1.3 复球面与无穷远点

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

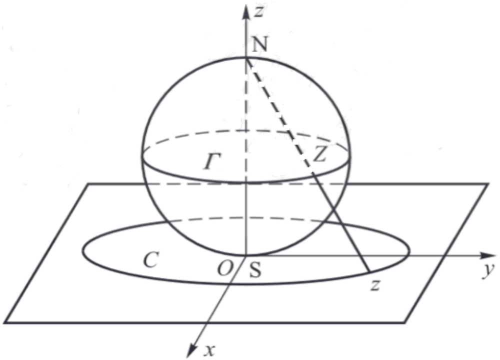
2020 年 2 月 25 日

目录

1.3.1 复球面

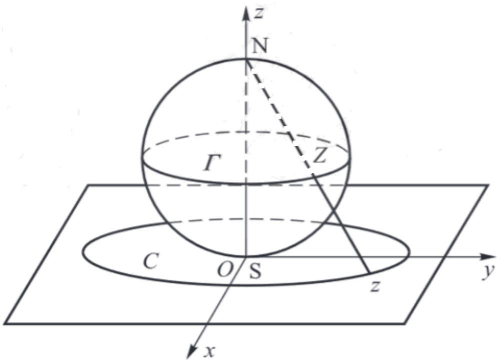
复数的又一几何模型：球面.

球极射影对应关系：取一个在原点 O 与复平面相切的球面，通过点 O 作一垂直于 z 平面的直线与球面交于点 N，点 N 称为北极，点 O 称为南极. 现在用直线段将 N 与复平面上的一点 z 相连，则此直线段会与球面有一交点 Z. 这样除了北极点 N 外，球面上的点与复平面上的点就被一一对应起来了.



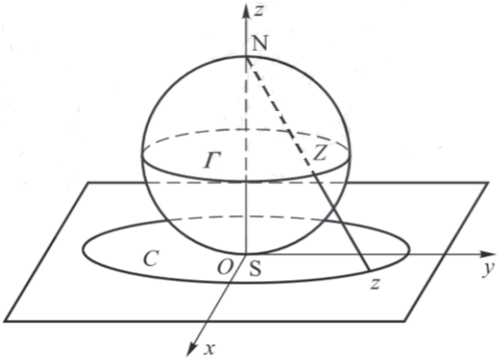
无穷远点

观察图中平面上的圆周 C, 它与球面上的圆周 Γ（即纬线）对应. 当圆周 C 的半径越来越大时, 圆周 Γ 逐渐向北极 N 收缩. 当圆周 C 的半径为无穷大时, 圆周 Γ 收缩为北极 N.



无穷远点

观察图中平面上的圆周 C, 它与球面上的圆周 Γ（即纬线）对应. 当圆周 C 的半径越来越大时, 圆周 Γ 逐渐向北极 N 收缩. 当圆周 C 的半径为无穷大时, 圆周 Γ 收缩为北极 N.



为了使得球面与平面上的点一一对应, 我们在平面上添加一个模为无穷大的假想点, 它与北极 N 对应. 这个假想点称为无穷远点, 记为 ∞.

扩充复平面和复球面

- 复平面 $\mathbb{C}$ 加上无穷远点 ∞ 后, 称为扩充复平面.

扩充复平面和复球面

- 复平面 $\mathbb{C}$ 加上无穷远点 ∞ 后，称为扩充复平面.
- 通过球极射影，与扩充复平面建立了一一对应关系的球面，称为复球面.

1.3.2 闭平面上的几个概念

在微积分里, 我们对实数引入了正无穷 $+\infty$ 和负无穷 $-\infty$. 虽然对实数有正无穷 $+\infty$ 和负无穷 $-\infty$ 之分, 但读者要时刻牢记在复数中只有一个 ∞. 在复数范围内, 正无穷 $+\infty$ 和负无穷 $-\infty$ 都要被视为 ∞.

其实在微积分里, 正无穷 $+\infty$ 和负无穷 $-\infty$ 也是被统称为 ∞ 的.

本课程中以后出现的正无穷 $+\infty$ 和负无穷 $-\infty$, 在不加说明的情况下, 应按实数意义下的含义理解.

由于无穷远点 ∞ 与普通的复数有着本质的区别, 所以对涉及 ∞ 的运算, 按无穷大量和无穷小量的极限运算结果（参考微积分中的相关概念）, 我们特别做出如下规定：

(1) $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}$ 无意义;

(2) $a \neq \infty$ 时, $a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, \dfrac{\infty}{a} = \infty, \dfrac{a}{\infty} = 0.$

(3) $a \neq 0$ 时, $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, \dfrac{a}{0} = \infty.$

(4) ∞ 的实部、虚部和辐角都无意义, $|\infty| = +\infty.$

无穷远点的邻域

- 在扩充复平面上，无穷远点 ∞ 的邻域被定义为 $|z| > r\,(r \geq 0)$.

  由球极射影法可知，无穷远点 ∞ 对应着球面的北极点，无穷远点 ∞ 的邻域对应着球面上某一纬度到北极点的球面区域.

无穷远点的邻域

- 在扩充复平面上, 无穷远点 ∞ 的邻域被定义为 $|z| > r\,(r \geq 0)$.

  由球极射影法可知, 无穷远点 ∞ 对应着球面的北极点, 无穷远点 ∞ 的邻域对应着球面上某一纬度到北极点的球面区域.

- 无穷远点 ∞ 的空心邻域被定义为 $r < |z| < +\infty\,(r \geq 0)$.

无穷远点的邻域

- 在扩充复平面上, 无穷远点 ∞ 的邻域被定义为 $|z| > r\,(r \geq 0)$.

  由球极射影法可知, 无穷远点 ∞ 对应着球面的北极点, 无穷远点 ∞ 的邻域对应着球面上某一纬度到北极点的球面区域.

- 无穷远点 ∞ 的空心邻域被定义为 $r < |z| < +\infty\,(r \geq 0)$.

  为了满足应用的需要, 我们补充规定:

- 整个扩充复平面 $|z| \leq +\infty$ 是无穷远点 ∞ 的一个邻域;
- 复平面 $|z| < +\infty$ 是无穷远点 ∞ 的一个空心邻域.

闭平面名称的来历

将上一节定义的边界点的概念应用到无穷远点 ∞ 上, 就可得出 ∞ 是复平面的唯一的边界点.

闭平面名称的来历

将上一节定义的边界点的概念应用到无穷远点 ∞ 上, 就可得出 ∞ 是复平面的唯一的边界点.

原本平面是没有边界的, 平面上的点都是内点, 平面是一个开集. 在平面上加了无穷远点 ∞ 后, 就给平面加上了边界.

所以又称扩充复平面为闭平面、全平面, 而称原本的复平面为开平面.

闭平面名称的来历

将上一节定义的边界点的概念应用到无穷远点 ∞ 上, 就可得出 ∞ 是复平面的唯一的边界点.

原本平面是没有边界的, 平面上的点都是内点, 平面是一个开集. 在平面上加了无穷远点 ∞ 后, 就给平面加上了边界.

所以又称扩充复平面为闭平面、全平面, 而称原本的复平面为开平面.

今后如无特别说明, 提到复平面, 均指开平面.