2015年春季学期线性代数试卷A答案

一、填空题（18分）

1. $2^9\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$ ；　2. -16；　3. $(n-1)(-1)^{n-1}$；

4. $\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$；　5. 0，1；　6. 1.

二、选择题（18分）

1. B；　2. D;　3. B；　4. C；　5. B;　6. D

三、（共六题，共40分）

1. （6分）

解：由 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 得到 $a_{ij}=-A_{ij}$，所以 $A^*=-A^T$.

又因为 $AA^*=|A|I_3$，则有 $-|A|^2=|A|^3$，即有 $|A|=0$ 或 $|A|=-1$.

当$|A|=0$时有$\mathrm{A}=O$，与题设矛盾。所以$|A|=-1$.

2.（8分）

解：令 $\mathrm{A}=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\begin{pmatrix}2\,3\,2\,4\\ 0\,1\,1\,2\\ 2\,1\,0\,0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2\,0 & -1 & -2\\ 0\,1 & 1 & 2\\ 0\,0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

向量组 $\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}$ 的秩是 2，一个极大线性无关组是 $\{\alpha_1，\alpha_2\}$,

$\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$.

3.（8分）

解：由 $\mathrm{AB}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ 得到 $(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathrm{B}=\mathrm{A}$，所以

$$B=(A-I)^{-1}A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

4. （6分）

证明：（反证法）假设 $\xi_1+\xi_2$是矩阵A的特征向量，则 $\xi_1+\xi_2\neq 0$，且存在常数λ使

$$\mathrm{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2.$$

由题设可知 $\mathrm{A}\xi_1=\lambda_1\xi_1$，$\mathrm{A}\xi_2=\lambda_2\xi_2$，即

$$\mathrm{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2.$$

所以有 $(\lambda-\lambda_1)\xi_1+(\lambda-\lambda_2)\xi_2=0$.

因为 ξ_1，ξ_2 线性无关，则有 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$， 矛盾。

所以 $\xi_1+\xi_2$不是矩阵 A 的特征向量。

5.（6 分）

解：二次型 $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1, & 1, & 0\\ 1, & a+2, & 0\\ 0, & 0, & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

二次型矩阵的一阶顺序主子式等于 1， 二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}1， & 1\\ 1， & a+2\end{vmatrix}=\mathrm{a}+1$,

三阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}1, & 1, & 0\\ 1, & \mathrm{a}+2, & 0\\ 0, & 0, & \mathrm{a}\end{vmatrix}=a(a+1)$.

由二次型正定的充要条件知 $\begin{cases}\mathrm{a}+1>0\\ a(a+1)>0\end{cases}$， 即 $a>0$.

6. （6 分）

解：因为 2 是矩阵 A 的二重特征值且 A 可对角化，则有

$$秩(2\mathrm{I}-\mathrm{A})=秩\begin{pmatrix}1, & 1, & -1\\ -\mathrm{a}, & -2, & -\mathrm{b}\\ 3, & 3, & -3\end{pmatrix}=1.$$

$$\begin{pmatrix}1, & 1, & -1\\ -\mathrm{a}, & -2, & -\mathrm{b}\\ 3, & 3, & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1, & 1, & -1\\ 0, & \mathrm{a}-2, & -\mathrm{a}-\mathrm{b}\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{a}=2,\ \mathrm{b}=-2$.

四.（12 分）

解：对方程组的增广矩阵(A, b)做初等行变换

$$(\mathrm{A},\mathrm{b})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \mathrm{p}\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & q\end{pmatrix}\xrightarrow{初等行变换}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2\end{pmatrix}=(U,d),$$

当$\mathrm{p}\neq 0$, 或 $\mathrm{q}\neq 2$ 时方程组无解。

当$\mathrm{p}=0$, $\mathrm{q}=2$ 时方程组有无穷多个解。

当$\mathrm{p}=0$, $\mathrm{q}=2$ 时，非齐次方程组的一个特解是：$x_0=(-2,3,0,0,0)^T$.

取 x_3,x_4,x_5 为自由未知量，可得齐次方程$Ux=0$（即 $Ax=0$ ）的线性无关的解

$\varsigma_1=(1,-2,1,0,0)^T$， $\varsigma_2=(1,-2,0,1,0)^T,\varsigma_3=(5,-6,0,0,1)^T$,

所以非齐次方程组的一般解为 $x=k_1\varsigma_1+k_2\varsigma_2+k_3\varsigma_3+x_0,k_1,k_2,k_3$是任意常数。

$Ax=0$的基础解系是

$\varsigma_1=(1,-2,1,0,0)^T$， $\varsigma_2=(1,-2,0,1,0)^T,\varsigma_3=(5,-6,0,0,1)^T$.

五.（12 分）

解：（1）二次型的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

因为二次型的秩为 2， 所以 $a=0$.

（2） $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)^2=0$,

$\lambda_1=0$（单根），$\lambda_2=2$（二重根）.

$\lambda_1=0$时，$0I-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

取x_2为自由未知量并令$x_2=1$得到$(0I-A)x=0$的一个基础解系

$$\xi_{11}=(-1,1,0)^T.$$

单位化得 $\eta_{11}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T$.

$\lambda_2=2$时，$2I-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

取x_2,x_3为自由未知量并令$(x_2,x_3)=(1,0),(0,1)$得到$(2I-A)x=0$的

一个基础解系$\xi_{21}=(1,1,0)^T,\xi_{22}=(0,0,1)^T$.

利用施密特正交化，单位化可得 $\eta_{21}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,\eta_{22}=(0,0,1)^T$.

取正交矩阵$Q=(\eta_{11},\eta_{21},\eta_{22})=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$， 则 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

作正交变换 $x=Qy$，得到标准型 $g(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+2y_3^2$.