2016-2018 年高等数学 II-2 期末试题整理

（如有错误欢迎指正。扫码关注“ouc 掌上数学”获取更多学习资料）

【多元函数微分学】

1、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 所确定的隐函数，其中 F 具有一阶连续偏导数，且 $F_1'+F_2'\neq 0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ___1___

知识点：隐函数存在定理.

解：$F(x-z,y-z)=0$

$$\frac{\partial F(x-z,y-z)}{\partial x}=0$$

$$F_1\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \quad \because F_1+F_2\neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{F_1+F_2}.$$

同 $F_1\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F_2\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2}{F_1+F_2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

2、$u=xyz$ 在 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值是 ___$\sqrt{3}$___

知识点：方向导数与梯度.

$$\max\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|=|\vec{G}|$$

$$\mathrm{grad}f(1,1,1)=(f_x,\ f_y,\ f_z)$$

$f_x=yz \quad f_y=xz \quad f_z=xy$

在 $(1,1,1)$

故 $\mathrm{grad}f=(1,1,1)$

$$\max\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|=|\vec{G}|=\sqrt{3}.$$

3、曲线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t, z=4\sin\frac{t}{2}$ 在对应 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点处的法平面方程是

$x+y+\sqrt{2}z-4-\frac{\pi}{2}=0$

知识点：空间曲线

$x|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

$y|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$

$z|_{t=\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}.$

$x'|_{t=\frac{\pi}{2}}=1 \quad y'|_{t=\frac{\pi}{2}}=1 \quad z'|_{t=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}.$

法平面平程：$x-\frac{\pi}{2}+1+y-1+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0$

$x+y+\sqrt{2}z=4+\frac{\pi}{2}$

4、二元函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是_____ $(2,2)$ _______

知识点：多元函数的极值及其求法.

$f_x=3x^2-6x=0 \quad x_1=0 \quad x_2=2.$

$f_y=3y^2-6y=0 \quad y_1=0 \quad y_2=0.$

$A=f_{xx}=6x. \quad B=f_{xy}=0 \quad C=f_{yy}=6y$

当 $AC-B^2>0$ 时有极值，且 $A>0$ 时有极小值.

$\therefore x=2. \quad y=2.$

$\therefore$ 极小值点为 $(2,2)$.

5、函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）

A. 不连续； B. 偏导数存在； C. 任意方向的方向导数存在； D. 可微

知识点：偏导数定义. 方向导数定义. 全微分.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

当Δx从0左右两侧趋于0时，偏导数不同.

因此不存在，故B项错误. 同时D项也错误（全微分性质）.

A项 由空间曲面可以看出 该图形为连续曲面.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}=1$ $\therefore$ C项正确.

6、已知曲面$z=4-x^2-y^2$在点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则P点的坐标是（ C ）

A. $(1,-1,2)$； B. $(-1,1,2)$； C. $(1,1,2)$； D. $(-1,-1,2)$

知识点：空间曲面.

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-4=0$

$f_x=2x$ $f_y=2y$ $f_z=1$

$\vec{n}=(2x,2y,1)$

$\vec{m}=(2,2,1)$

$\because$ 切平面与已知平面平行.

$\therefore \vec{m}\parallel\vec{n}$

$\therefore x=y=1$.

$\therefore$ 由选项可得P为$(1,1,2)$

7、曲面 $z=xy$ 在 $P(3,-1,-3)$ 点处的法向量可能为（ D ）

A. $\vec{n}=\{-3,1,-1\}$　B. $\vec{n}=\{3,1,-1\}$　C. $\vec{n}=\{1,3,1\}$　D. $\vec{n}=\{1,-3,1\}$

知识点：空间曲面.

$F(x,y,z)=z-xy=0$.

$F_x=-y \quad F_y=-x \quad F_z=1$

$\vec{n}=(-y,-x,1)$

在 $P(3,-1,-3)$. $\therefore \vec{n}=(1,-3,1)$

8、设 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，则全微分 $df(1,2,0)=$（ A ）

A. $dx+\frac{1}{2}dy+\frac{1}{2}dz$　B. $\frac{1}{2}dx+dy-\frac{1}{3}dz$

C. $3dx+\frac{1}{4}dy+\frac{1}{5}dz$　D. $\frac{1}{2}dx-dy+\frac{1}{2}dz$

知识点：全微分

$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz$

在点 $(1,2,0)$

$f_x=\left.\frac{y}{xy+z}\right|_{(1,2,0)}=1$

$f_y=\left.\frac{x}{xy+z}\right|_{(1,2,0)}=\frac{1}{2}$

$f_z=\left.\frac{1}{xy+z}\right|_{(1,2,0)}=\frac{1}{2}$

$df=dx+\frac{1}{2}dy+\frac{1}{2}dz$

9、力 $\vec{F}=(x+y)^m(y\vec{i}-x\vec{j})$ 构成力场（$y>0$）。若已知质点在此力场内运动时场力所做的功与路径无关，则 $m=$（ A ）

A. -2　B. 1　C. $\frac{1}{2}$　D. 0

知识点：格林公式 曲线积分与路径无关性.

$F = (x+y)^m y \vec{i} - (x+y)^m x \vec{j}$

$\because$ 该场力作功与路径无关

$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$P = (x+y)^m y \qquad Q = -(x+y)^m x$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -m(x+y)^{m-1}x - (x+y)^m$

$\frac{\partial P}{\partial y} = m(x+y)^{m-1}y + (x+y)^m.$

$\therefore m(x+y)^{m-1}x + m(x+y)^{m-1}y + 2(x+y)^m = 0$

$(m+2)(x+y)^m = 0$

$m = -2.$

10、设 $z = f(xy^2, x^2y)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 f_1' + 2xyf_2'\text{；}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf_1' + 2xf_2' + 2xy^3 f_{11}'' + 5x^2y^2 f_{12}'' + 2x^3 y f_{22}''$$

11、讨论二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性和可微性。

$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \sqrt{x^2+y^2}$，可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

同样有

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

即函数在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在。

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$，该极限不存在，所以

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微。

12、说明二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

显然、$f(0,y)=0$ $f(x,0)=0$

$\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=0$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0$

$(k\neq 0)$

当沿 $y=kx^2$ 趋于0时

$\lim\limits_{x\to 0}f(x,kx^2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}\neq 0$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处极限不存在

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

13、讨论函数 $f(x,y)=x^2+xy$ 是否存在极值？

若存在极值,则 $\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+y=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

$A=f_{x^2}(0,0)=2$ $B=f_{xy}(0,0)=1$ $C=f_{y^2}(0,0)=0$

$H=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2=-1<0$

则极值不存在

14、设有一小山,高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$ ，问 $h(x,y)$ 在点 $P(2,2)$ 沿什么方向的方向导数最大?并求出这个最大方向导数。

$h(x,y)$ 在 $P(2,2)$ 可微,则 $h(x,y)$ 在P点任何方向l的方向导数都存在

则 $\dfrac{\partial h}{\partial l}=h_x(2,2)\cos\alpha+h_y(2,2)\sin\alpha$

$=-2\cos\alpha-2\sin\alpha$

$=-2\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$

当 $\alpha=-\dfrac{3\pi}{4}$ 时，有 $\max(\dfrac{\partial h}{\partial l})=2\sqrt{2}$

沿 $(-1,-1)$ 的方向导数最大

14、设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，计算全微分 $dz\big|_{(0,1)}$。

对x求导

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2\frac{\partial f}{\partial u}\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xf+x^2\frac{\partial f}{\partial u}-z}{x+1+x^2\frac{\partial f}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-z\Big|_{(0,1)}$$

由 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$

得 $z|_{(0,1)}=1$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-1$

对y求导

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y}-2y=x^2\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=2$$

$$dz\big|_{(0,1)}=-1dx+2dy$$

16、求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交 999 111 线上与 xoy 平面距离最短的点。

与xoy平面距离最短的点，只需找到 min|z|

令 $f(x)=z^2=(5-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y)^2$

构造拉格朗日函数

$$L=(5-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$L_x=-\frac{10}{3}(5-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y)+2\lambda x=0 \quad ①$$

$$L_y=-\frac{5}{2}(5-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y)+2\lambda y=0 \quad ②$$

由①②得 $x=\frac{4}{3}y$

又 $x^2+y^2=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{4}{5} \\ y_1=\frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\frac{4}{5} \\ y_2=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

极小值点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

代入 $f(x)$ 得 $z^2=(\frac{35}{12})^2$

又 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \Rightarrow z=\frac{35}{12}$

所求得的点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$

17、设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln^{xy}+1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$$

18、$u = xy^2 z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？求此方向导数的最大值。

$u_x = y^2 z \quad u_y = 2xyz \quad u_z = xy^2$

$f = \frac{\partial u}{\partial l} = 2\cos\alpha - 4\cos\beta + \cos\gamma$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

构造拉格朗日函数

$L = 2\cos\alpha - 4\cos\beta + \cos\gamma + \lambda(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1)$

$L_\alpha = -2\sin\alpha - 2\lambda\cos\alpha\sin\alpha = 0$

$L_\beta = 4\sin\beta - 2\lambda\cos\beta\sin\beta = 0$

$L_\gamma = -\sin\gamma - 2\lambda\cos\gamma\sin\gamma = 0$

$\cos\alpha = -\frac{1}{\lambda} \quad \cos\beta = \frac{2}{\lambda} \quad \cos\gamma = \frac{1}{2\lambda}$

$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\frac{\partial u}{\partial l}\max = \sqrt{21}$

19、设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $e^z + yz + x^2 = e + \ln(1-x)$ 所确定，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

$e^z + yz + x^2 = e + \ln(1-x)$

$z = \ln(e + \ln(1-x) - yz - x^2)$

$e^z + yz + x^2 = e + \ln(1-x)$

$\Rightarrow z = \ln(e + \ln(1-x) - yz - x^2)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z - y\frac{\partial z}{\partial y}}{e + \ln(1-x) - x^2 - yz}$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(e + \ln(1-x) - x^2 - yz + y) = -z$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{(e + \ln(1-x) - x^2 - yz + y)}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}(e + \ln(1-x) - x^2 - yz + y) + z(-z - y\frac{\partial z}{\partial y} + 1)}{(e + \ln(1-x) - x^2 - yz + y)^2}$

$= \frac{z + (-z^2 - yz\frac{\partial z}{\partial y} + z)}{(e + \ln(1-x) - x^2 - yz + y)^2} = \frac{-z^2 - yz\frac{\partial z}{\partial y} + 2z}{(e + \ln(1-x) - x^2 - yz + y)^2}$

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = \frac{-z^2|_{(0,0)} + 2z|_{(0,0)}}{e^2}$

由 $e^z + yz + x^2 = e + \ln(1-x)$ 得 $z|_{(0,0)} = 1$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{e^2}$

20、修建一座形状为长方体的仓库，已知库顶每平方米造价为 300 元，墙壁每平方米造价为 200 元，地面每平方米造价为 100 元，其它花费共需 2 万元。现投资 14 万元，问：不考虑仓库库顶、墙壁、地面的厚度时，仓库的长、宽、高如何设计才能使其容积最大？

$f(x)=xyz$ ①

$400xy+400xz+400yz+20000=140000$ ②

构造拉格朗日函数

$L=xyz+\lambda(400xy+400xz+400yz+20000-140000)$

$L_x=yz+400\lambda y+400\lambda z=0$

$L_y=xz+400\lambda x+400\lambda z=0$

$L_z=xy+400\lambda x+400\lambda y=0$

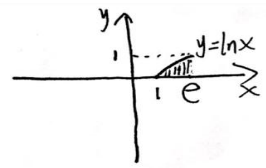
求得 $x=y=z=-400\lambda$

代入②中得 $x=y=z=\sqrt{3}\cdot 10m$

故当长宽高均为 $10\sqrt{3}m$ 时容积最大

【重积分】

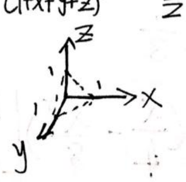
1、交换二重积分的积分顺序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$ ________________



$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$

2、$\sum$ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{(1+x+y+z)^2}=$ ______

2. $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{(1+x+y+z)^2}=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{2^2}=\dfrac{S_\Sigma}{4}$，$S_\Sigma$ 为 Σ 面积



，即求 

面积，为 $\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S_\Sigma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

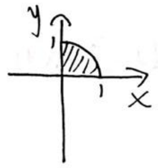
$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{(1+x+y+z)^2}=\dfrac{S_\Sigma}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

3、设 $D_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$，则（ ）

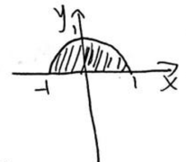
A. $\iint\limits_{D} xdxdy=2\iint\limits_{D_1} xdxdy$；　　B. $\iint\limits_{D} xydxdy=2\iint\limits_{D_1} xydxdy$；

C. $\iint\limits_{D} |x|dxdy=2\iint\limits_{D_1} xdxdy$；　　D. $\iint\limits_{D} (x+y)dxdy=2\iint\limits_{D_1} (x+y)dxdy$

3. D_1:



D:



$$\iint\limits_{D} x dxdy=\int_{-1}^{1} x dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$\iint\limits_{D_1} x dxdy=\int_{0}^{1} x dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

$$\iint\limits_{D} xy dxdy=\int_{-1}^{1} dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy dy=\int_{-1}^{1}\frac{x(1-x^2)}{2}dx=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}\right)\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$\iint\limits_{D_1} xy dxdy=\int_{0}^{1} dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xy dy=\int_{0}^{1}\frac{x(1-x^2)}{2}dx=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{8}$$

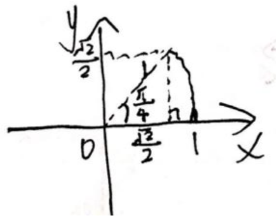
$$\iint\limits_{D} |x| dxdy=\int_{-1}^{0} -x dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy+\int_{0}^{1} x dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy=2\int_{0}^{1} x dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$=\frac{2}{3}=2\iint\limits_{D_1} x dxdy$$ 故选C

4、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ 等于（　　）

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$



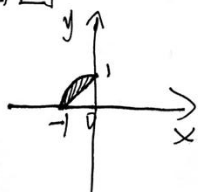
$$\because \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$
$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

5、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_{-1}^0 dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 等于（　　）

A. $\int_0^1 dy\int_{-1}^0 f(x,y)dx$　　　B. $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y+1} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y)dx$　　　D. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

5. 画图



$\therefore \int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)dx$

6、计算$I=\iint\limits_{D}(x+y)^2\,d\sigma$，其中$D$是由圆$x^2+y^2=2x$围成的区域。

6. D: $x^2+y^2=2x$，即$(x-1)^2+y^2=1$

取$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\therefore I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}(r\cos\theta+r\sin\theta)^2\cdot r\,dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}r^3\cdot(1+\sin2\theta)dr$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta+8\sin\theta\cos^5\theta\,d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta+2\sin\theta\cos^5\theta\,d\theta$

$=8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

7、已知曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$围成区域Ω，求Ω的体积。

7. $\begin{cases}z=x^2+y^2\\z=2-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow z=1=x^2+y^2=2-\sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore$利用柱面坐标

变换为$z=r^2$，$z=2-r$，交线为$\begin{cases}z=1\\r=1\end{cases}$

$\therefore V=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}r\,dr\int_{r^2}^{2-r}dz=\frac{5}{6}\pi$

8、计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中$\sum$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围立体表面的外侧。

8. 由高斯公式

$$\iint_{\Sigma} 2xz\,dydz + yz\,dzdx - z^2\,dxdy$$

$$= \iiint_{V} (2z+z-2z)\,dxdydz = \iiint_{V} z\,dz$$

∴利用柱面坐标

变换为 $z=r$, $z=\sqrt{2-r}$. 交线为 $\begin{cases} z=1 \\ r=1 \end{cases}$

$$\therefore \iiint_{V} z\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_r^{\sqrt{2-r}} z\,dz = \frac{5}{12}\pi$$

9、设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$ 。

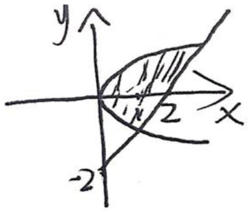
9. 由球面坐标变换

$$\rho=1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi,\ z=\rho\cos\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\cdot d\rho$$

$$=\frac{4\pi}{15}$$

10、已知抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y-x+2=0$ 所围平面图形为 D，计算 $I=\iint\limits_{D} dxdy$ 。

10. 

$$\begin{cases} y^2=x \\ y-x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\therefore I=\iint_D dxdy = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} dx = \frac{9}{2}$$

11、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz$，其中：$\Omega$ 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围区域。

11、知识点：三重积分

$$I=\iiint_{\Omega} x^2 dxdydz=\iint_{D_{xy}} dxdy\int_0^y x^2 dz$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2 y\,dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x^2}^{1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-x^4)dx=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{15}$$

12、计算$I=\iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy$，其中$\Sigma$是球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的下侧。

12. 知识点：二重积分.

$$I=\iint_{\Sigma} z^2 dxdy=\iint_{\Sigma}(1-x^2-y^2)dxdy$$

令$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$　　$\Sigma'=\{(r,\theta)|\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$\therefore\ I=\iint_{\Sigma'}(1-r^2)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^1(1-r^2)r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

【曲线积分与曲面积分】

1、 设平面曲线L为圆周$x^2+y^2=1$，则曲线积分$\int_L x^2 ds=$______

1、 知识点：曲线积分.

令 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

$$\int_L x^2 ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t+1}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2t+1)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi.$$

2、设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$（　　　）

A． $\frac{\pi}{2}$　　　B. 0　　　C. $-\pi$　　　D. π

2. 知识点：曲线积分

令 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$，$\int_L (x^2+y^2)ds = \int_\pi^{2\pi} (\cos^2 t+\sin^2 t)\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\, dt = \pi$

3、 设曲线积分 $\int_L (f(x)-e^x)\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与积分路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，试求 $f(x)$。

3. 知识点：格林公式

令 $\begin{cases} P(x,y)=[f(x)-e^x]\cdot\sin y \\ Q(x,y)=-f(x)\cos y. \end{cases}$，原式 $=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

由曲线积分与路径无关，可知：

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 恒成立. $\Rightarrow [f(x)-e^x]\cos y=-f'(x)\cos y.$ 恒成立.

$\therefore$ $f(x)-e^x=-f'(x)$　解微分方程. 得. $f(x)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$

又由 $f(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$

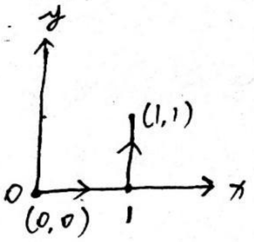
$\therefore$ $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$

4、判断曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + x^2ydy$ 与路径是否有关，并计算出该积分的值。

4. 知识点：格林公式.

令 $\begin{cases} P(x,y)=xy^2 \\ Q(x,y)=x^2y, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy$. $\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

从而曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关.



选图中路径,

原式 $=\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}$

5、设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，计算

$$I=\iint_{\Sigma} yzdydz + xzdzdx + x^2dxdy.$$

5. 知识点：曲面积分.

令 $\begin{cases} P(x,y,z)=yz \\ Q(x,y,z)=xz \\ R(x,y,z)=x^2. \end{cases}$ $\therefore I=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

补封闭，增加 $z=0$ 平面与 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 相交区域，方向取外侧，记新封闭区域为 Σ'，区域 $D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 4,\ z=0\}$ 为新增区域.

$$\therefore I=\iint_{\Sigma'} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy-\iint_{D} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

$$=-\iint_D x^2dxdy \xlongequal{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}} -\left(-\int_0^2 rdr\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta d\theta\right)=4\pi.$$

【无穷级数】

1、若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\frac{1}{2})^n$ 在 $x=-3$ 处（ ）

A. 发散； B. 条件收敛； C. 绝对收敛； D. 敛散性不能判定

1、

知识点：幂级数收敛性

由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处收敛.

得其收敛域包含 $(-3,3]$

又 $-3 < x-\frac{1}{2} < 3 \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\frac{1}{2})^n$ 收敛域包含 $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$

$\therefore x=-3$ 时，不能确定其收敛性.

$\therefore$ 选 D.

2、下列级数发散的是（ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$；　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$；　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$；　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$

2、知识点：数项级数敛散性.

A项：

令 $\begin{cases} u_n = 1-\cos\frac{\pi}{n} \\ v_n = \frac{1}{n^2} \end{cases}$，$u_n>0$, $v_n>0$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

$\overset{\text{洛必达}}{=} \frac{(-\frac{\pi}{n^2})\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{-\frac{2}{n^3}}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}$

$=\frac{\pi^2}{2}>0$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$

也收敛.

B项：

令 $\begin{cases} u_n = \sin\frac{1}{n} \\ v_n = \frac{1}{n} \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

C项：

令 $u_n=\frac{1}{n}$

显然，$u_n>0$，且 $u_{n+1}<u_n$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

由 Leibniz 判法.

有 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.

D项：

令 $u_n=(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$

考察 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^3=\frac{1}{2}<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$ 绝对收敛.

3、下列级数中，条件收敛的是（ A ）

A． $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^n}$

3. 知识点：条件收敛与绝对收敛.

解：A：$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

又 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

B：$u_n=\frac{n}{3^n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{3^n}$ 绝对收敛.

C：$u_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$ 绝对收敛.

D：$u_n=\frac{n!}{2^n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}>1$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ 发散，又 $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2}{n+1}\le 1$ 且仅当 $n=1$ 时取等号.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)}{2}\cdots\frac{1}{2}=\infty$ 知

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^n}$ 发散.

4、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=1$ 处发散，则在 $x=4$ 处该级数（ A ）

A. 发散　　B. 绝对收敛　　C. 条件收敛　　D. 敛散性不能确定

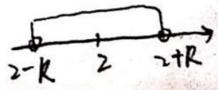
4. 知识点：幂级数及其敛散性

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x-2)^{n+1}}{a_n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

记 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

则 $|x-2|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \Rightarrow 2-R<x<2+R$

又级数在 $x=1$ 处发散，$\therefore \begin{cases} 2+R\le 1 \\ 2-R\ge 1 \end{cases} \Rightarrow 0<R\le 1$



当 R 取 1 时，收敛区间为 $(1,3)$

$\therefore x=4$ 时该级数发散.

5、下列级数中条件收敛的是（ B ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3^n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{2/3}}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{3/2}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2}$

5. 知识点：条件收敛与绝对收敛.

解：A：$u_n=\dfrac{n}{3^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{3}<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n}{3^n}$ 绝对收敛.

B：$u_n=\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$，易知 $p=\dfrac{2}{3}<1$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散.

又 $u_n=\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}>\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}=u_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 条件收敛

C：同 B：有 $p=\dfrac{3}{2}>1$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 绝对收敛.

D：$u_n=\dfrac{n}{2}$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2}=+\infty\ne 0$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2}$ 发散

又 $u_n=\dfrac{n}{2}<\dfrac{n+1}{2}=u_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2}\ne 0$.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot\dfrac{n}{2}$ 发散.

p-级数 $\begin{cases} p=1，发散 \\ p<1，发散 \\ p>1，收敛 \end{cases}$（详见课本 113 页）.

故答案为：B.

6、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ 展开成 x 的幂级数。

6. 知识点：函数展开成幂级数.

解：$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(1-x)(3-x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3-x}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x}{3}}\right)$

而 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$,

$\therefore \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{3}\right)^n+\cdots\right) \quad (-1<\frac{x}{3}<1)$,

$\therefore$ 在 $(-1,1)$ 内，有 $f(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right]$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^{n+1}}\cdot x^n$

7、设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=s(x),x\in(-1,1)$，试求 $s(x)$ 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\bullet\frac{1}{3^n})$。

7. 知识点：幂级数和函数的性质.

解：设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，收敛半径 $R=1$，

又易得收敛区间为 $[-1,1)$

$\therefore$ 有 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$\therefore S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{3}$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^n}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{3}{2}$

8、 将函数 $f(x)=2x^2(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数。

8. 知识点：函数展开成正弦级数与余弦级数.

解：对 $f(x)$ 进行偶延拓.

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2dx=\frac{4}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int 2x^2\cos nx\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}+\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}-\left[\frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\}$

$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi=\begin{cases}\frac{2\pi}{n^2}\cdot\frac{4}{\pi}, & n\text{为偶数}\\ -\frac{2\pi}{n^2}\cdot\frac{4}{\pi}, & n\text{为奇数}\end{cases}=(-1)^n\cdot\frac{8}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$

又 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续.

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx$

9、已知 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的取值为 $f(x)=\begin{cases}-x,-\pi\le x<0\\ x-\pi,0\le x\le\pi\end{cases}$，

若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，分别计算 $S(0),S(\frac{3\pi}{2})$。

9. 知识点：傅里叶级数

解：由于 $T=2\pi$，$\therefore f(x+2\pi)=f(x)$，$\therefore f(\frac{3}{2}\pi)=f(-\frac{\pi}{2})$

又 $-\frac{\pi}{2}\in[-\pi,0)$，由 $S(x)$ 与 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数的关系，有 $S(\frac{3}{2}\pi)=f(\frac{3}{2}\pi)=f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$

又 $x=0$ 为间断点，$\therefore$ 傅里叶级数收敛于 $\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore S(0)=-\frac{\pi}{2}$

10、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$ 展开成 x 的幂级数。

10. 知识点：函数展开成幂级数

解：$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)$

又 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$

$\therefore \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^n+\cdots \quad (-1<x<1)$

$\therefore$ 有 $\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\cdots+(\frac{x}{2})^n+\cdots\right)$，$(-1<\frac{x}{2}<1)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n\right\}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}\cdot x^n$

11、证明：若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

11. 知识点：级数敛散性证明

解：设级数的部分和为 S_n，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛

$\therefore S_{2n}$ 有极限，记为 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$

则有 $\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}$

又 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ $\quad\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$

即 n 取奇、偶数时，级数的部分和均有极限。

$\therefore$ 级数收敛。

【微分方程】

1、微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$的通解为（　　）

A. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}$　　B. $y=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)$

C. $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$　　D. $y=C_1xe^{2x}+C_2xe^{2x}$

1. 知识点：二阶常系数线性微分方程.

解：特征方程：$\lambda^2-4\lambda+4=0$

解得 $\lambda=2$（二重根）.

∴方程通解为：$y=(C_1+C_2x)\cdot e^{2x}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

2、 试求微分方程$xy''+y'=0$的通解。

2. 知识点：微分方程.

解：

$xy''+y'=0$

$x\cdot\frac{dy'}{dx}+y'=0$

$\therefore\ \frac{dy'}{y'}=\frac{-1}{x}dx$

$\therefore\ \ln|y'|=-\ln|x|+\ln|C_1|=\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|$

$\therefore\ y'=\frac{C_1}{x}$

$\therefore\ y=C_1\ln|x|+C_2$

3、 求微分方程$\frac{dy}{dx}+3y=8$满足初始条件$y(0)=2$的特解。

3. 知识点：一阶线性微分方程：

解：(F1) 直接代入通解公式计算：$(p(x)=3,\ q(x)=8)$

$$\therefore\ y=e^{-\int 3dx}\left[\int 8e^{\int 3dx}dx+c\right]$$

$$=e^{-3x}\left(8\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+c\right)$$

$$=\frac{8}{3}+c\cdot e^{-3x}$$

$$y(0)=2\ \Rightarrow\ \frac{8}{3}+c=2\qquad\therefore c=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}e^{-3x}$$

(F2)：

$$\frac{dy}{dx}=8-3y$$

$$\therefore\ \frac{dy}{8-3y}=dx$$

$$\frac{d(8-3y)}{8-3y}=-3dx$$

$$\therefore\ \ln|8-3y|=-3x+c$$

$$\therefore\ 8-3y=e^{c-3x}$$

$$y(0)=2\qquad\therefore\ e^{c}=2.$$

$$\therefore\ 8-3y=2\cdot e^{-3x}\qquad\therefore\ y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}e^{-3x}.$$

4、 求微分方程 $y''+2y'+y=2e^{-x}$ 的通解。

4. 知识点：二阶常系数非齐次线性微分方程.

解：先求齐次方程的通解：

特征方程为：$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$$\therefore\ \lambda=-1\ (2\text{重根}).$$

∴ 齐程通解为 $y_1=(c_1+c_2x)e^{-x}$

再求特解：

根据方程右端项 $2e^{-x}$ 的形式，可设特解为

$y_2=A\cdot x^2 e^{-x}$，代入原方程

$$\therefore\ Ae^{-x}(x^2-4x+2)+2\cdot Ae^{-x}(2x-x^2)+Ax^2e^{-x}=e^{-x}\cdot 2$$

$$\therefore\ 2Ae^{-x}=2e^{-x}\qquad\therefore A=1$$

$$\therefore\ y=y_1+y_2=(c_1+c_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}=e^{-x}(x^2+c_2x+c_1)$$

5、从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系。设仪器在重力 G 作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力 f 和浮力 F 的作用。设仪器的质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k。试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$。

5. 知识点：微分方程.

解. 取沉放点为原点O，Oy轴正向铅直向下.

由牛顿第二定律可得：

$$m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv.$$

令 $\frac{dy}{dt}=v$，$\therefore \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$

$$\therefore m\cdot v\cdot\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv$$

$$\therefore dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$$

$$\therefore y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C$$

代入初始条件. $v|_{y=0}=0$

$$\therefore y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$$

注：该题来自1998考研数一真题. 解题思路比较简单，但计算繁琐

以上习题解答由2017级信息科学与工程学院 石晓晨、2017级工程学院 王治林、2018级海洋地球科学学院 赵洋、2017级数学科学学院 尹楷、2017级数学科学学院 陈浩、2016级数学科学学院 孟凡雨共同完成。