

第9周作业

Edited by Hu Chen

OUC

April 28, 2020

目录

1 预备知识

- 补充：二阶常系数线性常微分方程的解法
- 分离变量法求解齐次热传导方程的混合问题
- 分离变量法求解非齐次方程

2 作业

二阶常系数齐次线性常微分方程的通解

给定一个二阶常系数齐次线性常微分方程

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0. \quad (1)$$

它的通解的求法为：

先写出特征方程

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (2)$$

这个方程有两个根 r_1, r_2

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (3)$$

根据根的情况：

- ① 有两个相异实根 r_1, r_2 ，则通解为 $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
- ② 两个相等的实根 $r_1 = r_2$ ，则通解为 $y = (c_1 x + c_2) e^{r_1 x}$
- ③ 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ，则通解为 $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

一阶常系数非齐次线性常微分方程的通解

给定一个二阶常系数非齐次线性常微分方程

$$y' + \lambda y = f(x), \quad \beta > 0. \quad (4)$$

对应的齐次方程是可变量分离的方程, 通解为 $ce^{-\lambda x}$, 则可由常数变易法求得方程(4)的通解为

$$y = ce^{-\lambda x} + \int_{x_0}^x e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds.$$

分离变量法求解齐次热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0), & (5) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0), & (6) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l), & (7) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 为已知函数。

注意(6) 是第一类边界条件(也称狄利克雷【英文Dirichlet】条件), (7) 是初始条件(因为关于 t 求一阶导数, 所以会有一个初始条件: 如初始温度)。 (6) 式可以换成别的边界条件, 比如把(6) 式换成 $u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0$, (左边界是第二类边界条件, 又称诺依曼【英文Neumann】条件, 右边界是第一类边值条件)。当然还有第三类边界条件(又称罗宾【英文Robin】条件), 如: $u_x(0, t) + cu(0, t) = 0$ 。

分离变量法

求解问题(5)–(7),如果设解 $u(x,t) = T(t)X(x)$, 那么把 u 代入方程(5), 会得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (8) \\ T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 & (9) \end{cases}$$

其中 λ 是任意的常数。方程(8) 的通解是 $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ (此处假设 $\lambda < 0$), ($\lambda = 0$, 通解为 $X(x) = c_1 x + c_2$, $\lambda > 0$ 通解为 $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$). 有两个待定系数 c_1, c_2 , 所以需要两个条件, 恰好由原问题的边界条件(6)知, 有两个条件。将 $u(x,t) = T(t)X(x)$ 代入(6), 可以得到 $X(0) = 0, X(l) = 0$. 因为我们要寻求有意义的解是非零解, 所以求解过程中发现只有 $\lambda = n^2 \pi^2 / l^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 有非零解, 相应的解为 $X_n = B_n \sin(n\pi x / l)$, B_n 是任意的常数【此处注意, 如果条件(6)换成别的条件, 相应的关于 $X(x)$ 的两个条件就变了, 所以解 $X(x)$ 也会发生变化】

分离变量法(续1)

将有意义的 λ 值代入(9), 可得方程(9) 的通解为

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}.$$

此时 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ 显然满足方程(5) 和边界条件(6), 但是一般不满足(7)(可以代入验证一下). 为此我们寻求它们的线性组合

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

把 $u(x, t)$ 代入原问题的初始条件(7), 得到

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (10)$$

分离变量法(续2)

由三角函数的正交关系

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \\ \frac{l}{2}, & \text{for } m = n \end{cases} \quad (11)$$

$$(12)$$

通过(10), 我们可以直接将 C_n 解出来

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (13)$$

分离变量法求解非齐次方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & (0 < x < l, t > 0), & (14) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0), & (15) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l), & (16) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $f(x, t)$ 是已知函数, $f(x, t)$ 一般称为源项或应力项。

我们先把(14)–(16) 对应的齐次方程(5)–(7) (也就是令 $f(x, t)=0$) 的解求出来, 即形如 $u_n = T_n(t)X_n(x)$ 的一系列。然后我们再令问题(14)–(16)

的解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ (注意这里的 $X_n(x)$ 就是齐次问题的 $X_n(x)$,

$T_n(t)$ 不是原来的, 是待定系数)。剩下的是如何求 $T_n(t)$. 我们以(14)–(16) 为例介绍。

分离变量法求解非齐次方程(续1)

(14)–(16) 对应的齐次方程(5)–(7)的分离变量法求得 $X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l})$, 所以令问题(14)–(16) 的解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l})$. 将其代入方程(14) 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n(t) \right] \sin(\frac{n\pi x}{l}) = f(x, t)$$

再把 $f(x, t)$ 展开同样的傅里叶级数

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

比较可得

$$T'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t). \quad (17)$$

分离变量法求解非齐次方程(续2)

方程(17) 的通解为

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} + \int_0^t e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 (t-s)}{l^2}} f_n(s) ds \quad (18)$$

此处有待定系数 C_n . 再将解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{l})$ 代入初始条件(16) 得到

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(\frac{n\pi x}{l}) \quad (19)$$

从中可以解出 $T_n(0) = \varphi_n$, 再代入(18), 即可以把 C_n 求出来: $C_n = \varphi_n$ (φ_n 是 φ 的展开系数).

习题八作业

3. 一根长为 l 的枢轴，它的初始温度为常数 c_0 ，其两端的温度保持为0，试求在枢轴上温度的分布情况.

4. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b^2 u & (0 < x < l, t > 0), \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中 b 为已知常数， $\varphi(x)$ 为已知的连续函数.

提示：令 $u(x, t) = e^{-b^2 t} v(x, t)$.