2011 秋季高数Ⅱ-1

一. 选择题

1. C 2. D 3. C 4. B 5. D 6. A 7. C

二. 填空题

1. $\underline{1}$ 2. $\underline{e^{-y}\cos x}$ 3. $\underline{y=x+2}$ 4. $\underline{\frac{1}{2}}$ 5. $\underline{2\pi}$ 6. $\underline{1}$

三. 计算题

1. $f'(x)=\frac{x}{1+x^2}$

$f(x)=\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

又 $f(0)=1$，所以 $C=f(0)-\frac{1}{2}\ln(1+0^2)=f(0)=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+1$

2. 由 $y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du$ 知 $t>0$ 时,

$\frac{dy}{dt}=\cos t^2+t\cdot(-\sin t^2)\cdot 2t-\frac{1}{2\sqrt{t^2}}\cos t^2\cdot 2t=-2t^2\sin t^2$

又 $\frac{dx}{dt}=-\sin t^2\cdot 2t=-2t\sin t^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t^2\sin t^2}{-2t\sin t^2}=t$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{-2t\sin t^2}$

~~当 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时~~,

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\left.\frac{1}{-2t\sin t^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

3. $F'(x)=2xe^{-x^4}$,

$x>0$ 时, $F'(x)>0$ 且 $x<0$ 时 $F'(x)<0$, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续

所以 $F(x)$ 的极值是 $F(0)=0$.

$F''(x)=2e^{-x^4}+2xe^{-x^4}\cdot(-4x^3)=2(1-4x^4)e^{-x^4}=2(1+2x^2)(1-2x^2)e^{-x^4}$

$x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $F''(x)<0$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $F''(x)>0$

$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $F''(x)<0$

所以 $y=F(x)$ 的拐点是 $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t^2}dt)$

$$\int_{-2}^{3}x^2F'(x)dx=2\int_{-2}^{3}x^3e^{-x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{3}e^{-x^4}dx^4=-\frac{1}{2}e^{-x^4}\Big|_{-2}^{3}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-81}-e^{-16})=\frac{1}{2}(e^{-16}-e^{-81})$$

4. $x\le 0$ 时, $\phi(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}(t^2+1)dt=\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-1}^{x}=\frac{x^3}{3}+x+\frac{4}{3}$

$x\geq 0$ 时, $\phi(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$

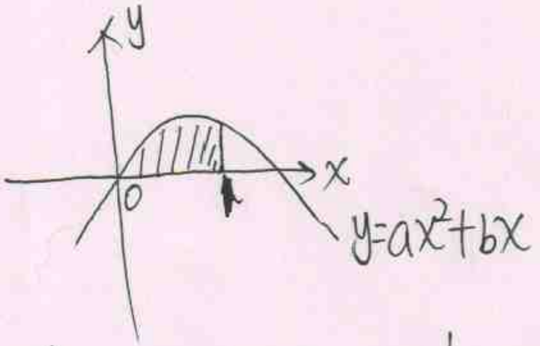
$$=\int_{-1}^{0}(t^2+1)dt+\int_{0}^{x}e^t dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-1}^{0}+e^t\Big|_0^x$$

$$=\frac{4}{3}+e^x-1=e^x+\frac{1}{3}$$

$$\therefore \phi(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x+\frac{4}{3}, & x\le 0\\ e^x+\frac{1}{3}, & x\geq 0\end{cases}$$

5. 由 $y=ax^2+bx+c$ 通过原点 知 $c=0$



因为 $\int_0^1 (ax^2+bx)dx=\frac{1}{3}$，即 $\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}$，

所以 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$

$V_x=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2dx$

$=\pi\int_0^1 (a^2x^4+2abx^3+b^2x^2)dx=\pi\left[\frac{a^2}{5}x^5+\frac{ab}{2}x^4+\frac{b^2}{3}x^3\right]_0^1$

$=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right]=\frac{\pi}{135}(2a^2+5a+20)=\frac{2\pi}{135}\left[(a+\frac{5}{4})^2+\frac{135}{16}\right]$

$\therefore$ $a=-\frac{5}{4}$ 时 V_x 最小.

此时，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$.

四. 证明题.

令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，则

$F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx=k\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)dx=k\cdot F(\xi)\cdot\frac{1}{k}=F(\xi)$ $(\xi\in[0,\frac{1}{k}])$

由罗尔定理，$\exists\,\eta\in(\xi,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$

又因为 $F'(x)=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)=e^{1-x}[(1-x)f(x)+xf'(x)]$

所以 $(1-\eta)f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)=(1-\eta^{-1})f(\eta)$.