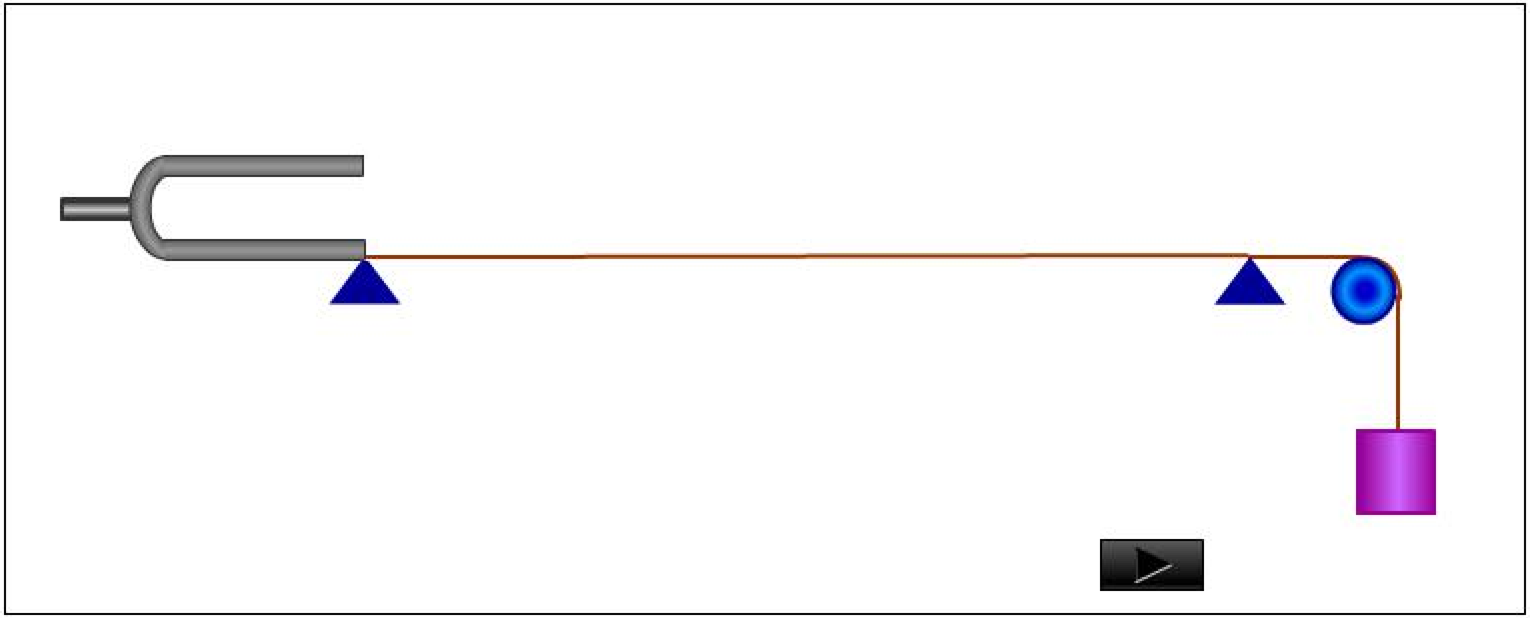
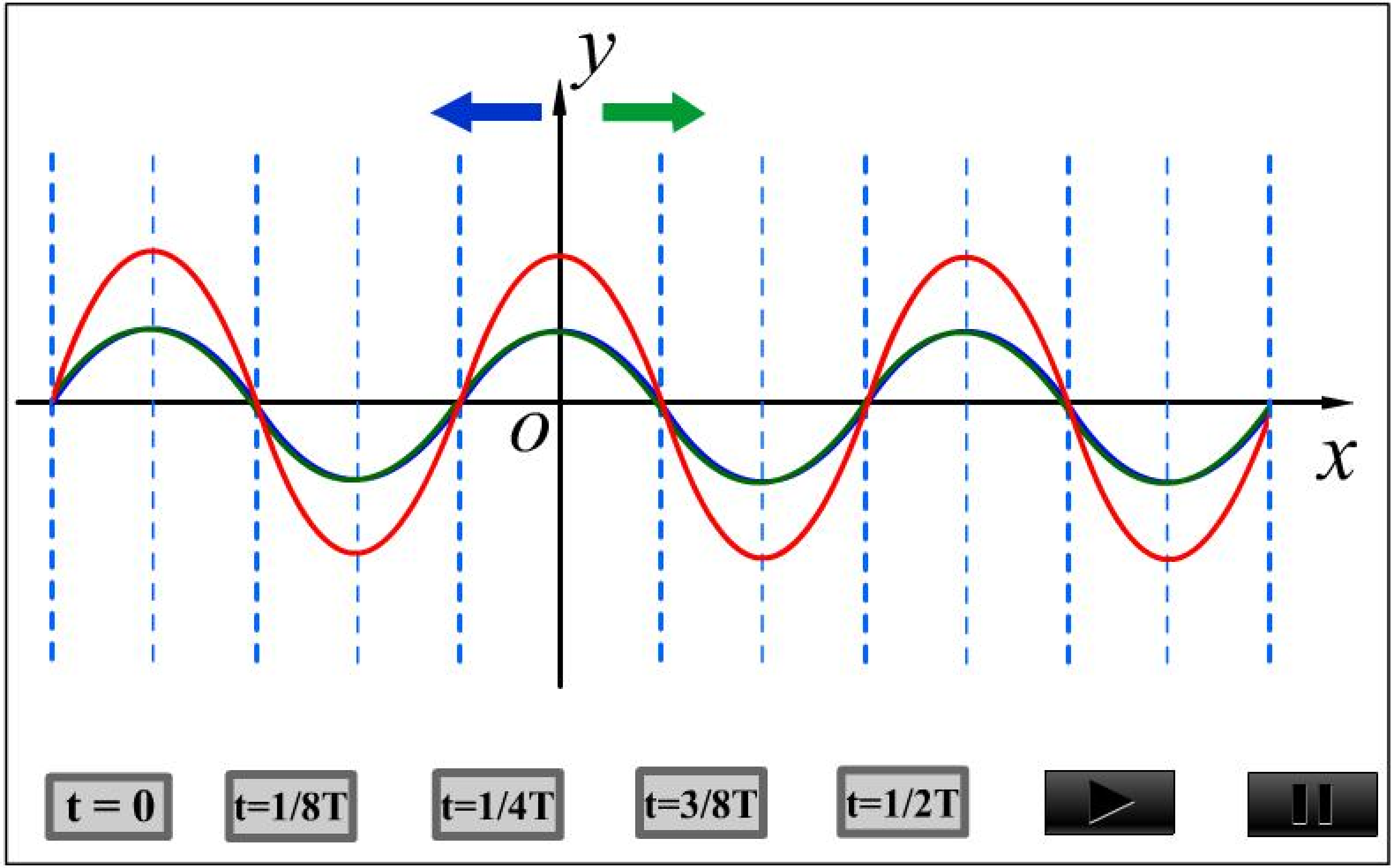
一 驻波的产生

振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象.



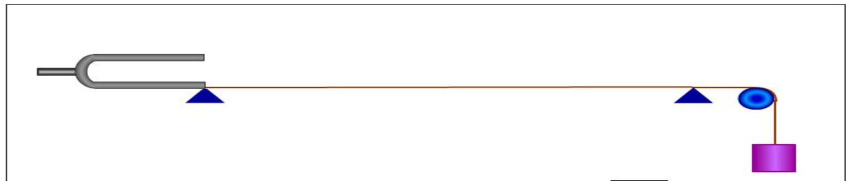
驻 波 的 形 成



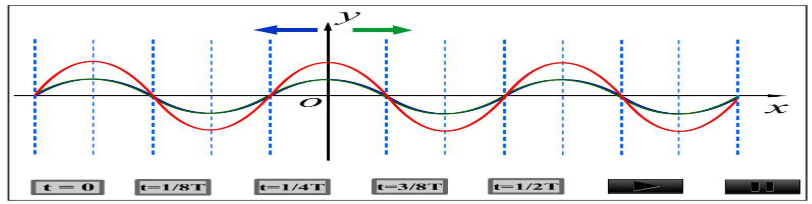

“鱼洗”之谜

二 驻波方程

正向



负向



$$y = y_1 + y_2$$

$$= A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + A\cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= \boxed{2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}}\,\underline{\cos 2\pi\,\nu t}$$

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

讨论

➢ 驻波方程 $y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$

1） 振幅 $\left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$ 随 x 而异， 与时间无关.

$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = \begin{cases} 1 & 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \\ 0 & 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(k+\frac{1}{2})\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \pm k\frac{\lambda}{2} & k = 0,1,\cdots \quad A_{\max} = 2A \quad \text{波腹} \\ \pm(k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} & k = 0,1,\cdots \quad A_{\min} = 0 \quad \text{波节} \end{cases}$$

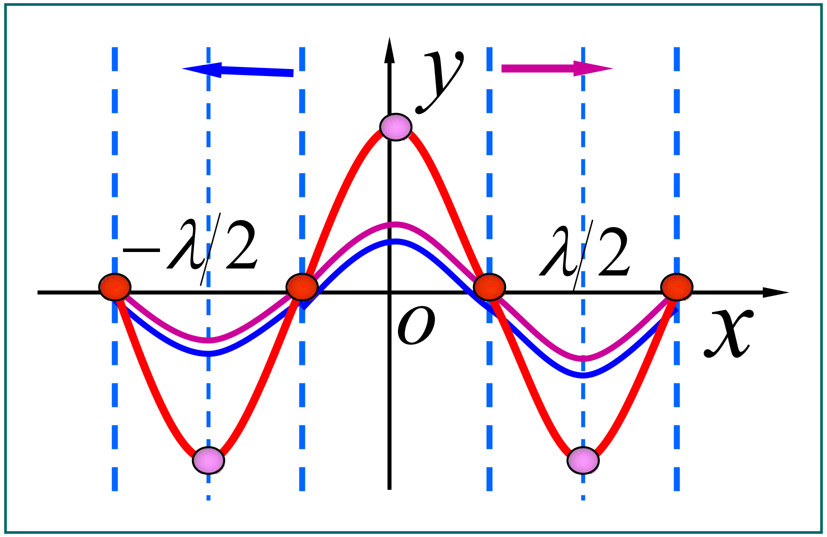
相邻波腹（节）间距 $= \lambda/2$

相邻波腹和波节间距 $= \lambda/4$

因此可用测量波腹间的距离，来确定波长。

2）相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生π 的相位跃变．（与行波不同，无相位的传播）．

$$y=2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$$



位相与 $\cos 2\pi x/\lambda$ 的正负有关

例 $x=\pm\frac{\lambda}{4}$ 为波节

$\boxed{\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}>0}$, $-\frac{\lambda}{4}<x<\frac{\lambda}{4}$,

$$y=2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$$

$\boxed{\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}<0}$, $\frac{\lambda}{4}<x<\frac{3\lambda}{4}$,

$$y=\left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|\cos(2\pi\nu t+\pi)$$

➢在波节两侧点的振动位相相反。同时达到反向最大或同时达到平衡位置，速度方向相反。

➢两个波节之间的点其振动位相相同。同时达到最大或同时达到最小。速度方向相同。

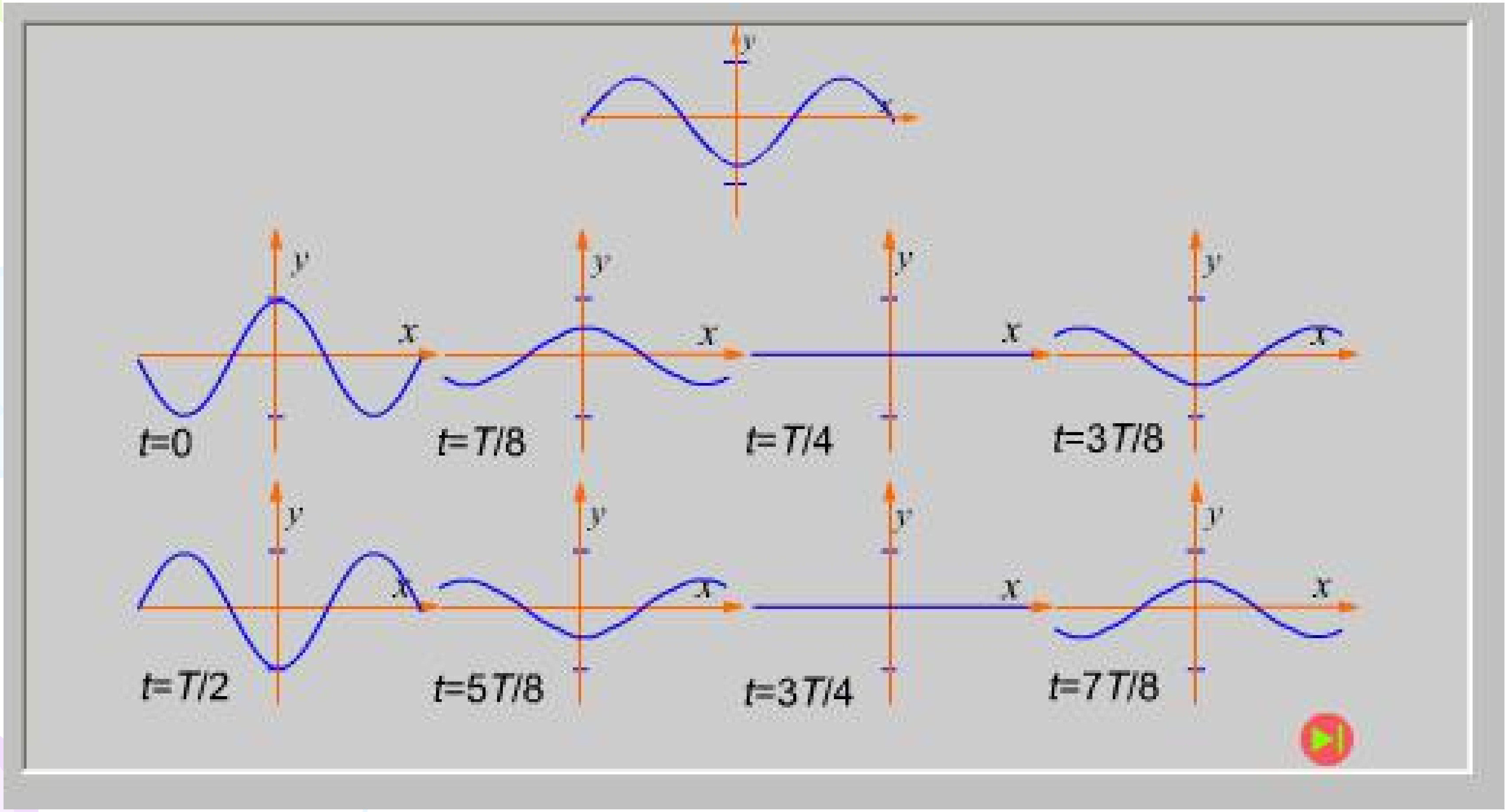
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t$$

$$A(x) = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

函数不满足 $y(t+\Delta t, x+u\Delta t) = y(t,x)$ 它不是行波

它表示各点都在作简谐振动，各点振动的频率相同，是原来波的频率。但各点振幅随位置的不同而不同。

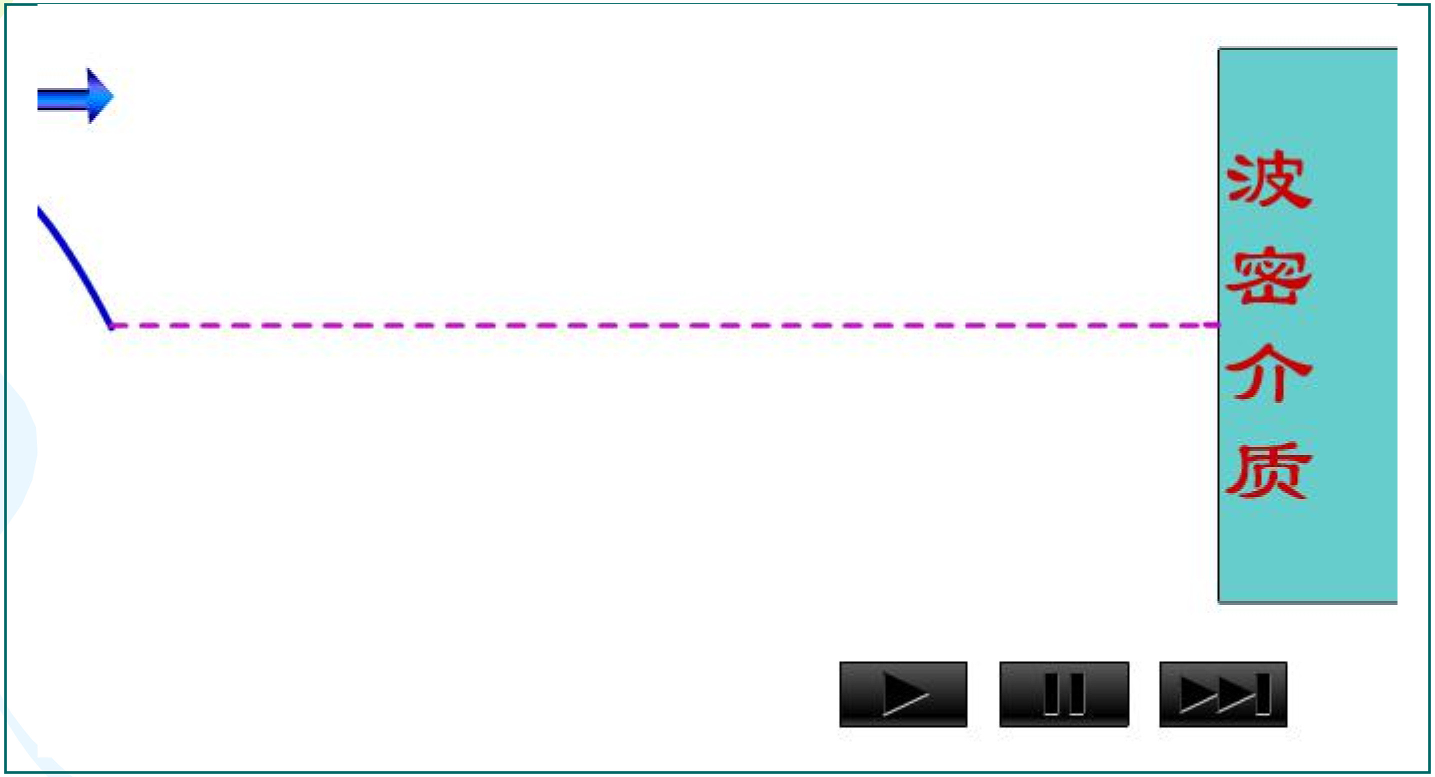
驻波在不同时刻的波形



驻波在运动过程中，波腹由最大到零，到负的最大周期性变化。

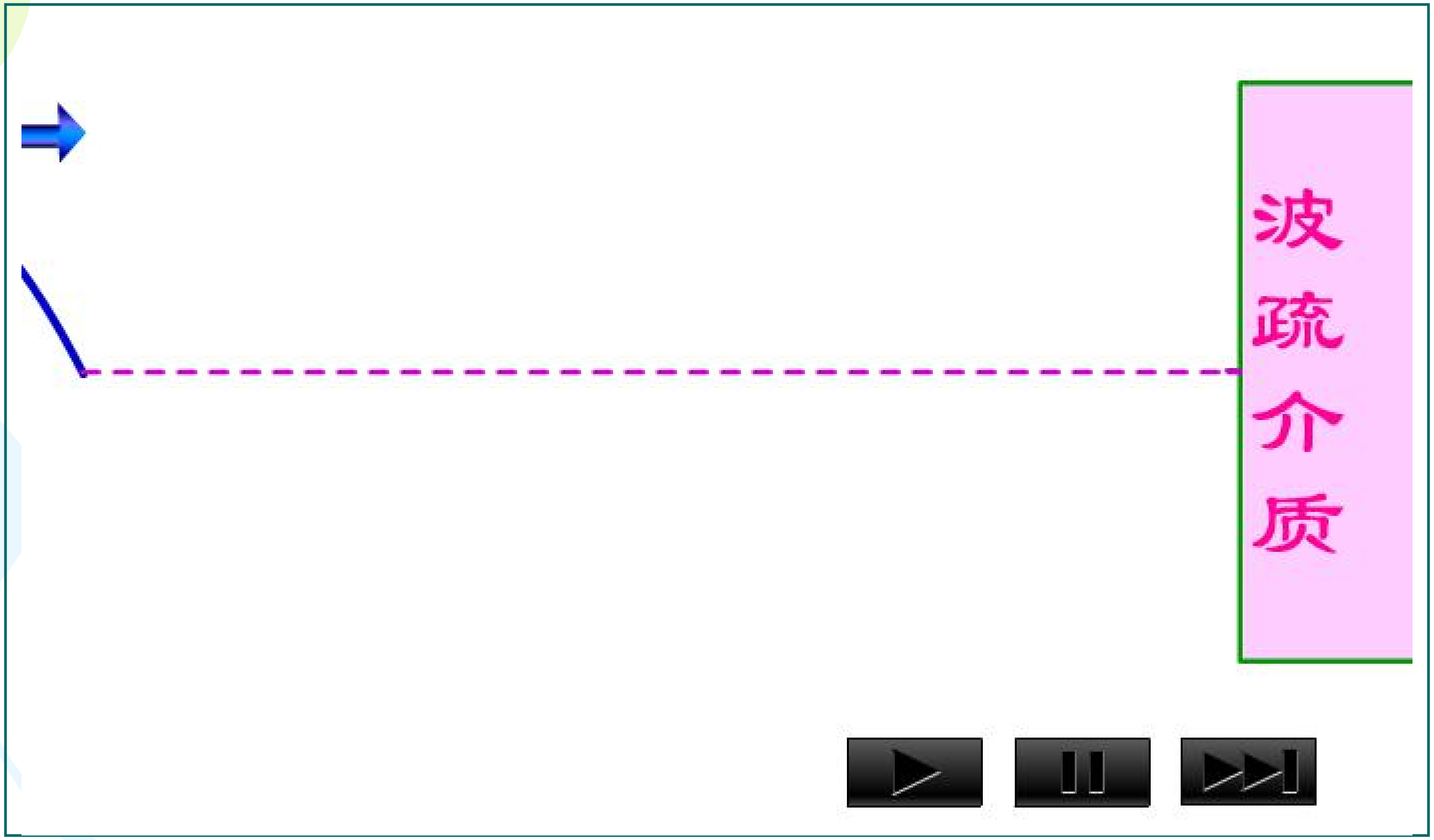
三　相位跃变（半波损失）

波疏介质 ρu 较小



波密介质 ρu 较大

当波从波疏介质垂直入射到波密介质，被反射到波疏介质时形成波节. 入射波与反射波在此处的相位时时相反, 即反射波在分界处产生 π 的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失.



当波从波密介质垂直入射到波疏介质， 被反射到波密介质时形成**波腹**. 入射波与反射波在此处的相位时时**相同**，即反射波在分界处**不**产生相位**跃变**.

入射波在反射点反射时有位相π的突变，这一现象称为半波损失。

折射率（波阻ρu）较大的媒质称为波密介质；

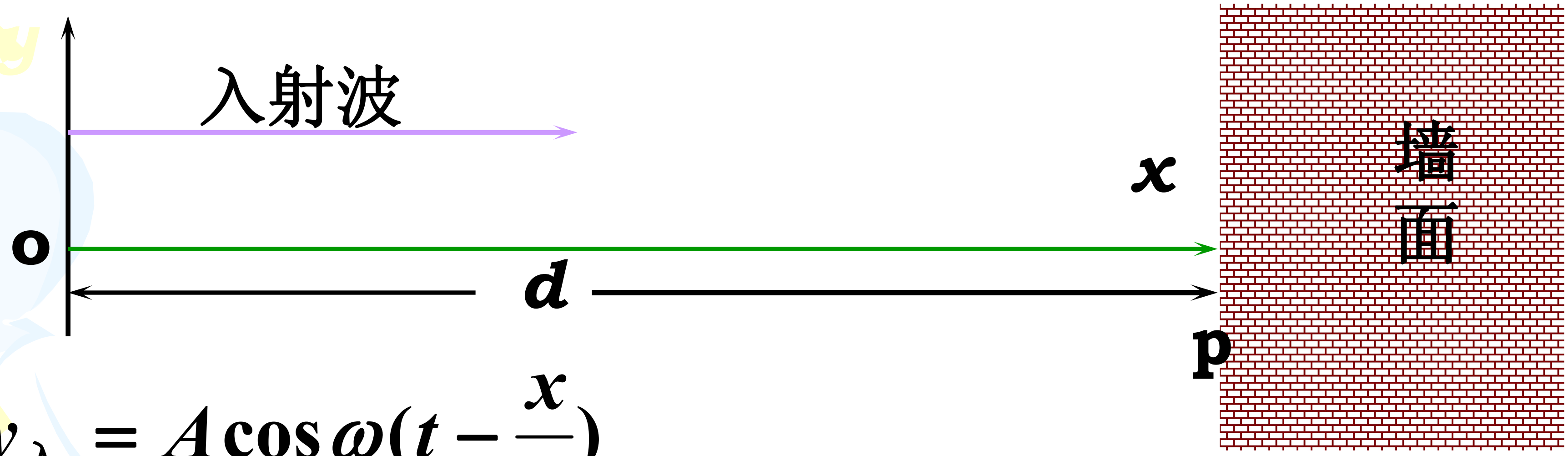
折射率（波阻ρu）较小的媒质称为波疏介质.

实验表明

- 当波从波疏介质垂直入射到波密介质界面上反射时，有半波损失，形成的驻波在界面处是波节。
- 当波从波密介质垂直入射到波疏介质界面上反射时，无半波损失，界面处出现波腹。

例设波源（在原点O）的振动方程为 $y = A\cos\omega t$ 它向墙面方向传播经反射后形成驻波。

求：驻波方程，波节及波腹的位置。



$$y_{入} = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\therefore y_{入p} = A\cos\omega(t - \frac{d}{u})$$

$$\therefore \quad \varphi_{p0} = \pi - \omega\frac{d}{u}$$

令　$x' = x - d$　　$\varphi_{p0} = \pi - \omega\dfrac{d}{u}$

$$\therefore \quad y_{反} = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x'}{u}\right) + \varphi_{p0}\right]$$

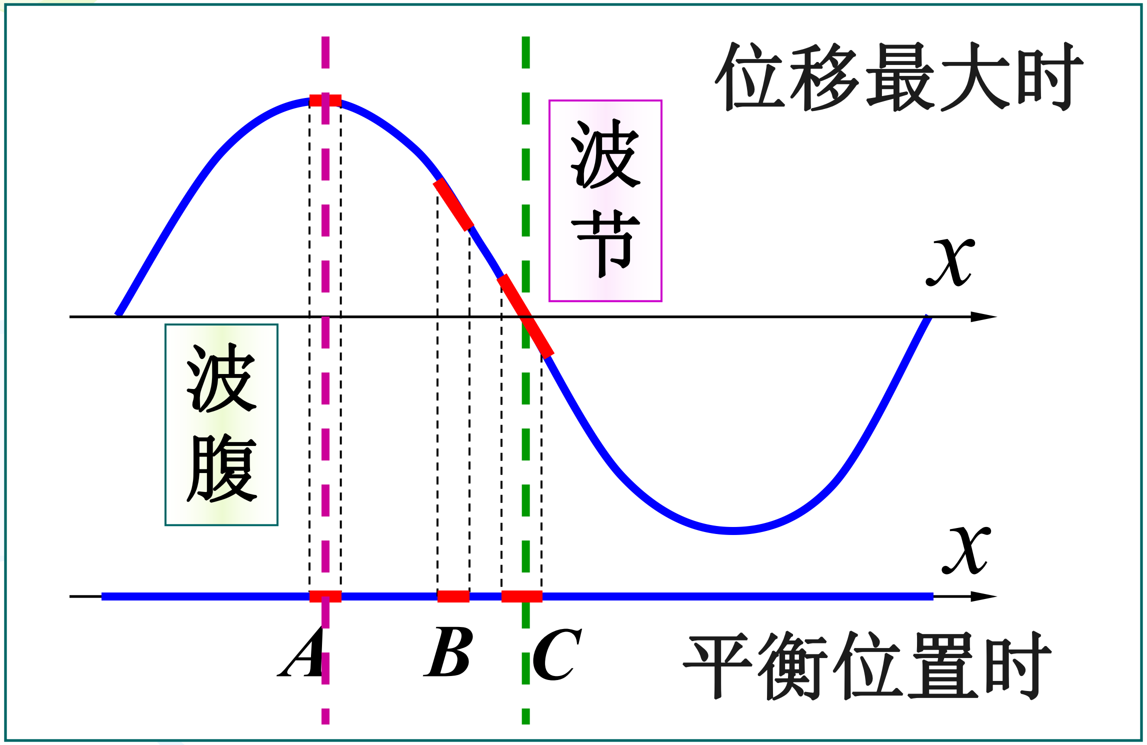
$$= A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \pi - \frac{2d\omega}{u}\right]$$

$$y_{合} = y_{入} + y_{反} = 2A\cos\left[\omega\frac{d-x}{u} + \frac{\pi}{2}\right]\cos\left[\omega t - \left(\omega\frac{d}{u} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

波节：$x = d$、$d - \dfrac{\lambda}{2}$、$d - \lambda$、$\ldots d - k\dfrac{\lambda}{2}\ldots$

波腹：$x = d - \dfrac{\lambda}{4}$、$d - \dfrac{3\lambda}{4}$、$\ldots d - 2(k+1)\dfrac{\lambda}{4}\ldots$

四 驻波的能量

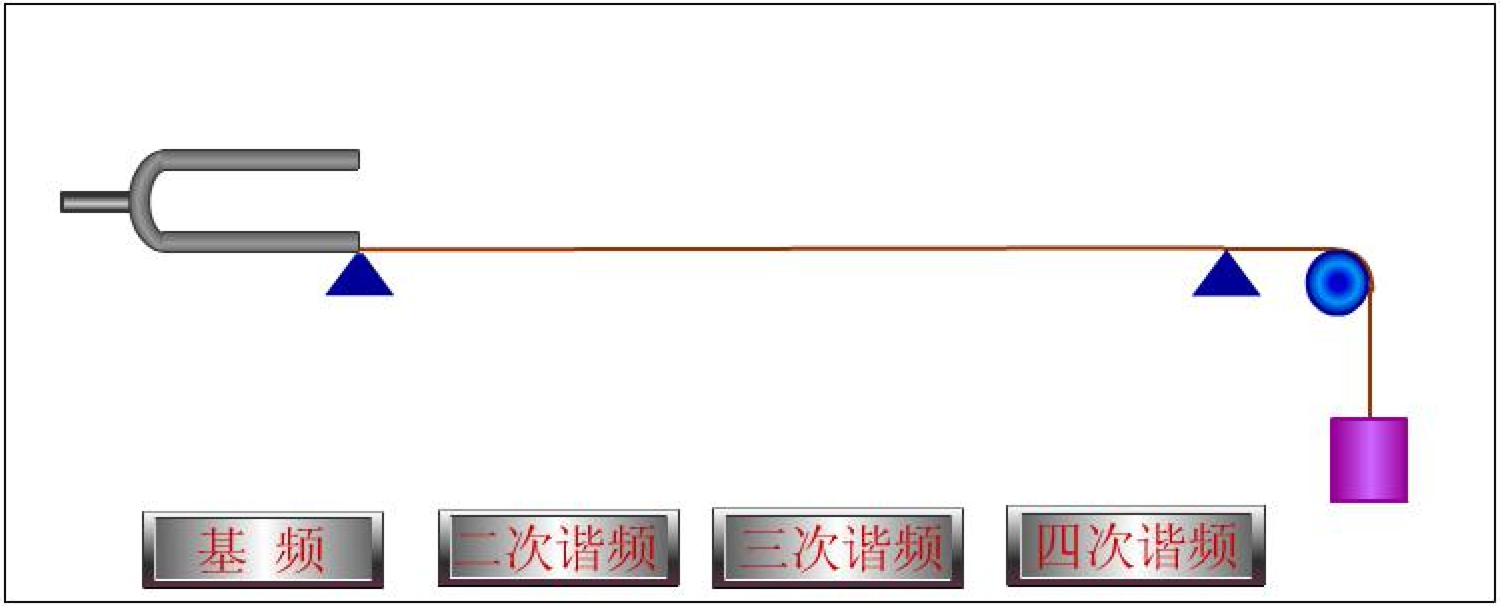


$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

驻波的能量在相邻的波腹和波节间往复变化，在相邻的波节间发生动能和势能间的转换，动能主要集中在波腹，势能主要集中在波节，但无长距离的能量传播.

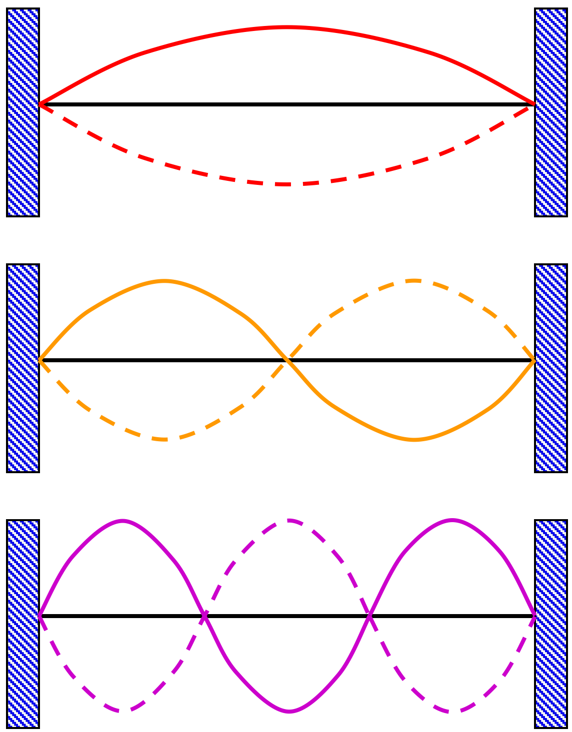
五　振动的简正模式



两端固定的弦线形成驻波时，波长 λ_n 和弦线长 l 应满足 $\boxed{l = n\dfrac{\lambda_n}{2}}$ ，$\nu_n = n\dfrac{u}{2l}$　$n = 1,2,\cdots$ 由此频率决定的各种振动方式称为弦线振动的简正模式.

两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$



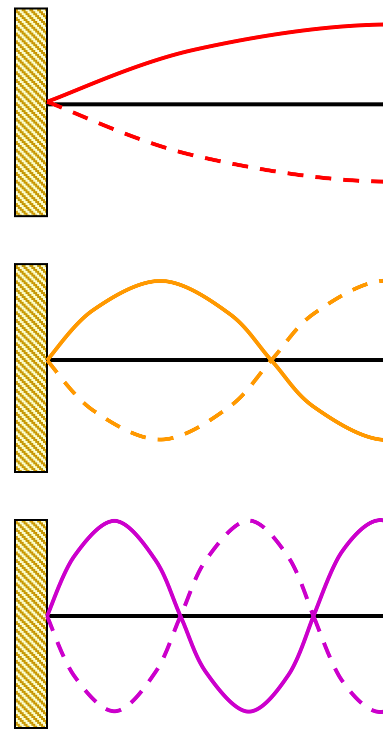
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式

$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$



$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

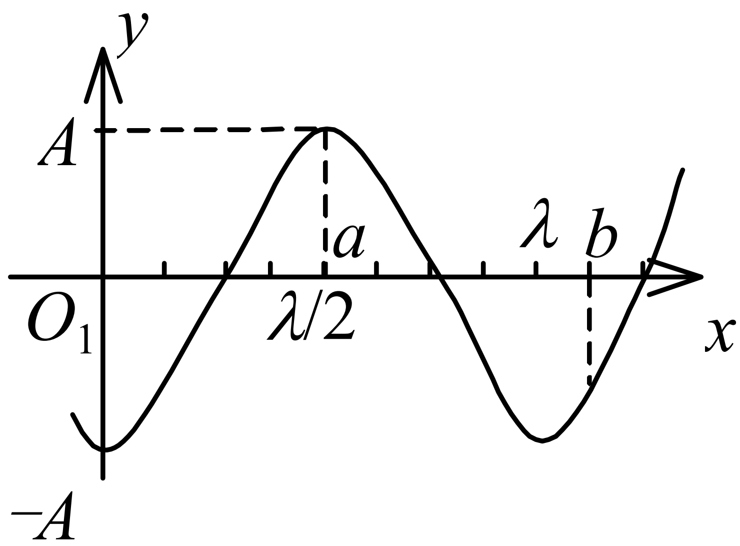
某时刻驻波波形曲线如图所示，则a、b 两点振动的相位差是

(A) 0

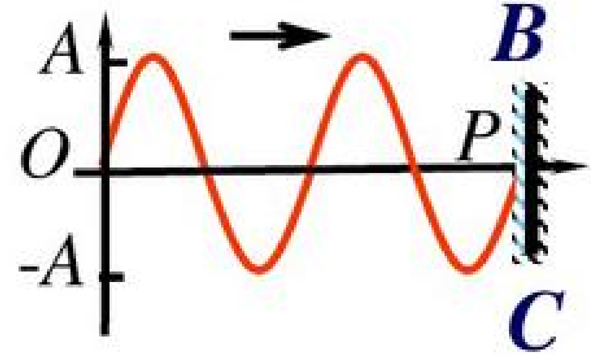
(B) $\pi/2$

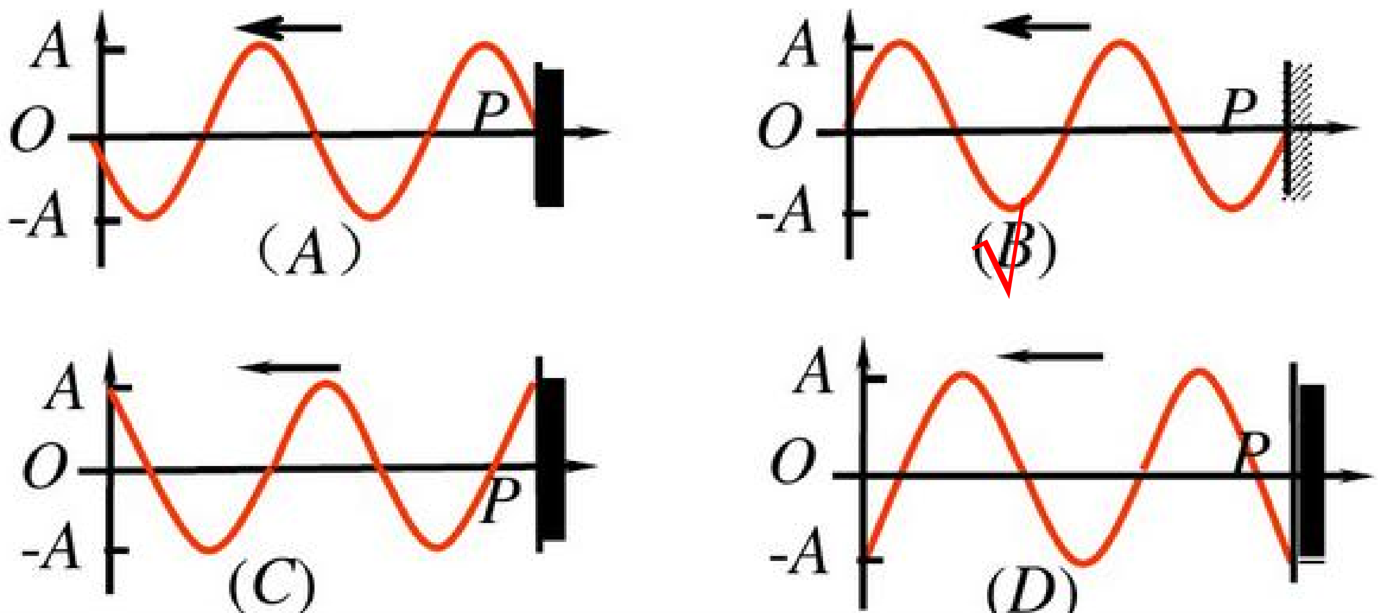
(C) π

(D) $5\pi/4$.



例：图中画出一向右传播的简谐波在t时刻的波形图，BC为波密介质的反射面，波由P点反射，则反射波在t时刻的波形图为:





频率为 ν 的驻波，若其相邻两波节间的距离为 d，则该驻波的波长和波速分别是

A. d ， νd

B. $2d$ ， νd

C. d ， $2\nu d$

D. $2d$ ， $2\nu d$ √

如果入射波是 $y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$ 在 $x=0$ 处反射后形成驻波，反射点为波腹，设反射后波的强度不变，则反射波的方程式为 $\underline{y_2 = A\cos 2\pi(t/T - x/\lambda)}$，在 $x=\frac{2}{3}\lambda$

处质点合振动的振幅等于 $\underline{A}$.

例 已知一根线上的驻波方程为

$$y = 0.040\sin 5\pi x\cos 40\pi t$$

1）求在$0 \le x \le 0.40\text{m}$内所有波节的位置.

解 由 $\left|\sin 5\pi x\right| = 0$ 得 $5\pi x = k\pi\ \ (k = 0,1,2\cdots)$

则 $x = \dfrac{1}{5}k$ 所以，波节为：

$x_1 = 0\text{m}$, $x_2 = 0.20\text{m}$, $x_3 = 0.40\text{m}$.

2）求线上除波节点之外的任意点的振动周期是多少？

解 驻波的波节点不动，其它各点以相同的周期振动

由 $2\pi\nu = 40\pi$

得 $\nu = 20\text{Hz}$　　$T = 0.05\text{s}$

例 已知：$y = 0.040\sin 5\pi x\cos 40\pi t$

3）求在$0 \le t \le 0.050\text{s}$内的什么时刻，线上所有点横向速度为零？

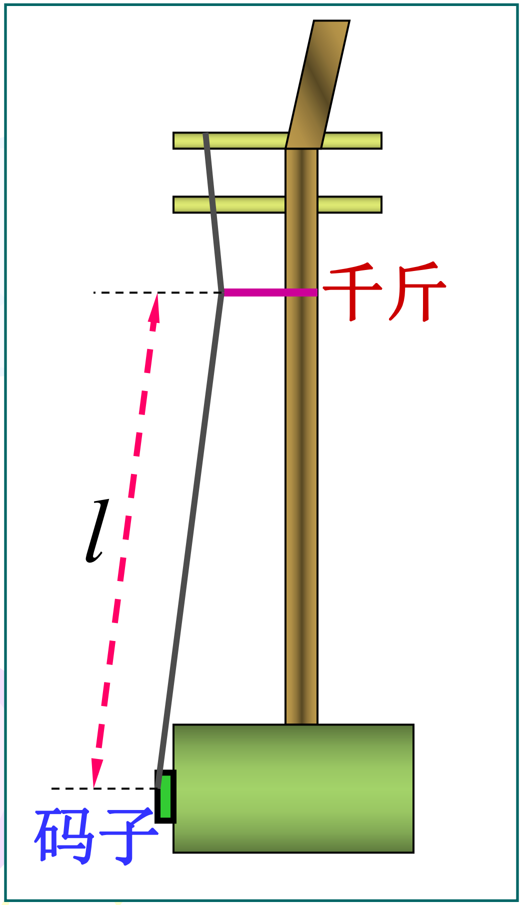
解 横向速度

$$v = \frac{dy}{dt} = -1.6\pi\sin 5\pi x\sin 40\pi t = 0$$

$$\sin 40\pi t = 0 \Rightarrow \quad 40\pi t = k\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{40}k$$

$$t_1 = 0\text{s} \quad t_2 = \frac{1}{40}\text{s} \quad t_3 = \frac{1}{20}\text{s}$$

讨论 如图二胡弦长 $l = 0.3\ \text{m}$，张力 $T = 9.4\text{N}$. 密度 $\rho = 3.8 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}$. 求弦所发的声音的基频和谐频.



解：弦两端为固定点，是波节.

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

频率 $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{nu}{2l}$ 波速 $u = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

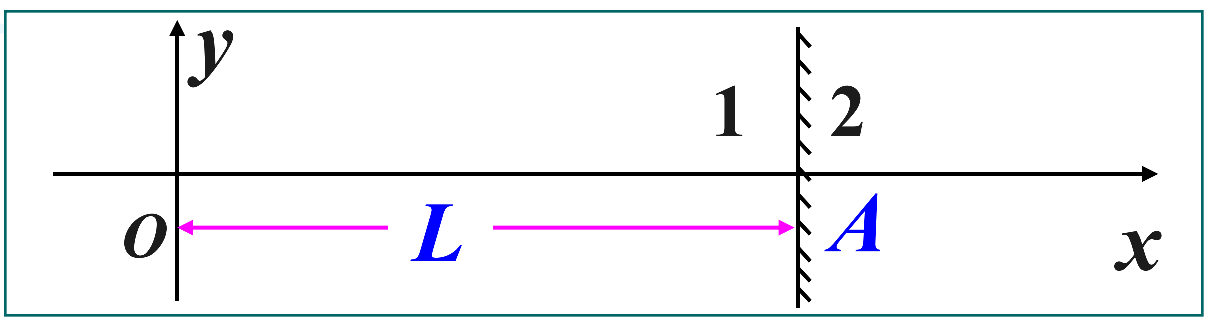
基频 $n = 1 \quad \nu_1 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = 262\ \text{Hz}$

谐频 $n > 1 \quad \nu_n = \dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

例 如图，一列沿x轴正向传播的简谐波方程为 $y_1 = 10^{-3}\cos[200\pi(t - x/200)]$ **(m)** 在1，2两种介质分界面上点A与坐标原点O相距L=2.25 m.已知介质2的波阻大于介质1的波阻，反射波与入射波的振幅相等，求：

（1）反射波方程；（2）驻波方程；

（3）在OA之间波节和波腹的位置坐标.

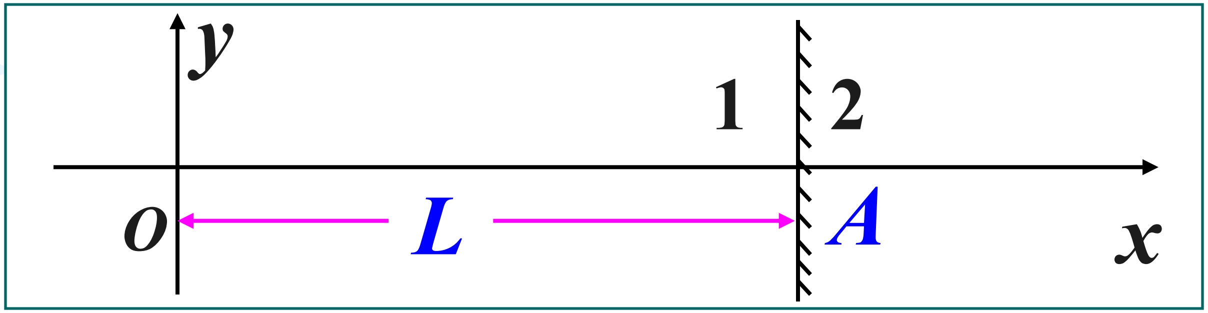


解 （1）设反射波方程为

$$y_2 = 10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})+\varphi_0] \qquad (2)$$

由式（1）得 A 点的反射振动方程

$$y_{1A} = 10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{L}{200})+\pi] \qquad (3)$$



由式（2）得A点的反射振动方程

$$y_{2A}=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{L}{200})+\varphi_0] \qquad (4)$$

由式（3）和式（4）得：

舍去

$$\varphi_0=-2\pi L+\pi=-3.5\pi=-4\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$$

所以反射波方程为：

$$y_2=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})+\frac{\pi}{2}] \ \ (\mathrm{m})$$

（2） $y = y_1 + y_2 = 2\times10^{-3}\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\cos(200\pi t + \frac{\pi}{4})$

（3） 令 $\cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) = 0$

得波节坐标 $x = n + \frac{1}{4} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

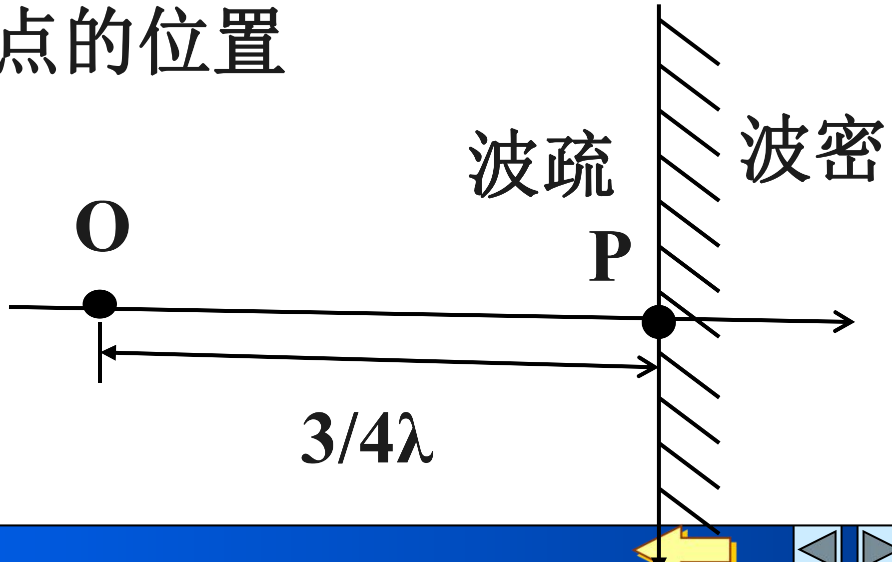
$x \leq 2.25\ \mathrm{m} \qquad x = 0.25\ \mathrm{m}, 1.25\ \mathrm{m}, 2.25\ \mathrm{m}$

令 $\left|\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\right| = 1$

得波腹坐标 $x = n - \frac{1}{4} \qquad (n = 1,2,\cdots)$

$x \leq 2.25\ \mathrm{m} \qquad x = 0.75\ \mathrm{m}, 1.75\ \mathrm{m}$

练习：一平面简谐波沿x轴正向传播，已知振幅为A，频率为v，波速为u。（1）若t=0时，原点O处质元正好由平衡位置向位移正方向运动，写出此波的波动方程；（2）若从分界面反射的波的振幅与入射波振幅相等，写出反射波的波动方程，并求x轴上因入射波与反射波干涉而静止的各点的位置



解：（1） $t=0$时， $y_0=0, v_0>0$

$$\therefore \varphi_0=-\frac{\pi}{2}$$

故波动方程为 $y=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]m$

（2）入射波传到反射面的振动位相（将x=3/4λ代入）

是 $-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{3}{4}\lambda-\frac{\pi}{2}$ 。

反射波在界面处的位相是 $-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{3}{4}\lambda-\frac{\pi}{2}+\pi=-\pi$

仍以O点为原点，则反射波在O点的位相为

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{3}{4}\lambda-\pi=-\frac{5}{2}\pi$$

若只考虑在2π以内的位相，反射波在O点的位相-π/2

故反射波的波动方程为

$$y_{反}=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

此时驻波方程为

$$y=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]+A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

$$=2A\cos\frac{2\pi\nu x}{u}\cos(2\pi\nu t-\frac{\pi}{2})$$

故波节位置为

$$\frac{2\pi\nu x}{u}=\frac{2\pi}{\lambda}x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

故

$$x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}(k=0,\pm1,\pm2)$$

根据题意，**k**只能取**0**，**1**。即

$$x=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4}$$

两波在一很长的弦上传播，其波动方程分别为:

$$y_1 = 0.04\cos\frac{\pi}{3}(4x - 24t)$$

$$y_2 = 0.04\cos\frac{\pi}{3}(4x + 24t)$$

求: (1) 两波的频率、波长、波速;
(2) 两波叠加后的节点位置;
(3) 叠加后振幅最大的那些点的位置.

解（1） $y_1 = 0.04\cos\frac{\pi}{3}(4x - 24t)$

$$y_2 = 0.04\cos\frac{\pi}{3}(4x + 24t)$$

比较 $y = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$

得:

$\nu = 4\,\mathrm{Hz}$ $\lambda = 1.5\,\mathrm{m}$ $u = \lambda\nu = 6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

（2） $$y = y_1 + y_2 = 0.08\cos 8\pi t\cos\frac{4\pi x}{3}$$

波节 $$\frac{4\pi x}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{3}{8}$$

波腹 $$\frac{4\pi x}{3} = k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{4}k \qquad k = 0, \pm 1, \cdots$$