2.1 电场的概念及点电荷电场强度的计算

1、电场的定义

2、点电荷电场强度的计算

1、电场的定义

(1) 什么是电场?

这种存在于电荷周围，能对其他电荷产生作用力的特殊的物质称为电场。可见电荷是产生电场的源。

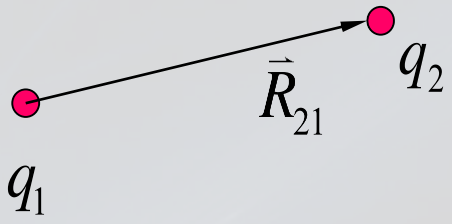
(2) 电场强度的定义

单位正电荷在电场中某点受到的作用力称为该点的电场强度。

电场强度严格的数学表达式为： $\boxed{\vec{E}=\lim_{q_t\to 0}\frac{\vec{F}}{q_t}}$

(3) 库仑定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^2}\hat{a}_{R_{21}}$$

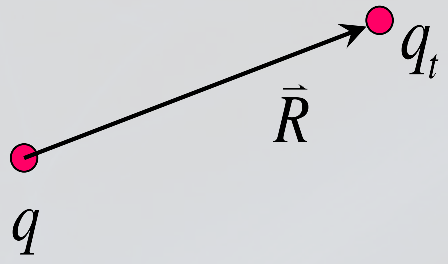


其中：ε_0为真空中介电常数。

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9} = 8.85\times 10^{-12} \quad \mathrm{F/m}$$

2. 电场强度的计算

电场强度定义： $\vec{E}=\lim\limits_{q_t\to 0}\dfrac{\vec{F}}{q_t}$



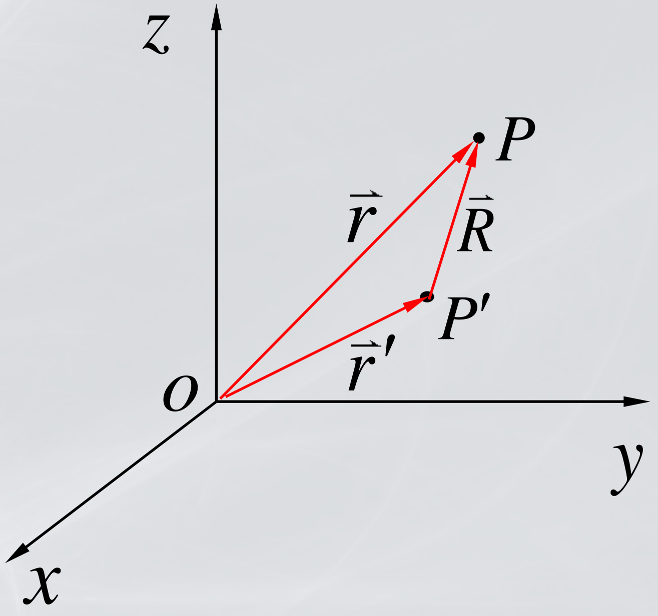
由库仑定律： $\vec{F}=\dfrac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

可得： $\boxed{\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R}$ ——点电荷电场强度的计算公式

其中： $\hat{a}_R$ 是源电荷指向场点的方向。

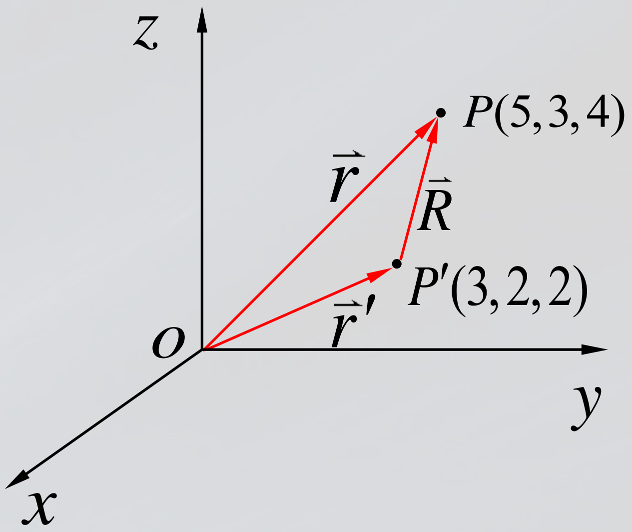
例：在直角坐标系中，设一点电荷q 位于点 $P'(3,2,2)$

计算空间点 $P(5,3,4)$ 的电场强度。



解：如图,点电荷的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$



其中：$\vec{r}=5\hat{a}_x+3\hat{a}_y+4\hat{a}_z$

$$\vec{r}'=3\hat{a}_x+2\hat{a}_y+2\hat{a}_z$$

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=2\hat{a}_x+1\hat{a}_y+2\hat{a}_z$$

则：$R=|\vec{R}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

$$\hat{a}_R=\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}=\frac{2\hat{a}_x+1\hat{a}_y+2\hat{a}_z}{3}$$

所以：$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\hat{a}_x+1\hat{a}_y+2\hat{a}_z}{27}$

结论： 在直角坐标系中，若源电荷 q 所在点的坐标为 (x', y', z')

场点P的坐标为 (x, y, z)，则 P 点的电场强度为：

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x-x')\hat{a}_x + (y-y')\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^{\,3}}\right]$$

✦多个点电荷产生的电场：

如果有多个点电荷源,场域中某点的电场强度应该是所有点电荷在该场中产生的电场强度的矢量和。

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x-x_i')\hat{a}_x + (y-y_i')\hat{a}_y + (z-z_i')\hat{a}_z}{\left[(x-x_i')^2 + (y-y_i')^2 + (z-z_i')^2\right]^{3/2}}$$

小结：

1、电场的定义

(1) 什么是电场？

(2) 电场强度的定义 $\vec{E} = \lim_{q_t \to 0} \dfrac{\vec{F}}{q_t}$

(3) 库仑定律 $\vec{F}_{21} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^2} \hat{a}_{R_{21}}$

2. 点电荷电场强度的计算 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R$

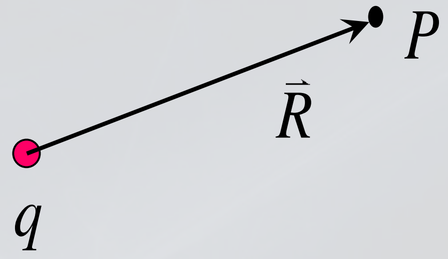
2.2 连续分布的电荷元电场强度的计算

1. 线电荷分布
2. 面电荷分布
3. 体电荷分布

回顾：

点电荷产生的电场中，其电场强度的计算

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

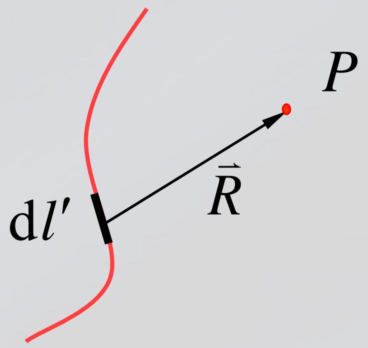


其中：$\hat{a}_R$ 是源电荷指向场点的方向。

1. 线电荷分布：电荷沿某一曲线连续分布 。

线电荷密度定义： 单位长度上的电荷量。

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l'}$$



$\mathrm{d}l'$上所带的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_l \mathrm{d}l'$

$\mathrm{d}q$产生的电场强度： $\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_l \mathrm{d}l'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

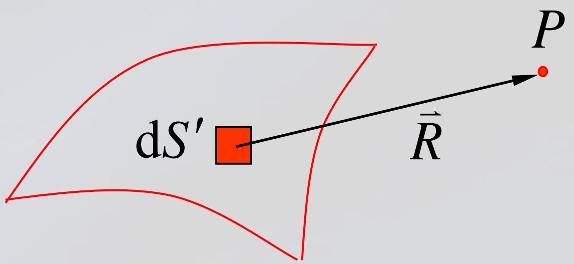
该线电荷产生的电场强度：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'} \frac{\rho_l \mathrm{d}l'}{R^2}\hat{a}_R}$$

2. 面电荷分布：电荷沿空间曲面连续分布。

面电荷密度定义： 单位面积上的电荷量。

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S'}$$



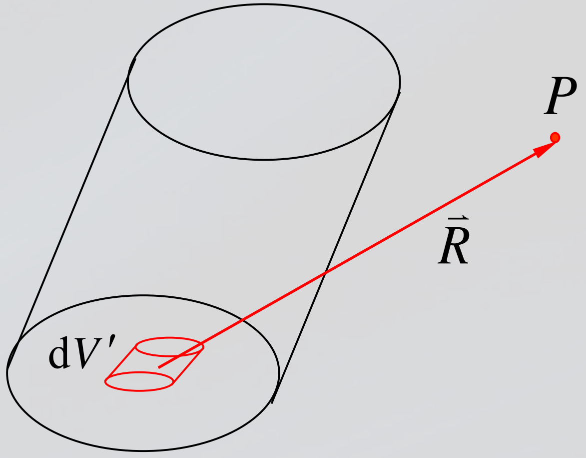
dS'上所带的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_S \mathrm{d}S'$

dq产生的电场强度： $\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_S \mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

该面电荷产生的电场强度： $\boxed{\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{S'} \dfrac{\rho_S \mathrm{d}S'}{R^2}\hat{a}_R}$

3. 体电荷分布: 电荷在某空间体积内连续分布 。

体电荷密度定义： 单位体积内的电荷量。



$$\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V'}$$

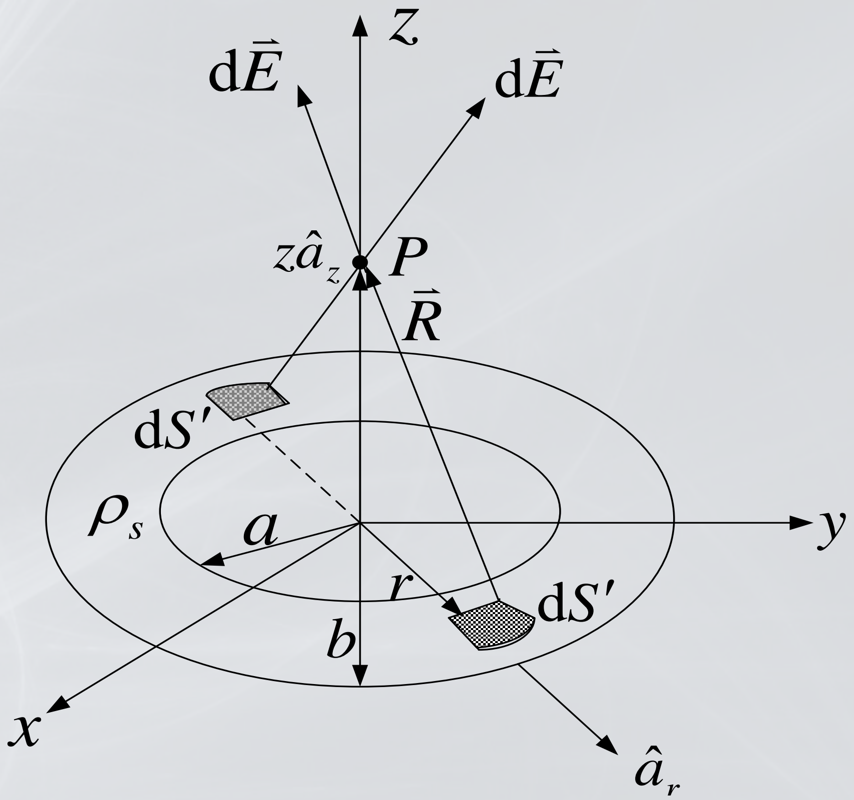
$\mathrm{d}V$上所带的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_V \mathrm{d}V'$

$\mathrm{d}q$产生的电场强度： $\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_V \mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$

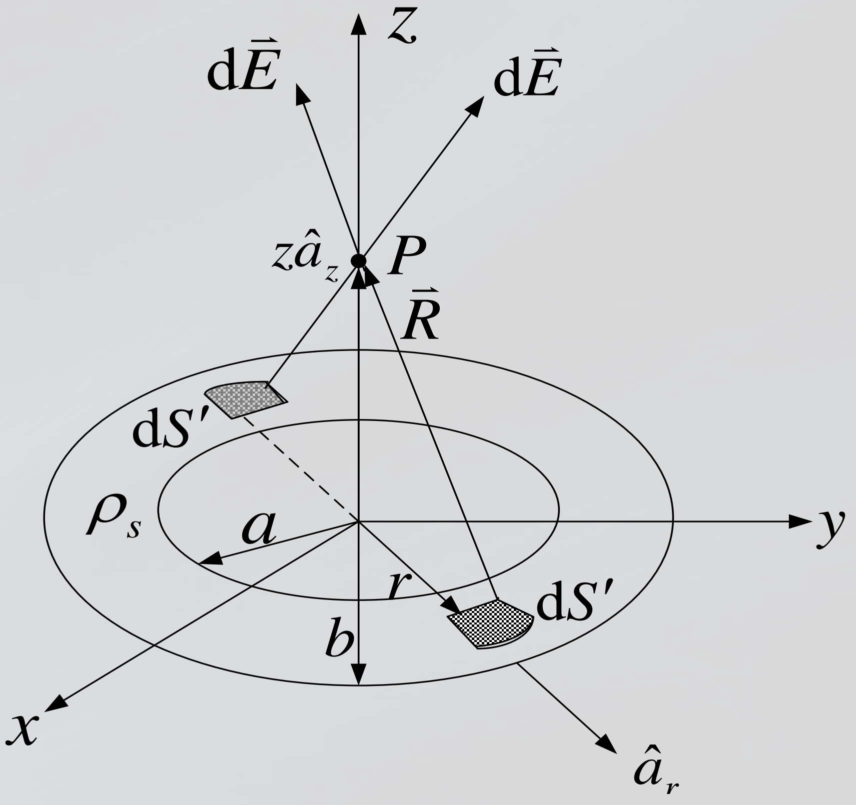
该体电荷产生的电场强度: $\boxed{\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{V'} \dfrac{\rho_V \mathrm{d}V'}{R^2}\hat{a}_R}$

例：设有一无限大的均匀带电平面，面电荷密度为 ρ_S 。

求：距平面 $\boldsymbol{h}$ 高处的电场强度 $\vec{E}$ 。



解：根据题意，选取圆柱坐标系



面元： $\mathrm{d}S' = r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'$

面元上的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_S r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'$

从此电荷源到 z 轴上 P 点的距离矢量：

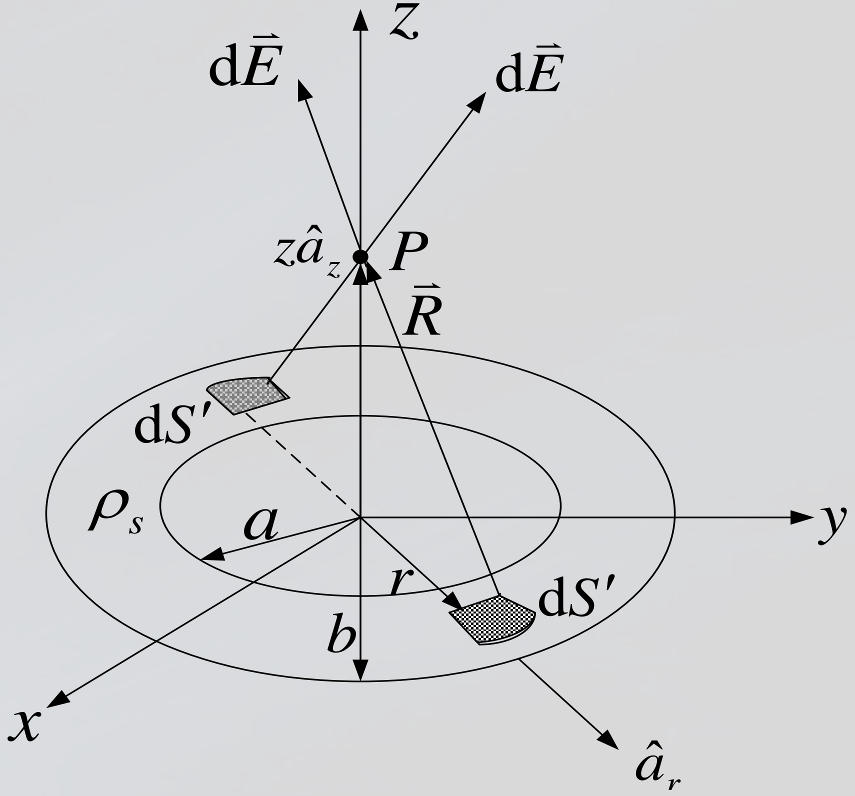
$$\vec{R} = -r'\hat{a}_r + h\hat{a}_z$$

距离大小为： $R = (r'^2 + h^2)^{1/2}$

根据面电荷分布产生的电场强度公式：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_S \mathrm{d}S'}{R^2}\hat{a}_R = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'}{[r'^2+h^2]^{3/2}}[-r'\hat{a}_r + h\hat{a}_z]$$

分析： 由于电荷分布的对称性，对称两个面元 $\mathrm{d}S'$上的电荷量是相同的，在P点产生的电场强度的径向分量相互抵消，P 点的电场强度只有Z方向叠加。



$$\vec{E}=\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r'h}{[r'^2+h^2]^{3/2}}\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}r'\hat{a}_z$$

$$=\frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\left[-\frac{1}{[r'^2+h^2]^{1/2}}\right]_0^{\infty}\hat{a}_z$$

$$=\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

结论： 无限大均匀带电平面产生的电场是均匀的,与距离 h 无关，方向为该平面的法线方向。

小结：

连续分布的电荷源产生的电场

1. 线电荷分布 $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\rho_l \mathrm{d}l'}{R^2}\hat{a}_R$$

2. 面电荷分布 $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_S \mathrm{d}S'}{R^2}\hat{a}_R$$

3. 体电荷分布 $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_V \mathrm{d}V'}{R^2}\hat{a}_R$$

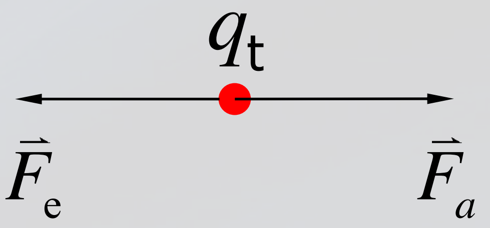
2.3电位的概念与计算

1. 电位差的含义
2. 电位的定义
3. 电位的计算
4. 电位与电场强度的关系

1. 电位差的含义

电荷 q_{t} 在电场中受到的电场力为： $\vec{F}_{\mathrm{e}}=q_{\mathrm{t}}\vec{E}$

电荷 q_{t} 在电场中要保持静止，需受外力作用为： $\vec{F}_{a}=-q_{\mathrm{t}}\vec{E}$



电荷在电场中由P点移动到A点，外力所做的功为： $W=-q_{\mathrm{t}}\int_{P}^{A}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

电位差定义：

单位正电荷由P 点移动到A 点，外力所做的功称为A 点和P 点之间的电位差。

$$\boxed{\phi_{AP}=\frac{W}{q_{\mathrm{t}}}=-\int_{P}^{A}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$$

例： 计算原点处一点电荷q 产生的电场中AP之间的电位差。

解： 选取球坐标系

$$\phi_{AP} = -\int_P^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

其中：

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}R\hat{a}_R + R\mathrm{d}\theta\hat{a}_\theta + R\sin\theta\mathrm{d}\varphi\hat{a}_\varphi$$

所以：

$$\phi_{AP} = \int_A^P \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \cdot \mathrm{d}R\hat{a}_R$$

$$= \int_{R_A}^{R_P} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}R$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_P}\right)$$

结论：

空间两点的电位差只与两点所在位置有关，而与积分路径无关。

2. 电位的定义

外力将单位正电荷是由无穷远处移到A点，则A点和无穷远处的电位差称为A点的电位。

$$\phi_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_A}$$

以无穷远处为零电位参考点。 R_A 为电荷源到A点的距离。

3. 电位的计算

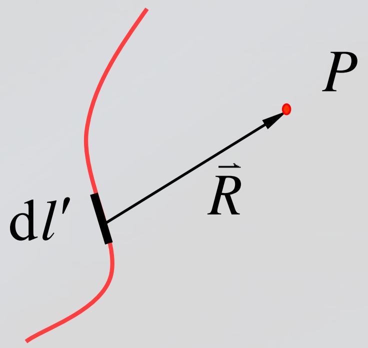
（1）点电荷的电位计算： $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ → 电荷源到场点的距离

多个点电荷的电位计算： $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{R_i}$

其中： R_i为第i个电荷源到场点的距离。

（2）连续分布的电荷源的电位计算

a. 线电荷分布



线电荷密度

$\mathrm{d}l'$上所带的电荷量： $\mathrm{d}q=\rho_l\mathrm{d}l'$

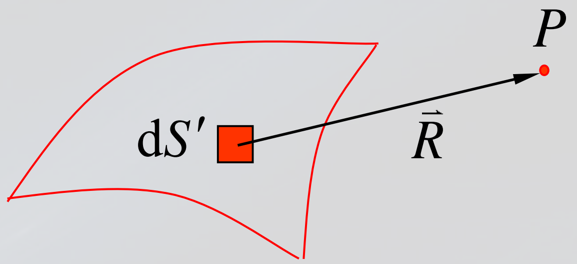
$\mathrm{d}q$产生的电位： $$\mathrm{d}\phi=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\rho_l\mathrm{d}l'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

该线电荷产生的电位： $$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\rho_l}{R}\mathrm{d}l'$$

b. 面电荷分布

面电荷密度

$\mathrm{d}S'$上所带的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_S \mathrm{d}S'$



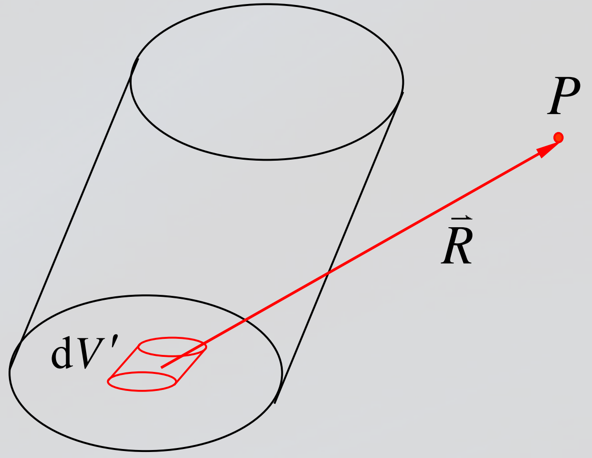
$\mathrm{d}q$产生的电位： $\mathrm{d}\phi = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\rho_S \mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon_0 R}$

该面电荷产生的电位： $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{S'} \dfrac{\rho_S}{R}\mathrm{d}S'$

c. 体电荷分布

$\mathrm{d}V$上所带的电荷量： $\mathrm{d}q = \rho_V \mathrm{d}V'$ → 体电荷密度

$\mathrm{d}q$产生的电位： $\mathrm{d}\phi = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\rho_V \mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 R}$



该体电荷产生的位： $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \dfrac{\rho_V}{R}\mathrm{d}V'$

4. 电场强度 $\vec{E}$与电位 ϕ之间的关系

$$\phi = -\int_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \longrightarrow \mathrm{d}\phi = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

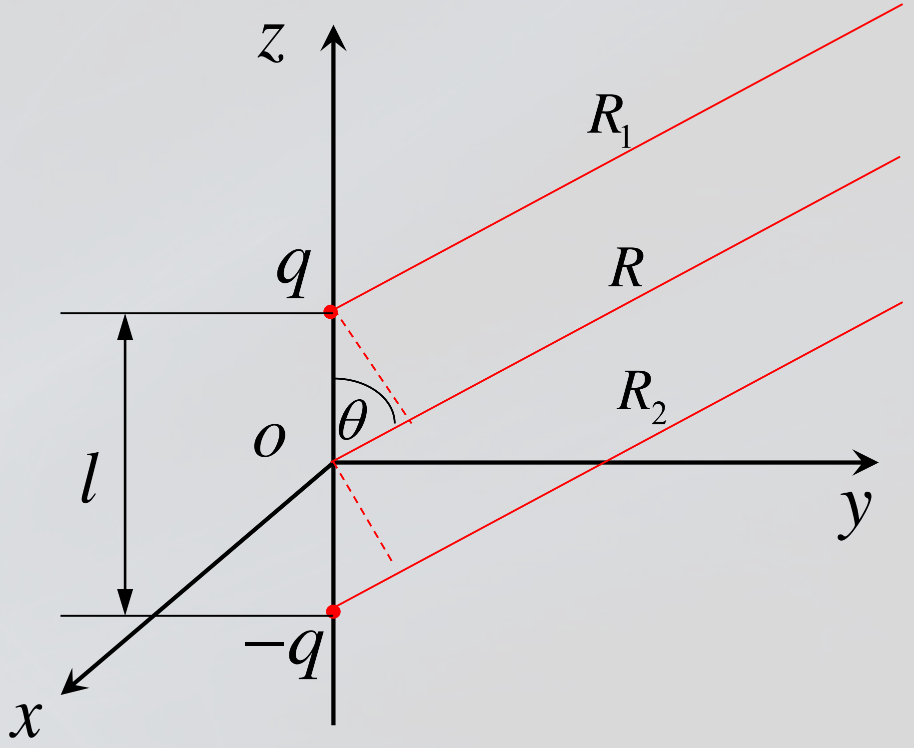
已知：$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

静电场中：

电场强度与电位之间的关系 $\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$

例：有一对等量异号相距很近的电荷构成电偶极子，如图所示。

求：空间的电位和电场强度 。



解：取球坐标系， 空间的电位

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)$$

因为： $l<<R$

$$\begin{cases} R_1\approx R-\dfrac{l}{2}\cos\theta \\ R_2\approx R+\dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases}$$

则：

$$\begin{cases} R_2-R_1\approx l\cos\theta \\ R_2R_1\approx R^2-\dfrac{l^2}{4}\cos^2\theta\approx R^2 \end{cases}$$

电位： $\phi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{l\cos\theta}{R^2}$

电位： $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{l\cos\theta}{R^2}$

电场强度： $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{a}_R + \frac{\partial\phi}{R\partial\theta}\hat{a}_\theta + \frac{\partial\phi}{R\sin\theta\partial\varphi}\hat{a}_\varphi \right)$$

$$\vec{E} = \frac{ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R + \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

小结：

1. 电位差的含义 $\phi_{AP} = -\int_P^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
2. 电位的定义 $\phi_A = -\int_\infty^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
3. 电位的计算 $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ （点电荷电位计算公式）
4. 电位与电场的关系 $\vec{E} = -\nabla\phi$ （静电场中）