5.2 利用留数计算实积分

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 4 月 13 日

对于被积函数的原函数不是初等函数或不易计算的一些实积分, 利用留数定理来计算常是一个有效的方法, 要点在于**将其转化为解析函数的周线积分**.

目录

5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的计算

形如有限和式

$$\sum_{j,k} a_{jk} x^j y^k$$

的二元（实或复）函数称为二元多项式函数.

5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的计算

形如有限和式

$$\sum_{j,k} a_{jk} x^j y^k$$

的二元（实或复）函数称为二元多项式函数. 当二元多项式函数中的一个自变量取定一个值后, 该二元多项式函数就是另外一个自变量的一元多项式函数.

5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的计算

形如有限和式

$$\sum_{j,k} a_{jk} x^j y^k$$

的二元（实或复）函数称为二元多项式函数. 当二元多项式函数中的一个自变量取定一个值后, 该二元多项式函数就是另外一个自变量的一元多项式函数.

可表示为两个二元多项式函数的比的形式的函数称为二元有理函数. 若 $R(x, y)$ 是关于 x 和 y 的二元有理函数, 则称 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 为三角有理函数.

在单位圆周 $|z| = 1$ 上，令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$，则有

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2},\ \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}},\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta.$$

在单位圆周 $|z| = 1$ 上，令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$，则有

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \ \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}, \ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta.$$

于是由计算复积分的参数方程法有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}. \tag{5.5}$$

在单位圆周 $|z| = 1$ 上, 令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, 则有

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \ \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}, \ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta.$$

于是由计算复积分的参数方程法有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}. \tag{5.5}$$

因为有理函数的和差积商仍是有理函数, 所以 $R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$ 是关于 z 的有理函数.

在单位圆周 $|z|=1$ 上, 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$, 则有

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}},\ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta.$$

于是由计算复积分的参数方程法有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}. \tag{5.5}$$

因为有理函数的和差积商仍是有理函数, 所以 $R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$ 是关于 z 的有理函数. 若它在 $|z|=1$ 上无极点, 则等式(5.5)右端的积分可用留数定理来计算.

在单位圆周 $|z|=1$ 上, 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi$, 则有

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \ \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}, \ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta.$$

于是由计算复积分的参数方程法有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}. \tag{5.5}$$

因为有理函数的和差积商仍是有理函数, 所以 $R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$ 是关于 z 的有理函数. 若它在 $|z|=1$ 上无极点, 则等式(5.5)右端的积分可用留数定理来计算.

显然, 等式(5.5)左端的积分的积分区间可被任一长度为 2π 的区间替换, 例如 $[-\pi,\pi]$.

例 5.8

计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \quad (0 < |p| < 1).$$

解　设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$1 - 2p\cos\theta + p^2 = 1 - p(z + z^{-1}) + p^2 = \frac{(z-p)(1-pz)}{z},$$

例 5.8

计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \ (0 < |p| < 1).$$

解 设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$1 - 2p\cos\theta + p^2 = 1 - p(z + z^{-1}) + p^2 = \frac{(z-p)(1-pz)}{z},$$

于是

$$I = \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-p)(1-pz)}.$$

例 5.8

计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \quad (0 < |p| < 1).$$

解　设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$1 - 2p\cos\theta + p^2 = 1 - p(z + z^{-1}) + p^2 = \frac{(z-p)(1-pz)}{z},$$

于是

$$I = \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-p)(1-pz)}.$$

记 $f(z) = \dfrac{1}{(z-p)(1-pz)}$, 在圆 $|z| < 1$ 内, 它只有 $z = p$ 为一阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z); p] = \left.\frac{1}{1 - pz}\right|_{z=p} = \frac{1}{1-p^2}.$$

所以由留数定理得

$$I = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{1-p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

$\blacksquare$

例 5.9

计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

解 设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{4z\,\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4+6z^2+1)}.$$

例 5.9

计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos^2\theta}.$$

解　设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{4z\,\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4 + 6z^2 + 1)}.$$

令 $w = z^2$, 则

$$\frac{4z\,\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4 + 6z^2 + 1)} = \frac{2\,\mathrm{d}w}{\mathrm{i}(w^2 + 6w + 1)}.$$

例 5.9

计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

解 设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{4z\,\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4+6z^2+1)}.$$

令 $w = z^2$, 则

$$\frac{4z\,\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4+6z^2+1)} = \frac{2\,\mathrm{d}w}{\mathrm{i}(w^2+6w+1)}.$$

对复积分做积分变量替换, 积分路径会随之而变. 新的积分路径是原积分路径在变量替换构成的映射下的像集.

由原积分路径的参数方程 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ 可得新积分路径的参数方程为 $w = z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$.

由原积分路径的参数方程 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ 可得新积分路径的参数方程为 $w = z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$. 由此可知当 z 沿单位圆周绕行一周时, w 沿单位圆周绕行两周, 所以

$$I = 2\oint_{|w|=1} \frac{2\,\mathrm{d}w}{\mathrm{i}(w^2+6w+1)} = -4\mathrm{i}\oint_{|w|=1} \frac{\mathrm{d}w}{w^2+6w+1}.$$

由原积分路径的参数方程 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ 可得新积分路径的参数方程为 $w = z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$. 由此可知当 z 沿单位圆周绕行一周时, w 沿单位圆周绕行两周, 所以

$$I = 2\oint_{|w|=1} \frac{2\,\mathrm{d}w}{\mathrm{i}(w^2+6w+1)} = -4\mathrm{i}\oint_{|w|=1} \frac{\mathrm{d}w}{w^2+6w+1}.$$

被积函数 $f(w) = (w^2+6w+1)^{-1}$ 在 $|w| < 1$ 内只有一个极点 $w = -3+2\sqrt{2}$.

$$\operatorname{Res}[f(w); -3+2\sqrt{2}\,] = \left.\frac{1}{w+3+2\sqrt{2}}\right|_{w=-3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

所以由留数定理有

$$I = -4\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi. \qquad \blacksquare$$

5.2.2 积分路径上无奇点的反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算

有些实积分虽不能像前面的积分类型一样可直接转化为围线积分，但通过人为构造后便可转化为围线积分．我们将考虑广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算问题．

5.2.2 积分路径上无奇点的反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算

有些实积分虽不能像前面的积分类型一样可直接转化为围线积分，但通过人为构造后便可转化为围线积分．我们将考虑广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算问题．

如果极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称之为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分的柯西主值，记作

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

回忆在微积分中，我们说 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分存在，如果

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，其中 a 是一个给定的实数.

回忆在微积分中，我们说 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分存在，如果

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，其中 a 是一个给定的实数。当 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分存在时，定义其为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

回忆在微积分中，我们说 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分存在，如果

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，其中 a 是一个给定的实数. 当 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分存在时，定义其为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

易知若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则其值必等于它的柯西主值，反之则不然.

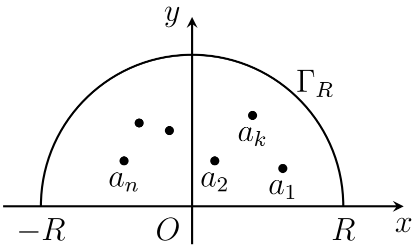
对实积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的柯西主值, 可按照下面的思路来进行计算:

(1) 先构造复变函数 $F(z)$, 记其在实轴上的限制为 $F(x)$, 若 $F(x)$ 是实值函数, 则可取 $F(x)=f(x)$; 若 $F(x)$ 是复值函数, 则可取 $\operatorname{Re}F(x)=f(x)$ 或 $\operatorname{Im}F(x)=f(x)$;

对实积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的柯西主值, 可按照下面的思路来进行计算:

(1) 先构造复变函数 $F(z)$, 记其在实轴上的限制为 $F(x)$, 若 $F(x)$ 是实值函数, 则可取 $F(x)=f(x)$; 若 $F(x)$ 是复值函数, 则可取 $\operatorname{Re}F(x)=f(x)$ 或 $\operatorname{Im}F(x)=f(x)$;

(2) 然后构造一条围线 C, 使区间 $[-R,R]$ 为 C 的一部分（例如右图）;

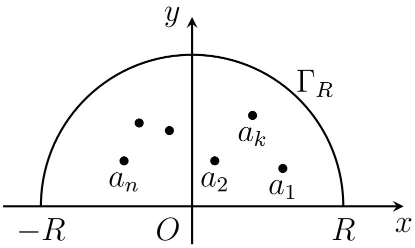


这里 Γ_R 表示 C 的不在实轴上的部分.

对实积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的柯西主值, 可按照下面的思路来进行计算:

(1) 先构造复变函数 $F(z)$, 记其在实轴上的限制为 $F(x)$, 若 $F(x)$ 是实值函数, 则可取 $F(x)=f(x)$; 若 $F(x)$ 是复值函数, 则可取 $\operatorname{Re}F(x)=f(x)$ 或 $\operatorname{Im}F(x)=f(x)$;

(2) 然后构造一条围线 C, 使区间 $[-R,R]$ 为 C 的一部分（例如右图）;



(3) 现在我们有

$$\int_{-R}^{R} F(x)\,\mathrm{d}x=\oint_C F(z)\,\mathrm{d}z-\int_{\Gamma_R} F(z)\,\mathrm{d}z,$$

这里 Γ_R 表示 C 的不在实轴上的部分.

(4) 令 $R \to +\infty$ 取极限, 可利用留数定理计算围线积分 $\oint_C F(z)\,\mathrm{d}z$, 所以只需估计出 $F(z)$ 在 Γ_R 上的积分值的极限, 便可完成计算.

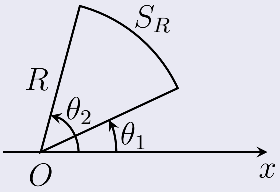
引理 5.1 (大圆弧引理)

设 $f(z)$ 沿圆弧 $S_R:\ z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,(\theta_1 \le \theta \le \theta_2, R$ 充分大$)$ 上连续, 且在 S_R 上一致成立

$$\lim_{R\to+\infty} zf(z) = a,$$

则

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)a.$$



证　因为

$$\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a = a\int_{S_R}\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

证 因为

$$\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a = a\int_{S_R}\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

于是有

$$\left|\int_{S_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a\right| = \left|\int_{S_R}\frac{zf(z)-a}{z}\,\mathrm{d}z\right|.$$

证 因为

$$\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a = a\int_{S_R}\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

于是有

$$\left|\int_{S_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a\right| = \left|\int_{S_R}\frac{zf(z)-a}{z}\,\mathrm{d}z\right|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$, 由已知条件 $\lim\limits_{R\to+\infty} zf(z)=a$, 存在 $R_0>0$, 使当 $R>R_0$ 时, 有不等式

$$|zf(z)-a| < \frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}, \quad z\in S_R.$$

证 因为

$$\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a = a\int_{S_R}\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

于是有

$$\left|\int_{S_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a\right| = \left|\int_{S_R}\frac{zf(z)-a}{z}\,\mathrm{d}z\right|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$, 由已知条件 $\lim\limits_{R\to+\infty} zf(z)=a$, 存在 $R_0>0$, 使当 $R>R_0$ 时, 有不等式

$$|zf(z)-a|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1},\quad z\in S_R.$$

从而利用积分估计定理, 我们有

$$\left|\int_{S_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)a\right| \le \frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\cdot\frac{R(\theta_2-\theta_1)}{R} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

定理 5.4

设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数, 且 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 高两次以上. 若 $f(z)$ 在实轴上无极点, 在上半 z 平面的全部极点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z); a_k].$$

定理 5.4

设 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数, 且 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 高两次以上. 若 $f(z)$ 在实轴上无极点, 在上半 z 平面的全部极点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z); a_k].$$

证 取上半圆周 $\Gamma_R: z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leq \theta \leq \pi)$ 作为辅助曲线. 由线段 $[-R, R]$ 和 Γ_R 构成一条周线 C_R. 取 R 充分的大, 使 $f(z)$ 在上半 z 平面的极点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都被包含在 C_R 内. 于是由留数定理有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z); a_k]. \tag{5.6}$$

因为

$$|zf(z)| = \left| z\frac{c_0z^m + c_1z^{m-1} + \cdots + c_m}{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \cdots + b_n} \right| = \left|\frac{z^{m+1}}{z^n}\right| \left|\frac{c_0 + c_1z^{-1} + \cdots + c_mz^{-m}}{b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_nz^{-n}}\right|,$$

所以当 $R \to +\infty$ 时, 在 Γ_R 上有

$$|zf(z)| \to 0.$$

令式(5.6)中的 $R \to +\infty$, 由引理5.1即得所证. $\blacksquare$

例 5.10

计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}\ (a>0).$$

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$ 一共有四个一阶极点

$$a_k = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}},\ k=0,1,2,3.$$

例 5.10

计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}\ (a>0).$$

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$ 一共有四个一阶极点

$$a_k = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}},\ k=0,1,2,3.$$

由推论 5.2 得

$$\operatorname{Res}[f(z);a_k]=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=a_k}=\frac{1}{4a_k^3}=\frac{a_k}{4a_k^4}=-\frac{a_k}{4a^4}.$$

例 5.10

计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4} \quad (a>0).$$

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$ 一共有四个一阶极点

$$a_k = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, \quad k=0,1,2,3.$$

由推论 5.2 得

$$\mathrm{Res}[f(z);a_k] = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=a_k} = \frac{1}{4a_k^3} = \frac{a_k}{4a_k^4} = -\frac{a_k}{4a^4}.$$

于是由定理5.4有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4} = -\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a^4}\left(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right) = -\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a^3}\sqrt{2}\,\mathrm{i} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4a^3}.$$

下面讨论 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$ 型积分的计算问题.

下面讨论 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$ 型积分的计算问题.

这类积分出现在对有理函数作傅里叶变换或逆变换的问题中. 它的计算思路与前面计算有理函数的积分相同, 我们需要解决的是它在上半圆周上的极限估计问题.

下面讨论 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$ 型积分的计算问题.

这类积分出现在对有理函数作傅里叶变换或逆变换的问题中. 它的计算思路与前面计算有理函数的积分相同, 我们需要解决的是它在上半圆周上的极限估计问题.

引理 5.2 (若尔当引理)

设函数 $f(z)$ 沿上半圆周 $\Gamma_R:\ z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0 \le \theta \le \pi, R$ 充分大$)$ 上连续, 且在 Γ_R 上一致成立

$$\lim_{R\to+\infty} f(z) = 0,$$

则

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z = 0\ (\lambda > 0).$$

证 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_0 > 0$, 使当 $R > R_0$ 时有

$$|f(z)| < \varepsilon,\ z \in \Gamma_R.$$

于是有

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq R\varepsilon\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

然后利用若尔当不等式

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta \leq \theta \ \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

得

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z\right| \leq 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2\lambda R\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\varepsilon}{\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda R}\right) < \frac{\pi\varepsilon}{\lambda}.$$

$\blacksquare$

利用若尔当引理，由完全类似于定理5.4的证明可得

定理 5.5

设 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数，且 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 高．若 $\lambda > 0$，且 $f(z)$ 在实轴上无极点，在上半 z 平面的极点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}; a_k\right].$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x,$$

所以实积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$$

都可转化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

进行计算, 只需分别取计算结果的实部或虚部即可.

例 5.11

计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (\lambda>0)$.

解 由定理5.5得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}}{1+z^2};\mathrm{i}\right] = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

于是有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

$\blacksquare$

例 5.12

计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0).$$

解 由定理5.5得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}; a\mathrm{i}\right] = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2} = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}.$$

于是有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\mathrm{e}^{-a}.$$

5.2.3 积分路径上有奇点的反常积分的计算

用证明引理5.1的方法还可证明

引理 5.3 (小圆弧引理)

设 $f(z)$ 沿圆弧 $S_r:\ z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (\theta_1\le\theta\le\theta_2, r$ 充分小) 上连续, 且在 S_r 上一致成立

$$\lim_{r\to 0}(z-a)f(z)=c,$$

则有

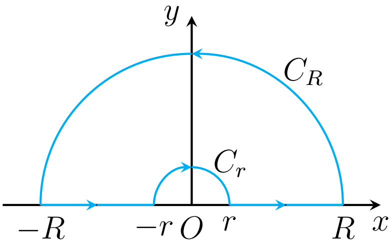
$$\lim_{r\to 0}\int_{S_r} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)c.$$

例 5.13

计算在力学、量子力学和近代光学中都会遇到的狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解 如图作辅助线 C_R 和 C_r, 这里 C_R 和 C_r 分别表示半圆周 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi, r < R)$, 记所作围线为 C. 考虑函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ 沿围线 C 的积分. 于是由柯西积分定理得



$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

即

$$\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5.7}$$

即

$$\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5.7}$$

由引理5.2和5.3分别有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi.$$

即

$$\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5.7}$$

由引理5.2和5.3分别有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{r\to0}\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi.$$

于是在式(5.7)中，令 $r \to 0, R \to +\infty$ 取极限可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

■

由本例的结果可立即推出

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi/2, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0, \\ -\pi/2, & \lambda < 0. \end{cases}$$

作业

习题五

5. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}\ (a>1)$; (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\sin^2\theta}\ (a>0)$;

6. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$; (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x\ (m>0,a>0)$; (5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$;