4.4 单值函数的孤立奇点

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 4 月 6 日

由定理 4.12 和 4.13 可知, 奇点 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点的充分必要条件是 $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域内有洛朗展式.

由定理 4.12 和 4.13 可知, 奇点 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点的充分必要条件是 $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域内有洛朗展式.

由此可知, 函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的奇异性可以完全被它在 a 的某个空心解析邻域内的洛朗展式所刻画.

目录

4.4.1 孤立奇点的三种类型

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某个空心解析邻域内有洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

我们称非负幂部分即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 为解析函数 $f(z)$ 在点 a 的正则部分或解析部分, 而称负幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为解析函数 $f(z)$ 在点 a 的主要部分或奇异部分.

4.4.1 孤立奇点的三种类型

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某个空心解析邻域内有洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

我们称非负幂部分即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 为解析函数 $f(z)$ 在点 a 的正则部分或解析部分, 而称负幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为解析函数 $f(z)$ 在点 a 的主要部分或奇异部分. 这是因为函数 $f(z)$ 在点 a 处的奇异性完全来自它在该点处的洛朗展式的负幂部分.

4.4.1 孤立奇点的三种类型

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某个空心解析邻域内有洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

我们称非负幂部分即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 为解析函数 $f(z)$ 在点 a 的正则部分或解析部分, 而称负幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为解析函数 $f(z)$ 在点 a 的主要部分或奇异部分. 这是因为函数 $f(z)$ 在点 a 处的奇异性完全来自它在该点处的洛朗展式的负幂部分.

这启发我们从洛朗展式的负幂部分入手对孤立奇点进行分类.

定义 4.4

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点.

(1) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零, 则称点 a 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.

(2) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限多项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\ (c_{-m}\neq 0),$$

则称点 a 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**. 一阶极点又称为单极点（*simple pole*）.

(3) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为无穷多项, 则称点 a 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

4.4.2 可去奇点

定理 4.14

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列三个命题等价:

(1) a 为 $f(z)$ 的可去奇点;

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且是有限复数;

(3) $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域内有界.

证 只需证明 (1) 可推出 (2), (2) 可推出 (3), (3) 又可推出 (1) 即可.

(1)⇒(2). 由可去奇点的定义知, 在 a 的某个空心解析邻域 $0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

(1)⇒(2). 由可去奇点的定义知, 在 a 的某个空心解析邻域 $0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

上式右端幂级数的收敛半径至少为 R, 所以它的和函数 $g(z)$ 在 $|z-a| < R$ 内解析.

(1)⇒(2). 由可去奇点的定义知, 在 a 的某个空心解析邻域 $0<|z-a|<R$ 内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots.$$

上式右端幂级数的收敛半径至少为 R, 所以它的和函数 $g(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析. 显然在空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内有 $f(z)=g(z)$. 于是有

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}g(z)=g(a)=c_0.$$

(1)⇒(2). 由可去奇点的定义知, 在 a 的某个空心解析邻域 $0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

上式右端幂级数的收敛半径至少为 R, 所以它的和函数 $g(z)$ 在 $|z-a| < R$ 内解析. 显然在空心邻域 $0 < |z-a| < R$ 内有 $f(z) = g(z)$. 于是有

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = g(a) = c_0.$$

(2)⇒(3). 由函数极限的定义立得.

(1)⇒(2). 由可去奇点的定义知, 在 a 的某个空心解析邻域 $0<|z-a|<R$ 内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots.$$

上式右端幂级数的收敛半径至少为 R, 所以它的和函数 $g(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析. 显然在空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内有 $f(z)=g(z)$. 于是有

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}g(z)=g(a)=c_0.$$

(2)⇒(3). 由函数极限的定义立得.

(3)⇒(1). 要证 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零, 只需证明主要部分中的系数均为零.

设 $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内有

$$|f(z)| \leq M.$$

设 $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内有

$$|f(z)| \leq M.$$

则对洛朗展式主要部分的系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta, \quad 0<\rho<R,\ n=-1,-2,-3,\cdots,$$

有如下估计

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = M\rho^{-n}.$$

设 $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域 $0 < |z-a| < R$ 内有

$$|f(z)| \leq M.$$

则对洛朗展式主要部分的系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta, \quad 0 < \rho < R,\ n = -1, -2, -3, \cdots,$$

有如下估计

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = M\rho^{-n}.$$

令 $\rho \to 0$ 便可知 $c_n = 0,\ n = -1, -2, -3, \cdots$.

从定理证明的第一部分可知, 只需将函数 $f(z)$ 在可去奇点 a 处的值补充或重新定义为它在点 a 的极限值, 则点 a 便成为（新定义后的）函数 $f(z)$ 的解析点. 可去奇点之名正是由此而得.

从定理证明的第一部分可知，只需将函数 $f(z)$ 在可去奇点 a 处的值补充或重新定义为它在点 a 的极限值，则点 a 便成为（新定义后的）函数 $f(z)$ 的解析点. 可去奇点之名正是由此而得.

在例 4.12 中，$z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点，在 $z=0$ 处 $f(z)$ 无定义. 但若规定 $f(0)=1$，即

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0,\\ 1, & z=0,\end{cases}$$

则 $f(z)$ 在 $|z|<+\infty$ 解析，其幂级数展式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

今后一律在上述意义下视可去奇点为解析点.

4.4.3 极点

定理 4.15

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列三个命题等价:

(1) a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点;

(2) 在 a 的某个空心邻域内, $f(z)$ 可表示为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 处解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点（这时 a 本为 $g(z)$ 的可去奇点, 视作解析点）.

证 (1)⇒(2). 由 m 阶极点的定义知, 在 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots$$
$$=\frac{c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-a)+\cdots}{(z-a)^m}=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

其中 $\varphi(z)$ 作为幂级数的和函数自然在 a 的邻域 $|z-a|<R$ 内解析, 且 $\varphi(a)=c_{-m}\neq 0$.

(2)⇒(3). 若 (2) 为真, 则在 a 的某个空心邻域内有

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}.$$

(2)⇒(3). 若 (2) 为真, 则在 a 的某个空心邻域内有

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}.$$

已知 $\varphi(z)$ 在点 a 处解析, 所以它在点 a 的某个邻域内可导, 从而连续. 于是由 $\varphi(a) \neq 0$ 可知, 存在点 a 的某个邻域使 $\varphi(z)$ 在其内处处不为零.

(2)⇒(3). 若 (2) 为真, 则在 a 的某个空心邻域内有

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}.$$

已知 $\varphi(z)$ 在点 a 处解析, 所以它在点 a 的某个邻域内可导, 从而连续. 于是由 $\varphi(a)\neq 0$ 可知, 存在点 a 的某个邻域使 $\varphi(z)$ 在其内处处不为零. 因此 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在点 a 的某个邻域内解析. 于是由定理 4.9 知点 a 为函数 $g(z)$ 的 m 阶零点.

(3)⇒(1). 如果 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 则由定理 4.9, 在 a 的某个邻域内有

$$g(z)=(z-a)^m\psi(z),$$

其中 $\psi(z)$ 在此邻域内解析, 且 $\psi(a)\neq 0$.

(3)⇒(1). 如果 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 则由定理 4.9, 在 a 的某个邻域内有

$$g(z)=(z-a)^m\psi(z),$$

其中 $\psi(z)$ 在此邻域内解析, 且 $\psi(a)\neq 0$. 于是有

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\psi(z)}.$$

(3)⇒(1). 如果 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 则由定理 4.9, 在 a 的某个邻域内有

$$g(z)=(z-a)^m\psi(z),$$

其中 $\psi(z)$ 在此邻域内解析, 且 $\psi(a)\neq 0$. 于是有

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\psi(z)}.$$

由于 $\psi(a)\neq 0$, 所以 $\dfrac{1}{\psi(z)}$ 在 a 的某个邻域内解析, 从而有泰勒展式

$$\frac{1}{\psi(z)}=c_0+c_1(z-a)+\cdots,\quad c_0=\frac{1}{\psi(a)}\neq 0.$$

(3)⇒(1). 如果 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 则由定理 4.9, 在 a 的某个邻域内有

$$g(z)=(z-a)^m\psi(z),$$

其中 $\psi(z)$ 在此邻域内解析, 且 $\psi(a)\neq 0$. 于是有

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\psi(z)}.$$

由于 $\psi(a)\neq 0$, 所以 $\dfrac{1}{\psi(z)}$ 在 a 的某个邻域内解析, 从而有泰勒展式

$$\frac{1}{\psi(z)}=c_0+c_1(z-a)+\cdots, \quad c_0=\frac{1}{\psi(a)}\neq 0.$$

由此可知 $f(z)$ 在 a 的主要部分为

$$f(z)=\frac{c_0}{(z-a)^m}+\frac{c_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-a}, \quad c_0\neq 0,$$

所以点 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

所以点 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

实际上, (3)⇒(1) 的过程就是把 (1)⇒(2)⇒(3) 的论证过程逆推了一遍. ∎

所以点 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

实际上, (3)⇒(1) 的过程就是把 (1)⇒(2)⇒(3) 的论证过程逆推了一遍. $\blacksquare$

定理4.15中的 (1) 和 (3) 的等价性揭示了极点和零点的关系, 由此可以推出

推论 4.2

a **为解析函数** $f(z)$ **的极点充分必要条件是** $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

这个推论的不足之处在于无法确定极点的阶, 所以在判别极点时最常用的仍是定理4.15(2).

推论 4.3

既约有理函数（即分子分母上的多项式无公共零点的有理函数）的奇点都是极点，极点的阶等于其作为分母多项式函数的零点的阶.

证 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为既约有理函数，则 $f(z)$ 的奇点只能为 $Q(z)$ 的零点. 设 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点，即 z_0 为 $Q(z)$ 的零点，则由定理 4.9 和多项式分解结果可知，$f(z)$ 可被写为如下的形式

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{P(z)}{\varphi(z)},$$

其中 m 为 $Q(z)$ 的零点 z_0 的阶，$\varphi(z)$ 在点 z_0 处解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 由此可知，$\dfrac{P(z)}{\varphi(z)}$ 在点 z_0 解析，且 $\dfrac{P(z_0)}{\varphi(z_0)}\neq 0$. 于是由定理4.15可知，$z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点. ∎

推论 4.4

若一个真有理函数（即分子上的多项式函数的次数比分母上的多项式的低的有理函数）$f(z)$ 的全部极点为 $z_1, z_2, \cdots, z_m$, 则它可以被表示为如下的部分分式展式

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{c_{kj}}{(z - z_k)^j},$$

其中 n_k 为极点 z_k 的阶, 即一个真有理函数可以表示成它的全部极点的洛朗展式的主要部分的和.

证 记所证等式的左右两端的差为 $g(z)$, 要证展式成立, 只需证明 $g(z) = 0$. 首先, 由 $f(z)$ 和 $\dfrac{c_{kj}}{(z - z_k)^j}$ 都是有理函数可知 $g(z)$ 为有理函数. 但 $g(z)$ 必是一个无极点的有理函数, 否则与 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 为 $f(z)$ 的全部极点矛盾. 因此 $g(z)$ 只能为多项

式函数. 由于 $f(z)$ 是一个真有理函数, 所以有

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

同时显然有

$$\lim_{z\to\infty} \frac{c_{kj}}{(z-z_k)^j} = 0.$$

利用函数和差的极限运算法则可得

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0.$$

这说明 $g(z)$ 在复平面上是有界的. 由刘维尔定理, $g(z)$ 必为常数. 再次利用上面的极限式便可知 $g(z) = 0$. 证毕. ∎

4.4.3 本性奇点

由定理4.14和推论4.2立即可知

定理 4.16

解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在.

4.4.3 本性奇点

由定理4.14和推论4.2立即可知

定理 4.16

解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在.

应当注意, 应用这个定理判别本性奇点的前提条件是待判别的奇点为孤立奇点. 解析函数在非孤立奇点处的极限也是不存在的. 例如 $z=0$ 是函数 $f(z)=\left(\sin\dfrac{1}{z}\right)^{-1}$ 的非孤立奇点. 因为 $f(z)$ 有奇点

$$z=\frac{1}{n\pi},\ n=\pm1,\pm2,\cdots,$$

这些奇点以 $z=0$ 为聚点. 但函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处的极限是不存在的.

从前面的讨论来看, 函数在可去奇点和极点的性质都可在一定意义下转化为解析函数来研究, 但这样的方法对本性奇点是无效的. 可以说函数在本性奇点处的奇异性是本质的. 下面的定理可以让读者对本性奇点的奇异性有更深刻的认识.

定理 4.17 (魏尔斯特拉斯)

如果 a 为解析函数 $f(z)$ 的本性奇点, 则对任何有限或无穷的复数 A, 都有收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = A.$$

例 4.14

判别下列函数孤立奇点的类型, 对于极点, 要指出它们的阶.

(1) $\dfrac{\sin 2z}{z}$; (2) $\dfrac{z+1}{z(z^2+4)^2(z+2\mathrm{i})^2}$; (3) $\dfrac{\sin z}{z^3}$; (4) $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$.

解 (1) 由 $\dfrac{\sin 2z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析知 $z=0$ 是它的孤立奇点. 我们有

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z}{z}=2\cos 2z|_{z=0}=2,$$

所以由定理4.14(2) 知 $z=0$ 是 $\dfrac{\sin 2z}{z}$ 的可去奇点.

(2) 由推论4.3知, $z=0,2\mathrm{i},-2\mathrm{i}$ 分别为 $\dfrac{z+1}{z(z^2+4)^2(z+2\mathrm{i})^2}$ 的一阶、二阶和四阶极点.

(2) 由推论4.3知, $z = 0, 2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}$ 分别为 $\dfrac{z+1}{z(z^2+4)^2(z+2\mathrm{i})^2}$ 的一阶、二阶和四阶极点.

(3) 显然 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 但不能直接由 $z = 0$ 是分母 z^3 的三阶零点而认定它是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的三阶极点,

(2) 由推论4.3知, $z = 0, 2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}$ 分别为 $\dfrac{z+1}{z(z^2+4)^2(z+2\mathrm{i})^2}$ 的一阶、二阶和四阶极点.

(3) 显然 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 但不能直接由 $z = 0$ 是分母 z^3 的三阶零点而认定它是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的三阶极点, 因为 $z = 0$ 同时也是分子 $\sin z$ 的零点. 因为

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^{-2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \cdots, \qquad 0 < |z| < +\infty.$$

于是由极点的定义知, $z = 0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二阶极点.

(2) 由推论4.3知, $z=0,2\mathrm{i},-2\mathrm{i}$ 分别为 $\dfrac{z+1}{z(z^2+4)^2(z+2\mathrm{i})^2}$ 的一阶、二阶和四阶极点.

(3) 显然 $z=0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 但不能直接由 $z=0$ 是分母 z^3 的三阶零点而认定它是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的三阶极点, 因为 $z=0$ 同时也是分子 $\sin z$ 的零点. 因为

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z^{-2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots,\qquad 0<|z|<+\infty.$$

于是由极点的定义知, $z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二阶极点. 或者利用本章习题 8 中的 (3) 的结果, 由 $z=0$ 是 z^3 的三阶零点, 又是 $\sin z$ 的一阶零点可知, $z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二阶极点.

(4) 易知 $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{1/z}$ 的孤立奇点. 由

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$$

可知 $\lim\limits_{z\to 0} \mathrm{e}^{1/z}$ 不存在, 所以 $z=0$ 是 $\mathrm{e}^{1/z}$ 的本性奇点.

4.4.5 解析函数在无穷远点的性质

由于函数 $f(z)$ 默认是定义在复平面上的, 而 ∞ 本不在复平面上, 故在 ∞ 处, 除非人为补充定义, 函数 $f(z)$ 是无定义的, 所以总可认为 ∞ 是 $f(z)$ 的奇点.

4.4.5 解析函数在无穷远点的性质

由于函数 $f(z)$ 默认是定义在复平面上的, 而 ∞ 本不在复平面上, 故在 ∞ 处, 除非人为补充定义, 函数 $f(z)$ 是无定义的, 所以总可认为 ∞ 是 $f(z)$ 的奇点.

定义 4.5

若 $f(z)$ 在 ∞ 的某个空心邻域 $r < |z| < +\infty\ (r \geq 0)$ 内解析, 则称 ∞ **为** $f(z)$ **的孤立奇点**.

4.4.5 解析函数在无穷远点的性质

由于函数 $f(z)$ 默认是定义在复平面上的, 而 ∞ 本不在复平面上, 故在 ∞ 处, 除非人为补充定义, 函数 $f(z)$ 是无定义的, 所以总可认为 ∞ 是 $f(z)$ 的奇点.

定义 4.5

若 $f(z)$ 在 ∞ 的某个空心邻域 $r < |z| < +\infty$ $(r \geq 0)$ 内解析, 则称 ∞ **为** $f(z)$ **的孤立奇点**.

设 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 即存在一个实数 $r \geq 0$, 使得 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内解析. 由于到目前为止我们对 ∞ 还知之甚少, 要想了解函数 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 邻域内的性质, 最好是把问题转化为已经解决的情形. 为此我们可作变换 $\zeta = 1/z$. 它把 $z = \infty$ 变为 $\zeta = 0$, 同时把 $z = \infty$ 的邻域变为 $\zeta = 0$ 的邻域.

在变换 $\zeta = 1/z$ 下, 函数 $f(z)$ 变为 $f(1/\zeta)$, 记

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f(z).$$

由于变换 $\zeta = 1/z$ 把 ∞ 的邻域 $r < |z| < +\infty$ 一一对应地变换为原点的邻域 $0 < |\zeta| < 1/r$（$r = 0$ 时规定 $1/r = +\infty$）, 所以 $f(z)$ 在无穷远点邻域 $r < |z| < +\infty$ 内的性质完全可由 $g(\zeta)$ 在原点邻域 $0 < |\zeta| < 1/r$ 内的性质决定, 反之亦然.

在变换 $\zeta = 1/z$ 下, 函数 $f(z)$ 变为 $f(1/\zeta)$, 记

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f(z).$$

由于变换 $\zeta = 1/z$ 把 ∞ 的邻域 $r < |z| < +\infty$ 一一对应地变换为原点的邻域 $0 < |\zeta| < 1/r$（$r = 0$ 时规定 $1/r = +\infty$）, 所以 $f(z)$ 在无穷远点邻域 $r < |z| < +\infty$ 内的性质完全可由 $g(\zeta)$ 在原点邻域 $0 < |\zeta| < 1/r$ 内的性质决定, 反之亦然.

这把我们引向了下面的定义.

定义 4.6

若 $\zeta = 0$ 为 $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点, 则相应地称 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点（视作解析点）、m 阶极点或本性奇点.

在孤立奇点为有限点的情形，函数在孤立奇点处的洛朗展式对孤立奇点的分类和性质讨论起到了重要的作用. 我们自然会问:

> 当 ∞ 为孤立奇点时，函数在 ∞ 处的洛朗展式又能起什么作用?

在孤立奇点为有限点的情形, 函数在孤立奇点处的洛朗展式对孤立奇点的分类和性质讨论起到了重要的作用. 我们自然会问:

当 ∞ 为孤立奇点时, 函数在 ∞ 处的洛朗展式又能起什么作用?

设在 $r < |z| < +\infty$ 内, $f(z)$ 可展成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

于是在变换 $\zeta = 1/z$ 下, 我们可得 $g(\zeta)$ 在 $0 < |\zeta| < 1/r$ 内的洛朗展式

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \zeta^{-n}. \tag{4.21}$$

它被分成了正则部分和主要部分两个部分.

现在逆变换回去，可知 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式也可相应地分成两个部分

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n. \tag{4.22}$$

现在逆变换回去, 可知 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式也可相应地分成两个部分

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n. \tag{4.22}$$

注意到 $g(\zeta)$ 的主要部分即(4.21)中的负幂部分与(4.22)中的正幂部分对应, 因此我们称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ 为 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的主要部分, 而称 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_{-n} z^{-n}$ 为 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的正则部分.

现在逆变换回去, 可知 $f(z)$ 在 $r<|z|<+\infty$ 内的洛朗展式也可相应地分成两个部分

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} z^{-n}+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n. \tag{4.22}$$

注意到 $g(\zeta)$ 的主要部分即(4.21)中的负幂部分与(4.22)中的正幂部分对应, 因此我们称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ 为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分, 而称 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_{-n} z^{-n}$ 为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的正则部分.

有了 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分的概念后, 由定义4.6, 我们也可再次直接从主要部分出发对孤立奇点 ∞ 进行分类.

注意有

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\zeta\to 0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

注意有

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\zeta\to 0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

上述讨论说明有限孤立奇点处的结论均可相应地推广到无穷远点为孤立奇点的情形.

注意有

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\zeta\to 0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

上述讨论说明有限孤立奇点处的结论均可相应地推广到无穷远点为孤立奇点的情形.

定理 4.18

$f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为可去奇点的充要条件是下列三个条件之中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 没有主要部分;

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 存在并有限;

(3) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的充分小的邻域内有界.

定理 4.19

$f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为 m 阶极点的充要条件是下列三个条件之中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分为 $c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m(c_m\neq 0)$;

(2) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的某空心邻域内可以表示为 $f(z)=z^m\psi(z)$, 其中 $\psi(z)$ 在 $z=\infty$ 解析（即 $z=\infty$ 是 $\psi(z)$ 的可去奇点），且 $\psi(\infty)\neq 0$;

(3) $z=\infty$ 为 $g(z)=1/f(z)$ 的 m 阶零点（即 $\zeta=0$ 是 $g(1/\zeta)=1/f(1/\zeta)$ 的 m 阶零点）.

推论 4.5

$f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

定理 4.20

$f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为本性奇点的充要条件是下列两个条件之中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分有无穷多项;

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在.

例 4.15

判别 $z=\infty$ 是下列函数的什么类型的奇点.

(1) $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$; (2) e^{z}; (3) $\dfrac{1}{\sin z}$.

解 (1) 由 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{1/z}=\mathrm{e}^0=1$ 知, $z=\infty$ 是 $\mathrm{e}^{1/z}$ 的可去奇点.

例 4.15

判别 $z=\infty$ 是下列函数的什么类型的奇点.

(1) $e^{\frac{1}{z}}$;　(2) e^{z};　(3) $\dfrac{1}{\sin z}$.

解 (1) 由 $\lim\limits_{z\to\infty} e^{1/z}=e^{0}=1$ 知, $z=\infty$ 是 $e^{1/z}$ 的可去奇点.

(2) 由 $\lim\limits_{z\to\infty} e^{z}$ 不存在可知, $z=\infty$ 是 e^{z} 的本性奇点.

例 4.15

判别 $z=\infty$ 是下列函数的什么类型的奇点.

(1) $e^{\frac{1}{z}}$; (2) e^{z}; (3) $\dfrac{1}{\sin z}$.

解 (1) 由 $\lim\limits_{z\to\infty} e^{1/z}=e^0=1$ 知, $z=\infty$ 是 $e^{1/z}$ 的可去奇点.

(2) 由 $\lim\limits_{z\to\infty} e^{z}$ 不存在可知, $z=\infty$ 是 e^{z} 的本性奇点.

(3) $\dfrac{1}{\sin z}$ 有奇点 $z=n\pi\,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 因此在无穷远点的任何空心邻域内都有 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点, 所以 $z=\infty$ 是 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的非孤立奇点. ∎

4.4.6 整函数与亚纯函数的概念

设 $f(z)$ 为一整函数, 则 $z=\infty$ 是它唯一的孤立奇点, 于是有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z|<+\infty. \tag{4.23}$$

- 当无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点时, 它恒为一个常数;
- 当无穷远点是 $f(z)$ 的 n 阶极点时, 它是一个 n 次多项式;
- 当无穷远点是 $f(z)$ 的本性奇点时, 展式(4.23)中有无穷多项非零, 这时称 $f(z)$ 为一个超越整函数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有极点外, 处处解析, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有极点外, 处处解析, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数.

整个复平面上的亚纯函数一般直接简称为亚纯函数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有极点外, 处处解析, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数.

整个复平面上的亚纯函数一般直接简称为亚纯函数.

当我们考虑对幂级数进行除法运算时, 即考虑两个解析函数的比时, 就会不可避免地将解析函数类扩大为亚纯函数类.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有极点外, 处处解析, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数.

整个复平面上的亚纯函数一般直接简称为亚纯函数.

当我们考虑对幂级数进行除法运算时, 即考虑两个解析函数的比时, 就会不可避免地将解析函数类扩大为亚纯函数类. 有理函数是亚纯函数的一个典型子类, 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 是一个非有理函数的亚纯函数的例子.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有极点外, 处处解析, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数.

整个复平面上的亚纯函数一般直接简称为亚纯函数.

当我们考虑对幂级数进行除法运算时, 即考虑两个解析函数的比时, 就会不可避免地将解析函数类扩大为亚纯函数类. 有理函数是亚纯函数的一个典型子类, 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 是一个非有理函数的亚纯函数的例子.

更一般地, 由两个整函数之比构成的函数, 如果不是整函数, 便是亚纯函数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有极点外, 处处解析, 则称 $f(z)$ 为区域 D 内的亚纯函数.

整个复平面上的亚纯函数一般直接简称为亚纯函数.

当我们考虑对幂级数进行除法运算时, 即考虑两个解析函数的比时, 就会不可避免地将解析函数类扩大为亚纯函数类. 有理函数是亚纯函数的一个典型子类, 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 是一个非有理函数的亚纯函数的例子.

更一般地, 由两个整函数之比构成的函数, 如果不是整函数, 便是亚纯函数.

我们常说整函数是多项式函数的推广, 亚纯函数是有理函数的推广. 记住这一点, 对我们进一步认识整函数和亚纯函数的性质是大有帮助的.

作业

习题四

8. 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点. 试问下列函数在 z_0 处具有何种性质?

(1) $f(z)+g(z)$; (2) $f(z)g(z)$; (3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

13. 确定下列各函数的奇点以及它们的类型, 对极点要指出它们的阶, 对于无穷远点也要加以讨论.

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+1)^2}$; (3) $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$; (5) $\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^m}$($m$为正整数);

(7) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$; (9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$; (11) $\sin\dfrac{1}{1-z}$;

16. 讨论下列函数在无穷远点的性质:

(1) z^2; (2) $\dfrac{z}{z+1}$; (3) $(1+z)^{\frac{1}{2}}$; (4) $z\sin\dfrac{1}{z}$.