第1章 电磁学的数学基础 ——矢量分析

一、矢量的定义和表示

二、矢量的基本运算法则

三、矢量微分元：线元，面元，体元

四、标量场的梯度

五、矢量场的散度

六、矢量场的旋度

一、矢量的定义和表示

1.标量：只有大小，没有方向的物理量。

如：温度 T、长度 L 等

2.矢量：不仅有大小，而且有方向的物理量。

如：重力$\vec{G}$、电场强度 $\vec{E}$、磁场强度 $\vec{H}$ 等

3. 矢量表示

一个矢量可以表示成矢量的模与单位矢量的乘积。

矢量表示为： $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a}$

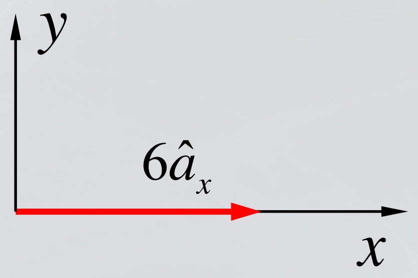
其中：$|\vec{A}|$为矢量的模，表示该矢量的大小。

$\hat{a}$ 为单位矢量，表示矢量的方向，其大小为1。

矢量的图示方法

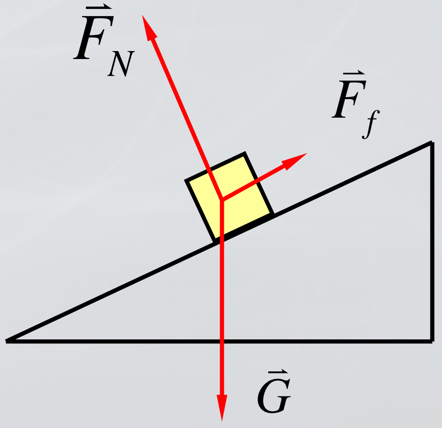
例1：在直角坐标系中， x 方向的大小为 6 的矢量如何表示？

图示法：



$$\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{a} = 6\hat{a}_x$$

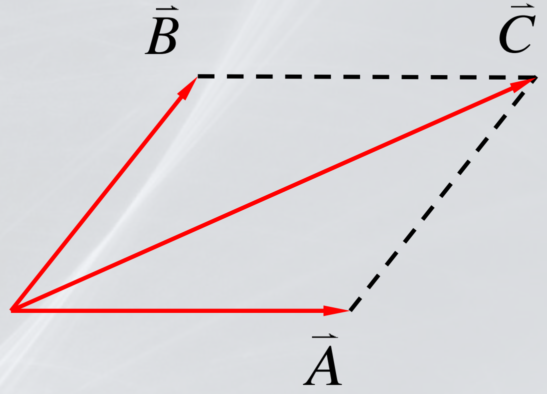
例2：力的图示法：



二、矢量的基本运算法则

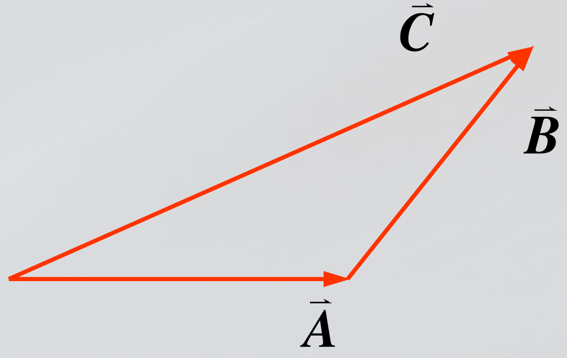
1、矢量的加法运算法则

加法: 矢量加法是矢量的几何和,服从平行四边形规则。



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

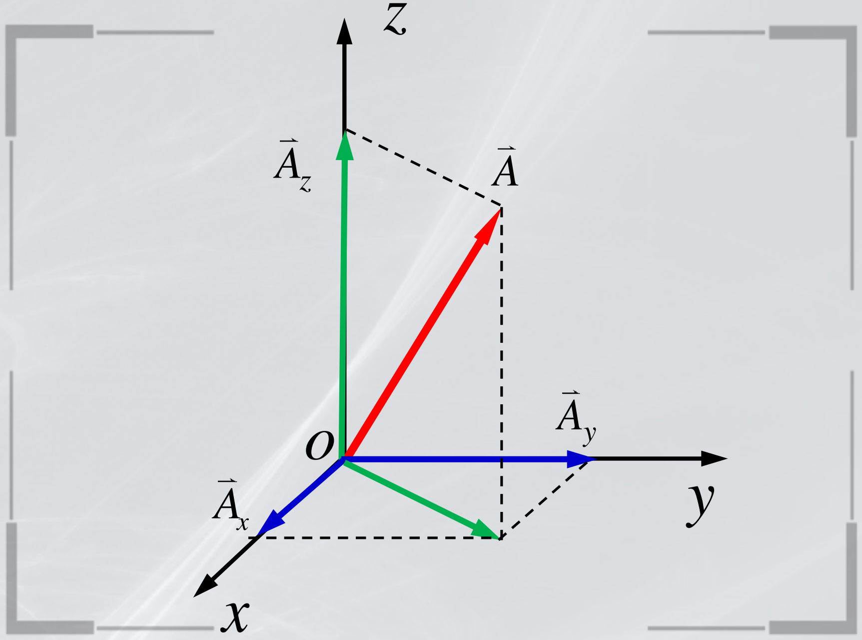
$\Rightarrow$



a.满足交换律: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b.满足结合律: $(\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{C} + \vec{D}) = (\vec{A} + \vec{C}) + (\vec{B} + \vec{D})$

在直角坐标系下的矢量表示:



三个方向的单位矢量表示:

$$\hat{a}_x,\ \hat{a}_y,\hat{a}_z$$

根据矢量加法运算:

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z$$

其中: $\vec{A}_x=A_x\hat{a}_x$ $\quad \vec{A}_y=A_y\hat{a}_y$ $\quad \vec{A}_z=A_z\hat{a}_z$

矢量表示为: $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$

在直角坐标系下的矢量表示:

矢量： $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$

✧模的计算： $|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

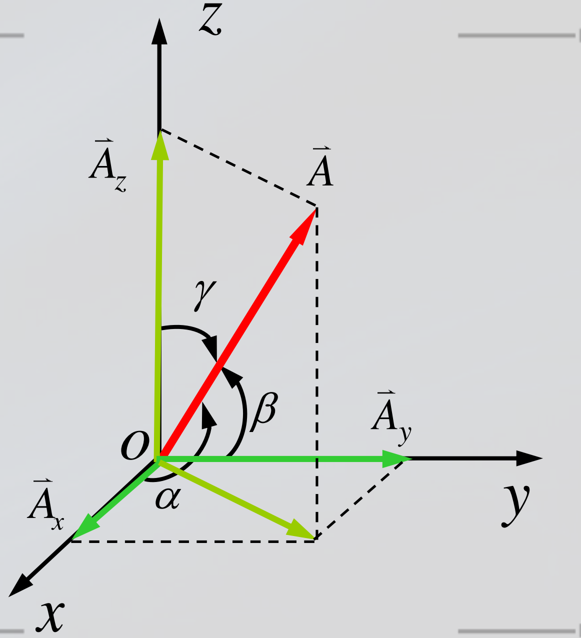
✧单位矢量：

$$\hat{a}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{a}_x+\frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{a}_y+\frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{a}_z$$

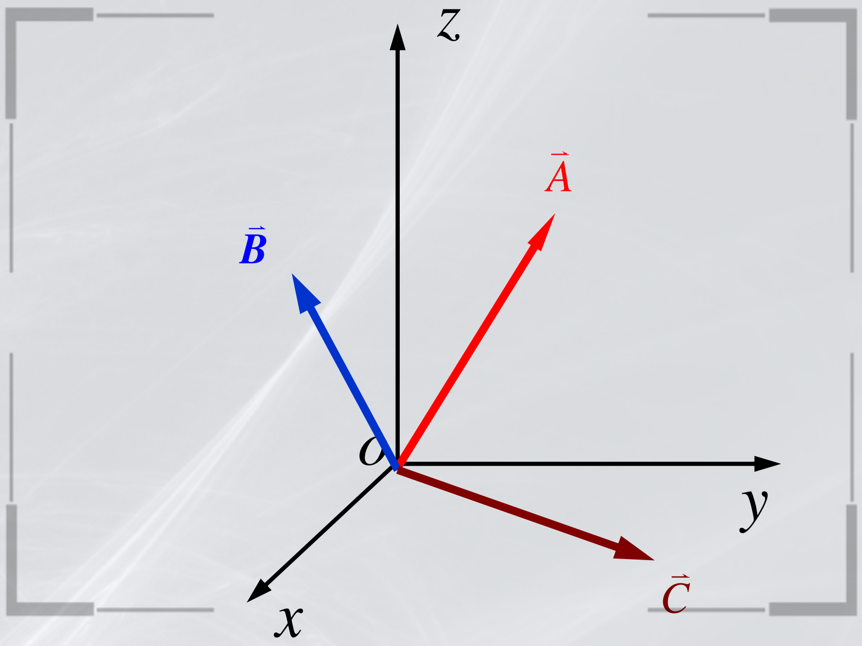
$$=\cos\alpha\,\hat{a}_x+\cos\beta\,\hat{a}_y+\cos\gamma\,\hat{a}_z$$

✧方向角与方向余弦： $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta=\frac{A_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma=\frac{A_z}{|\vec{A}|}$$



在直角坐标系下的矢量的加法运算:



$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$$

$$\vec{B}=B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z$$

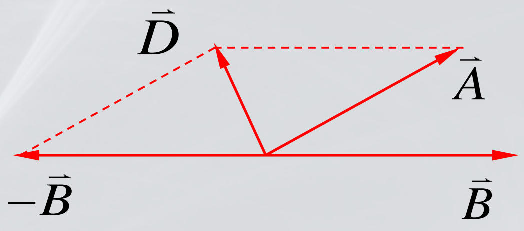
$$\vec{C}=C_x\hat{a}_x+C_y\hat{a}_y+C_z\hat{a}_z$$

矢量加法运算: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(A_x+B_x+C_x)\hat{a}_x+(A_y+B_y+C_y)\hat{a}_y+(A_z+B_z+C_z)\hat{a}_z$

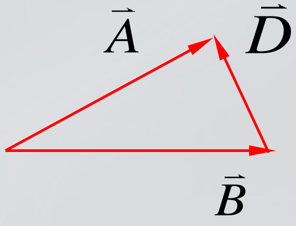
2、矢量的减法运算法则

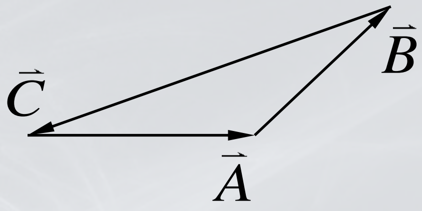
减法：换成加法运算 $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

逆矢量：$\vec{B}$ 和 $(-\vec{B})$ 的模相等，方向相反，互为逆矢量。

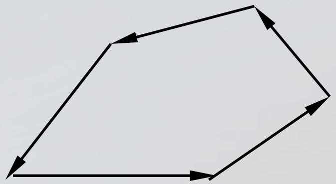


$\Rightarrow$





$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$



推论：

任意多个矢量首尾相连组成闭合多边形，其矢量和必为零。

在直角坐标系中两矢量的减法运算：

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{a}_x+(A_y-B_y)\hat{a}_y+(A_z-B_z)\hat{a}_z$$

例： 已知A点和B点对于原点的位置矢量为 $\vec{a}$和 $\vec{b}$,

求：通过A点和B点的直线方程。

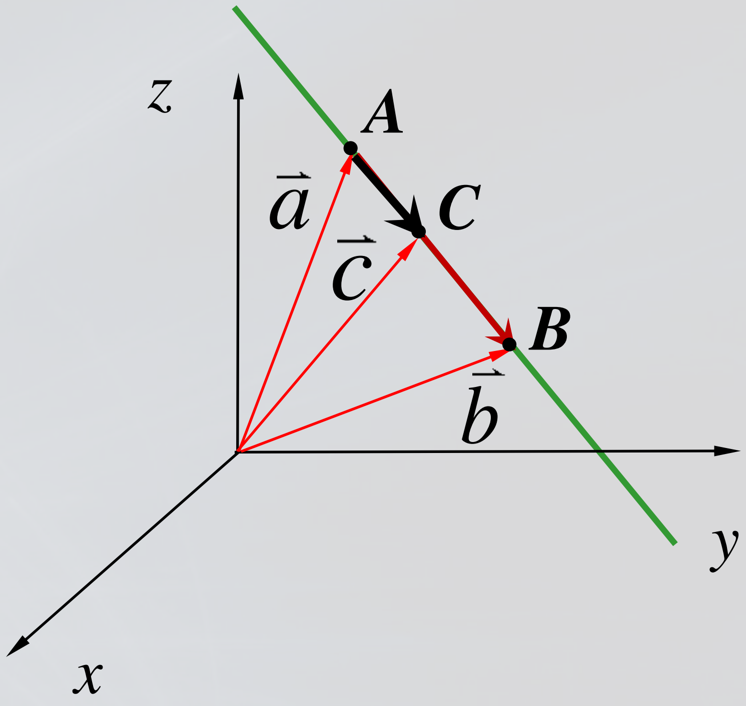
解：在通过A点和B点的直线上，任取一点C，对于原点的位置矢量为 $\vec{c}$，

则:

$$\vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{c}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

其中：k 为任意实数。



小结：

一、矢量的定义和表示

二、矢量的加减法运算法则

1.2 矢量的乘法运算

1. 标量与矢量的乘积

2. 矢量与矢量乘积

   (1) 标量积（点积）

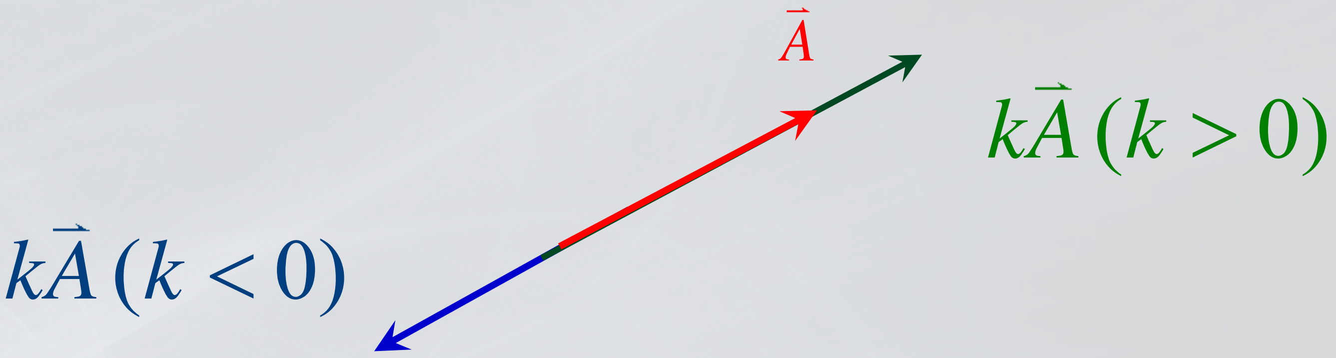
   (2) 矢量积（叉积）

3. 矢量三重积

1. 标量与矢量的乘积

$$k\vec{A} = k\,|\vec{A}|\,\hat{a} \quad \begin{cases} k>0 & \text{方向不变，大小为}|k|\text{倍} \\ k=0 & \\ k<0 & \text{方向相反，大小为}|k|\text{倍} \end{cases}$$

图示：

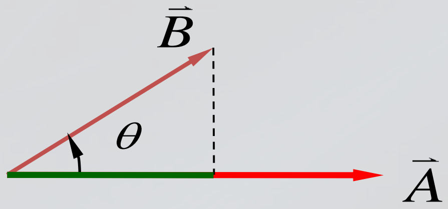


计算： $k\vec{A} = kA_x\hat{a}_x + kA_y\hat{a}_y + kA_z\hat{a}_z$

2. 矢量与矢量乘积

(1) 标量积（点积）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$$



✦两矢量的点积含义:

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其结果是一标量。

推论1：满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

推论2：满足分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

•在直角坐标系中，已知三个坐标轴是相互正交的，即

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x=1,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y=1,\quad \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z=1$$

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y=0,\quad \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z=0,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z=0$$

有两矢量点积:

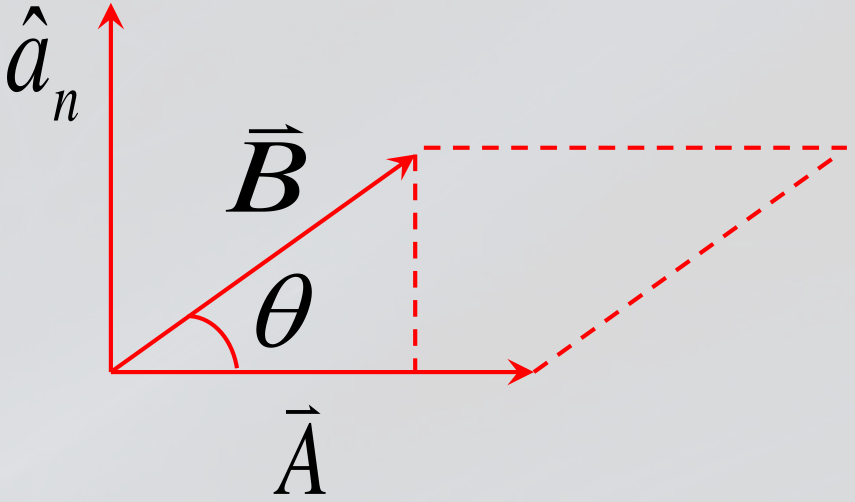
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\cdot(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

•结论: 两矢量点积等于对应分量的乘积之和。

(2) 矢量积（叉积）：

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta\,\hat{a}_n$$



含义：

两矢量叉积，结果得一新矢量，其大小为这两个矢量组成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。

推论1：不服从交换律

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}, \qquad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

推论2：服从分配律

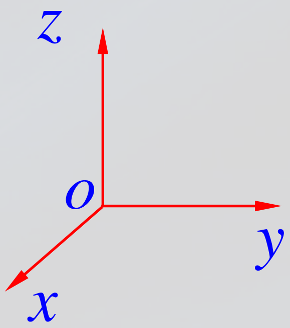
$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

推论3：不服从结合律

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：



$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\times(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{a}_z$$

两矢量的叉积又可表示为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

例 2 设 $\vec{r}_1 = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z,\quad \vec{r}_2 = \hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$

$\vec{r}_3 = -2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 3\hat{a}_z,\quad \vec{r}_4 = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

求: $\vec{r}_4 = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3$ 中的标量 a、b、c。

解:

$$\begin{aligned} & 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z \\ &= a(2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z) + b(\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) + c(-2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 3\hat{a}_z) \\ &= (2a + b - 2c)\hat{a}_x + (-a + 3b + c)\hat{a}_y + (a - 2b - 3c)\hat{a}_z \end{aligned}$$

则:

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 3 \\ -a + 3b + c = 2 \\ a - 2b - 3c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 1 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

例3： 已知 $\vec{A}=2\hat{a}_x-6\hat{a}_y-3\hat{a}_z$　$\vec{B}=4\hat{a}_x+3\hat{a}_y-\hat{a}_z$

求：确定垂直于 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 所在平面的法向单位矢量。

解： 已知 $\vec{A}\times\vec{B}$ 所得矢量垂直于 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 所在平面。

$$\hat{a}_n=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}=15\hat{a}_x-10\hat{a}_y+30\hat{a}_z$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{15^2+(-10)^2+30^2}=35$$

$$\hat{a}_n=\pm\frac{1}{7}(3\hat{a}_x-2\hat{a}_y+6\hat{a}_z)$$

3. 矢量的三重积

三个矢量相乘有以下几种形式：

$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$　　矢量，标量与矢量相乘。

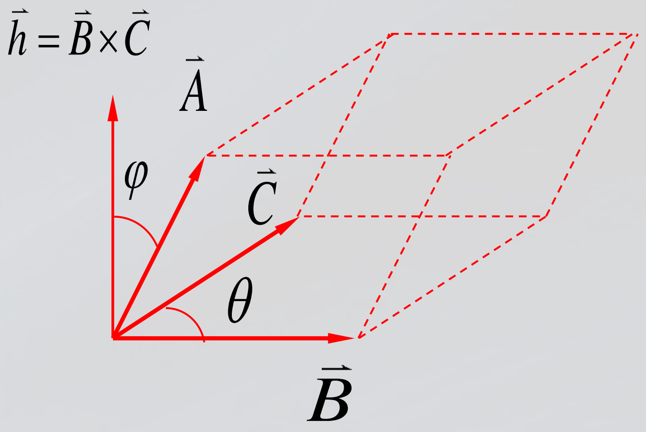
$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$　标量，标量三重积。

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$　矢量，矢量三重积。

(1) 标量三重积

法则：在矢量运算中,先算叉积,后算点积。

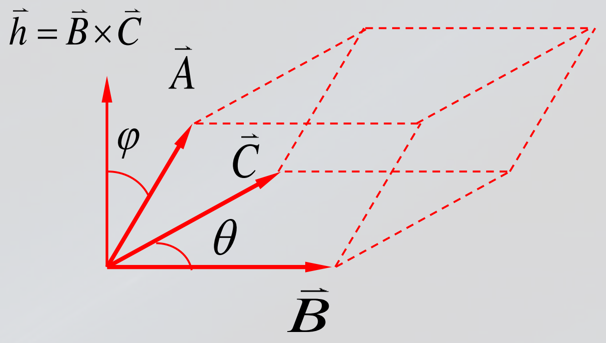
定义： $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|\sin\theta\cos\varphi$



含义：

标量三重积结果为三矢量构成的平行六面体的体积 。

$$V=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$



注意：先后轮换次序。

推论：三个非零矢量共面的条件。

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

在直角坐标系中：

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\cdot\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

(2) 矢量三重积:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

小结:

1. 标量与矢量的乘积

2. 矢量与矢量乘积

   (1) 标量积（点积)

   (2) 矢量积（叉积)

3. 三重积

1.3 矢量微分元：线元、面元、体元

1. 直角坐标系
2. 圆柱坐标系
3. 球坐标系

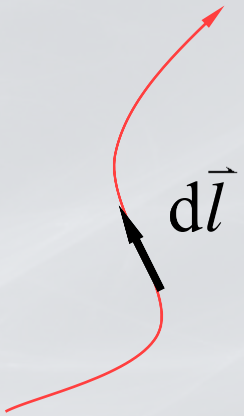
例:

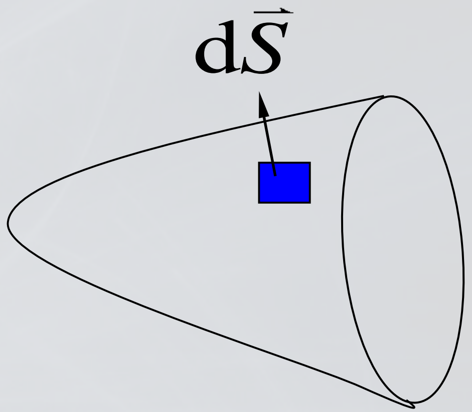
$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\Psi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$Q = \int \rho \mathrm{d}V$$

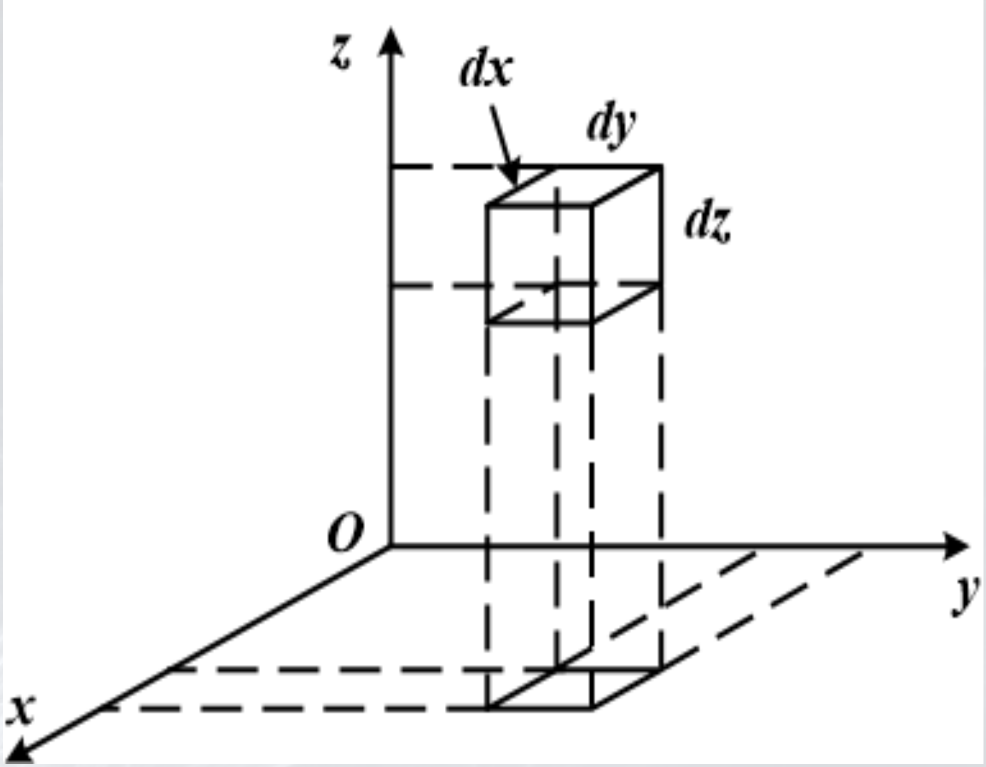
其中：$\mathrm{d}\vec{l}$, $\mathrm{d}\vec{S}$ 和 $\mathrm{d}V$ 称为微分元。





1. 直角坐标系

在直角坐标系中，坐标变量为(x,y,z)，如图，做一微分体元。



线元：

$$\mathrm{d}\vec{l}_x = \mathrm{d}x\hat{a}_x$$

$$\mathrm{d}\vec{l}_y = \mathrm{d}y\hat{a}_y$$

$$\mathrm{d}\vec{l}_z = \mathrm{d}z\hat{a}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{a}_x + \mathrm{d}y\hat{a}_y + \mathrm{d}z\hat{a}_z$$

面元：

$$\mathrm{d}\vec{S}_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\hat{a}_x$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\hat{a}_y$$

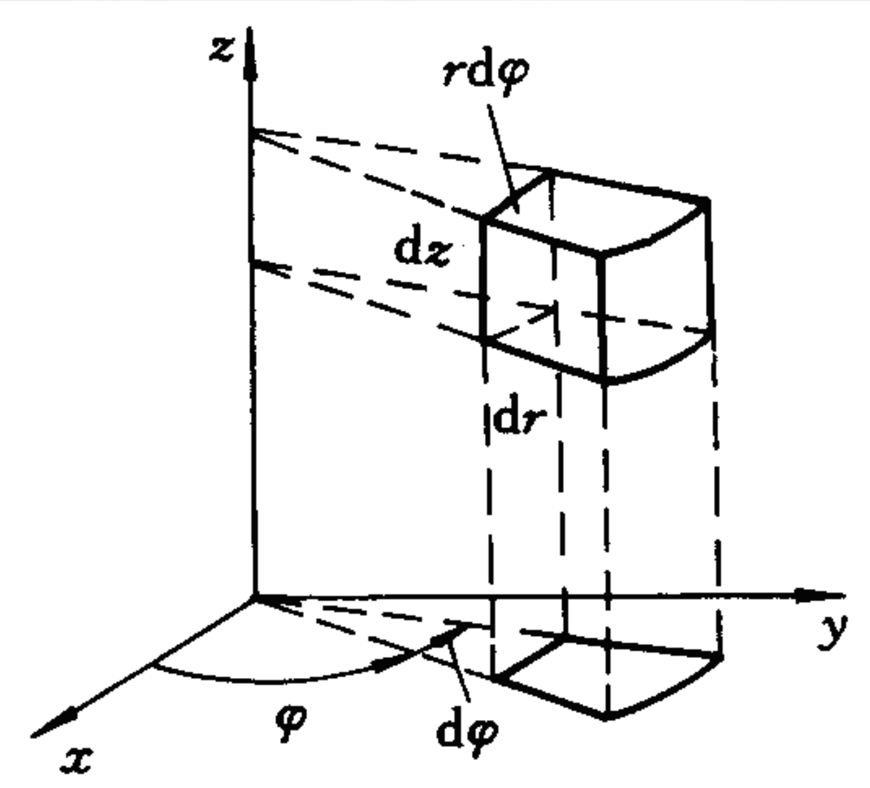
$$\mathrm{d}\vec{S}_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{a}_z$$

体元：

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，坐标变量为 (r,φ,z) ，如图，做一微分体元。



线元： $d\vec{l} = dr\hat{a}_r + rd\varphi\hat{a}_\varphi + dz\hat{a}_z$

面元： $d\vec{S}_r = rd\varphi dz\hat{a}_r$

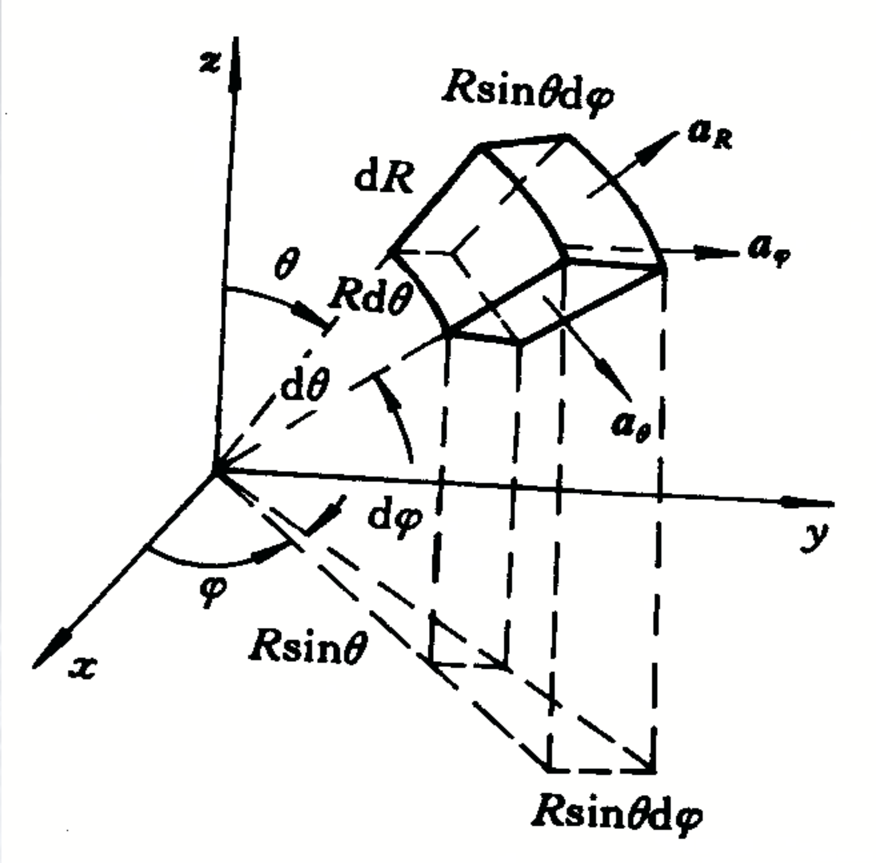
$d\vec{S}_\varphi = drdz\hat{a}_\varphi$

$d\vec{S}_z = rd\varphi dr\hat{a}_z$

体元： $dV = rdrd\varphi dz$

3. 球坐标系

在球坐标系中，坐标变量为 (R,θ,φ)，如图，做一微分体元。



线元： $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}R\hat{a}_R + R\mathrm{d}\theta\hat{a}_\theta + R\sin\theta\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi$

面元： $\mathrm{d}\vec{S}_R = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\hat{a}_R$

$\mathrm{d}\vec{S}_\theta = R\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\theta$

$\mathrm{d}\vec{S}_\varphi = R\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\hat{a}_\varphi$

体元： $\mathrm{d}V = R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

4. 正交曲线坐标系：

在正交曲线坐标系中，其坐标变量(u_1, u_2, u_3) 不一定都是长度，其线元必然有一个修正系数，这些修正系数称为拉梅系数，若已知其拉梅系数 h_1, h_2, h_3 ，就可正确写出其线元、面元和体元。

- **线元：** $\mathrm{d}\vec{l} = h_1 \mathrm{d}u_1 \hat{a}_{u_1} + h_2 \mathrm{d}u_2 \hat{a}_{u_2} + h_3 \mathrm{d}u_3 \hat{a}_{u_3}$

- **面元：** $\mathrm{d}\vec{S}_1 = h_2 h_3 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \hat{a}_{u_1}$

$$\mathrm{d}\vec{S}_2 = h_1 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_3 \hat{a}_{u_2}$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_3 = h_1 h_2 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \hat{a}_{u_3}$$

- **体元：** $\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3$

注意:

a. 在直角坐标系中，坐标变量为(x,y,z)均为长度量，其拉梅系数均为1， 即: $\boxed{h_1 = h_2 = h_3 = 1}$

b. 在柱坐标系中，坐标变量为 (r,φ,z) , 其中 φ 为角度，其对应的线元 $r\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi$ ，可见拉梅系数为:

$$\boxed{h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1}$$

c. 在球坐标系中，坐标变量为 (R,θ,φ)，其中 θ,φ 均为角度，其拉梅系数为:

$$\boxed{h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R\sin\theta}$$

小结：矢量微分元：线元、面元、体元

1. 直角坐标系
2. 圆柱坐标系
3. 球坐标系
4. 正交曲线坐标系

1.4 矢量的坐标变换

1. 圆柱坐标系与直角坐标系的变换

2. 球坐标系与直角坐标系的变换

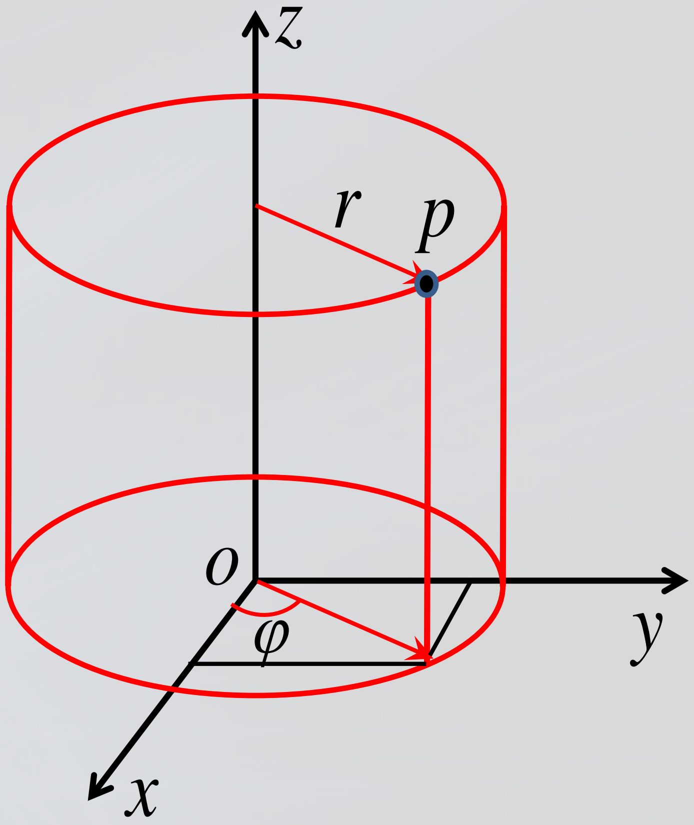
1. 圆柱坐标系与直角坐标系的变换

（1）坐标变量的变换关系

圆柱坐标系：(r,φ,z)

直角坐标系：(x,y,z)

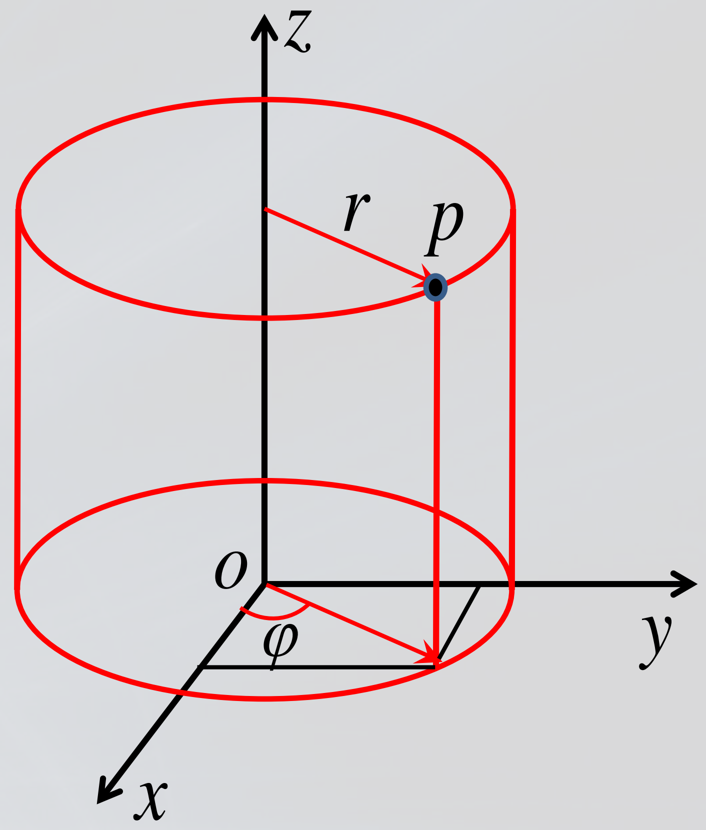
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\arctan(\dfrac{y}{x}) \\ z=z \end{cases}$$



直角坐标系：(x, y, z)

圆柱坐标系：(r, φ, z)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

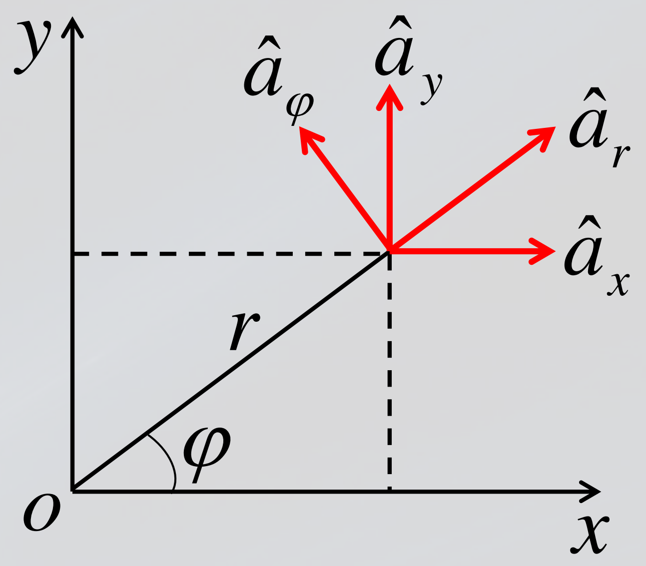


(2) 矢量函数在两坐标系中的变换

矢量 $\vec{A}$ 在直角坐标系：

$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$$

其中：A_x, A_y, A_z 是 (x, y, z) 的函数。



矢量 $\vec{A}$ 在圆柱坐标系：

$$\vec{A}=A_r\hat{a}_r+A_\varphi\hat{a}_\varphi+A_z\hat{a}_z$$

其中：A_r, A_φ, A_z 是 (r, φ, z) 的函数。

$$A_r=\vec{A}\cdot\hat{a}_r$$

$$A_\varphi=\vec{A}\cdot\hat{a}_\varphi$$

$$A_z=\vec{A}\cdot\hat{a}_z$$

利用矢量点积的定义：

$$A_r = \vec{A}\cdot\hat{a}_r = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_r$$

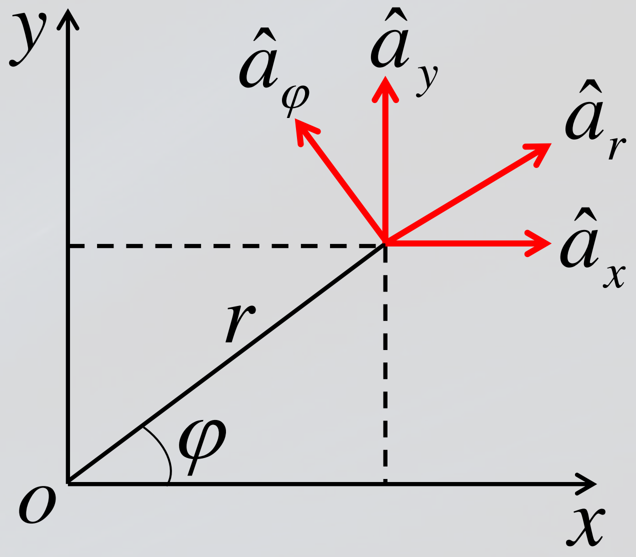
$$= A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_r + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_r$$

$$A_\varphi = \vec{A}\cdot\hat{a}_\varphi = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\varphi$$

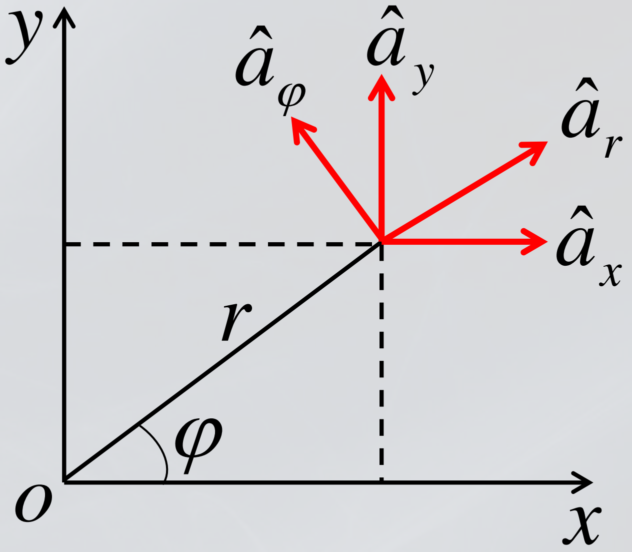
$$= A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\varphi + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\varphi$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\hat{a}_z = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_z$$

$$= A_z$$



单位矢量点积的定义：



$$\begin{cases} \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \cos\varphi \\ \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\varphi = -\sin\varphi \\ \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_y \cdot \hat{a}_r = \sin\varphi \\ \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\varphi = \cos\varphi \\ \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = 0 \\ \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\varphi = 0 \\ \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \end{cases}$$

得到变换矩阵形式：

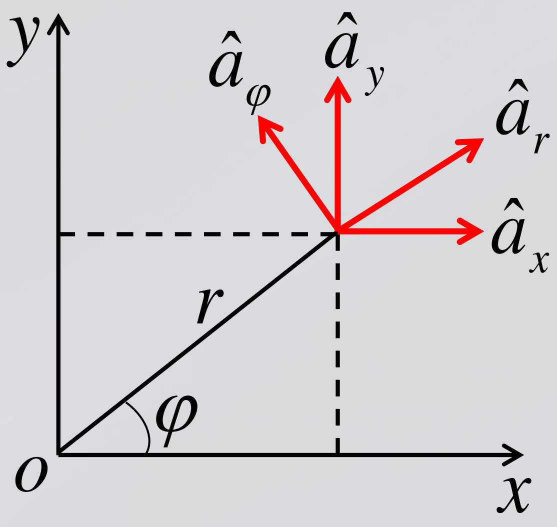
$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

同理：

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

例：已知在圆柱坐标系中， $\vec{A} = -r\hat{a}_\varphi + z\hat{a}_z$

求：变换到直角坐标系中， $\vec{A}$ 的表达式。



解：根据题意，在直角坐标系中

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{a}_x = (-r\hat{a}_\varphi + z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_x = -r\hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_x = r\sin\varphi$$

$$A_y = \vec{A}\cdot\hat{a}_y = (-r\hat{a}_\varphi + z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_y = -r\hat{a}_\varphi\cdot\hat{a}_y = -r\cos\varphi$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\hat{a}_z = (-r\hat{a}_\varphi + z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_z = z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z = z$$

可见： $A_x = r\sin\varphi = y$ $A_y = -r\cos\varphi = -x$ $A_z = z$

得到： $\vec{A} = y\hat{a}_x - x\hat{a}_y + z\hat{a}_z$

另一种求解方法：采用变换矩阵

$$\vec{A} = -r\hat{a}_\varphi + z\hat{a}_z \longrightarrow A_r = 0 \qquad A_\varphi = -r \qquad A_z = z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ z \end{bmatrix}$$

在直角坐标系中

$$A_x = r\sin\varphi = y \qquad A_y = -r\cos\varphi = -x \qquad A_z = z$$

得到： $\vec{A} = y\hat{a}_x - x\hat{a}_y + z\hat{a}_z$

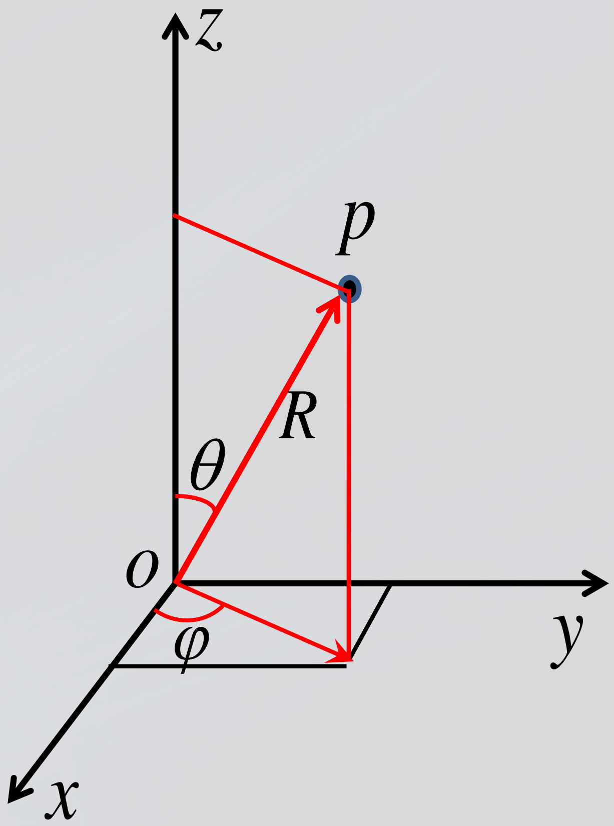
2. 球坐标系与直角坐标系的变换

（1）坐标变量的变换关系

直角坐标系：(x, y, z)

球坐标系：(R, θ, φ)

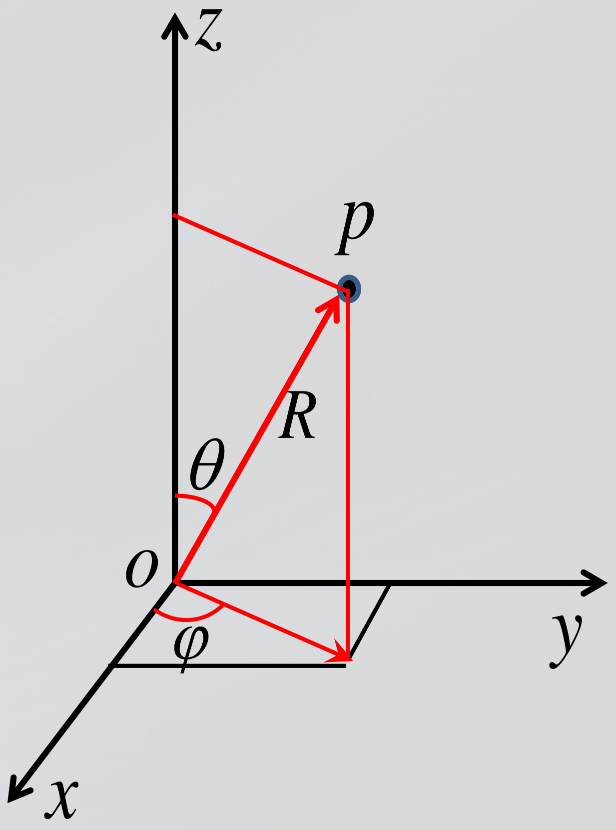
$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$



球坐标系： (R,θ,φ)

直角坐标系： (x, y, z)

$$\begin{cases} R=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\arccos[\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}] \\ \varphi=\arctan(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$$



(2）矢量函数在两坐标系中的变换

矢量 $\vec{A}$ 在直角坐标系：

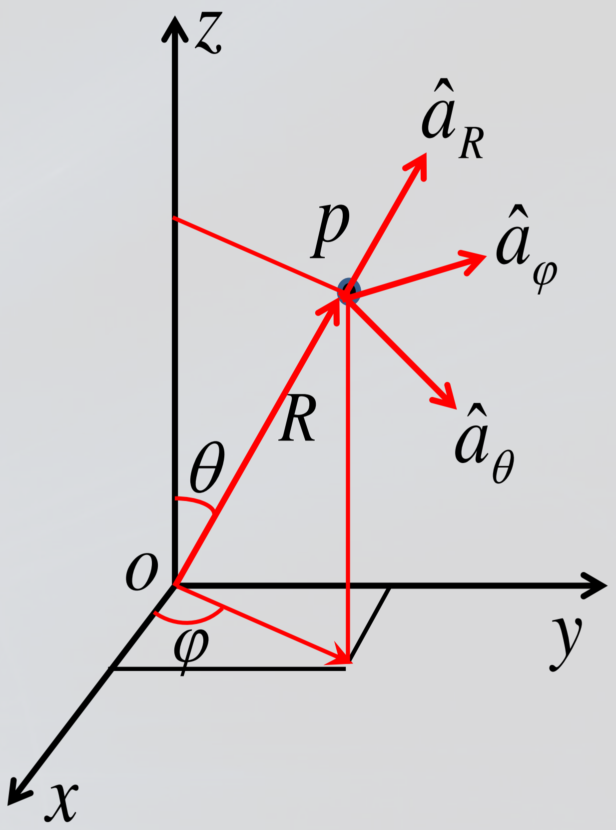
$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$$

其中：A_x, A_y, A_z 是 (x, y, z) 的函数。

矢量 $\vec{A}$ 在球坐标系：

$$\vec{A}=A_R\hat{a}_R+A_\theta\hat{a}_\theta+A_\varphi\hat{a}_\varphi$$

其中：A_R, A_θ, A_φ 是 (R,θ,φ) 的函数。



利用矢量点积的定义：

$$A_R = \vec{A}\cdot\hat{a}_R = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_R$$

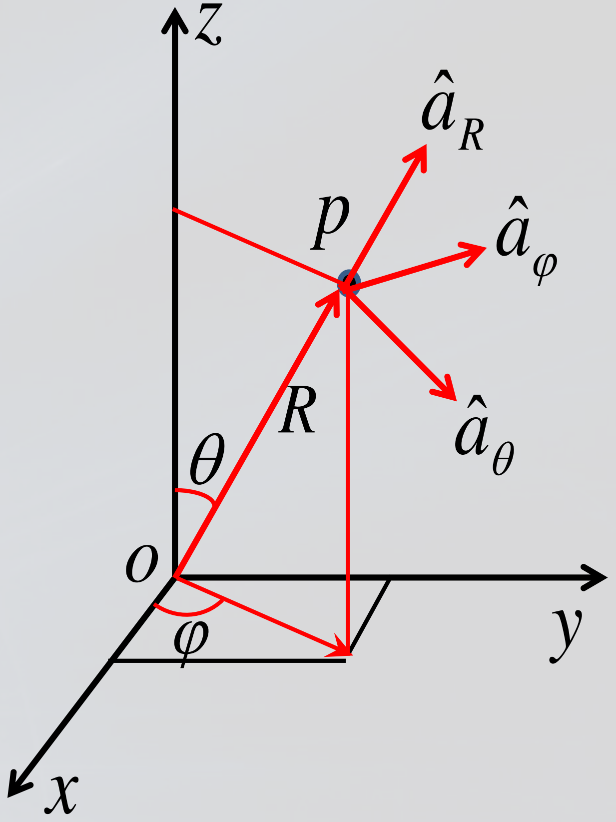
$$= A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_R + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_R + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_R$$

$$A_\theta = \vec{A}\cdot\hat{a}_\theta = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\theta$$

$$= A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\theta + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\theta + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\theta$$

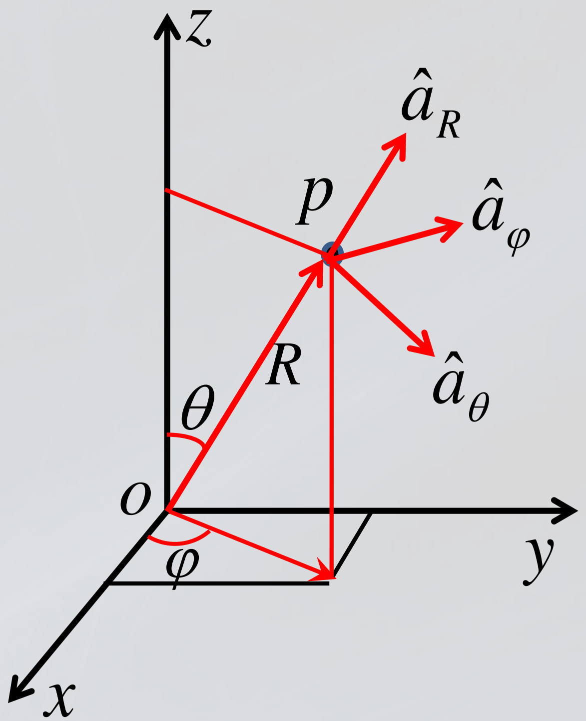
$$A_\varphi = \vec{A}\cdot\hat{a}_\varphi = (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_\varphi$$

$$= A_x\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\varphi + A_y\hat{a}_y\cdot\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z\cdot\hat{a}_\varphi$$



利用矢量点积的定义：

$$\begin{cases}\hat{a}_x\cdot\hat{a}_R=\sin\theta\cos\varphi\\ \hat{a}_x\cdot\hat{a}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\\ \hat{a}_x\cdot\hat{a}_\varphi=-\sin\varphi\end{cases}$$



$$\begin{cases}\hat{a}_y\cdot\hat{a}_R=\sin\theta\sin\varphi\\ \hat{a}_y\cdot\hat{a}_\theta=\cos\theta\sin\varphi\\ \hat{a}_y\cdot\hat{a}_\varphi=\cos\varphi\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{a}_z\cdot\hat{a}_R=\cos\theta\\ \hat{a}_z\cdot\hat{a}_\theta=-\sin\theta\\ \hat{a}_z\cdot\hat{a}_\varphi=0\end{cases}$$

得到变换矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

同理：

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

例：已知在直角坐标系中， $\vec{G}=\dfrac{xz}{y}\hat{a}_x$

求：变换到球坐标系中， $\vec{G}$ 的表达式。

解：根据题意，在球坐标系中

$$G_R=\vec{G}\cdot\hat{a}_R=\frac{xz}{y}\hat{a}_x\cdot\hat{a}_R=\frac{xz}{y}\sin\theta\cos\varphi$$

$$G_\theta=\vec{G}\cdot\hat{a}_\theta=\frac{xz}{y}\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\theta=\frac{xz}{y}\cos\theta\cos\varphi$$

$$G_\varphi=\vec{G}\cdot\hat{a}_\varphi=\frac{xz}{y}\hat{a}_x\cdot\hat{a}_\varphi=-\frac{xz}{y}\sin\varphi$$

已得到:

$$\begin{cases} G_R = \dfrac{xz}{y}\sin\theta\cos\varphi \\ G_\theta = \dfrac{xz}{y}\cos\theta\cos\varphi \\ G_\varphi = -\dfrac{xz}{y}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_R = R\sin\theta\cos\theta\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} \\ G_\theta = R\cos^2\theta\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} \\ G_\varphi = -R\cos\theta\cos\varphi \end{cases}$$

已知坐标变量得到关系:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

球坐标系中表达式:

$$\vec{G} = R\sin\theta\cos\theta\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\hat{a}_R + R\cos^2\theta\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\hat{a}_\theta - R\cos\theta\cos\varphi\hat{a}_\varphi$$

小结：

1. 圆柱坐标系与直角坐标系的变换
2. 球坐标系与直角坐标系的变换