\bar{F}$
ε	μ
μ	ε
k	k
η	$1/\eta$

三、磁基本振子的辐射

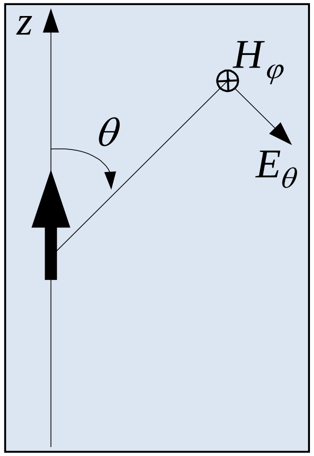
利用对偶原理可方便地由电流元的场得出磁基本振子的场 .

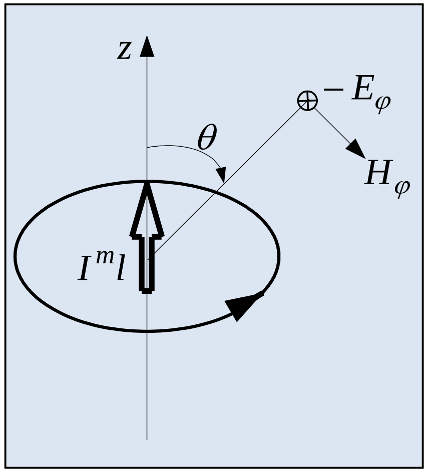
磁基本振子:

1) $l << \lambda$

2) $I^m = Const.$

磁矩: $I_m l$





(a) (b)

电基本振子与磁基本振子的远场矢量比较

专题一：基本辐射元

电基本振子　　　　　　磁基本振子

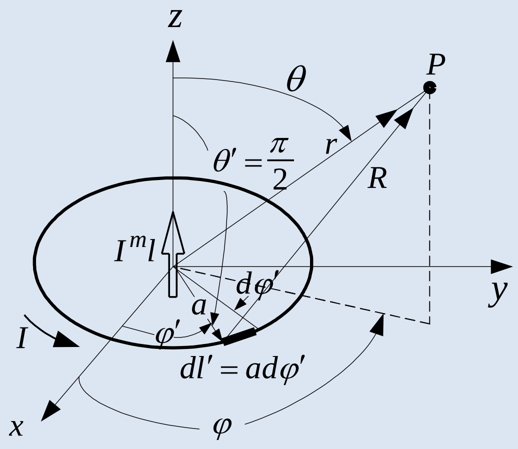
近场

$$\begin{cases} H_\varphi = j\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta(1+\dfrac{1}{jkr})e^{-jkr} \\ E_r = \eta\dfrac{Il}{2\pi r^2}\cos\theta\left(1+\dfrac{1}{jkr}\right)e^{-jkr} \\ E_\theta = j\eta\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta\left(1+\dfrac{1}{jkr}-\dfrac{1}{k^2r^2}\right)e^{-jkr} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E_\varphi = -j\dfrac{kI^m l}{4\pi r}\sin\theta(1+\dfrac{1}{jkr})e^{-jkr} \\ H_r = \dfrac{I^m l}{2\pi r^2\eta}\cos\theta(1+\dfrac{1}{jkr})e^{-jkr} \\ H_\theta = j\dfrac{kI^m l}{4\pi r\eta}\sin\theta(1+\dfrac{1}{jkr}-\dfrac{1}{k^2r^2})e^{-jkr} \end{cases}$$

远场

$$\begin{cases} E_\theta = j\eta_0\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{60\pi Il}{\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} \\ H_\varphi = j\dfrac{kIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{Il}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} = \dfrac{E_\theta}{120\pi} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E_\varphi = -j\dfrac{kI^m l}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr} = -j\dfrac{I^m l}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr} \\ H_\theta = j\dfrac{kI^m l}{4\pi r\eta_0}\sin\theta e^{-jkr} = j\dfrac{I^m l}{2\lambda r\eta_0}\sin\theta e^{-jkr} = -\dfrac{E_\varphi}{120\pi} \end{cases}$$

四、小电流环



小电流环的分析

定义: 1) $a << \lambda$

2) $\mathrm{I} = Const.$

a)用矢位法求场

$$\bar{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{\mu}{4\pi}\int_l \hat{\varphi}'\frac{I}{R}e^{-jkR}dl'=\frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\hat{\varphi}' I}{R}e^{-jkR}ad\varphi'$$

$$\hat{\varphi}'=-\hat{x}\sin\varphi'+\hat{y}\cos\varphi'$$

$$=-(\hat{r}\sin\theta\cos\varphi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi)\sin\varphi'+(\hat{r}\sin\theta\sin\varphi+\hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi)\cos\varphi'$$

$$=\hat{r}\sin\theta\sin(\varphi-\varphi')+\hat{\theta}\cos\theta\sin(\varphi-\varphi')+\hat{\varphi}\cos(\varphi-\varphi')$$

又有 $$R=|\bar{r}-\bar{r}'|=[r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]^{1/2}$$

$$\approx r-a\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')$$

对a=0展开 $$f(a)=f(0)+f'(0)a+\frac{1}{2!}f''(0)a^2+\ldots$$

$$=\frac{e^{-jkr}}{r}+\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{-jkr}a\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')+\ldots$$

专题一：基本辐射元

取$\varphi = 0$(轴对称,结果与φ无关),得

$$\overline{A} = \hat{\varphi} A_\varphi = \hat{\varphi}\frac{\mu a I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) a\sin\theta\cos\varphi'\right]e^{-jkr}d\varphi'$$

$$= \hat{\varphi} j\mu\frac{ka^2 I}{4r}\sin\theta\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)e^{-jkr}$$

$$\overline{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\overline{A} = \frac{\hat{r}}{\mu r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right) + \frac{\hat{\theta}}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right) = \hat{r}H_r + \hat{\theta}H_\theta$$

$$\overline{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\overline{H} = \frac{\eta}{jk}\frac{\hat{\varphi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right] = \varphi E_\varphi$$

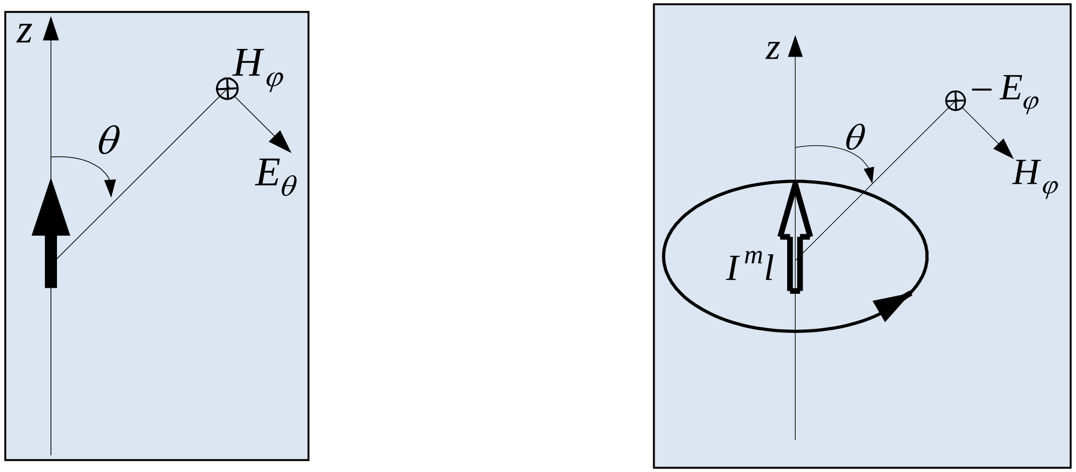
得

$$\begin{cases} E_\varphi = \eta\dfrac{(ka)^2 I}{4r}\sin\theta(1 + \dfrac{1}{jkr})e^{-jkr} \\ H_r = j\dfrac{ka^2 I}{2r^2}\cos\theta(1 + \dfrac{1}{jkr})e^{-jkr} \\ H_\theta = -\dfrac{(ka)^2 I}{4r}\sin\theta(1 + \dfrac{1}{jka} - \dfrac{1}{k^2 r^2})e^{-jkr} \end{cases}$$

与磁基本振子场相比知,二者相等效,等效关系: $I^m l = jka^2 I\pi\eta = j\omega\mu I A_0$ $A_0 = \pi a^2$ (圆环面积)

专题一：基本辐射元

b)远区场



(a) (b)

电基本振子与磁基本振子的远场矢量比较

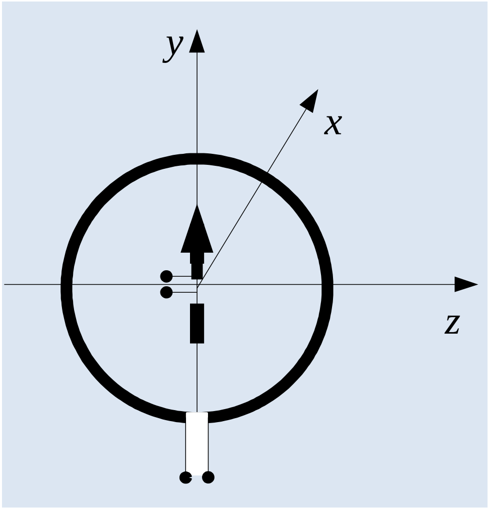
$$
\begin{cases}
E_{\varphi} = \eta_0 \dfrac{(ka)^2 I}{4r} \sin\theta e^{-jkr} = \dfrac{120\pi^2 A_0 I}{r\lambda^2} \sin\theta e^{-jkr} \\
H_{\theta} = -\dfrac{(ka)^2 I}{4r} \sin\theta e^{-jkr} = -\dfrac{\pi A_0 I}{r\lambda^2} \sin\theta e^{-jkr}
\end{cases}
$$

专题一：基本辐射元

电基本振子与小电流环的远场复振幅比较

电基本振子	小电流环
$E_\theta = j\dfrac{60\pi I}{r}\dfrac{l}{\lambda}\sin\theta$	$E_\varphi = \dfrac{120\pi^2 I}{r}\dfrac{A_0}{\lambda^2}\sin\theta$
$H_\varphi = j\dfrac{I}{2r}\dfrac{l}{\lambda}\sin\theta$	$H_\theta = -\dfrac{\pi I}{r}\dfrac{A_0}{\lambda^2}\sin\theta$

电基本振子的远场式中含有虚数因子j，而小环却没有。这表明，当电基本振子与小环二者的馈电电流同相时，二者的远场在时间相位上是相差90° 的。这样，如果我们把它们组合在一起，便可能形成圆极化波辐射场。



c)辐射功率与辐射电阻

$$\overline{S^{av}} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2}\hat{\varphi}E_{\varphi} \times \hat{\theta}H_{\theta}^{*}] = \hat{r}\frac{1}{2}\frac{|E_{\varphi}|^2}{120\pi} = \hat{r}60\pi(\frac{\pi I}{r}\frac{A_0}{\lambda^2})^2\sin^2\theta$$

$$P_r = \int_s S^{av}\cdot r^2\sin\theta d\theta d\rho = 60\pi(\frac{\pi I}{r}\frac{A_0}{\lambda^2})^2\cdot 2\pi\cdot\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta = 160\pi^4(\frac{A_0}{\lambda^2})^2 I^2$$

令 $$P_r = \frac{1}{2}I^2R_r$$

得 $$R_r = 320\pi^4(\frac{A_0}{\lambda^2})^2 \approx 31200(\frac{A_0}{\lambda^2})^2 = 197\left(\frac{C}{\lambda}\right)^4$$ ，$C = 2\pi a$