第9周作业及其参考答案

Edited by Hu Chen

OUC

May 5, 2020

目录

二阶常系数齐次线性常微分方程的通解

给定一个二阶常系数齐次线性常微分方程

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0. \tag{1}$$

它的通解的求法为：
先写出特征方程

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{2}$$

这个方程有两个根r_1, r_2

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{3}$$

根据根的情况：

1. 有两个相异实根r_1, r_2, 则通解为$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
2. 两个相等的实根$r_1 = r_2$, 则通解为$y = (c_1 x + c_2) e^{r_1 x}$
3. 一对共轭复根,$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, 则通解为$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

一阶常系数非齐次线性常微分方程的通解

给定一个二阶常系数非齐次线性常微分方程

$$y' + \lambda y = f(x), \quad \beta > 0. \tag{4}$$

对应的齐次方程是可变量分离的方程, 通解为$ce^{-\lambda x}$, 则可由常数变易法求得方程(4)的通解为

$$y = ce^{-\lambda x} + \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda(t-s)} f(s) ds.$$

分离变量法求解齐次热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), & (5) \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), & (6) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l), & (7) \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$ 为已知函数。
注意(6) 是第一类边界条件(也称狄利克雷【英文Dirichlet】条件), (7) 是初始条件(因为关于t 求一阶导数，所以会一个初始条件：如初始温度)。(6) 式可以换成别的边界条件，比如把(6) 式换成$u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0,$（左边界是第二类边界条件，又称诺依曼【英文Neumann】条件，右边界是第一类边值条件）.当然还有第三类边界条件（又称罗宾【英文Robin】条件），如：$u_x(0,t) + cu(0,t) = 0.$

分离变量法

求解问题(5)–(7),如果设解$u(x,t)=T(t)X(x)$, 那么把u代入方程(5), 会得到两个变量分离的方程

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (8) \\ T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (9) \end{cases}$$

其中λ 是任意的常数。方程(8) 的通解是$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$(此处假设$\lambda<0$),($\lambda=0$,通解为$X(x)=c_1x+c_2$, $\lambda>0$ 通解为$X(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$). 有两个待定系数$c_1$, c_2, 所以需要两个条件，恰好由原问题的边界条件(6)知，有两个条件。
将$u(x,t)=T(t)X(x)$ 代入(6),可以得到$X(0)=0, X(l)=0$. 因为我们要求有意义的解是非零解, 所以求解过程中发现只有$\lambda=n^2\pi^2/l^2$, $n=1,2,3,\ldots$ 有非零解，相应的解为$X_n=B_n\sin(n\pi x/l)$, B_n 是任意的常数【此处注意，如果条件(6)换成别的条件，相应的关于X(x) 的两个条件就变了,所以解X(x)也会发生变化】

分离变量法(续1)

将有意义的λ 值代入(9)，可得方程(9) 的通解为

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}.$$

此时$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ 显然满足方程(5) 和边界条件(6), 但是一般不满足(7)(可以代入验证一下).为此我们寻求它们的线性组合

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}} \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

把$u(x,t)$ 代入原问题的初始条件(7), 得到

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi x}{l}). \tag{10}$$

分离变量法(续2)

由三角函数的正交关系

$$\int_0^l \sin(\frac{n\pi x}{l})\sin(\frac{m\pi x}{l})dx = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \quad (11) \\ \frac{l}{2}, & \text{for } m = n \quad (12) \end{cases}$$

通过(10), 我们可以直接将C_n 解出来

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin(\frac{n\pi x}{l})dx. \tag{13}$$

分离变量法求解非齐次方程

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (0 < x < l,\ t > 0), \quad (14)\\
u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \quad (15)\\
u(x,0) = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l), \quad (16)
\end{cases}
$$

其中$\varphi(x)$ 和$f(x,t)$是已知函数,$f(x,t)$ 一般称为源项或应力项。我们先把(14)–(16) 对应的齐次方程(5)–(7)（也就是令f(x,t)=0）的解求出来，即形如$u_n = T_n(t)X_n(x)$ 的一系列。然后我们再令问题(14)–(16)的解$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$(注意这里的$X_n(x)$就是齐次问题的$X_n(x)$, $T_n(t)$不是原来的，是待定系数)。剩下的是如何求$T_n(t)$. 我们以(14)–(16) 为例介绍。

分离变量法求解非齐次方程(续1)

(14)–(16) 对应的齐次方程(5)–(7)的分离变量法求得$X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l})$,所以令问题(14)–(16) 的解$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$. 将其代入方程(14) 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n^{'}(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)\right]\sin(\frac{n\pi x}{l}) = f(x,t)$$

再把$f(x,t)$ 展开同样的傅里叶级数

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

比较可得

$$T_n^{'}(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t). \tag{17}$$

分离变量法求解非齐次方程(续2)

方程(17) 的通解为

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}} + \int_0^t e^{-\frac{n^2\pi^2a^2(t-s)}{l^2}} f_n(s)ds \qquad (18)$$

此处有待定系数C_n. 再将解$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l})$ 代入初始条件(16) 得到

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(\frac{n\pi x}{l}) \qquad (19)$$

从中可以解出$T_n(0) = \varphi_n$, 再代入(18), 即可以把C_n 求出来: $C_n = \varphi_n$ (φ_n 是φ 的展开系数).

习题八作业

3. 一根长为l 的枢轴，它的初始温度为常数c_0, 其两端的温度保持为0，试求在枢轴上温度的分布情况.

解 由题意知此枢轴的温度分布$u(x,t)$ 满足如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = c_0 & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

则由分离变量法知

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}} \sin(\frac{n\pi x}{l}),$$

其中

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l c_0 \sin(\frac{n\pi x}{l})dx \\ &= \frac{2c_0}{n\pi}(1-\cos(n\pi)). \end{aligned}$$

所以最终结果为

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4c_0}{(2k+1)\pi} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}} \sin(\frac{(2k+1)\pi x}{l}).$$

4. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b^2 u & (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

其中b 为已知常数，$\varphi(x)$ 为已知的连续函数.

提示：令$u(x,t) = e^{-b^2 t} v(x,t)$.

解

$u(x,t) = e^{-b^2 t} v(x,t)$, 代入方程得$e^{-b^2 t} v_t - b^2 e^{-b^2 t} v = a^2 e^{-b^2 t} v_{xx} - b^2 e^{-b^2 t} v$,
即$v_t = a^2 v_{xx}$. 则$v(x,t)$ 满足如下定解问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & (0 < x < l,\ t > 0), \\ v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0 & (t \geq 0), \\ v(x,0) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \end{cases}$$

则由分离变量法得

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin(\frac{n\pi x}{l}),$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx.$$

再代回$u(x,t)=e^{-b^2t}v(x,t)$, 得

$$u(x,t)=e^{-b^2t}\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$