第12周讲稿及作业

Edited by Hu Chen

OUC

May 20, 2020

目录

三维(空间)拉普拉斯方程的球对称解

引入球坐标系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi, r \ge 0,$$

则空间拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

在球坐标系(r, θ, φ)下可以表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{1}$$

如果只考虑球对称解, 即u 与φ, θ 都无关, 只与半径r 有关, 那么方程(1) 可简化为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

它的解显然为

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2, \tag{2}$$

其中C_1, C_2为任意的常数.

二维(平面)拉普拉斯方程的对称解

引入极坐标系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, r \ge 0,$$

则平面拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

在极坐标系(r,θ)下可以表示为

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \tag{3}$$

如果只考虑关于原点对称解, 即u 与θ 无关, 只与半径r 有关, 那么方程(3) 可简化为

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

它的解显然为(因为这个方程等价于$(ru')' = 0$, 或者由常微分方程欧拉方程的解法)

$$u = C_1 \ln r + C_2, \tag{4}$$

其中C_1, C_2为任意的常数.

调和函数

我们之前已经知道调和函数的定义为: 如果函数u 在某区域D 内有二阶连续偏导数, 且满足

$$\Delta u = 0, \tag{5}$$

则称u 为区域D 内的调和函数.

三维情形, 容易验证$\frac{1}{r}$, 其中$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, 在空间中除了点$(x_0, y_0, z_0)$ 外, 在剩下的区域内都是调和函数.

二维情形, 容易验证$\ln\frac{1}{r}$, 其中$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, 在平面上除了点$(x_0, y_0)$ 外, 在剩下的区域内都是调和函数.

格林公式　设 Ω 是空间 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, 它的边界曲面 $\partial\Omega$ 光滑或分片光滑, 函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$上连续, 在 Ω 内具有一阶连续偏导数, 那么成立

$$\iiint_\Omega (P_x+Q_y+R_z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}[P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\cos(\boldsymbol{n},y)+R\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}S, \tag{6}$$

其中$(\cos(\boldsymbol{n},x),\cos(\boldsymbol{n},y),\cos(\boldsymbol{n},z))$是$\partial\Omega$的单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦. 这就是著名的高斯公式. 下面说明如何利用高斯公式推出格林公式.

设函数$u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. 在高斯公式(6)中,
令$P=uv_x$, $Q=uv_y$, $R=uv_z$, 则有

$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_\Omega (u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S,$$

或

$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{7}$$

其中

$$\nabla u=\mathrm{grad}u=(u_x,u_y,u_z)\,,\quad \nabla v=\mathrm{grad}v=(v_x,v_y,v_z)$$

分别是函数 u 和 v 的梯度向量. 式(7)称为格林第一公式.

在式(7)中将函数 u 和 v 的位置互换, 得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S - \iiint_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

再将这两式相减得

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S. \tag{8}$$

式(8)称为格林第二公式, 一般简称为格林公式.

类似地, 设 D 为 Oxy 平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线 Γ 所围成的单连通区域, 函数$u, v \in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, 则由微积分中的格林公式可得二维格林公式

$$\iint_{D} u\Delta v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s - \iint_{D} \nabla u\cdot\nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{9}$$

$$\iint_{D} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s, \tag{10}$$

其中$\mathrm{d}s$是弧长微元.

调和函数的基本性质

性质1 设u 在$D \cap S(\partial D)$ 上有连续一阶偏导数, 且在D 内调和, 则

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right] dS,$$

其中$M_0 \in D$, r 是由M_0 到变点M 的距离.

注1.1

若u 在D 内不调和, 则$u(M_0)$ 的值要在前面基础上减掉$\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u}{r} \mathrm{d}V$.

性质2 若函数u 在D内调和, $D \cap S(\partial D)$ 上有连续一阶偏导数, 则

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS = 0.$$

其中$M_0 \in D$, r 是由M_0 到变点M 的距离.

调和函数的基本性质(续)

性质3 (平均值定理)　设u 在以点M_0 为球心, R 为半径的球内调和, 且在此闭球上有一阶连续偏导数, 则

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R^{M_0}} u dS.$$

性质4 (极值原理)　若函数u 在D 内调和, 在$D \cap S(\partial D)$ 上连续, 且不为常数, 则它的最大值和最小值只能在边界S 上达到.

二维调和函数的基本性质

性质1' 设u 在$D\cap l(\partial D)$ 上有连续一阶偏导数, 且在D 内调和, 则

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_l\left[u\frac{\partial\left(\ln\frac{1}{r}\right)}{\partial\boldsymbol{n}}-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]dS,$$

其中$M_0\in D$, r 是由M_0 到变点M 的距离.

注1.2

若u 在D 内不调和, 则$u(M_0)$ 的值要在前面基础上减掉$\frac{1}{2\pi}\iint_D\ln\frac{1}{r}\Delta u dS$.

性质2' 若函数u 在D内调和, $D\cap l(\partial D)$ 上有连续一阶偏导数, 则

$$\int_l\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}ds=0.$$

其中$M_0\in D$, r 是由M_0 到变点M 的距离.

性质3' (平均值定理) 设u 在以点M_0 为球心, R 为半径的圆内调和, 且在此闭球上有一阶连续偏导数, 则

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{C_R^{M_0}}uds.$$

球的狄利克雷问题

空间中拉普拉斯方程的球的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (\text{在球内}), & (11) \\ u = f & (\text{在球面上}). & (12) \end{cases}$$

它的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R^O} f(M')\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\mathrm{d}S, \tag{13}$$

其中M_0 为球内任意一点,比如说(x_0, y_0, z_0), R 是我们考虑的球的半径, M' 是球面上的任意一点, r 是点M_0 到M' 的距离, ρ 是点M_0 到球心O 的距离.

引入以球心为坐标原点的球坐标系, 设点M' 的球坐标为(R, θ', φ'), 点M_0 的球坐标为$(\rho, \theta_0, \varphi_0)$, 再将$OM_0$ 和OM' 之间的夹角记作α, 则上式可重新写为

$$u(\rho, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta', \varphi')\cdot\frac{R^2-\rho^2}{(R^2-2R\rho\cos\alpha+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'. \tag{14}$$

称之为球的泊松积分.

圆的狄利克雷问题

平面上拉普拉斯方程的圆的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad (\text{在圆内}), & (15) \\ u = f \quad (\text{在圆上}). & (16) \end{cases}$$

它的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R^O} f(M') \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} \mathrm{d}S, \tag{17}$$

其中M_0 为圆内任意一点,比如说(x_0, y_0), R 是我们考虑的圆的半径, M' 是圆上的任意一点, r 是点M_0 到M' 的距离, ρ 是点M_0 到球心O 的距离.

引入以圆心为坐标原点的极坐标系, 设点M' 的极坐标为(R, φ'), 点M_0 的极坐标为(ρ, θ), 再将OM_0 和OM' 之间的夹角记作α, 则上式可重新写为

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi' - \theta) + \rho^2} \mathrm{d}\varphi'. \tag{18}$$

称之为圆的泊松积分.

狄利克雷外问题

空间中拉普拉斯方程的球的狄利克雷外问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad (\text{在球外}), & (19) \\ u = f \quad (\text{在球面上}). & (20) \end{cases}$$

它的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S_R^O} f(M') \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} \mathrm{d}S,$$

或者

$$u(\rho, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta', \varphi') \cdot \frac{\rho^2 - R^2}{(R^2 - 2R\rho\cos\alpha + \rho^2)^{3/2}} \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi'. \tag{21}$$

(因为球的内外方向导数只差一个符号, 故由调和函数的性质1 直接可以得到).

一般区域的狄利克雷问题

拉普拉斯方程在一般区域上的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad (\text{在区域}D\text{内}), & (22) \\ u = f \quad (\text{在}D\text{ 的边界}S\text{上}). & (23) \end{cases}$$

由调和函数的性质1, 我们有

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right] dS, \tag{24}$$

再由格林公式, 设$\Delta u = 0$, 令g 是一调和函数, 可得

$$0 = \iint_S \left(u \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}S$$

用$\frac{1}{4\pi}$ 乘上式, 然后和(24)相加得

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} \right) - \left(\frac{1}{r} - g \right) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right] dS, \tag{25}$$

在界面S 上令$g=\frac{1}{r}$, 再把边界条件代入得

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S f\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}-g\right)\mathrm{d}S. \tag{26}$$

函数g 在区域D内调和, 在界面S 上与$\frac{1}{r}$ 相等, 因此g 与u 完成无关, 只与M_0 和曲面上的点M 有关, 故

$$g=g(M;M_0)=g(x,y,z;x_0,y_0,z_0).$$

令

$$G(M;M_0)=\frac{1}{r}-g(M;M_0) \tag{27}$$

则我们要求的解可写为

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S f\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S. \tag{28}$$

对于平面的情形，类似可以推得

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_l f\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s, \tag{29}$$

其中

$$G(M;M_0)=\ln\frac{1}{r}-g(M;M_0). \tag{30}$$

格林函数的定义

函数G称为拉普拉斯方程$\Delta u=0$ 关于区域D 的狄利克雷问题的格林函数.

格林函数的两个基本性质：

1. 除点M_0 外, 函数$G(M;M_0)$ 在D内调和; 当$M\to M_0$ 时, $G(M;M_0)$ 趋于无穷大, 而差$G-\frac{1}{r}$保持有界.
2. 在界面S 上, 函数G恒等于0.

格林函数也可定义如下：定解问题的解

$$\begin{cases} \Delta G=-4\pi\delta(M-M_0) \quad (\text{在区域}D\text{内}), & (31)\\ G=0 \quad (\text{在}D\text{ 的边界}S\text{上}). & (32)\end{cases}$$

称为拉普拉斯方程$\Delta u=0$ 关于区域D 的狄利克雷问题的格林函数.

用电像法作格林函数

用某种对称性来求感应电场，从而构造出格林函数的方法，在物理上称为电像法或镜像法.

半空间的情形 格林函数为(M 是M_0关于边界面$z=0$ 的对称点)

$$
\begin{aligned}
&G(M;M_0)\\
&=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}
\end{aligned}
$$

则拉普拉斯方程在上半平面的狄利克雷问题的解为(在边界面$z=0$上有$u(x,y,0)=f(x,y)$, 代入公式(28))

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\frac{\partial}{\partial z}\left[G(M;M_0)\right]_{z=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{33}$$

$$=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{34}$$

用电像法作格林函数(续)

半平面的情形　格林函数为(M 是M_0关于边界面$y=0$ 的对称点)

$$G(M;M_0)=\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r_1}$$
$$=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}$$

则拉普拉斯方程在上半平面的狄利克雷问题的解为(在边界面$y=0$上有$u(x,0)=f(x)$, 代入公式(29))

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\partial}{\partial y}\left[G(M;M_0)\right]_{y=0}\mathrm{d}x \tag{35}$$
$$=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}x. \tag{36}$$

球的格林函数为($r=|M_0M|$, $r_1=|M_1M|$)

$$G(M;M_0)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}. \tag{37}$$

圆的格林函数为($r=|M_0M|$, $r_1=|M_1M|$)

$$G(M;M_0)=\ln\frac{1}{r}-\ln\left(\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right). \tag{38}$$

泊松方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi\rho \quad (\text{在区域}D\text{内}), & (39)\\ u = f \quad (\text{在}D\text{的边界}S\text{上}). & (40) \end{cases}$$

由调和函数的性质1, 我们有

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right] dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\Delta u}{r}\mathrm{d}V, \tag{41}$$

再由格林公式, 用构成格林函数G 的调和函数g 代替v, 可得

$$0 = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(u\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi}\iiint_D g\Delta u\mathrm{d}V.$$

和(41)相加得,并注意到$\frac{1}{r} - g = G$, 结合方程和边界条件, 得

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S f\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}dS + \iiint_D \rho G u\mathrm{d}V, \tag{42}$$

习题十一作业

2.求圆$x^2+y^2\leq R^2$的格林函数, 并由此对平面拉普拉斯方程导出求解圆的狄利克雷内问题的泊松公式.

5. 求区域$0\leq x<+\infty$, $0\leq y<+\infty$ 的格林函数, 并由此求解狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & \\ u(0,y)=f(y) & (0\leq y<+\infty), \\ u(x,0)=0 & (0\leq x<+\infty), \end{cases}$$

其中f 为已知的连续函数. 且$f(0)=0$.