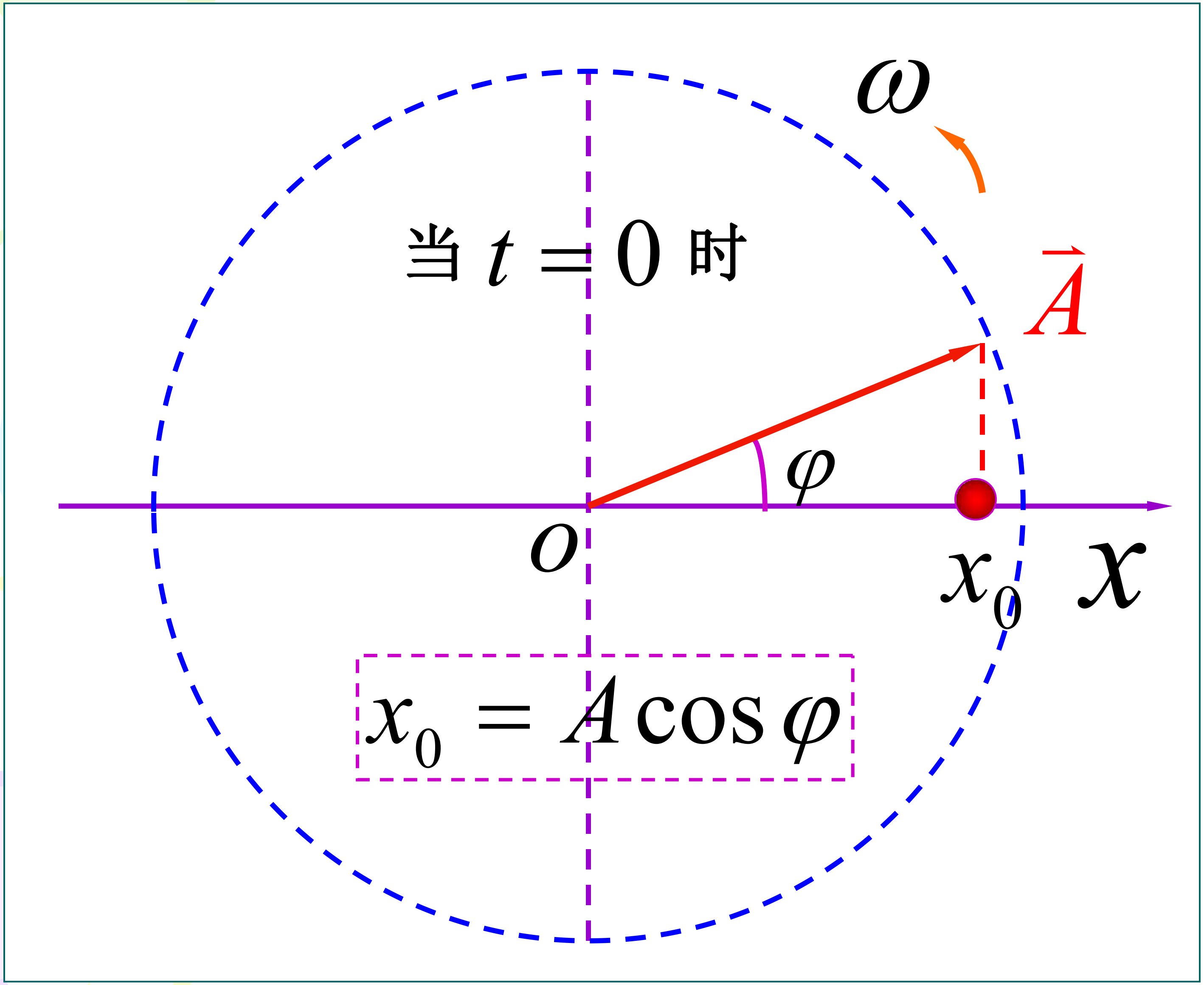
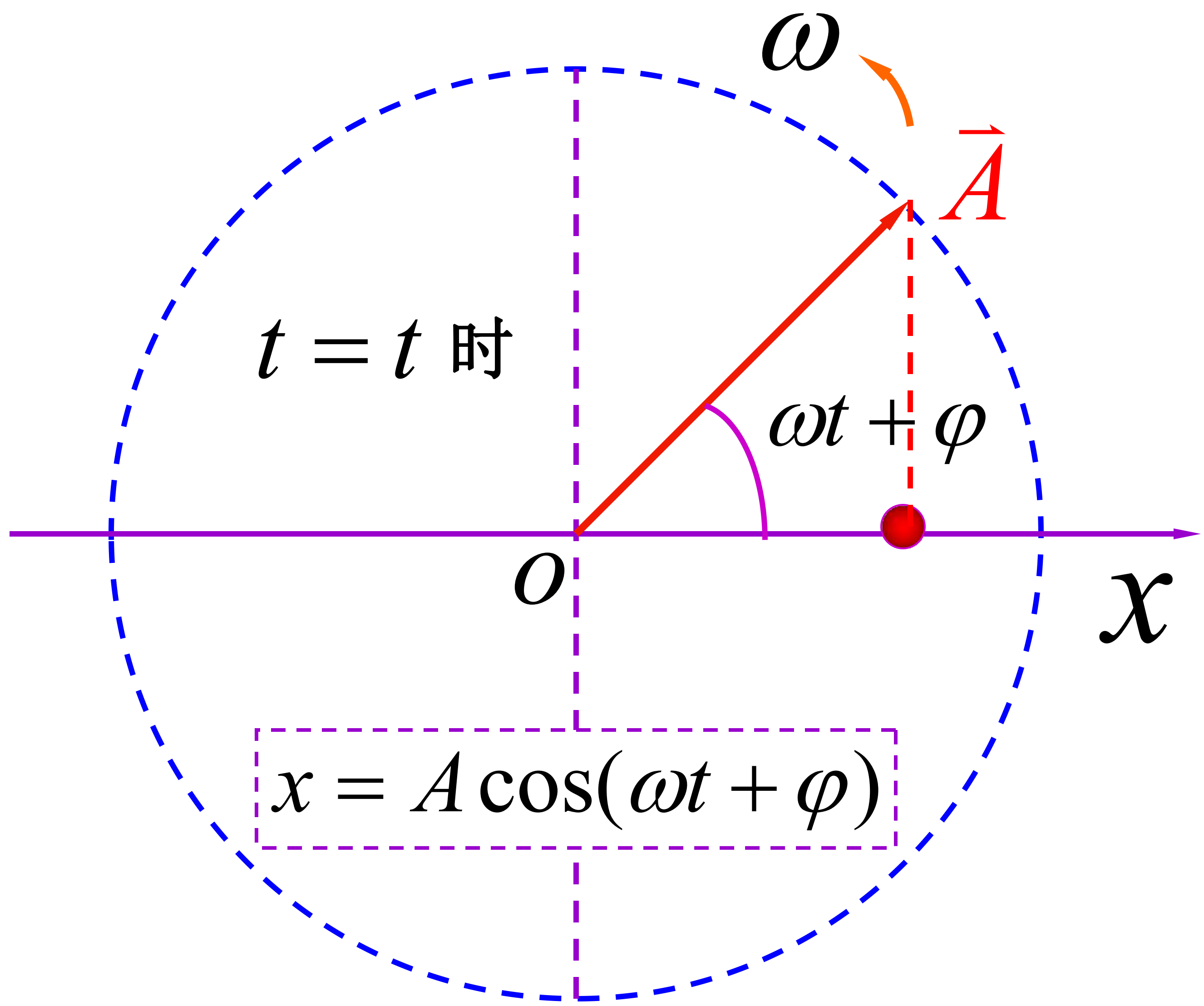


以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

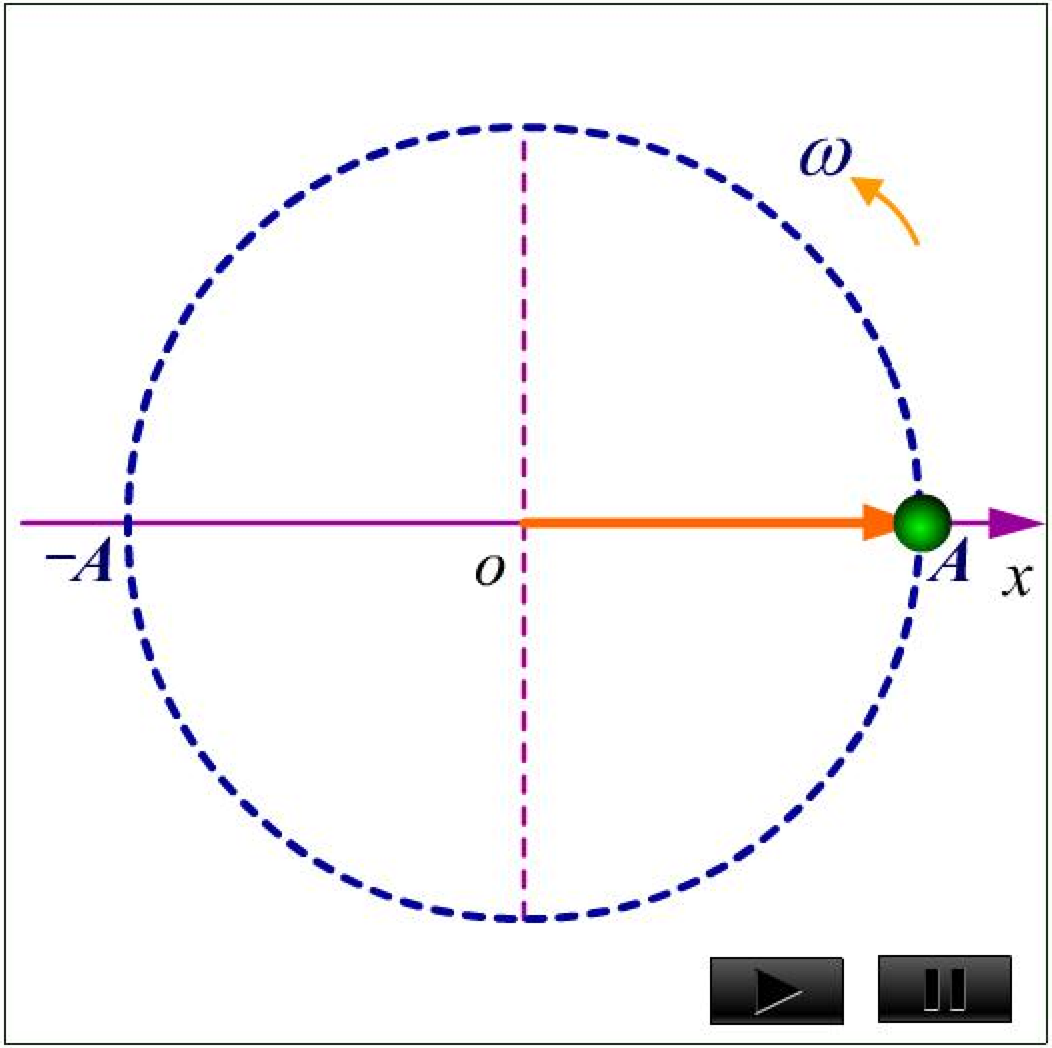


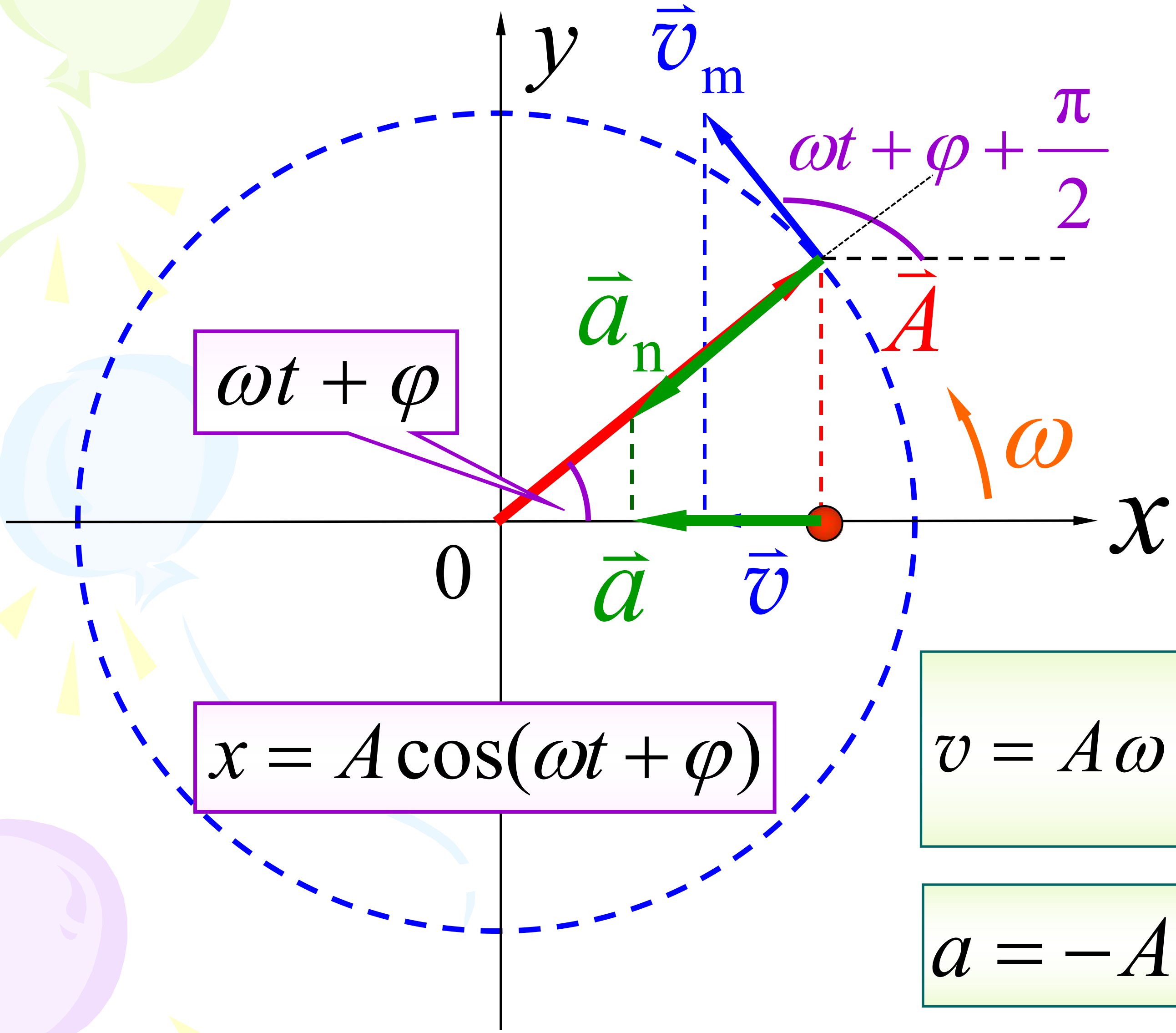
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动.





$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

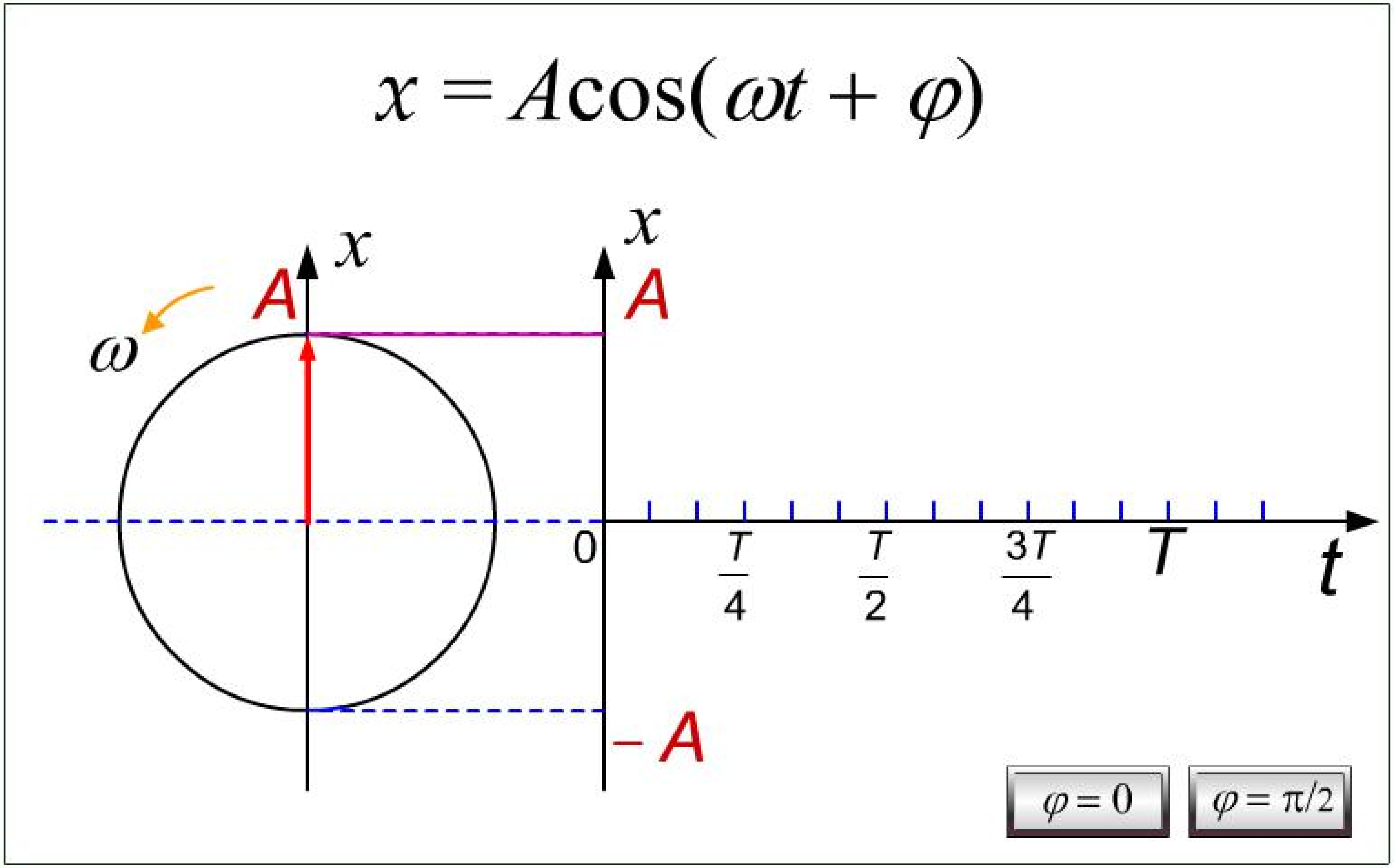
$$v_m = A\omega$$

$$a_n = A\omega^2$$

$$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

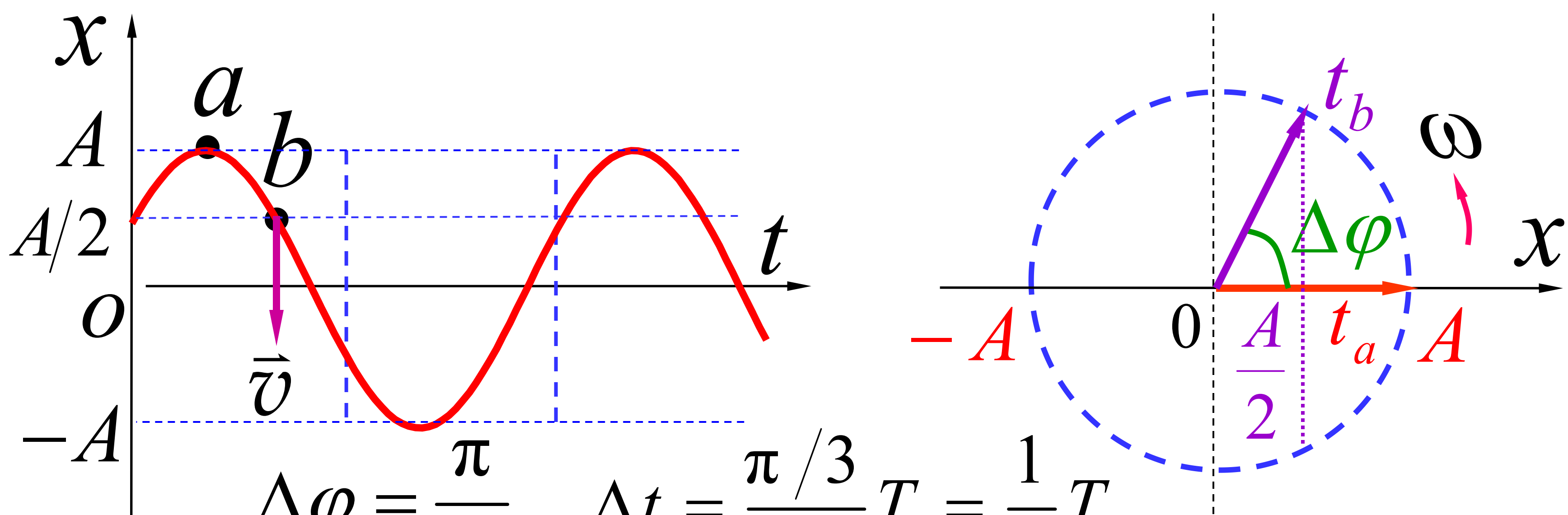
讨论

➢ 相位差：表示两个相位之差 .

1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间. $\Delta\varphi=(\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)$

$$x_1=A\cos(\omega t_1+\varphi)$$
$$x_2=A\cos(\omega t_2+\varphi)$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



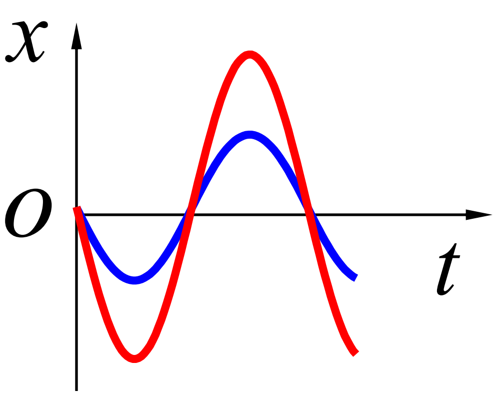
$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}\qquad \Delta t=\frac{\pi/3}{2\pi}T=\frac{1}{6}T$$

2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异.（解决振动合成问题）

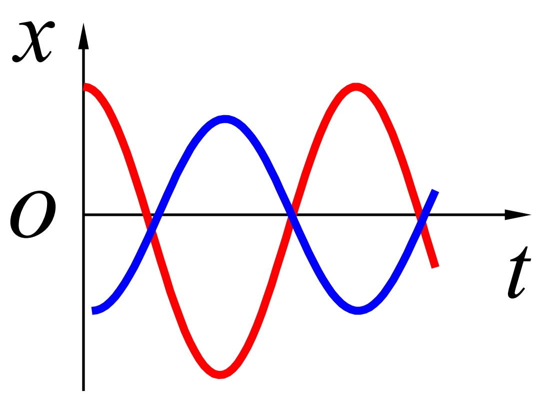
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) \qquad \boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

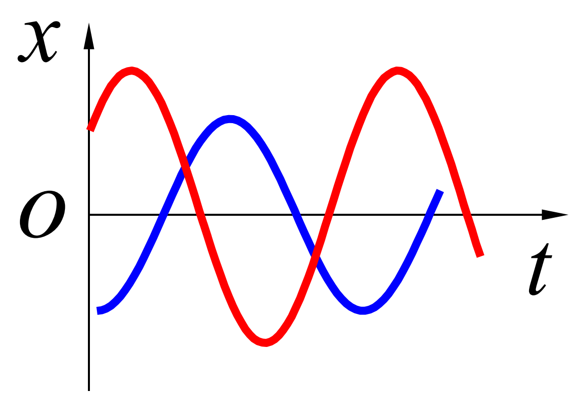
$\Delta\varphi = 0$ 同步



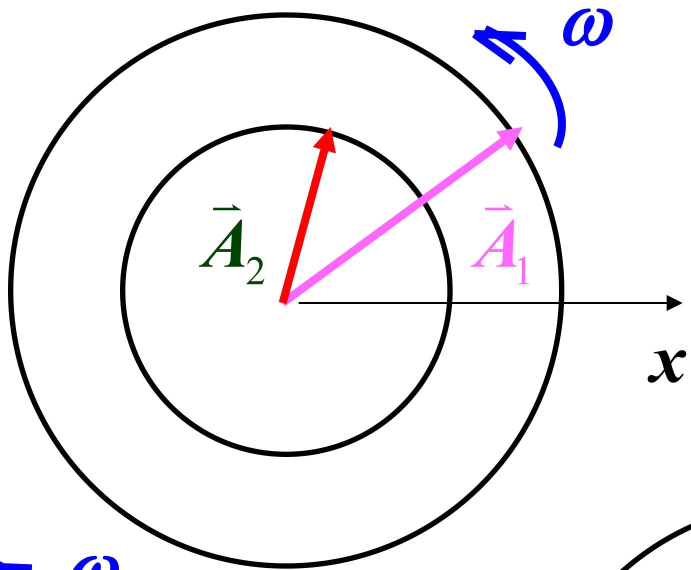
$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相



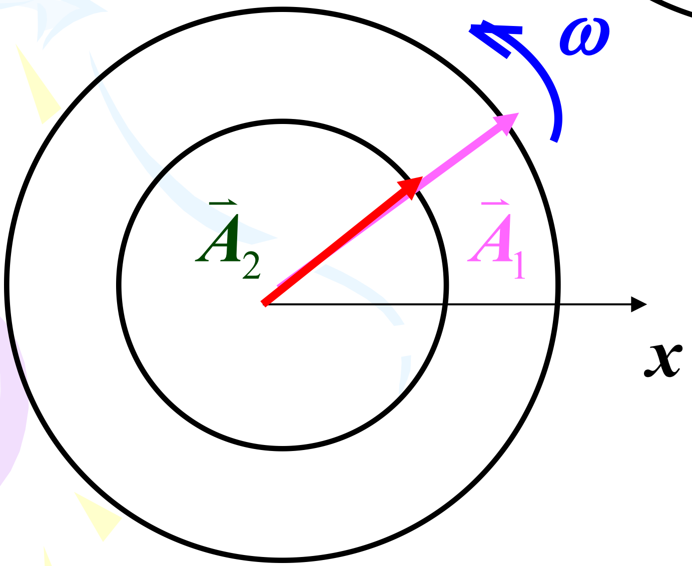
$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases} \text{超前} \\ \text{落后} \end{cases}$



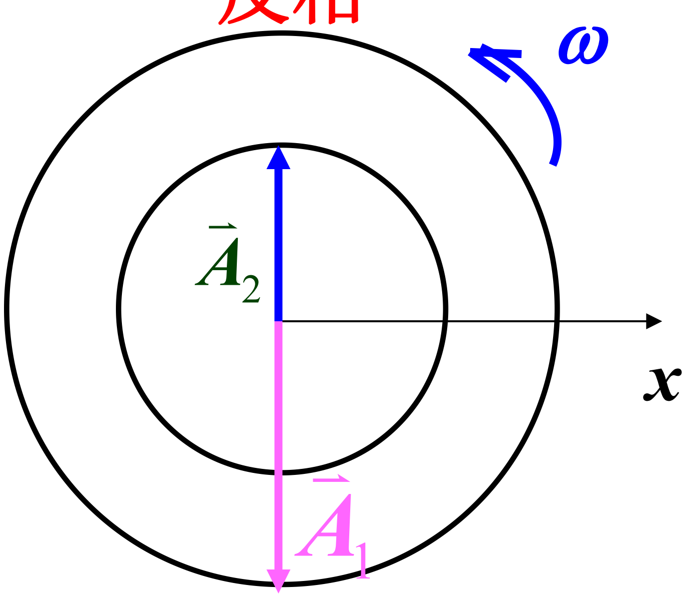
用旋转矢量表示位相关系



同相



反相

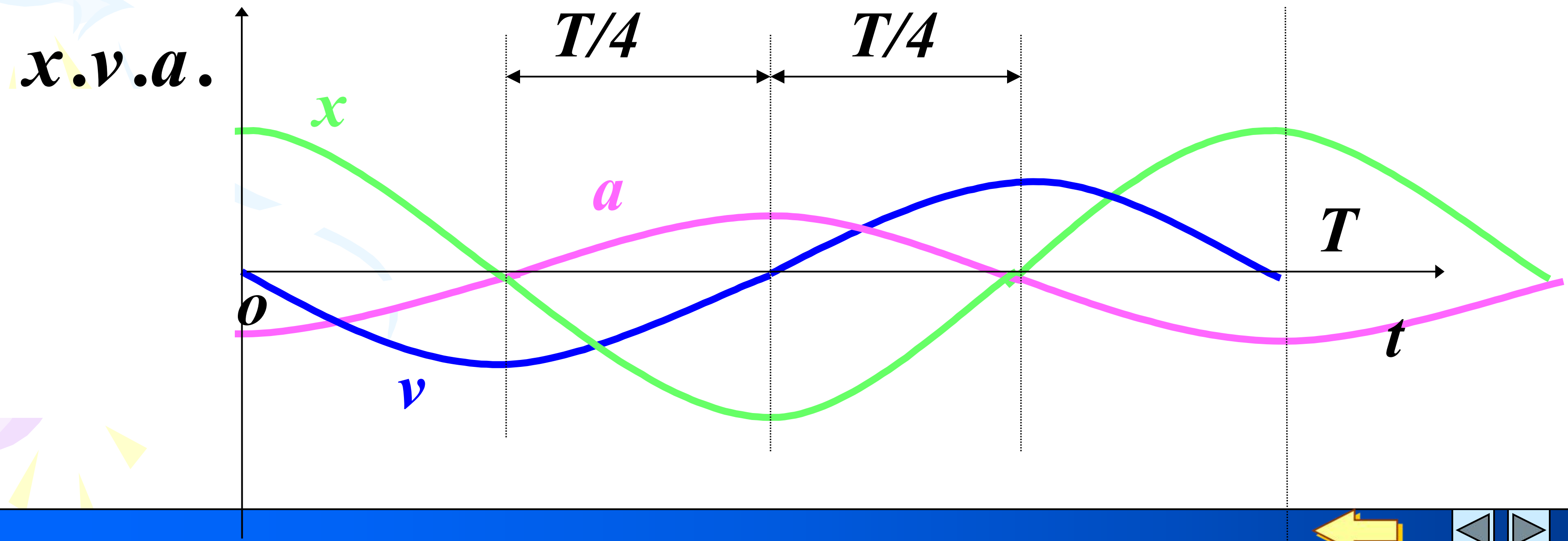


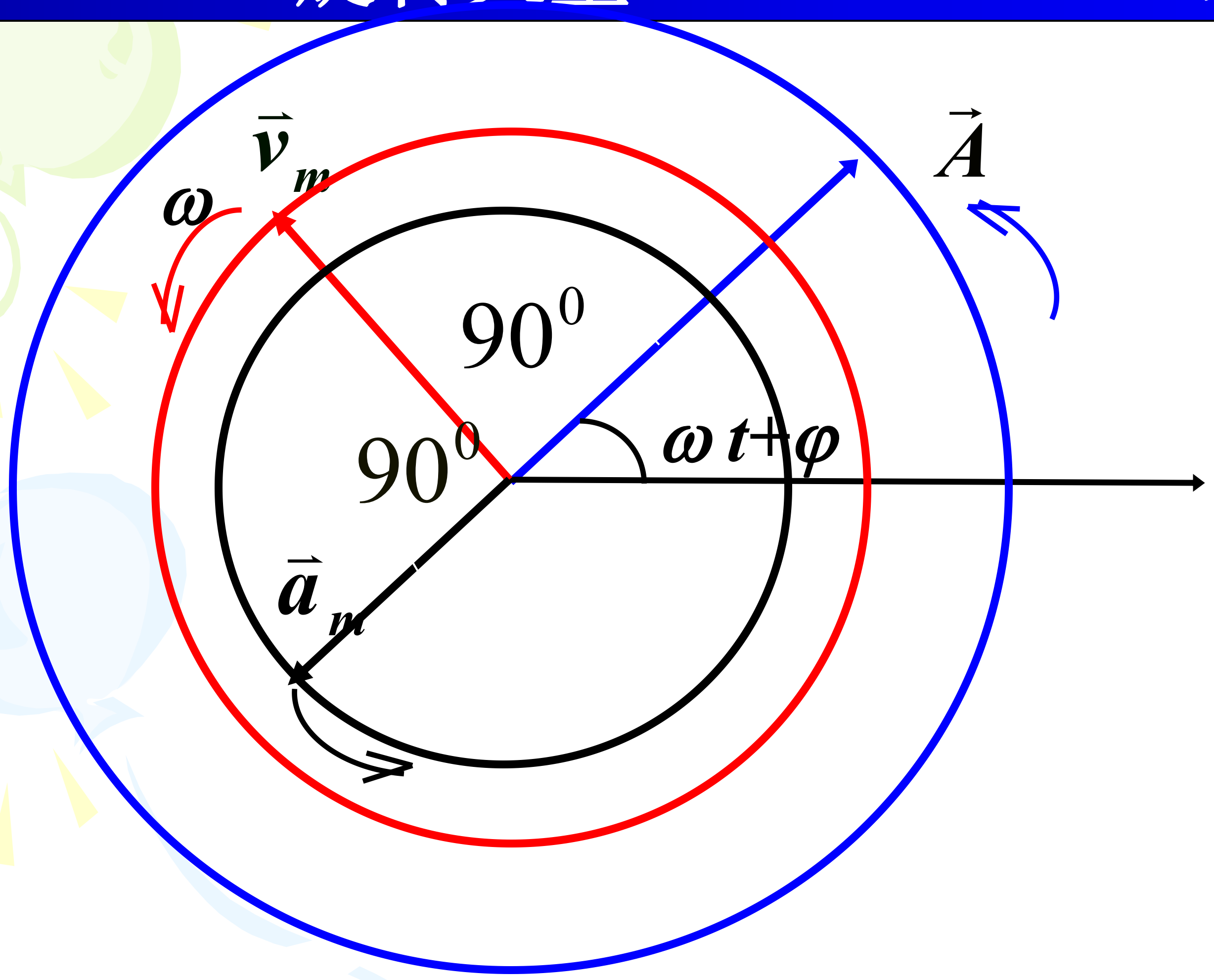
谐振动的位移、速度、加速度之间的位相关系

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = v_m\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = a_m\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$





由图可见：

$\vec{v}$ 超前 $\vec{x}$ $\dfrac{\pi}{2}$

$\vec{a}$ 超前 $\vec{v}$ $\dfrac{\pi}{2}$

$$v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

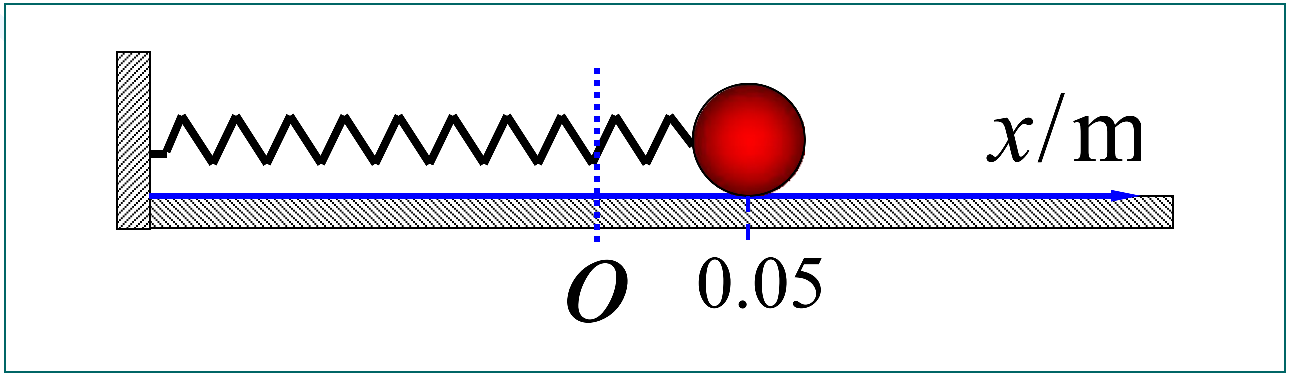
$$a_x = a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

例1 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k=0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体的质量 $m=20\mathrm{g}$.

（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\dfrac{A}{2}$ 处时的速度；

（3）如果物体在 $x=0.05\mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求其运动方程.

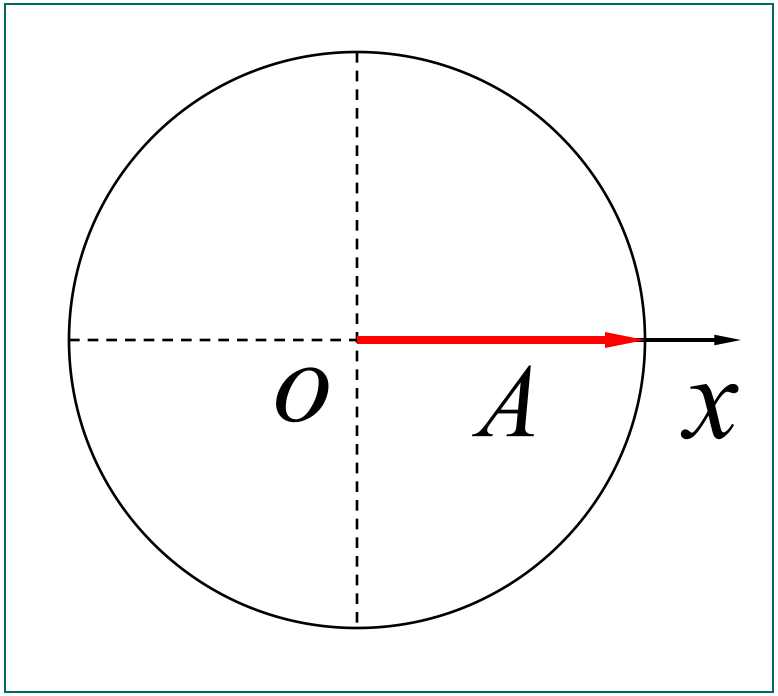


解 （1） $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{0.72\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}{0.02\mathrm{kg}}}=6.0\mathrm{s}^{-1}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=x_0=0.05\mathrm{m}$$

$$\tan\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}=0$$

$$\varphi=0 \text{ 或 } \pi$$



由旋转矢量图可知 $\varphi=0$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=(0.05\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s}^{-1})t]$$

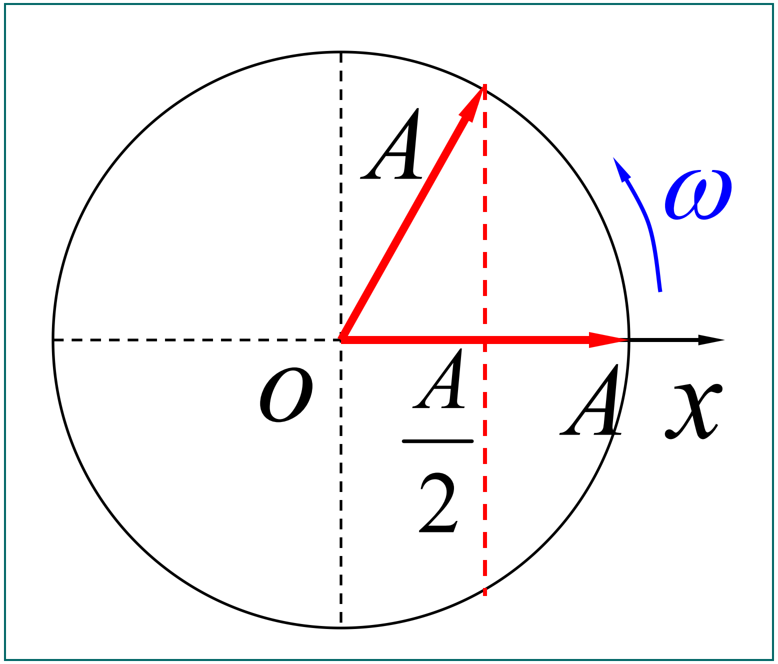
（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

解　$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t)$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

由旋转矢量图可知 $\omega t = \frac{\pi}{3}$

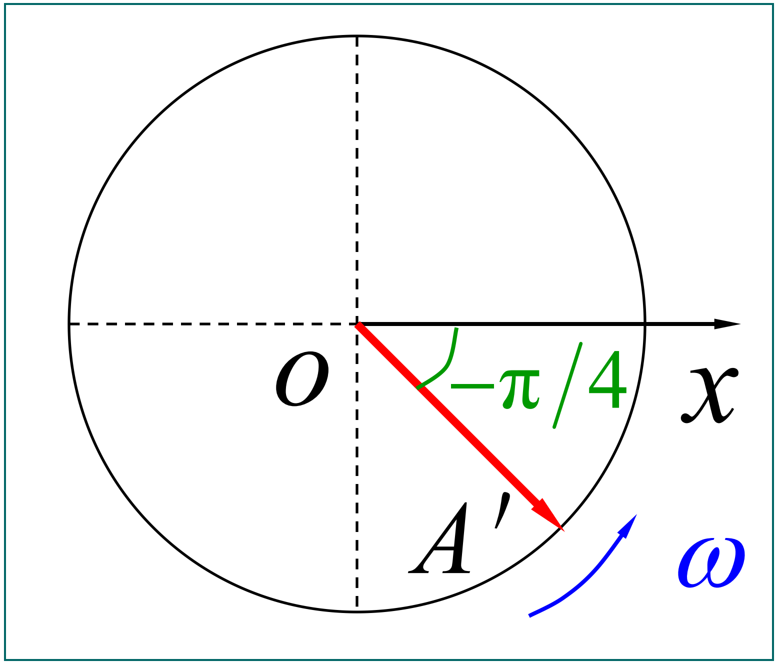


$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$= -0.26\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ （负号表示速度沿 Ox 轴负方向）

（3）如果物体在 $x=0.05\text{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，求其运动方程.

解 $A'=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}=0.0707\text{m}$



$$\tan\varphi'=\frac{-v_0}{\omega x_0}=-1$$

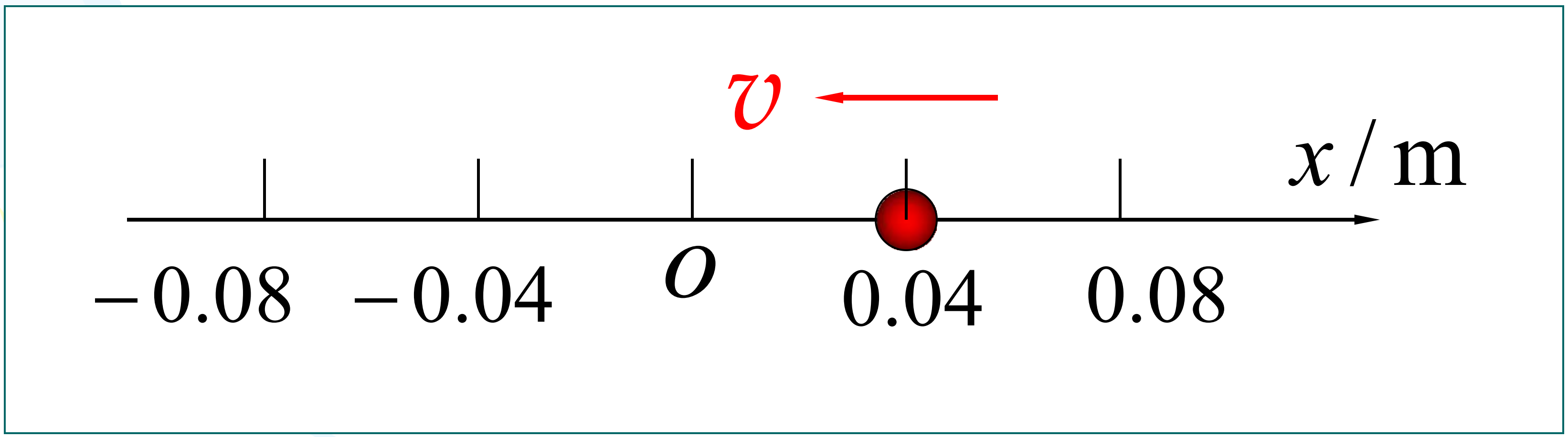
$$\varphi'=-\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$

因为 $v_0>0$，由旋转矢量图可知 $\varphi'=-\pi/4$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=(0.0707\text{m})\cos[(6.0\text{s}^{-1})t-\frac{\pi}{4}]$$

例2 一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m，周期为4s，起始时刻物体在 $x=0.04\text{m}$ 处，向 Ox 轴负方向运动（如图）. **试求**

（1） $t=1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；



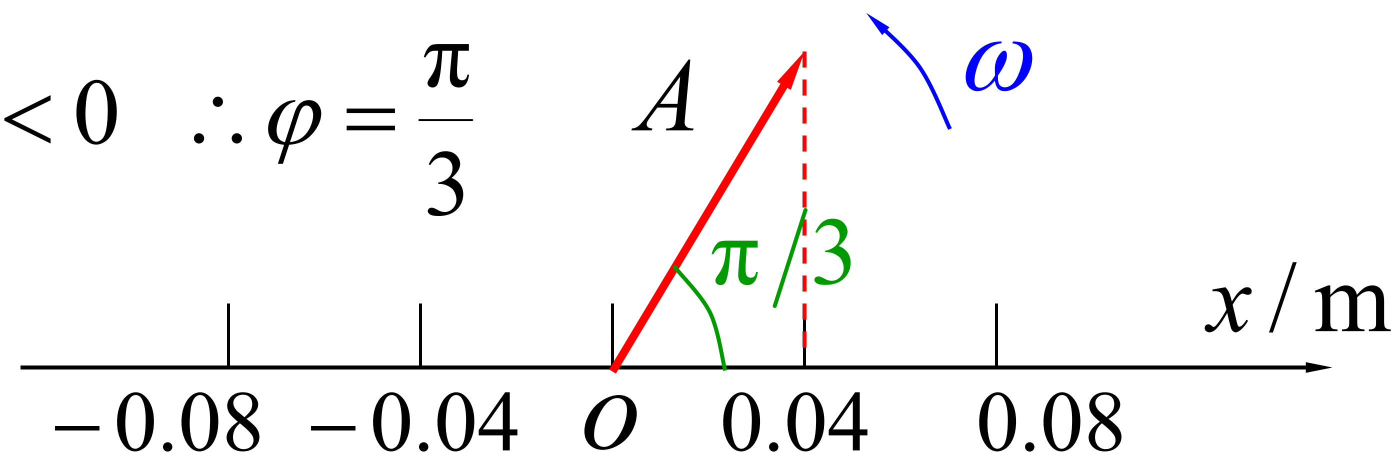
解 $A=0.08\text{m}$ $\qquad \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

$$A = 0.08\text{m} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$$

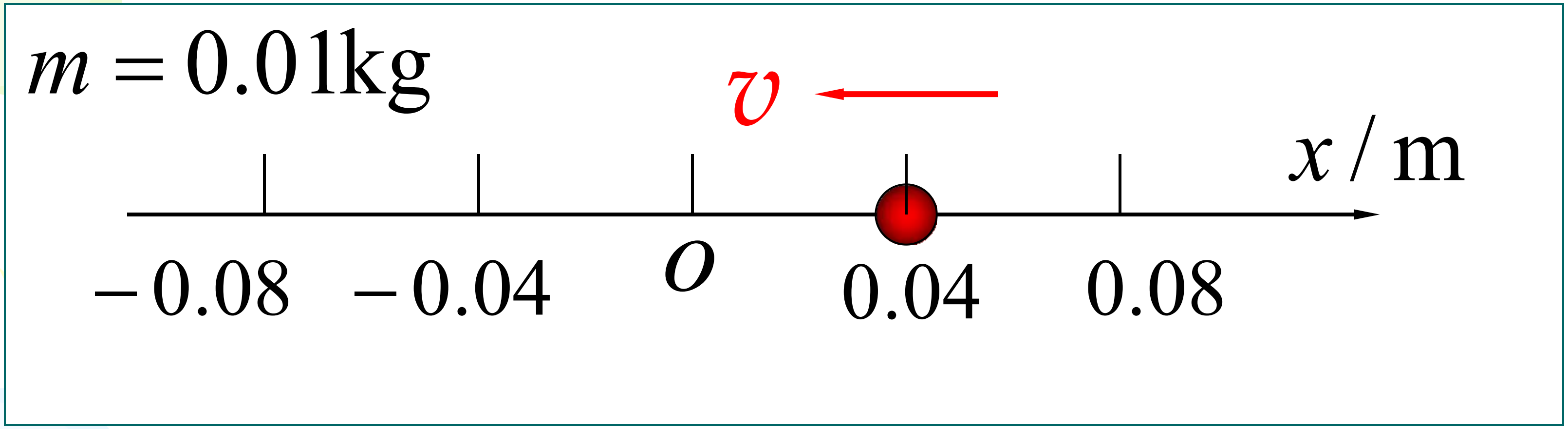
$$t = 0, x = 0.04\text{m}$$ 代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$0.04\text{m} = (0.08\text{m})\cos\varphi \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$



$$x = (0.08\text{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$



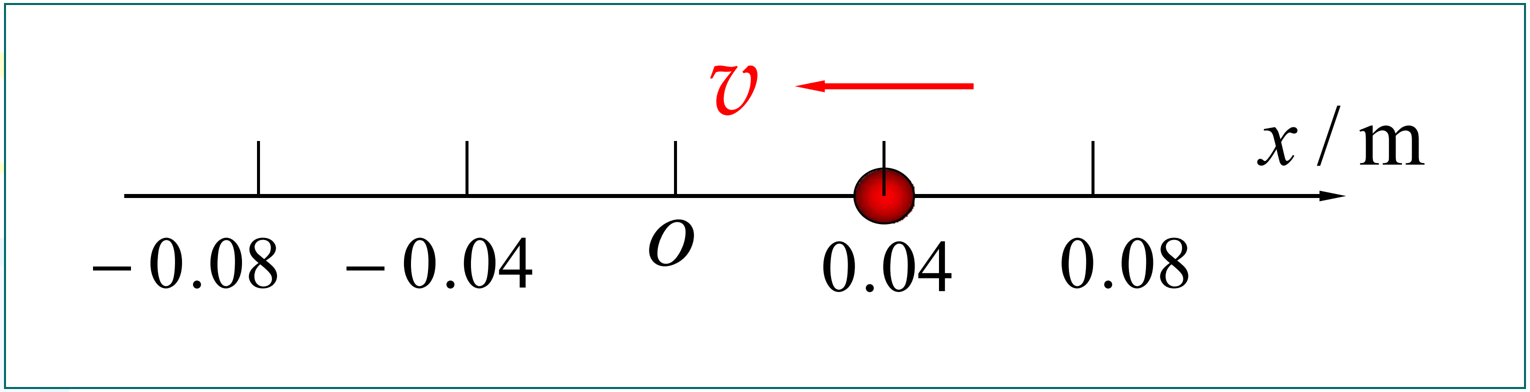
$$x=(0.08\,\mathrm{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})t+\frac{\pi}{3}]$$

$t=1.0\mathrm{s}$ 代入上式得 $x=-0.069\mathrm{m}$

$$F=-kx=-m\omega^2 x$$

$$=-(0.01\mathrm{kg})(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})^2(-0.069\mathrm{m})=1.70\times10^{-3}\mathrm{N}$$

（2）由起始位置运动到 $x=-0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间.

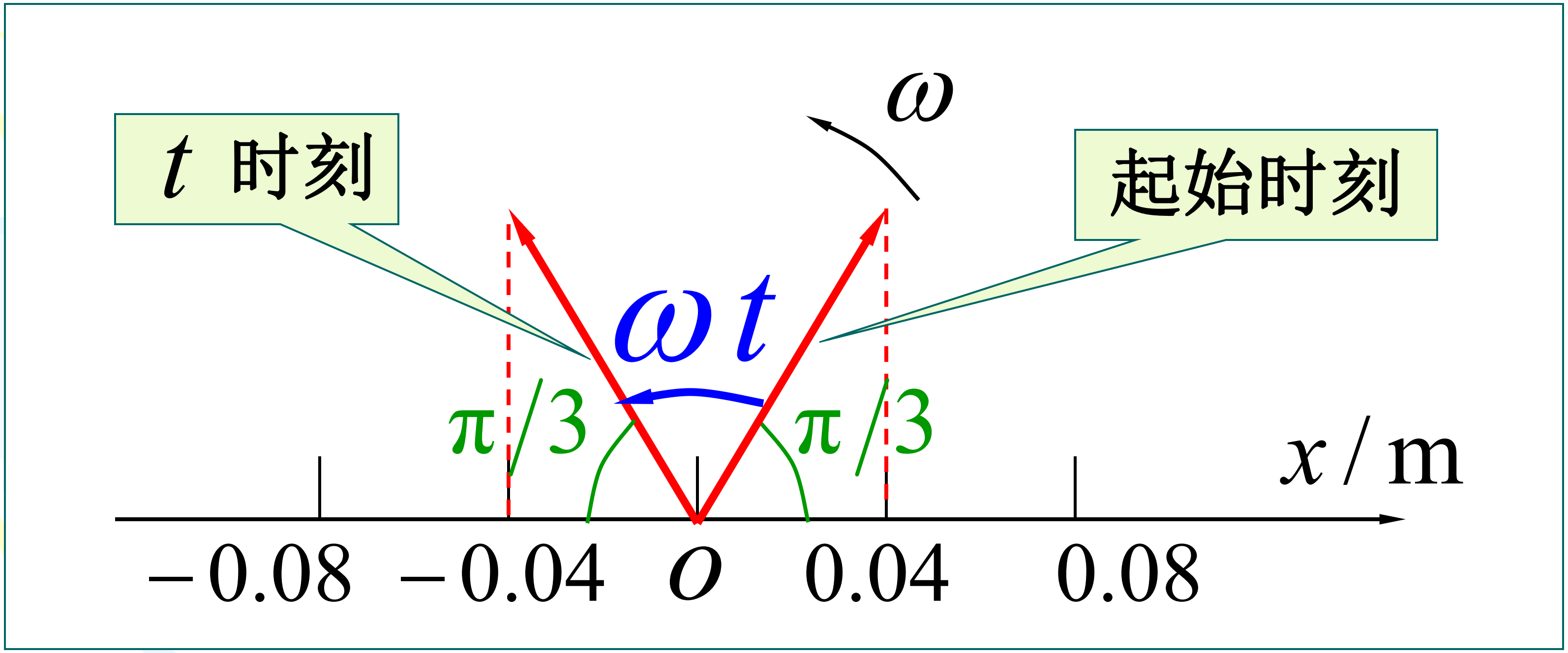


法一 设由起始位置运动到 $x=-0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间为 t

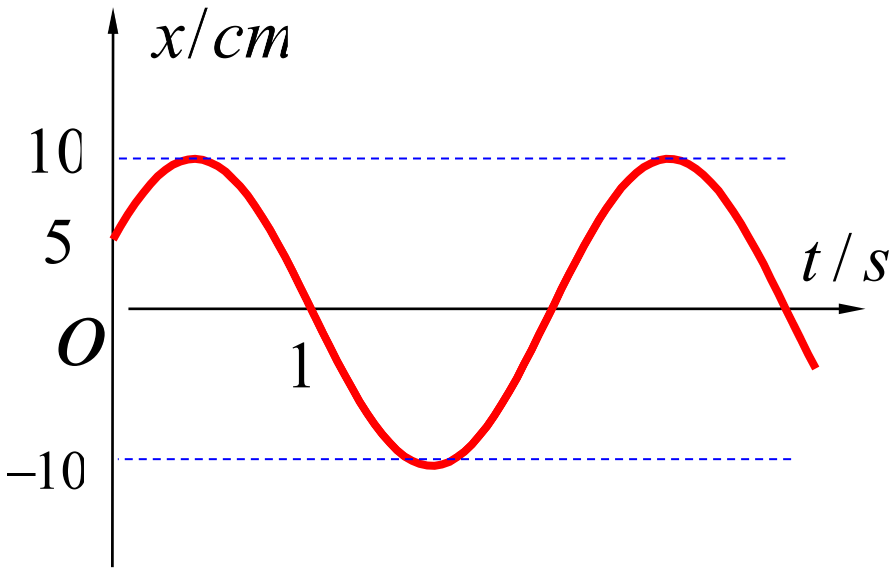
$$-0.04\text{m}=(0.08\text{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})t+\frac{\pi}{3}]$$

$$t=\frac{\arccos(-\frac{1}{2})-\frac{\pi}{3}}{\pi/2}\text{s}=\frac{2}{3}\text{s}=0.667\text{s}$$

解法二



$$\omega t = \frac{\pi}{3} \qquad \omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1} \qquad t = \frac{2}{3}\mathrm{s} = 0.667\mathrm{s}$$



求x~t曲线

设振动方程为

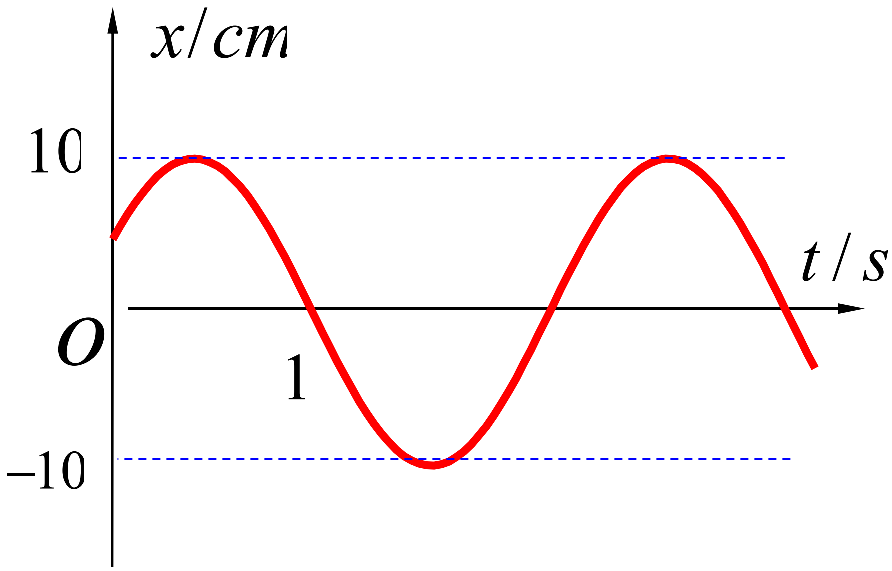
$$\boldsymbol{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

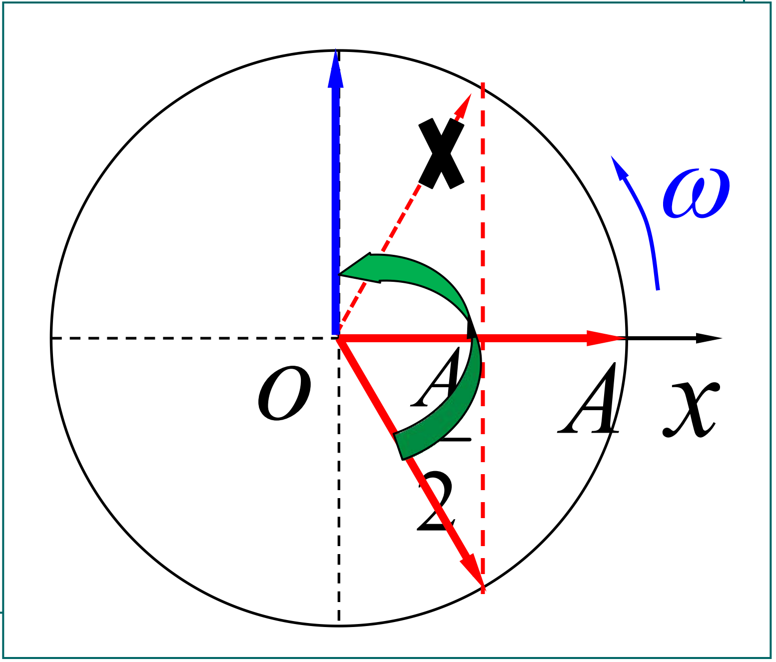
$$v_0 = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

由图可知：t=0时　$x_0 = \frac{A}{2}, v_0 > 0, \therefore \phi_0 = \frac{5\pi}{3}$

$t_1 = 1$　$x_1 = 0, v_1 < 0, \therefore \phi_1 = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$\phi_1 = \omega \times 1 + \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \omega = \frac{5}{6}\pi$　**故** $x_b = 10\cos(\frac{5}{6}\pi t + \frac{5\pi}{3})cm$



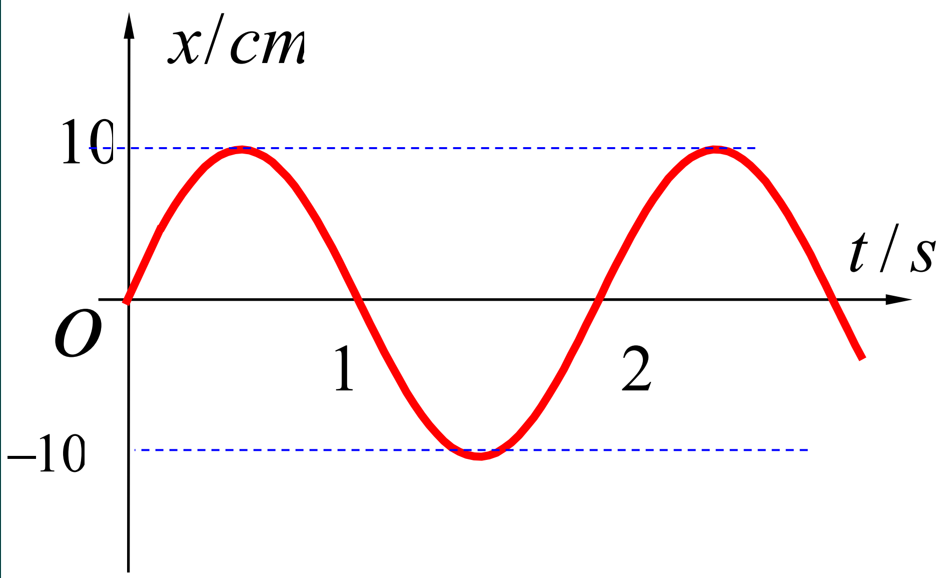


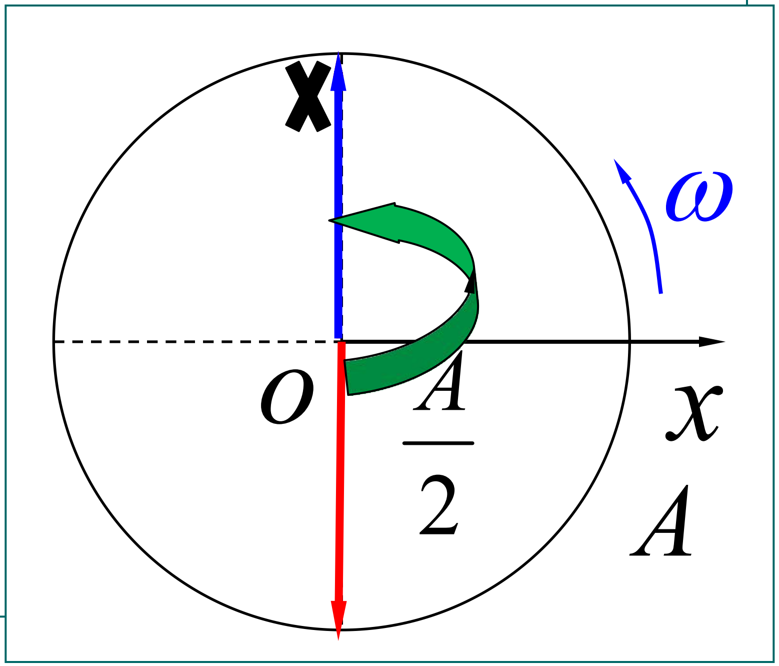
$$\varphi_0 = \frac{5}{3}\pi$$

t=1

$$\Delta\phi = \omega t = \frac{5}{6}\pi \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{5}{6}\pi$$

$$A = 10cm \qquad \therefore x = 10\cos(\frac{5}{6}\pi t + \frac{5}{3}\pi)cm$$





设振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

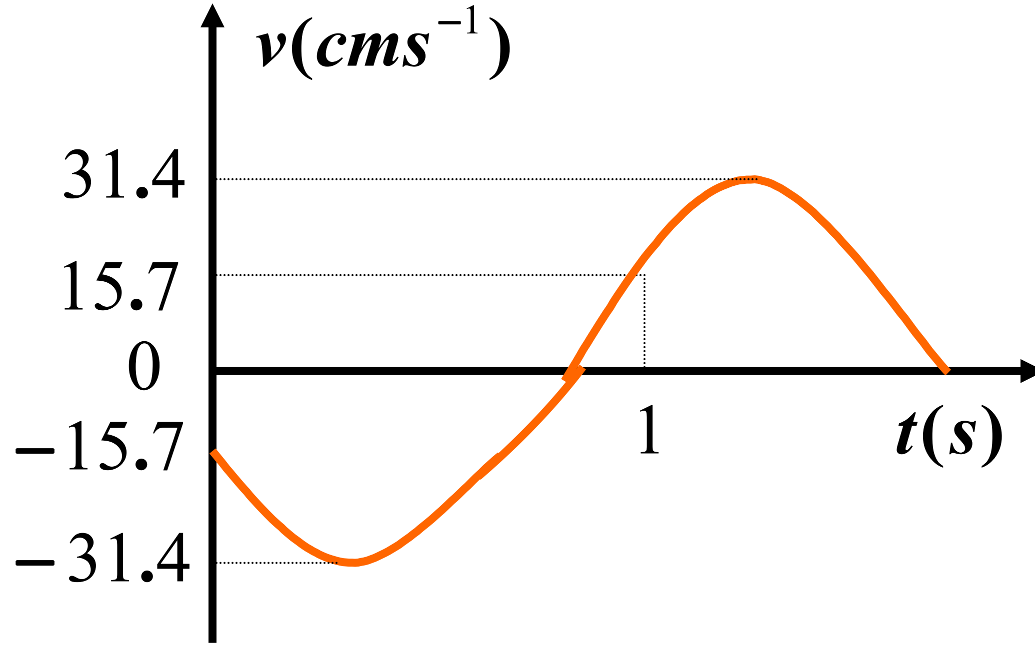
$$v_0 = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$t = 0\ x_0 = 0,\ v_0 > 0,\ \therefore \phi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

T=2s $\Rightarrow$ $\omega = \pi$

$$A = 10cm$$

例 已知某简谐振动的 速度与时间的关系曲线如图所示，试求其振动方程。



解：方法1

设振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 = -15.7cms^{-1}$$

$$a_0 = -\omega^2 A\cos\varphi_0 < 0$$

$$\because \ \omega A = v_m = 31.4cms^{-1} \qquad \therefore \ \sin\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega A} = \frac{15.7}{31.4} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\text{或}\frac{5}{6}\pi \xrightarrow[a_0<0,\text{则}\cos\varphi_0>0]{} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$t=1 \quad v=15.7cms^{-1} \qquad \therefore \sin(\omega\cdot 1+\frac{\pi}{6})=-\frac{v}{\omega A}=-\frac{v}{v_m}=-\frac{1}{2}$

$$\omega\cdot 1+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi \text{或} \frac{11}{6}\pi \xrightarrow[\cos(\omega\cdot 1+\varphi_0)<0]{a_1>0,\text{则}} \omega\cdot 1+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$$

$\omega=\pi=3.14s^{-1} \qquad \therefore \quad A=\frac{v_m}{\omega}=\frac{31.4}{3.14}=10cm$

故振动方程为 $x=10\cos(\pi t+\frac{\pi}{6})cm$

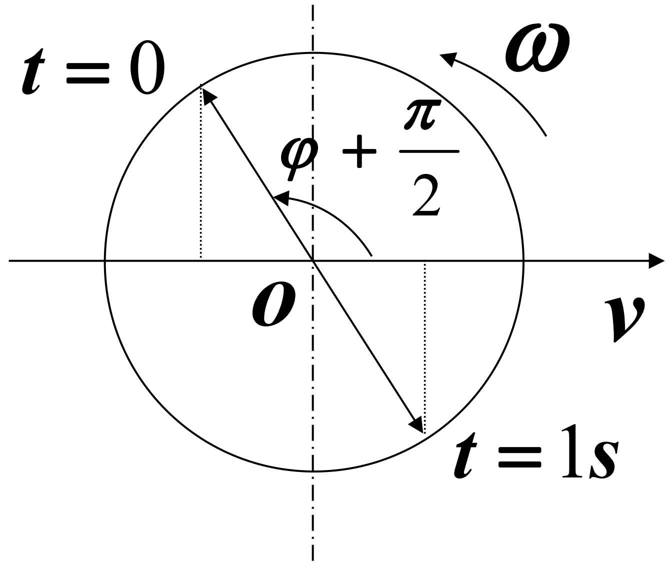
方法2：用旋转矢量法辅助求解。

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=v_m\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$

$v_m=\omega A=31.4cms^{-1}$

v的旋转矢量与v轴夹角表示t时刻相位 $\omega t+\varphi+\dfrac{\pi}{2}$

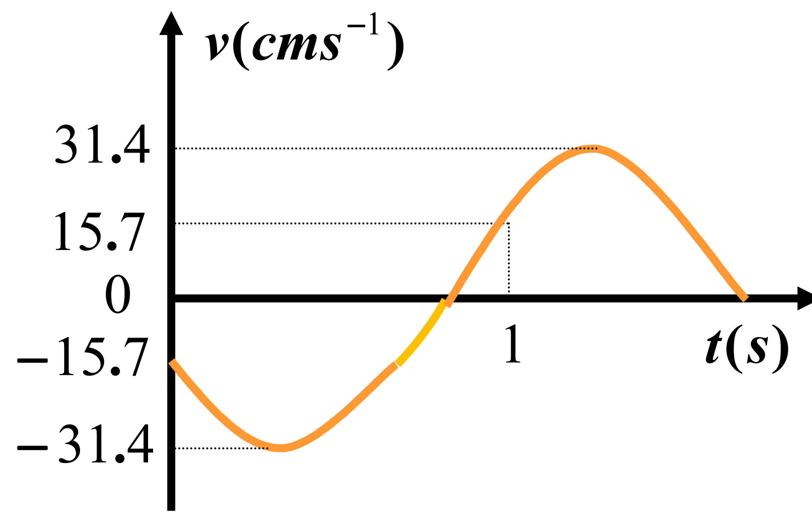


由图知 $\varphi+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{3}\pi \longrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{6}$

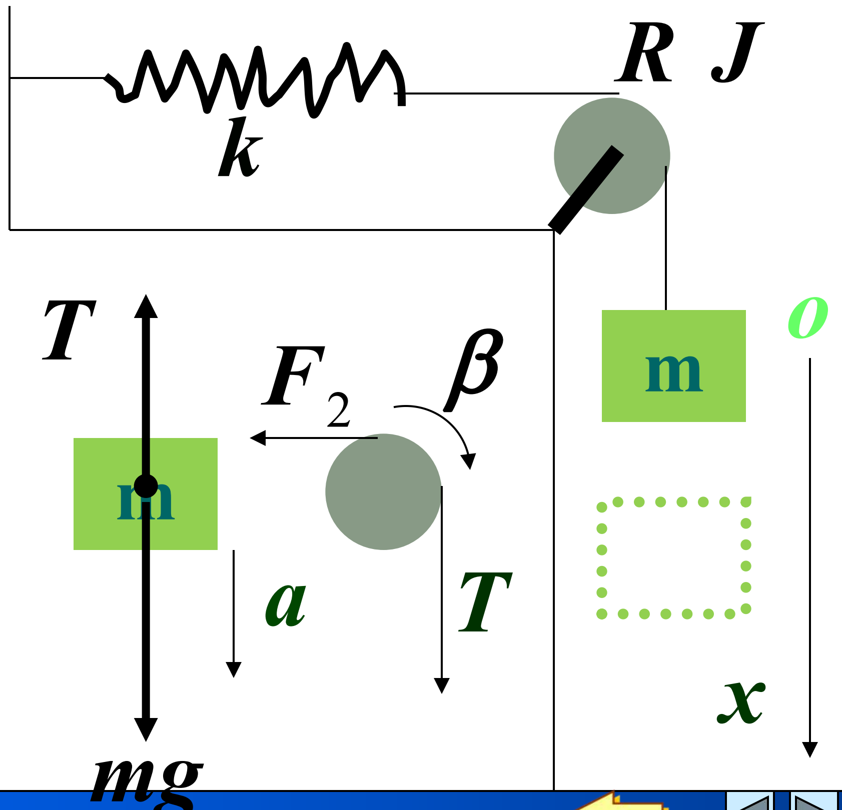
$$\omega\cdot 1=\pi \longrightarrow \omega=\pi s^{-1}$$

$$A=\frac{v_m}{\omega}=\frac{31.4}{3.14}=10cm$$

$$x=10\cos(\pi t+\frac{\pi}{6})cm$$



例:如图所示，振动系统由一倔强系数为k的 轻弹簧、一半径为R、转动惯量为J的 定滑轮和一质量为m的物体所组成。使物体略偏离平衡位置后放手，任其振动，试证物体作简谐振动，并求其周期T.

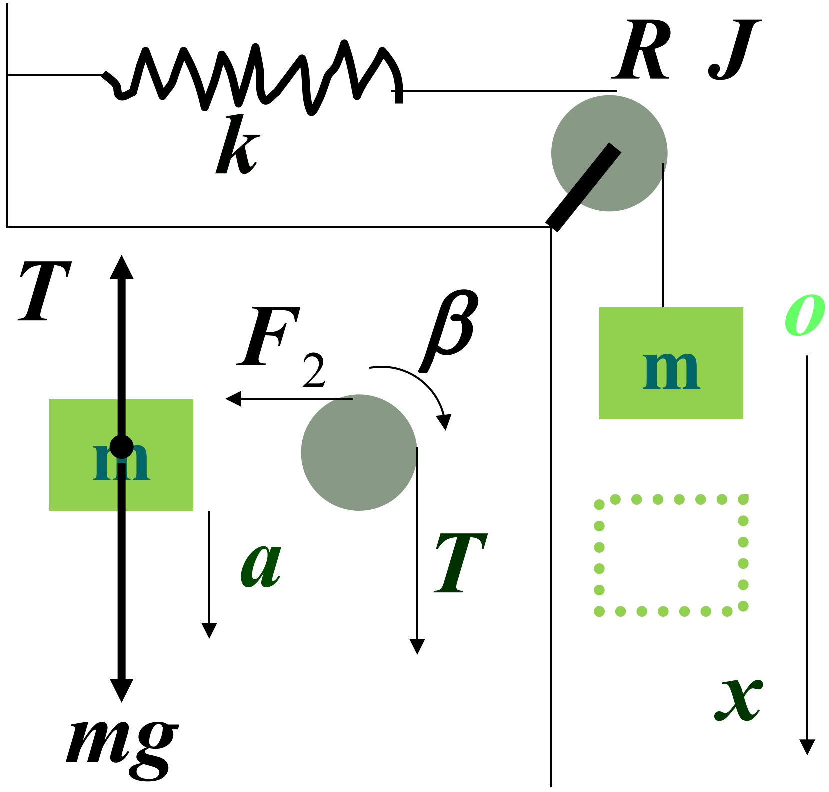


解：取位移轴ox，m在平衡位置时，设弹簧伸长量为Δl，则

$$mg - k\Delta l = 0$$

当m有位移x时

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ [T - k(\Delta l + x)]R = J\beta \\ a = \beta R \end{cases}$$



考虑到　$mg = k\Delta l$

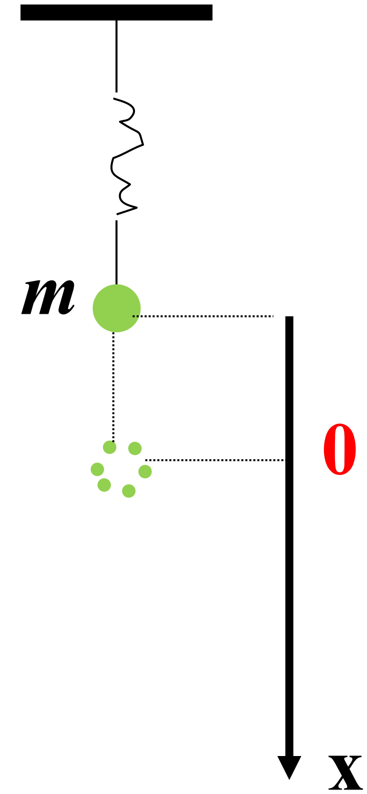
联立得　$-kx = \left(m + \dfrac{J}{R^2}\right)a$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + (J/R^2)}x = 0$$ → 物体作简谐振动

$$\omega^2 = \frac{k}{m + (J/R^2)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + (J/R^2)}{k}}$$

例:如图$m=2\times10^{-2}kg$, 平衡时弹簧形变为$\Delta l=9.8cm$，建如图的坐标轴，取向下为正方向，平衡时为坐标原点 。$t=0$时 $x_0=-9.8cm$，$v_0=0$



（1）取开始振动时为计时零点，写出振动方程；（2）若取$x_0=0$，$v_0>0$为计时零点，写出振动方程, 并计算振动频率。

解：（1）确定平衡位置 $mg=k\,\Delta l$ 取为原点

$$k=mg/\Delta l$$

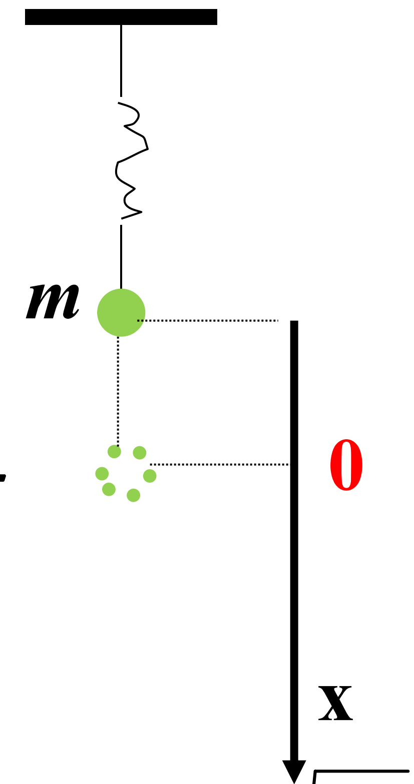
令向下有位移 x, 则 $f=mg-k(\Delta l+x)=-kx$

$\therefore$作谐振动 设振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}=\sqrt{\frac{9.8}{0.098}}=10\,rad\ /\ s$$

由初条件得

$$\omega = 10\,rad\ /\ s$$



$$A = \sqrt{x_0{}^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = 0.098\,m$$

$$tg\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} = 0 \therefore \varphi_0 = 0 \text{或者} \pi$$

由 $x_0 = A\cos\varphi_0 = -0.098 < 0 \ \therefore \cos\varphi_0 < 0$，取 $\varphi_0 = \pi$

振动方程为：$x = 9.8\times10^{-2}\cos(10t+\pi)\ \ m$

（2）　$t=0$ 时 $x_0=0$，$v_0>0$

$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0$, $\cos\varphi_0 = 0$ $\varphi_0 = \pi/2$, $3\pi/2$

$v_0 = -A\omega\sin\varphi > 0$, $\sin\ \varphi_0 < 0$，取 $\varphi_0 = 3\pi/2$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 1.6Hz$$

固有频率

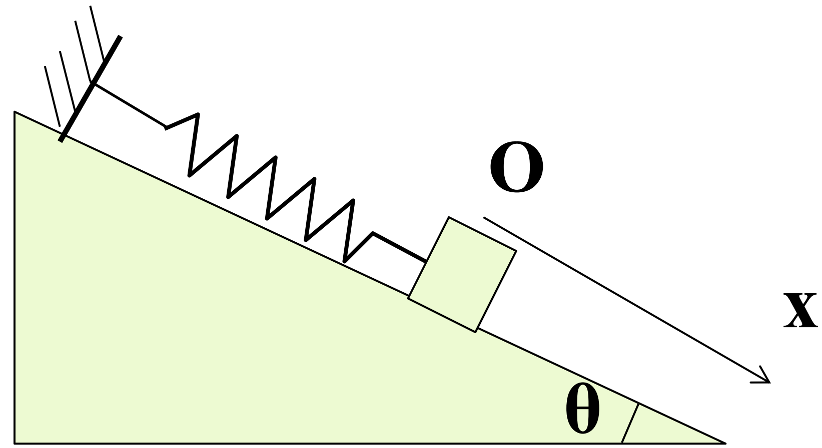
$\therefore x = 9.8\times10^{-2}\cos(10t+3\pi/2)\ \ m$

对同一谐振动取不同的计时起点 φ 不同，但 ω、A 不变

如图所示，轻弹簧的劲度系数为k，物体在光滑斜面上振动

（1）证明其运动仍为简谐振动

（2）求系统的振动频率

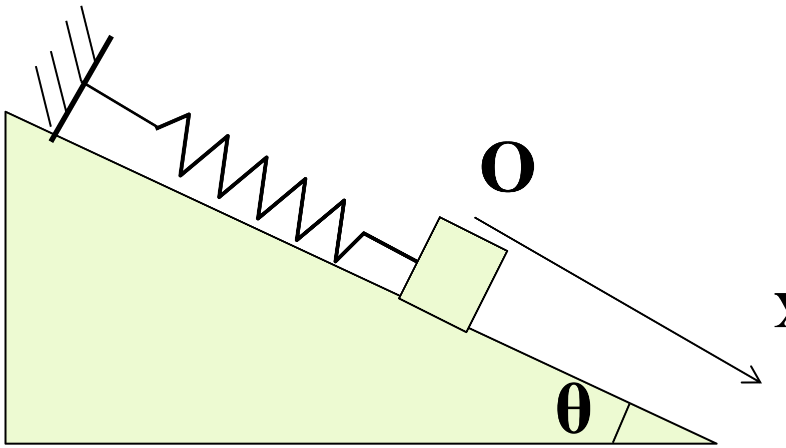


分析：要证明一个系统是否做简谐振动，首先要分析受力，看是否满足简谐运动的受力特征（或简谐运动微分方程），建立如图坐标。设系统平衡时物体所在位置为坐标原点O，Ox轴正向沿斜面向下，分析受力

设物体平衡时弹簧伸长为x_0

则由物体受力平衡，有

$$mg\sin\theta = kx_0$$



物体沿x轴移动位移x时，弹簧又被拉伸（或压缩） x

则物体受力为 $F = mg\sin\theta - k(x_0 + x) = -kx$

由牛二律 $F = -kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ $\xrightarrow{\omega^2 = k/m}$ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

由此可证，物体做简谐振动，振动频率为

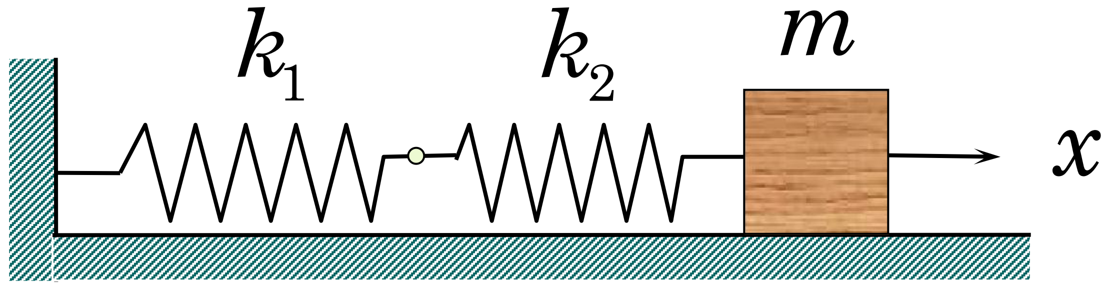
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

讨论

（1）斜面倾角θ对弹簧是否做简谐运动以及振动的频率均不产生影响。无论弹簧水平，斜置还是竖直悬挂，物体均作简谐振动，而且振动频率相同，均由弹簧振子的固有性质决定，这就是称为固有频率的原因

（2）若一个谐振子系统受到一个恒力（以使系统中不出现非线性 因素为限）作用，只要将坐标原点移至恒力作用下新的平衡位置，则该系统仍是一个原系统动力学特征相同的谐振子系统 。

练习： 两个弹簧串联构成弹簧系统，劲度系数分别为 k_1、k_2，求振动频率。



解： m位移x，两弹簧伸长各为x_1、x_2，

$$F_1 = -k_1 x_1, \qquad F_2 = -k_2 x_2$$

$$F = -k(x_1 + x_2)$$

k为系统的劲度系数，

$$F = F_1 = F_2$$

$$F = k\left(\frac{F_1}{k_1} + \frac{F_1}{k_2}\right) = k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F$$

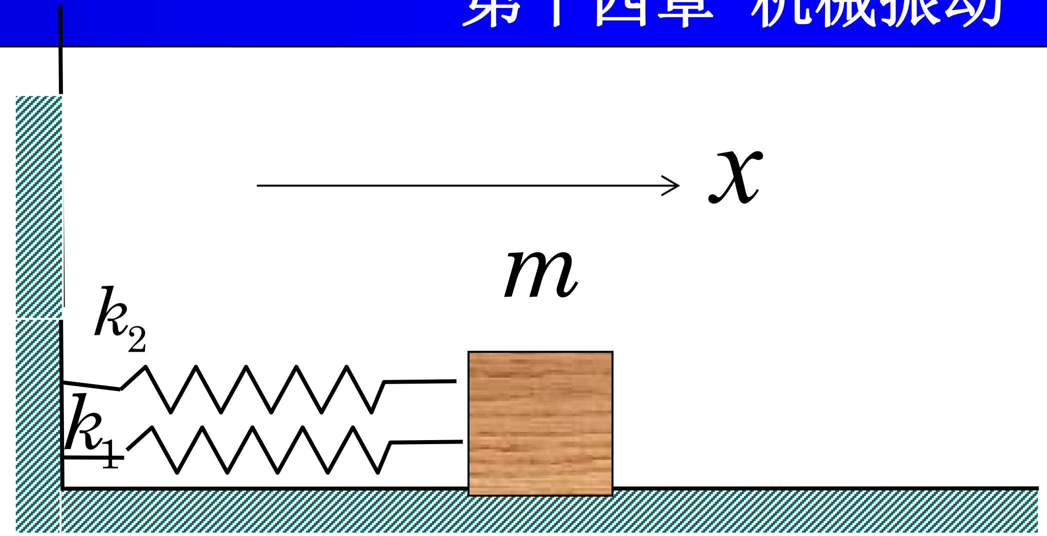
$$F = k\left(\frac{F_1}{k_1} + \frac{F_1}{k_2}\right) = k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \qquad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

证明其是否为简谐振动，并且求出振动周期



解：平衡位置为x=0，m偏离平衡位置为x，两弹簧的位移都为x，$x_1=x_2=x$

$$F_1=-k_1x_1=-k_1x,\qquad F_2=-k_2x_2=-k_2x$$

$$F=F_1+F_2=-(k_1+k_2)x=-kx$$

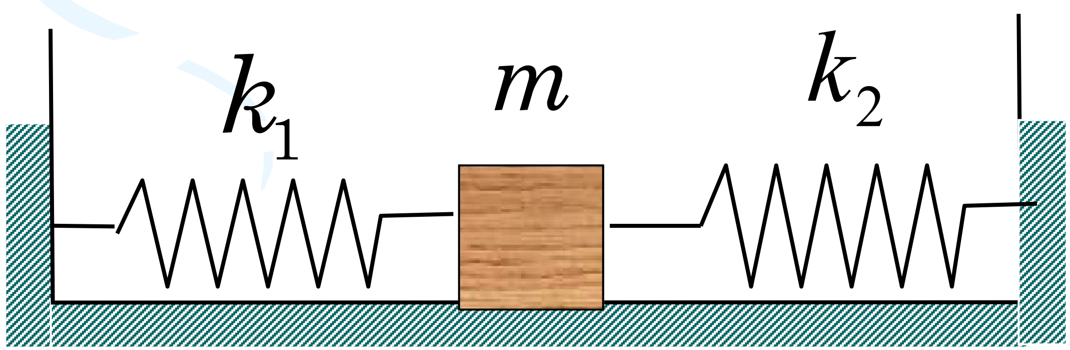
k为系统的劲度系数

并联弹簧的倔强系数为 k ，则有 $k=k_1+k_2$

其振动周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

两个弹簧串联构成弹簧系统，劲度系数分别为k_1、k_2 ，

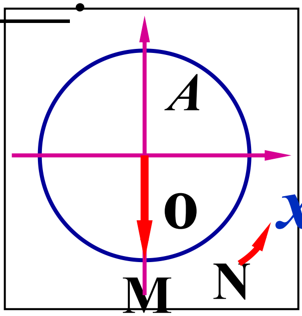
$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$



练习：**1**、一个单摆的摆长为**L**，摆球质量为**m**，当其作小角度摆动时，在下列情况下周期各为多少，（设地球上的重力加速度为**g**）（**1**）在月球上，已知月球上的重力加速度为**1/6g**；（**2**）在环绕地球的同步卫星上；（**3**）在以加速度**a**上升的升降机；（**4**）在以加速度**g**下降的升降机中。

2、 一弹簧振子，弹簧的劲度系数为0.32 N/m，重物的质量为0.02 kg，则这个系统的固有频率为__________，相应的振动周期为___________.

3 一质点作周期为T的简谐运动，质点由平衡位置正方向运动到最大位移一半处所需的最短时间为（　　）



4、已知某简谐运动的运动曲线如图所示，位移的单位为厘米，时间的单位为秒，求此简谐运动的方程.