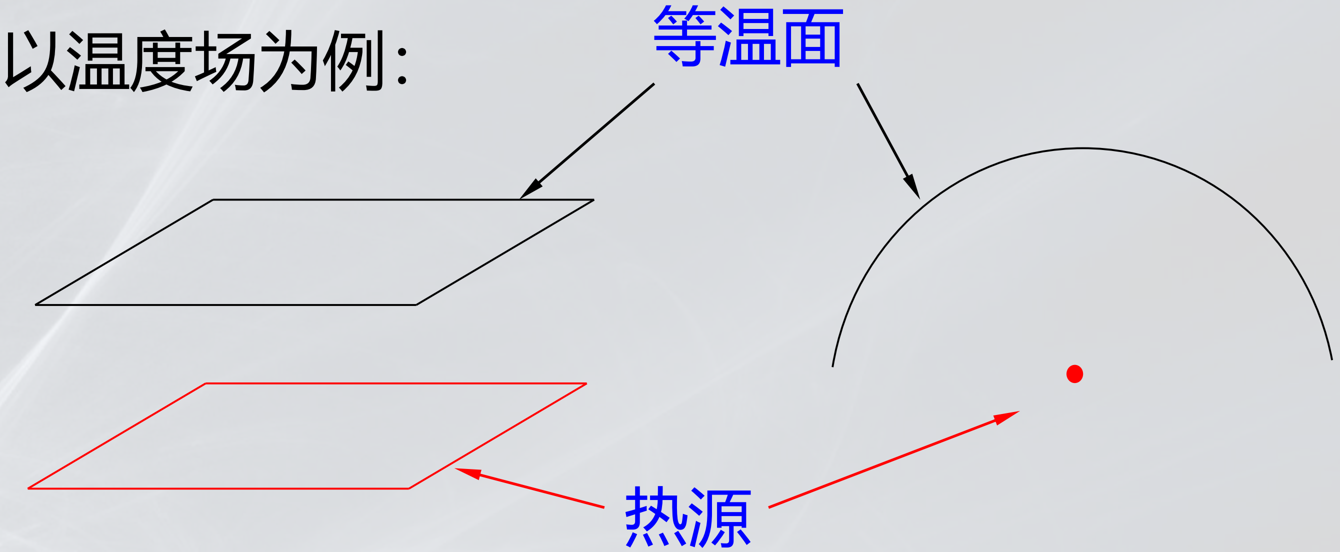
1.5 标量场的梯度

1. 标量场的等值面
2. 标量场梯度的定义
3. 标量场梯度的计算

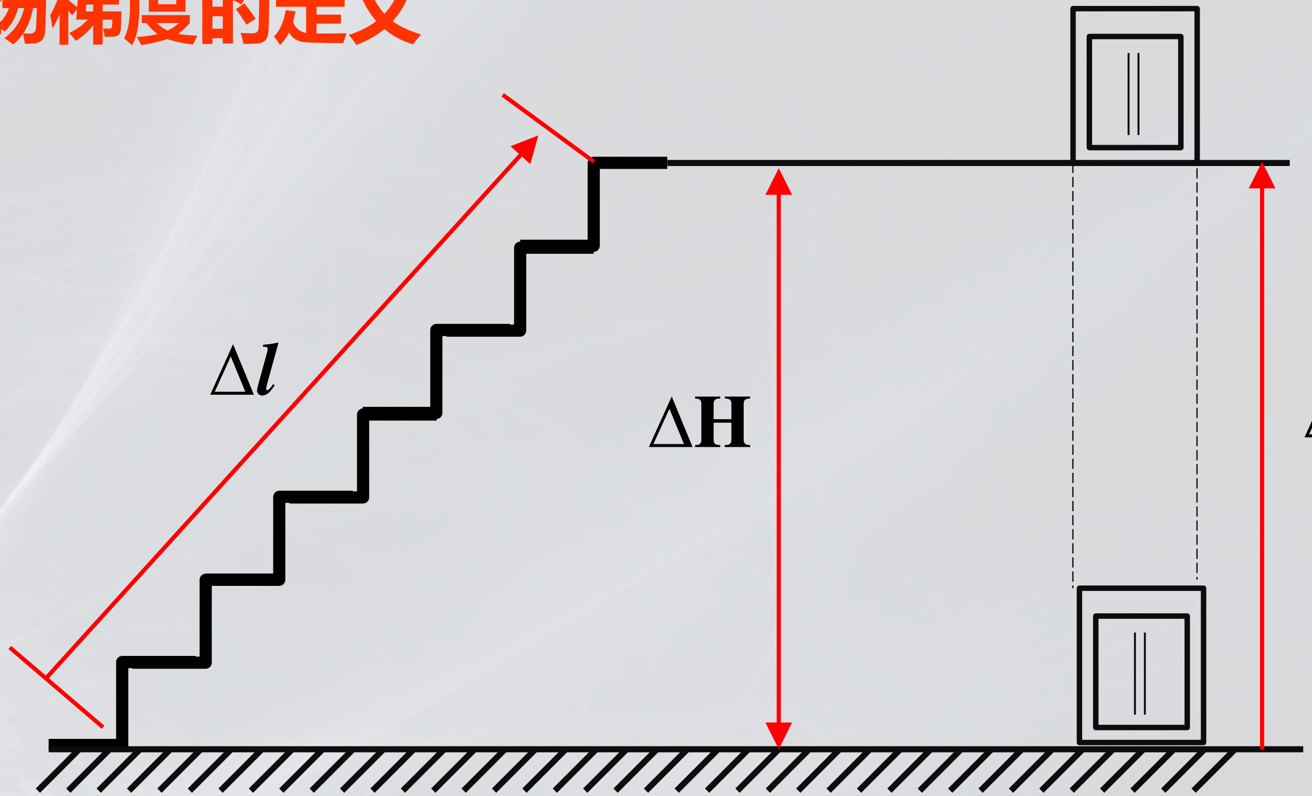
1. 标量场的等值面

以温度场为例：



可以看出：标量场的函数是单值函数，各等值面是互不相交的。

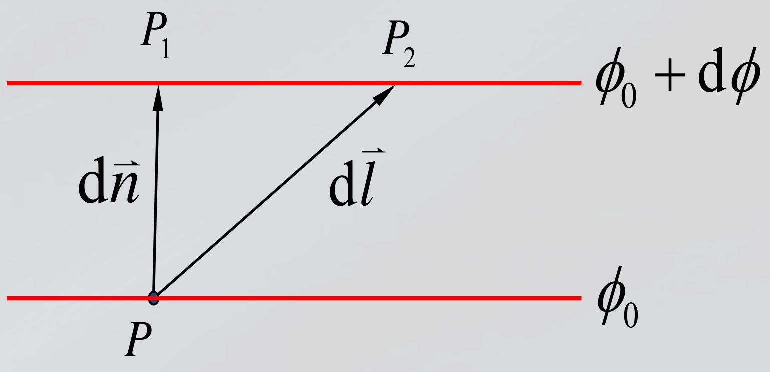
2. 标量场梯度的定义



$\dfrac{\Delta H}{\Delta l}$ 空间变化率 $\dfrac{\Delta H}{\Delta n}$ 最大的空间变化率

2. 标量场梯度的定义

标量场的场函数为 $\phi(x,y,z,t)$



a.方向导数:

$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}$ 空间变化率，称为方向导数。

$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}$ 为最大的方向导数。

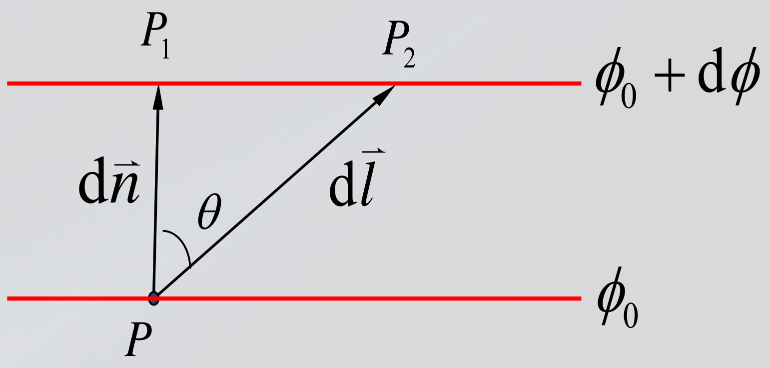
思考：什么情况下，方向导数为零呢?

$\mathrm{d}\phi$ 为零，即等值面上任意线段上的方向导数为零。

b.梯度定义

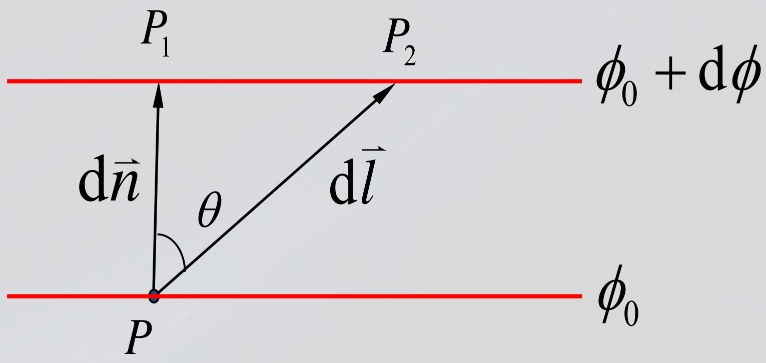
定义：标量场中某点梯度的大小为该点最大的方向导数，其方向为该点所在等值面的法线方向。

数学表达式：$\mathrm{grad}\phi = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n$



c.梯度的计算:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\cos\theta = \overset{\text{梯度}}{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n}\cdot\hat{a}_l$$



$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{grad}\phi\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

在直角坐标系中:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{a}_x + \mathrm{d}y\hat{a}_y + \mathrm{d}z\hat{a}_z$$

所以:

$$\boxed{\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z}$$

梯度也可表示:

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi$$

例如：已知 $\phi(x,y,z)=3x^2yz^3$

求：P(1,2,1)点的梯度。

解：根据梯度计算公式

$$\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$=6xyz^3\hat{a}_x+3x^2z^3\hat{a}_y+9x^2yz^2\hat{a}_z$$

$$\mathrm{grad}\phi\big|_P=12\hat{a}_x+3\hat{a}_y+18\hat{a}_z$$

在不同的坐标系中，梯度的计算公式：

在直角坐标系中：

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$$

在柱坐标系中：

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{\partial\phi}{r\partial\varphi}\hat{a}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$$

在球坐标系中：

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{a}_R + \frac{\partial\phi}{R\partial\theta}\hat{a}_\theta + \frac{\partial\phi}{R\sin\theta\partial\varphi}\hat{a}_\varphi$$

在任意正交曲线坐标系中：坐标变量 (u_1, u_2, u_3)**，拉梅系数** (h_1, h_2, h_3)

$$\boxed{\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1}\hat{a}_{u1} + \frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2}\hat{a}_{u2} + \frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}\hat{a}_{u3}}$$

小结:

1. 标量场的等值面

2. 标量场梯度的定义 $\mathrm{grad}\phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n$

3. 标量场梯度的计算 $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1}\hat{a}_{u1} + \frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2}\hat{a}_{u2} + \frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}\hat{a}_{u3}$

1.6 矢量场的散度

1. 矢量场的矢线（场线）

2. 矢量场的通量

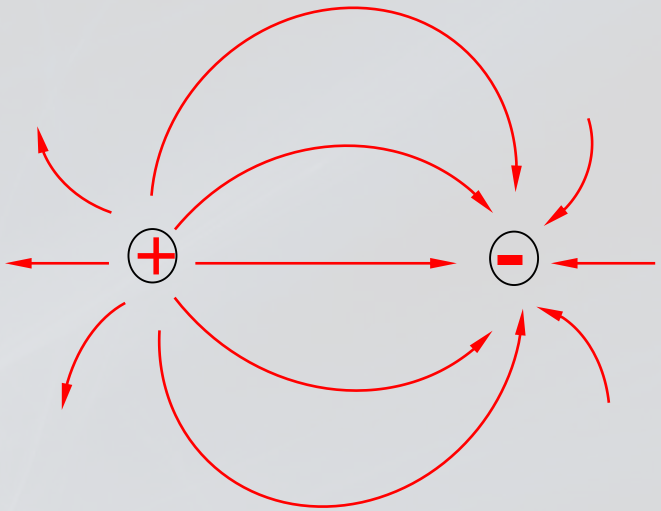
3. 散度的定义

4.散度的计算

5.散度定理

1. 矢量场的矢线（场线）：

在矢量场中，若一条曲线上每一点的切线方向与场矢量在该点的方向重合，则该曲线称为矢线。

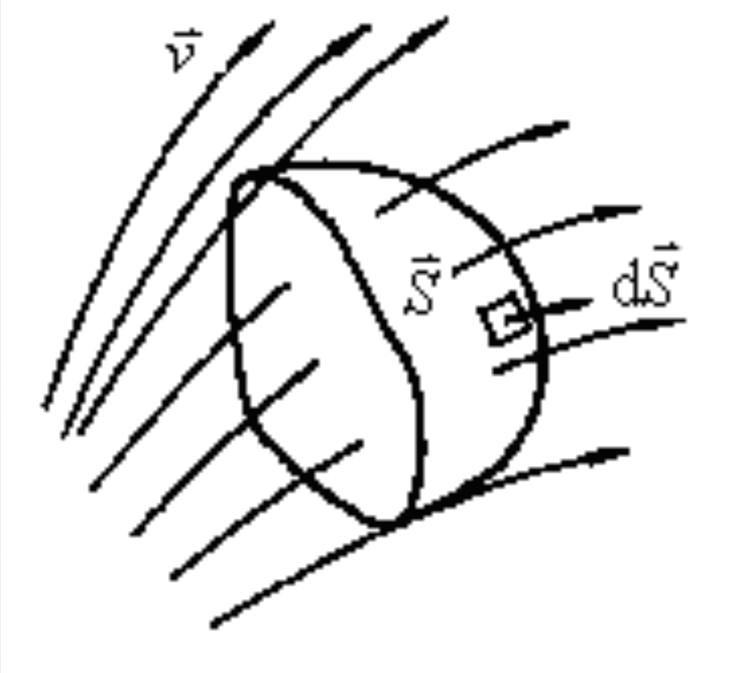


2. 通量：

定义： 如果在该矢量场中取一曲面S，通过该曲面的矢线量称为通量。

表达式： $$\psi = \int_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

若曲面为闭合曲面： $$\psi = \oint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



讨论：

a. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi > 0$

说明穿出闭合面的通量大于穿入的通量，意味着闭合面内存在正的通量源。

b. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi < 0$

说明穿入的通量大于穿出的通量，那么必然有一些矢线在曲面内终止了，意味着闭合面内存在负源或称沟。

c. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi = 0$

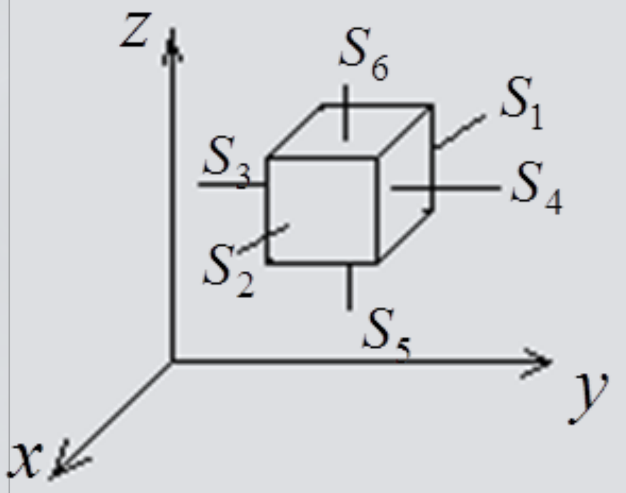
说明穿入闭合曲面的通量等于穿出的通量。

3. 散度的定义：

定义：矢量场中某点的通量密度称为该点的散度。

表达式： $\operatorname{div}\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$

4.散度的计算：

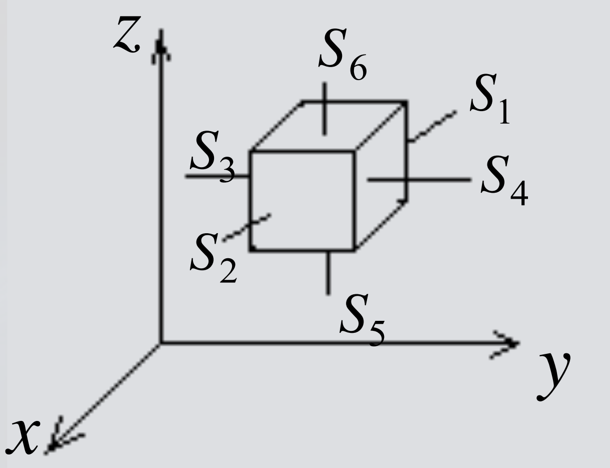


在直角坐标系中，如图做一封闭曲面，该封闭曲面由六个平面组成。

$$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_4 + \int_{S_5} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_5 + \int_{S_6} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_6$$

4.散度的计算：

在直角坐标系中，如图做一封闭曲面，该封闭曲面由六个平面组成。



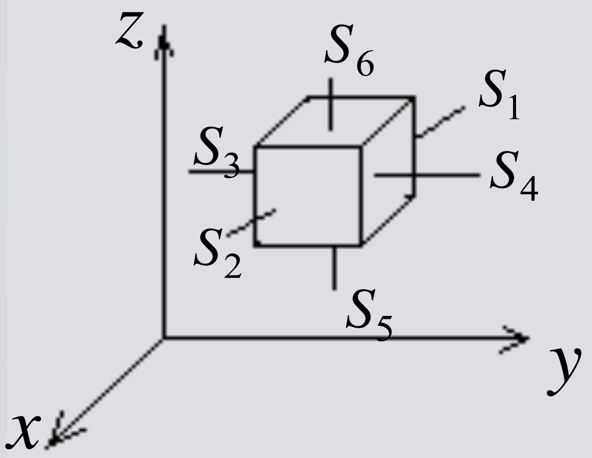
矢量场表示为：

$$\vec{F} = F_x\hat{a}_x + F_y\hat{a}_y + F_z\hat{a}_z$$

$$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_4 + \int_{S_5} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_5 + \int_{S_6} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_6$$

在 x方向上：计算穿过 S_1和 S_2面的通量

$$\vec{F} = F_x\hat{a}_x + F_y\hat{a}_y + F_z\hat{a}_z \qquad \mathrm{d}\vec{S}_1 = \mathrm{d}y\mathrm{d}z(-\hat{a}_x)$$



$$\int_{S_1} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_1 = F_x(x_1)\hat{a}_x \cdot \Delta y\Delta z(-\hat{a}_x)$$

$$= -F_x(x_1)\Delta y\Delta z$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_2 = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\hat{a}_x$$

$$\int_{S_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_2 = F_x(x_2)\hat{a}_x \cdot \Delta y\Delta z\hat{a}_x$$

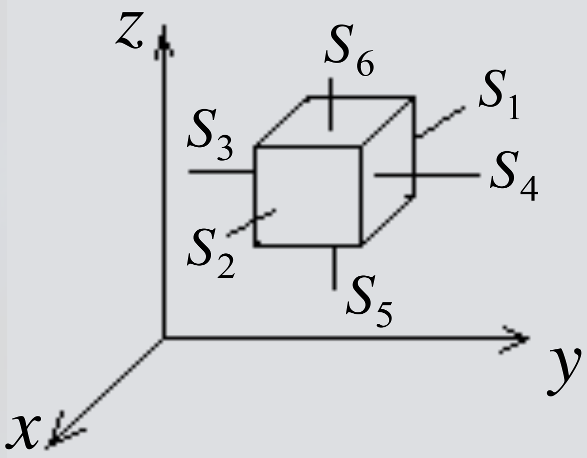
其中： $x_2 = x_1 + \Delta x$

$$= F_x(x_1 + \Delta x)\Delta y\Delta z$$

因为: $$F_x(x_1+\Delta x)=F_x(x_1)+\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x$$

则: $$\int_{S_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2=F_x(x_1)\Delta y\Delta z+\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

已知: $$\int_{S_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1=-F_x(x_1)\Delta y\Delta z$$



在 x 方向上的总通量:

$$\int_{S_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1+\int_{S_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同理：在 y方向上,穿过S_3和 S_4面的总通量

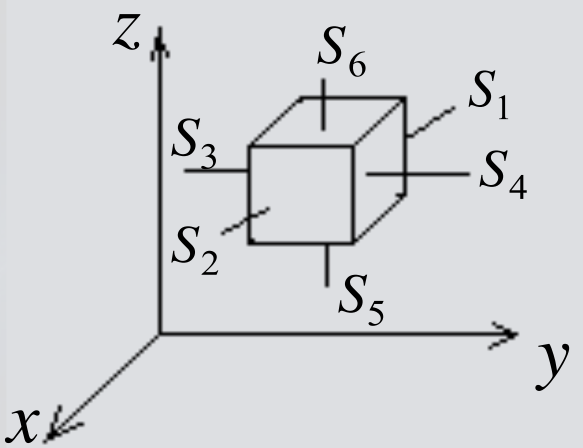
$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_4 = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

在 z 方向上,穿过 S_5和 S_6面的总通量：

$$\int_{S_5} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_5 + \int_{S_6} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_6 = \frac{\partial F_Z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

整个封闭曲面的总通量：

$$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$



该闭合曲面所包围的体积：$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

散度：$\mathrm{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

通常散度表示为：$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

5.散度定理：

$$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}V$$

物理含义：穿过一封闭曲面的总通量等于矢量散度的体积分。

常用坐标系中，散度的计算公式

直角坐标系中:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

圆柱坐标系中:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r}\frac{\partial(F_r r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

球坐标系中:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2F_R)}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

正交曲线坐标系中：$\nabla\cdot\vec{F}=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial\left(F_{u_1}h_2h_3\right)}{\partial u_1}+\dfrac{\partial(F_{u_2}h_1h_3)}{\partial u_2}+\dfrac{\partial(F_{u_3}h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$

常用坐标系中，坐标变量和拉梅系数

直角坐标系中：坐标变量 (x, y, z) 拉梅系数 $(1,1,1)$

圆柱坐标系中：坐标变量 (r,φ,z) 拉梅系数 $(1,r,1)$

球坐标系中： 坐标变量 (R,θ,φ) 拉梅系数 $(1,R,R\sin\theta)$

正交曲线坐标系中：坐标变量 (u_1,u_2,u_3) 拉梅系数 (h_1,h_2,h_3)

小结：

1. 矢量场的矢线（场线）

2. 矢量场的通量 $\psi = \int_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

3. 散度的定义 $\mathrm{div}\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$

4.散度的计算 $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\dfrac{\partial\left(F_{u_1} h_2 h_3\right)}{\partial u_1} + \dfrac{\partial(F_{u_2} h_1 h_3)}{\partial u_2} + \dfrac{\partial(F_{u_3} h_1 h_2)}{\partial u_3}\right]$

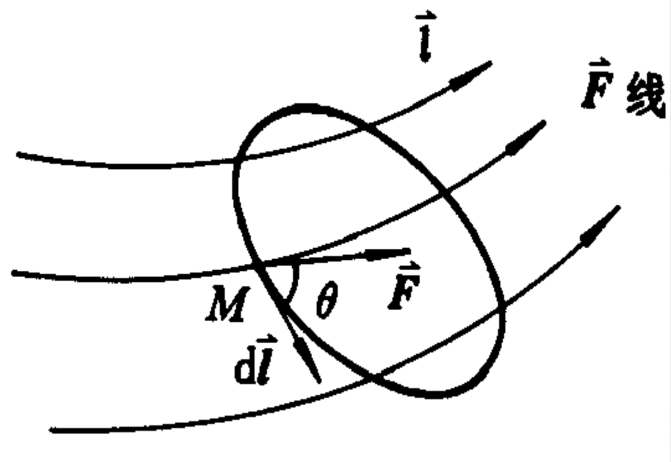
5.散度定理 $\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}\,\mathrm{d}V$

1.7 矢量场的旋度

1. 矢量场的环量
2. 旋度的定义
3. 旋度的计算
4. 斯托科斯定理

1. 环量：

在矢量场中，任意取一闭合曲线，将矢量沿该曲线积分称之为环量。



$$C = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

可见：环量的大小与环面的方向有关。

2. 旋度的定义:

一矢量其大小等于某点最大环量密度，方向为该环的法线方向，那么该矢量称为该点矢量场的旋度。

表达式：

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} [\hat{a}_n \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,]_{\max}$$

旋度可用符号表示：

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

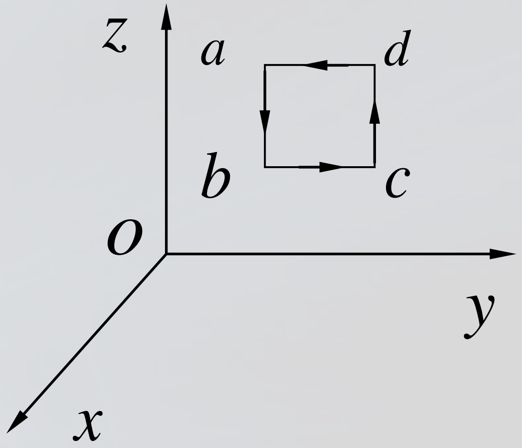
3. 旋度的计算：

以直角坐标系为例，一旋度矢量可表示为：

$$\nabla\times\vec{F}=(\nabla\times\vec{F})_x\hat{a}_x+(\nabla\times\vec{F})_y\hat{a}_y+(\nabla\times\vec{F})_z\hat{a}_z$$

其中：$(\nabla\times\vec{F})_x$为 x 方向的环量密度。

$$\boxed{(\nabla\times\vec{F})_x=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S_x}}$$

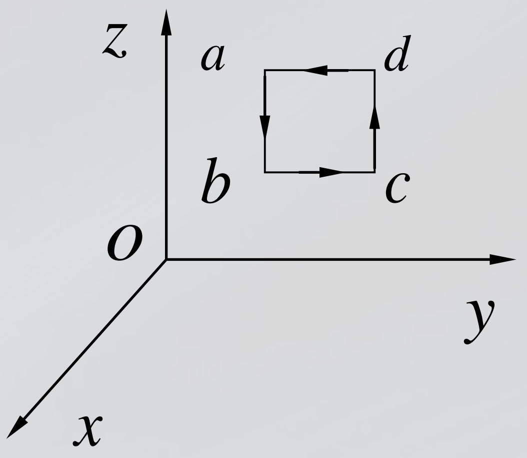


其中：

$$\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{l_{ab}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{ab}+\int_{l_{bc}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{bc}+\int_{l_{cd}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{cd}+\int_{l_{da}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{da}$$

其中：$d\vec{l}_{ab} = dz(-\hat{a}_z)$　$d\vec{l}_{bc} = dy\hat{a}_y$

$d\vec{l}_{cd} = dz\hat{a}_z$　$d\vec{l}_{da} = dy(-\hat{a}_y)$



所以：

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{l_{ab}} \vec{F}\cdot d\vec{l}_{ab} = -F_z\Delta z \\
&\int_{l_{bc}} \vec{F}\cdot d\vec{l}_{bc} = F_y\Delta y \\
&\int_{l_{cd}} \vec{F}\cdot d\vec{l}_{cd} = \boxed{(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y)}\Delta z \\
&\int_{l_{da}} \vec{F}\cdot d\vec{l}_{da} = -\boxed{(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta z)}\Delta y
\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \oint_{l_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\Delta y\Delta z$$

在 x 方向的环量密度

$$(\nabla\times\vec{F})_x=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{l_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S_x} \Longleftarrow \left\{\begin{array}{l}\oint_{l_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z \\ \Delta S_x=\Delta y\Delta z\end{array}\right.$$

可得：

$$(\nabla\times\vec{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}$$

同理：

$$(\nabla\times\vec{F})_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad (\nabla\times\vec{F})_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

旋度公式：

$$\boxed{\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z}$$

旋度公式：

$$\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

为了便于记忆，将旋度的计算公式写成下列形式:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

类似地，可以推导出在广义正交坐标系中旋度的计算公式：

$$\boxed{\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix}}$$

圆柱坐标系：

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

4. 斯托克斯定理：

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

物理含义：

一个矢量场旋度的面积分等于该矢量沿此曲面周界的曲线积分。

小 结：

1. 矢量场的环量 $$C = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2. 旋度的定义 $$\mathrm{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} [\hat{a}_n \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,]_{\max}$$

3. 旋度的计算 $$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

4. 斯托科斯定理 $$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$