4.2 幂级数与解析函数

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 30 日

目录

4.1.1 幂级数的敛散性

形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{4.4}$$

的函数项级数称为幂级数, 其中 a 和系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 都是复常数.

4.1.1 幂级数的敛散性

形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{4.4}$$

的函数项级数称为幂级数, 其中 a 和系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 都是复常数.

如令 $\zeta = z - a$, 则幂级数(4.4)可重写为如下的简洁形式（把 ζ 仍改写为 z）

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots . \tag{4.5}$$

4.1.1 幂级数的敛散性

形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{4.4}$$

的函数项级数称为幂级数, 其中 a 和系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 都是复常数.

如令 $\zeta = z - a$, 则幂级数(4.4)可重写为如下的简洁形式（把 ζ 仍改写为 z）

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots . \tag{4.5}$$

显然, 幂级数(4.5)也可看作是幂级数(4.4)中 $a = 0$ 的特殊情形. 这说明两者是等价的.

4.1.1 幂级数的敛散性

形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{4.4}$$

的函数项级数称为幂级数, 其中 a 和系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 都是复常数.

如令 $\zeta = z - a$, 则幂级数(4.4)可重写为如下的简洁形式（把 ζ 仍改写为 z）

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots . \tag{4.5}$$

显然, 幂级数(4.5)也可看作是幂级数(4.4)中 $a = 0$ 的特殊情形. 这说明两者是等价的.

下面我们一般选择形式简单的幂级数(4.5)作为讨论对象.

首先，关于幂级数的收敛性我们有下面的阿贝尔定理.

定理 4.4 (阿贝尔)

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 $z_0 \neq 0$ 处收敛，则它在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛，并且在任意闭圆 $|z| \leq k|z_0|$ $(0 < k < 1)$ 上一致收敛.

证　由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$ 收敛，所以有

$$\lim_{n \to +\infty} c_n z_0^n = 0.$$

首先, 关于幂级数的收敛性我们有下面的阿贝尔定理.

定理 4.4 (阿贝尔)

若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 则它在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛, 并且在任意闭圆 $|z| \leq k|z_0|$ $(0 < k < 1)$ 上一致收敛.

证　由于级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$ 收敛, 所以有

$$\lim_{n\to+\infty} c_n z_0^n = 0.$$

因此存在有限常数 M, 使得 $|c_n z_0^n| \leq M$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

首先，关于幂级数的收敛性我们有下面的阿贝尔定理.

定理 4.4 (阿贝尔)

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 $z_0 \neq 0$ 处收敛，则它在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛，并且在任意闭圆 $|z| \leq k|z_0|$ $(0 < k < 1)$ 上一致收敛.

证　由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$ 收敛，所以有

$$\lim_{n\to+\infty} c_n z_0^n = 0.$$

因此存在有限常数 M，使得 $|c_n z_0^n| \leq M$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 当 $|z| < |z_0|$ 时有

$$|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

$$|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

因为 $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 收敛,

$$|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| \le M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

因为 $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, 所以级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ 收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛.

$$|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

因为 $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ 收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛.

又若 $|z| \leq k|z_0|\ (0 < k < 1)$, 则

$$|c_n z^n| \leq M k^n,$$

$$|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

因为 $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛.

又若 $|z| \leq k|z_0|\ (0 < k < 1)$, 则

$$|c_n z^n| \leq M k^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} k^n$ 收敛. 所以由魏尔斯特拉斯 M-判别法知, 级数(4.5)在闭圆 $|z| \leq k|z_0|(0 < k < 1)$ 上一致收敛. ∎

阿贝尔简介

阿贝尔是挪威人, 生于 1802 年 8 月 5 日, 卒于 1829 年 4 月 6 日, 短暂的一生不足 27 年. 他是椭圆函数论的奠基人之一, 也是第一个证明了一元五次方程无根式解的人.

阿贝尔简介

阿贝尔是挪威人, 生于 1802 年 8 月 5 日, 卒于 1829 年 4 月 6 日, 短暂的一生不足 27 年. 他是椭圆函数论的奠基人之一, 也是第一个证明了一元五次方程无根式解的人.

阿贝尔是数学史上不可多得的天才人物, 但怀才不遇, 生前未能得到应得的荣誉, 在贫困中病逝. 数学家埃尔米特评价他说 “他给数学家们留下的东西够他们忙上 500 年.” 时至今日阿贝尔的数学思想依然影响着一些数学分支的发展.

阿贝尔简介

阿贝尔是挪威人, 生于 1802 年 8 月 5 日, 卒于 1829 年 4 月 6 日, 短暂的一生不足 27 年. 他是椭圆函数论的奠基人之一, 也是第一个证明了一元五次方程无根式解的人.

阿贝尔是数学史上不可多得的天才人物, 但怀才不遇, 生前未能得到应得的荣誉, 在贫困中病逝. 数学家埃尔米特评价他说 “他给数学家们留下的东西够他们忙上 500 年.” 时至今日阿贝尔的数学思想依然影响着一些数学分支的发展.

为了纪念阿贝尔诞辰 200 周年, 挪威政府于 2003 年设立了一项数学奖—— 阿贝尔奖. 该奖向诺贝尔奖看齐, 每年颁发一次, 奖金数额大致与诺贝尔奖的奖金相同, 是世界上奖金最高的数学奖.

利用反证法, 容易从定理4.4得到下面的推论.

推论 4.1

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 z_1 处发散, 则它在以原点为心经过 z_1 的圆周的外部（即 $|z| > |z_1|$）处处发散.

利用反证法, 容易从定理4.4得到下面的推论.

推论 4.1

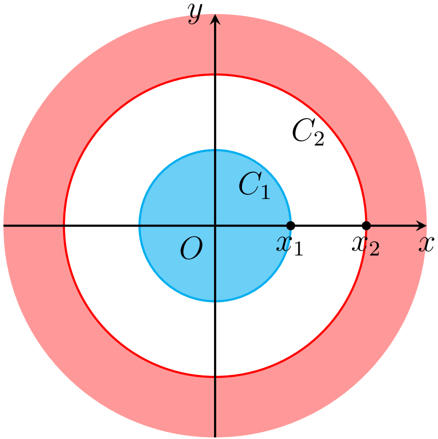
若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 z_1 处发散, 则它在以原点为心经过 z_1 的圆周的外部（即 $|z| > |z_1|$）处处发散.

逻辑上, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在复平面上的敛散性只可能分为三种情况:

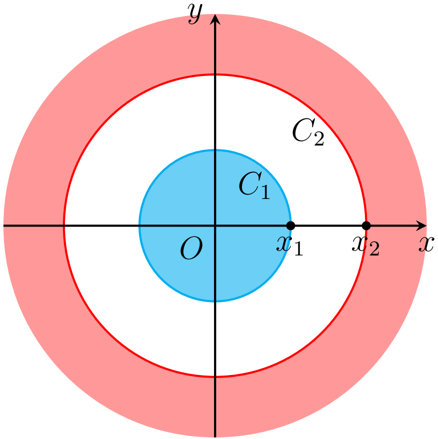
(1) 只在 $z = 0$ 处收敛;

(2) 在整个复平面上处处收敛;

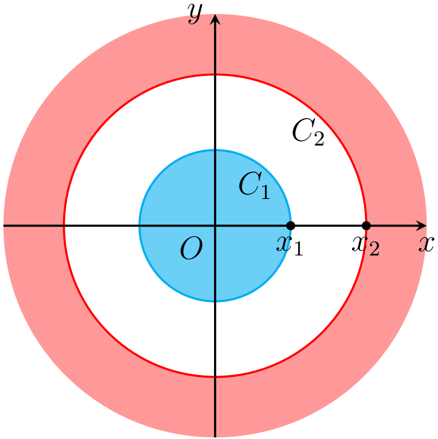
(3) 在复平面上既有非零的收敛点, 又有发散点.



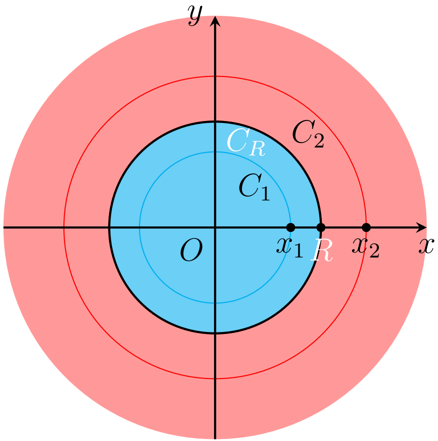
在第三种情况下，由定理4.4和推论4.1可知，存在圆周 C_1 和 C_2，使得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆周 C_1 内处处收敛，而在圆周 C_2 外处处发散．分别记圆周 C_1 和 C_2 与正实轴的交点为 x_1 和 x_2.



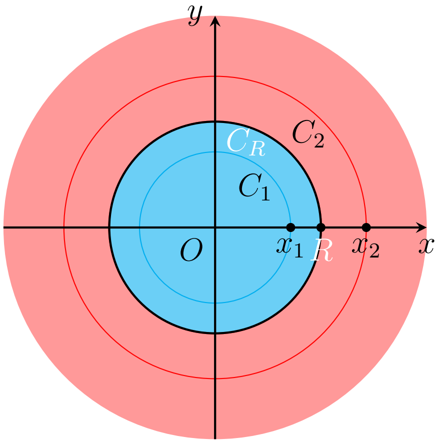
在第三种情况下，由定理4.4和推论4.1可知，存在圆周 C_1 和 C_2，使得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆周 C_1 内处处收敛，而在圆周 C_2 外处处发散．分别记圆周 C_1 和 C_2 与正实轴的交点为 x_1 和 x_2．记区间 $[x_1, x_2]$ 的中点为 x_3．若 x_3 为收敛点，则构造区间 $[x_3, x_2]$，否则构造区间 $[x_1, x_3]$．



在第三种情况下，由定理4.4和推论4.1可知，存在圆周 C_1 和 C_2，使得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆周 C_1 内处处收敛，而在圆周 C_2 外处处发散．分别记圆周 C_1 和 C_2 与正实轴的交点为 x_1 和 x_2．记区间 $[x_1, x_2]$ 的中点为 x_3．若 x_3 为收敛点，则构造区间 $[x_3, x_2]$，否则构造区间 $[x_1, x_3]$．然后再取新区间的中点．重复上面的过程，保证新构造的区间的左端点是收敛点，右端点是发散点．

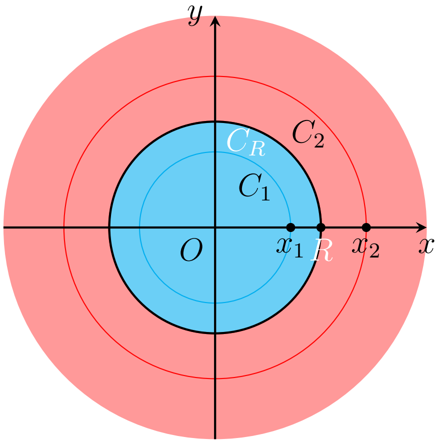


由于每次新构造的区间只是原区间长度的一半，所以当此过程无穷地进行下去时，构造的区间最终将收缩为一个点，记为 R，使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆 $C_R: |z| < R$ 内处处绝对收敛，而在圆 C_R 外处处发散.



由于每次新构造的区间只是原区间长度的一半，所以当此过程无穷地进行下去时，构造的区间最终将收缩为一个点，记为 R，使得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆 $C_R : |z| < R$ 内处处绝对收敛，而在圆 C_R 外处处发散.

圆 C_R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛圆，它的半径称为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径.



由于每次新构造的区间只是原区间长度的一半，所以当此过程无穷地进行下去时，构造的区间最终将收缩为一个点，记为 R，使得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在圆 $C_R : |z| < R$ 内处处绝对收敛，而在圆 C_R 外处处发散.

圆 C_R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛圆，它的半径称为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径.

如果允许收敛半径 $R = 0$ 或 $+\infty$，我们就可以把幂级数三种敛散情况统一起来用收敛半径描述.

既然幂级数的敛散性可以完全由它的收敛半径刻画，那么

$\boxed{\text{如何计算幂级数的收敛半径?}}$

实数集的上确界

实数集的上确界

设 E 是一个实数集（可以包含 $-\infty$ 和 $+\infty$）. 如果 α 是 E 的“最小”的上界, 即任何 $\gamma < \alpha$ 都不是 E 的上界, 则称 α 为 E 的上确界.

上确界是有限实数集的最大值的概念向无穷实数集的推广. 有限实数集的上确界即为它的最大值.

聚点

设点集 $E \subset \mathbb{R}$, 若点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点, 则称 a 为点集 E 的聚点.

聚点

设点集 $E \subset \mathbb{R}$, 若点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点, 则称 a 为点集 E 的聚点.

对聚点概念的认识, 关键在于理解 “点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点” 的含义,

聚点

设点集 $E \subset \mathbb{R}$, 若点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点, 则称 a 为点集 E 的聚点.

对聚点概念的认识, 关键在于理解 "点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点" 的含义, 虽然这句话表面上只要求在点 a 的任一去心邻域内至少有一个 E 中的点, 但其实它要求在点 a 的任一去心邻域内必有无穷多个 E 中的点.

聚点

设点集 $E \subset \mathbb{R}$, 若点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点, 则称 a 为点集 E 的聚点.

对聚点概念的认识, 关键在于理解 "点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点" 的含义, 虽然这句话表面上只要求在点 a 的任一去心邻域内至少有一个 E 中的点, 但其实它要求在点 a 的任一去心邻域内必有无穷多个 E 中的点. 因为只要有一个点 a 的去心邻域内只有有限个 E 中的点, 我们立马就可以找到点 a 的一个去心邻域, 它之中不含 E 中的点.

聚点

设点集 $E\subset\mathbb{R}$, 若点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点, 则称 a 为点集 E 的聚点.

对聚点概念的认识, 关键在于理解 "点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点" 的含义, 虽然这句话表面上只要求在点 a 的任一去心邻域内至少有一个 E 中的点, 但其实它要求在点 a 的任一去心邻域内必有无穷多个 E 中的点. 因为只要有一个点 a 的去心邻域内只有有限个 E 中的点, 我们立马就可以找到点 a 的一个去心邻域, 它之中不含 E 中的点.

所以只要点 a 是集合 E 的聚点, 它的附近就总是聚集着无穷多个 E 中的点.

聚点

设点集 $E \subset \mathbb{R}$, 若点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点, 则称 a 为点集 E 的聚点.

对聚点概念的认识, 关键在于理解 “点 a 的任一去心邻域内总有 E 中的点” 的含义, 虽然这句话表面上只要求在点 a 的任一去心邻域内至少有一个 E 中的点, 但其实它要求在点 a 的任一去心邻域内必有无穷多个 E 中的点. 因为只要有一个点 a 的去心邻域内只有有限个 E 中的点, 我们立马就可以找到点 a 的一个去心邻域, 它之中不含 E 中的点.

所以只要点 a 是集合 E 的聚点, 它的附近就总是聚集着无穷多个 E 中的点.

需要注意：一个点集的聚点可以属于这个点集, 也可以不属于这个点集, 例如一个开区间内部的点和端点都是它的聚点, 但端点并不属于这个开区间.

选学

如果 a 为点集 E 的一个聚点, 则从 E 中我们总可以找出一个以 a 为极限的点列, 具体做法如下:

- 对 $\delta_1 = 1$, 在 a 的去心 δ_1 邻域内取出一个 E 中的点, 记作 x_1;
- 对 $\delta_2 = 1/2$, 在 a 的去心 δ_2 邻域内再取出一个 E 中的点, 记作 x_2;
- $\cdots\cdots$
- 一般地, 对 $\delta_n = 1/n$, 在 a 的去心 δ_n 邻域内取出一个 E 中的点, 记作 x_n.
- 按这个方法一直取下去, 就可以得到一个点列 $\{x_n\}$, 它的通项满足 $0 < |x_n - a| < 1/n$, 所以 $x_n \to a\,(n \to \infty)$.

实数列的上极限

实数列的上极限

如果 E 是由实数列 $\{x_n\}$ 的聚点构成的集合, 则称 E 的上确界 α 为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记作

$$\alpha = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

如果允许上极限为 $+\infty$ 的话, 那么任一实数列的上极限都必然存在.

实数列的上极限

实数列的上极限

如果 E 是由实数列 $\{x_n\}$ 的聚点构成的集合，则称 E 的上确界 α 为 $\{x_n\}$ 的上极限，记作

$$\alpha = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

如果允许上极限为 $+\infty$ 的话，那么任一实数列的上极限都必然存在.

如果实数列 $\{x_n\}$ 只有有限个收敛子列的话，则 $\{x_n\}$ 的上极限为所有这些子列极限的最大值.

实数列的上极限

实数列的上极限

如果 E 是由实数列 $\{x_n\}$ 的聚点构成的集合, 则称 E 的上确界 α 为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记作

$$\alpha = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

如果允许上极限为 $+\infty$ 的话, 那么任一实数列的上极限都必然存在.

拓展 实数列上极限的概念也可以像数列极限概念一样用 $\varepsilon - N$ 语言表述. 可以证明: α 为 $\{x_n\}$ 的上极限当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$,

(1) 只有有限个 n 使得 $x_n \geq \alpha + \varepsilon$;

(2) 存在无穷多个 n 使得 $x_n \geq \alpha - \varepsilon$.

由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径与绝对收敛半径相同，即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 和幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n||z|^n$ 的收敛半径相同，而后者与实变量幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|x^n$ 有相同的收敛半径，所以直接由实幂级数理论便可得

定理 4.5

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, 若它的系数满足

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l\,\text{(达朗贝尔)}\ ,$$

或

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l\,\text{(柯西)}\ ,$$

或

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l\,\text{(柯西-阿达马)}\ ,$$

则它的收敛半径

$$R = \begin{cases} 0, & l = +\infty, \\ +\infty, & l = 0, \\ \dfrac{1}{l}, & 0 < l < +\infty. \end{cases}$$

例 4.1

计算下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n z^n$; (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; (4) $\sum_{n=0}^{+\infty} [2+(-1)^n]^n z^n$.

解 (1) 由系数 $c_n = \frac{1}{n!}$ 得

$$l = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0,$$

所以 $R = +\infty$.

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n z^n$;

解 由系数 $c_n = n^n$ 得

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty,$$

所以 $R = 0$.

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;

解 由系数 $c_n = \frac{n!}{n^n}$ 得

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}},
\end{aligned}
$$

所以 $R = \mathrm{e}$.

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2+(-1)^n\right]^n z^n$.

解 由系数 $c_n=\left[2+(-1)^n\right]^n$ 得

$$\sqrt[n]{c_n}=2+(-1)^n=\begin{cases}3, & n=0,2,4,\cdots,\\ 1, & n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$$

于是有

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{c_n}=3.$$

所以收敛半径为 1/3. ∎

(4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}[2+(-1)^n]^n z^n$.

解　由系数 $c_n=[2+(-1)^n]^n$ 得

$$\sqrt[n]{c_n}=2+(-1)^n=\begin{cases}3, & n=0,2,4,\cdots,\\ 1, & n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$$

于是有

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{c_n}=3.$$

所以收敛半径为 1/3. ∎

从这个例子中可以看出，前面所述的幂级数的收敛性的三种情况都的确存在.

幂级数在收敛圆内外的敛散性已经清楚了. 我们自然会问:

$\boxed{\text{幂级数在收敛圆周即收敛圆的边界上的敛散性如何?}}$

幂级数在收敛圆内外的敛散性已经清楚了. 我们自然会问:

$\boxed{\text{幂级数在收敛圆周即收敛圆的边界上的敛散性如何?}}$

下面的例子说明幂级数在收敛圆周上的收敛性完全无规律可言, 需要具体情况具体分析, 同时也说明**幂级数的收敛圆不完全等同于它的收敛域.**

例 4.2

计算下列幂级数的收敛半径, 并讨论它们在收敛圆周上的敛散性情况.

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$; (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$; (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

解 因为对上面的三个级数, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1$, 故它们的收敛半径都是 1. 但它们在收敛圆周 $|z| = 1$ 上的敛散性却各不相同.

例 4.2

计算下列幂级数的收敛半径，并讨论它们在收敛圆周上的敛散性情况.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$.

解 因为对上面的三个级数，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1$，故它们的收敛半径都是 1. 但它们在收敛圆周 $|z| = 1$ 上的敛散性却各不相同.

(1) 由于通项 z^n 在收敛圆周（$|z| = 1$）上模恒为 1，所以不趋于 0，从而 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 在收敛圆周上处处发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$.

解 (2) 在收敛圆周上, 当 $z=-1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 收敛; 当 $z=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 发散. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 在收敛圆周上有收敛点也有发散点.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$;　(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

解 (2) 在收敛圆周上, 当 $z=-1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 收敛; 当 $z=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 发散. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 在收敛圆周上有收敛点也有发散点.

(3) 因为在收敛圆周（$|z|=1$）上有 $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在收敛圆周上处处绝对收敛, 从而处处收敛. ∎

考虑两个幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 和 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, 设其收敛半径分别为 $R_1>0$ 和 $R_2>0$.

考虑两个幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 和 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$，设其收敛半径分别为 $R_1>0$ 和 $R_2>0$.

幂级数的加（减）法可定义为

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad |z|<R=\min\{R_1,R_2\}.$$

利用前面提到的数项级数相乘的对角线方法, 幂级数的乘法可定义为

$$f(z)g(z)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\cdot b_{n-k}z^{n-k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n,\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

上式第二行右端的幂级数称为第一行中间的两个幂级数的柯西乘积. 它的收敛半径 $R\geq\min\{R_1,R_2\}$.

利用前面提到的数项级数相乘的对角线方法, 幂级数的乘法可定义为

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \cdot b_{n-k} z^{n-k}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

上式第二行右端的幂级数称为第一行中间的两个幂级数的柯西乘积. 它的收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

注意乘积项级数的第 n 项系数的计算只用到了原来两个级数的各自前 n 项的系数.

例 4.3

求几何级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的和函数?

例 4.3

求几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的和函数?

解 首先, 容易求出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的部分和函数为

$$s_n(z) = \sum_{m=0}^{n} z^m = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

例 4.3

求几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的和函数?

解 首先, 容易求出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的部分和函数为

$$s_n(z) = \sum_{m=0}^{n} z^m = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

其次, 容易判断出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的收敛半径为 1. 所以可得和函数为

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad |z| < 1. \qquad \blacksquare$$

由

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z|<1,$$

可得

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n, \quad |z|<1.$$

这两个公式十分重要, 在今后计算解析函数的泰勒展式和洛朗展式时会经常用到.

定理 4.6

设 $K:|z-a|<R\,(0<R\le+\infty)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 的收敛圆, 则它的和函数 $f(z)$ 有如下性质:

(1) $f(z)$ 在收敛圆 K 内解析.

(2) 在 K 内, 对幂级数可以逐项积分或逐项微分任意多次, 并且有

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)c_n(z-a)^{n-m},\quad m=1,2,3,\cdots. \tag{4.6}$$

(3) 系数 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!},n=0,1,2,\cdots.$

(4) 若有 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$, 则有 $b_n=c_n,n=0,1,2,\cdots.$

证 (1) 对 K 内任意一点 z, 总可以在 K 内做一个同心圆 U, 使 $z \in U$. 于是由阿贝尔定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在闭圆 $\overline{U}$ 上一致收敛, 从而在 U 内一致收敛.

证 (1) 对 K 内任意一点 z, 总可以在 K 内做一个同心圆 U, 使 $z \in U$. 于是由阿贝尔定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在闭圆 $\overline{U}$ 上一致收敛, 从而在 U 内一致收敛. 再由定理4.4可知, 和函数 $f(z)$ 在 U 内解析. 因此可知 $f(z)$ 在点 z 解析.

证 (1) 对 K 内任意一点 z, 总可以在 K 内做一个同心圆 U, 使 $z \in U$. 于是由阿贝尔定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在闭圆 $\overline{U}$ 上一致收敛, 从而在 U 内一致收敛. 再由定理4.4可知, 和函数 $f(z)$ 在 U 内解析. 因此可知 $f(z)$ 在点 z 解析. 由点 z 的任意性, 即得所证.

证 (1) 对 K 内任意一点 z, 总可以在 K 内做一个同心圆 U, 使 $z \in U$. 于是由阿贝尔定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在闭圆 $\overline{U}$ 上一致收敛, 从而在 U 内一致收敛. 再由定理4.4可知, 和函数 $f(z)$ 在 U 内解析. 因此可知 $f(z)$ 在点 z 解析. 由点 z 的任意性, 即得所证.

(2) 可模仿 (1) 的证明.

证 (1) 对 K 内任意一点 z, 总可以在 K 内做一个同心圆 U, 使 $z \in U$. 于是由阿贝尔定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在闭圆 $\overline{U}$ 上一致收敛, 从而在 U 内一致收敛. 再由定理4.4可知, 和函数 $f(z)$ 在 U 内解析. 因此可知 $f(z)$ 在点 z 解析. 由点 z 的任意性, 即得所证.

(2) 可模仿 (1) 的证明.

(3) 在公式(4.6)中取 $z=a$ 即得所证.

证 (1) 对 K 内任意一点 z, 总可以在 K 内做一个同心圆 U, 使 $z \in U$. 于是由阿贝尔定理可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在闭圆 $\overline{U}$ 上一致收敛, 从而在 U 内一致收敛. 再由定理4.4可知, 和函数 $f(z)$ 在 U 内解析. 因此可知 $f(z)$ 在点 z 解析. 由点 z 的任意性, 即得所证.

(2) 可模仿 (1) 的证明.

(3) 在公式(4.6)中取 $z=a$ 即得所证.

(4) 由 (3) 得 $b_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n, n = 0, 1, 2, \cdots.$ ∎

4.1.2 解析函数的幂级数表示

定理 4.7 (泰勒)

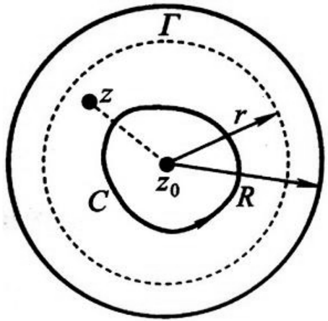
若函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域 $K: |z-z_0|<R$ 内解析, 则 $f(z)$ 在 K 内可以展成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad z\in K, \tag{4.7}$$

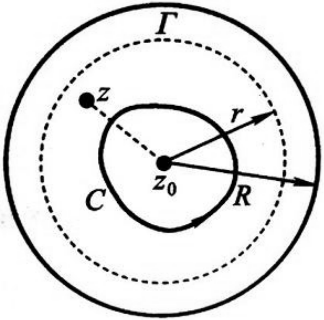
其中系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots, \tag{4.8}$$

这里 C 为 K 内包围 z_0 的任意一条围线, 并且此展式是唯一的.

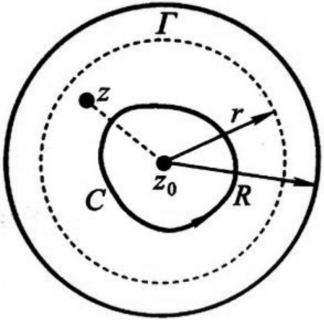


证 设 z 为 K 内任一取定的点. 在 K 内作一以 z_0 为心的圆周 Γ, 使点 z 在 Γ 内.



证　设 z 为 K 内任一取定的点. 在 K 内作一以 z_0 为心的圆周 Γ, 使点 z 在 Γ 内. 于是由柯西积分公式有

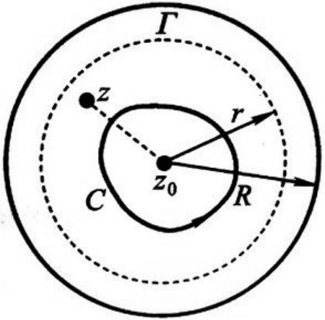
$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.9}$$



证 设 z 为 K 内任一取定的点. 在 K 内作一以 z_0 为心的圆周 Γ, 使点 z 在 Γ 内. 于是由柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{4.9}$$

为了获得级数展式, 我们考虑将上式中的被积函数展成级数形式.



证 设 z 为 K 内任一取定的点. 在 K 内作一以 z_0 为心的圆周 Γ, 使点 z 在 Γ 内. 于是由柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{4.9}$$

为了获得级数展式, 我们考虑将上式中的被积函数展成级数形式. 由例4.3, 我们有

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \tag{4.10}$$

将上式代入式(4.9)中, 并逐项积分可得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,(z-z_0)^n.$$

再由解析函数的高阶导数公式和围线变形原理, 我们便证明了展式(4.7)成立.

将上式代入式(4.9)中，并逐项积分可得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,(z-z_0)^n.$$

再由解析函数的高阶导数公式和围线变形原理，我们便证明了展式(4.7)成立.

为了保证逐项积分的可行性，我们还需验证级数(4.10)是否在 Γ 上关于 ζ 一致收敛. 事实上，当 $\zeta\in\Gamma$ 时，由于

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}<1,$$

所以级数

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

在 Γ 上关于 ζ 一致收敛.

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

在 Γ 上关于 ζ 一致收敛. 又因为函数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$ 在 Γ 上关于 ζ 有界, 可推出级数(4.10)在 Γ 上关于 ζ 一致收敛.

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

在 Γ 上关于 ζ 一致收敛. 又因为函数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$ 在 Γ 上关于 ζ 有界, 可推出级数(4.10)在 Γ 上关于 ζ 一致收敛.

最后展式(4.7)的唯一性可由幂级数的唯一性, 即定理4.6(4) 推出. ∎

定义 4.2

级数展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad z\in K:|z-a|<R \tag{4.7}$$

称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的**泰勒展式**, 这时式(4.7)右端的幂级数又称为**泰勒级数**.

定义 4.2

级数展式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in K : |z - a| < R \tag{4.7}$$

称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的**泰勒展式**, 这时式(4.7)右端的幂级数又称为**泰勒级数**.

结合定理4.6和4.7可推出

定理 4.8

函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析的充分必要条件是 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有幂级数展式即泰勒展式.

能在局部展成幂级数的实函数就叫解析函数, 所以能展成幂级数的复变函数自然也就叫解析函数.

能在局部展成幂级数的实函数就叫解析函数, 所以能展成幂级数的复变函数自然也就叫解析函数. 这就是复解析函数名称的来历, 因为它是实解析函数的推广, 不是实可微函数的推广.

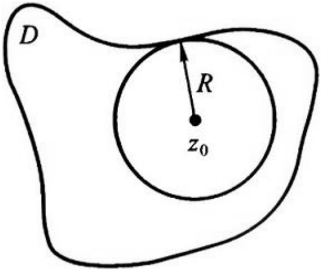
能在局部展成幂级数的实函数就叫解析函数，所以能展成幂级数的复变函数自然也就叫解析函数. 这就是复解析函数名称的来历，因为它是实解析函数的推广，不是实可微函数的推广. 所以定理4.8揭示的正是解析函数的最本质的属性.

能在局部展成幂级数的实函数就叫解析函数, 所以能展成幂级数的复变函数自然也就叫解析函数. 这就是复解析函数名称的来历, 因为它是实解析函数的推广, 不是实可微函数的推广. 所以定理4.8揭示的正是解析函数的最本质的属性.

现在我们知道了：能够用幂级数表示的函数类其实就是解析函数.

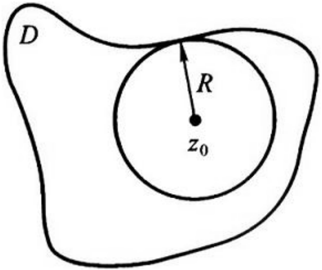
既然解析函数在解析点处可展成泰勒级数，那么解析函数在一个解析点处的泰勒展式是否在它的整个解析区域内都有效？

既然解析函数在解析点处可展成泰勒级数，那么解析函数在一个解析点处的泰勒展式是否在它的整个解析区域内都有效？



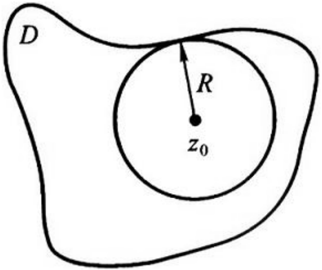
答案是否定的．由幂级数的收敛性质知，该泰勒展式的有效范围只限于它的收敛圆，因而一点处的泰勒展式一般不会在整个解析区域内成立，

既然解析函数在解析点处可展成泰勒级数，那么解析函数在一个解析点处的泰勒展式是否在它的整个解析区域内都有效？



答案是否定的. 由幂级数的收敛性质知，该泰勒展式的有效范围只限于它的收敛圆，因而一点处的泰勒展式一般不会在整个解析区域内成立，不同解析点处的泰勒展式一般是不同的.

既然解析函数在解析点处可展成泰勒级数, 那么解析函数在一个解析点处的泰勒展式是否在它的整个解析区域内都有效?



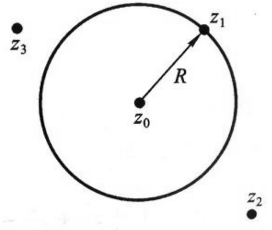
答案是否定的. 由幂级数的收敛性质知, 该泰勒展式的有效范围只限于它的收敛圆, 因而一点处的泰勒展式一般不会在整个解析区域内成立, 不同解析点处的泰勒展式一般是不同的.

从这个意义上讲, **能展成幂级数是解析函数的局部性质**, 而非整体性质.

虽然解析函数的泰勒展式的收敛半径理论上可利用定理4.5计算, 但往往用下面的办法来确定收敛半径会更方便一些.

虽然解析函数的泰勒展式的收敛半径理论上可利用定理4.5计算，但往往用下面的办法来确定收敛半径会更方便一些.

由定理4.7，利用反证法可推出收敛半径等于从展开点到距离它最近的奇点之间的距离，即泰勒展式在这样一个以展开点为心的圆内有效，在该圆内无奇点但在它的边界上有非可去奇点（可去奇点的概念将在 4.5 节中给出）的奇点.



在微积分里, 函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在原点处的泰勒展式的收敛半径是 1. 但在实函数范围内却无法说清收敛半径为什么是 1.

在微积分里, 函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在原点处的泰勒展式的收敛半径是 1. 但在实函数范围内却无法说清收敛半径为什么是 1.

在复变函数的背景下, 原因才会显现出来, 正是由于 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 有奇点 $z=\pm\mathrm{i}$, 所以它在原点的泰勒展式的收敛半径只能为 1, 从而把它限制到实轴上收敛半径仍为 1.

在微积分里, 函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在原点处的泰勒展式的收敛半径是 1. 但在实函数范围内却无法说清收敛半径为什么是 1.

在复变函数的背景下, 原因才会显现出来, 正是由于 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 有奇点 $z=\pm\mathrm{i}$, 所以它在原点的泰勒展式的收敛半径只能为 1, 从而把它限制到实轴上收敛半径仍为 1.

这个例子说明, 在实数范围内幂级数理论是不完善的, 只有在复数域中幂级数的理论才是完善的. 因此复幂级数理论并不仅仅是实幂级数理论的推广那么简单.

利用公式

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.8}$$

直接计算泰勒展式的系数来求泰勒展式的方法称为直接展开法. 但由于泰勒展式有唯一性, 我们常通过间接的办法即利用已知展开式来求泰勒展式.

例 4.4

指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在整个 z 平面上解析，它在 $z=0$ 处的泰勒展式的系数可由公式(4.8)直接计算得

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\left.\frac{\mathrm{e}^z}{n!}\right|_{z=0}=\frac{1}{n!},\ n=0,1,2,\cdots,$$

于是有

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

例 4.4

指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在整个 z 平面上解析，它在 $z=0$ 处的泰勒展式的系数可由公式(4.8)直接计算得

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\left.\frac{\mathrm{e}^z}{n!}\right|_{z=0}=\frac{1}{n!},\ n=0,1,2,\cdots,$$

于是有

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

指数函数 e^z 也可在其他解析点处展开，例如在 $z=1$ 处的泰勒展式为

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}}{n!}(z-1)^n,\quad |z-1|<+\infty.$$

例 4.5

正弦函数 $\sin z$ 在整个 z 平面上解析，它在 $z=0$ 处的泰勒展式为

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-1)^n]\frac{i^n z^n}{n!},\ |z|<+\infty.$$

但当 n 为偶数时 $1-(-1)^n=0$，即全体偶数幂项均为 0. 所以只需考虑奇数幂项，为此可将上面最后一个级数中的 n 替换为 $2n+1$，得

$$\sin z=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-1)^{2n+1}]\frac{i^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad |z|<+\infty.$$

利用幂级数的逐项可导性, 有

$$\cos z = \frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\mathrm{d}z^{2n+1}}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < +\infty.$$

例 4.6

将 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{1-z}$ 在 $z=0$ 展开成幂级数.

解　由幂级数的乘法可得

$$\frac{\mathrm{e}^z}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) z^n, \quad |z|<1.$$

例 4.6

将 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{1-z}$ 在 $z=0$ 展开成幂级数.

解 由幂级数的乘法可得

$$\frac{\mathrm{e}^z}{1-z}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)z^n,\quad |z|<1.$$

或由

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\quad |z|<+\infty,$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots,\quad |z|<1,$$

列出对角线系数表

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1/2! & & 1/3! & \cdots \\
\hline
1 & 1 & & 1 & & 1/2! & & 1/3! & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1 & 1 & & 1 & & 1/2! & & 1/3! & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1 & 1 & & 1 & & 1/2! & & 1/3! & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1 & 1 & & 1 & & 1/2! & & 1/3! & \cdots \\
\vdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}
$$

从而写出

$$
\frac{\mathrm{e}^z}{1-z} = 1 + (1+1)z + \left(1 + 1 + \frac{1}{2!}\right) z^2 + \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) z^3 + \cdots, \qquad |z| < 1. \quad \blacksquare
$$

例 4.7

求 $\dfrac{1}{z}$ 在 $z=2$ 的泰勒展式.

解 利用例4.3中的公式和幂级数的复合运算, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}, \qquad |z-2|<2.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

例 4.8

多值函数 $\mathrm{Ln}(1+z)$ 可以看作是由对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 的“图形”在 z 平面上向左平移单位长度得到的. 依此观点, 可将前面我们对对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 的讨论照搬过来, 便得 $\mathrm{Ln}(1+z)$ 以 $z=-1,\infty$ 为支点, 将 z 平面沿负实轴从 -1 到 ∞ 割破, 在这样得到的区域 D（特别是单位圆 $|z|<1$）内, $\mathrm{Ln}(1+z)$ 可以分出无穷多个单值解析分支. 下面求主值支 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 的泰勒展式. 因为

$$\frac{\mathrm{d}\ln(1+z)}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1,$$

所以可用逐项积分的办法求泰勒展式

$$
\begin{aligned}
\ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^z \zeta^n\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1.
\end{aligned}
$$

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^z \zeta^n\,\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1.$$

由此可知 $\mathrm{Ln}(1+z)$ 的各支在 $z=0$ 的泰勒展式为

$$(\ln(1+z))_k = 2k\pi\mathrm{i} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1, k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

选学

例 4.9

按一般幂函数的定义

$$(1+z)^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}(1+z)} \quad (\alpha\text{ 为复数}),$$

它的支点也是 $-1, \infty$, 故 $(1+z)^{\alpha}$ 在 $|z|<1$ 内也能分出单值解析分支. 考虑其主值支

$$f(z) = (1+z)^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+z)}$$

在 $z=0$ 的泰勒展式. 由复合函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+z)^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+z)} \frac{\alpha}{1+z} = \alpha \frac{\mathrm{e}^{\alpha \ln(1+z)}}{\mathrm{e}^{\ln(1+z)}} = \alpha \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}.$$

重复使用上面的求导公式可得

$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

于是有

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

所以 $(1+z)^\alpha$ 的主值支在 $z=0$ 的泰勒展式为

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots, \quad |z| < 1. \tag{4.11}$$

4.1.3 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点，且 $f(a)=0$，则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点.

4.1.3 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点，且 $f(a)=0$，则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点.
若 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点，则在 a 的一个解析邻域 U 内，由定理4.7，$f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z\in U. \tag{4.12}$$

4.1.3 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点，且 $f(a)=0$，则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点.

若 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点，则在 a 的一个解析邻域 U 内，由定理4.7，$f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z\in U. \tag{4.12}$$

如果 $f^{(n)}(a)=0, n=0,1,2,\cdots$，则显然 $f(z)$ 在 U 内恒为零.

4.1.3 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点，且 $f(a)=0$，则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点. 若 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点，则在 a 的一个解析邻域 U 内，由定理4.7，$f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z\in U. \tag{4.12}$$

如果 $f^{(n)}(a)=0, n=0,1,2,\cdots$，则显然 $f(z)$ 在 U 内恒为零. 由此可知，如果 $f(z)$ 在 U 内不恒为零，则必存在一个正整数 m 使得

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0, \quad 但\ f^{(m)}(a)\neq 0,$$

这样的点 a 称为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

4.1.3 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点, 且 $f(a)=0$, 则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点. 若 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点, 则在 a 的一个解析邻域 U 内, 由定理4.7, $f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z\in U. \tag{4.12}$$

如果 $f^{(n)}(a)=0, n=0,1,2,\cdots$, 则显然 $f(z)$ 在 U 内恒为零. 由此可知, 如果 $f(z)$ 在 U 内不恒为零, 则必存在一个正整数 m 使得

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0, \quad 但\ f^{(m)}(a)\neq 0,$$

这样的点 a 称为 $f(z)$ 的 m 阶零点. 特别是 $m=1$ 时, 称 a 为 $f(z)$ 的单零点（simple zero）.

下面我们讨论点 a 成为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点的充分必要条件.

命题 4.1

点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点当且仅当 $f(z)$ 在点 a 处的泰勒展式的最低幂次项的幂次为 m.

证　由解析函数在零点 a 处的泰勒展式(4.12)和 m 阶零点的定义立得所证. ∎

定理 4.9

点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点当且仅当存在一个在 a 的某个邻域内解析的函数 $\varphi(z)$ 满足

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0.$$

证 必要性. 如果点 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则由命题4.1, 在 a 的某个解析邻域 U 内有

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m}.$$

定理 4.9

点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点当且仅当存在一个在 a 的某个邻域内解析的函数 $\varphi(z)$ 满足

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0.$$

证 必要性. 如果点 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则由命题4.1, 在 a 的某个解析邻域 U 内有

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m}.$$

由于上式中的两个幂级数具有相同的系数列, 因此有相同的收敛半径. 记

$$\varphi(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m},$$

则有 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, 这里 $\varphi(z)$ 作为幂级数的和函数在 U 内解析, 且

$$\varphi(a)=c_m=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0.$$

则有 $f(z) = (z-a)^m\varphi(z)$, 这里 $\varphi(z)$ 作为幂级数的和函数在 U 内解析, 且

$$\varphi(a) = c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0.$$

充分性. 若 $\varphi(z)$ 在点 a 的邻域 U 内解析, 则在 U 内有

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n.$$

则有 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, 这里 $\varphi(z)$ 作为幂级数的和函数在 U 内解析, 且

$$\varphi(a)=c_m=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0.$$

充分性. 若 $\varphi(z)$ 在点 a 的邻域 U 内解析, 则在 U 内有

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n.$$

于是在 U 内有

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)=c_0(z-a)^m+c_1(z-a)^{m+1}+\cdots.$$

因为 $c_0=\varphi(a)\neq 0$, 所以由命题4.1知 a 是解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点. ∎

定理 4.10

若 a 是解析函数 $f(z)$ 的零点, 则存在 a 的一个邻域, 使得在其中或者 $f(z)$ 恒为零, 或者 $f(z)$ 无其他的零点.

定理 4.10

若 a 是解析函数 $f(z)$ 的零点, 则存在 a 的一个邻域, 使得在其中或者 $f(z)$ 恒为零, 或者 $f(z)$ 无其他的零点.

证 只需证明如果 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则存在 a 的一个邻域, 在其中 a 是 $f(z)$ 唯一的零点.

定理 4.10

若 a 是解析函数 $f(z)$ 的零点, 则存在 a 的一个邻域, 使得在其中或者 $f(z)$ 恒为零, 或者 $f(z)$ 无其他的零点.

证 只需证明如果 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则存在 a 的一个邻域, 在其中 a 是 $f(z)$ 唯一的零点. 由定理4.9我们有

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析且 $\varphi(a) \neq 0$. 这说明只需证明存在 a 的一个邻域, 使得 $\varphi(z)$ 在其中无零点.

定理 4.10

若 a 是解析函数 $f(z)$ 的零点, 则存在 a 的一个邻域, 使得在其中或者 $f(z)$ 恒为零, 或者 $f(z)$ 无其他的零点.

证 只需证明如果 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则存在 a 的一个邻域, 在其中 a 是 $f(z)$ 唯一的零点. 由定理4.9我们有

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析且 $\varphi(a) \neq 0$. 这说明只需证明存在 a 的一个邻域, 使得 $\varphi(z)$ 在其中无零点. 由于 $\varphi(z)$ 在点 a 连续, 于是存在 a 的一个邻域 U, 使得在 U 内有

$$\big||\varphi(z)| - |\varphi(a)|\big| \leq |\varphi(z) - \varphi(a)| < \frac{|\varphi(a)|}{2}.$$

由此可知在 U 内

$$|\varphi(z)| > \frac{|\varphi(a)|}{2} > 0.$$

即得所证. ∎

$$|\varphi(z)| > \frac{|\varphi(a)|}{2} > 0.$$

即得所证. ∎

利用定理4.10可以证明下面的解析函数的唯一性定理.

定理 4.11

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内解析, $z_k\ (k=1,2,3,\cdots)$ 是 D 内互不相同的点, 且点列 $\{z_k\}$ 在 D 内有聚点. 如果 $f(z_k)=g(z_k), k=1,2,3,\cdots$, 则在 D 内恒有 $f(z)=g(z)$.

柯西积分公式告诉我们解析函数在解析区域内的值可以被边界上的值唯一确定, 而解析函数唯一性定理告诉我们一个更令人吃惊的事实: 解析函数在解析区域内的值可以被任意解析区域内有聚点的点集上的值唯一确定.

柯西积分公式告诉我们解析函数在解析区域内的值可以被边界上的值唯一确定, 而解析函数唯一性定理告诉我们一个更令人吃惊的事实: 解析函数在解析区域内的值可以被任意解析区域内有聚点的点集上的值唯一确定.

结合定理4.10和解析函数的唯一性定理立即可以推出：不恒为零的解析函数的零点是孤立的. 我们称这一性质为解析函数零点的孤立性.

例 4.10

证明 $\sin 2z = 2\sin z\cos z$.

证 可用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义来验证等式成立, 但在这里我们介绍利用解析函数唯一性定理的证法. 熟知在实轴上

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

成立, 而 $\sin 2z$ 和 $2\sin z\cos z$ 都是整个复平面上的解析函数. 于是利用解析函数唯一性定理可知 $\sin 2z = 2\sin z\cos z$. ∎

例 4.10

证明 $\sin 2z = 2\sin z\cos z$.

证 可用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义来验证等式成立, 但在这里我们介绍利用解析函数唯一性定理的证法. 熟知在实轴上

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

成立, 而 $\sin 2z$ 和 $2\sin z\cos z$ 都是整个复平面上的解析函数. 于是利用解析函数唯一性定理可知 $\sin 2z = 2\sin z\cos z$. $\blacksquare$

类似地, 利用解析函数的唯一性定理立即可知许多实数情形下成立的三角函数公式在复数范围内仍成立.

在第二章中, 我们讨论初等解析函数 $\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z$ 等时, 强调过它们都是原来相应的实函数在复平面上的延拓.

在第二章中，我们讨论初等解析函数 $e^z, \sin z, \cos z$ 等时，强调过它们都是原来相应的实函数在复平面上的延拓. 现在由解析函数的唯一性定理可知，这些初等解析函数其实是相应的实初等函数在复平面上的唯一解析延拓，即不会有两个解析函数是同一个实函数在复平面上的延拓. 这就解释了为什么这些实和复的初等函数会有相同的求导公式和泰勒展式形式.

作业

习题四

2. 求下列函数在 $z=0$ 处的泰勒展式, 并指明展式成立的范围：

(1) $\dfrac{1}{az+b}$, $(a, b$ 为复数, $b \neq 0)$;　(3) $\displaystyle\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$;　(4) $\cos^2 z$;

(5) $\sin^2 z$;　(6) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

3. 试求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n^2} z^n$, $|q|<1$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k z^n$, $(k>0$ 为常数$)$;　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}$.

4. 求 $e^z \ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展式, 要求写出 z^4 项之前的所有低次幂项.
5. 将下列函数按 $z-1$ 的幂项展开, 并指明收敛范围:

   (1) $\cos z$;　　(3) $\dfrac{z}{z+2}$.
7. 请指出下列函数的零点 $z=0$ 的阶:

   (1) $z^2(e^{z^2}-1)$;　　(2) $6\sin z^3 + z^3(z^6-6)$.