第15周作业及参考答案

Edited by Hu Chen

OUC

June 18, 2020

目录

勒让德多项式的递推关系式

n 阶勒让德微分方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

它的其中一个有界特解为$P_n(x)$, 称之为n阶勒让德多项式。
对$n = 1, 2, \cdots$, 勒让德多项式满足如下递推关系式:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x); \tag{1}$$

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x); \tag{2}$$

$$nP_{n-1}(x) + xP'_{n-1}(x) = P'_n(x); \tag{3}$$

习题十五作业

3.试证$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)$, $n=1,2,3,\cdots$.

解 由勒让德多项式的三项递推关系式

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x) \tag{4}$$

两边关于x 求导得

$$(n+1)P'_{n+1}(x)=(2n+1)xP'_n(x)+(2n+1)P_n(x)-nP'_{n-1}(x)$$

又因为

$$xP'_n(x)=P'_{n-1}(x)+nP_n(x);$$

两个式子结合即得

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x).$$

5.试证$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)=P'_n(x)+P'_{n+1}(x)$, $n=0,1,2,\cdots$.

提示：可用数学归纳法.

解 $n=0$, 显然由$P_0(x)=1$ 和$P_1(x)=x$直接可以推得。再由3题的结论利用数学归纳法直接可以求得。

6. 试证$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$, $n=0,1,2,\cdots$.

解 由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)\mathrm{d}(P_n(x)) \\ &= -\int_{-1}^{1}P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]=(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)$$

和$P_n(x)$ 满足勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,$$

所以有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}n(n+1)[P_n(x)]^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n(n+1)}{2n+1}.\end{aligned}$$

9. 求解定解问题

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + 2ru_r + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}u_\theta + u_{\theta\theta} = 0, \\ u(R,\theta) = u_0\cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi). \end{cases}$$

解 设$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入上面的方程可分离得欧拉方程

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{5}$$

和特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \\ |\Theta(0)| < +\infty, |\Theta(\pi)| < +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

令$x = \cos\theta, y(x) = \Theta(\arccos x)$, 这个特征值问题就变成了本节讨论过的特征值问题. 因此特征值问题(6)的特征值和特征函数为

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

将$\lambda_n = n(n+1)$代入欧拉方程(5), 解得

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}.$$

在球心$r = 0$处应附加有界性条件$R(0) < +\infty$, 这推出$D_n = 0$. 所以实际上

$$R_n(r) = C_n r^n.$$

现在叠加所有变量分离形式的特解, 便可得到有轴对称性的拉普拉斯方程的解的一般形式

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{7}$$

代入边界条件得

$$u_0 \cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n R^n P_n(\cos\theta).$$

令$x = \cos\theta$, 则上式变为

$$u_0 x = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n R^n P_n(x).$$

又因为$P_1(x) = x$,所以$C_1 R = u_0$, $c_n = 0$, $n \neq 1$ (根据正交性). 故原问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{u_0}{R} r \cos\theta.$$