3.3 柯西积分公式及其推广

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 23 日

目录

3.3.1 柯西积分公式

- 柯西积分定理说当被积函数在周线（积分路径）内解析即无奇点时, 积分为零.

3.3.1 柯西积分公式

- 柯西积分定理说当被积函数在周线（积分路径）内解析即无奇点时, 积分为零.
- 当被积函数在周线内有奇点时, 例 3.6 告诉我们可将其转化为只有一个奇点的情形进行计算.

3.3.1 柯西积分公式

- 柯西积分定理说当被积函数在周线（积分路径）内解析即无奇点时, 积分为零.
- 当被积函数在周线内有奇点时, 例 3.6 告诉我们可将其转化为只有一个奇点的情形进行计算.

设 D 是以围线 C 为边界的区域, $z_0 \in D$. 如果 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析, 那么函数 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在点 z_0 处不解析, 因此积分 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ 一般不为 0, 例如 $f(z)=1$ 的情形. 关于这类积分的计算, 我们有柯西积分公式.

定理 3.6 (柯西积分公式)

设 D 是以围线（或复围线）C 为边界的区域. 如果函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,\quad z_0\in D. \tag{3.8}$$

证 因为 $z_0\in D$, 而 D 是区域, 所以 z_0 是 D 的内点. 于是可作圆周 $C_\rho: |z-z_0|=\rho$ 使其在 D 内, 根据周线变形原理（或定理 3.5）, 我们有

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z.$$

于是为证明公式(3.8)成立, 我们只需证明

$$\oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0) = \oint_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

即

$$\oint_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$$

注意到不论 ρ 取何值，上式左端积分恒为常值，所以我们只需证明

$$\lim_{\rho\to 0} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$$

事实上，因为 $f(z)$ 在 D 内解析，从而连续，所以任取 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $|z-z_0| = \rho < \delta$，就有

$$|f(z)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

于是由定理 3.1 有

$$\left|\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi\rho}\cdot 2\pi\rho=\varepsilon.$$

定理得证. ∎

于是由定理 3.1 有

$$\left| \oint_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \mathrm{d}z \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon.$$

定理得证. ∎

公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z, \quad z_0 \in D. \tag{3.8}$$

称为柯西积分公式, 它是解析函数的积分表示形式, 是今后研究解析函数各种局部性质的重要工具. 为突出这一点, 柯西积分公式常写为下面的形式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \quad z \in D. \tag{3.9}$$

柯西积分公式告诉我们: 解析函数在单连通区域（或以复周线为边界的多连通区域）内的值完全由它在边界上的值决定, 并给出了具体的周线积分表示公式. 相比之下, 只是可微的实函数绝不可能有这样的性质.

柯西积分公式告诉我们: 解析函数在单连通区域（或以复周线为边界的多连通区域）内的值完全由它在边界上的值决定, 并给出了具体的周线积分表示公式. 相比之下, 只是可微的实函数绝不可能有这样的性质.

例 3.7

计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2i)}\,dz$, 其中 C 为圆周 $|z-3i|=2$.

解 由于函数 $\frac{e^z}{z}$ 在闭圆 $|z-3i|\le 2$ 上解析, 所以由公式(3.9)有

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-2i)}\,dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}\,dz = 2\pi i\cdot \frac{e^z}{z}\bigg|_{z=2i} = 2\pi i\cdot\frac{e^{2i}}{2i} = \pi e^{2i}.$$

∎

柯西积分公式告诉我们: 解析函数在单连通区域（或以复周线为边界的多连通区域）内的值完全由它在边界上的值决定, 并给出了具体的周线积分表示公式. 相比之下, 只是可微的实函数绝不可能有这样的性质.

例 3.7

计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z$, **其中** C **为圆周** $|z-3\mathrm{i}|=2$.

解　由于函数 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z}$ 在闭圆 $|z-3\mathrm{i}|\leq 2$ 上解析, 所以由公式(3.9)有

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z}}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^z}{z}\bigg|_{z=2\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}. \quad \blacksquare$$

请同学们利用柯西积分公式重新求解上一节的例 3.6.

3.3.2 解析函数的无限次可微性

柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D. \tag{3.9}$$

的左端是一个解析函数, 因此可以对它求导.

3.3.2 解析函数的无限次可微性

柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D. \tag{3.9}$$

的左端是一个解析函数, 因此可以对它求导.

柯西积分公式(3.9)的右端的积分是一个含参变量的积分, 这个积分定义了一个关于参变量 z 的函数.

3.3.2 解析函数的无限次可微性

柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \quad z \in D. \tag{3.9}$$

的左端是一个解析函数, 因此可以对它求导.

柯西积分公式(3.9)的右端的积分是一个含参变量的积分, 这个积分定义了一个关于参变量 z 的函数.

对柯西积分公式(3.9)的两端关于 z 求导, 在右端将求导运算和积分运算形式地交换次序, 可得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta,$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \, \mathrm{d}\zeta,$$

$$f'''(z) = \frac{2 \cdot 3}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} \, \mathrm{d}\zeta, \cdots .$$

由此可猜测出如下的解析函数的任意阶导数的积分公式.

定理 3.7

条件同上一定理, 则函数 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D,\ n = 1, 2, 3, \cdots . \tag{3.10}$$

证 用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时, 需要证明的是

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta.$$

由导数的定义, 我们只需证明

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta.$$

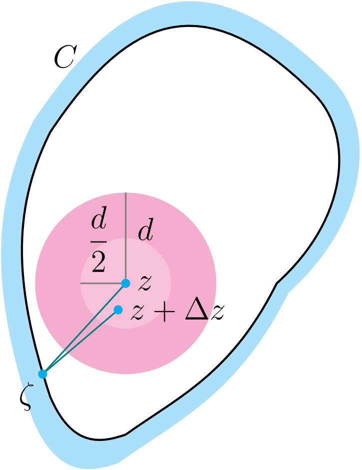
为此只需证明当 $\Delta z \to 0$ 时, 下面的差式的极限为 0.

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \\
=&\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right]-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \\
=&\frac{\Delta z}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{\Delta z}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \tag{3.11}$$

现在对上式右端的积分进行估计. 因为 $f(z)$ 在 C 上解析, 所以在 C 上连续, 从而存在一个正数 M, 使得在 C 上有 $|f(z)|\le M$. 在 D 内取一个点 z 的邻域, 设 d 为此邻域的半径, 并设 $|\Delta z|<d/2$, 则有

$$|\zeta-z|\ge d,\quad |\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|>\frac{d}{2}.$$



于是我们有

$$\left|\frac{\Delta z}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{ML}{\frac{d}{2}\cdot d^2} = |\Delta z|\cdot\frac{ML}{\pi d^3},$$

其中 L 为 C 的长度. 因此当 $\Delta z\to 0$ 时, 式(3.11)右端的积分趋于 0.

假设当 $n=k$ 时，公式(3.10)成立．那么

$$
\begin{aligned}
&\frac{f^{(k)}(z+\Delta z)-f^{(k)}(z)}{\Delta z}-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\\
=&\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta-\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right]-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\\
=&\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)[(\zeta-z)^k+o(1)]}{(\zeta-z-\Delta z)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\\
=&\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)[(k+1)(\zeta-z)^k\Delta z+o(1)]}{(\zeta-z-\Delta z)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}\,\mathrm{d}\zeta\\
=&\frac{(k+1)!(k+1)\Delta z}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)^{k+1}(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta+o(1),
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

其中 $o(1)$ 是 Δz 的无穷小量，即 $o(1)\to 0\,(\Delta z\to 0)$．上式的推导过程中两次使用了二项式定理．

同前面一样进行积分估计，可知当 $\Delta z \to 0$ 时，式(3.12)的右端趋于 0. 所以当 $n = k + 1$ 时，公式(3.10)仍成立. ∎

同前面一样进行积分估计, 可知当 $\Delta z \to 0$ 时, 式(3.12)的右端趋于 0. 所以当 $n = k + 1$ 时, 公式(3.10)仍成立.

同这个定理一样, 许多复变函数微分学的结论采用复积分的方法证明起来非常简单, 若不用复积分, 则证明会变得非常困难. 这是复变函数论的一个特色, 初学者需要多加留意.

推论 3.2

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数, 并且它们也在 D 内解析.

证 设 z_0 为 D 内的任意一点. 以 z_0 为心取一个充分小的闭圆使其含于 D 内, 在此闭圆上应用定理3.7, 则可知 $f(z)$ 在此圆内有各阶导数.

推论 3.2

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数, 并且它们也在 D 内解析.

证 设 z_0 为 D 内的任意一点. 以 z_0 为心取一个充分小的闭圆使其含于 D 内, 在此闭圆上应用定理3.7, 则可知 $f(z)$ 在此圆内有各阶导数. 于是由 z_0 的任意性便可知 $f(z)$ 在 D 内有各阶导数. ∎

推论 3.2

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数, 并且它们也在 D 内解析.

证　设 z_0 为 D 内的任意一点. 以 z_0 为心取一个充分小的闭圆使其含于 D 内, 在此闭圆上应用定理3.7, 则可知 $f(z)$ 在此圆内有各阶导数. 于是由 z_0 的任意性便可知 $f(z)$ 在 D 内有各阶导数. ∎

推论3.2可以被概括为“解析函数的导函数是解析的”.

从柯西积分定理、柯西积分公式以及解析函数有任意阶导数等性质来看，“可导”二字根本不能概括解析函数的性质，这是我们不把复可导函数就叫可导函数的部分原因。

从柯西积分定理、柯西积分公式以及解析函数有任意阶导数等性质来看，“可导”二字根本不能概括解析函数的性质，这是我们不把复可导函数就叫可导函数的部分原因。

同学们现在可以更好地体会一下实可导和复可导的差别.

公式(3.10)可重写为

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z), \quad z \in D,\ n = 2, 3, 4, \cdots, \tag{3.10$'$}$$

同柯西积分公式一样，它可用于计算围线积分.

例 3.8

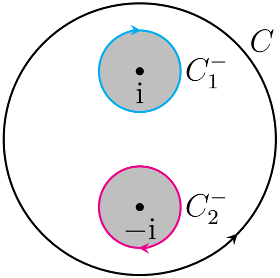
计算 $\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解 除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外, 函数 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}$ 在复平面上解析.

例 3.8

计算 $\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解 除 $z=\pm\mathrm{i}$ 外, 函数 $\frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}$ 在复平面上解析. 于是由定理 3.5 和公式 (3.10') 有



$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_1} \frac{\mathrm{e}^z/(z+\mathrm{i})^2}{(z-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{e}^z/(z-\mathrm{i})^2}{(z+\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}\right]'_{z=\mathrm{i}} + 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}\right]'_{z=-\mathrm{i}} \\
&= \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \frac{\pi}{2}(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}} \\
&= \mathrm{i}\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

3.3.3 模的最大值原理 柯西不等式 刘维尔定理 莫雷拉定理

首先利用定理3.7, 我们可以对复变函数的导数的做出如下的估计.

定理 3.8 (柯西不等式)

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D$. 作圆周 $C: |z-z_0| = R$ 使 C 及 C 的内部都在 D 内, 则有

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\,M(R)}{R^n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.13}$$

其中 $M(R)$ 是 $|f(z)|$ 在圆周 C 上的上界.

证 由定理3.7有

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(R)}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n!\,M(R)}{R^n}.$$

∎

在整个复平面上解析的函数称为整函数.

在整个复平面上解析的函数称为整函数. 例如多项式, $e^z, \sin z, \cos z$ 都是整函数. 当然常数函数也是整函数.

在整个复平面上解析的函数称为整函数. 例如多项式, $e^z, \sin z, \cos z$ 都是整函数. 当然常数函数也是整函数. 应用柯西不等式, 可得一个关于整函数的优美的定理.

定理 3.9 (刘维尔定理)

有界整函数必为常数.

在整个复平面上解析的函数称为整函数. 例如多项式, $e^z, \sin z, \cos z$ 都是整函数. 当然常数函数也是整函数. 应用柯西不等式, 可得一个关于整函数的优美的定理.

定理 3.9 (刘维尔定理)

有界整函数必为常数.

证 设 $f(z)$ 是整函数, $|f(z)|$ 在整个复平面上的上界为 M. 则在柯西不等式(3.13)中, 对平面上的任一点 z_0 和任意的 R 都有 $M(R) \leq M$. 令 $n = 1$ 有

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

令 $R \to +\infty$, 立知 $f'(z_0) = 0$.

在整个复平面上解析的函数称为整函数. 例如多项式, $e^z, \sin z, \cos z$ 都是整函数. 当然常数函数也是整函数. 应用柯西不等式, 可得一个关于整函数的优美的定理.

定理 3.9 (刘维尔定理)

有界整函数必为常数.

证 设 $f(z)$ 是整函数, $|f(z)|$ 在整个复平面上的上界为 M. 则在柯西不等式(3.13)中, 对平面上的任一点 z_0 和任意的 R 都有 $M(R) \leq M$. 令 $n=1$ 有

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

令 $R \to +\infty$, 立知 $f'(z_0)=0$. 这说明 $f(z)$ 在平面上的导数处处为零. 所以 $f(z)$ 必为常数. ∎

现在回头再看三角正弦、余弦函数在复平面上的无界性, 就知道那只不过是刘维尔定理的特殊推论而已.

刘维尔定理的一个漂亮的应用是证明：

定理 3.10 (代数学基本定理)

多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

在复平面上至少有一个零点.

定理 3.10 (代数学基本定理)

多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

在复平面上至少有一个零点.

证 反证法. 设 $P(z)$ 在复平面上无零点. 因为 $P(z)$ 是整函数, 所以 $1/P(z)$ 也是整函数.

定理 3.10 (代数学基本定理)

多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

在复平面上至少有一个零点.

证 反证法. 设 $P(z)$ 在复平面上无零点. 因为 $P(z)$ 是整函数, 所以 $1/P(z)$ 也是整函数. 由

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = 0$$

可知 $1/P(z)$ 在复平面上有界.

定理 3.10 (代数学基本定理)

多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

在复平面上至少有一个零点.

证 反证法. 设 $P(z)$ 在复平面上无零点. 因为 $P(z)$ 是整函数, 所以 $1/P(z)$ 也是整函数. 由

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = 0$$

可知 $1/P(z)$ 在复平面上有界. 根据刘维尔定理, $1/P(z)$ 为常数, 从而得 $P(z)$ 为常数. 这与 $P(z)$ 为多项式函数矛盾. 故定理得证. ∎

- 代数学基本定理是几个数学中少有的有着数百种证法的定理之一，这里给出的复变函数的证明方法绝对属于最漂亮的几个证法之一.

- 代数学基本定理是几个数学中少有的有着数百种证法的定理之一, 这里给出的复变函数的证明方法绝对属于最漂亮的几个证法之一.
- 代数学基本定理的第一个严格证明是高斯在他的博士论文中的给出的, 仅高斯一生就给出了四个不同的证明.

- 代数学基本定理是几个数学中少有的有着数百种证法的定理之一, 这里给出的复变函数的证明方法绝对属于最漂亮的几个证法之一.
- 代数学基本定理的第一个严格证明是高斯在他的博士论文中的给出的, 仅高斯一生就给出了四个不同的证明.
- 代数学基本定理告诉我们, 代数方程在复数范围内总是有解的, 从这个角度看, 数系不必再扩张了.

现在我们来证明柯西积分定理的逆定理, 称为莫雷拉定理.

定理 3.11 (莫雷拉定理)

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内的任一围线 C, 有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

现在我们来证明柯西积分定理的逆定理, 称为莫雷拉定理.

定理 3.11 (莫雷拉定理)

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内的任一围线 C, 有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证　参考定理 3.3 的证明可知,

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\ \ z_0, z \in D$$

在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

现在我们来证明柯西积分定理的逆定理, 称为莫雷拉定理.

定理 3.11 (莫雷拉定理)

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内的任一围线 C, 有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证 参考定理 3.3 的证明可知,

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\ \ z_0, z \in D$$

在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$. 于是由推论 3.2 可知, $f(z)$ 在 D 内解析. ∎

现在我们可以从围线积分的角度对函数的解析性作出刻画.

定理 3.12

函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件是:
(1) $f(z)$ 在 D 内连续;
(2) 对任一围线 C, 只要 C 及其内部全含于 D 内, 就有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证　必要性由柯西积分定理 3.2 得出.

现在我们可以从围线积分的角度对函数的解析性作出刻画.

定理 3.12

函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件是:
(1) $f(z)$ 在 D 内连续;
(2) 对任一围线 C, 只要 C 及其内部全含于 D 内, 就有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证 必要性由柯西积分定理 3.2 得出.

至于充分性, 对 D 内的任一点 z_0, 取 z_0 的一个包含于 D 内的邻域. 在此邻域内应用莫雷拉定理, 则知 z_0 是 $f(z)$ 的解析点. 又由点 z_0 的任意性, 可知 $f(z)$ 在 D 内解析. ∎

教材 66 页上还提到了平均值定理和模的最大值原理, 感兴趣的同学可以自己看一下.

模的最大值原理的意义在于可以导出调和函数的最大值原理.

作业

习题三

9. 计算 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$, 其中 C 分别为:

(1) $|z+1|=1/2$; (2) $|z-1|=1/2$; (3) $|z|=2$.

10. 设 C 为圆周 $x^2+y^2=3$, $f(z)=\oint_C \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+\mathrm{i})$ 和 $f'(2+\mathrm{i})$.

12. 设 $F(z)=\frac{z+6}{z^2-4}$, 证明 $\oint_C F(z)\,\mathrm{d}z$ 当 C 是圆周 $x^2+y^2=1$ 时等于 0; 当 C 是圆周 $(x-2)^2+y^2=1$ 时等于 $4\pi\mathrm{i}$; 当 C 是圆周 $(x+2)^2+y^2=1$ 时等于 $-2\pi\mathrm{i}$.

14. 设 C 为圆周：$|z| = a\,(a > 1)$, 求积分 (1) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z$; (2) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$.