第2章　规则金属波导

主要内容:

1. 矩形波导中的场
2. 矩形波导的传输特性
3. 矩形波导中的主模TE_{10}模

基本要求:

1. 掌握矩形波导的定义
2. 掌握矩形波导中的场
3. 掌握矩形波导中的截止波数与截止波长
4. 掌握矩形波导中主模的定义及特点
5. 掌握矩形波导中的主模TE_{10}模场的表达式
6. 掌握矩形波导中的主模TE_{10}模的传输特性

习题:2. 2, 2. 3, 2. 4, 2. 6

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

◆波导的一般解采用<u>纵向分量法</u>，其流图如下所示。

出发点无源

Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \end{cases}$$

→

支配方程

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$$
$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0$$

→

纵向分量方程

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$
$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

→

其它分量用

E_z, H_z表示

$$\begin{cases} E_x = f_1(E_z, H_z) \\ E_y = f_2(E_z, H_z) \\ H_x = f_3(E_z, H_z) \\ H_y = f_4(E_z, H_z) \end{cases}$$

纵向分量法流图

核心

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆在矩形波导中存在**TE**和**TM**两类波，请注意矩形波导中不可能存在**TEM**波(推而广之，任何空心管中都不可能存在TEM波)。

◆1、TE波($E_z=0$，$H_z\neq0$)(H波)

(1)纵向磁场可表达为 $H_z(x,y,z)=H_{0z}(x,y)e^{-j\beta z}$

(2)而H_{oz}(x, y)满足以下方程

$$\nabla_t^2 H_{0z}(x,y)+k_c^2 H_{0z}(x,y)=0 \quad (2-2-1)$$

(3)在直角坐标系中 $\nabla_t^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H_{oz}(x,y)+k_c^2 H_{oz}(x,y)=0 \quad (2-2-2)$$

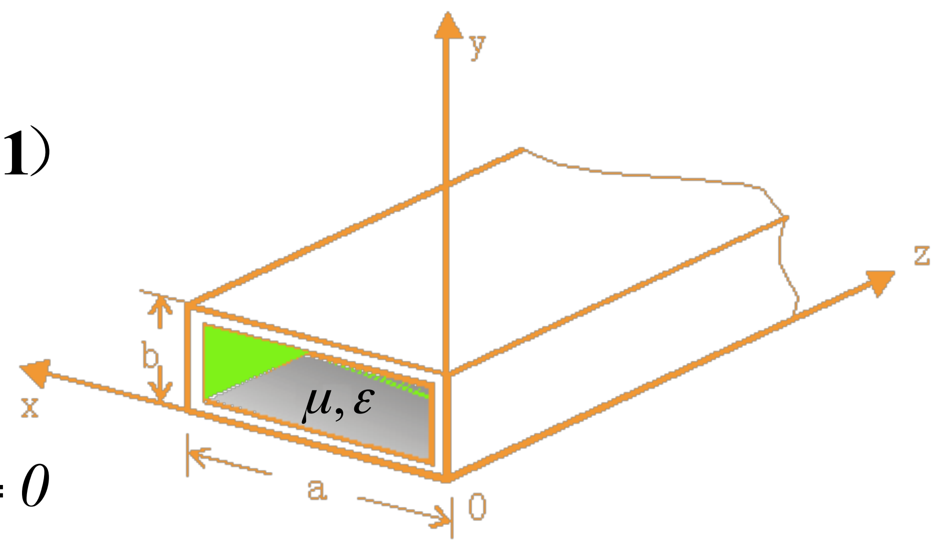


图2-2 矩形波导坐标系

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H_{oz}(x,y)+k_c^2 H_{oz}(x,y)=0$$

（2-2-2）

◆1、TE波(E_z=0，H_z≠0)(H波)

- (4)应用分离变量法, 令 $H_{0z}(x,y)=X(x)Y(y)$（2-2-3）
- (5)代入式（2-2-2）, 并除以X(x)Y(y), 得

$$-\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}=k_\mathrm{c}^2$$

- (6)要使上式成立, 上式左边每项必须均为常数

$$\begin{cases}\dfrac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0\\[2mm]\dfrac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y)=0 \quad (2\text{-}2\text{-}4)\\[2mm]k_x^2+k_y^2=k_c^2\end{cases}$$

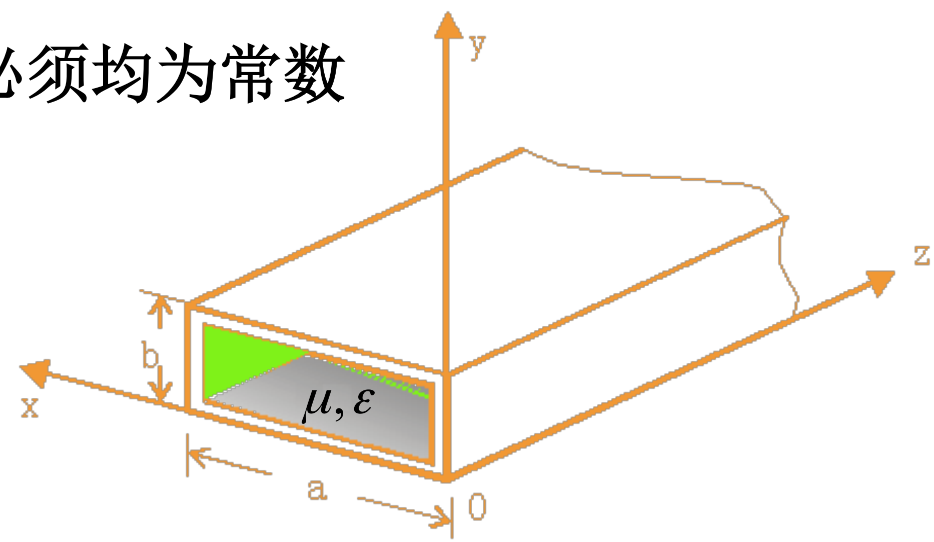


图2-2 矩形波导坐标系

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆1、TE波(E_z=0，H_z≠0)(H波)

$$\left.\frac{\partial H_Z}{\partial n}\right|_S = 0 \quad (2-1-22)$$

(7) H_{oz}(x, y)的通解为

$$H_{oz}(x,y) = (A_1\cos k_x x + A_2\sin k_x x)(B_1\cos k_y y + B_2\sin k_y y) \quad (2-2-5)$$

(8) A_1、A_2、B_1、B_2为待定系数, 由边界条件确定。 由式(2-1-22)知, H_z应满足的边界条件为

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \end{cases} \quad (2-2-6)$$

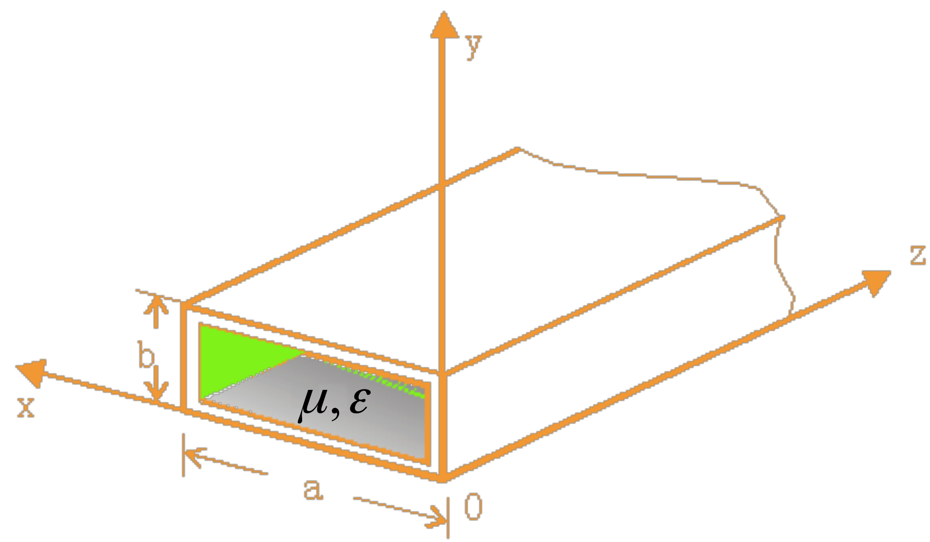


图2-2 矩形波导坐标系

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆1、TE波($E_z=0$，$H_z\neq0$)(H波)

(9)将式（2 -2 -5）代入式（2 -2 -6）可得

$$\begin{cases} A_2=0 \qquad k_x=\dfrac{m\pi}{a} \\ B_2=0 \qquad k_y=\dfrac{n\pi}{b} \end{cases} \quad (\mathbf{2-2-7})$$

(10)于是矩形波导TE波纵向磁场的基本解为

$$H_z=A_1B_1cos(\frac{m\pi}{a}x)cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z}$$

$$=H_{mn}cos(\frac{m\pi}{a}x)cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \qquad m,n=0,1,2\cdots(\mathbf{2-2-8})$$

(11)式中，H_{mn}为模式振幅常数，故H_z(x，y，z)的通解为

$$H_z=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}H_{mn}cos(\frac{m\pi}{a}x)cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z}(\mathbf{2-2-9})$$

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆1、TE波(Ez=0，Hz≠0)(H波)

$$
\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix}
$$

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

◆1、TE波($E_z=0$，$H_z\neq 0$)(H波)

⑿代入式（2-1-13）， 则TE波其它场分量的表达式为

$$\begin{cases} E_x = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b} H_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z} \\ E_y = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a} H_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z} \\ E_Z = 0 \\ H_x = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{j\beta}{k_c^2}\frac{m\pi}{a} H_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z} \\ H_y = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{j\beta}{k_c^2}\frac{n\pi}{b} H_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z} \end{cases}$$

①TEmn波,m表示x方向变化的半周期数,n表示y方向变化的半周期数；②m和n不能同时为零，否则场分量全部为零；③矩形波导能够存在TE_{m0}模和TE_{0n}模及TE_{mn}($m,n\neq 0$)模;④TE_{10}模是最低次模，其余称为高次模。

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆2、TM波($H_z=0$， $E_z\neq0$)(E波)

⊕(1)纵向电场可表达为 $E_z(x,y,z)=E_{0z}(x,y)e^{-j\beta z}$

⊕(2)而E_{oz}(x, y) 满足以下方程

$$\nabla_t^2 E_{0z}(x,y)+k_c^2 E_{0z}(x,y)=0 \quad (2-2-12)$$

⊕(3) E_{oz}(x, y)的通解为

$$E_{oz}(x,y)=(A_1\cos k_x x+A_2\sin k_x x)(B_1\cos k_y y+B_2\sin k_y y) \quad (2-2-13)$$

⊕(4)由式(2-1-20)知, E_z应满足的边界条件为

$$\begin{cases} E_z(0,y)=E_z(a,y)=0 \\ E_z(x,0)=E_z(x,b)=0 \end{cases} \quad (2-2-14)$$

$$E_z\,|_S=0 \quad (2-1-20)$$

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆1、TM波(H_z=0，$E_z \neq$0)(E波)

⑼将式（2 -2 -13）代入式（2 -2 -14）可得

$$\begin{cases} A_1 = 0 & k_x = \frac{m\pi}{a} \\ B_1 = 0 & k_y = \frac{n\pi}{b} \end{cases} \quad (2-2-7)$$

⑽于是矩形波导TM波纵向电场的基本解为

$$E_z = A_2 B_2 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta\beta}$$

$$= E_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta\beta} \qquad m,n = 0,1,2\cdots(2-2-8)$$

⑾式中，E_{mn}为模式振幅常数，故E_z(x，y，z)的通解为

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} E_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \quad (2-2-9)$$

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

一、矩形波导中的场

◆2、 TM波(H_z=0， E_z≠0)(E波)

(5)代入式（2-1-13），可求得TM波的全部场分量

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\begin{cases} E_x = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-j\beta}{k_c^2}\dfrac{m\pi}{a} E_{mn}\cos(\dfrac{m\pi}{a}x)\sin(\dfrac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \\ E_y = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-j\beta}{k_c^2}\dfrac{n\pi}{b} E_{mn}\sin(\dfrac{m\pi}{a}x)\cos(\dfrac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \\ E_z = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_{mn}\sin(\dfrac{m\pi}{a}x)\sin(\dfrac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \\ H_x = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\dfrac{n\pi}{b} E_{mn}\sin(\dfrac{m\pi}{a}x)\cos(\dfrac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \\ H_y = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\dfrac{m\pi}{a} E_{mn}\cos(\dfrac{m\pi}{a}x)\sin(\dfrac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

(2-

①TMmn波,m表示x方向变化的半周期数,n表示y方向变化的半周期数；
②m和n不能为零,否则场分量全部为零；
③矩形波导不能够存在TM_{m0}模和TM_{0n}模;
④TM_{11}模是最低次模,其余称为高次模。

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

1、截止波数与截止波长(Cutoff Wave Number & Cutoff Wave Length)

- (1)矩形波导TE_{mn}和TM_{mn}模的截止波数均为

$$k_{cmn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (2-2-15)$$

- (2)对应截止波长为

$$\lambda_{cTE_{mn}} = \lambda_{cTM_{mn}} = \frac{2\pi}{k_{cmn}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} = \lambda_c \quad (2-2-16)$$

- (3)相移常数为

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (2-2-17)$$

工作波长$\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

1、截止波数与截止波长(Cutoff Wave Number & Cutoff Wave Length)

- (3)相移常数为

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (2-2-17)$$

- (4)讨论：
- ①工作波长$\lambda<\lambda_c$时，$\beta^2>0$，此模可在波导中传输，故称为**传导模**；
- ②工作波长$\lambda>\lambda_c$时，$\beta^2<0$，即此模在波导中不能传输，称为**截止模**。
- ③一个模能否在波导中传输取决于波导结构和工作频率（或波长）。
- ④对相同的m和n，TE_{mn}和TM_{mn}模具有相同的截止波长故又称为**简并模**，虽然它们场分布不同，但具有相同的传输特性。
- ⑤ 图 2-3 给出了标准波导BJ-32各模式截止波长分布图。

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

1、截止波数与截止波长(Cutoff Wave Number & Cutoff Wave Length)

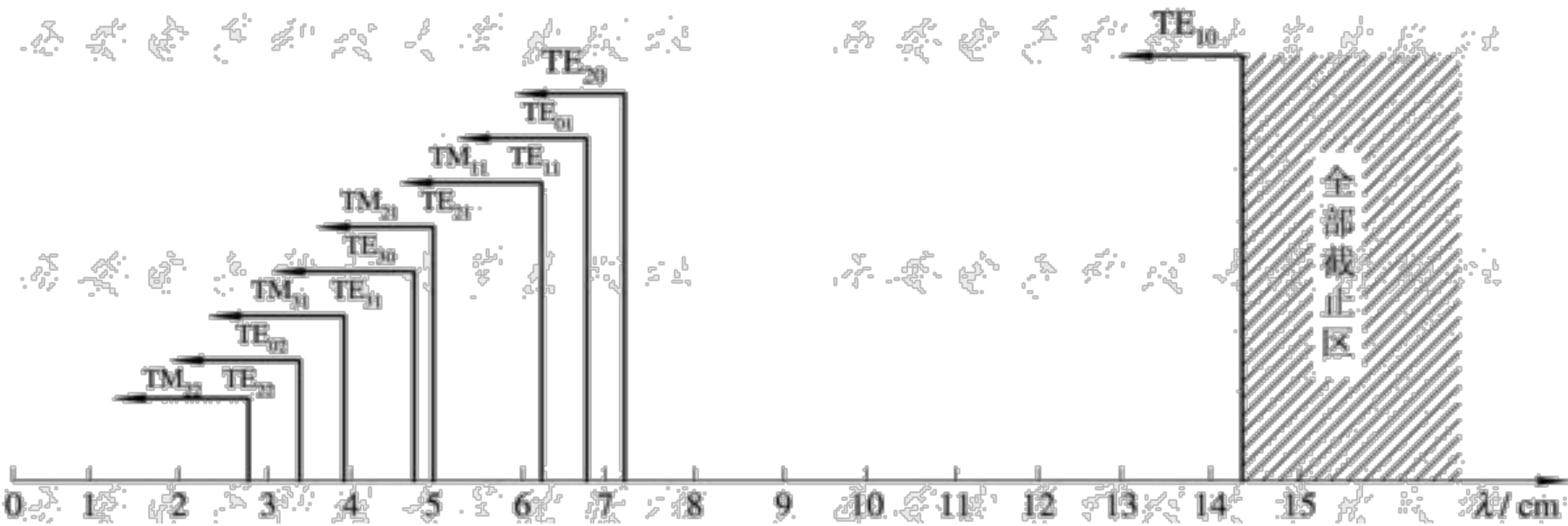


图2-3 BJ-32波导各模式截止波长分布图

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

1、截止波数与截止波长(Cutoff Wave Number & Cutoff Wave Length)

[例2-1] 设某矩形波导的尺寸为a=8cm,b=4cm; 试求工作频率在3GHz时该波导能传输的模式。

解： $\because f = 3\,GHz$

$$\therefore \lambda = \frac{c}{f} = 0.1(m)$$

$$\lambda_{cTE_{10}} = 2a = 0.16(m) > \lambda$$

$$\lambda_{cTE_{01}} = 2b = 0.08(m) < \lambda$$

$$\lambda_{cTM_{11}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.0715(m) < \lambda$$

可见，该波导在工作频率为3GHz时只能传输TE_{10}模。

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

2、主模TE_{10}的场分布及其工作特性

- ①在导行波中截止波长λ_c最长的导行模称为该导波系统的**主模**, 因而能进行单模传输。

- ②**矩形波导的主模为TE_{10}模**, 因为该模式具有场结构简单、稳定、频带宽和损耗小等特点, 所以实用时几乎毫无例外地工作在TE_{10}模式。

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

2、主模TE_{10}的场分布及其工作特性

◆(1) TE_{10}模的场分布

①将$m=1$, $n=0$, $k_c=\pi/a$, 代入式(2-2-10), 并考虑时间因子$e^{j\omega t}$, 可得TE_{10}模各场分量表达式

$$\begin{cases} E_y = \dfrac{\omega\mu a}{\pi} H_{10} sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) cos(\omega t - \beta z - \dfrac{\pi}{2}) \\ H_x = \dfrac{\beta a}{\pi} H_{10} sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) cos(\omega t - \beta z + \dfrac{\pi}{2}) \\ H_z = H_{10} cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) cos(\omega t - \beta z) \\ E_x = E_z = H_y \end{cases} \quad (2-2-18)$$

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

2、主模TE_{10}的场分布及其工作特性

◆(1) TE_{10}模的场分布

②由此可见，场强与y无关，即各分量沿y轴均匀分布，而沿x方向的变化规律为

$$\begin{cases} E_y \propto sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \\ H_x \propto sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \quad (2-2-19) \\ H_z \propto cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right) \end{cases}$$

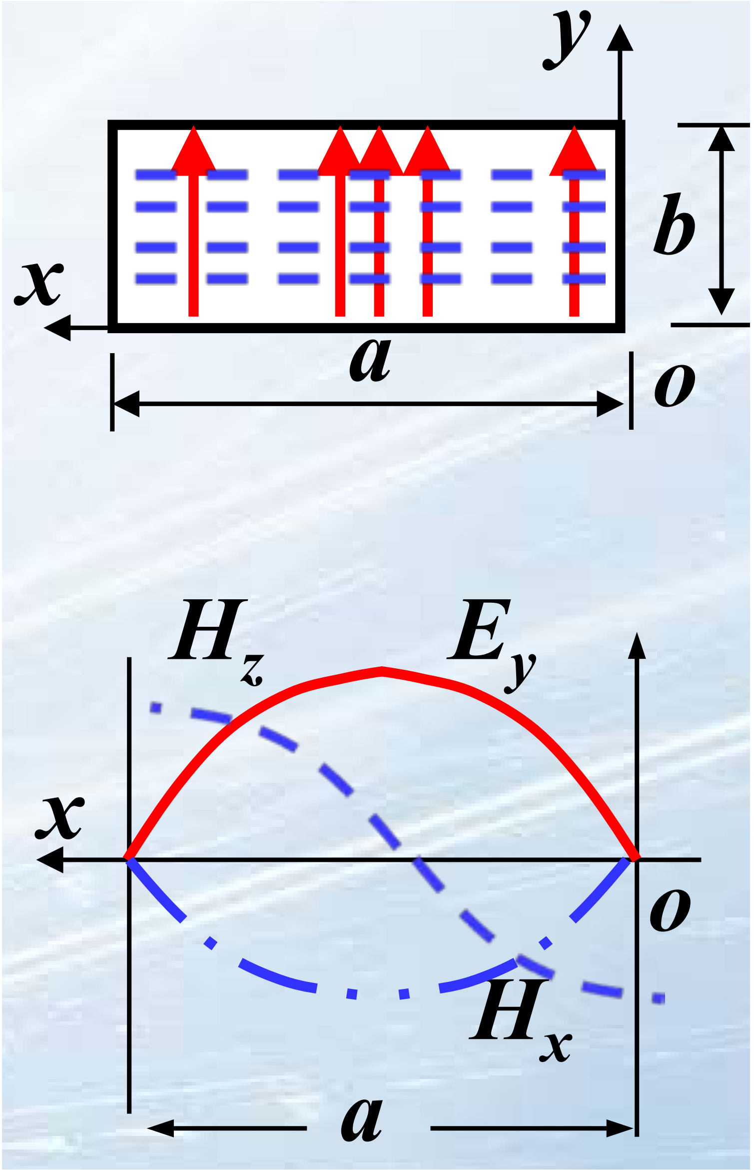


图2-4 矩形波导TE_{10}模的场分布图

(a)沿x方向场分量分布曲线

2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

2、主模TE_{10}的场分布及其工作特性

◆(1) TE_{10}模的场分布

②沿z方向的变化规律为

$$\begin{cases} E_y \propto \cos\left(\omega t-\beta z-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ H_x \propto \cos\left(\omega t-\beta z+\dfrac{\pi}{2}\right) \quad (2-2-20) \\ H_z \propto \cos(\omega t-\beta z) \end{cases}$$

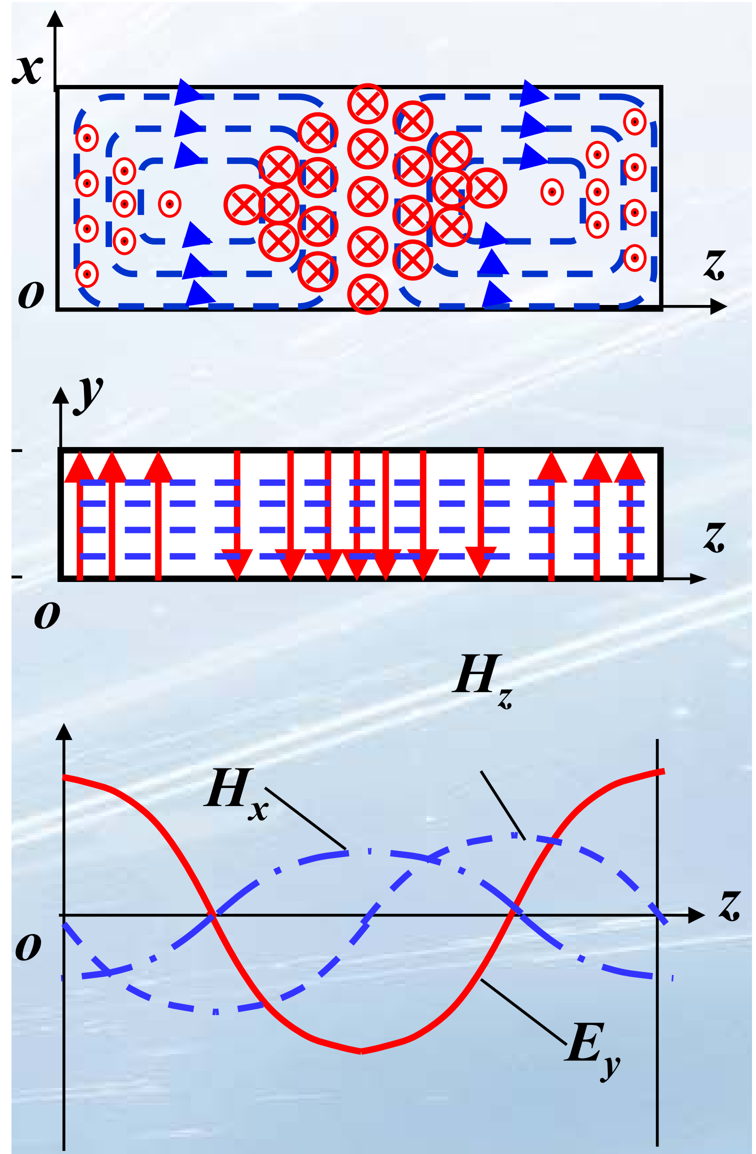


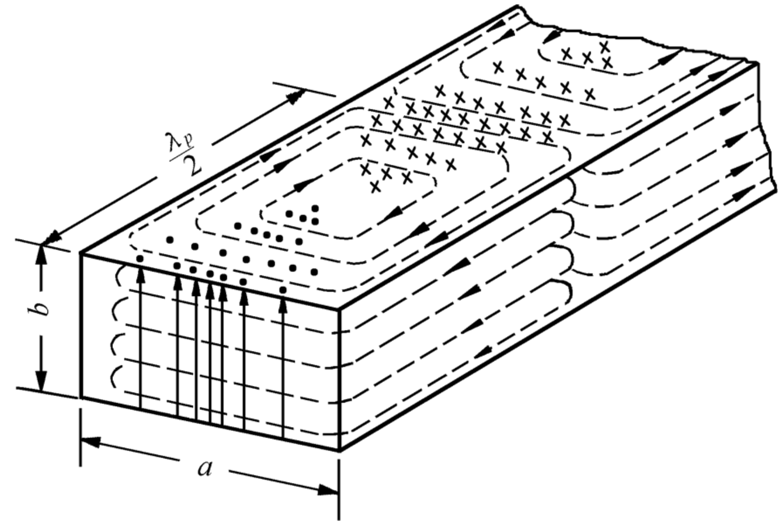
图2-4 矩形波导TE_{10}模的场分布图

(b)沿z方向场分量分布曲线

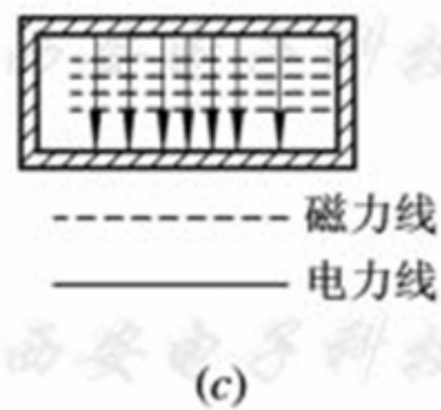
2.2矩形波导(Rectangular Waveguide)

二、矩形波导的传输特性

2、主模TE_{10}的场分布及其工作特性



◆(1) TE_{10}模的场分布



⊕④波导横截面和纵剖面上的场分布如图2-4(c)和(d)所示。由图可见，H_x和E_y最大值在同截面上出现，电磁波沿z方向按行波状态变化;E_y、H_x和H_z相位差为90°，电磁波沿横向为驻波分布。

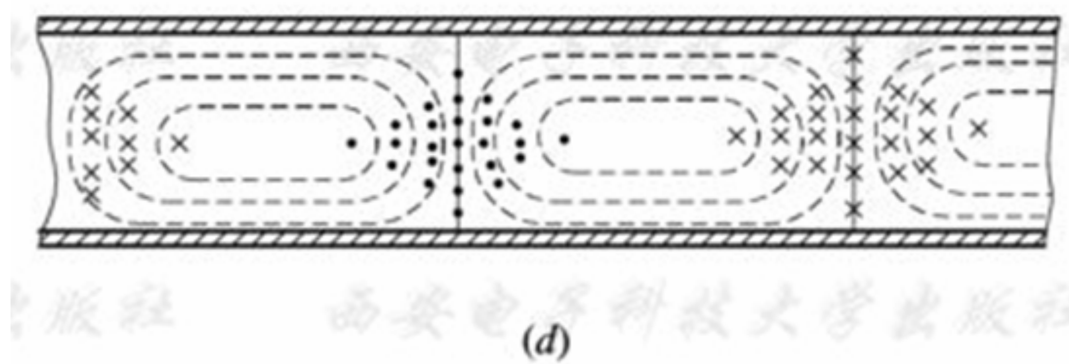
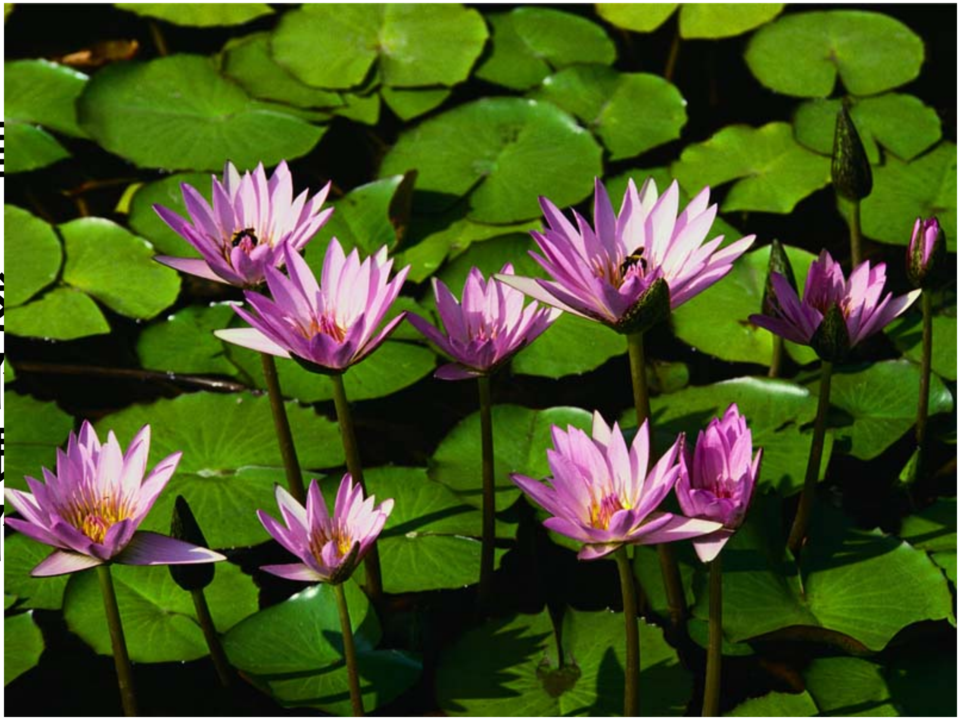


图2-4 矩形波导TE_{10}模的场分布图
(c)波导横截面上场分布图
(d)波导纵剖面上场分布图

2. 2矩形波导(Rectangular Waveguide)

作业：2.1

海蓝博士:【创造人生奇迹的四大障碍】1. 不知道，2. 不相信，3. 不行动，4. 不坚持--首善财富管理集团董事长吴正新语录。很认同：人几乎所有不如意都是没有跨越这四大障碍的结果。不学习，所以不知道；总质疑，所以不相信；畏难难，所以不行动；缺毅力，所以不坚持。创造奇迹的秘诀？其实就8个字：知道 相信 行动 坚持！



二、两种常用的特殊情况

1. 两种无损耗介质的分界面

无损耗介质，电导率 $\sigma=0$，故分界面上一般不存在自由电荷和传导电流，

即： $\rho_s=0, \vec{J_s}=0$

则此时的边界条件为：

$$\vec{n}\times(\vec{H_1}-\vec{H_2})=0 \qquad H_{1t}=H_{2t}$$

$$\vec{n}\times(\vec{E_1}-\vec{E_2})=0 \qquad \text{或} \qquad E_{1t}=E_{2t}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B_1}-\vec{B_2})=0 \qquad B_{1n}=B_{2n}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{D_1}-\vec{D_2})=0 \qquad D_{1n}=D_{2n}$$

二、两种常用的特殊情况

2.理想导体与介质的分界面

设Ⅱ区为理想导体，而 $\sigma_2 = \infty$； Ⅰ区为介质，此时，$\overrightarrow{E_2} = 0, \overrightarrow{D_2} = 0, \overrightarrow{B_2} = 0, \overrightarrow{H_2} = 0$

则边界条件为

$$\vec{n} \times \overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{J_s} \qquad H_{1t} = J_s$$

$$\vec{n} \times \overrightarrow{E_1} = 0 \qquad E_{1t} = 0$$

或

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1} = 0 \qquad B_{1n} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{D_1} = \rho_s \qquad D_{1n} = \rho_s$$