5.1 留数

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 4 月 12 日

目录

5.1.1 留数的定义及留数定理

留数是一个依附于孤立奇点的概念, 而解析函数在孤立奇点处的性质完全由它的洛朗展式刻划. 所以对留数的讨论也应从洛朗展式开始.

5.1.1 留数的定义及留数定理

留数是一个依附于孤立奇点的概念, 而解析函数在孤立奇点处的性质完全由它的洛朗展式刻划. 所以对留数的讨论也应从洛朗展式开始.

设函数 $f(z)$ 在点 a 的空心解析邻域 $0<|z-a|<R$ 内有洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

对上式两端沿以 a 为心, 半径小于 R 的圆周 Γ 积分, 因为对右端级数可逐项积分, 由例 3.2 可得

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_\Gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\oint_\Gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z=c_{-1}\cdot 2\pi\mathrm{i}.$$

两端同除以 $2\pi\mathrm{i}$ 便可得

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

两端同除以 $2\pi\mathrm{i}$ 便可得

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

对

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

逐项积分后，只有 $(z-a)^{-1}$ 项的积分不为零，可见系数 c_{-1} 不一般. 这就引出了留数的概念.

定义 5.1

设函数 $f(z)$ 以有限点 a 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\ (\Gamma:|z-a|=\rho, 0<\rho<R)$$

为 $f(z)$ 在孤立奇点 a 的**留数**（*residue*）, 记作 $\mathrm{Res}[f(z);a]$.

定义 5.1

设函数 $f(z)$ 以有限点 a 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\ (\Gamma: |z-a|=\rho, 0<\rho<R)$$

为 $f(z)$ 在孤立奇点 a **的留数**（*residue*），记作 $\mathrm{Res}[f(z);a]$.

由前面的讨论和留数的定义立即可得

$$\mathrm{Res}[f(z);a]=c_{-1}. \tag{5.1}$$

因为解析函数在有限可去奇点的洛朗展式主要部分（即负幂项部分）为零, 所以由公式(5.1)立即可知, 解析函数在有限可去奇点处的留数必为零.

有了留数的概念后，只有孤立奇点的解析函数的围线积分计算问题便可转化为留数的计算问题.

定理 5.1 (留数定理)

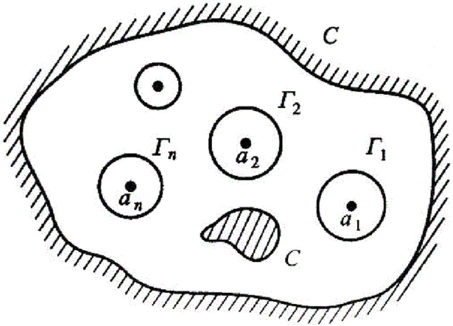
设函数 $f(z)$ 在（复）围线 C 所围闭区域上，除有限个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外解析，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z); a_k].$$

证　以 a_k 为心，充分小的正数 ρ_k 为半径作圆周 $\Gamma_k : |z-a_k| = \rho_k (k=1,2,\cdots,n)$，使这些圆周及其内部均含于 D 内，并且使任意两个由它们围成的闭圆无公共点. 应用复围线情形的柯西积分定理得

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z); a_k].$$ ■



5.1.2 留数的求法

虽然我们已经有了利用洛朗展式计算留数的这样一个一般的方法, 但每次计算留数都求洛朗展式并不一定方便. 对于极点处的留数, 我们还有如下的计算公式.

定理 5.2

设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

即

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{\mathrm{d}z^{n-1}}.$$

5.1.2 留数的求法

定理 5.2

设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

即

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{\mathrm{d}z^{n-1}}.$$

证　由解析函数的柯西型积分导数公式有

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$ ∎

推论 5.1

当 a 为 $f(z)$ 的一阶极点时,

$$\mathrm{Res}[f(z);a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

推论 5.2

设 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z),\psi(z)$ 在点 a 解析, $\varphi(a)\neq 0$, a 是 $\psi(z)$ 的一阶零点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

证　由定理 4.9 和 4.15 可知, 这时 a 为 $f(z)$ 的一阶极点. 所以由推论5.1有

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$ $\blacksquare$

推论 5.2

设 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z),\psi(z)$ 在点 a 解析, $\varphi(a)\neq 0$, a 是 $\psi(z)$ 的一阶零点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

证　由定理 4.9 和 4.15 可知, 这时 a 为 $f(z)$ 的一阶极点. 所以由推论5.1有

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.\qquad\blacksquare$$

下面看一些积分计算的例子, 其中包含了各种计算留数的方法.

例 5.1

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解 记 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$, 它在圆周 $|z|=2$ 的内部只有一阶极点 $z=0$ 和二阶极点 $z=1$.

例 5.1

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解　记 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$, 它在圆周 $|z|=2$ 的内部只有一阶极点 $z=0$ 和二阶极点 $z=1$. 由推论 5.1,

$$\operatorname{Res}[f(z);0]=\left.\frac{5z-2}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=-2;$$

例 5.1

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解 记 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$, 它在圆周 $|z|=2$ 的内部只有一阶极点 $z=0$ 和二阶极点 $z=1$. 由推论 5.1,

$$\operatorname{Res}[f(z);0]=\left.\frac{5z-2}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=-2;$$

由定理5.2,

$$\operatorname{Res}[f(z);1]=\left.\left(\frac{5z-2}{z}\right)'\right|_{z=1}=\left.\frac{2}{z^2}\right|_{z=1}=2.$$

例 5.1

计算积分 $\oint_{|z|=2} \dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解　记 $f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$，它在圆周 $|z|=2$ 的内部只有一阶极点 $z=0$ 和二阶极点 $z=1$. 由推论 5.1,

$$\operatorname{Res}[f(z);0]=\left.\frac{5z-2}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=-2;$$

由定理5.2,

$$\operatorname{Res}[f(z);1]=\left.\left(\frac{5z-2}{z}\right)'\right|_{z=1}=\left.\frac{2}{z^2}\right|_{z=1}=2.$$

所以由留数定理有

$$\oint_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(-2+2)=0.$$

例 5.2

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=n} \tan \pi z \, \mathrm{d}z.$

解 由 $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ 可知, 它的奇点就是 $\cos \pi z$ 的零点

$$z = k + \frac{1}{2}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

例 5.2

计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \,\mathrm{d}z.$

解 由 $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ 可知, 它的奇点就是 $\cos \pi z$ 的零点

$$z = k + \frac{1}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

由于 $\sin \pi z$ 和 $\cos \pi z$ 并无公共的零点, 而 $z = k + \dfrac{1}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 都是 $\cos \pi z$ 的一阶零点, 所以由推论5.2得

$$\operatorname{Res}\left[\tan \pi z; k + \frac{1}{2}\right] = \left.\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots .$$

只有 $2n$ 个极点 $z=k+\dfrac{1}{2}$ 在 $|z|<n$ 内. 因此由留数定理得

$$\oint_{|z|=n} \tan \pi z \,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4n\mathrm{i}.$$

例 5.3

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z.$

解 易知函数 $\dfrac{\cos z}{z^3}$ 只有 $z=0$ 这一个孤立奇点，且为三阶极点．由定理5.2得

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3};0\right]=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\cos z}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{2}.$$

例 5.3

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z.$

解 易知函数 $\dfrac{\cos z}{z^3}$ 只有 $z=0$ 这一个孤立奇点，且为三阶极点．由定理5.2得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z}{z^3};0\right] = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\cos z}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_{z=0} = -\frac{1}{2}.$$

所以由留数定理得

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi\mathrm{i}. \qquad \blacksquare$$

例 5.4

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2}{z^9}\,\mathrm{d}z.$

解　易知函数 $\dfrac{\cos z^2}{z^9}$ 只有 $z=0$ 一个孤立奇点，且为 9 阶极点．但如果利用定理5.2来求留数 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\cos z^2}{z^9};0\right]$ 的话，就需要求 $\cos z^2$ 的 8 阶导数．这将是一个非常繁琐的计算过程．在这种情况下，我们应知难而退，转而去考虑留数计算的通用方法：洛朗展式法．

因为

$$\frac{\cos z^2}{z^9} = \frac{1}{z^9}\left(1 - \frac{1}{2!}z^4 + \frac{1}{4!}z^8 - \cdots\right) = \frac{1}{z^9} - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z} - \cdots,$$

所以 $\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z^2}{z^9}; 0\right] = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. 因此

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2}{z^9}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \times \frac{1}{24} = \frac{\pi\mathrm{i}}{12}.$$

例 5.5

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z.$

解　在单位圆 $|z|<1$ 内, 函数 $f(z)=z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 只有一个奇点 $z=0$, 且 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点. 要计算本性奇点处的留数, 只有求洛朗展式这一个方法.

例 5.5

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z.$

解　在单位圆 $|z|<1$ 内, 函数 $f(z)=z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 只有一个奇点 $z=0$, 且 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点. 要计算本性奇点处的留数, 只有求洛朗展式这一个方法.

在 $z=0$ 的空心邻域内, $f(z)$ 有洛朗展式

$$f(z)=z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=z+1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots.$$

于是可得 $\operatorname{Res}[f(z);0]=\dfrac{1}{2}$. 所以由留数定理有

$$\oint_{|z|=1} z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}=\pi\mathrm{i}.$$

∎

例 5.6

计算积分 $\oint_{|z|=1} \dfrac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\,\mathrm{d}z.$

解 被积函数 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$ 的奇点, 即 $1-\mathrm{e}^z$ 的零点为

$$z=2k\pi\mathrm{i}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\ ,$$

例 5.6

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\,\mathrm{d}z.$

解 被积函数 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$ 的奇点, 即 $1-\mathrm{e}^z$ 的零点为

$$z=2k\pi\mathrm{i},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\ ,$$

其中位于单位圆 $|z|<1$ 内的, 只有一个奇点 $z=0$.

例 5.6

计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}\,dz$.

解 被积函数 $f(z)=\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}$ 的奇点, 即 $1-e^z$ 的零点为

$$z=2k\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

其中位于单位圆 $|z|<1$ 内的, 只有一个奇点 $z=0$. 注意 $z=0$ 是被积函数分子和分母的公共零点. 要想确定 $z=0$ 是否为 $f(z)$ 的极点（以及它的阶）, 应先判断它分别作为位于分子分母位置的函数 $z\sin z$ 和 $(1-e^z)^3$ 的零点的阶.

例 5.6

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\,\mathrm{d}z.$

解 被积函数 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$ 的奇点, 即 $1-\mathrm{e}^z$ 的零点为

$$z=2k\pi\mathrm{i}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

其中位于单位圆 $|z|<1$ 内的, 只有一个奇点 $z=0$. 注意 $z=0$ 是被积函数分子和分母的公共零点. 要想确定 $z=0$ 是否为 $f(z)$ 的极点（以及它的阶）, 应先判断它分别作为位于分子分母位置的函数 $z\sin z$ 和 $(1-\mathrm{e}^z)^3$ 的零点的阶.

易知 $z=0$ 是 $\sin z$ 的 1 阶零点, 由定理 4.9 有 $\sin z=z\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\varphi(0)\neq0$.

例 5.6

计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\,\mathrm{d}z.$

解 被积函数 $f(z) = \dfrac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$ 的奇点, 即 $1-\mathrm{e}^z$ 的零点为

$$z = 2k\pi\mathrm{i}, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots ,$$

其中位于单位圆 $|z| < 1$ 内的, 只有一个奇点 $z = 0$. 注意 $z = 0$ 是被积函数分子和分母的公共零点. 要想确定 $z = 0$ 是否为 $f(z)$ 的极点（以及它的阶）, 应先判断它分别作为位于分子分母位置的函数 $z\sin z$ 和 $(1-\mathrm{e}^z)^3$ 的零点的阶.

易知 $z = 0$ 是 $\sin z$ 的 1 阶零点, 由定理 4.9 有 $\sin z = z\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 $z = 0$ 解析且 $\varphi(0) \neq 0$. 于是有 $z\sin z = z^2\varphi(z)$, 再次由定理 4.9 可知 $z = 0$ 为函数 $z\sin z$ 的 2 阶零点.

又易知 $z=0$ 是 $1-\mathrm{e}^z$ 的 1 阶零点. 于是有 $1-\mathrm{e}^z=z\psi(z)$, 其中 $\psi(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\psi(0)\neq 0$.

又易知 $z=0$ 是 $1-\mathrm{e}^z$ 的 1 阶零点. 于是有 $1-\mathrm{e}^z=z\psi(z)$, 其中 $\psi(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\psi(0)\neq 0$. 由此可得 $(1-\mathrm{e}^z)^3=z^3\psi^3(z)$. 显然 $\psi^3(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\psi^3(0)\neq 0$. 这说明 $z=0$ 是函数 $(1-\mathrm{e}^z)^3$ 的三阶零点.

又易知 $z=0$ 是 $1-\mathrm{e}^z$ 的 1 阶零点. 于是有 $1-\mathrm{e}^z=z\psi(z)$, 其中 $\psi(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\psi(0)\neq 0$. 由此可得 $(1-\mathrm{e}^z)^3=z^3\psi^3(z)$. 显然 $\psi^3(z)$ 在 $z=0$ 解析且 $\psi^3(0)\neq 0$. 这说明 $z=0$ 是函数 $(1-\mathrm{e}^z)^3$ 的三阶零点.

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点. 于是由推论5.1,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z);0]&=\lim_{z\to 0}\frac{z^2\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{z^3}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\\&=\left(\lim_{z\to 0}\frac{z}{1-\mathrm{e}^z}\right)^3=\left(\lim_{z\to 0}\frac{-1}{\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^0}{z-0}}\right)^3=-1.\end{aligned}$$

故由留数定理, 所求积分等于 $-2\pi\mathrm{i}$. ∎

5.1.3 无穷远点的留数

留数的概念可以推广到无穷远点为孤立奇点的情形.

定义 5.2

设 ∞ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 ∞ 的空心邻域 $0 \le r < |z| < +\infty$ 内解析, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z, \ (\Gamma : |z| = \rho, \ \rho > r)$$

为$f(z)$ **在 ∞ 的留数**, 记作 $\mathrm{Res}[f(z); \infty]$. 这里 Γ^- 表示沿顺时针方向积分.

设 $f(z)$ 在 $0 \le r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \tag{5.2}$$

对上式两端沿 Γ^- 逐项积分, 得

$$\oint_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma^-} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\Gamma^-} z^n\,\mathrm{d}z = c_{-1}(-2\pi\mathrm{i}).$$

于是有

$$\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -c_{-1}. \tag{5.3}$$

我们知道解析函数在有限可去奇点处的留数为零. 那么当 ∞ 为可去奇点时, 是否有同样的结论?

我们知道解析函数在有限可去奇点处的留数为零. 那么当 ∞ 为可去奇点时, 是否有同样的结论？实际上, 当 ∞ 为可去奇点时, 仅意味着洛朗展式中的主要部分即正幂项部分为零, 与负幂项部分毫无关系, 因而函数在无穷远点的留数不一定为零.

我们知道解析函数在有限可去奇点处的留数为零. 那么当 ∞ 为可去奇点时, 是否有同样的结论? 实际上, 当 ∞ 为可去奇点时, 仅意味着洛朗展式中的主要部分即正幂项部分为零, 与负幂项部分毫无关系, 因而函数在无穷远点的留数不一定为零.

例如, ∞ 是 $f(z) = 1 + 1/z$ 的可去奇点, 但由公式(5.3)得 $\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -1$.

我们知道解析函数在有限可去奇点处的留数为零. 那么当 ∞ 为可去奇点时, 是否有同样的结论? 实际上, 当 ∞ 为可去奇点时, 仅意味着洛朗展式中的主要部分即正幂项部分为零, 与负幂项部分毫无关系, 因而函数在无穷远点的留数不一定为零.

例如, ∞ 是 $f(z) = 1 + 1/z$ 的可去奇点, 但由公式(5.3)得 $\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -1$.

不过, 针对 ∞ 为可去奇点的情形, 我们有专门的留数计算方法.

命题 5.1

若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 则 $\mathrm{Res}[f(z);\infty]=-\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)$.

证 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 则说明无穷远点 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点. 于是由定理 4.18 可知, $f(z)$ 在 ∞ 的某空心解析邻域内的洛朗展式为

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0.$$

做变换 $z=1/\zeta$, 记 $g(\zeta)=f(1/\zeta)$, 则有

$$g(\zeta)=f(1/\zeta)=c_0+c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^2+\cdots+c_{-n}\zeta^n+\cdots.$$

于是有

$$c_0=\lim_{\zeta\to 0} g(\zeta)=\lim_{z\to\infty} f(z)=0.$$

从而有

$$zf(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-2}}{z} + c_{-1}.$$

因此只需重复刚才的推理便可得

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = c_{-1}.$$

结合公式(5.3)即得所证. ∎

从而有

$$zf(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-2}}{z} + c_{-1}.$$

因此只需重复刚才的推理便可得

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = c_{-1}.$$

结合公式(5.3)即得所证. $\blacksquare$

利用上面的命题, 请读者自行证明下面的一般结论.

命题 5.2

若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c$, 则 $\mathrm{Res}[f(z);\infty] = -\lim\limits_{z\to\infty} z[f(z) - c]$.

在一般情形下, 应用公式(5.3)需要先求洛朗展式, 有时这并不方便. 在 4.5.2 小节我们已经知道, 对 ∞ 的性质的讨论可以通过倒数变换将其转变为对原点 $z=0$ 的讨论. 这是讨论 ∞ 的性质的常规思路. 下面沿着这个思路, 我们可以得到另一计算 $\mathrm{Res}[f(z);\infty]$ 的公式.

在一般情形下, 应用公式(5.3)需要先求洛朗展式, 有时这并不方便. 在 4.5.2 小节我们已经知道, 对 ∞ 的性质的讨论可以通过倒数变换将其转变为对原点 $z=0$ 的讨论. 这是讨论 ∞ 的性质的常规思路. 下面沿着这个思路, 我们可以得到另一计算 $\operatorname{Res}[f(z);\infty]$ 的公式.

令 $z=1/\zeta$, 则洛朗展式(5.2)变为

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\zeta^{-n}.$$

这时 $z=\infty$ 被变成了 $\zeta=0$. 我们的目的是把无穷远点处的留数转换为原点处的留数计算, 即利用原点处的留数计算公式(5.1)求出 c_{-1}.

在一般情形下, 应用公式(5.3)需要先求洛朗展式, 有时这并不方便. 在 4.5.2 小节我们已经知道, 对 ∞ 的性质的讨论可以通过倒数变换将其转变为对原点 $z=0$ 的讨论. 这是讨论 ∞ 的性质的常规思路. 下面沿着这个思路, 我们可以得到另一计算 $\mathrm{Res}[f(z);\infty]$ 的公式.

令 $z=1/\zeta$, 则洛朗展式(5.2)变为

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\zeta^{-n}.$$

这时 $z=\infty$ 被变成了 $\zeta=0$. 我们的目的是把无穷远点处的留数转换为原点处的留数计算, 即利用原点处的留数计算公式(5.1)求出 c_{-1}. 但这时 c_{-1} 是 ζ 的系数, 而不是 ζ^{-1} 的系数. 为此上面的洛朗展式两端同除以 ζ^2 可得

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^{-n-2}.$$

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^{-n-2}.$$

于是利用公式(5.1)有

$$c_{-1} = \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right); 0\right].$$

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^{-n-2}.$$

于是利用公式(5.1)有

$$c_{-1} = \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right); 0\right].$$

结合公式(5.3)得

$$\operatorname{Res}[f(z); \infty] = -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right); 0\right]. \tag{5.4}$$

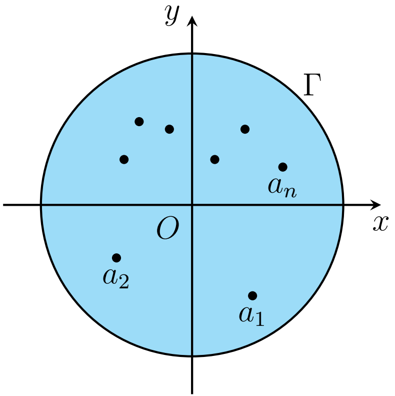
定理 5.3

若函数 $f(z)$ 在扩充 z 平面上, 包括无穷远点在内, 只有有限个孤立奇点, 则 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数总和为零.

证　设函数 $f(z)$ 的全部孤立奇点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty$. 以原点为心作一个充分大的圆周 Γ, 使 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都在 Γ 的内部, 则由留数定理5.1得

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z); a_k].$$

两边除以 $2\pi\mathrm{i}$, 并移项得



$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z); a_k] + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z); a_k] + \operatorname{Res}[f(z); \infty] = 0. \qquad \blacksquare$$

例 5.7

计算积分 $I = \oint_{|z|=4} \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\,\mathrm{d}z.$

解法一　被积函数 $f(z) = \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 一共有七个奇点:

$$z = \pm \mathrm{i}, z = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3; \quad z = \infty.$$

例 5.7

计算积分 $I=\oint_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\,\mathrm{d}z.$

解法一　被积函数 $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 一共有七个奇点:

$$z=\pm\mathrm{i},\, z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}},\, k=0,1,2,3; \quad z=\infty.$$

前六个均在积分路径 $|z|=4$ 的内部. 这时利用留数定理需要计算六个孤立奇点的留数, 十分麻烦. 与其计算六个孤立奇点的留数, 由定理5.3, 不如考虑计算 ∞ 的留数. 这样只需计算一个留数就可以了.

例 5.7

计算积分 $I=\oint_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\,\mathrm{d}z.$

解法一　被积函数 $f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 一共有七个奇点:

$$z=\pm\mathrm{i}, z=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1,2,3; \quad z=\infty.$$

前六个均在积分路径 $|z|=4$ 的内部. 这时利用留数定理需要计算六个孤立奇点的留数, 十分麻烦. 与其计算六个孤立奇点的留数, 由定理5.3, 不如考虑计算 ∞ 的留数. 这样只需计算一个留数就可以了. 于是我们有

$$I=2\pi\mathrm{i}\left(-\operatorname{Res}[f(z);\infty]\right).$$

下面利用公式(5.4)计算 $\operatorname{Res}[f(z);\infty]$, 我们有

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2} \frac{\frac{1}{\zeta^{15}}}{\left(\frac{1}{\zeta^2}+1\right)^2 \left(\frac{1}{\zeta^4}+2\right)^3} = \frac{1}{\zeta(1+\zeta^2)^2(1+2\zeta^4)^3},$$

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2} \frac{\dfrac{1}{\zeta^{15}}}{\left(\dfrac{1}{\zeta^2}+1\right)^2 \left(\dfrac{1}{\zeta^4}+2\right)^3} = \frac{1}{\zeta(1+\zeta^2)^2(1+2\zeta^4)^3},$$

它以 $\zeta = 0$ 为一阶极点, 所以

$$I = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right); 0\right] = 2\pi\mathrm{i}.$$

解法二　如上一解法，考虑计算 $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 ∞ 的留数. 注意到 $f(z)$ 的分母是一个 16 次多项式，满足命题 5.1的条件，故有

$$\operatorname{Res}[f(z);\infty]=-\lim_{z\to\infty}\frac{z^{16}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=-\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(1+z^{-2})^2(1+2z^{-4})^3}=-1.$$

所以

$$I=2\pi\mathrm{i}\left(-\operatorname{Res}[f(z);\infty]\right)=2\pi\mathrm{i}.$$

∎

作业

习题五

1. 设 $z=0$ 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点. 试证明若 $f(z)$ 为偶函数, 则 $\operatorname{Res}[f(z);0]=0$.
2. 求下列函数在指定点处的留数:

(1) $\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2},\ z=\pm1,\infty;$　　(2) $\dfrac{1}{\sin z},\ z=n\pi\,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots);$

(3) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4},\ z=0,\infty;$

3. 求下列函数在孤立奇点处的留数, 其中 n 为正整数:

(1) $z^n\sin\dfrac{1}{z};$

4. 计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z\sin z}$;　　(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $C: x^2+y^2=2(x+y)$;