2015年春季学期线性代数试卷B答案

一、填空题（18分）

1. 2^r3^{n-r}； 2. 0； 3. I；

4. 10； 5. $4^{50}I$ ； 6. $7-5x^2+2x^3$.

二、选择题（18分）

1. C； 2. C; 3. C； 4. B； 5. D; 6. A .

三、（共4题，共28分）

1. （7分）

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3+B,\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

因为 $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B^3=0,$

所以 $A^n=(I_3+B)^n=I_3+nB+\dfrac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix}1&n&\dfrac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.（6分）

证明：设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\eta=0$，

则 $k_1A\xi_1+k_2A\xi_2+k_3A\eta=0$.

因为 $A\xi_1=0,A\xi_2=0,A\eta=b\neq0$，

则有 $k_3=0$ ， 所以 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=0$.

又因为 ξ_1,ξ_2线性无关，所以 $k_1=k_2=0$，

即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$， 所以 ξ_1, ξ_2, η 线性无关。

3.（7 分）

证明：设 $A = B + C$, $B = B^T, C = -C^T$.

则 $A^T = B^T + C^T = B - C$，

于是得到 $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$， $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$，

即 A 可以表示成对称矩阵 $\frac{1}{2}(A + A^T)$ 和 反对称矩阵 $\frac{1}{2}(A - A^T)$ 之和。

4.（8 分）

解：$(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则有 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

所以过渡矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

四.（10 分）

解：$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$,

所以 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D-CA^{-1}B\right| = \left|DA-CA^{-1}BA\right| = \left|DA-CA^{-1}AB\right| = \left|DA-CB\right|$.

五.（14 分）

证明：（1）先证明有相同的非零特征值。

设 $\lambda \neq 0$ 是 AB 的特征值，则存在 $x \neq 0$，使 $ABx = \lambda x$,

所以 $BABx = BA(Bx) = \lambda(Bx)$

记 $Bx = y$. 若 $y = 0$， 则有 $ABx = Ay = 0$.

与 $ABx = \lambda x \neq 0$ 矛盾，所以 $y \neq 0$.

于是有 $BAy = \lambda y$，即 λ 是 BA 的特征值。

同理可证 BA 的非零特征值也是 AB 的特征值.

所以 AB 与 BA 有相同的非零特征值。

（2）若 AB 有零特征值，则存在非零向量 x 使 $ABx = 0$，

得到 $|AB| = |A||B| = |BA| = 0$，即 0 也是矩阵 BA 的特征值。

所以 AB 与 BA 有相同的特征值。

六. （12 分）

解：二次型的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

二次型矩阵的一阶顺序主子式等于 1，二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1-t^2$,

三阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -t(5t+4)$.

由二次型正定的充要条件可得到 $\begin{cases} 1-t^2>0 \\ -t(5t+4)>0 \end{cases}$，即 $-\dfrac{4}{5}<t<0$.

所以当 $-\dfrac{4}{5}<t<0$ 时二次型是正定的。