5.3 辐角原理及其应用

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 4 月 13 日

目录

5.3.1 对数留数

这一节我们要讨论一个特殊形式的围线积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z,$$

其中 $f(z)$ 是一个亚纯函数. 我们马上就会看到, 这种形式的积分可以帮助我们了解亚纯函数的零点和极点的分布情况.

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 n 阶零点或 n 阶极点, 则由定理 4.9 和定理 4.15(2), 在 a 的一个空心解析邻域 $0<|z-a|<R$ 内有

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析且恒不为零, 而 k 是等于 n 还是 $-n$, 取决于 a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶零点还是 n 阶极点.

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 n 阶零点或 n 阶极点, 则由定理 4.9 和定理 4.15(2), 在 a 的一个空心解析邻域 $0<|z-a|<R$ 内有

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析且恒不为零, 而 k 是等于 n 还是 $-n$, 取决于 a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶零点还是 n 阶极点. 计算可得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k(z-a)^{k-1}\varphi(z)+(z-a)^k\varphi'(z)}{(z-a)^k\varphi(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 n 阶零点或 n 阶极点, 则由定理 4.9 和定理 4.15(2), 在 a 的一个空心解析邻域 $0<|z-a|<R$ 内有

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析且恒不为零, 而 k 是等于 n 还是 $-n$, 取决于 a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶零点还是 n 阶极点. 计算可得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k(z-a)^{k-1}\varphi(z)+(z-a)^k\varphi'(z)}{(z-a)^k\varphi(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

因为 $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $|z-a|<R$ 内解析, 所以有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};a\right]=k.$$

这样我们就证明了下面的引理.

引理 5.4

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 n 阶零点或 n 阶极点, 则点 a 为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 并且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};a\right]=\begin{cases} n, & \text{当}a\text{为 }f(z)\text{的 }n\text{ 阶零点时;}\\ -n, & \text{当}a\text{为 }f(z)\text{的 }n\text{ 阶极点时.}\end{cases}$$

由引理5.4和留数定理立即可得

定理 5.6

设 C 是一条围线. 若函数 $f(z)$ 满足
(1) 在 C 的内部是亚纯函数;
(2) 在 C 上解析且不为零.
则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N - P, \tag{5.8}$$

这里 N 和 P 分别表示 $f(z)$ 在 C 的内部的零点和极点的个数（n 阶算 n 个）.

5.3.2 辐角原理

5.3.3 鲁歇定理

作业

习题五