一 平面简谐波的波函数

介质中任一质点（坐标为 x）相对其平衡位置的位移（坐标为 y）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数.

$$y = y(x,t)$$

各质点相对平衡位置的位移

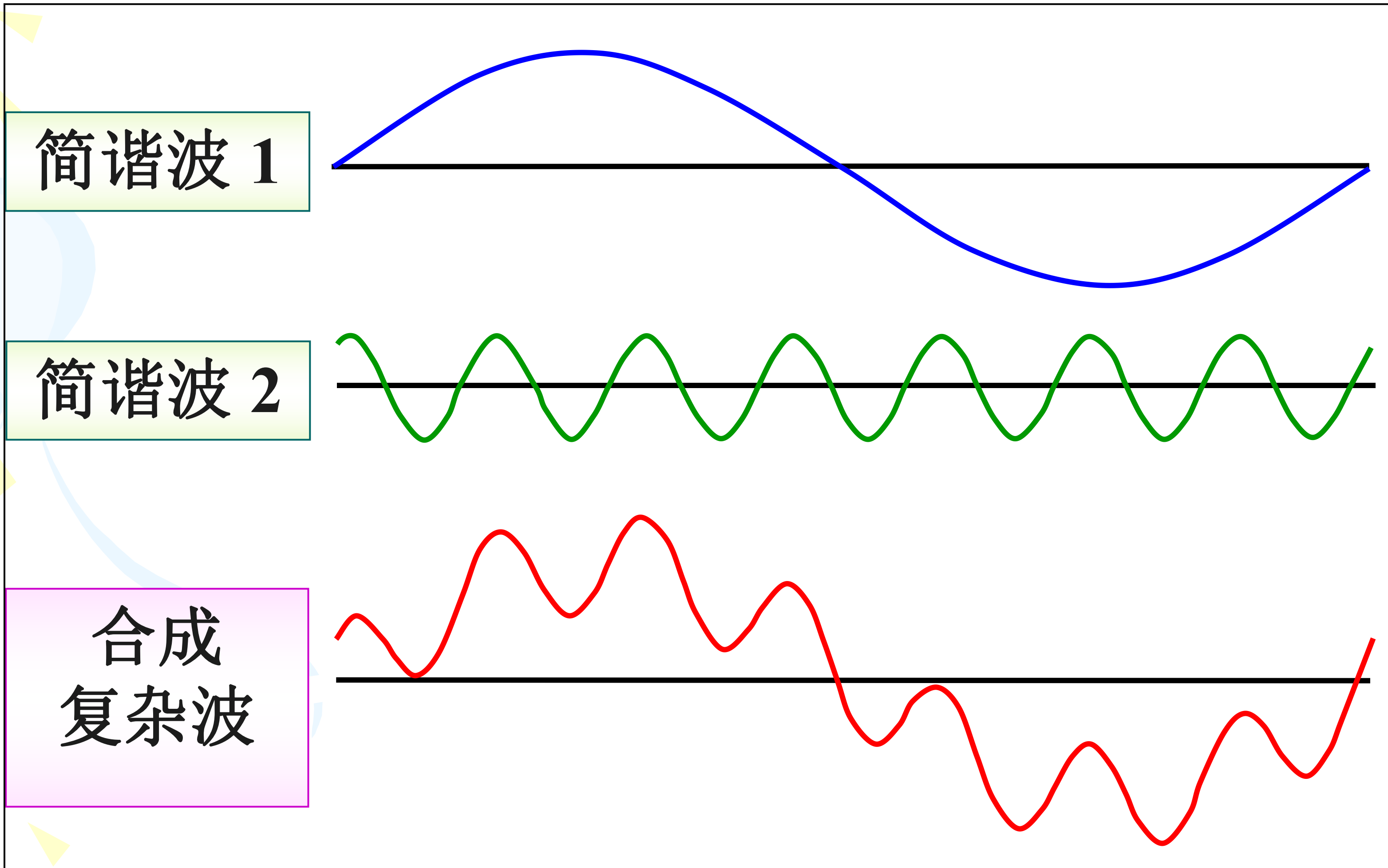
波线上各质点平衡位置

➢ 简谐波：在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波.

➢ 平面简谐波：波面为平面的简谐波.

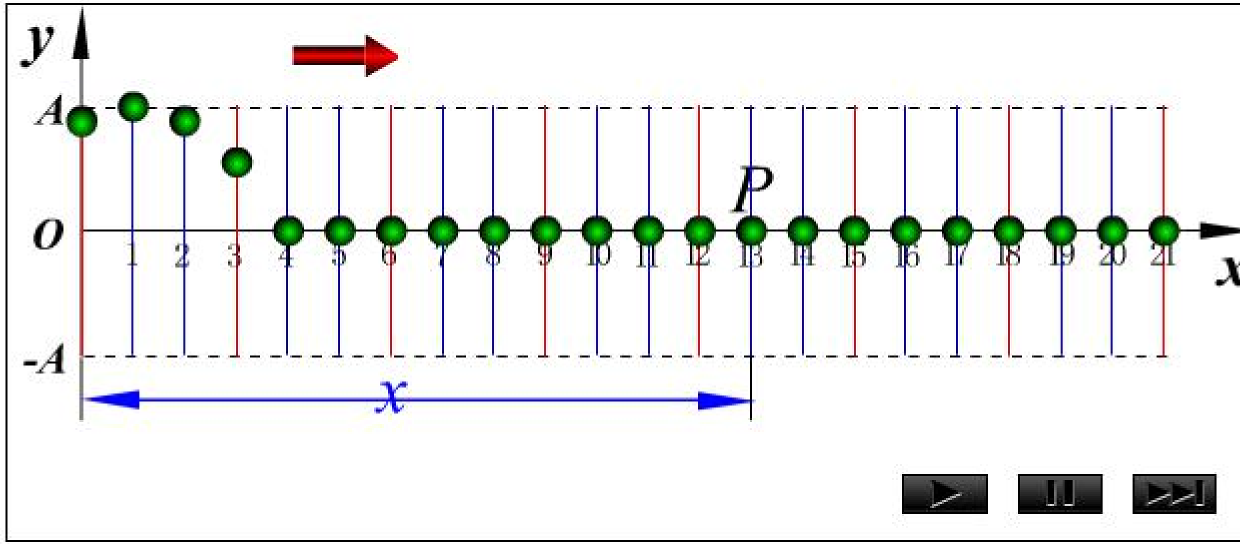
各种不同的简谐波 $\xrightarrow{\text{合成}}$ 复杂波

复杂波 $\xrightarrow{\text{分解}}$ 各种不同的简谐波



以速度 u 沿 x 轴正向传播的平面简谐波．令原点 O 的初相为零，其振动方程

$$y_O = A\cos\omega t$$



时间推迟方法

点 O 的振动状态 $y_O = A\cos\omega t$

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

点 P

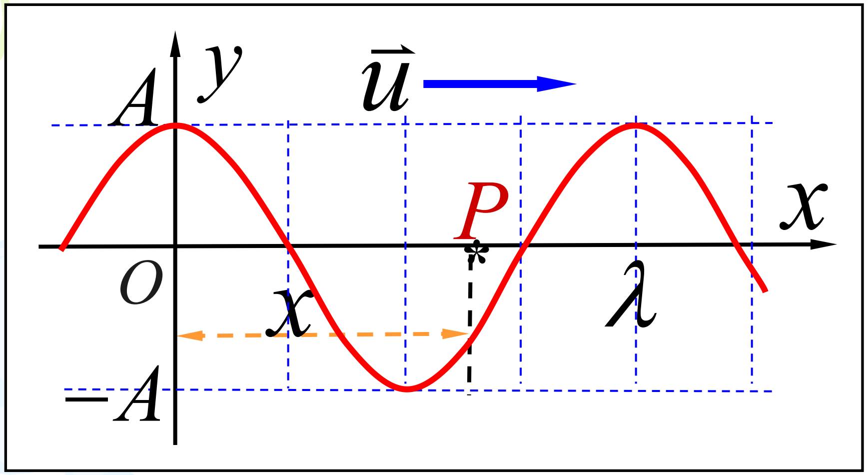
$t\text{-}x/u$ 时刻点 O 的运动 $=$ t 时刻点 P 的运动

点 P 振动方程

$$y_P = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

➢ **波函数**

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$



点 O 振动方程

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$x = 0\,,\varphi = 0$$

相位落后法

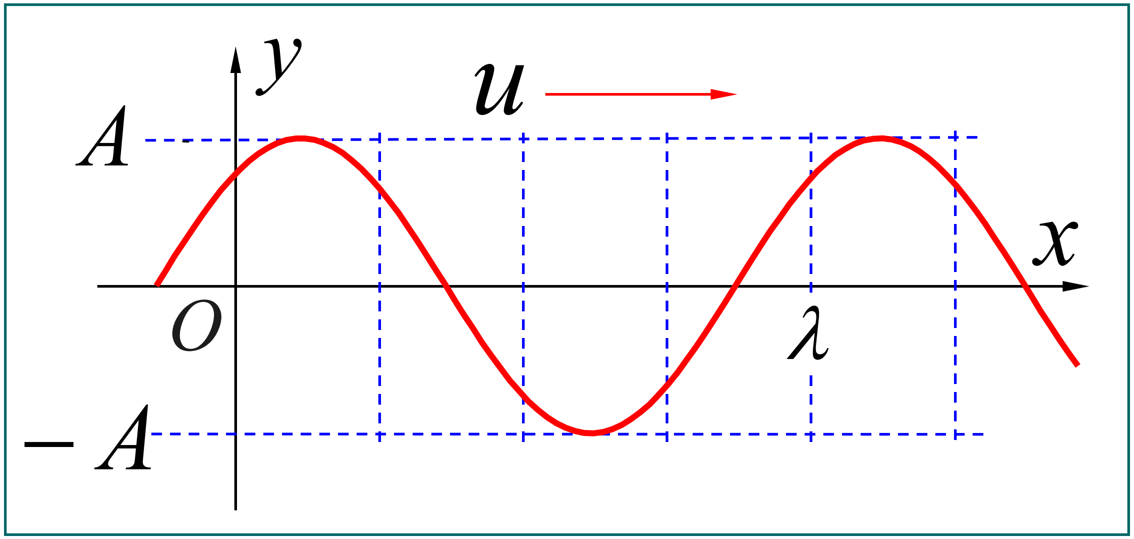
点 P 比点 O 落后的相位 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_O = -2\pi\frac{x}{\lambda}$

$$\varphi_p = -2\pi\frac{x}{\lambda} = -2\pi\frac{x}{Tu} = -\omega\frac{x}{u}$$

点 P 振动方程 $$y_p = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

如果原点的初相位不为零

$$x = 0, \varphi \neq 0$$



点 O 振动方程 $y_O = A\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$ u 沿 x 轴正向

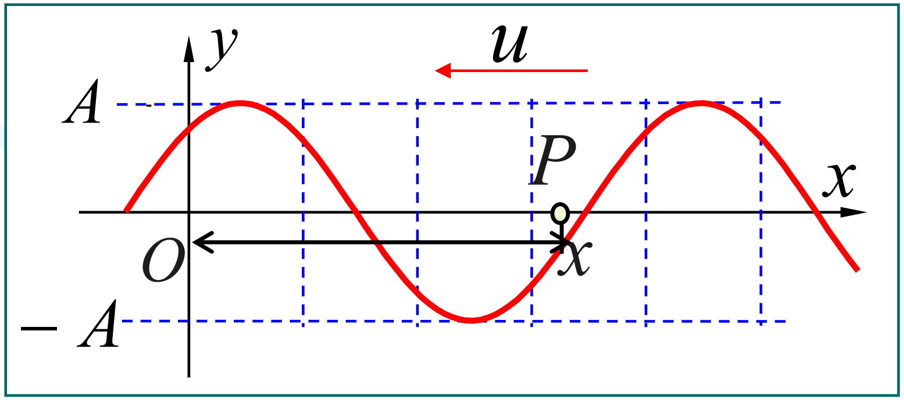
$$y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi]$$ u 沿 x 轴负向

沿 -x 轴方向传播的波动方程

如图，设 O 点振动方程为

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$$

P 点振动比 O 点超前了 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$



故 P 点的振动方程（波动方程）为：

$$y = y_O(t+\Delta t) = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$ u 沿 x 轴正向

$$y = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$ u 沿 x 轴负向

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

- 波动方程的其它形式

$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi)$$

角波数 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

- 质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

在波的传播方向上，已知任一点x_0的振动方程

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

则波动方程为

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x - x_0}{u}) + \varphi]$$

-表示波沿ox轴正向传播

+表示波沿ox轴负向传播

$$y = A\cos[\omega(t \pm \frac{x - x_0}{u}) + \varphi]$$

讨 论

1）给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$y=-A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$ （向 x 轴正向传播，$\varphi=\pi$）

$$y=-A\cos\omega\left(-t-\frac{x}{u}\right)$$ （向 x 轴负向传播，$\varphi=\pi$）

2）平面简谐波的波函数为 $y=A\cos(Bt-Cx)$ 式中 A, B, C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

$$y=A\cos(Bt-Cx) \qquad y=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{C}} \qquad T=\frac{2\pi}{B} \qquad \boxed{u=\frac{\lambda}{T}=\frac{B}{C}} \qquad \boxed{\Delta\varphi=2\pi\frac{d}{\lambda}=dC}$$

二 波函数的物理意义

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

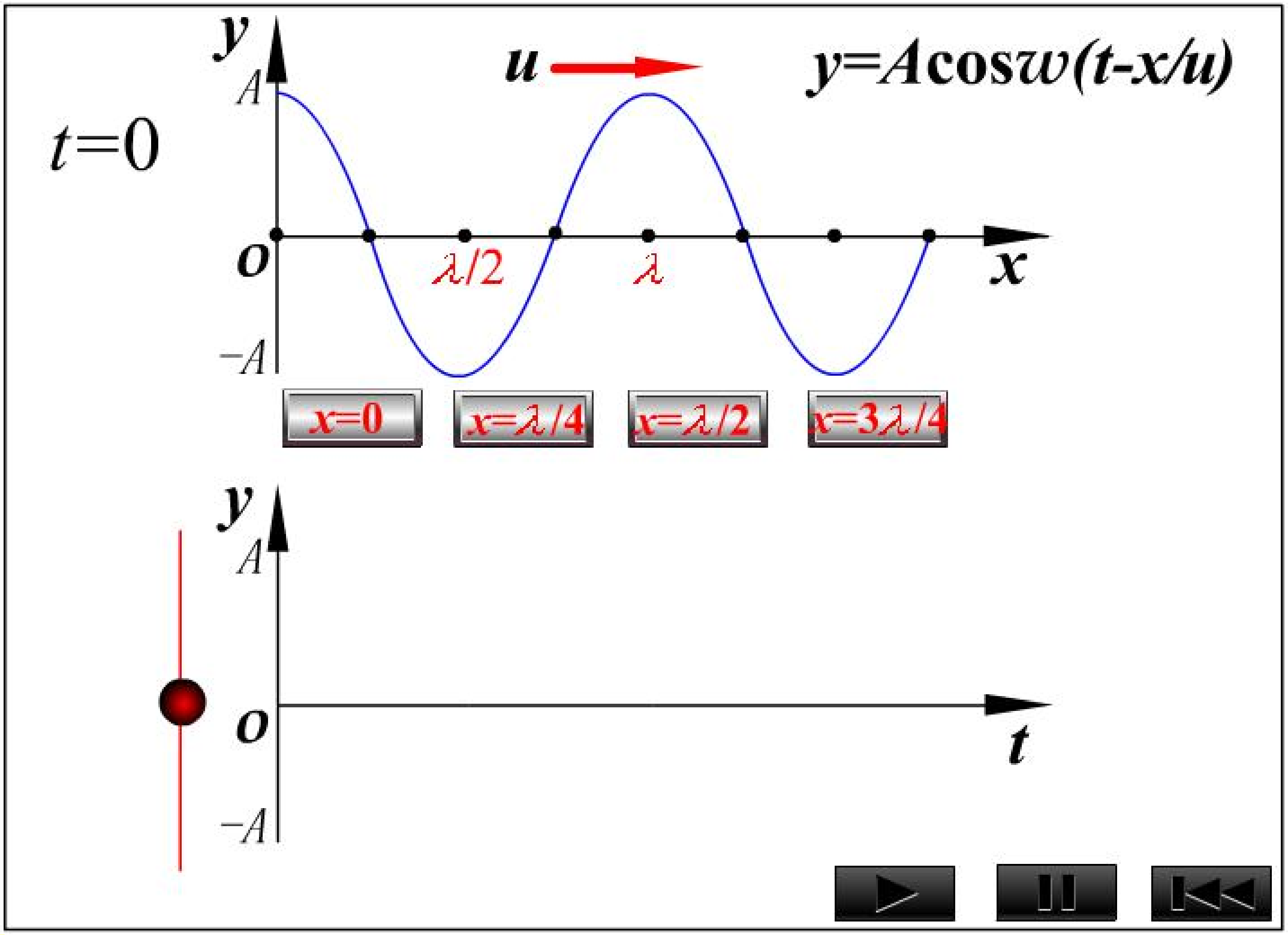
1 当 x 固定时，波函数表示该点的简谐运动方程，并给出该点与点 O 振动的相位差.

$$\Delta\varphi = -\omega\frac{x}{u} = -2\pi\frac{x}{\lambda}$$

$y(x,t) = y(x,t+T)$（波具有时间的周期性）

***T*是波在时间上的周期性的标志**

波线上各点的简谐运动图



$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

2 当 t 一定时，波函数表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移，即此刻的波形.

$y(x,t) = y(x+\lambda,t)$（波具有空间的周期性）

$$\varphi_1 = \omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi = 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi$$

$$\varphi_2 = \omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi = 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda})+\varphi$$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1-\varphi_2 = 2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{\Delta x_{21}}{\lambda}$$

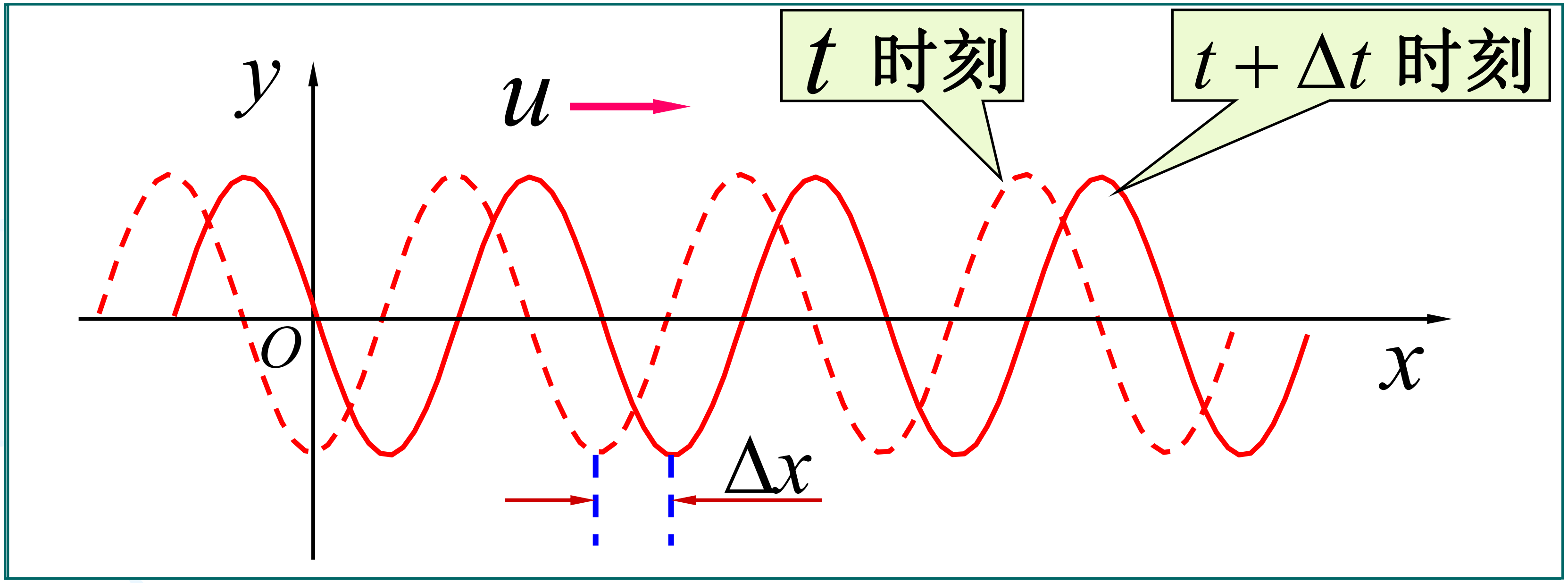
波程差

$$\Delta x_{21} = x_2 - x_1$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$$

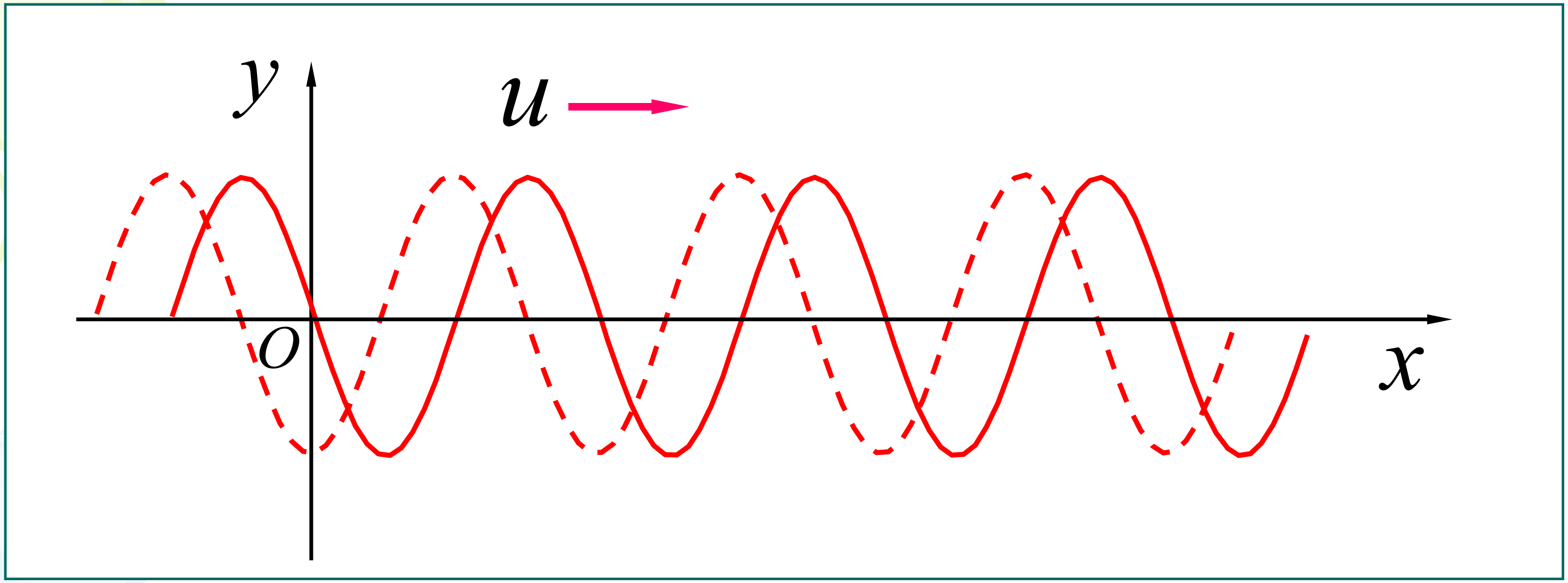
λ是波在空间上的周期性的标志

3 若 x,t 均变化，波函数表示波形沿传播方向的运动情况（行波）.



$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \varphi(t,x) = \varphi(t+\Delta t, x+\Delta x)$$

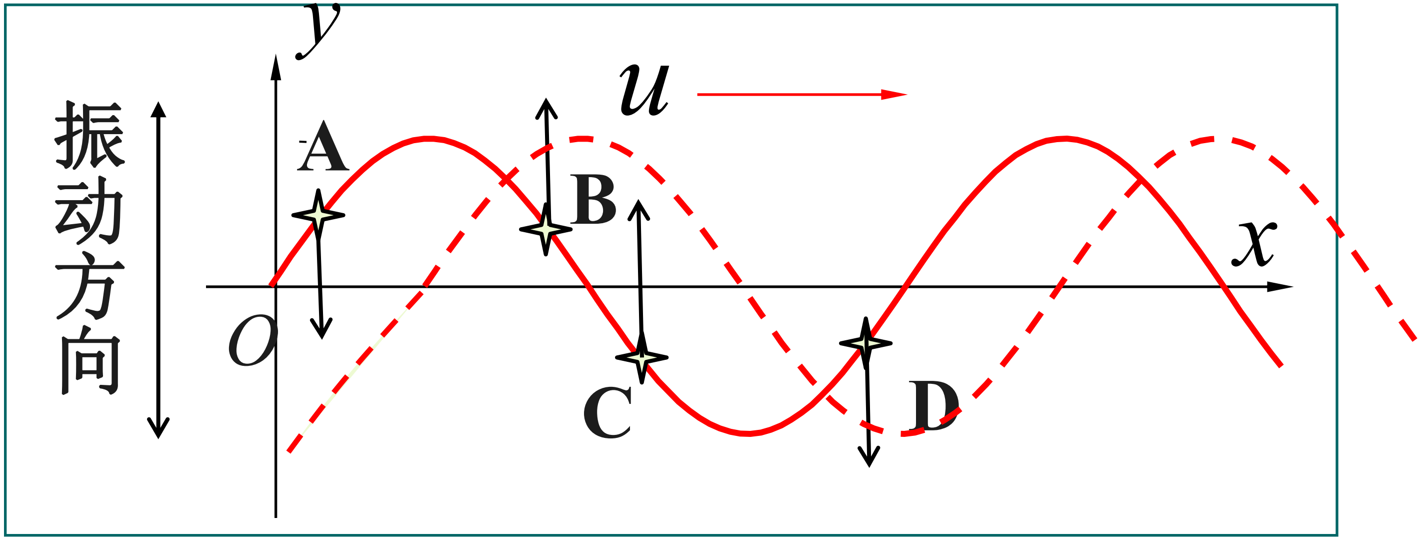
$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t+\Delta t}{T} - \frac{x+\Delta x}{\lambda}\right) \qquad \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta x}{\lambda} \qquad \Delta x = u\Delta t$$



对波动方程的各种形式，应着重从物理意义上去理解和把握.

从实质上看：波动是振动的传播.

从形式上看：波动是波形的传播.



横波的波形及传播方向如图。画出点ABCD的运动方向。并画出经过1/4个周期后的波形曲线

讨 论

1）给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$y=-A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$ （向 x 轴正向传播，$\varphi=\pi$）

$$y=-A\cos\omega\left(-t-\frac{x}{u}\right)$$ （向 x 轴负向传播，$\varphi=\pi$）

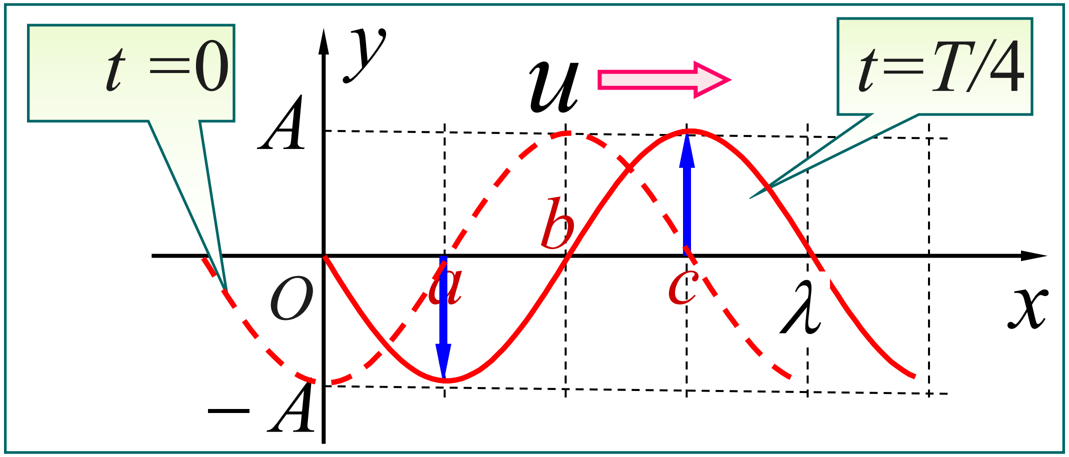
2）平面简谐波的波函数为 $y=A\cos(Bt-Cx)$ 式中 A,B,C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

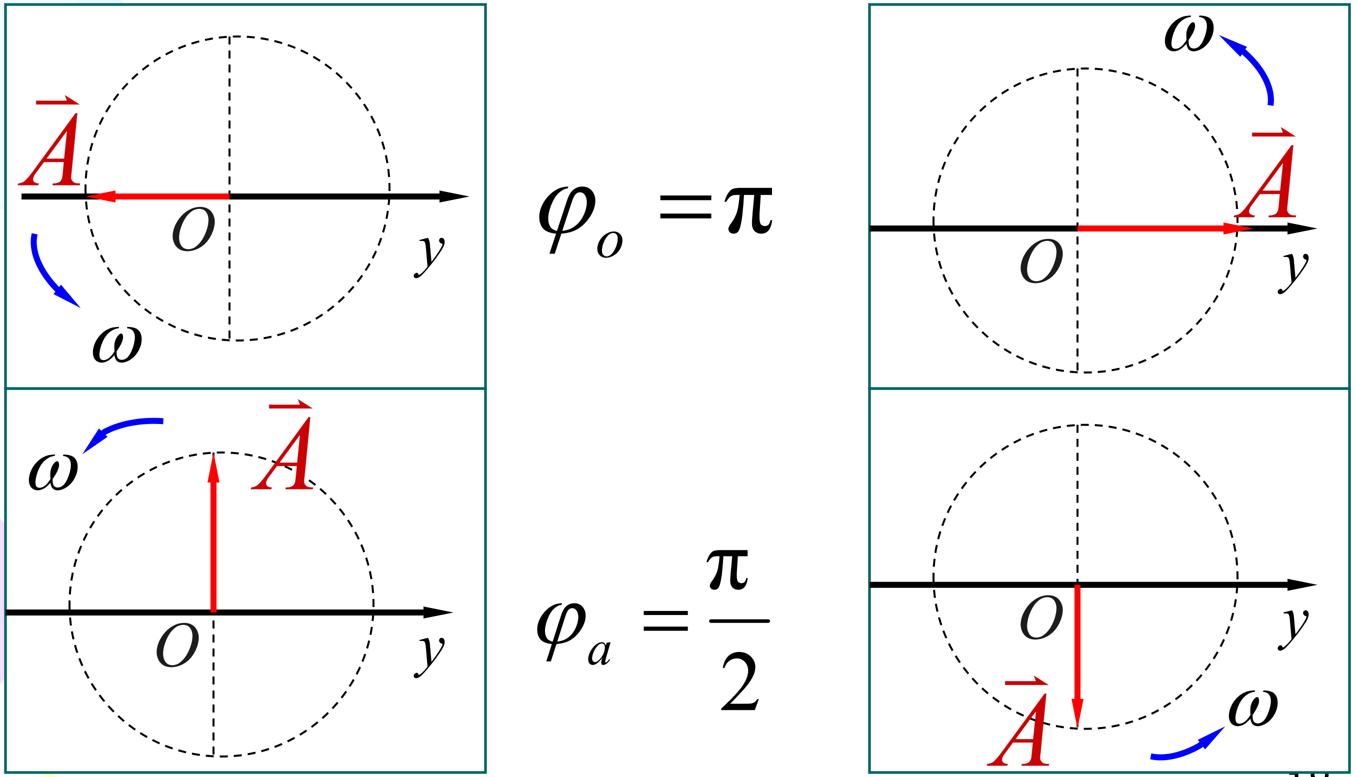
$$y=A\cos(Bt-Cx) \qquad y=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{C}} \qquad T=\frac{2\pi}{B} \qquad \boxed{u=\frac{\lambda}{T}=\frac{B}{C}} \qquad \boxed{\Delta\varphi=2\pi\frac{d}{\lambda}=dC}$$

3）讨论：如图简谐波以余弦函数表示，求 O、a、b、c 各点振动初相位.

$\varphi(-\pi \sim \pi)$





$$\varphi_o = \pi \qquad \varphi_b = 0$$

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

例 一平面机械波沿 x 轴负方向传播，已知 $x=-1\mathrm{m}$ 处质点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$，若波速为 u 求此波的波函数.

解： 波函数 $y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi']$

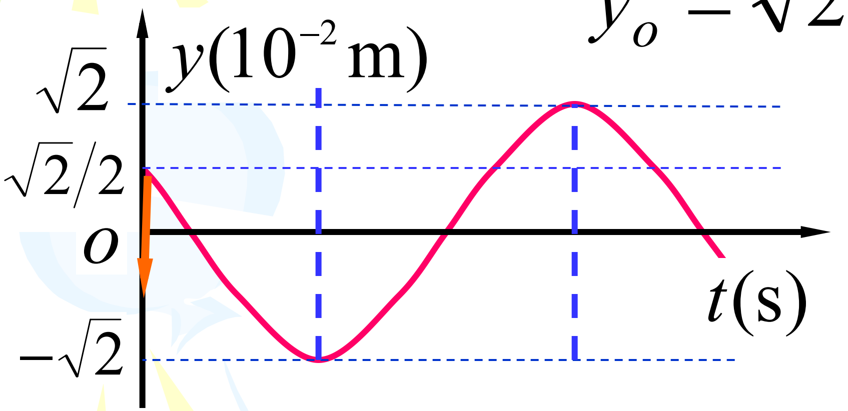
$$\because x=-1\mathrm{m} \quad y=A\cos(\omega t+\varphi)$$

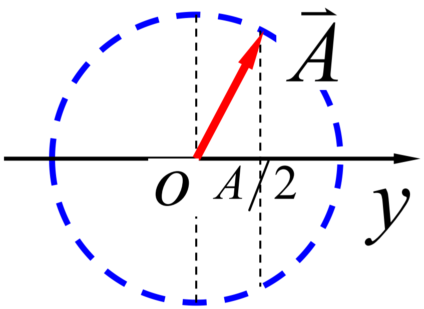
$$\omega(t-\frac{1}{u})+\varphi'=\omega t+\varphi \qquad \varphi'=\varphi+\frac{\omega}{u}$$

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\frac{\omega}{u}+\varphi]$$

例一简谐波沿 ox 轴正向传播，$\lambda = 4\text{m}, T = 4\text{s}$ 已知 $x=0$ 点振动曲线如图，求 1） $x=0$ 点振动方程、2）波函数。

$$y_o = \sqrt{2}\times 10^{-2}\cos(2\pi\frac{t}{4}+\varphi)\text{m}$$





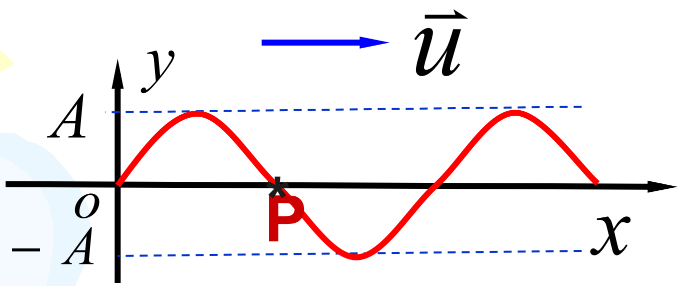
$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{t=0, x=0 \quad y = A/2 \quad v \prec 0}$$

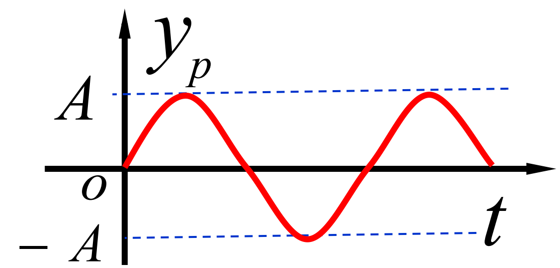
波函数

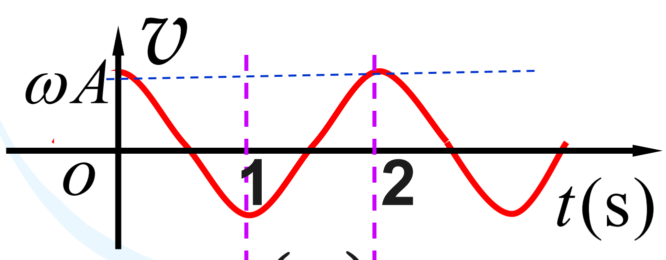
$$y = \sqrt{2}\times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{4}-\frac{x}{4})+\frac{\pi}{3}]\text{m}$$

例 如图一向右传播的简谐波在 $t=0$ 时刻的波形，已知周期为 2 s ，则 P 点处质点的振动速度与时间的关系曲线为：

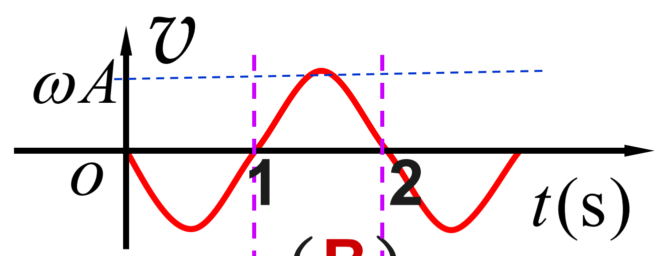


P 点振动图

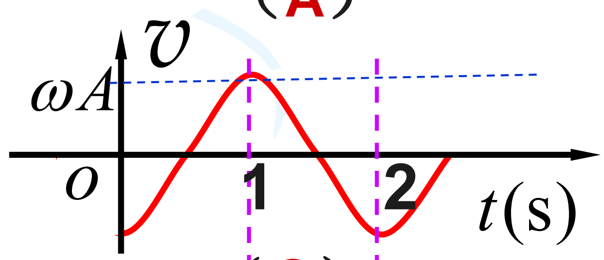




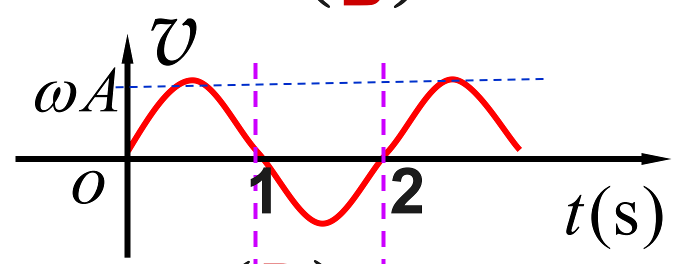
（A）



（B）



（C）



（D）

例　已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\mathrm{cm})\cos\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x].$$

解：方法一（比较系数法）.

$$\boxed{y=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

把题中波动方程改写成

$$y=(5\mathrm{cm})\cos 2\pi\left[\left(\frac{2.50}{2}\mathrm{s}^{-1}\right)t-\left(\frac{0.01}{2}\mathrm{cm}^{-1}\right)x\right]$$

比较得

$$T=\frac{2}{2.5}\mathrm{s}=0.8\,\mathrm{s}\quad \lambda=\frac{2\mathrm{cm}}{0.01}=200\,\mathrm{cm}\quad u=\frac{\lambda}{T}=250\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

例　已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x].$$

解：方法二（由各物理量的定义解之）.

波长是指同一时刻 t ，波线上相位差为 2π 的两点间的距离.

$$\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x_1]-\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x_2]=2\pi$$

$$\boxed{\lambda=x_2-x_1=200\,\text{cm}}$$

周期为相位传播一个波长所需的时间

$$\pi[(2.50\text{s}^{-1})t_1-(0.01\text{cm}^{-1})x_1]=\pi[(2.50\text{s}^{-1})t_2-(0.01\text{cm}^{-1})x_2]$$

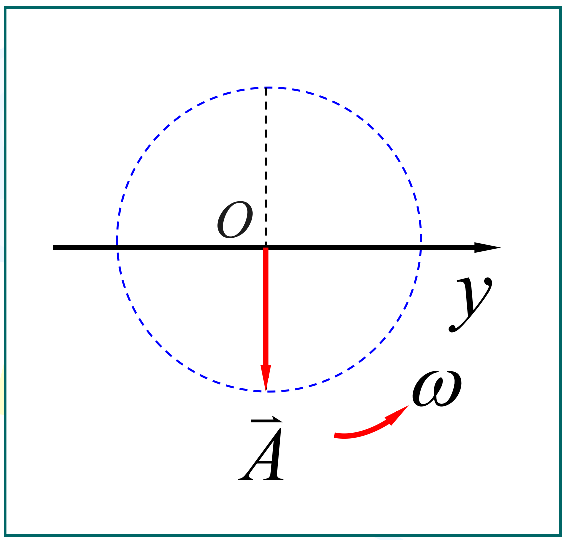
$$x_2-x_1=\lambda=200\,\text{cm}$$

$$T=t_2-t_1=0.8\,\text{s}$$

$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=250\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

例2 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0\mathrm{m}$，$T=2.0\mathrm{s}$，$\lambda=2.0\mathrm{m}$．在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动．求

1） 波动方程



解 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi}]$$

$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0, v=\frac{\partial y}{\partial t}>0$$

$$\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

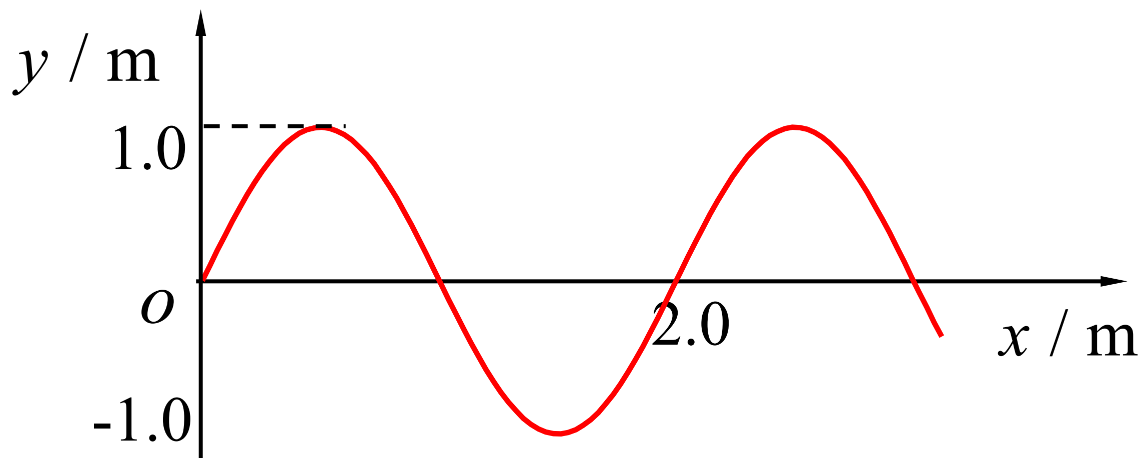
2） 求$t=1.0\mathrm{s}$ 波形图.

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\mathrm{s}}-\frac{x}{2.0\mathrm{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

$t=1.0\mathrm{s}$ 波形方程

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[\frac{\pi}{2}-(\pi\,\mathrm{m}^{-1})x]$$

$$=(1.0\mathrm{m})\sin(\pi\,\mathrm{m}^{-1})x$$



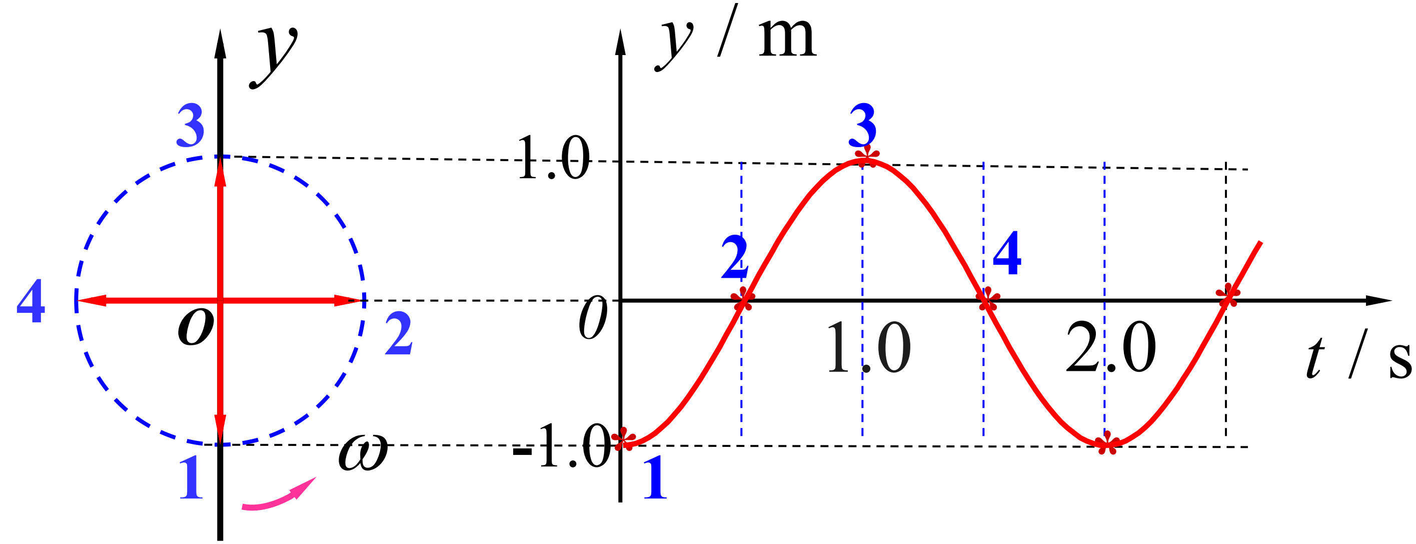
$t=1.0$ s 时刻波形图

3） $x=0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动规律并做图 .

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\mathrm{s}}-\frac{x}{2.0\mathrm{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

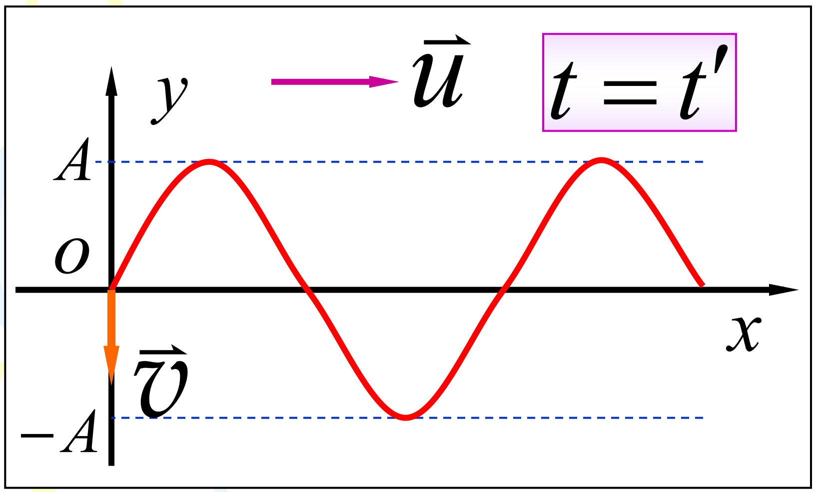
$x=0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动方程

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[(\pi\,\mathrm{s}^{-1})t-\pi]$$



$x=0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动曲线

例 一简谐波沿 Ox 轴正向传播，已知振幅、频率和速度分别为 A,ν,u，设 $t=t'$ 时的波形曲线如图，**求 1）**$x=0$ 处质点振动方程；**2）**该波的波函数.



解： $y_o = A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$

$$t=t',x=0\quad y=0\quad v<0$$

$$2\pi\nu t'+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

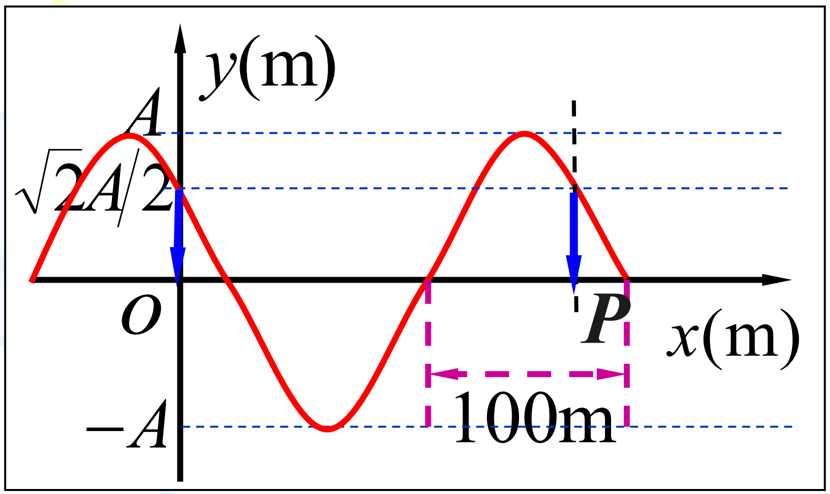
$$\varphi=\frac{\pi}{2}-2\pi\nu t'\qquad y_o=A\cos[2\pi\nu(t-t')+\frac{\pi}{2}]$$

波函数

$$y=A\cos[2\pi\nu(t-t'-\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$$

例 一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形如图，设频率 $\nu=250\,\mathrm{Hz}$，且此时 **P** 点的运动方向向下，

求 1）该波的波函数;



解： $\nu=250\,\mathrm{Hz}$

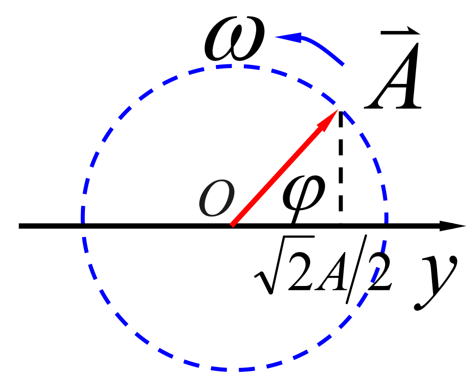
$\lambda=200\ \mathrm{m}$

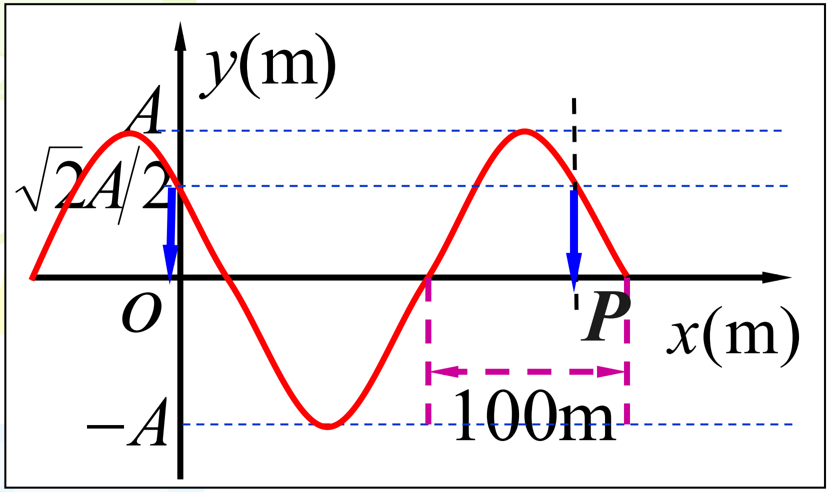
$\because v_p<0$

$\therefore$ 波向x 轴负向传播

$$y=A\cos[2\pi(250t+\frac{x}{200})+\varphi]$$

$\because t=0, x=0\quad y=\dfrac{\sqrt{2}A}{2}\quad v<0$　　$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{4}$





2）求在距原点 **O** 为100m处质点的振动方程与振动速度表达式.

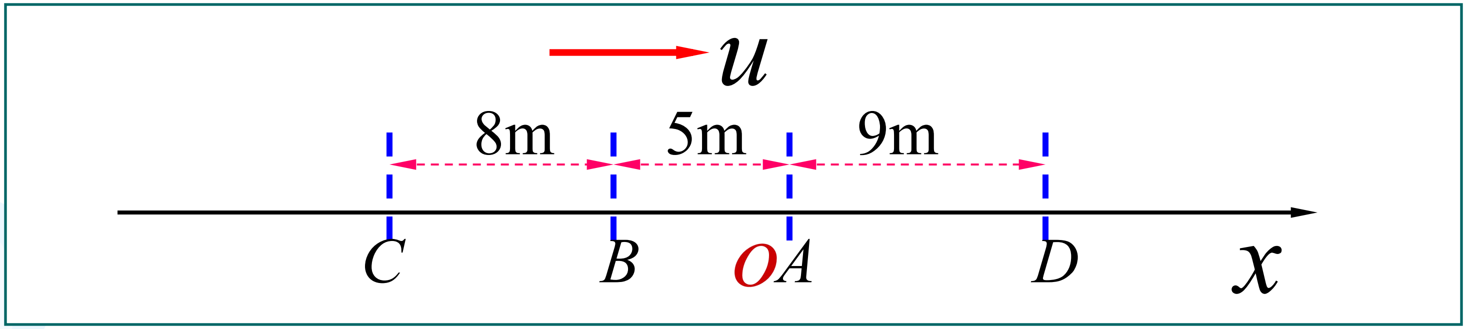
$$\nu = 250\,\mathrm{Hz} \quad \lambda = 200\ \mathrm{m}$$

$$y = A\cos[2\pi(250t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{4}]$$

$$x = 100\ \mathrm{m}\,,\ y = A\cos(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -500\,\pi A\sin(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

例　一平面简谐波以速度 $u=20\mathrm{m/s}$ 沿直线传播,波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos(4\pi\mathrm{s}^{-1})t$.



1）以 A 为坐标原点，写出波动方程

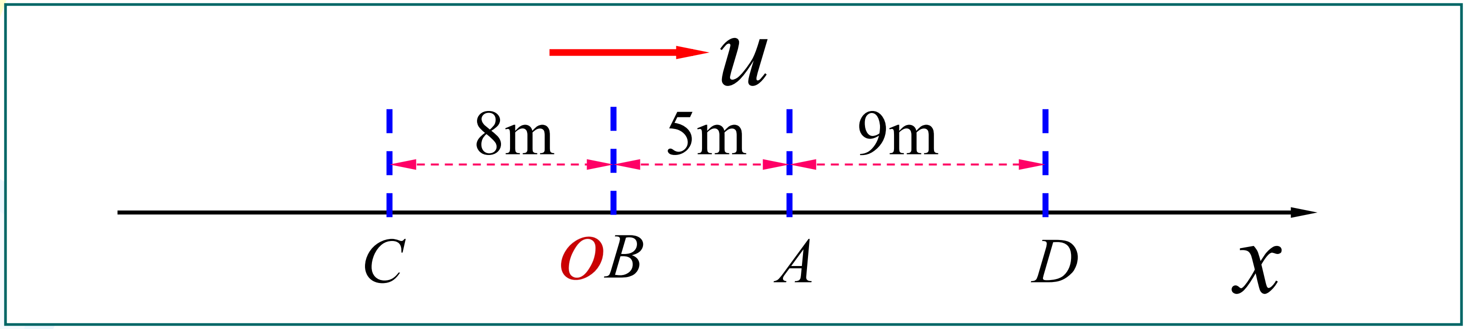
$$A=3\times10^{-2}\mathrm{m}\quad T=0.5\mathrm{s}\quad \varphi=0\quad \lambda=uT=10\mathrm{m}$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos 2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}}-\frac{x}{10\mathrm{m}})$$

2） 以 B 为坐标原点，写出波动方程

$$y_A = (3\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi\frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi\frac{-5}{10} = \pi$$

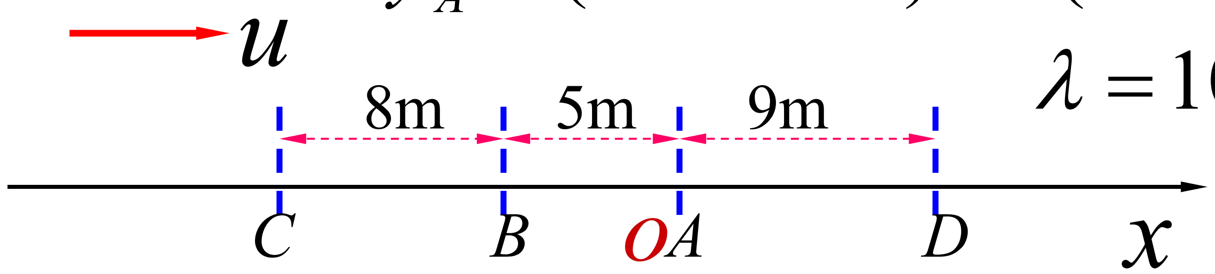
$$\varphi_B = \pi \qquad y_B = (3\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + \pi]$$

$$y = (3\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}} - \frac{x}{10\mathrm{m}}) + \pi]$$

3）写出传播方向上点C、点D 的简谐运动方程

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

$$\lambda = 10\,\mathrm{m}$$



点 C 的相位比点 A 超前

$$y_C = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + 2\pi\frac{AC}{\lambda}]$$

$$= (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + \frac{13}{5}\pi]$$

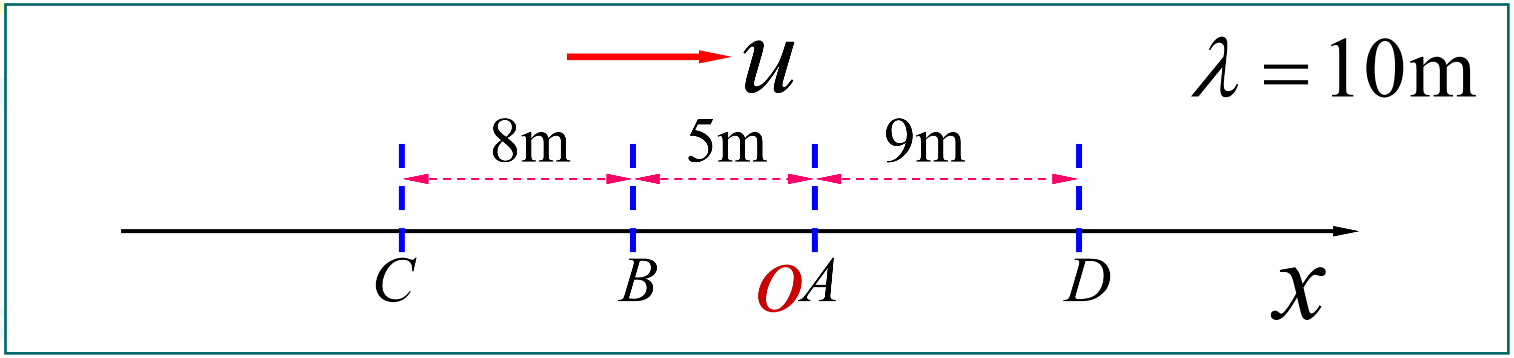
点 D 的相位落后于点 A

$$y_C = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t - 2\pi\frac{AD}{\lambda}]$$

$$= (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t - \frac{9}{5}\pi]$$

4）分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

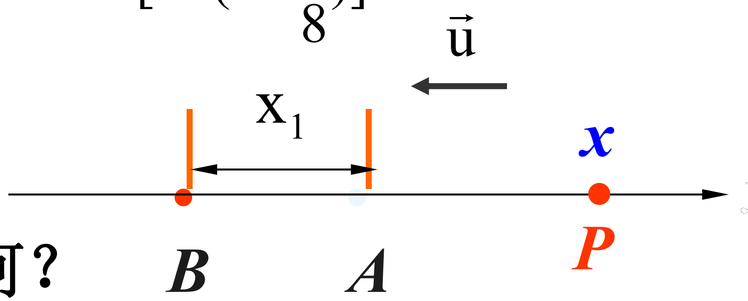


$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

练习 已知*A* 点的振动方程为：$y_A = A\cos[4\pi(t - \frac{1}{8})]$

以 *B* 为原点。



求 (1) 波函数；

(2) 若 *u* 沿 *x* 轴负向，情况又如何？

解 (1)在 *x* 轴上任取一点*P*，该点比 *A* 点的相位落后

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega\frac{x - x_1}{u}$$

P 点 *t* 时刻的相位为

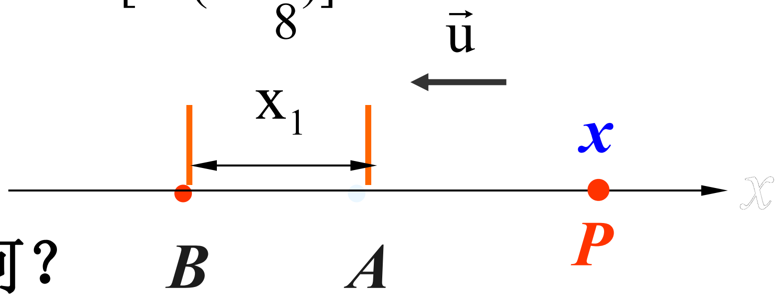
$$4\pi(t - \frac{1}{8}) - \Delta\varphi = 4\pi(t - \frac{1}{8} - \frac{x - x_1}{u})$$

P 点振动方程亦即波函数为

$$y(x, t) = A\cos 4\pi[t - \frac{x}{u} + (\frac{x_1}{u} - \frac{1}{8})]$$

练习 已知*A* 点的振动方程为：$y_A = A\cos[4\pi(t-\frac{1}{8})]$

以 *B* 为原点。



求 (1) 波函数；

(2) 若 *u* 沿 *x* 轴负向，情况又如何？

解 (2)在 *x* 轴上任取一点*P*，该点比 *A* 点的相位超前

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega\frac{x - x_1}{u}$$

P 点 *t* 时刻的相位为

$$4\pi(t-\frac{1}{8}) + \Delta\varphi = 4\pi(t-\frac{1}{8}+\frac{x-x_1}{u})$$

P 点振动方程亦即波函数为

$$y(x,t) = A\cos 4\pi[t+\frac{x}{u}+(\frac{x_1}{u}-\frac{1}{8})]$$

可见：求解平面简谐波的波函数，关键是确定振动方程已知的一点与任一点 *P* 的相位关系。

练习

一平面简谐横波以u=400m/s的波速在均匀介质中沿x轴正向传播，位于坐标原点的质点的振动周期为0.01s，振幅为0.1m，取原点处质点经过平衡位置且正向运动时作为计时起点。（1）写出波动方程；（2）写出距原点为2m处的质点P的振动方程；（3）画出t=0.005s和0.0075s时的波形图；（4）若以距原点2m处为坐标原点，写出波动方程

解（1）根据初始条件，坐标原点O处的质点的振动初始条件为：t=0，y_0=0，v_0>0。设原点O处的振动方程为 $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 。将初始条件代入，可求出原点处质点φ_0=3/2π，原点的振动方程为 $y_0 = 0.1\cos(200\pi t + \frac{3}{2}\pi)$

故可写出波动方程为

$$y = 0.1\cos[200\pi(t - \frac{x}{400}) + \frac{3}{2}\pi]$$

$$y = 0.1\cos[200\pi(t - \frac{x}{400}) + \frac{3}{2}\pi]$$

（2）写出距原点为2m处的质点P的振动方程；

P点x_P=2m，代入上面波动方程即可写出P质点的振动方程为

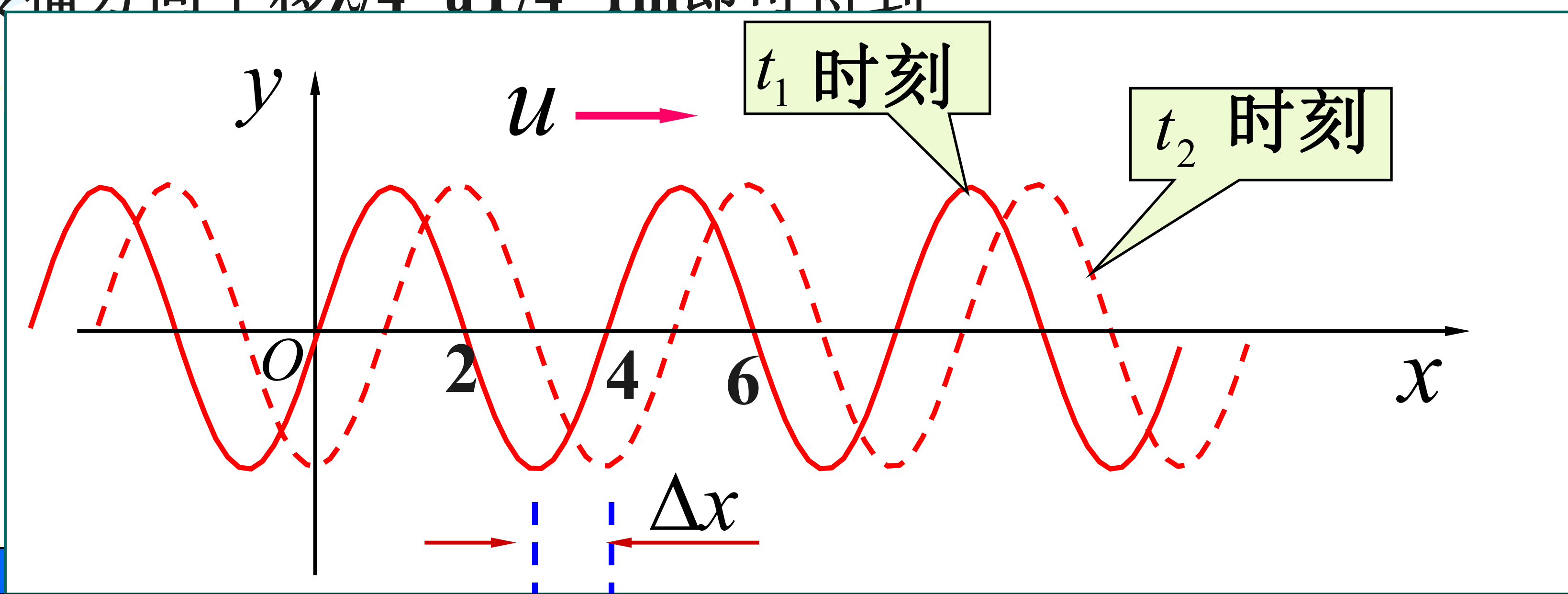
$$y = 0.1\cos[200\pi(t - \frac{2}{400}) + \frac{3}{2}\pi] = 0.1\cos(200\pi t + \frac{\pi}{2})$$

（3）画出t=0.005s和0.0075s时的波形图；

将t_1=0.005s代入波动方程，得此时刻的波形方程

$$y = 0.1\cos[200\pi(0.005 - \frac{x}{400}) + \frac{3}{2}\pi] = 0.1\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)$$

画出对应的波形曲线。因为T=0.01s，故从t_1=0.005s到t_2=0.0075s经历了Δt=0.0025s=T/4，故t_2时刻的波形图只需将t_1时刻的波形图沿着波的传播方向平移λ/4=uT/4=1m即可得到



（4）若以距原点2m处为坐标原点，写出波动方程

由（2）中结果可知，新坐标原点O’的振动方程为

$$y = 0.1\cos(200\pi t + \frac{\pi}{2})$$

所以新坐标下得波动方程为

$$y' = 0.1\cos[200\pi(t - \frac{x'}{400}) + \frac{\pi}{2}]$$

式中x’是波线上各点在新坐标下的位置坐标，

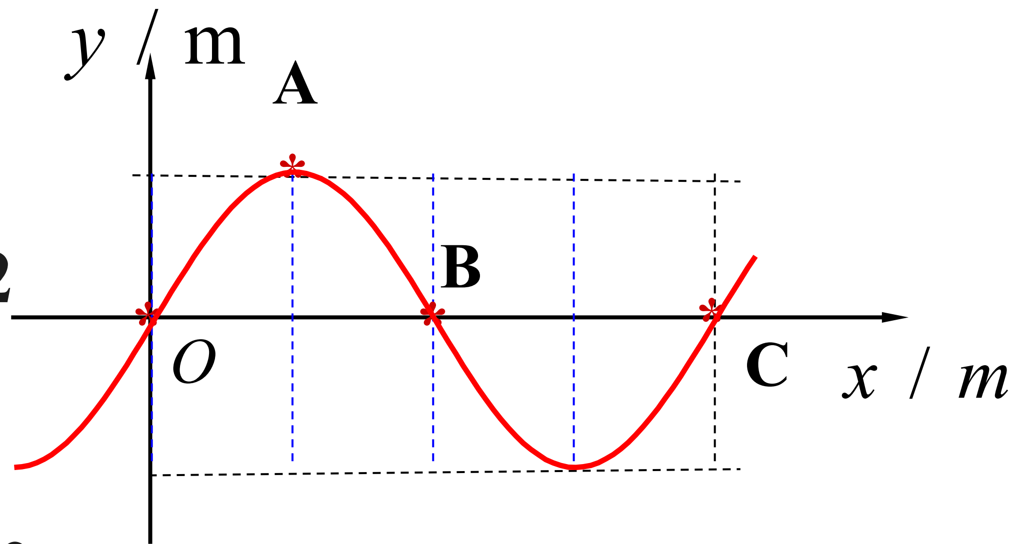
满足 $x' = x - 2$

4）图是沿x轴正向传播的平面余弦波在t时刻的波形曲线。（1）若波沿x轴正向传播，该时刻O，A，B，C各点的振动位相是多少？（2）若波沿x轴负向传播，上术各点的振动位相又是多少

沿x轴正向传播

O：$\varphi_O=\pi/2$ A：$\varphi_A=0$

B：$\varphi_B=-\pi/2$ C：$\varphi_C=-3\pi/2$



沿x轴负向传播

O：$\varphi_O=-\pi/2$ A：$\varphi_A=0$

B：$\varphi_B=\pi/2$ C：$\varphi_C=3\pi/2$

5） 振动和波动有什么区别和联系？平面简谐波动方程有什么不同？ 又有什么联系？振动曲线和波形曲线有什么不同？

解： (1)振动是指一个孤立的系统(也可是介质中的一个质元)在某固定平衡位置附近所做的往复运动，系统离开平衡位置的位移是时间的周期性函数，即可表示为 $y=f(t)$

波动是振动在连续介质中的传播过程，此时介质中所有质元都在各自的平衡位置附近作振动，因此介质中任一质元离开平衡位置的位移既是坐标位置，又是时间的函数，即 $y=f(x,t)$

(2)当谐波方程 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ 中的坐标位置给定后，即可得到该点的振动方程，而波源持续不断地振动又是产生波动的必要条件之一.

（3）振动曲线 $y=f(t)$ 描述的是一个质点的位移随时间变化的规律，因此，其纵轴为y，横轴为 t；波动曲线 $y=f(x,t)$ 描述的是介质中所有质元的位移随位置，随时间变化的规律，其纵轴为y，横轴为x．每一幅图只能给出某一时刻质元的位移随坐标位置 x变化的规律，即只能给出某一时刻的波形图，不同时刻的波动曲线就是不同时刻的波形图.

6）波动方程中，坐标轴原点是否一定要选在波源处？**t=0s**时刻是否一定是波源开始振动的时刻？波动方程改写成 $y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$ 时，波源一定在坐标原点处吗？在什么前提下波动方程才能写成这种形式？

解: 由于坐标原点和开始计时时刻的选全完取是一种主观行为，所以在波动方程中，坐标原点不一定要选在波源处，同样，$t = 0$ 的时刻也不一定是波源开始振动的时刻；当波动方程写成 $y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$ 时，坐标原点也不一定是选在波源所在处的．只要把振动方程为已知的点选为坐标原点，并且选择其在正向最大位移处为计时起点，即可得题示的波动方程．

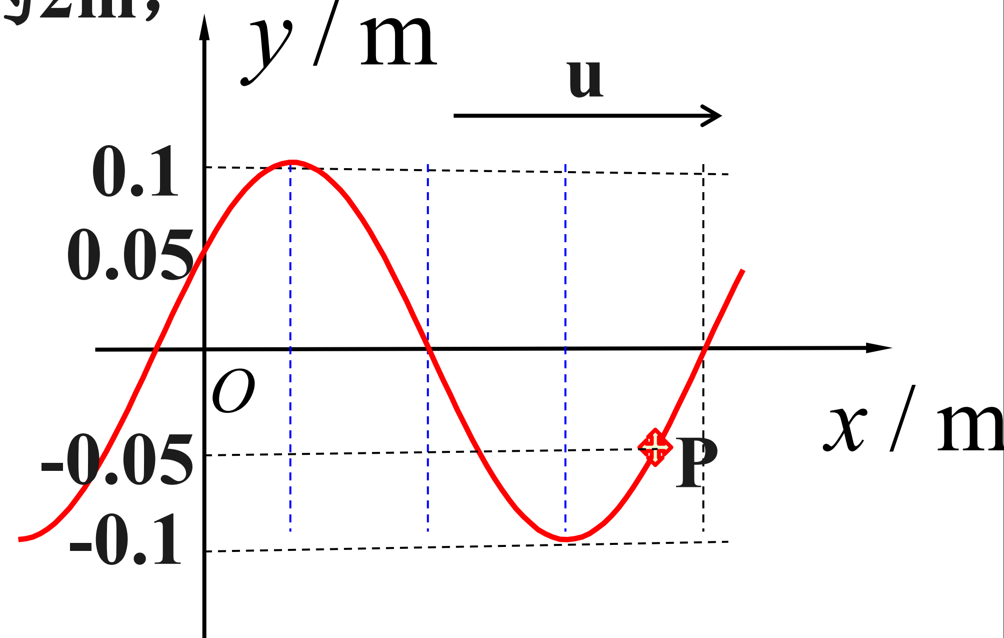
7）一列机械波沿x轴正向传播，t=0s时的波形如图，已知波速为10m/s，波长为2m，

求（1）波动方程

（2）P点的振动方程及振动曲线

（3）P点的坐标

（4）P点回到平衡位置所需的最短时间

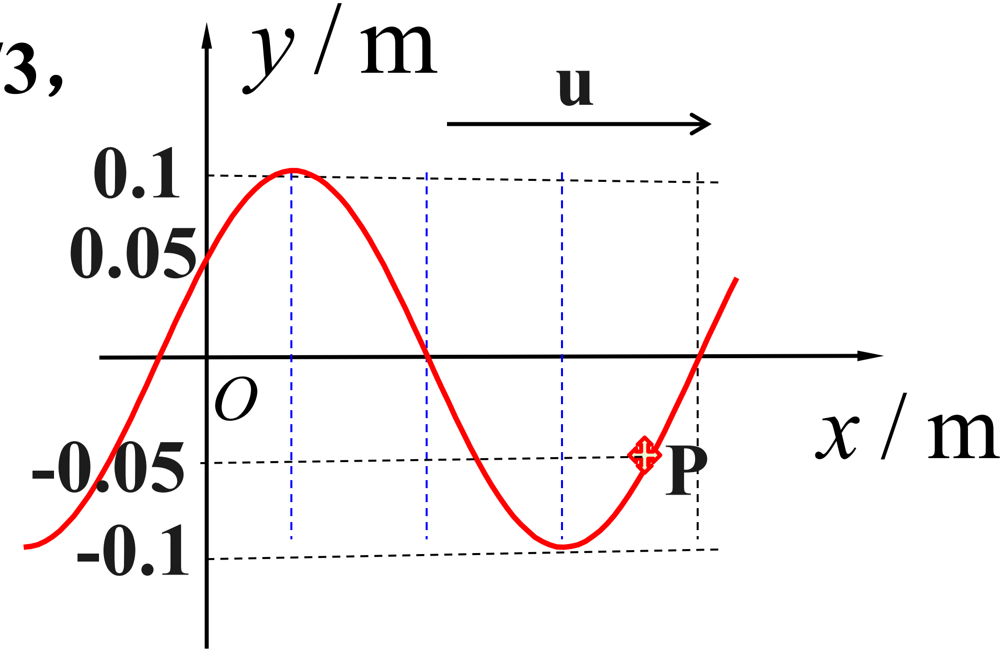


解：（1）A=0.1m，$\varphi_0=\pi/3$，u=10m/s，λ=2m，T=0.2s

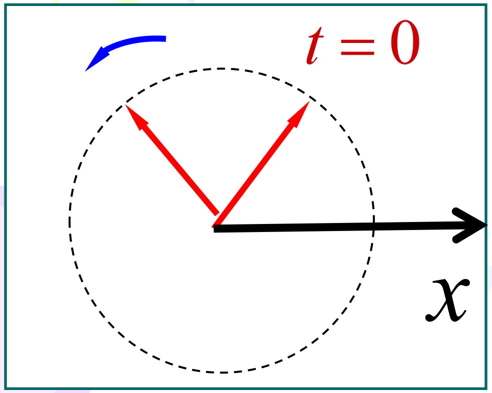
$\omega=10\pi$

波动方程为

$$y=0.1\cos[10\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]$$



（2）



t=0时，$y_p=-\frac{A}{2}$　$v_p<0$　$\therefore\varphi_p=-\frac{4\pi}{3}$

P点的位相落后于O点，故取位置

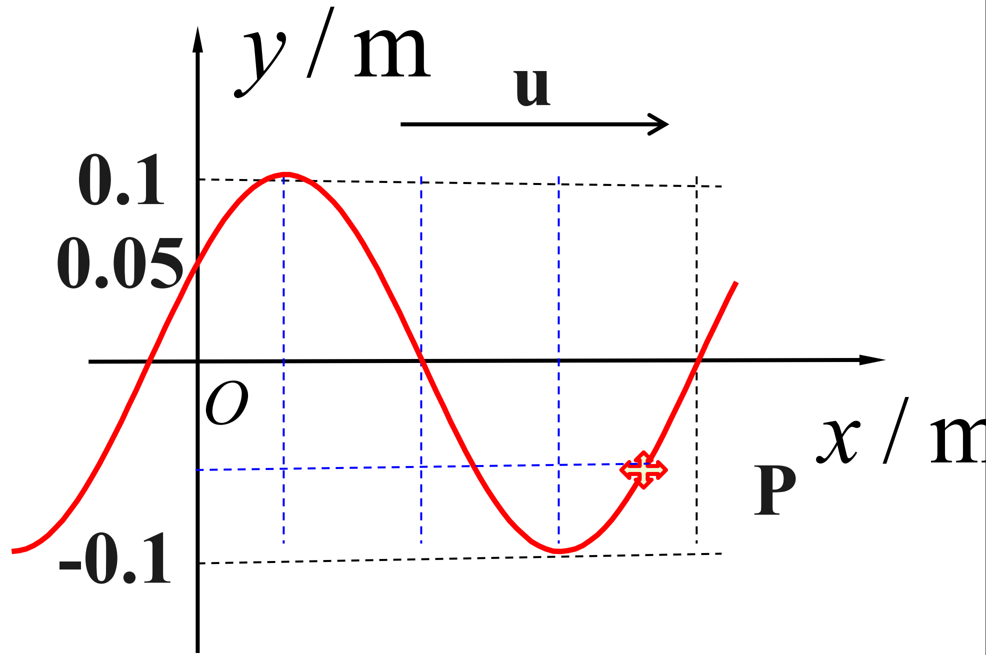
$$\therefore y_p=0.1\cos(10\pi t-\frac{4\pi}{3})$$

$10\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}|_{t=0}=-\frac{4}{3}\pi$

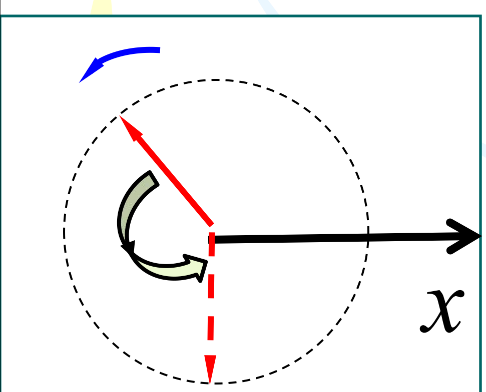
（3）P点的坐标

$$10\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}\Big|_{t=0}=-\frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x_p=\frac{5}{3}=1.67m$$



（4）P点回到平衡位置所需的最短时间

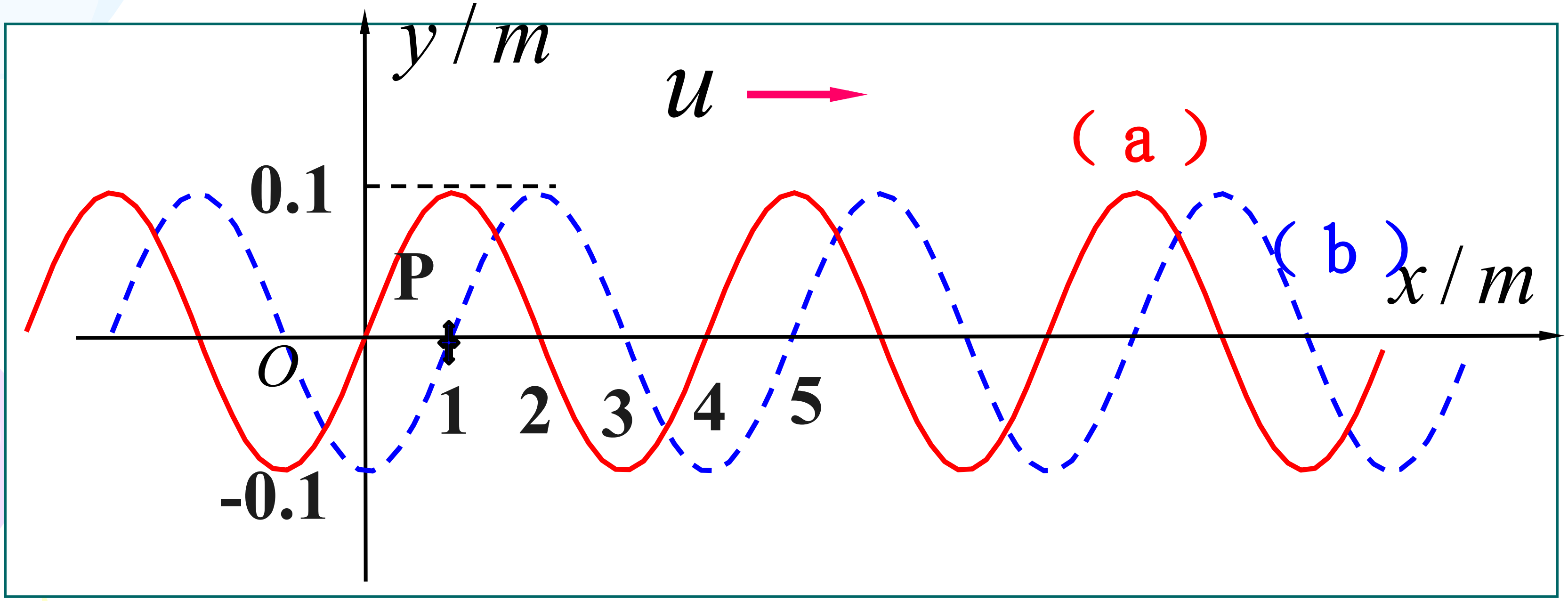


$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$$

所需最短时间　$\Delta t=\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}=\dfrac{5/6\pi}{10\pi}=\dfrac{1}{12}s$

8）已知t=0 s时和t=0.5 s时的波形曲线分别为图中曲线（a）和（b）(Δt<T)，波沿 x 轴正向传播，试根据图中绘出的条件求 （1）波动方程

（2）P 点的振动方程



（1）由图可知，A=0.1m, λ=4 m, 又，t=0, y_0=0, v_0<0

$$\therefore \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad 而 \quad u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{0.5} = 2m/s$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0.5Hz \qquad \therefore \omega = 2\pi\nu$$

所以波动方程为 $y = 0.1\cos[\pi(t - \frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2})]m$

（2）x_P=1m将代入上式，即得P点振动方程

$$y = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0.1\cos(\pi t)m$$

在介质中传播速度为u=200cm/s，波长λ为100cm的一列简谐波，某时刻的一部分曲线如图。已知图中P点的坐标为x_p=20cm，振动量ξ_p=4cm，振动速度v_p=12πcm/s，则可得波的振幅

A= 5cm

该时刻x=0的振动位相

φ_0= 0.19π