高等数学Ⅱ1 期末试题参考答案（A 卷）

一、填空题（共 18 分）

1．$\dfrac{-1}{(x+2)^2}$　　2．$\dfrac{-2dx}{1+(1-2x)^2}$　　3．$e^{\frac{1}{e}}$　　4．$\ln|x|+\arctan x+C$

5．2　　6．$2x+2y-3z=0$

二、选择题（共 12 分）

1．（C）　2．（A）　3．（B）　4．.（D）

三、计算题（共 54 分）

1．解　令 $x-t=u$ 得 $f(x)=-\int_0^{x-x^2}\sin u^2du$， $f'(x)=(2x-1)\sin(x-x^2)^2$ 。 9 分

2．解　原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$。　9 分

3．解　原式$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^2\cos x^2dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^2(1-\sin^2 x)dx=\dfrac{\pi}{8}$ 。　9 分

4．解　$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，

$$b=\lim_{x\to+\infty}(x\arctan x-\frac{\pi}{2}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=-1\text{。}$$　5 分

所以 $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ 是 $x\to+\infty$ 的斜渐近线；同理 $y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$ 是 $x\to-\infty$ 斜渐近线。9 分

5．解　原式变形为　$\int_1^{+\infty}\dfrac{(b-a)x+a}{x((2x+a)}dx=1$，

可知 $b=a$ 及

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln\frac{x}{2x+a}\Bigg|_1^{+\infty}=\ln\frac{a+2}{2}=1,$$

解得 $b=a=2e-2$ 。　9 分

6．先求得交点 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$，

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{6y-3y^2}-y)dx=\sqrt{3}\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-(y-1)^2}dx-\frac{9}{8}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{3}{4}。$$ 9 分

四、证明题（共 16 分）

1． 证 令 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，

则 $f(0)=f(1)=0$， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$，

即 ξ 是多项式方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 的根。 8 分

2． 证 1）因为 $f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{x}=1>0$，

由极限的保号性知：当 x 在 0 的左侧时 $f''(x)<0$；当 x 在 0 的左侧时 $f''(x)>0$，故点 $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点。 5 分

2） 根据泰勒公式，有 $f(x)-f(0)=\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$。

由 $f''(0)=1>0$ 及连续的保号性知，在 $x=0$ 的邻域内也有 $f'''(\xi)>0$。这样，当 x 在 0 的左侧时 $f(x)<f(0)$；当 x 在 0 的左侧时 $f(x)>f(0)$，故 $f(0)$ 非极值。 8 分