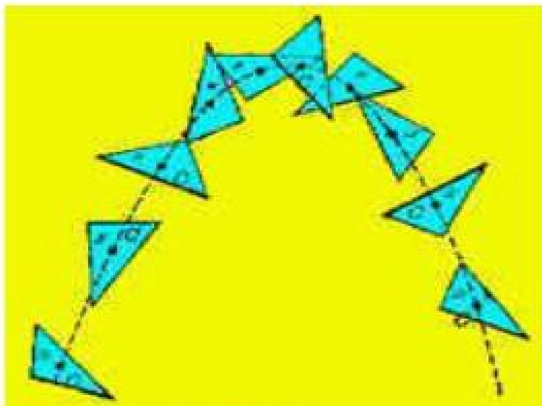
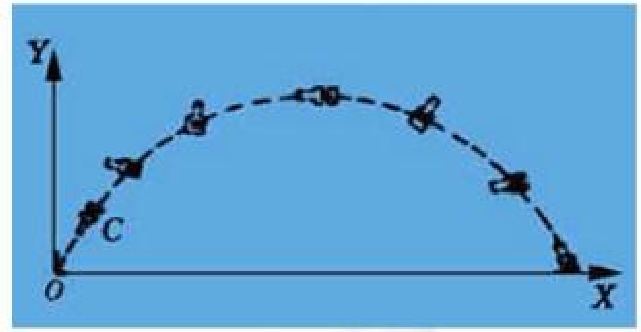
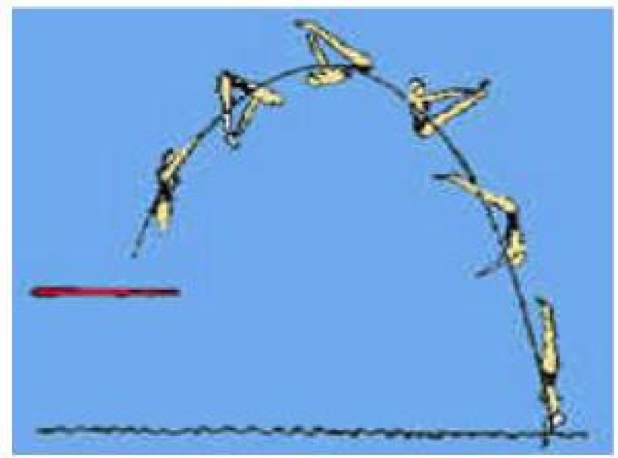
3-9 质心 质心运动定律



水平上抛三角板



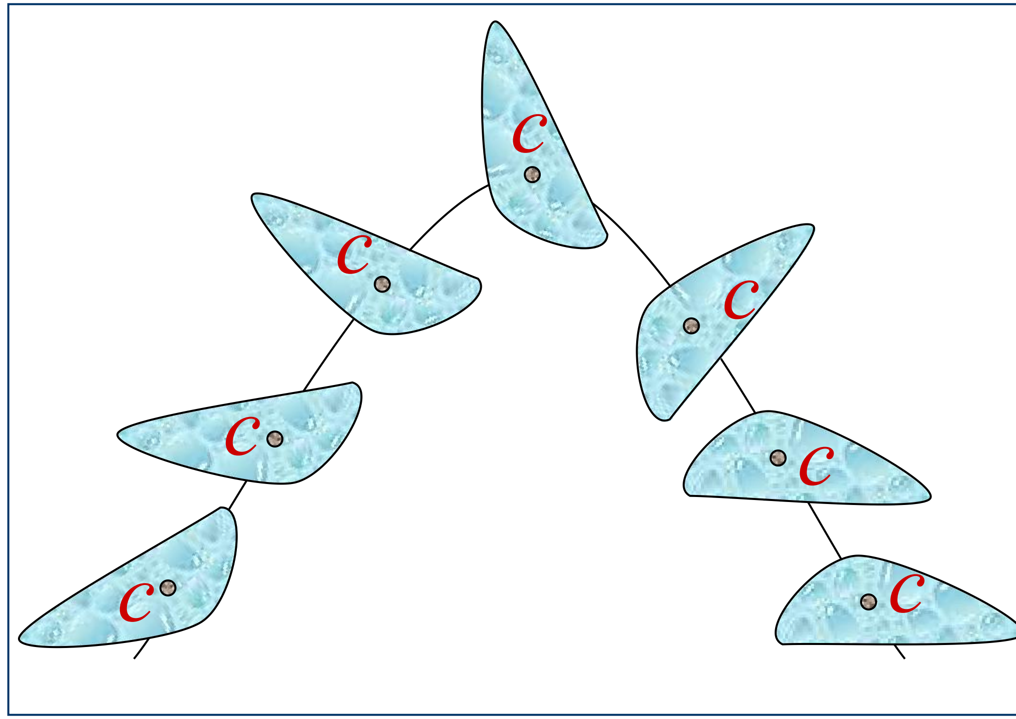
投掷手榴弹



运动员跳水

一 质心

1 质心的概念



- 板上点C的运动轨迹是抛物线

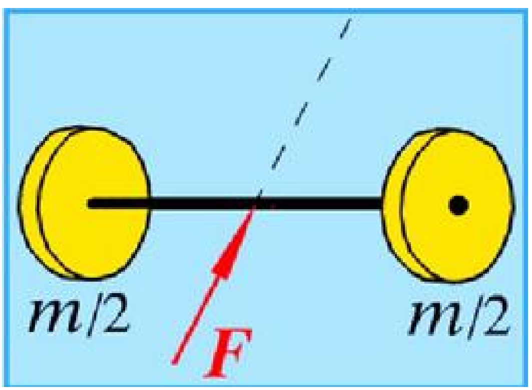
- 其余点的运动=随点C的平动+绕点C的转动

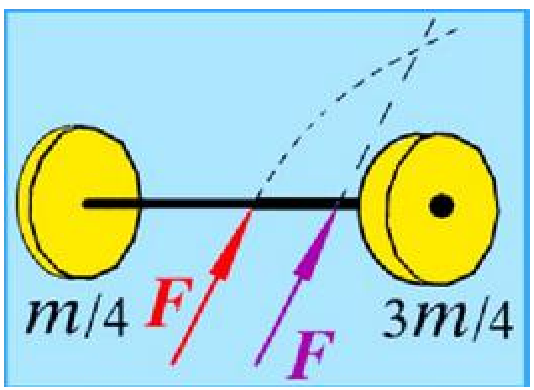
质心

质点系的质量中心，简称质心。具有长度的量纲，描述与质点系有关的某一空间点的位置

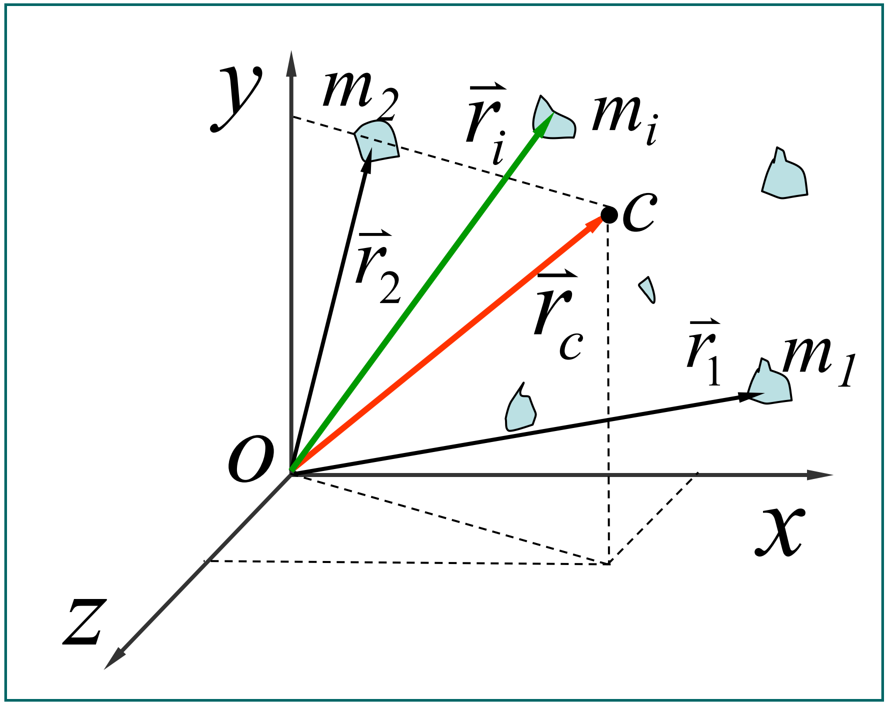
质心运动反映了质点系的整体运动趋势

质点系在力的作用下，其运动状态不但与各质点的质量有关，而且与质量的分布情况有关。





2 质心的位置



由n个质点组成的质点系，其质心的位置：

$$\vec{r}_C=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_i\vec{r}_i+\ldots}{m_1+m_2+\ldots+m_i+\ldots}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m'}$$

➢对质量离散分布的物系：

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m'} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m'} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m'}$$

➢对质量连续分布的物体：

$$\boldsymbol{x}_C = \frac{1}{m'}\int x\mathrm{d}m, \quad \boldsymbol{y}_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m, \quad z_C = \frac{1}{m'}\int z\mathrm{d}m$$

线分布	$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$
面分布	$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S$
体分布	$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$

说明 对称的物体，质心在

3-9　质心　质心运动定律

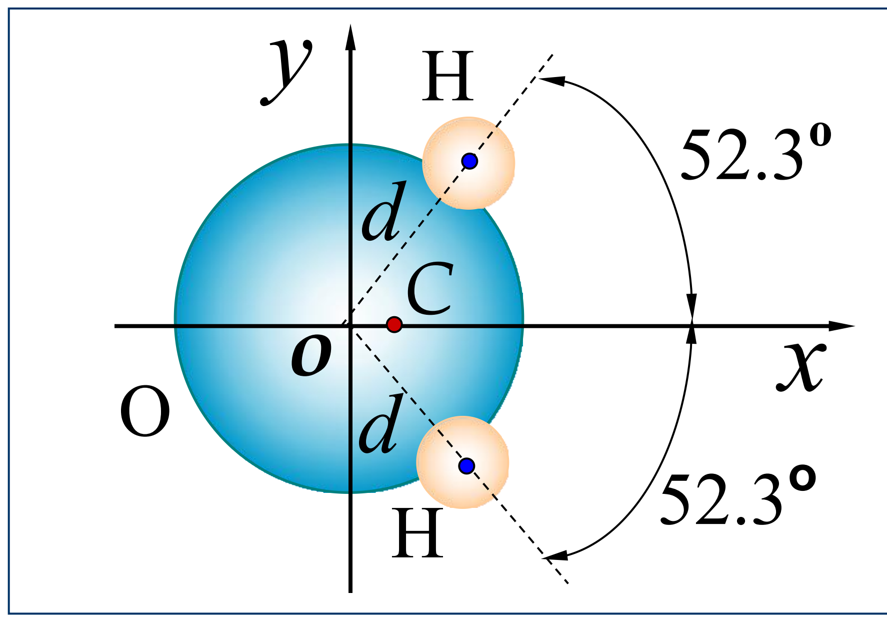
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

1.系统由几个刚体构成，每个刚体质心位置已知，系统质心如何确定？ $m\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_{Ci}$

2. 质心的速度如何确定？ $m\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_{Ci}$

3. 质心的加速度如何确定？ $m\vec{a}_C = \sum m_i \vec{a}_{Ci}$

例1 水分子H_2O的结构如图．每个氢原子和氧原子中心间距离均为$d=1.0\times10^{-10}$ m，氢原子和氧原子两条连线间的夹角为$\theta=104.6^{\circ}$．求水分子的质心．

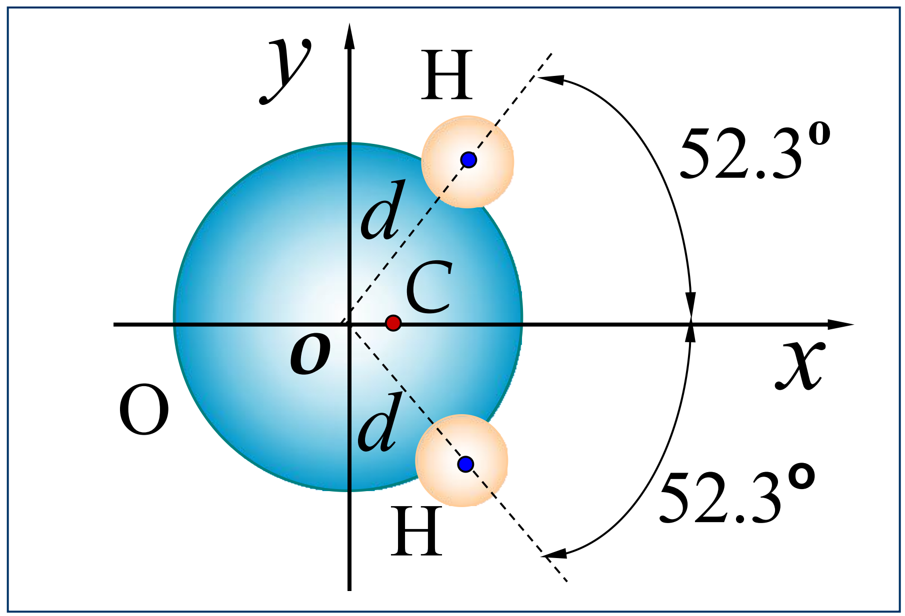


解 $y_C=0$

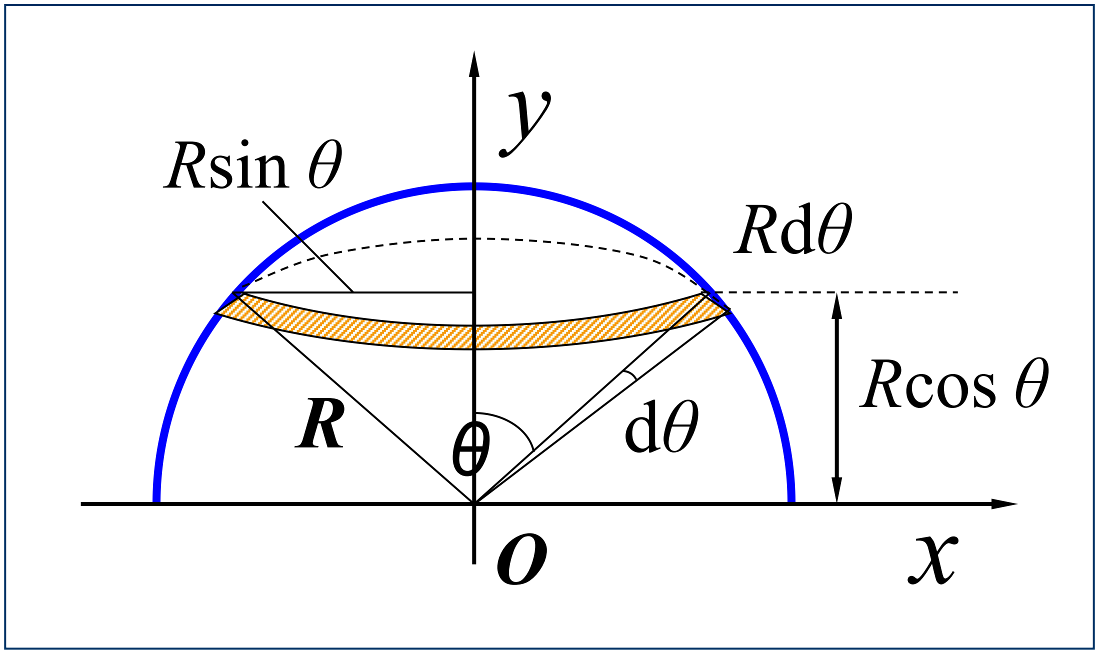
$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum m_i}=\frac{m_{\mathrm{H}}d\sin 37.7^{\circ}+m_{\mathrm{O}}\times 0+m_{\mathrm{H}}d\sin 37.7^{\circ}}{m_{\mathrm{H}}+m_{\mathrm{O}}+m_{\mathrm{H}}}$$

$$x_C=6.8\times 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

$$\vec{r}_C=6.8\times 10^{-12}\ \mathrm{m}\vec{i}$$



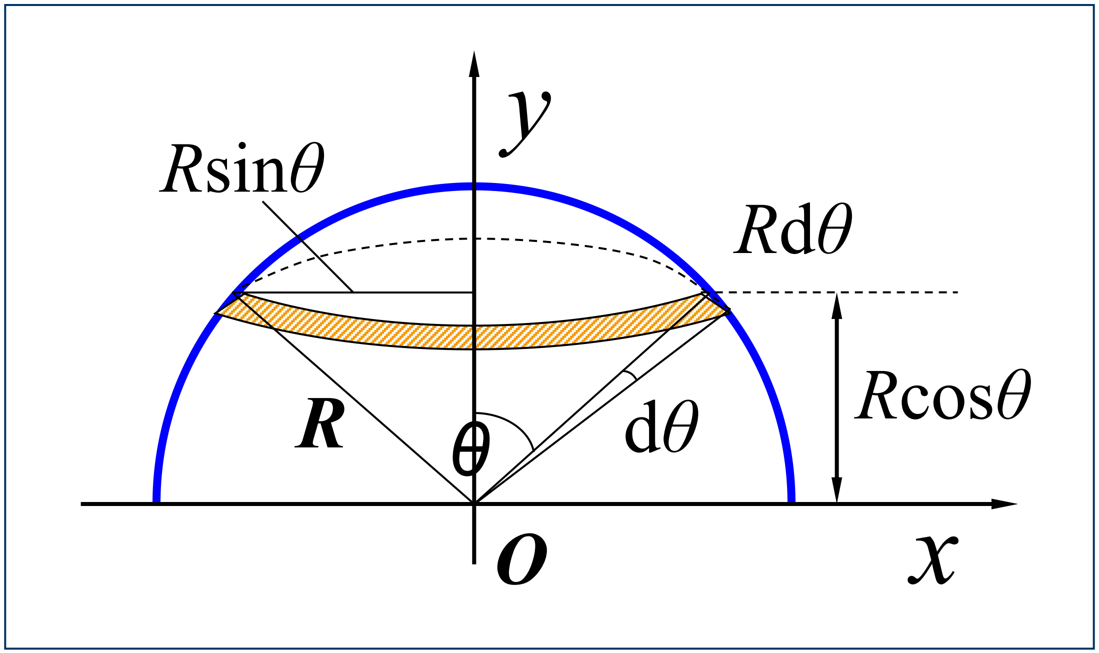
例2 求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心.



解 选如图所示的坐标系.

在半球壳上取一如图圆环

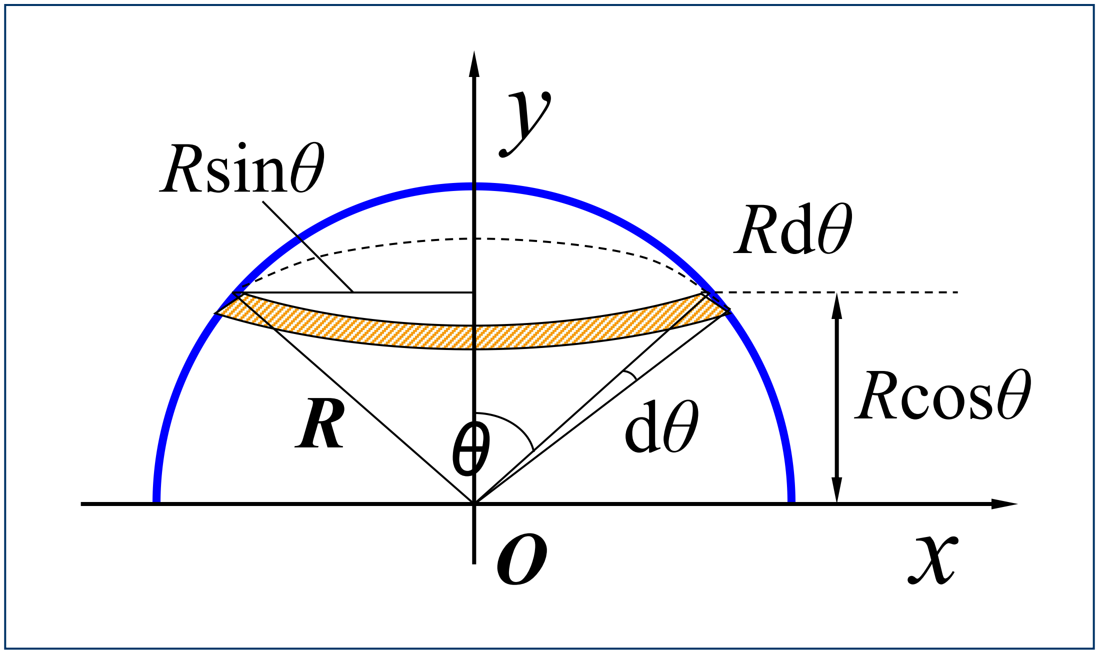
- 圆环的面积 $\mathrm{d}s = 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$



- 圆环的质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

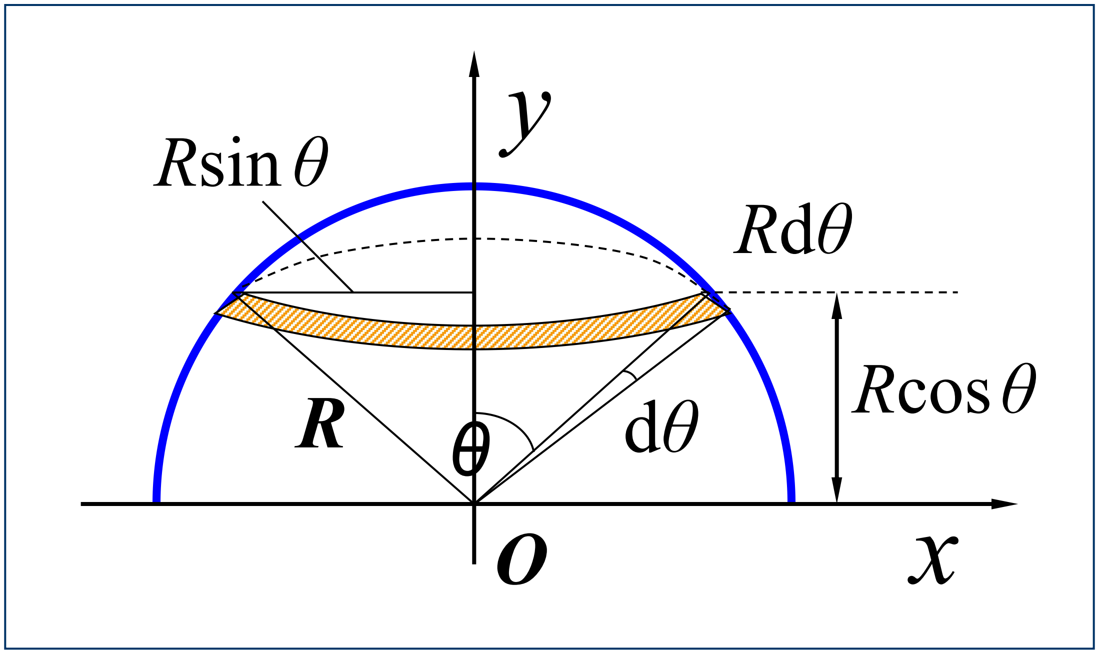
由于球壳关于y轴对称，故$x_c = 0$

3-9 质心 质心运动定律



$$y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m = \frac{\int y \cdot \sigma 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

而 $y = R\cos\theta$



所以 $y_C = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = R/2$

其质心位矢: $\vec{r}_C = R/2\,\vec{j}$

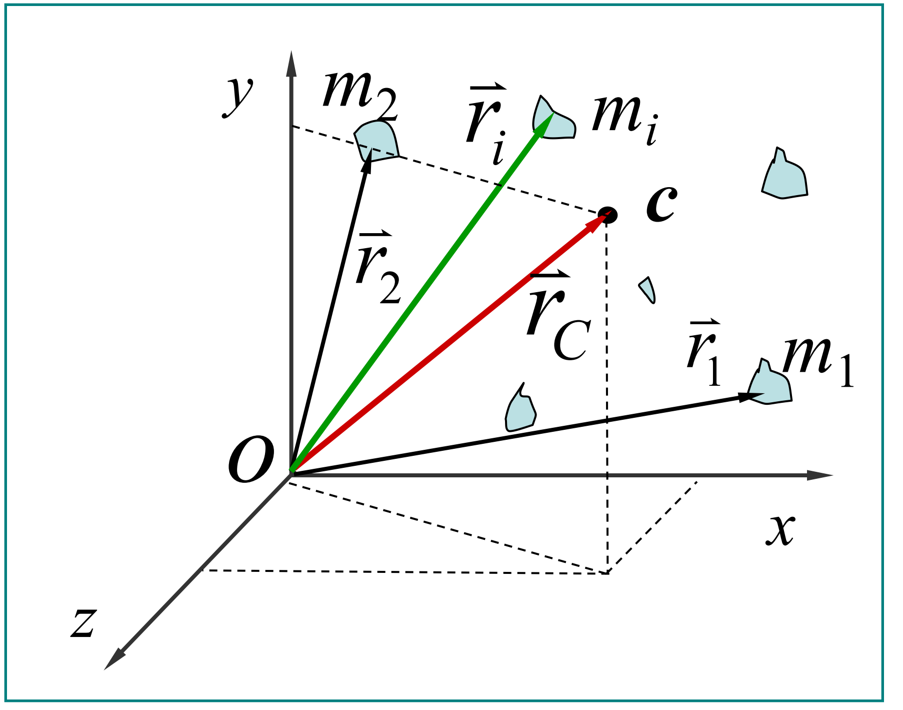
说明:

(1) 质心的位矢并不是各个质点的位矢的几何平均值，而是它们的加权平均值. 质心的性质只有在系统运动与外力的关系中才体现出来. 因此，质心并不是一个几何学或运动学概念，而是一个动力学概念.

(2) 体系质心的坐标与坐标的选取有关，但质心与体系内各个质点(质元)的相对位置与坐标的选取无关.

二 质心运动定律

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m'}$$



$$m'\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$m'\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

上式两边对时间 t 求一阶导数，得

$$m'\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{m'\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$$

在任何参考系中，质心的动量都等于质点系的总动量

再对时间 t 求一阶导数，得 $m'\vec{a}_C = \dfrac{\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i)}{\mathrm{d}t}$

根据质点系动量定理 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{ex}}$

（因质点系内 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{in}}=0$ ）

$$\boxed{\vec{F}^{\mathrm{ex}}=m'\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=m'\vec{a}_C}$$

作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度——质心运动定律

3-9 质心 质心运动定律

$$\vec{F}^{\mathrm{ex}} = m'\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m'\vec{a}_C$$

质心运动定律建立了质点系质心运动与系统所受外力之间的关系

质心运动与内力无关,内力不能改变系统整体的运动状态(系统质心的运动),但是内力可以改变系统内各个质点的运动状态.

质心运动定理可以用于求解作用在系统上的未知外力,特别是约束力

如果作用在质点系合外力为0?

如果作用在质点系某一方向上的合外力分力为0?

3-9 质心 质心运动定律

$$\vec{F}^{\mathrm{ex}} = m'\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m'\vec{a}_C$$

结论：

1，质心“像一个质点一样遵循牛顿第二定律”

2，无论刚体（系）、质点系做何形式的运动，此定理成立

3，质心的运动仅与质系的外力有关，与内力无关

表明：不管物体的质量如何分布，也不管外力作用在物体的什么位置上，质心的运动就象是物体的质量全部都集中于此，而且所有外力也都集中作用其上的一个质点的运动一样。

3-9 质心 质心运动定律

动量守恒定律

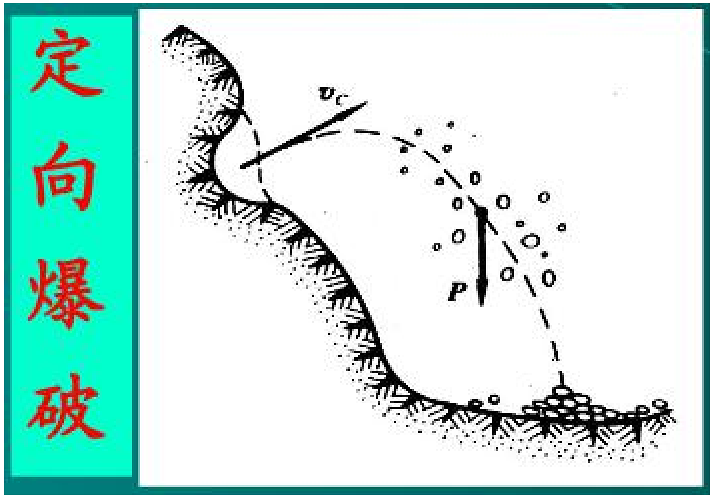
如果系统所受的外力之和为零（即 $\sum \vec{F}_i = 0$），则系统的总动量保持不变。这个结论叫做动量守恒定律。

条件 $\sum \vec{F}_i = 0$

定律 $\vec{v}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$ =常矢量

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_c \text{ =常矢量}$$

3-9 质心 质心运动定律

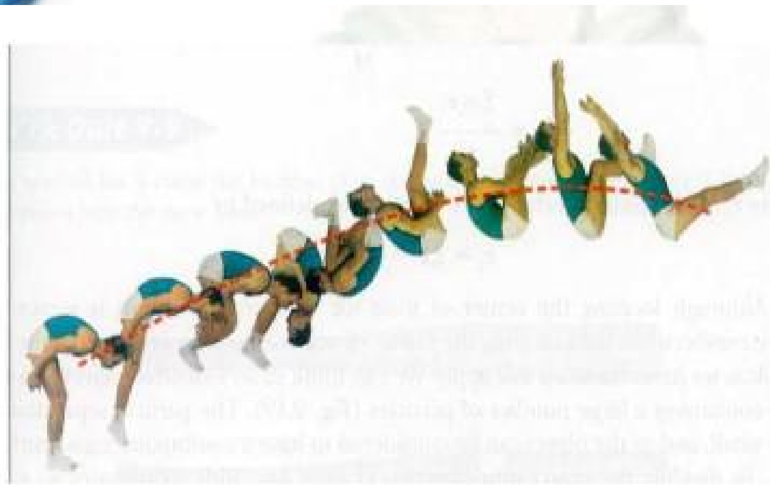


为了某种需要,人们想削去某个山头或者炸掉某座楼房,而不影响周围的建筑,往往采用定向爆破.

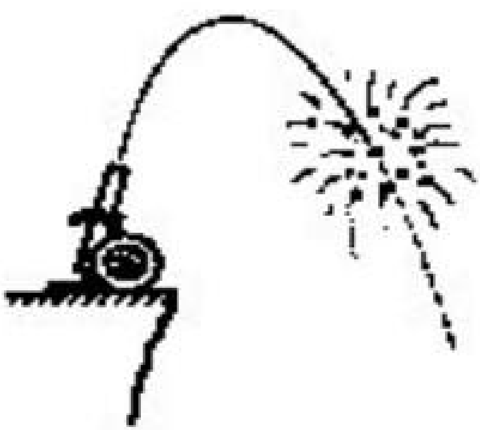
定向爆破时为了确保一定范围外区域内的建筑物和人身安全,必须预先计算爆破飞石散落的地点,你知道爆破飞石散落地点是根据什么计算出来的吗?

就是质心运动定律

3-9 质心　质心运动定律

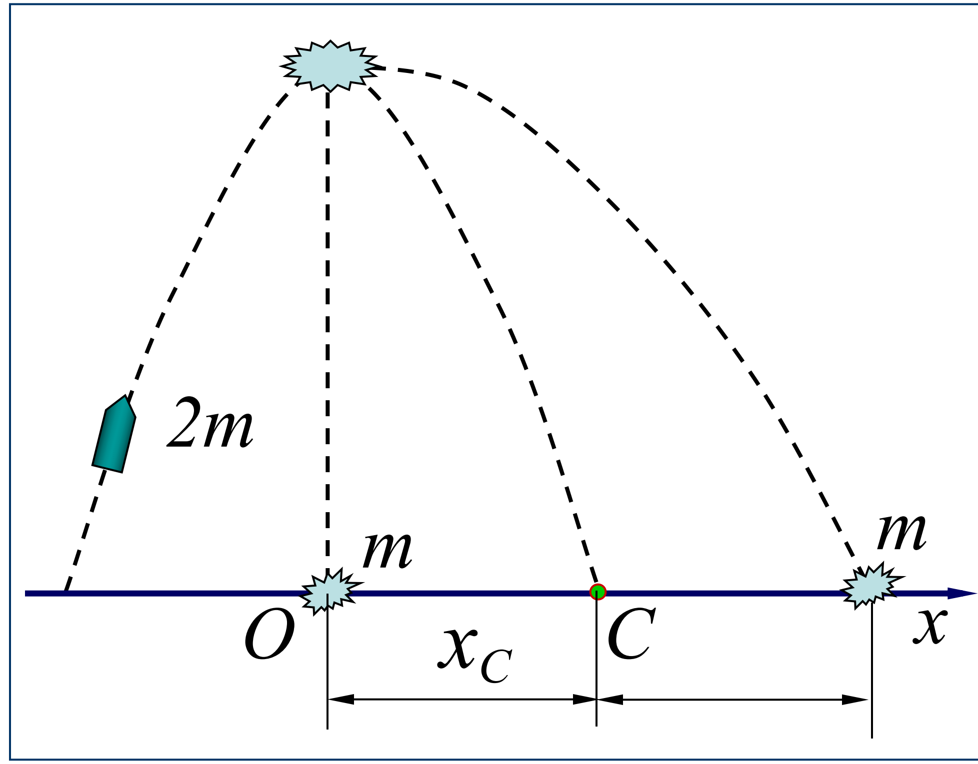


做跳马落地动作的运动员尽管在翻转，但是其质心仍然是在做抛物线运动



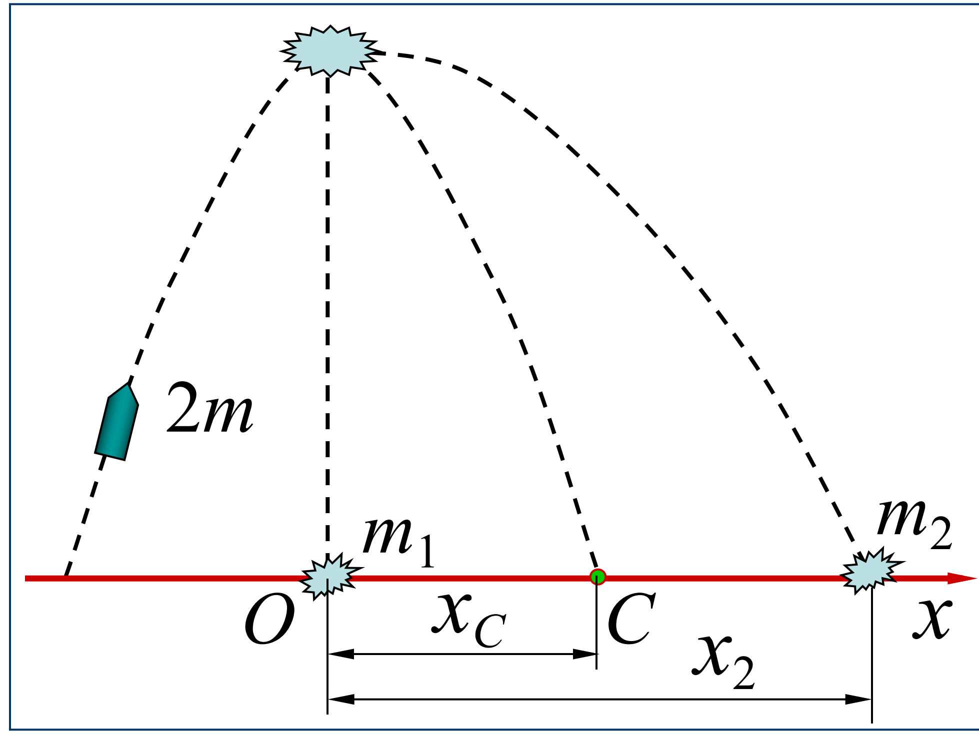
爆炸的焰火弹虽然碎片四散，但其质心仍然在做抛物线运动

例3　设有一质量为$2m$的弹丸，从地面斜抛出去，它飞行在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个竖直自由下落，另一个水平抛出，它们同时落地．问第二个碎片落地点在何处？



解 选弹丸为一系统，爆炸前、后质心运动轨迹不变．建立图示坐标系，$m_1 = m_2 = m$

$x_1 = 0$

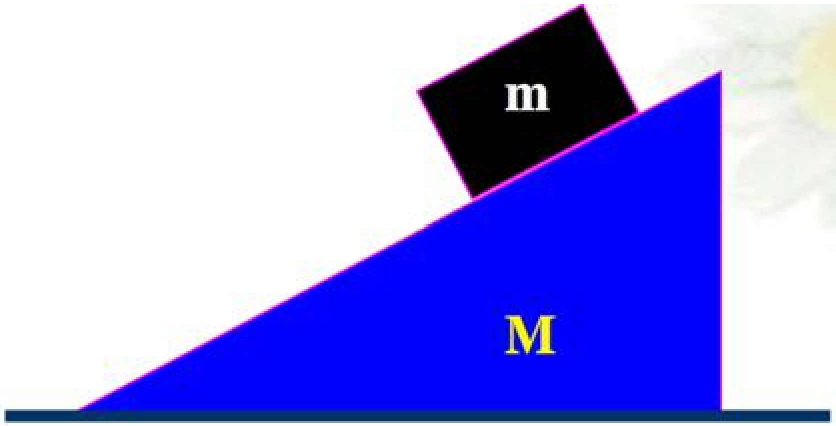


x_C为弹丸碎片落地时质心离原点的距离

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad x_2 = 2x_C$$

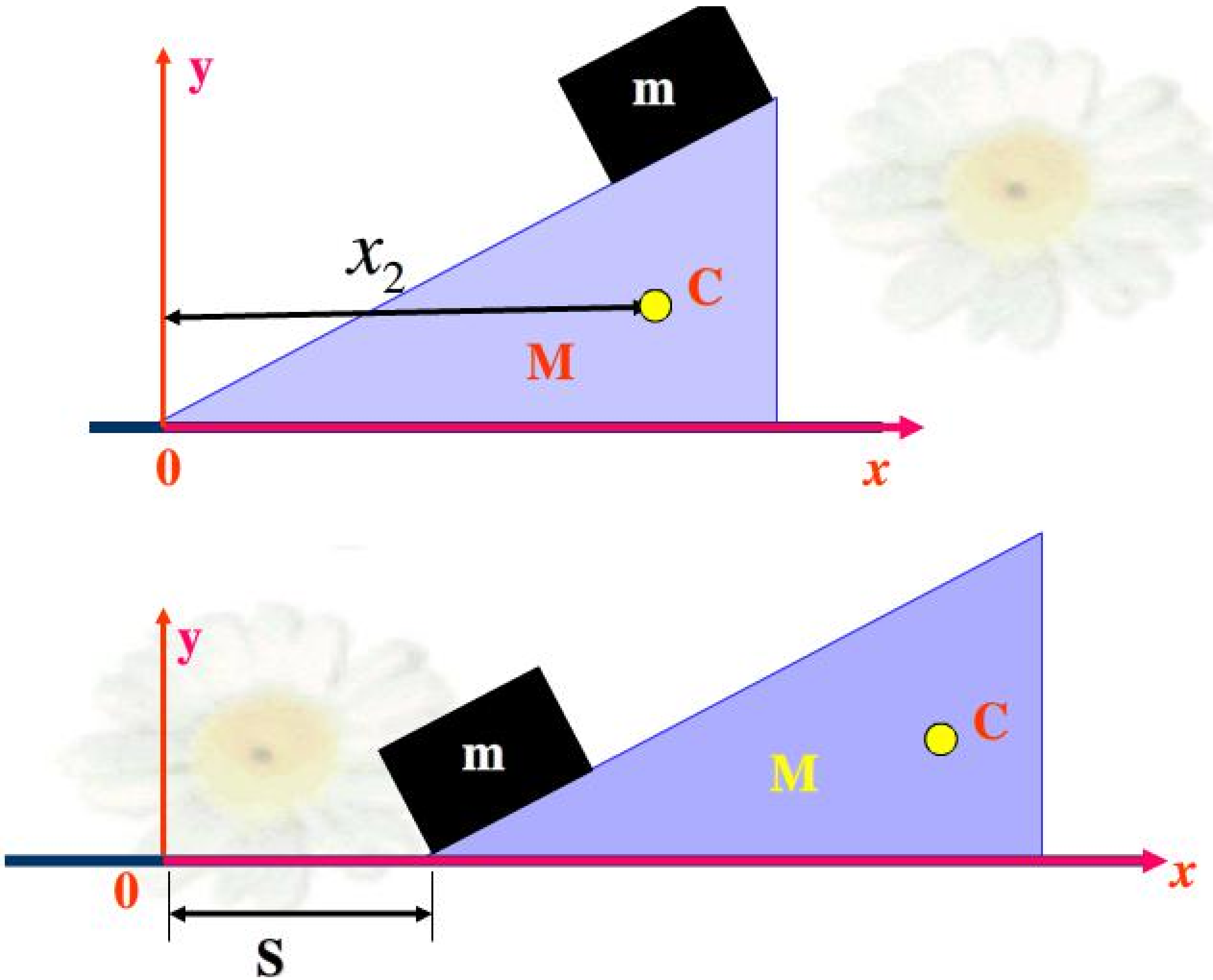
例4 长为l、质量为M的斜面置于光滑水平面上，质量为m的物体从斜面顶端无摩擦滑到底端.

求滑块M后退的距离?



可用质心运动定律求解

3-9 质心 质心运动定律



3-9 质心 质心运动定律

解: 将m和M视为一个质点系.该质点系在水平方向不受任何外力作用,由质心运动定律得:

$$F_x=(M+m)a_x=0 \Longrightarrow a_x=0$$

而: $\vec{v}_c(t=0)=0 \Longrightarrow \vec{r}_c=$ 恒矢量 $\Longrightarrow$ 质心的x坐标应该保持不变

m下滑前 $$x_{c1}=\frac{ml\cos\theta+Mx_2}{M+m}$$

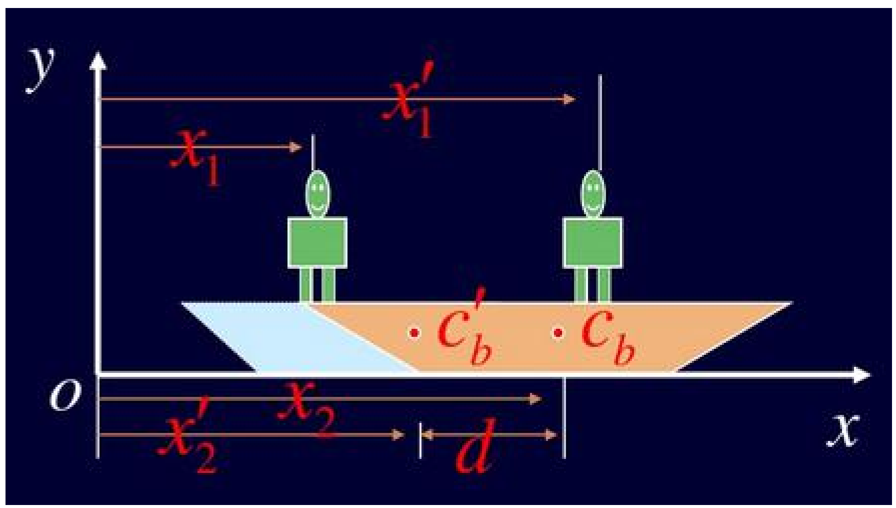
m滑到底端 $$x_{c2}=\frac{mS+M(S+x_2)}{M+m}$$

由 $x_{c1}=x_{c2} \Longrightarrow$ $$S=\frac{ml\cos\theta}{M+m}$$

3-9 质心 质心运动定律

例：一质量m_1=50kg的人站在一条质量为m_2=200kg，长度ℓ=4m的船的船头上，开始时船静止，试求当人走到船尾时船移动的距离。（假定水的阻力不计）

解：设c_b表示船本身的质心

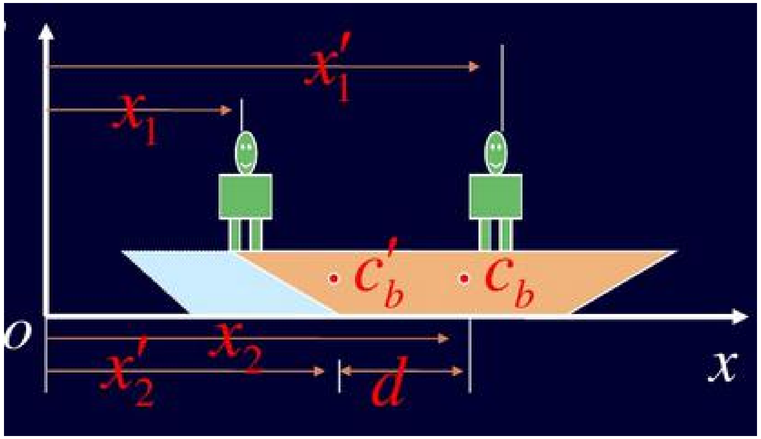


3-9 质心 质心运动定律

当人站在船的左端时 $x_C=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$

当人站在船的右端时 $x_C'=\dfrac{m_1x_1'+m_2x_2'}{m_1+m_2}$

当人站在船的右端时
对船和人这一系统，在水平方向上不受外力，因而在水平方向的质心速度不变。又因为原来质心静止，所以在人走动过程中质心始终静止，因而质心的坐标值不变。



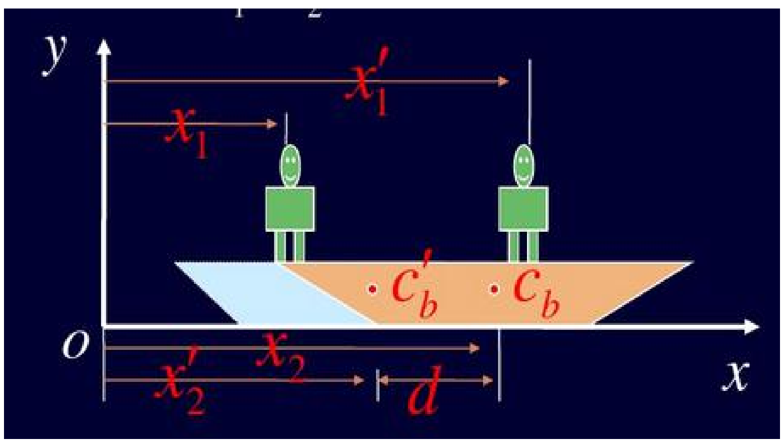
$$x_C=x_C'$$

3-9 质心 质心运动定律

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 x_2'$$

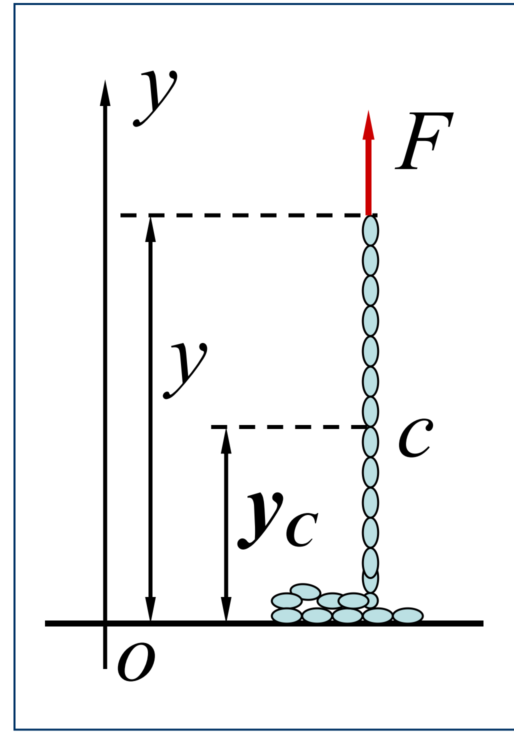
$$m_1 \underbrace{(x_1' - x_1)}_{\ell-d} = m_2 \underbrace{(x_2 - x_2')}_{d}$$

$$d = \frac{m_1}{m_1 - m_2}\ell = 0.8(m)$$



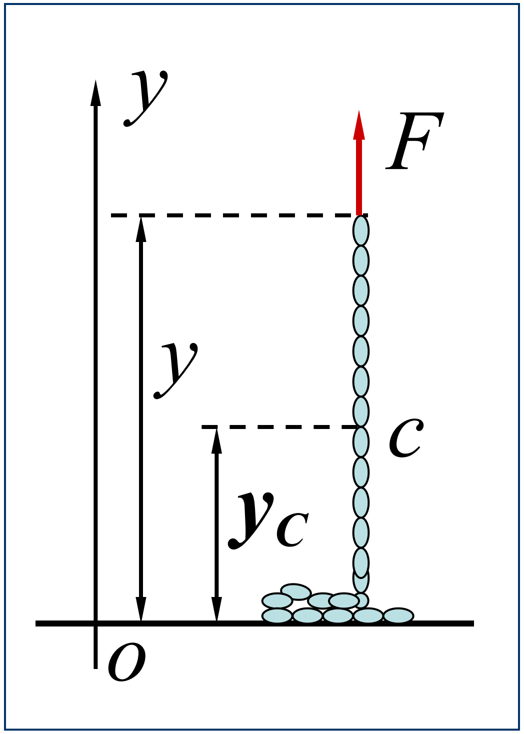
例4 用质心运动定律来讨论以下问题.

一长为l、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为 λ．将其卷成一堆放在地面．若手提链条的一端，以匀速v将其上提．当一端被提离地面高度为 y 时，求手的提力.



解　建立图示坐标系

链条质心的坐标y_c是变化的



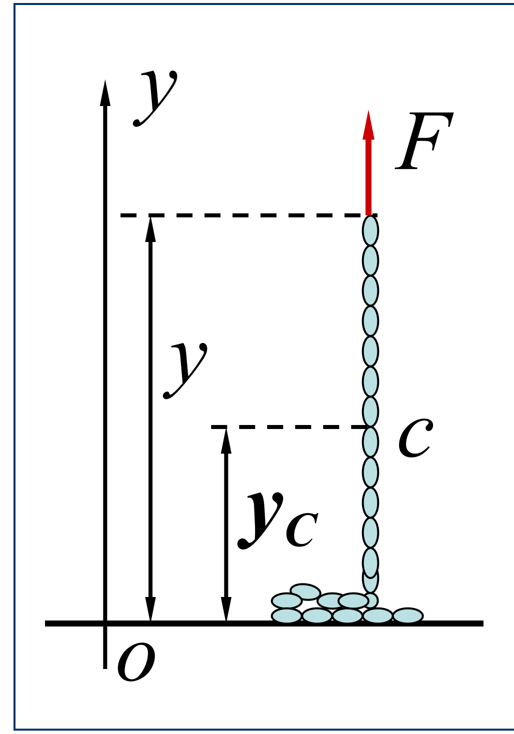
$$y_c=\frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}=\frac{\lambda y\dfrac{y}{2}+\lambda(l-y)\times 0}{\lambda l}$$

$$=\frac{y^2}{2l}$$

竖直方向作用于链条的合外力为 $F-\lambda yg$

由质心运动定律有

$$F - y\lambda g = l\lambda \frac{\mathrm{d}^2 y_C}{\mathrm{d}t^2}$$



而 $$\frac{\mathrm{d}^2 y_c}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right]$$

考虑到 $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0$

得到 $$F - y\lambda g = l\lambda \frac{\mathrm{d}^2 y_C}{\mathrm{d}t^2} = l\lambda \cdot \frac{v^2}{l}$$

$$\therefore F = \lambda y g + \lambda v^2$$