第10周作业及其参考答案

Edited by Hu Chen

OUC

May 14, 2020

目录

习题八作业

5.有一两端无界的枢轴，其初始温度为

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & (|x|<1),\\ 0 & (|x|\geq 1),\end{cases}$$

试求在枢轴上的温度分布为

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)e^{-a^2\mu^2 t}d\mu.$$

解 令$u(x,0)=\varphi(x)$. 由题意知$u(x,t)$满足如下的初值问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u(x,0)=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty).\end{cases}$$

此问题解的表达式为

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}e^{-\mu^2a^2t}[A(\mu)\cos\mu x+B(\mu)\sin\mu x]d\mu,$$

其中

$$
\begin{aligned}
A(\mu) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos\mu\xi d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos\mu\xi d\xi \\
&= \frac{2}{\pi\mu}\sin\mu,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(\mu) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\sin\mu\xi d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin\mu\xi d\xi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

代回到$u(x,t)$ 的表达式，得

$$
u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)e^{-\mu^2 a^2 t} d\mu,
$$

注1.1

注意一下课本上和ppt 上$u(x,t)$ 和$A(\mu), B(\mu)$ 的区别, 课本上$u(x,t)$ 的表达式是μ 从$-\infty$ 到$+\infty$ 积分，相应的$A(\mu), B(\mu)$积分号前面的系数变成了$\frac{1}{2\pi}$.

8. 求解初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中$f(x,t)$ 为已知的连续函数.

解 此问题显然是一个非齐次问题，我们利用齐次化原理进行求解。我们首先要解一个辅助问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & (t > \tau), \\ v(x,\tau) = f(x,\tau) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

记此问题的解为$v(x,t;\tau)$, 则原问题的解为

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)d\tau.$$

下面我们来求解$v(x,t;\tau)$. 令$s = t - \tau$, $w(x,s) := v(x,\tau+s) = v(x,t)$, 则$w(x,s)$满足如下定解问题

$$\begin{cases} w_s = a^2 w_{xx} & (s > 0), \\ w(x,0) = f(x,\tau) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

所以(见ppt 或课本上初值问题解的最终简化形式)

$$w(x,s)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi s}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 s}}d\xi.$$

故再由$s=t-\tau$得

$$v(x,t)=w(x,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi.$$

所以原问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau=\int_0^t\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

9. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \dfrac{u_0}{l} x & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中u_0 为已知常数.

解 显然此问题边界条件是非齐次的, 所以第一步要对边界条件进行齐次化处理(我们需要构造辅助函数$w(x,t)$ 满足原问题的边界条件, 则$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ 满足齐次条件). 令$w(x,t) = u_0$, 则$w_x(0,t) = 0$, $w(l,t) = u_0$. 所以$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t) = u(x,t) - u_0$ 满足齐次条件. 再代入原方程和初值条件, 我们可得$v(x,t)$ 满足如下的定解问题:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), & (1) \\ v_x(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0 & (t \geq 0), & (2) \\ v(x,0) = \dfrac{u_0}{l} x - u_0 & (0 \leq x \leq l). & (3) \end{cases}$$

下面我们用分离变量法求解. 设$v(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程(1)得

$$XT' = a^2 X'' T,$$

两边同时除以$a^2 T(t)X(x)$ 得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda,$$

其中λ 是任意的常数. 由此我们得到两个变量分离的常微分方程

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & (4) \\ T'+a^2\lambda T=0. & (5) \end{cases}$$

再将$v(x,t)=X(x)T(t)$代入边界条件(2)得

$$X'(0)T(t)=0, \quad X(l)T(t)=0.$$

因为我们要求有意义的解是非零解, 所以我们可得关于$X(x)$ 的两个边界条件:

$$X'(0)=0, \quad X(l)=0.$$

由此我们首先解关于$X(x)$的特征问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & (6) \\ X'(0)=0, \quad X(l)=0. & (7) \end{cases}$$

下面分三种情况讨论:

(1)当$\lambda < 0$, 此时方程(6) 有通解

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X'(0) = c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = 0 \\ X(l) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

此时系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以$c_1 = c_2 = 0$, 只有零解。
(2)当$\lambda = 0$, 此时方程(6) 有通解

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X'(0) = c_1 = 0 \\ X(l) = c_1 l + c_2 = 0 \end{cases}$$

所以$c_1 = c_2 = 0$, 只有零解。

(3)当$\lambda > 0$, 此时方程(6) 有通解

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X'(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \\ X'(l) = \cos(\sqrt{\lambda}l)c_1 + \sin(\sqrt{\lambda}l)c_2 = 0 \end{cases}$$

所以$c_2 = 0$, $c_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$, 要使$c_1 \neq 0$，所以只有$\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$. 于是

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

令$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}$, 此时对应的解

$$X_n(x) = B_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中B_n 为任意的常数。
再将λ_n 代入方程(5) 可得

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$v_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)$ 显然满足方程和边界条件,一般不满足初值条件, 为此我们将它们叠加起来, 令

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_ne^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

代入到初始条件(3)得

$$v(x,0)=\frac{u_0}{l}x-u_0=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

所以我们有(根据三角函数的正交关系)

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l(\frac{u_0}{l}x-u_0)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx\\&=-\frac{8u_0}{(2n-1)^2\pi^2}.\end{aligned}$$

最后由$u(x,t)=v(x,t)+u_0$ 得

$$u(x,t)=u_0-\frac{8u_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

12. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中h 为已知正常数, $\varphi(x)$ 为已知的连续函数.

解

我们用分离变量法求解. 设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入原方程得

$$XT' = a^2 X''T,$$

两边同时除以$a^2T(t)X(x)$ 得

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

其中λ 是任意的常数. 由此我们得到两个变量分离的常微分方程

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (8) \\ T' + a^2\lambda T = 0. & (9) \end{cases}$$

再将$v(x,t) = X(x)T(t)$代入边界条件得

$$X(0)T(t) = 0, \quad X'(l)T(t) + hX(l)T(t) = 0.$$

因为我们要求有意义的解是非零解, 所以我们可得关于$X(x)$ 的两个边界条件:

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0.$$

由此我们首先解关于$X(x)$的特征问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (10) \\ X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. & (11) \end{cases}$$

下面分三种情况讨论:

(1)当$\lambda<0$, 此时方程(19) 有通解

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases}X(0)=c_1+c_2=0\\ X'(l)+hX(l)=c_1(h+\sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l}+c_2(h-\sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0.\end{cases}$$

此时系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ (h+\sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} & (h-\sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以$c_1=c_2=0$, 只有零解。
(2)当$\lambda=0$, 此时方程(19) 有通解

$$X(x)=c_1x+c_2.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases}X(0)=c_1\cdot 0+c_2=0\\ X'(l)+hX(l)=c_1(1+hl)+hc_2=0\end{cases}$$

所以$c_1=c_2=0$, 只有零解。

(3)当$\lambda > 0$, 此时方程(19) 有通解

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ X'(l) + hX(l) = [h\cos(\sqrt{\lambda}l) - \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)]c_1 + [h\sin(\sqrt{\lambda}l) + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)]c_2 = 0 \end{cases}$$

所以$c_1 = 0$, $[h\sin(\sqrt{\lambda}l) + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)]c_2 = 0$, 要使$c_2 \neq 0$，所以只有$h\sin(\sqrt{\lambda}l) + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$, 即$\tan(\sqrt{\lambda}l) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$. 记此解为$\sqrt{\lambda} = p_n$, $n = 1, 2, \ldots$
令$\lambda_n = p_n^2$, 此时对应的解

$$X_n(x) = B_n \sin(p_n x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中B_n 为任意的常数。
再将λ_n 代入方程(5) 可得

$$T_n(t) = C_n e^{-p_n^2 a^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)$ 显然满足方程和边界条件,一般不满足初值条件, 为此我们将它们叠加起来, 令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_ne^{-p_n^2a^2t}\sin(p_nx)$$

代入到初始条件(3)得

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin(p_nx).$$

利用特征函数系$\sin(p_nx)$ 的正交性以及

$$\int_0^l\sin(p_nx)\sin(p_nx)dx=\frac{l}{2}+\frac{h}{2(p_n^2+h^2)} \tag{12}$$

可得

$$C_n=\frac{2(p_n^2+h^2)}{l(p_n^2+h^2)+h}\int_0^l\varphi(x)\sin(p_nx)dx.$$

下面我们来证明特征函数的正交性以及(12)式

设特征问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (13) \\ X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0 & (14) \end{cases}$$

的两个特征解为$X_m(x)$, $X_n(x)$, 对应的特征值分别为λ_m, λ_n. 则我们反复利用方程(13)可得

$$\begin{aligned}
\int_0^l X_m X_n dx &= \int_0^l X_m(-\frac{X_n''}{\lambda_n})dx \\
&= -\frac{1}{\lambda_n}\left[X_m X_n'|_0^l - \int_0^l X_m' X_n' dx\right] \\
&= -\frac{1}{\lambda_n}\left[X_m X_n'|_0^l - X_m' X_n|_0^l + \int_0^l X_m'' X_n dx\right] \\
&= -\frac{1}{\lambda_n}\left[X_m X_n'|_0^l - X_m' X_n|_0^l - \lambda_m \int_0^l X_m X_n dx\right]
\end{aligned}$$

所以当$\lambda_m \neq \lambda_n$ 时, 我们有

$$(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_n}) \int_0^l X_m X_n dx = -\frac{1}{\lambda_n}\left[X_m X_n'|_0^l - X_m' X_n|_0^l\right] \tag{15}$$

再利用边界条件(14), 我们有

$$X_m X_n'|_0^l = X_m(l) X_n'(l) = -X_m(l)\frac{X_n(l)}{h}$$

同理有

$$X_m' X_n|_0^l == -\frac{X_m(l)}{h} X_n(l).$$

与(15)式相结合, 得

$$\int_0^l X_m X_n dx = 0, \quad n \neq m. \tag{16}$$

接下来证(12)式.

$$\int_0^l \sin(p_n x)\sin(p_n x)dx = \int_0^l \frac{1-\cos(2p_n x)}{2}dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin(2p_n l)}{4p_n}.$$

又因为$\tan(p_n l) = -\frac{p_n}{h}$, 利用

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$$

我们可知

$$\sin(2p_n l) = 2\sin(p_n l)\cos(p_n l) = \frac{2\tan(p_n l)}{\tan^2(p_n l) + 1} = -\frac{2p_n h}{p_n^2 + h^2}.$$

所以

$$\int_0^l \sin(p_n x)\sin(p_n x)dx = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(p_n^2 + h^2)}.$$

习题九作业

3. 求解狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \\ u(1, \theta) = A \cos \theta \end{cases} \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

其中A 为已知常数.

解

由分离变量法可知, 此问题解的表达式为

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{n} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^n.$$

再将$u(1, \theta) = A \cos \theta$ 代入, 由傅里叶展开公式, 我们有

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = \begin{cases} A, \ n = 1 \\ 0, \ n \neq 1. \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\varphi) \sin(n\varphi) = 0, \ n = 1, 2, \ldots$$

所以$u(r, \theta) = Ar \cos \theta$.

5. 考察由下列定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \qquad u(x,b) = 0, \end{cases}$$

描述的矩形平板$(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ 上的温度分布，其中$f(x)$ 为已知的连续函数.

解 我们用分离变量法进行求解. 设$u(x,y) = X(x)Y(y)$，代入原方程得

$$X''Y + XY'' = 0.$$

方程两端同时除以$X(x)Y(y)$ 得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

其中λ 是任意的常数. 由此我们得到两个变量分离的常微分方程

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (17) \\ Y'' - \lambda Y = 0. & (18) \end{cases}$$

再将$u(x,t) = X(x)Y(y)$代入第一组边界条件得

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(a)Y(y) = 0.$$

因为我们要求有意义的解是非零解, 所以我们可得关于$X(x)$ 的两个边界条件:

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0.$$

由此我们首先解关于$X(x)$的特征问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (19) \\ X(0) = 0, \quad X(a) = 0. & (20) \end{cases}$$

这个特征问题只有$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ 时有非零解，相应的特征函数为

$$X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi x}{a}),$$

其中B_n 是任意的常数.
将$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ 代入到(18), 得到方程(18) 的通解为

$$Y_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

我们由边界条件$u(x, b) = X(x)Y(b) = 0$,可得$Y(b) = 0$, 故

$$Y_n(b) = C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0.$$

由此得$C_n = -D_n e^{-\frac{2n\pi b}{a}}$. 若利用指数函数和双曲正余弦函数的关系

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

我们可得

$$
\begin{aligned}
Y_n(y) &= -D_n e^{-\frac{2n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \\
&= D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} [e^{\frac{n\pi b}{a}} e^{-\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}}] \\
&= 2D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \sinh(\frac{n\pi(b-y)}{a}).
\end{aligned}
$$

我们将$X_n(x)Y_n(y)$叠加起来，构成一般解

$$
u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi(b-y)}{a}).
$$

最后再利用边界条件$u(x,0) = f(x)$ 得

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi b}{a})
$$

其中

$$
B_n \sinh(\frac{n\pi b}{a}) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx.
$$

7. 在以原点为圆心，a 为半径的圆内，试求泊松方程

$$u_{xx}+u_{yy}=-4$$

的解，使它满足边界条件

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=0$$

解 我们首先构造特解$w(x,y)$满足方程，则令$v(x,y)=u(x,y)-w(x,y)$, 原方程就化成关于v 的拉普拉斯方程了. 很容易发现$w(x,y)=-x^2-y^2$ 满足方程, 因此令$v(x,y)=u(x,y)-w(x,y)$, 则$v_{xx}+v_{yy}=0$, 在边界上有$v\Big|_{x^2+y^2=a^2}=u\Big|_{x^2+y^2=a^2}-w\Big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$. 引入极坐标，则我们需要求解如下边值问题

$$\begin{cases} v_{rr}+\dfrac{1}{r}v_r+\dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=0 \quad (0\le r<a, 0\le\theta\le 2\pi) \\ v(a,\theta)=a^2 \quad (0\le\theta\le 2\pi). \end{cases} \tag{21}$$

这个问题的解的表达式为

$$v(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)]r^n.$$

代入边界条件$v(a,\theta)=a^2$,得

$$a^2=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)]a^n.$$

由傅里叶展开公式, 我们有

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} a^2\cos(n\varphi)d\varphi = \begin{cases} 2a^2,\ n=0 \\ 0,\ n=1,2,\dots \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} a^2\sin(n\varphi) = 0,\ n=1,2,\dots$$

所以$v(r,\theta) = \frac{A_0}{2} = a^2$. 最后可得$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) = a^2 - (x^2+y^2)$.

11. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u_x(0,y) = A,\ \ u_x(a,y) = A \qquad (0 \le y \le b), \\ u_y(x,0) = B,\ \ u_y(x,b) = B \qquad (0 \le x \le a), \end{cases}$$

其中A, B 为已知常数.

解 这个问题边界条件显然是非齐次的,因此第一步要进行边界条件的齐次化. 又根据线性叠加原理, 原问题的解显然等于下面两个定解问题解的和

$$
\begin{cases}
v_{xx}+v_{yy}=0, \\
v_x(0,y)=A,\ v_x(a,y)=A & (0\le y\le b), \\
v_y(x,0)=0,\ v_y(x,b)=0 & (0\le x\le a),
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
w_{xx}+w_{yy}=0, \\
w_x(0,y)=0,\ w_x(a,y)=0 & (0\le y\le b), \\
w_y(x,0)=B,\ w_y(x,b)=B & (0\le x\le a),
\end{cases}
$$

下面我们用分离变量法求解第一个问题. 令$g(x,y)=v(x,y)-Ax$, 则我们有

$$
\begin{cases}
g_{xx}+g_{yy}=0, \\
g_x(0,y)=0,\ g_x(a,y)=0 & (0\le y\le b), \\
g_y(x,0)=0,\ g_y(x,b)=0 & (0\le x\le a),
\end{cases}
$$

设$g(x,y)=X(x)Y(y)$, 代入原方程得

$$X''Y+XY''=0.$$

方程两端同时除以$X(x)Y(y)$ 得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda,$$

其中λ 是任意的常数. 由此我们得到两个变量分离的常微分方程

$$
\begin{cases}
X''+\lambda X=0, & (22) \\
Y''-\lambda Y=0. & (23)
\end{cases}
$$

因为我们要求有意义的解是非零解, 所以我们可得关于$X(x)$ 的两个边界条件:

$$X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0.$$

由此我们首先解关于$X(x)$的特征问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (24) \\ X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0. & (25) \end{cases}$$

下面我们分情况讨论. (1)当$\lambda < 0$, 此时方程(24) 有通解

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X'(0) = \sqrt{-\lambda}c_1 - \sqrt{-\lambda}c_2 = 0 \\ X'(a) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}a} - c_2 - \sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}a} = 0. \end{cases}$$

此时系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}a} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}a} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以$c_1 = c_2 = 0$, 只有零解。
(2)当$\lambda = 0$, 此时方程(24) 有通解

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X'(0) = c_1 = 0 \\ X'(a) = c_1 = 0 \end{cases}$$

所以$X(x) = c_2$.
(3)当$\lambda > 0$, 此时方程(24) 有通解

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} X'(0) = c_1 \cdot 0 + c_2\sqrt{\lambda}0 = 0 \\ X'(a) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a)c_1 + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a)c_2 = 0 \end{cases}$$

所以$c_2 = 0$, $\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a)c_1 = 0$, 要使$c_1 \neq 0$，所以只有$\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$, 即

$$\sqrt{\lambda}a = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

令$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, 此时对应的解

$$X_n(x) = B_n \cos(\frac{n\pi x}{a}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中B_n 为任意的常数。
综合这三种情况我们有$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, $n = 0, 1, 2 \dots$, 相应的特征解为$X_n(x) = B_n \cos(\frac{n\pi x}{a})$, $\quad n = 0, 1, 2, \dots,$

再将λ_n 代入方程(23) 可得$Y_0(y) = C$,

$$Y_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

再由第二组边界条件, 可知$Y'(0) = 0$, $Y'(b) = 0$, 代入到通解可得$C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots.$

所以$g(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(x) = X_0 Y_0 = c_0$.

因此$v(x, y) = Ax + c_0$, c_0 为任意的常数.

同理可知$w(x, y) = By + d_0$, d_0 为任意的常数.

所以最后的解为$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) = Ax + By + c$, c 为任意的常数.