2.2 解析函数与调和函数的关系

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 4 日

目录

2.2.1 共轭调和函数的求法

我们已经知道解析函数的实部和虚部是由 C – R 条件联系在一起，那我们对解析函数的实部和虚部能有进一步的认识吗?

2.2.1 共轭调和函数的求法

我们已经知道解析函数的实部和虚部是由 C – R 条件联系在一起, 那我们对解析函数的实部和虚部能有进一步的认识吗?

设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 内解析, 于是在 D 内 C – R 条件

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

成立.

2.2.1 共轭调和函数的求法

我们已经知道解析函数的实部和虚部是由 C – R 条件联系在一起, 那我们对解析函数的实部和虚部能有进一步的认识吗?

设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 内解析, 于是在 D 内 C – R 条件

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

成立. 对上面两式分别关于 x 和 y 求偏导数得（假设有二阶连续偏导数）

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy},$$

即

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

2.2.1 共轭调和函数的求法

我们已经知道解析函数的实部和虚部是由 C – R 条件联系在一起, 那我们对解析函数的实部和虚部能有进一步的认识吗?

设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析, 于是在 D 内 C – R 条件

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

成立. 对上面两式分别关于 x 和 y 求偏导数得（假设有二阶连续偏导数）

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy},$$

即

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

同样可得

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

定义 2.5 (调和函数)

若二元实函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，并且满足二维**拉普拉斯方程**

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \tag{2.4}$$

则称 $\varphi(x, y)$ 是**区域 D 内的调和函数**.

定义 2.5 (调和函数)

若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数, 并且满足二维**拉普拉斯方程**

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \tag{2.4}$$

则称 $\varphi(x,y)$ 是**区域** D **内的调和函数**.

简而言之, 调和函数就是二维拉普拉斯方程的解.

定义 2.6 (共轭调和函数)

若 u 和 v 都是区域 D 内的调和函数, 并满足 C–R 条件 $u_x = v_y, u_y = -v_x$, 则称 v 是 u 在**区域 D 内的共轭调和函数**.

不同于复数共轭的概念, 注意在上述定义中, 因为两个方程差了一个负号, u 与 v 的地位并不是对称的, 即当 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数, u 并不是 v 在区域 D 内的共轭调和函数.

定理 2.4

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在单连通区域 D 内解析，当且仅当 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

证　必要性. 由前面的推导可知 u, v 均满足拉普拉斯方程 (假设有二阶连续偏导数), 且 u, v 满足 C – R 条件, 所以 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

定理 2.4

函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在单连通区域 D 内解析, 当且仅当 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

证 必要性. 由前面的推导可知 u, v 均满足拉普拉斯方程 (假设有二阶连续偏导数), 且 u, v 满足 C – R 条件, 所以 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

充分性. 如果 v 是 u 的共轭调和函数, 则 u 和 v 满足 C–R 条件, 并且由于 u 和 v 都是调和函数, 自然有一阶连续偏导数. 于是由推论 2.1 得证. ∎

定理2.4告诉我们给定一个调和函数 u, 只要找出它的共轭调和函数 v (这总是可以做到的, 见教材 26 页最后一段), 就可以构造一个解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$.

例 2.5

验证 $u = x^3 - 3xy^2$ 是整个平面上的调和函数, 并求以它为实部的解析函数.

解法一　因为

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy,$$

$$u_{xx} = 6x, \qquad u_{yy} = -6x.$$

故 u 是整个平面上的调和函数.

例 2.5

验证 $u = x^3 - 3xy^2$ 是整个平面上的调和函数, 并求以它为实部的解析函数.

解法一　因为

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy,$$

$$u_{xx} = 6x, \qquad u_{yy} = -6x.$$

故 u 是整个平面上的调和函数.

要求以 u 为实部的解析函数, 先利用 C – R 条件中的一个得

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2.$$

把 x 看作参数, 于是可求得

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 3x^2y - y^3 + \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是待定的一元实函数.

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 3x^2y - y^3 + \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是待定的一元实函数. 为确定 $\varphi(x)$, 再利用 C – R 条件中的另一个方程

$$v_x = 6xy + \varphi'(x) = -u_y = 6xy,$$

得 $\varphi'(x) = 0$. 于是 $\varphi(x) = C$.

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 3x^2y - y^3 + \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是待定的一元实函数. 为确定 $\varphi(x)$, 再利用 C – R 条件中的另一个方程

$$v_x = 6xy + \varphi'(x) = -u_y = 6xy,$$

得 $\varphi'(x) = 0$. 于是 $\varphi(x) = C$. 因此 $v = 3x^2y - y^3 + C$, 而所求解析函数为

$$f(z) = u + \mathrm{i}v = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C).$$

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 3x^2y - y^3 + \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是待定的一元实函数. 为确定 $\varphi(x)$, 再利用 C – R 条件中的另一个方程

$$v_x = 6xy + \varphi'(x) = -u_y = 6xy,$$

得 $\varphi'(x) = 0$. 于是 $\varphi(x) = C$. 因此 $v = 3x^2y - y^3 + C$, 而所求解析函数为

$$f(z) = u + \mathrm{i}v = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C).$$

因为解析函数一定可以写成复变量 z 的表达式, 我们令 $y = 0$ 得 $f(x) = x^3 + \mathrm{i}C$, 于是有 $f(z) = z^3 + \mathrm{i}C$.

解法二　利用公式 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$ 可得

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + \mathrm{i}6xy.$$

解法二　利用公式 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$ 可得

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + \mathrm{i}6xy.$$

因为解析函数的导函数还是解析函数（这是下一章中的结论）．于是 $f'(z)$ 可以用只含 z 的表达式表示. 在上式中令 $y = 0$, 可得 $f'(x) = 3x^2$, 因此有

$$f'(z) = 3z^2.$$

解法二　利用公式 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$ 可得

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + \mathrm{i}6xy.$$

因为解析函数的导函数还是解析函数（这是下一章中的结论）. 于是 $f'(z)$ 可以用只含 z 的表达式表示. 在上式中令 $y = 0$, 可得 $f'(x) = 3x^2$, 因此有

$$f'(z) = 3z^2.$$

由此可得 $f(z) = z^3 + C$, C 为任意复常数.

解法二　利用公式 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$ 可得

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + \mathrm{i}6xy.$$

因为解析函数的导函数还是解析函数（这是下一章中的结论）. 于是 $f'(z)$ 可以用只含 z 的表达式表示. 在上式中令 $y = 0$, 可得 $f'(x) = 3x^2$, 因此有

$$f'(z) = 3z^2.$$

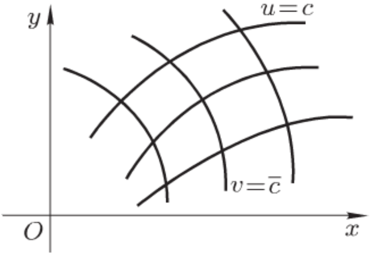
由此可得 $f(z) = z^3 + C$, C 为任意复常数. 但由于 $f(z)$ 的实部是给定的, 所以 C 的实部只能为零, 所以最终结果应修正为 $f(z) = z^3 + \mathrm{i}C_1$, C_1 为任意实常数. ∎

2.2.2 共轭调和函数的几何意义

设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 上的解析函数, 且 $f'(z) \neq 0$, 则容易证明由

$$u(x,y) = c, \quad v(x,y) = \bar{c}$$

确定的两族平面曲线是相互正交的.

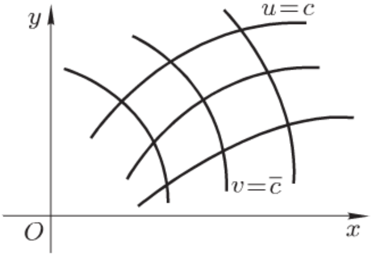


2.2.2 共轭调和函数的几何意义

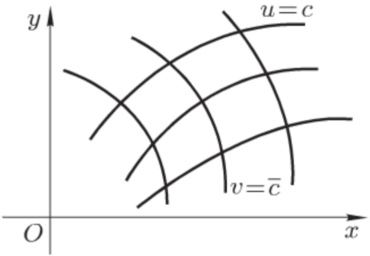
设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 上的解析函数，且 $f'(z) \neq 0$，则容易证明由

$$u(x,y) = c, \quad v(x,y) = \bar{c}$$

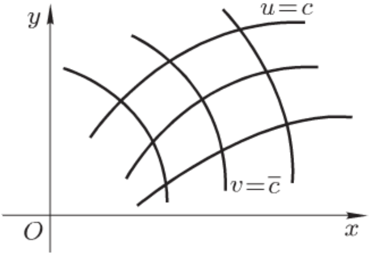
确定的两族平面曲线是相互正交的.



- 两条曲线在交点处的各自的切向量的夹角称为这两条曲线在交点处的夹角.
- 若两条曲线在它们的交点处的夹角为直角，则称这两条曲线相互正交.

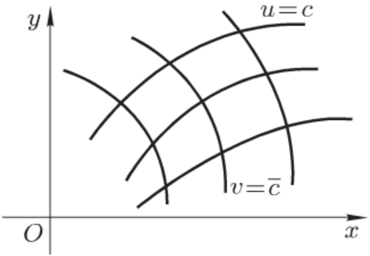


给定一点 $(x, y) \in D$, 则两族曲线过该点的各有一条曲线. 这两条曲线在该点处的法向量分别为 (u_x, u_y) 和 (v_x, v_y),



给定一点 $(x, y) \in D$, 则两族曲线过该点的各有一条曲线. 这两条曲线在该点处的法向量分别为 (u_x, u_y) 和 (v_x, v_y), 而这两个法向量的内积为

$$u_x v_x + u_y v_y = v_y(-u_y) + u_y v_y = 0.$$



给定一点 $(x, y) \in D$, 则两族曲线过该点的各有一条曲线. 这两条曲线在该点处的法向量分别为 (u_x, u_y) 和 (v_x, v_y), 而这两个法向量的内积为

$$u_x v_x + u_y v_y = v_y(-u_y) + u_y v_y = 0.$$

由解析几何的知识, 两个向量正交的充要条件是这两个向量的内积为零. 所以我们已经证明了法向量 (u_x, u_y) 和 (v_x, v_y) 相互正交. 由此可知, 两条曲线在点 (x, y) 的切向量是相互正交的.

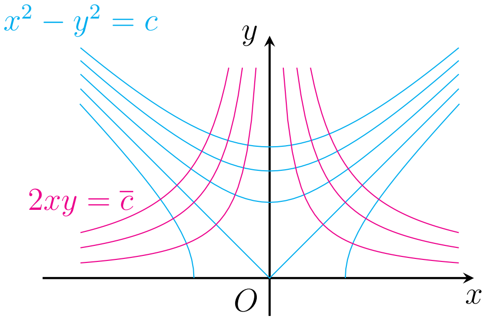
例 2.6

考察在复平面上的解析函数

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy).$$

其实部与虚部分别为

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$



作业

习题二

8. 由下列条件求解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$, 并写出它关于 z 的表达式:

   (1) $u = x^2 - y^2 + xy, f(\mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i}$;

9. 证明 xy^2 不能成为一个解析函数的实部.