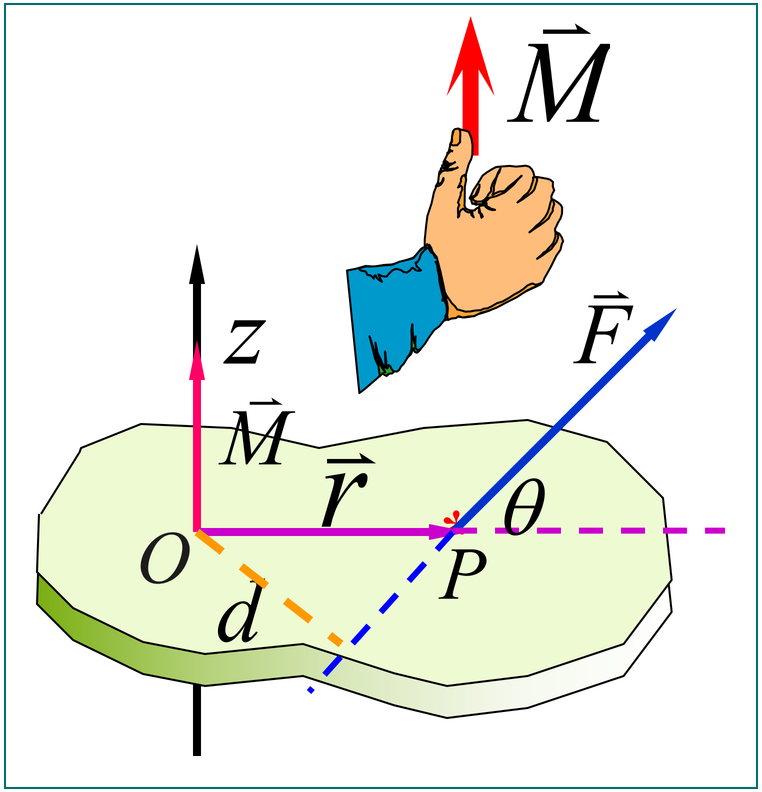
一 力矩

刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点 O 到力的作用点 P 的径矢．

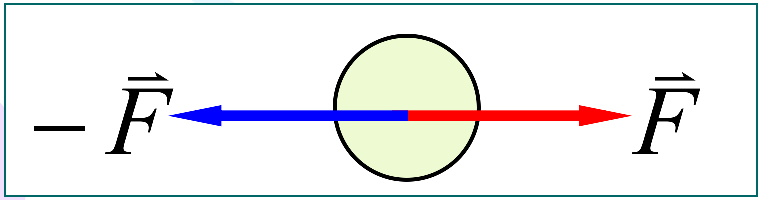


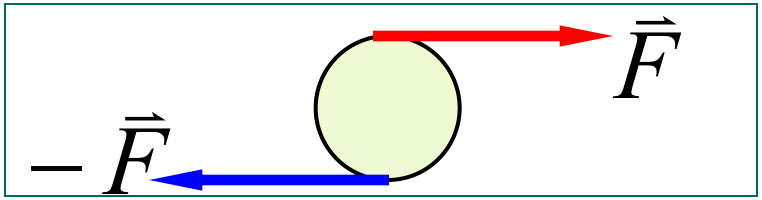
$\vec{F}$ **对转轴 Z 的力矩**

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$M=Fr\sin\theta=Fd$$

d ：力臂





$$\sum\vec{F}_i=0\,,\sum\vec{M}_i=0$$

$$\sum\vec{F}_i=0\,,\sum\vec{M}_i\neq0$$

讨论

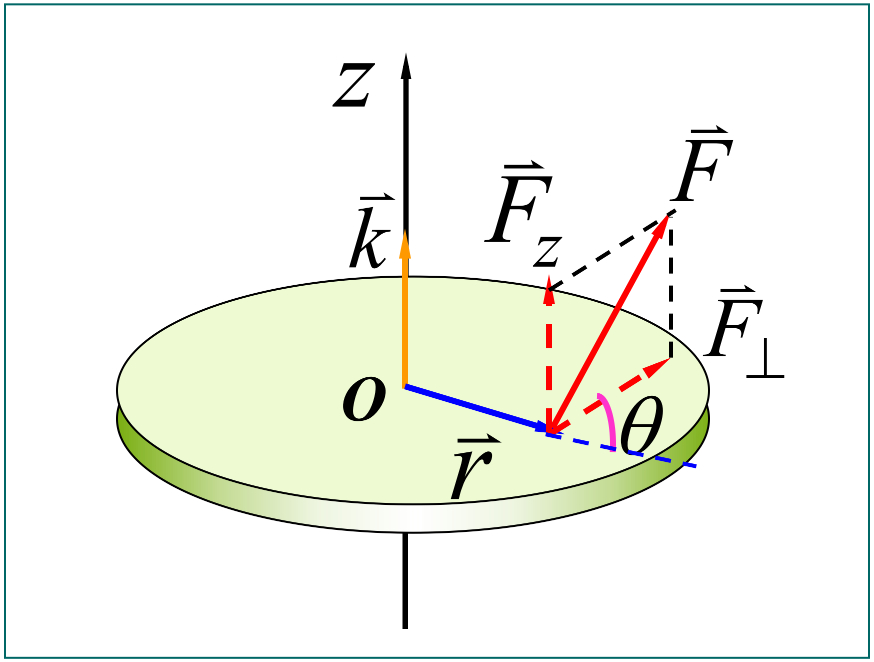
1） 若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，把力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

其中 $\vec{F}_z$ 对转轴的力矩为零，故 $\vec{F}$ 对转轴的力矩

$$M_z \vec{k} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

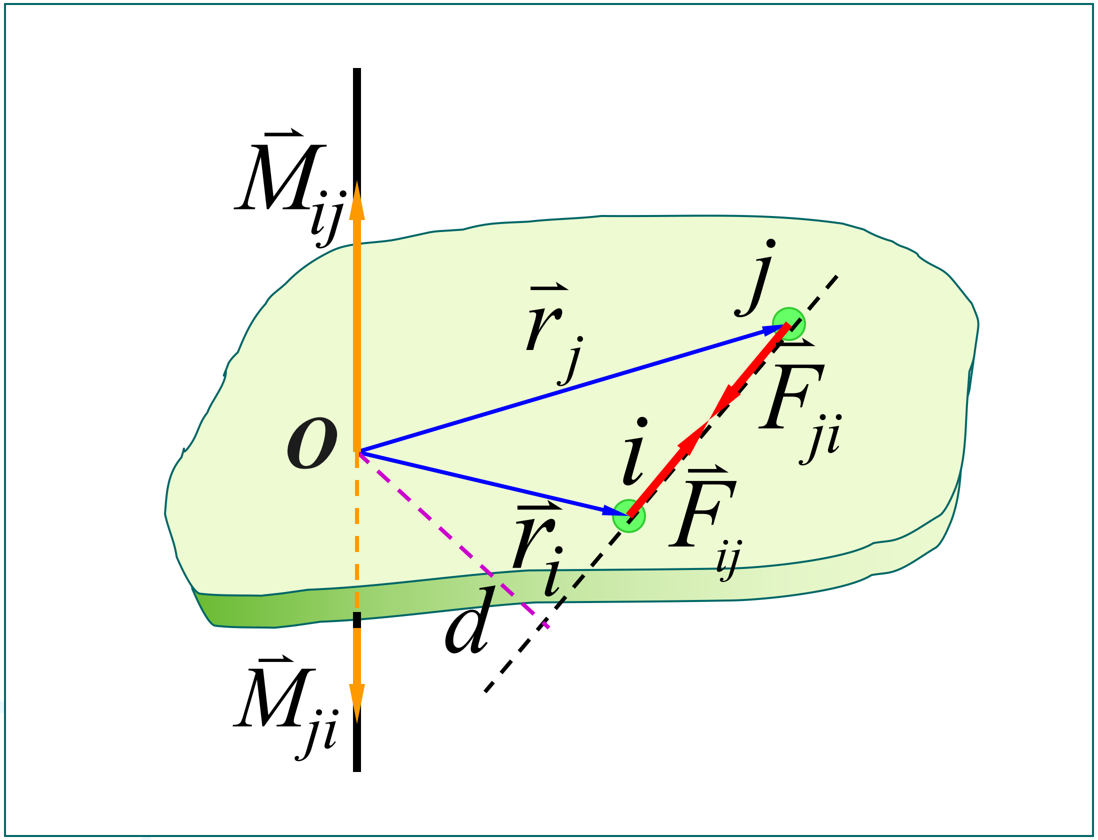
$$M_z = rF_\perp \sin\theta$$



2） 合力矩等于各分力矩的矢量和

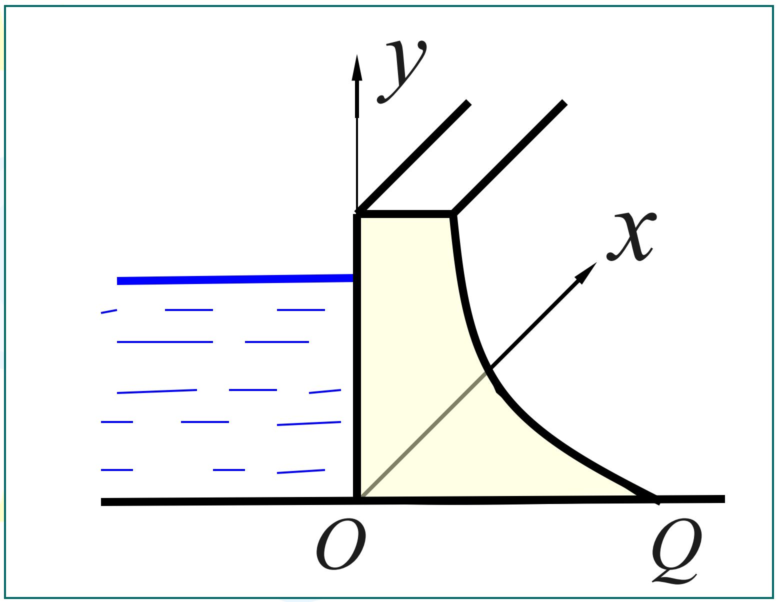
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

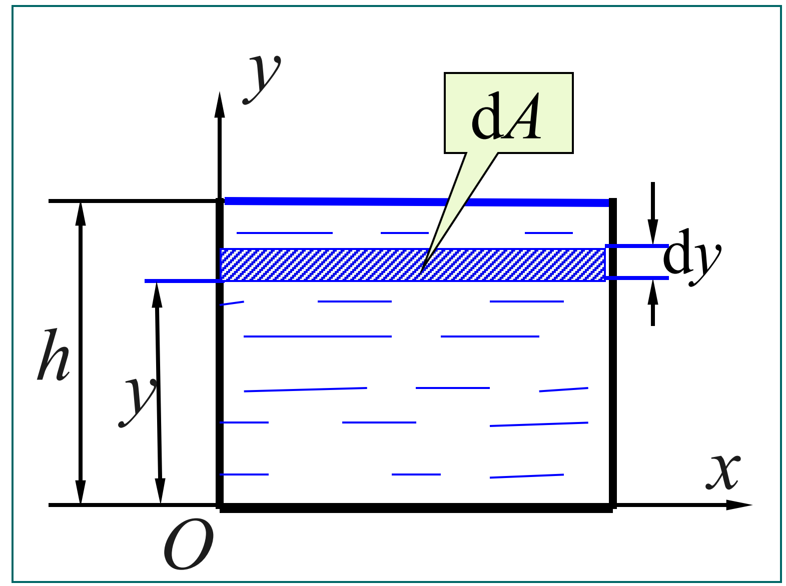
3） 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消



$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

例1　有一大型水坝高110 m、长1000m，水深100m，水面与大坝表面垂直，如图所示．求作用在大坝上的力，以及这个力对通过大坝基点 Q 且与 x 轴平行的力矩．





解　设水深h，坝长L，在坝面上取面积元 $\mathrm{d}A = L\mathrm{d}y$

作用在此面积元上的力

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}A = pL\mathrm{d}y$$

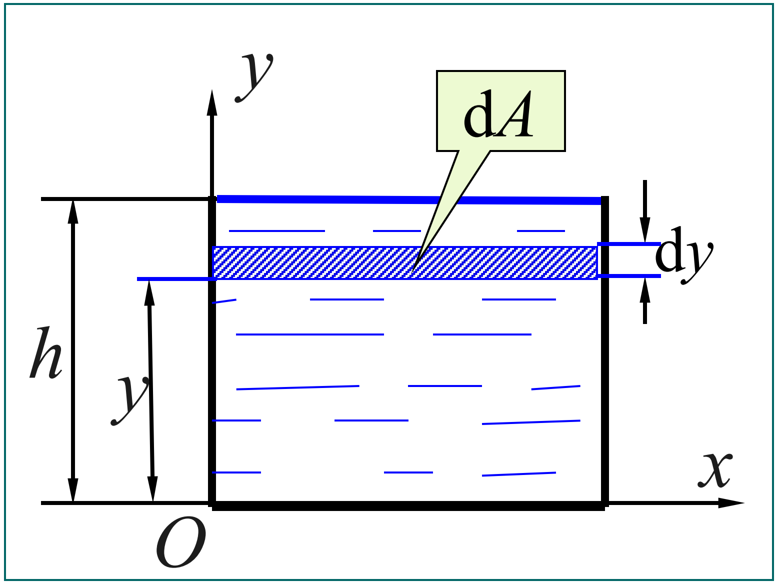
$$h = 100\mathrm{m} \qquad L = 1000\mathrm{m}$$

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}A = pL\mathrm{d}y$$

令大气压为 p_0，则

$$p = p_0 + \rho g(h - y)$$

$$\mathrm{d}F = [p_0 + \rho g(h - y)]L\mathrm{d}y$$

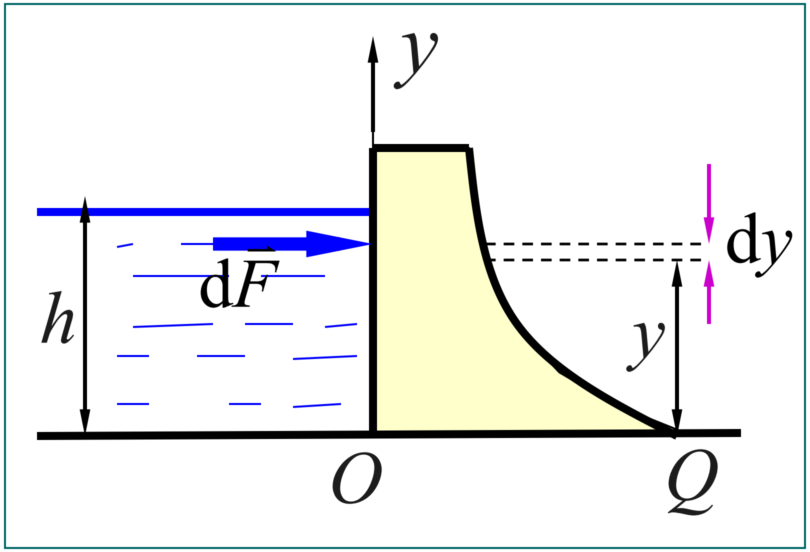


$$F = \int_0^h [p_0 + \rho g(h - y)]L\mathrm{d}y = p_0 Lh + \frac{1}{2}\rho g L h^2$$

代入数据，得 $F = 5.91 \times 10^{10}\,\mathrm{N}$

$h = 100\text{m} \qquad L = 1000\text{m}$

$$\mathrm{d}F = [p_0 + \rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$



$\mathrm{d}\vec{F}$ 对通过点 Q 的轴的力矩

$$\mathrm{d}M = y\mathrm{d}F$$

$$\mathrm{d}M = y[p_0 + \rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$

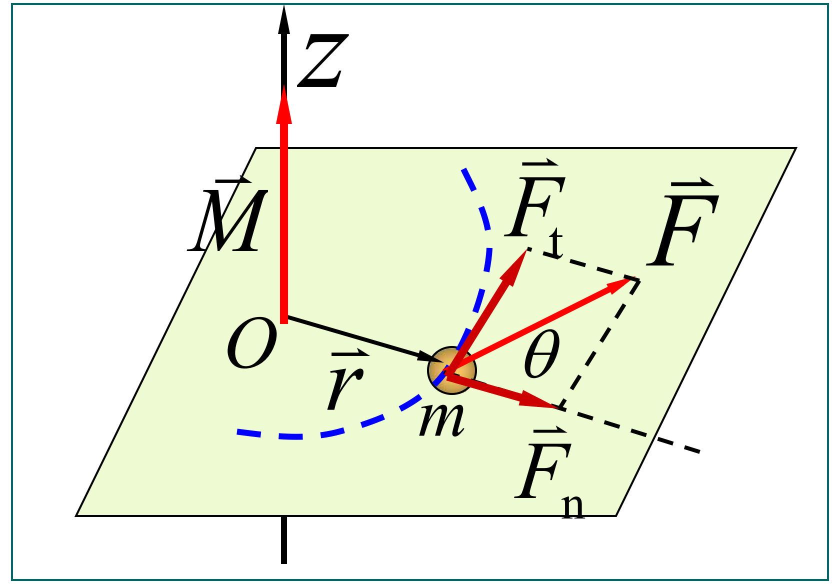
$$M = \int_0^h y[p_0 + \rho g(h-y)]L\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}p_0 L h^2 + \frac{1}{6}g\rho L h^3$$

代入数据，得 $M = 2.14\times 10^{12}\,\text{N}\cdot\text{m}$

二 转动定律

1） 单个质点m 与转轴刚性连接



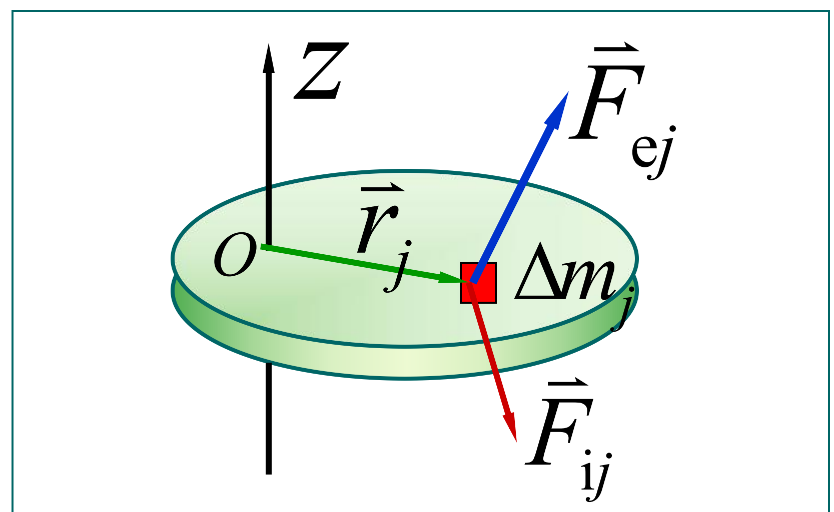
$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha$$

$$M = rF\sin\theta$$

$$M = rF_{\mathrm{t}} = mr^2\alpha$$

$$M = mr^2\alpha$$

2） 刚体

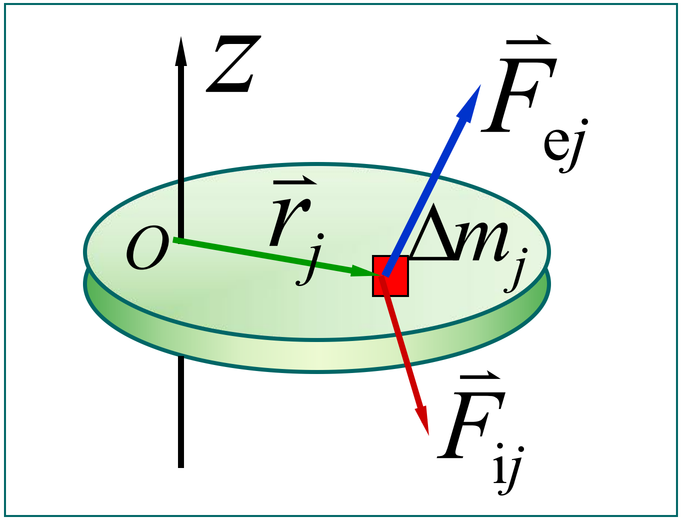


质量元受外力 $\vec{F}_{\mathrm{e}j}$，内力 $\vec{F}_{\mathrm{i}j}$

$$M_{\mathrm{e}j} + M_{\mathrm{i}j} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

外力矩　　内力矩

$$\sum_j M_{ej}+\sum_j M_{ij}=\sum \Delta m_j r_j^2\alpha$$



$$\because M_{ij}=-M_{ji} \qquad \therefore \sum_j M_{ij}=0$$

$$\sum_j M_{ej}=(\sum \Delta m_j r_j^2)\alpha$$

定义转动惯量 $J=\sum_j \Delta m_j r_j^2$ $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

- 转动定律 $\boxed{M=J\alpha}$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比．

$M = J\alpha$ 与 $\vec{F} = m\vec{a}$ 地位相当

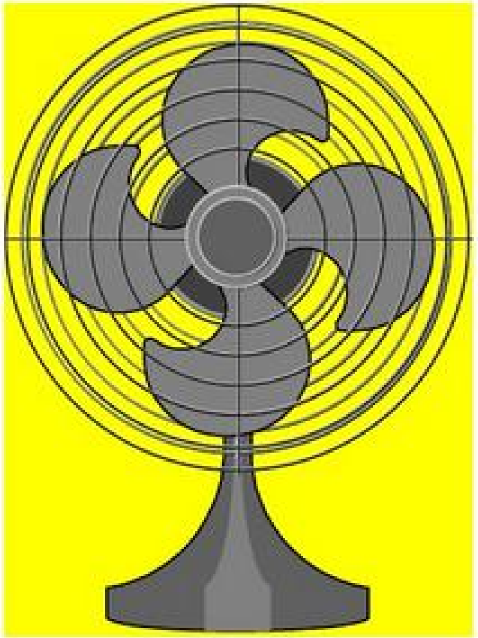
m反映质点的平动惯性，J 反映刚体的转动惯性

力矩是使刚体转动状态发生改变而产生角加速度的原因。

瞬时性。同一时刻对同一刚体，同一转轴而言

在定轴转动中，M和α的方向都在转轴方向上，所以可以用代数表示

当切断电风扇的电源后，电风扇并不是马上就停止转动，而是转动一段时间后才停止转动.



即转动的物体也有转动惯性，则体的转动惯性与什么有关呢?

三　转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 \ , \ J=\int r^2 \mathrm{d}m$$

➢ 物理意义：转动惯性的量度．

转动惯性的计算方法

➢ 质量离散分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$$

➢ 质量连续分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$ ：质量元

➢ 质量连续分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2=\int r^2 \mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$：质量元

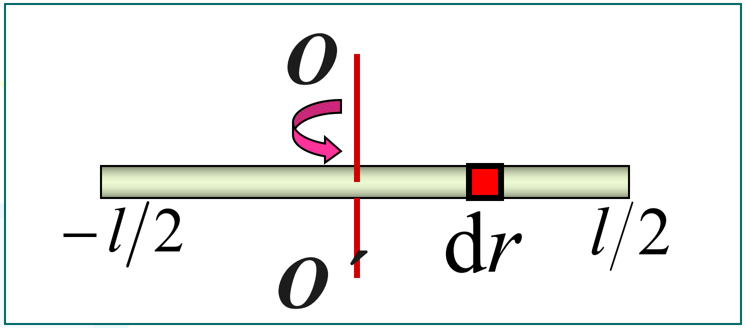
- 对质量线分布的刚体：$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$
  λ：质量线密度
- 对质量面分布的刚体：$\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S$
  σ：质量面密度
- 对质量体分布的刚体：$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$
  ρ：质量体密度

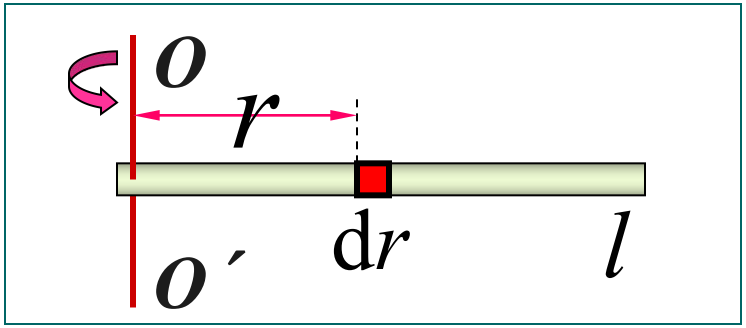
注意

只有对于几何形状规则、质量连续且均匀分布的刚体，才能用积分计算出刚体的转动惯量。

- 形状不规则的可用实验方法测定。
- 转动惯量具有可加性。

例2 一质量为 m、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量．





解 设棒的线密度为λ，取一距离转轴 $OO´$ 为r处的质量元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=\lambda r^2\mathrm{d}r$

$$J=2\lambda\int_0^{l/2}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{12}\lambda l^3$$

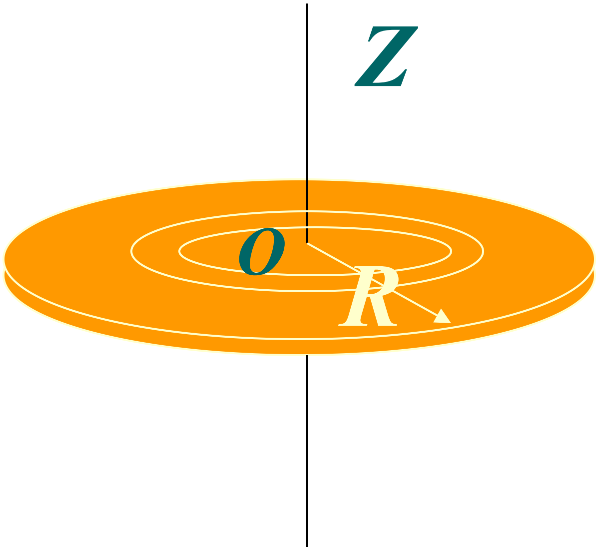
$$=\frac{1}{12}ml^2$$

如转轴过端点垂直于棒

$$J=\lambda\int_0^{l}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}ml^2$$

说明：转动惯量与转轴位置有关。

例3 一质量为 m 、半径为 R 厚为l的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量．



解：取半径为r宽为dr的薄圆环，

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot l$$

$$dJ = r^2 dm = \rho \cdot 2\pi l r^3 dr$$

$$J = \int dJ = \int_0^R \rho \cdot 2\pi l r^3 dr = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 l$$

$$\because \ \rho = \frac{m}{\pi R^2 l} \ \therefore \ J = \frac{1}{2} m R^2$$

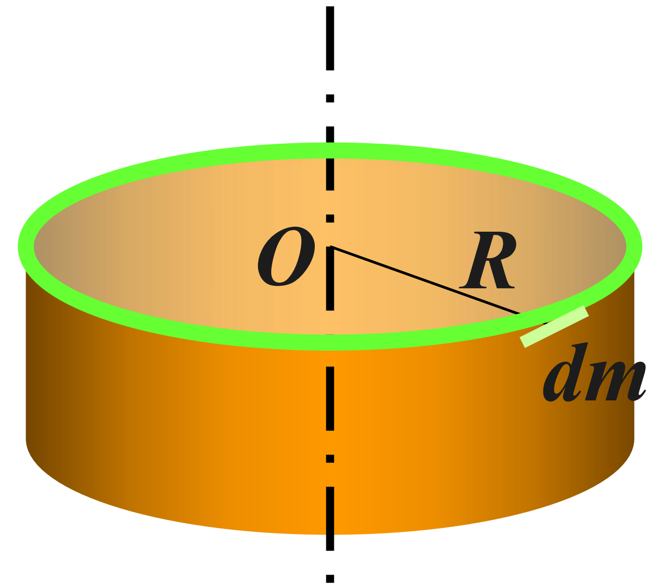
可见，转动惯量与l无关。所以，实心圆柱对其轴的转动惯量也是$mR^2/2$。

例、求质量为m、半径为R的均匀圆环的转动惯量。
轴与圆环平面垂直并通过圆心。

解：

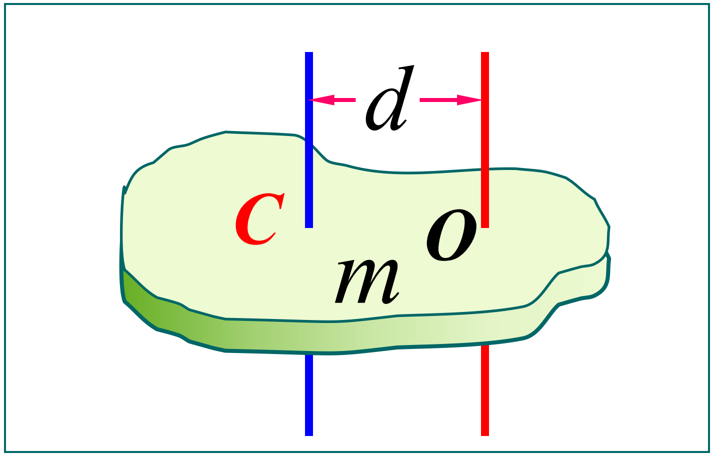
$$J=\int R^2 dm=R^2\int dm=mR^2$$

J 是可加的，所以若为薄圆筒（不计厚度）结果相同。



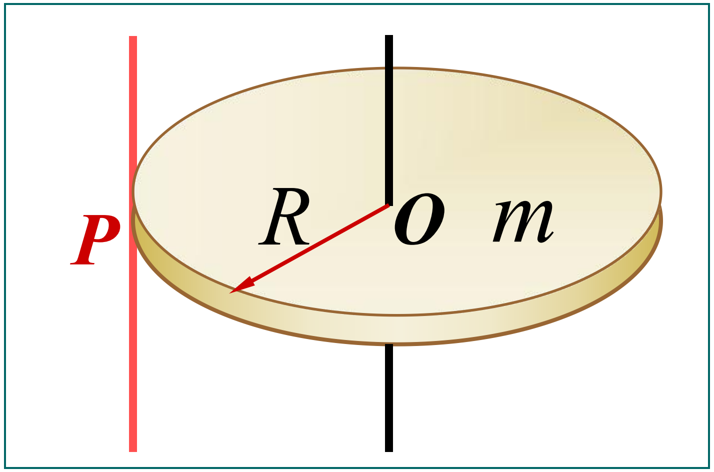
注意 转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置．

四 平行轴定理



质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为d的转轴的转动惯量

$$J_O = J_C + md^2$$



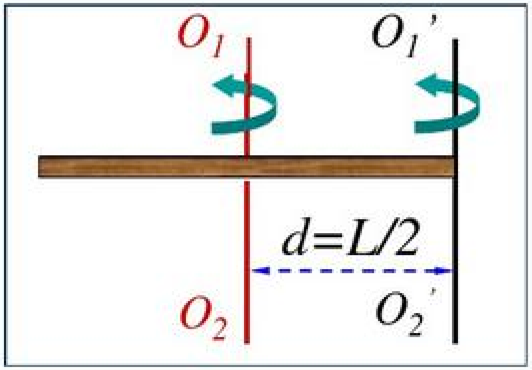
圆盘对P轴的转动惯量 $J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$

$$J = J_c + md^2$$

质量为m，长为L的细棒绕其一端的J

$$J_c = \frac{1}{12}mL^2$$

$$J = J_c + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$



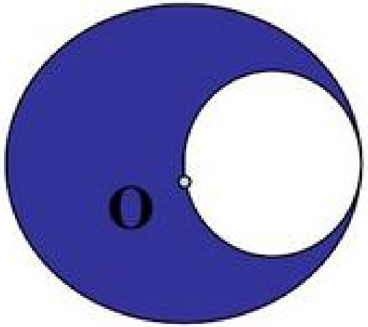
注意

掌握

转动惯量的大小取决于刚体的**体密度（质量）、几何形状以及转轴的位置**.

思考题：

一圆盘质量为M,半径为R，如图挖去一小圆盘，求剩余部分的转动惯量。



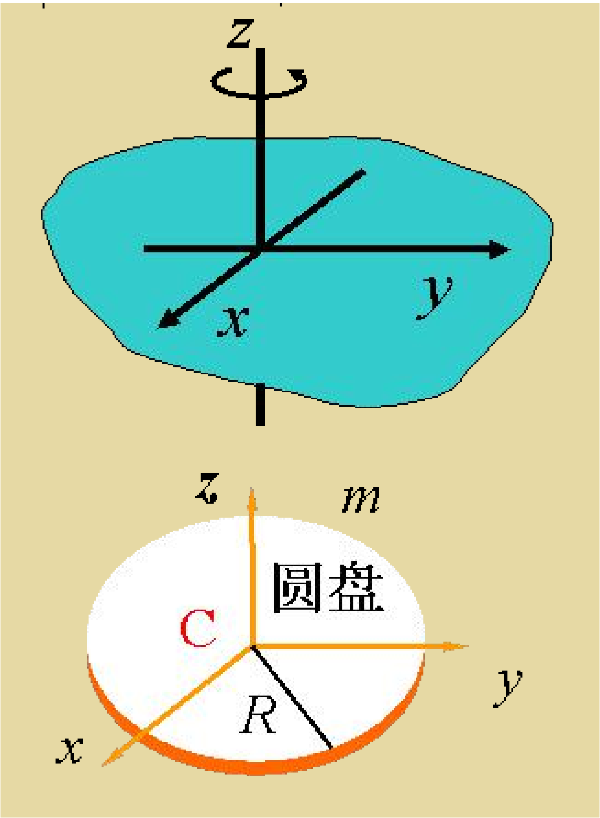
$$J_{剩余}=?$$

$$J_{剩余}=\frac{13}{32}MR^2$$

(2) (薄板)垂直轴定理

x,y 轴在薄板内；z 轴垂直薄板。

$$J_z = J_x + J_y$$

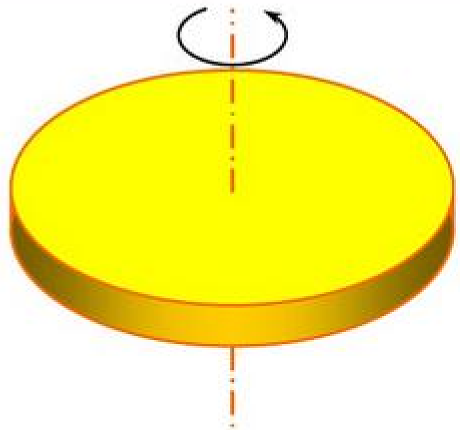


例求对圆盘的一条直径的转动惯量

已知 $J_z = \frac{1}{2} m R^2$

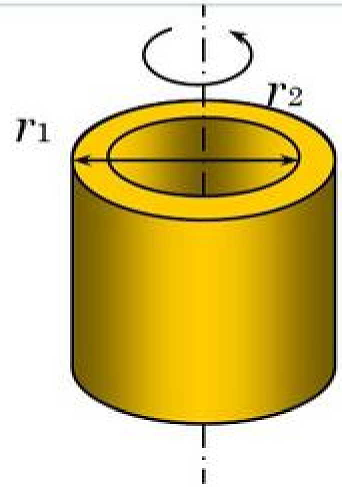
$$\left.\begin{array}{l} J_z = J_x + J_y \\ J_x = J_y \end{array}\right\} J_x = J_y = \frac{1}{4} m R^2$$

典型的几种刚体的转动惯量



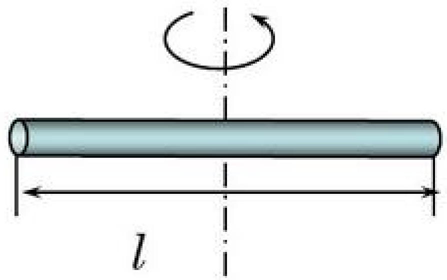
薄圆盘转轴通过中心与盘面垂直

$$J=\frac{1}{2}mr^2$$



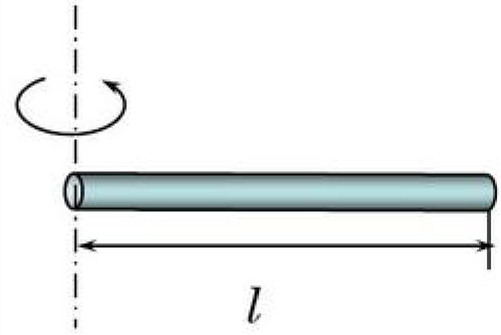
圆筒转轴沿几何轴

$$J=\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$$



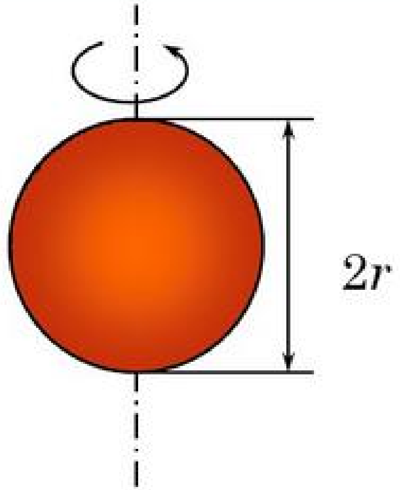
细棒转轴通过中心与棒垂直

$$J=\frac{ml^2}{12}$$



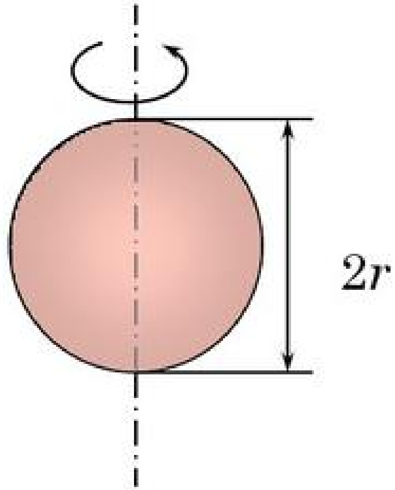
细棒转轴通过端点与棒垂直

$$J=\frac{ml^2}{3}$$



球体转轴沿直径

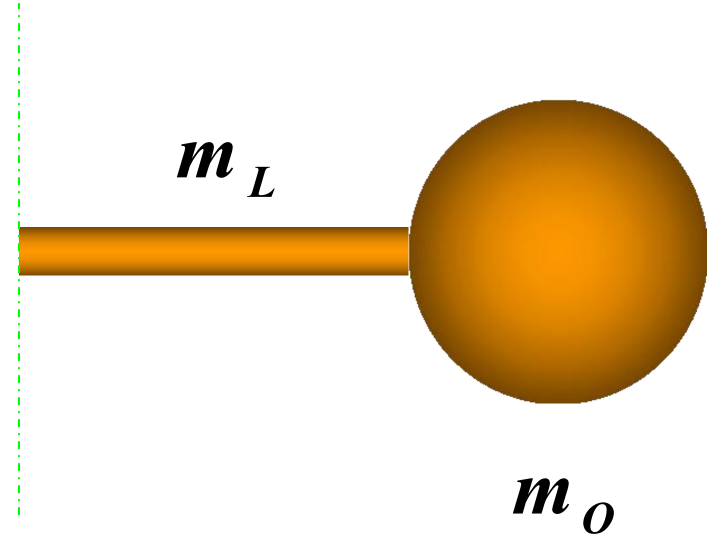
$$J=\frac{2mr^2}{5}$$



球壳转轴沿直径

$$J=\frac{2mr^2}{3}$$

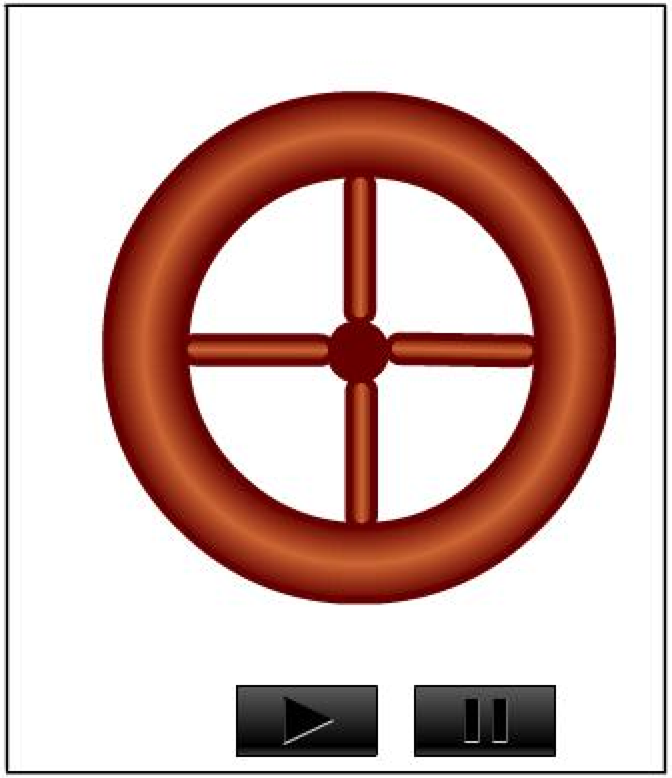
练习：右图所示，刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量如何计算？（棒长为*L*、球半径为*R*）



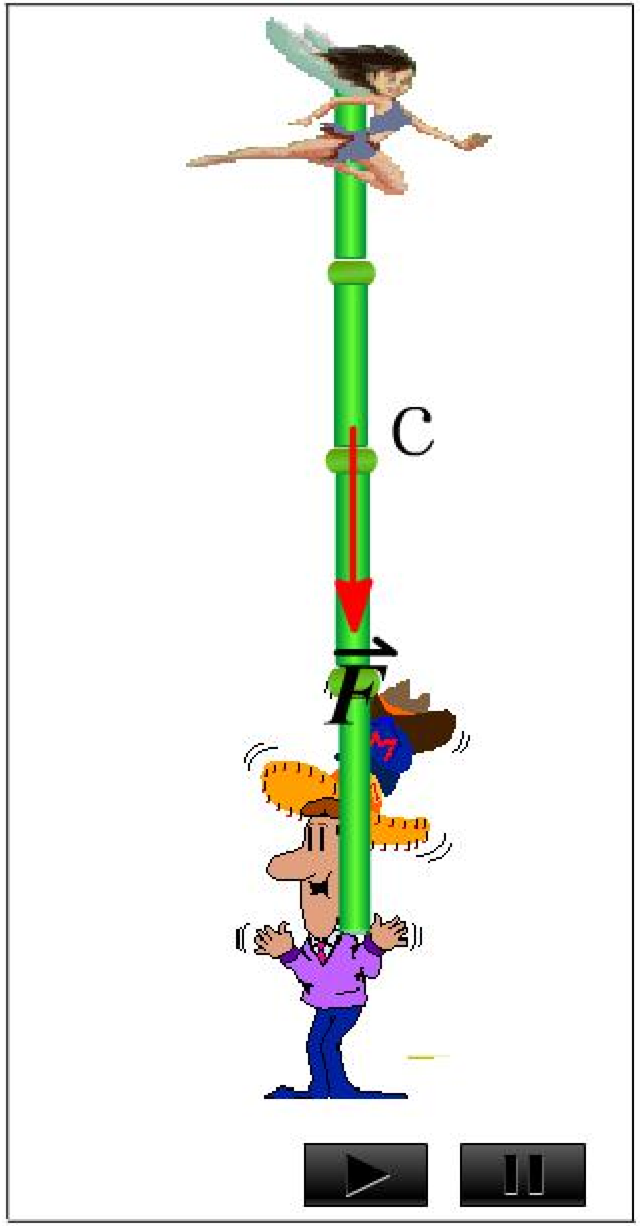
$$J_{L1}=\frac{1}{3}m_L L^2 \quad J_o=\frac{2}{5}m_o R^2$$

$$J_{L2}=J_0+m_0 d^2=J_0+m_0(L+R)^2$$

$$J=\frac{1}{3}m_L L^2+\frac{2}{5}m_o R^2+m_o(L+R)^2$$



飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？



竿子长些还是短些较安全？

转动定律应用举例

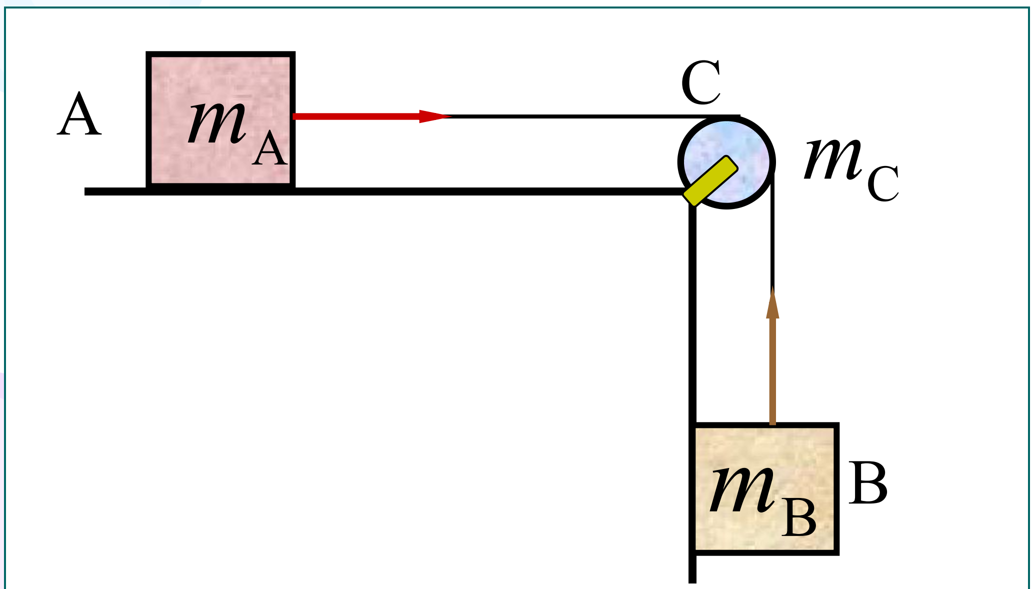
1. 矢量式（定轴转动中力矩只有两个方向）；
2. 具有瞬时性且M、J、 α是对同一轴而言的。

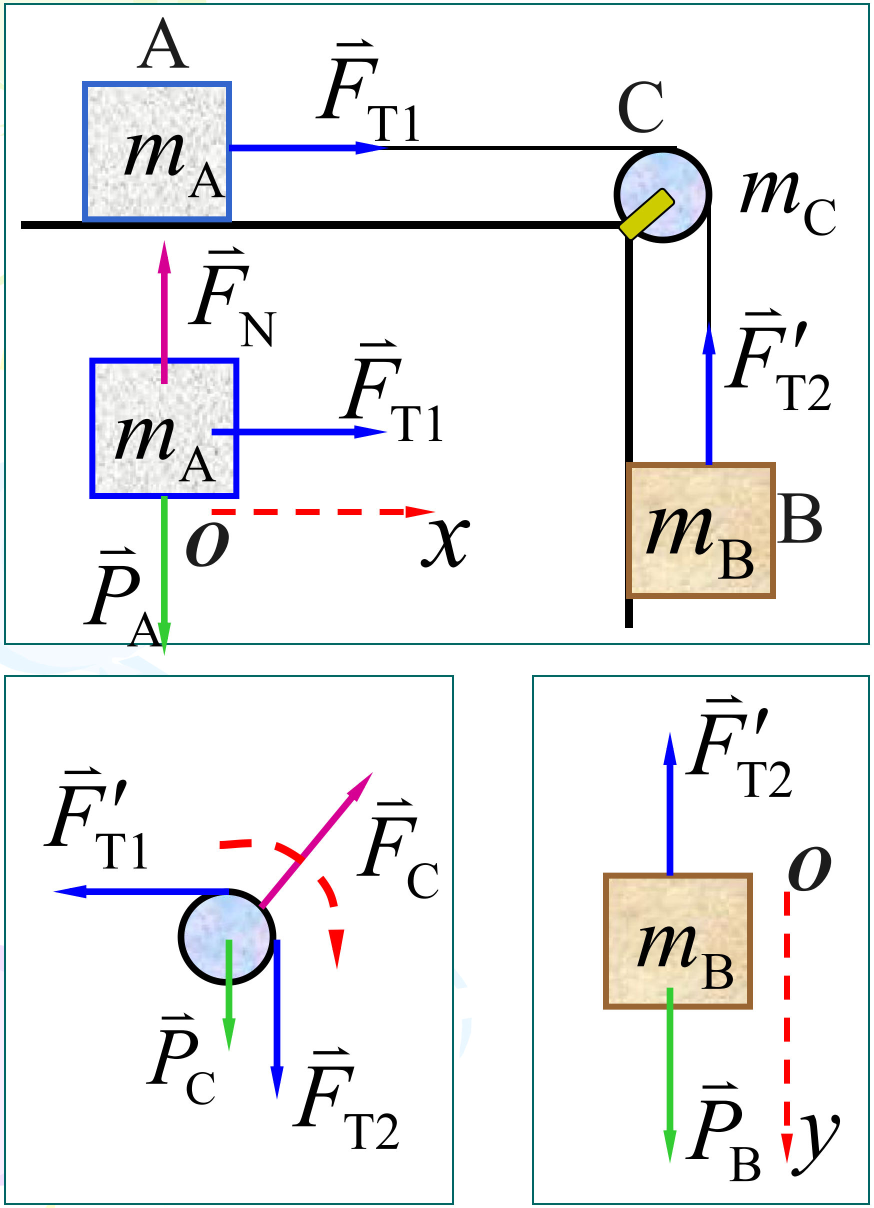
解题方法及应用举例

熟练掌握

1. 确定研究对象。
2. 受力分析（只考虑对转动有影响的力矩）。
3. 列方程求解(平动物体列牛顿定律方程，转动刚体列转动定律方程，并利用角量与线量关系)。

例4　质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C，并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上. 滑轮与绳索间没有滑动，且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计. 问：（**1**）两物体的线加速度为多少？水平和竖直两段绳索的张力各为多少？（**2**）物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？（**3**）若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为 M_f 再求线加速度及绳的张力.

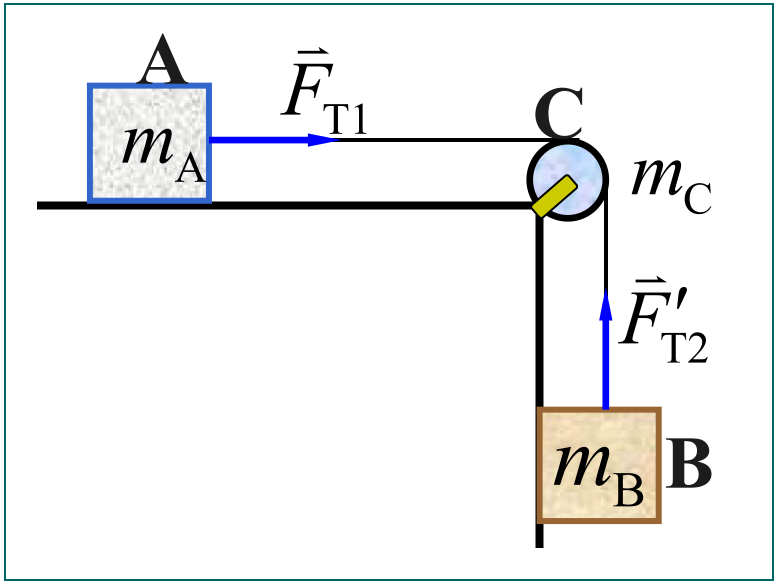




解 （1）隔离物体分别对物体A、B 及滑轮作受力分析，取坐标如图，运用牛顿第二定律 、转动定律列方程．

$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\ R F_{T2} - R F_{T1} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \\[2ex] F_{\mathrm{T1}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \\[2ex] F_{\mathrm{T2}} = \dfrac{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}/2) m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \end{cases}$$



如令 $m_{\mathrm{C}} = 0$，可得

$$F_{\mathrm{T1}} = F_{\mathrm{T2}} = \frac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

（2） B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

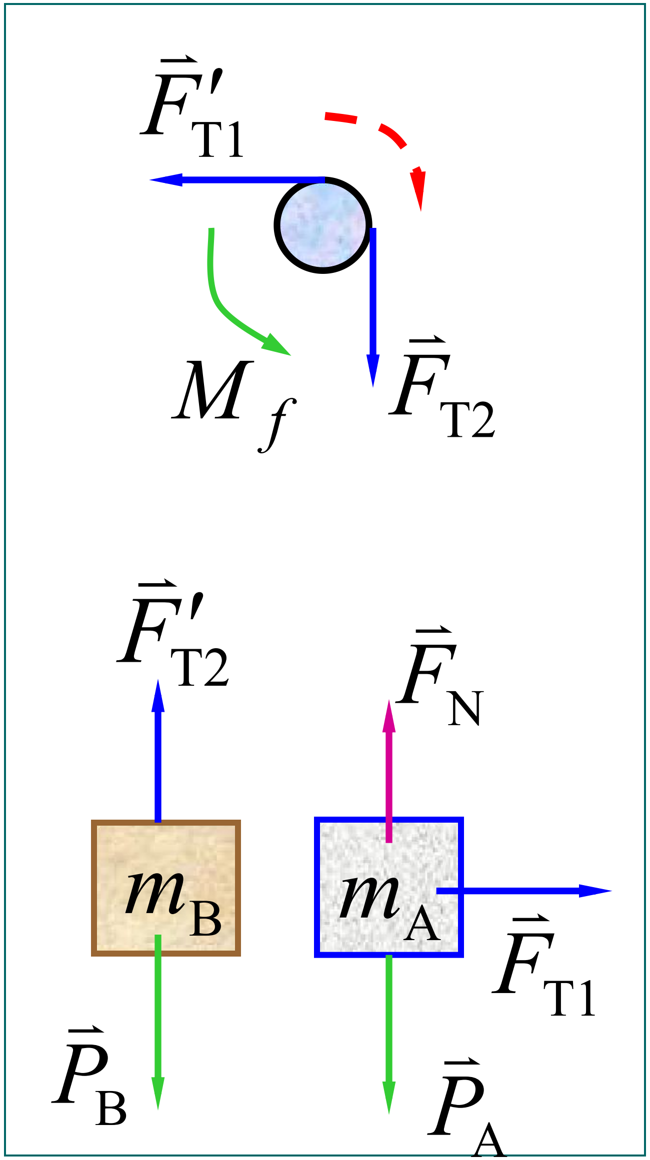
$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2 m_{\mathrm{B}} g y}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2}}$$

（3） 考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_f，转动定律

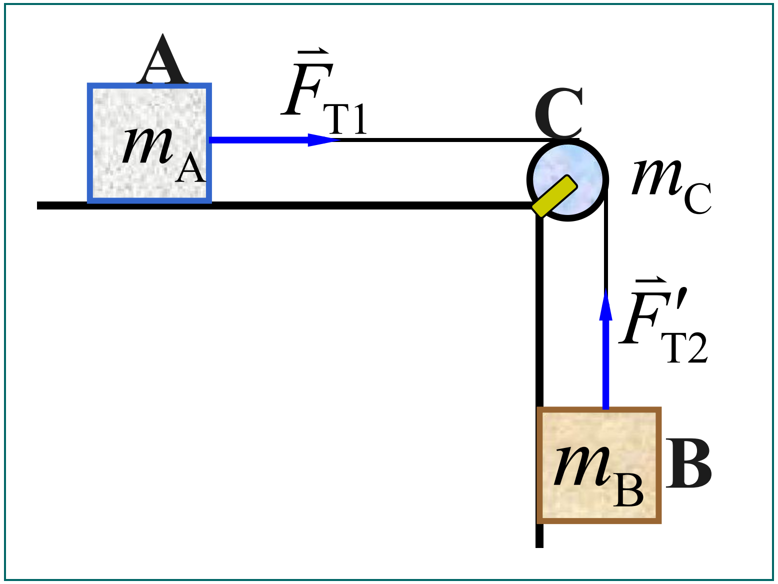
$$RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha$$

结合（1）中其它方程

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ R F_{\mathrm{T2}} - R F_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



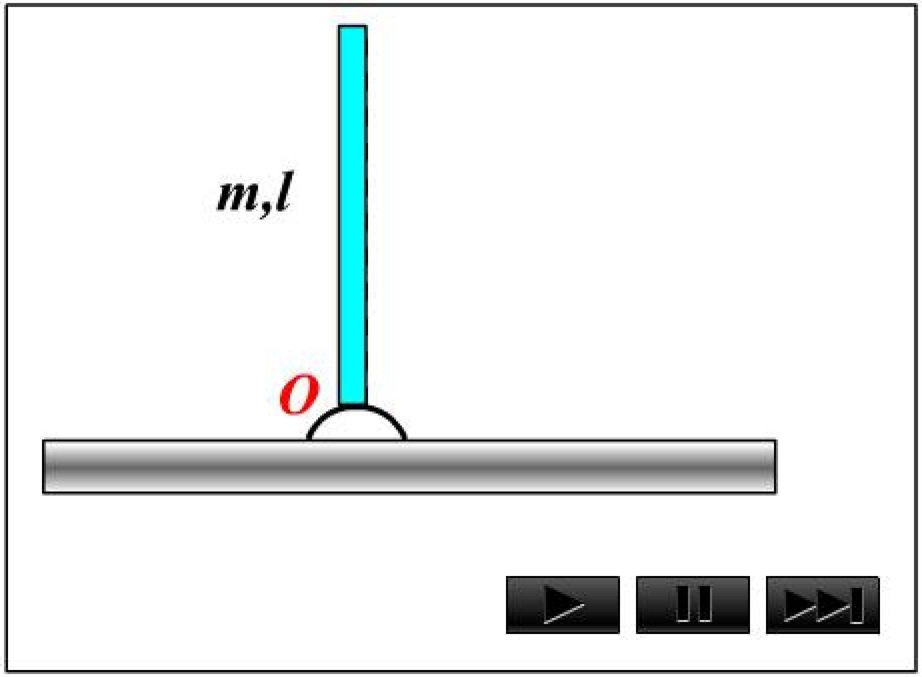
$$a = \frac{m_{\mathrm{B}} g - M_{\mathrm{f}}/R}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \qquad F_{\mathrm{T1}} = \frac{m_{\mathrm{A}}(m_{\mathrm{B}} g - M_{\mathrm{f}}/R)}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2}$$

$$F_{\mathrm{T2}} = \frac{m_{\mathrm{B}}\left[(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}/2)g + M_{\mathrm{f}}/R\right]}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2}$$

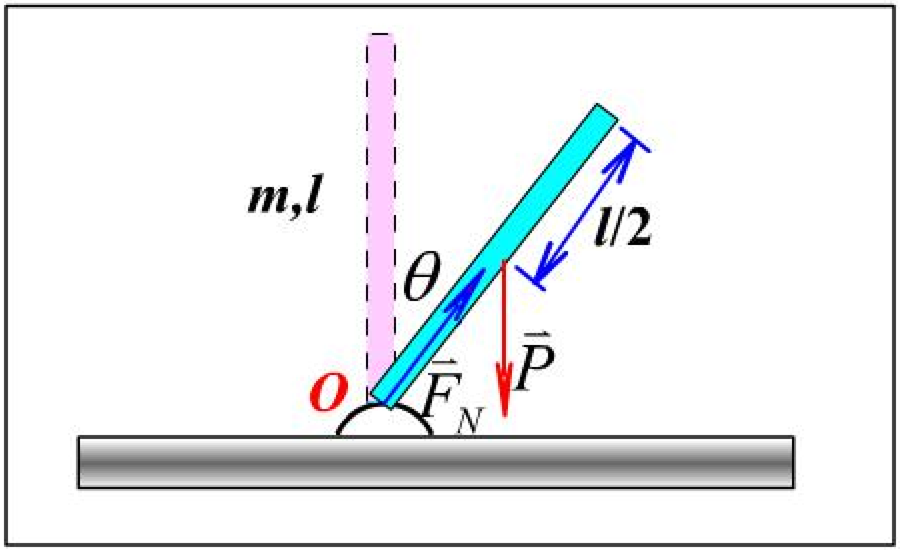
例5 一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动．由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动．试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度．

解 细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$



$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$



式中 $J = \dfrac{1}{3}ml^2$

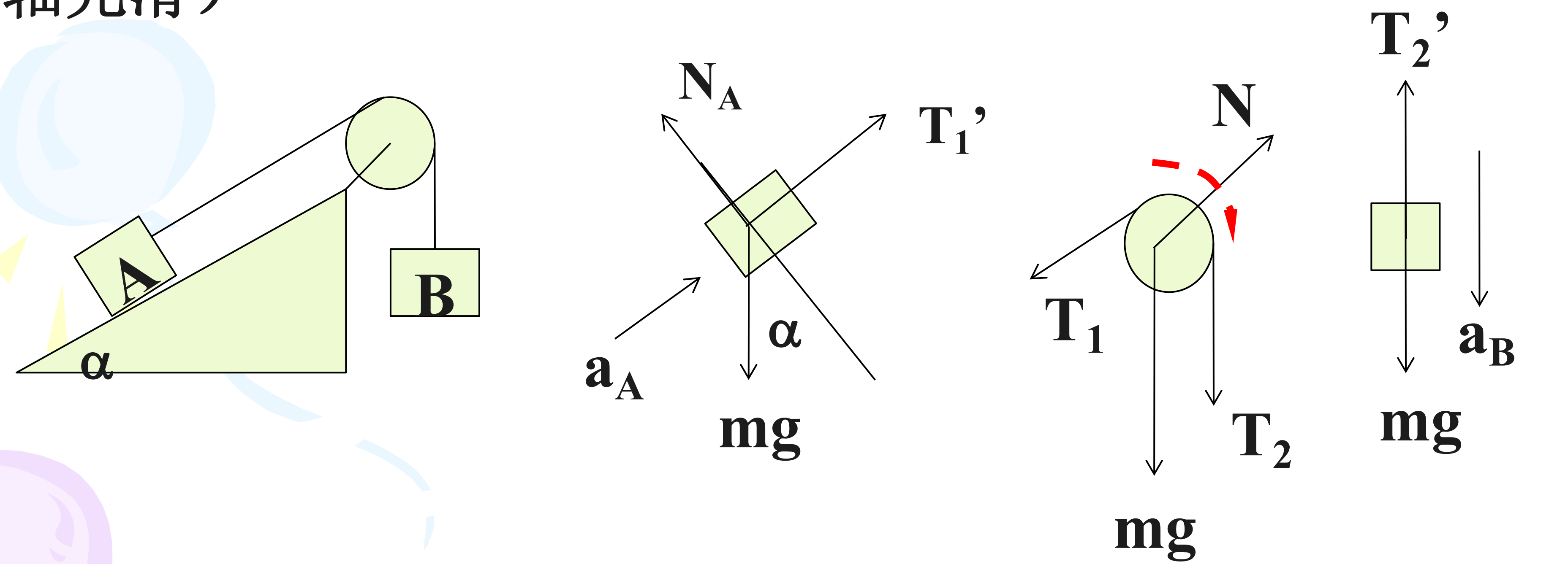
得 $\alpha = \dfrac{3g}{2l}\sin\theta$

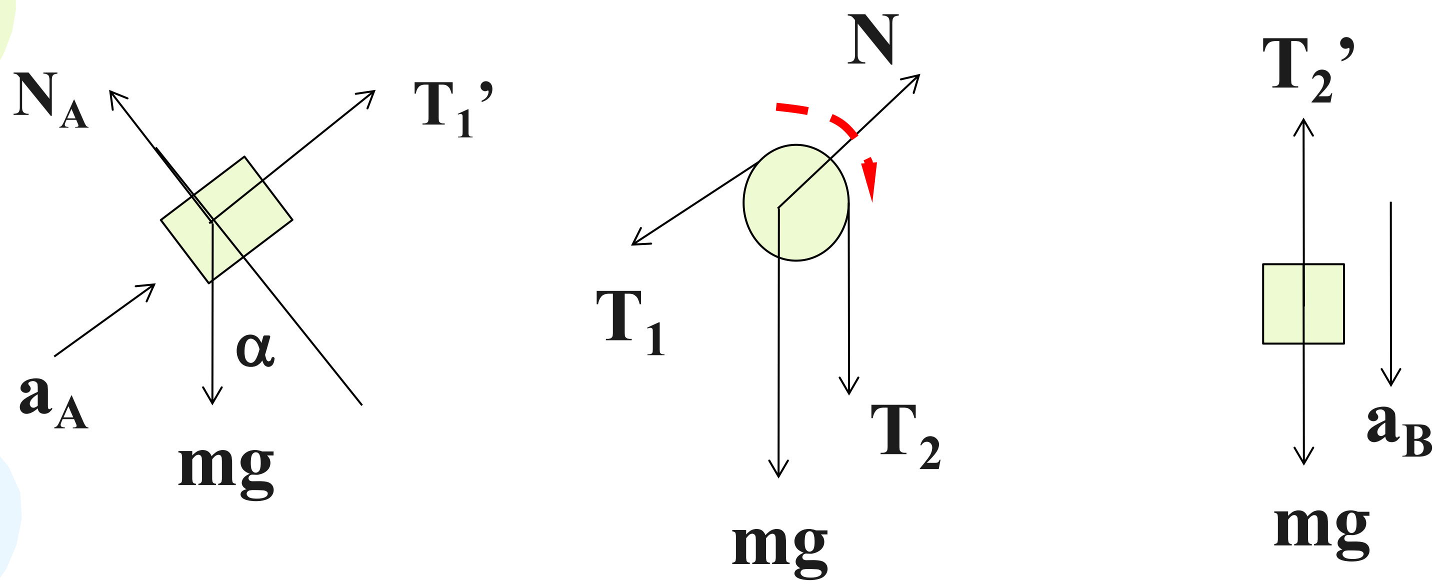
由角加速度的定义

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \qquad \omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分 得 $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

练习： 质量均为m的两物体A，B。A放在倾角为α的光滑斜面上通过定滑轮由不可伸长的轻绳与B相连。定滑轮是由半径为R的圆盘，其质量也为m。物体运动时，绳与滑轮无相对滑动。求绳中张力T_1和T_2及物体的加速度a（轮轴光滑）





解 物体A，B，定滑轮受力见图。对于做平动的物体A B，分别由牛顿定律得

$$T_1' - mg\sin\alpha = ma_A$$

$$mg - T_2 = ma_B$$

$$T_2R - T_1R = J\alpha$$

同时 $a_A = a_B = R\alpha$

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

$$T_1 = \frac{2+3\sin\alpha}{5}mg$$

$$T_2 = \frac{3+2\sin\alpha}{5}mg$$

$$a_A = a_B = \frac{2(1-\sin\alpha)}{5}g$$

练习：转动着的飞轮的转动惯量为 J，在t=0时角速度为ω_0。此后飞轮经历制动过程，阻力矩M的大小与角速度ω的平方成正比，比例系数为k（k为大于0的常数），当$\omega=1/3\omega_0$时，飞轮的角加速度是多少？从开始制动到现在经历的时间是多少？

解： 由题知 $M=-k\omega^2$ 故由转动定律有

$$-k\omega^2 = J\alpha$$

$$\alpha = -k\omega^2 / J$$

由 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 代入，求得这时飞轮的角加速度为

$$\alpha = -\frac{k\omega_0^2}{9J}$$

（2）为求历经的时间t，将转动定律写成微分方程的形式，即

$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$-k\omega^2 = J\frac{d\omega}{dt}$$

分离变量，并考虑到t=0时，$\omega=\omega_0$，两边积分

$$\int_{\omega_0}^{\frac{1}{3}\omega_0}\frac{d\omega}{\omega^2} = -\int_0^t \frac{k}{J}dt$$

故当$\omega=1/3\omega_0$时，制动经历的时间为

$$t = \frac{2J}{k\omega_0}$$