第2章　规则金属波导

2.1导波原理

2.2矩形波导

2. 3圆形波导

2.4波导的激励与耦合

主要内容:

1. 圆波导中的场
2. 圆波导的传输特性
3. 圆波导三种常用模式

基本要求:

1. 掌握圆波导的定义
2. 掌握圆波导中的场
3. 掌握圆波导中的传输特性:截止波长、简并模和传输功率
4. 掌握圆波导中三种主要模式:TE_{11}、TM_{01}、TE_{01}

习题:2.8, 2.9, 2.11

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

一、圆波导的一些特点

◆1. 圆波导的提出来自实践的需要。例如，雷达的旋转搜索需要旋转关节；极化衰减器，多模或波纹喇叭，都会应用到圆波导。因此，几何对称性给圆波导带来广泛的用途和价值。

◆2. 从力学和应力平衡角度，机加工圆波导更为有利，对于误差和方便性等方面均略胜矩形波导一筹。

◆3. 探索小衰减，大功率传输线，想到圆波导是自然的。

- **功率容量和衰减是十分重要的两个指标。**
- **广义上看** $\begin{cases} \text{功率容量} \quad P_{\max} \propto S(\text{其中}S\text{是截面}) \\ \text{衰减} \quad \alpha \propto L(\text{其中}L\text{是周长}) \end{cases}$
- 品质因数 $F = \dfrac{P_{max}}{\alpha} \propto \dfrac{S}{L}$
- 在相同周长的条件下，圆面积最大

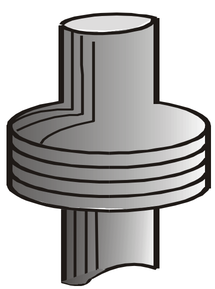


图 旋转关节

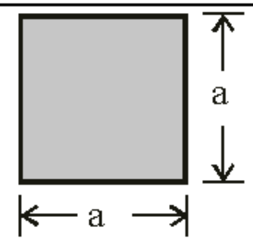
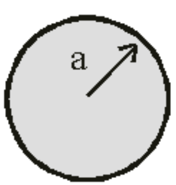
(Rotation Junction)

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

一、圆波导的一些特点

◆3. 探索小衰减，大功率传输线，想到圆波导是自然的。

- **功率容量和衰减是十分重要的两个指标。**
- **广义上:** $\begin{cases} \text{功率容量} \quad P_{max} \propto S(\text{其中S是截面}) \\ \text{衰减} \quad \alpha \propto L(\text{其中L是周长}) \end{cases}$
- 品质因数 $F = \dfrac{P_{max}}{\alpha} \propto \dfrac{S}{L}$
- 在相同周长的条件下，圆面积最大

		
周长 L	$4a$	$2\pi R$, $R=\dfrac{2a}{\pi}$
面积 S	a^2	$\pi R^2=\dfrac{4}{\pi}a^2=\max$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

一、圆波导的一些特点

◆**4.**矩形波导中存在的一个矛盾，频率升高时衰减在矩形波导中上升很快。圆波导中，有的波型(圆波导中H_{01}波型)高频时衰减减小。

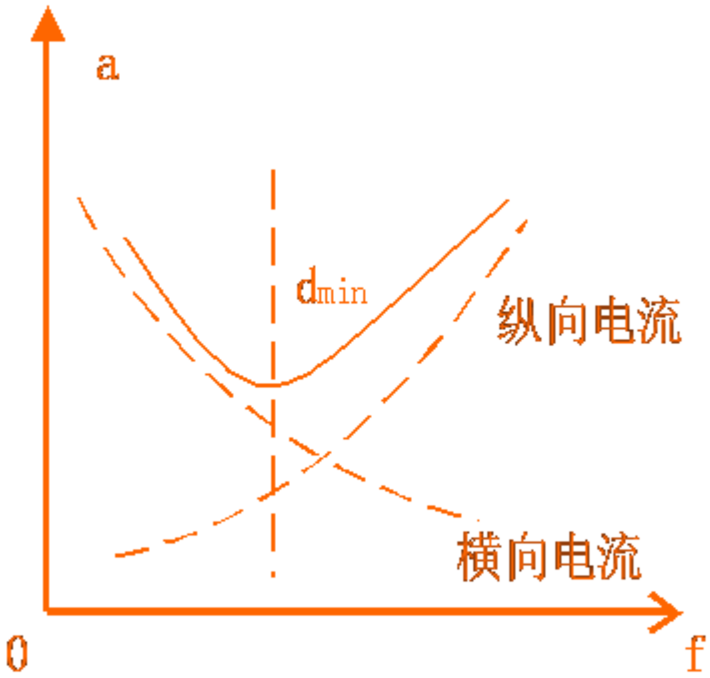


图 矩形波导TE_{10}波衰减

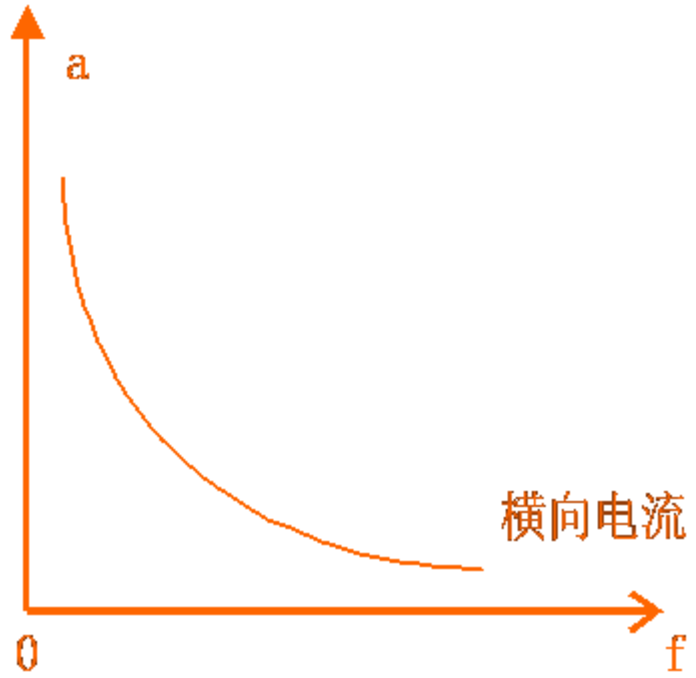


图 圆波导H_{01}波衰减

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

1.圆波导采用圆柱坐标系

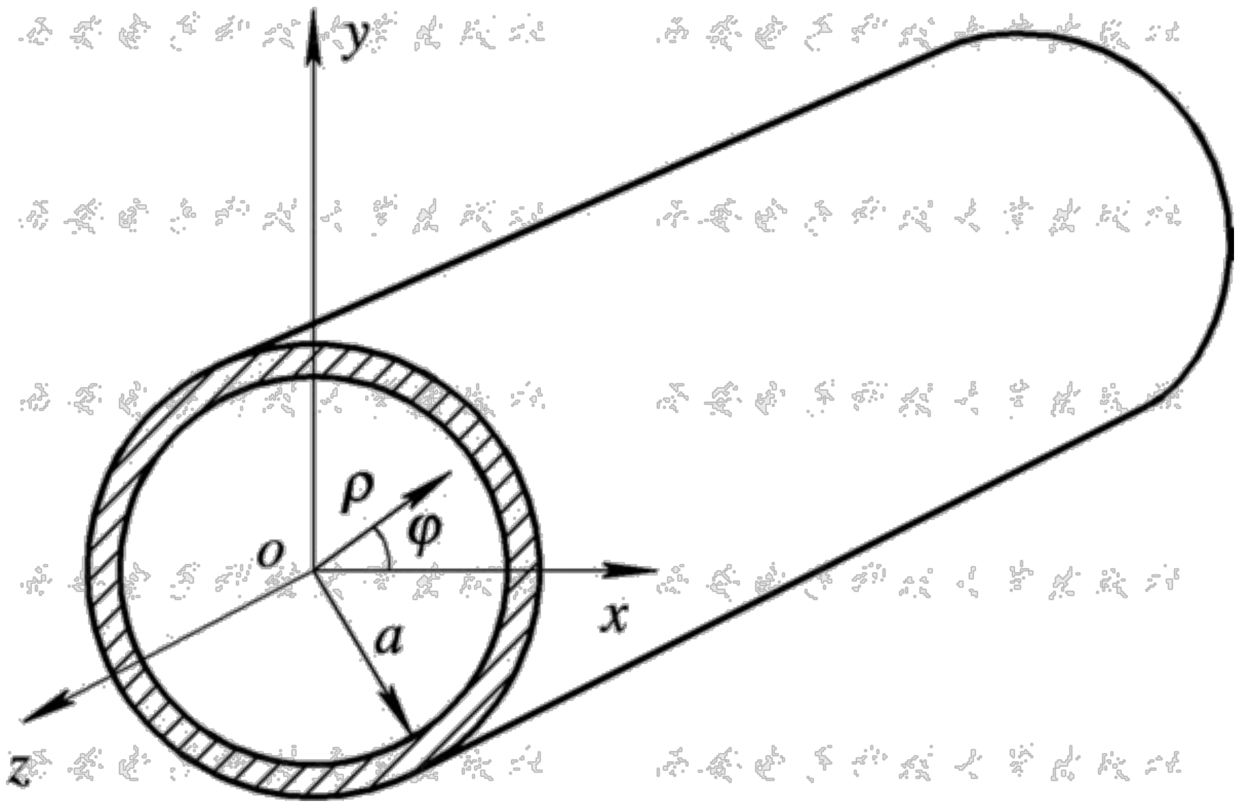


图2-6 圆波导及其坐标系

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

2.求解思路

出发点无源

Maxwell方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$$

→

支配方程

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0$$

→

纵向分量方程

$$\nabla^2 E_z+k^2E_z=0$$

$$\nabla^2 H_z+k^2H_z=0$$

→

其它分量用

$\mathbf{E_z}$,$\mathbf{H_z}$表示

$$\begin{cases}E_\rho=f_1(E_z,H_z)\\ E_\varphi=f_2(E_z,H_z)\\ H_\rho=f_3(E_z,H_z)\\ H_\varphi=f_4(E_z,H_z)\end{cases}$$

图　导波系统一般求解思路

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

3.对比矩形波导

矩形波导	圆波导
$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$	$E_\rho, E_\varphi, E_z, H_\rho, H_\varphi, H_z$
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

4.划分为TE和TM波,场的z分量分别满足 $\begin{cases}\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0\end{cases}$

5.以TE波作为例子，E_z=0

◆(1)函数分解 $H_z = H_{0z}(\rho,\varphi)e^{-j\beta z} \neq 0$

$$\nabla_t^2 H_{oz}(\rho,\varphi) + k_c^2 H_{oz}(\rho,\varphi) = 0 \quad (\mathbf{2-3-1})$$

◆(2)在圆柱坐标中 $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

◆(3)**(2-3-1)**式写作

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)H_{0z}(\rho,\varphi) + k_c^2 H_{0z}(\rho,\varphi) = 0 \quad (\mathbf{2-3-2})$$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

5. 以TE波作为例子，$E_z=0$

◆(3)(2-3-1)式写作$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)H_{0z}(\rho,\varphi)+k_c^2H_{oz}(\rho,\varphi)=0$

◆(4)进一步函数分解$H_{oz}(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$（**2-3-3**）

$$\Phi(\varphi)\frac{\partial^2R(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\Phi(\varphi)\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}+\frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-k_c^2R(\rho)\Phi(\varphi)$$

◆(5)等式两边除以RΦ

$$\frac{1}{R(\rho)}\frac{\partial^2R(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{R(\rho)\rho}\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\Phi(\varphi)\rho^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-k_c^2$$

◆(6)等式两边乘上ρ^2

$$\frac{1}{R(\rho)}\left[\rho^2\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\rho^2k_c^2R(\rho)\right]=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}$$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

5. 以TE波作为例子，$E_z=0$

◆(7)令一常数为m^2，有

$$\rho^2\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}+(\rho^2k_c^2-m^2)R(\rho)=0 \quad (2-3-5a)$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+m^2\Phi(\varphi)=0 \quad (2-3-5b)$$

◆(8)其通解分别是

$$R(\rho)=A_1J_m(k_c\rho)+A_2N_m(k_c\rho)=A\begin{pmatrix}J_m(k_c\rho)\\N_m(k_c\rho)\end{pmatrix} \quad (2-3-6a)$$

$$\Phi(\varphi)=B_1\cos m\varphi+B_2\sin m\varphi=B\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{pmatrix} \quad (2-3-6b)$$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

三、贝塞尔函数

1. 贝塞尔函数分类

◆(1)第一类m阶Bessel函数$J_m(x)$

◆(2)第二类m阶Bessel函数 $N_m(x)$

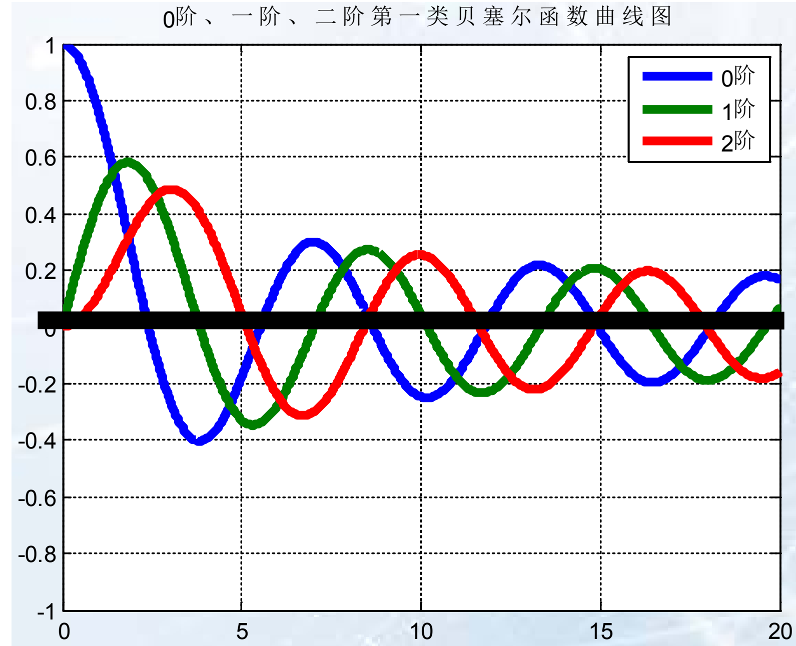
◆(3)汉开尔函数

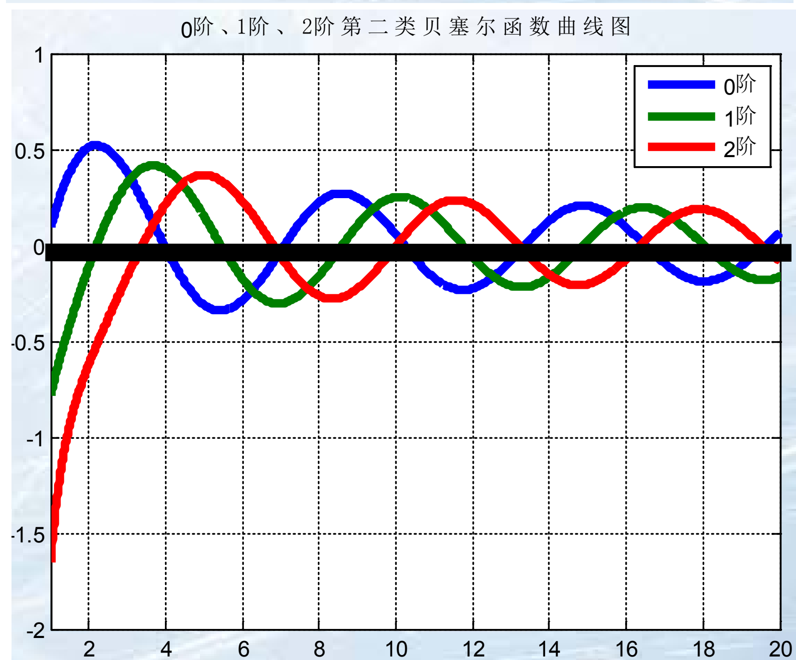
①第一类汉开尔函数

$$H_m^{(1)}(x)=J_m(x)+jN_m(x)$$

②第二类汉开尔函数

$$H_m^{(2)}(x)=J_m(x)-jN_m(x)$$





2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

三、贝塞尔函数

2. Bessel的特点

◆(1)函数值 $\begin{cases} J_m(0)=0 & m=1,2,\ldots \\ J_0(0)=1 & \lim\limits_{x\to 0} N_m(x)\to -\infty \end{cases}$

◆**2.振荡特性(波动类周期)**

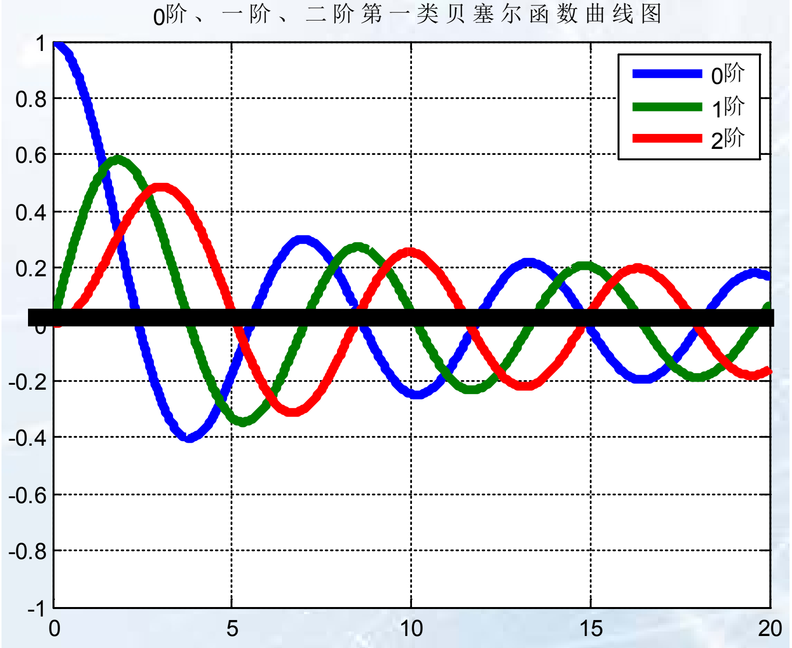
◆**3.渐进式**

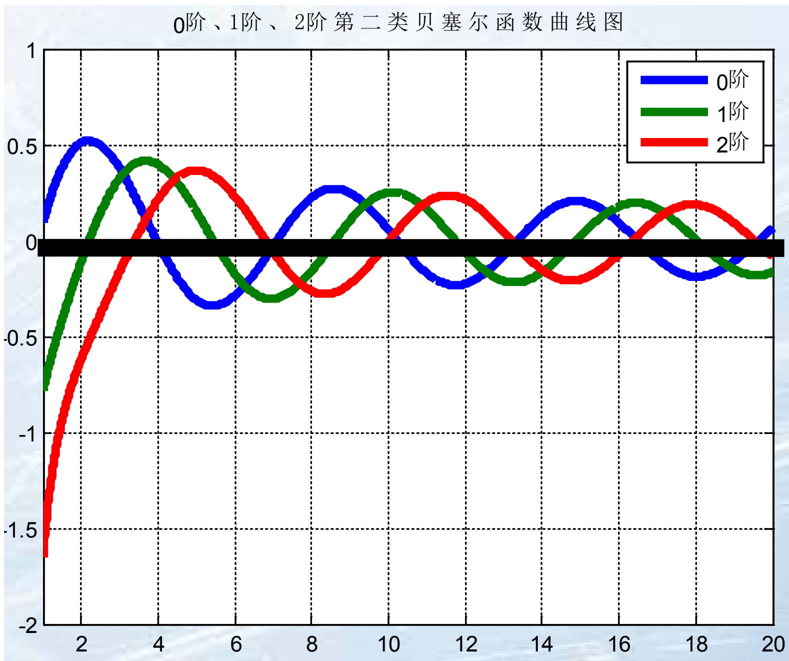
$$\lim_{x\to 0} N_m(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}m\pi\right)$$

$$\lim_{x\to 0} J_m(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}m\pi\right)$$

4.导数和递推公式 $J_0'(x)=-J_1(x)$

$$J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$$





2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

5. 以TE波作为例子，$E_z=0$

◆(8)其通解分别是

$$R(\rho)=A_1J_m(k_c\rho)+A_2N_m(k_c\rho)=A\begin{pmatrix}J_m(k_c\rho)\\N_m(k_c\rho)\end{pmatrix}\quad(2-3-6a)$$

$$\Phi(\varphi)=B_1\cos m\varphi+B_2\sin m\varphi=B\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{pmatrix}\quad(2-3-6b)$$

◆(9)讨论：

✓ ①式(2-3-6b)中后一种表示形式是考虑到圆波导的轴对称性，因此场的极化方向具有不确定性，使导行波的场分布在φ方向存在cosm φ和sinmφ两种可能的分布，它们独立存在，相互正交，截止波长相同，构成同一导行模的**极化简并模**。

✓②由于ρ→0时$N_m(k_c\rho)\to-\infty$，故式(2-3-6a)中必然有$A_2=0$。

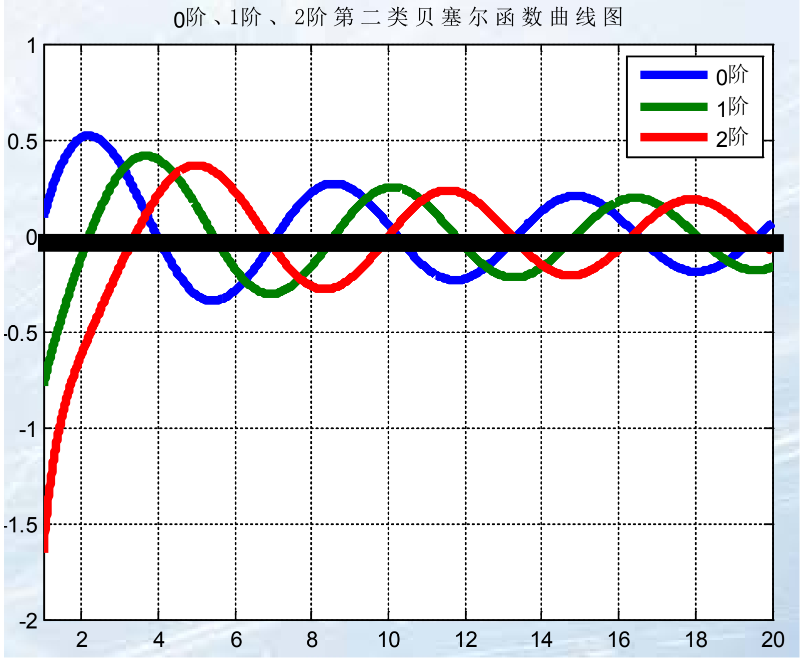
2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

5. 以TE波作为例子，$E_z=0$

◆⑽H_{oz}(ρ， φ)的通解为 $H_{oz}(\rho,\varphi)=A_1BJ_m(k_c\rho)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}$ (2-3-7)

◆⑾边界条件



圆波导包含三种边界条件

•①有限条件 $f(\rho=0)\neq\infty$

圆波导中不出现Neumann函数

•②周期条件 $f(\varphi=0)=f(\varphi=2\pi)$

要求m为整数阶

•③理想导体条件 $E_t(\rho=a)=0\rightarrow E_\varphi,E_z\big|_{\rho=a}=0$

分TE、TM两种情况讨论

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

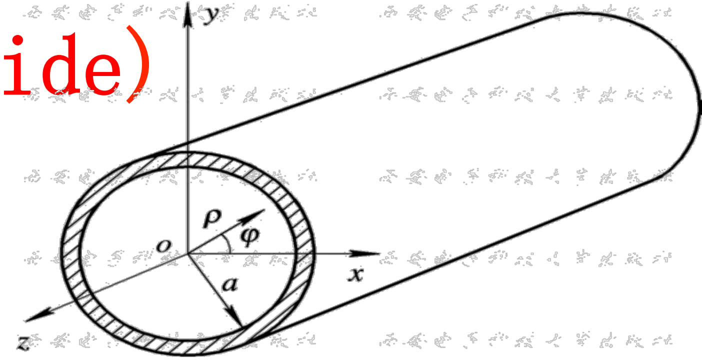


图2-6 圆波导及其坐标系

5. 以TE波作为例子，$E_z=0$

③理想导体条件 $E_t(\rho=a)=0 \rightarrow E_\varphi, E_z\big|_{\rho=a}=0$

Case1：TE情况，$E_z=0, H_z=A_1BJ_m(k_c\rho)\begin{pmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-\gamma z}$

$$\begin{bmatrix}E_\rho \\ E_\varphi \\ H_\rho \\ H_\varphi\end{bmatrix}=\frac{1}{k_c^2}\begin{bmatrix}-\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial H_z}{\partial\varphi}\end{bmatrix}$$

- 应用导体边界条件 $E_t(\rho=a)=0 \rightarrow E_\varphi, E_z\big|_{\rho=a}=0$ 有$J'_m(k_ca)=0$
- 令μ_{mn}是m阶Bessel函数导数的第n个根，则

$$k_ca=\mu_{mn} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad k_c=\frac{\mu_{mn}}{a}=\frac{2\pi}{\lambda_c} \qquad \lambda_c=\frac{2\pi a}{\mu_{mn}}$$

- 令模式振幅$H_{mn}=A_1B$，则$H_z(\rho,\ \phi,\ z)$的通解为

$$H_z(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z} \quad \mathbf{(2-3-10)}$$

2.3 圆形波导

二、圆波导中的场

5.以TE波作为例子，$E_z=0$

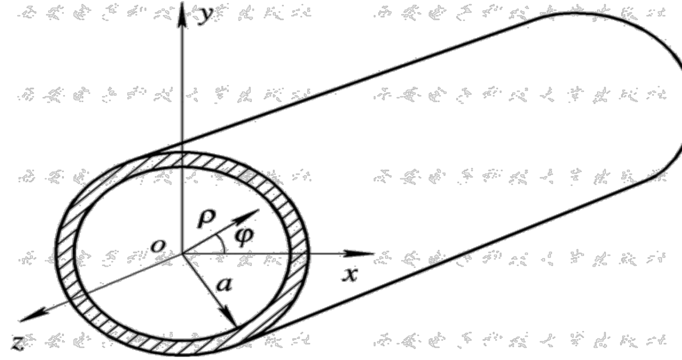


图2-6 圆波导及其坐标系

③理想导体条件 $E_t(\rho=a)=0 \rightarrow E_\varphi, E_z\big|_{\rho=a}=0$

Case1: TE情况， $E_z=0$

- 有不变性矩阵可求得其它场分量
- 圆波导中同样存在着无穷多种TE模, 不同的m和n代表不同的模式, 记作TE_{mn}
- m表示场沿圆周分布的整波数, n表示场沿半径分布的最大值个数
- 波阻抗为 $Z_{TE_{mn}}=\dfrac{E_\rho}{H_\varphi}=\dfrac{\omega\mu}{\beta_{TE_{mn}}}$

式中 $\beta_{TE_{mn}}=\sqrt{k^2-\left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\right)^2}$

$$
\begin{cases}
E_\rho=\pm\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{j\omega\mu ma^2}{\mu_{mn}^2\rho}H_{mn}J_m\left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
E_\varphi=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{j\omega\mu a}{\mu_{mn}}H_{mn}J'_m\left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
E_z=0\\
H_\rho=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-j\beta a}{\mu_{mn}}H_{mn}J'_m\left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
H_\varphi=\pm\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{j\beta ma^2}{\mu^2_{mn}\rho}H_{mn}J_m\left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
H_z=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_{mn}J_m\left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}
\end{cases}
$$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

二、圆波导中的场

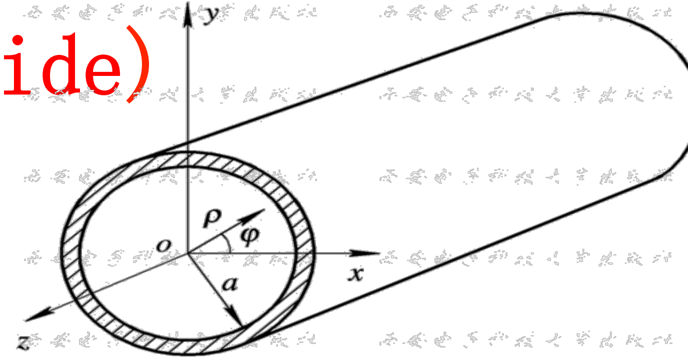


图2-6 圆波导及其坐标系

③理想导体条件 $E_t(\rho=a)=0 \rightarrow E_\varphi, E_z\big|_{\rho=a}=0$

□Case2：TM情况， $H_z=0, E_z=A_1BJ_m(k_c\rho)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-\gamma z}$

$$\begin{bmatrix}E_\rho\\ E_\varphi\\ H_\rho\\ H_\varphi\end{bmatrix}=\frac{1}{k_c^2}\begin{bmatrix}-\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu\\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0\\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0\\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial E_z}{\partial\rho}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E_z}{\partial\varphi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

- 应用导体边界条件 $E_t(\rho=a)=0 \rightarrow E_\varphi, E_z\big|_{\rho=a}=0$ 有 $J_m(k_ca)=0$
- 令v_{mn}是m阶Bessel函数的第n个根，则

$$k_ca=v_{mn}\quad (n=1,2,3,\cdots)\quad k_c=\frac{v_{mn}}{a}=\frac{2\pi}{\lambda_c}\qquad \lambda_c=\frac{2\pi a}{v_{mn}}$$

- 令模式振幅$E_{mn}=A_1B$，则$E_z(\rho，\phi，z)$的通解为

$$E_z(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}J_m\left(\frac{v_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\quad \mathbf{(2-3-13)}$$

2.3 圆形波导

二、圆波导中的场

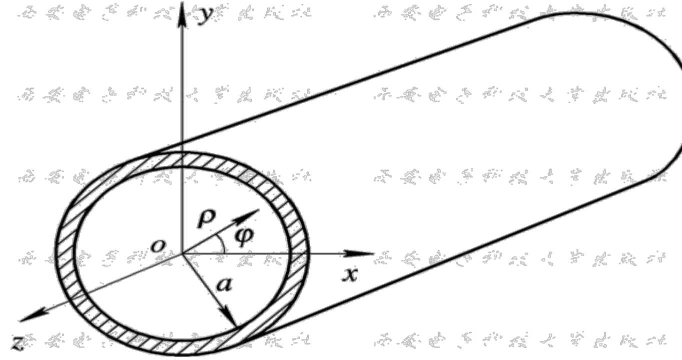


图2-6 圆波导及其坐标系

③理想导体条件 $E_t(\rho=a)=0 \rightarrow E_\varphi, E_z\big|_{\rho=a}=0$

□**Case2: TM情况， $H_z=0$**

- 有不变性矩阵可求得其它场分量
- 圆波导中同样存在着无穷多种**TM**模, 不同的**m**和**n**代表不同的模式, 记作$\mathbf{TM_{mn}}$
- **m**表示场沿圆周分布的整波数, **n**表示场沿半径分布的最大值个数
- 波阻抗为

$$Z_{TM_{mn}}=\frac{E_\varphi}{H_\rho}=\frac{\beta_{TM_{mn}}}{\omega\varepsilon}$$

$$\text{式中}\ \beta_{TM_{mn}}=\sqrt{k^2-\left(\frac{v_{mn}}{a}\right)^2}$$

$$\begin{cases}
E_\rho=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-j\beta a}{\upsilon_{mn}}E_{mn}J'_m\left(\dfrac{\upsilon_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
E_\varphi=\pm\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{j\beta m a^2}{\upsilon^2_{mn}\rho}E_{mn}J_m\left(\dfrac{\upsilon_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
E_z=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_{mn}J_m\left(\dfrac{\upsilon_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
H_\rho=\mp\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{j\omega\varepsilon m a^2}{\upsilon^2_{mn}\rho}E_{mn}J_m\left(\dfrac{\upsilon_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
H_\varphi=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-j\omega\varepsilon a}{\upsilon_{mn}}E_{mn}J'_m\left(\dfrac{\upsilon_{mn}}{a}\rho\right)\begin{pmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}e^{-j\beta z}\\
H_z=0
\end{cases}$$

2.3 圆形波导(Circular Waveguide)

小结：

■圆波导有其自身的特点和应用优势：几何对称性、加工方面误差小、衰减小及大功率；

■圆波导的一般解：圆柱坐标、纵向分量法；

■贝塞尔函数的一般特性：函数值、振荡特性、渐进式、导数及递推公式；

■圆波导的边界条件：有限条件、周期条件、理想导体边界条件。