

# 第11周讲稿及作业

Edited by Hu Chen

OUC

May 12, 2020

# 目录

- 1 弦振动方程初值问题的达朗贝尔解法
- 2 齐次三维波动方程的初值问题
- 3 二维齐次波动方程的初值问题
- 4 非齐次三维波动方程的初值问题
- 5 作业

# 弦振动方程初值问题

我们将介绍使用行波法求解波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \quad (1a) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \quad (1b) \end{cases}$$

设方程(1a)的通解为(原方程可化为 $U_{\xi\eta} = 0$ , 采用变换 $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$ )

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (2)$$

其中  $f$  和  $g$  是两个任意的二阶连续可微函数. 把通解(2)代入初始条件(1b)中, 得

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) &= \psi(x). \end{aligned}$$

对上面的第二式从  $x_0$  到  $x$  积分得

$$-af(x) + ag(x) = \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + c,$$

其中  $c$  是一个任意常数. 从上面的两个关于  $f$  和  $g$  的函数方程中可以解出

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2a},$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2a}.$$

把它们代入通解(2)中便可得

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

将第一个积分的上下限交换后与第二个积分合并便可得一维波动方程初值问题的[达朗贝尔公式](#)

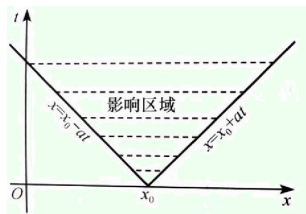
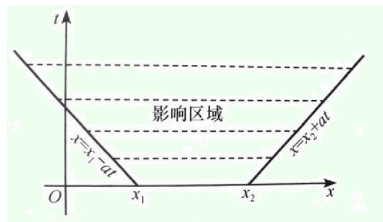
$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

# 影响区域

当初始数据只在有限区间 $[x_1, x_2]$ 内有扰动时, 随着时间的推移, 初始扰动所影响的范围会如何变化呢?

由于初始扰动必然以速度 $a$ 分别向左右两个方向传播, 所以经过时间 $t$ 后, 扰动影响的最大范围为

$$x_1 - at \leq x \leq x_2 + at, \quad t > 0.$$



一维波动方程中的二阶偏微分算子 $(\partial_t)^2 - (a\partial_x)^2$ 可分解为两个一阶偏微分算子 $\partial_t + a\partial_x$ 和 $\partial_t - a\partial_x$ . 由这两个一阶偏微分算子决定的偏微分方程的特征线分别为

$$\xi = x - at \quad \text{和} \quad \eta = x + at,$$

即

$$t = \frac{1}{a}(x - \xi) \quad \text{和} \quad t = -\frac{1}{a}(x - \eta).$$

我们称这两族特征线为**一维波动方程的特征线**.

$xt$  平面上任一斜率为 $1/a$ 或 $-1/a$ 的直线都是一维波动方程的特征线.

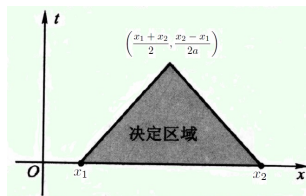
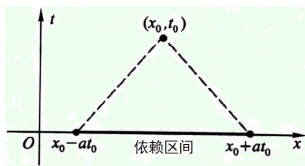
初始条件(1b)告诉我们初值 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分布在整个实数轴上. 而在实际问题中, 初值需要通过测量才能获得. 我们能测量出整个实数轴上的初值吗? 显然是不可能的.

当我们想知道解在点 $(x_0, t_0)$ 的值 $u(x_0, t_0)$ 时, 我们需要知道哪些初值?

能够对点 $(x_0, t_0)$ 处的解产生影响的初值, 就是在时段 $[0, t_0]$ 内, 对点 $x_0$ 产生过影响的初值. 由于影响的传播速度为 $a$ , 所以对点 $x_0$ 产生了影响的初值左边的最大范围为 $x \geq x_0 - at_0$ , 右边的最大范围为 $x \leq x_0 + at_0$ . 这一点可从达朗贝尔公式

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 + at_0) + \varphi(x_0 - at_0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\xi) d\xi.$$

得到证实.



如果我们只知道区间 $[x_1, x_2]$ 内的初值, 那么解能在多大范围内被确定?

我们看到特征线在对一维波动方程的研究中起着重要的作用. 行波法又称为**特征线法**.

## 求解半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, & (3a) \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, & (3b) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0. & (3c) \end{cases}$$

首先设解可表示为

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \quad (4)$$

把它代入初始条件(3c)中得

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \varphi(x), \quad x \geq 0, \\ -af'(x) + ag'(x) &= \psi(x), \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

对上面第二式从  $x_0$  到  $x$  积分得

$$-af(x) + ag(x) = \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + c, \quad x \geq 0,$$

其中  $c$  是一个任意常数.



从上面的方程中解出

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2a}, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2a}, \quad x \geq 0. \quad (6)$$

我们已经解出了  $f$  和  $g$  的解析表达式, 似乎把它们代入通解(4)中便可完成求解. 但这样的话, 与初值问题的解法就没什么两样, 而且边界条件(3b)完全没起作用. 问题出在哪里呢?

观察式(5)和(6), 它们其实只给出了  $f$  和  $g$  在正  $x$  轴上的解析表达式. 而从通解的表达式(4)中可知, 当  $x < at$  时, 我们还需要知道函数  $f(x)$  在负  $x$  轴上的解析表达式. 为此, 把通解(4)代入边界条件(3b)中得

$$f(-at) + g(at) = 0.$$

令  $\xi = -at$ , 则得

即

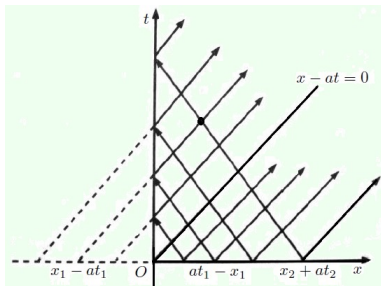
$$f(x) = -g(-x) = -\frac{1}{2}\varphi(-x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{-x} \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2a}, \quad x < 0. \quad (7)$$

当 $x \geq at$ 时, 把式(5)和(6)代入通解(4)中得

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi;$$

当 $0 \leq x < at$ 时, 把式(7)和(6)代入通解(4)中得

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$



在边界 $x = 0$ 处弦固定不动, 入射波和反射波的相位恰好相反 (相位差 $\pi$ ), 叠加为零, 这就是机械波的**半波损失**现象。

## 考虑齐次三维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (8)$$

一维空间中的波会沿着左右两个方向以同等速度传播, 而生活经验告诉我们三维空间中的波会向四面八方传播, 如果它们也以同等速度传播, 那么一个点振源产生的波在以它为心的球面上就会取相同的值, 即这样的波动具有球对称的性质. 这启发我们考虑具有球对称性质的波动现象, 即求三维波动方程的球对称的解.

引入球坐标系

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi, r \geq 0,$$

则三维波动方程在球坐标系 $(r, \theta, \varphi)$ 下可以表示为

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (9)$$

其中  $u = u(r, \theta, \varphi, t)$ . 若波动方程的解  $u$  是球对称的, 则它与  $\theta$  和  $\varphi$  无关, 即  $u$  只依赖于  $r$  和  $t$ . 因此当  $u$  是球对称函数时, 方程(9)可简化为

$$u_{tt} = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right).$$

在方程两边乘以  $r$ , 它可以重写为

$$(ru)_{tt} = a^2 (ru)_{rr}.$$

这表明  $ru$  作为一个整体满足一维波动方程, 因此可得它的通解为

$$ru(r, t) = F(r + at) + G(r - at), \quad r > 0, t > 0,$$

从而

$$u(r, t) = \frac{F(r + at) + G(r - at)}{r}, \quad r > 0, t > 0, \quad (10)$$

其中  $F, G$  是两个任意二阶连续可微函数.

当解  $u$  不是球对称函数时, 直接求解初值问题(8)并不容易. 但刚刚讨论过的球对称情形启发我们将一般情形的波动方程向球对称情形转化.

引入球面平均值函数

$$\bar{u}(M, r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} u(\xi, \eta, \zeta, t) dS,$$

它是函数  $u(M, t) = u(x, y, z, t)$  在以点  $M(x, y, z)$  为中心,  $r$  为半径的球面  $S_r^M$  上的平均值. 可以证明  $r\bar{u}$  满足一维波动方程

$$(r\bar{u})_{tt} = a^2(r\bar{u})_{rr}.$$

从初值问题(8)出发我们可以构造如下的半无界问题

$$\begin{cases} (r\bar{u})_{tt} = a^2(r\bar{u})_{rr}, & r > 0, t > 0, \\ (r\bar{u})|_{r=0} = 0, & t \geq 0, \\ (r\bar{u})|_{t=0} = r\bar{\varphi}(M, r), (r\bar{u})_t|_{t=0} = r\bar{\psi}(M, r), & r \geq 0, \end{cases}$$

其中

$$\bar{\varphi}(M, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS, \quad \bar{\psi}(M, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^M} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS.$$

当  $0 \leq r \leq at$  时可得

$$\begin{aligned}\bar{u}(M, r, t) &= \frac{(r + at)\bar{\varphi}(M, r + at) + (r - at)\bar{\varphi}(M, at - r)}{2r} \\ &\quad + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} \rho \bar{\psi}(M, \rho) d\rho.\end{aligned}$$

当  $r \rightarrow 0$  时, 上式右端是  $0/0$  型极限, 所以利用洛必达法则可得

$$\begin{aligned}u(M, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(M, r, t) = \bar{\varphi}(M, at) + at\bar{\varphi}_r(M, at) + t\bar{\psi}(M, at) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [t\bar{\varphi}(M, at)] + t\bar{\psi}(M, at).\end{aligned}$$

由此可得初值问题

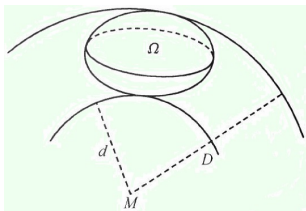
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (8)$$

的解

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS + \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS. \quad (11)$$

这就是三维波动方程初值问题(8)的解的泊松公式. 也有文献称它为基尔霍夫公式.

由三维波动方程的泊松公式(11)知, 解 $u(x, y, z, t)$ 只依赖于初值函数 $\varphi, \psi$ 在球面 $S_{at}^M$ 上的值. 我们称球面 $S_{at}^M$ 为点 $(x, y, z, t)$ 的**依赖区域**.



受初始扰动影响的所有的点为 $\{(M, t) \mid S_{at}^M \cap \Omega \text{非空}\}$ . 这个点集称为区域 $\Omega$ 的**影响区域**.

三维空间中的初始局部扰动对空间中的每一点只在有限时间内产生影响, 波的传播有清晰的前阵面和后阵面, 这种现象在物理上称为**惠更斯原理**或**无后效现象**.

区域 $\Omega$ 的**决定区域**为 $\{(M, t) \mid S_{at}^M \subset \Omega\}$ , 即依赖区域落入 $\Omega$ 内的所有点的集合.

## 把二维齐次波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (12)$$

的解 $u(x, y, t)$ 看作是高一维空间中的函数

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t).$$

由于 $\tilde{u}$ 与自变量 $z$ 无关, 因此它满足三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{zz}), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \varphi(x, y), \tilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ 也视作三维空间中 $(x, y, z)$ 的函数. 反之, 由于波动方程初值问题解的唯一性, 三维初值问题(13)的解必然是二维初值问题(12)的解. 这种利用高维波动方程初值问题的解得出低维波动方程初值问题的解的方法称为**降维法**.

降维法其实是一种延拓法, 是把低维空间中的问题延拓为高维空间中的问题.



由泊松公式(11), 三维初值问题(13)的解为

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{t} dS + \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{t} dS.$$

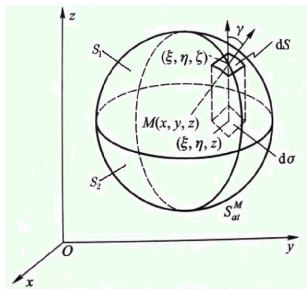
积分是在三维空间中的球面 $S_{at}^M$ 上进行的. 但由于 $\varphi, \psi$ 都与 $z$ 无关, 因此这个球面积分可以化为它在过球心与 $xy$ 平面平行的平面上的投影 $\Sigma_{at}^M$ :  $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq a^2 t^2$ 上的积分. 由于球面上的面积元素 $dS$ 和它的投影元素 $d\sigma$ 有如下关系:

$$d\sigma = |\cos \gamma| dS,$$

其中 $\gamma$ 为曲面面积微元 $dS$ 的某个切平面与平面面积微元 $d\sigma$ 之间的夹角.

易知

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}.$$



注意上下半球面的积分都可化成同一圆 $\Sigma_{at}^M$ 上的积分. 所以三维初值问题(13)的解为

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z, t) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta.\end{aligned}$$

注意它现在已经是与 $z$ 无关的函数了, 因此二维初值问题(12)的解为

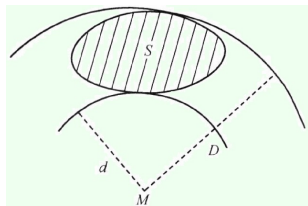
$$\begin{aligned}u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta.\end{aligned}\tag{14}$$

这就是二维波动方程初值问题(12)的解的泊松公式.

由二维波动方程的泊松公式

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (14)$$

知, 解 $u(x, y, t)$ 只依赖于初值函数 $\varphi, \psi$ 在圆 $\Sigma_{at}^M$ 上的值. 我们称圆 $\Sigma_{at}^M$ 为点 $(M, t)$  ( $M = (x, y)$ )的**依赖区域**.



从泊松公式(14)我们可以看出, 点 $M$ 从开始振动后就会一直振动下去. 平面上的初始局部扰动对平面上的每一点不是只在有限时间内产生影响, 而是有持久的后效, 这种波的传播现象称为**波的弥散**或**有后效现象**.

利用齐次化原理和泊松公式(11), **非齐次**初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解可以表示为

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \iint_{S_{a(t-\tau)}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{t - \tau} dS d\tau.$$

作代换  $\tau = t - \frac{r}{a}$ , 则上式变为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \iint_{S_r^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - r/a)}{r} dS dr \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{B_{at}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - r/a)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $B_{at}^M$  是以点  $M(x, y, z)$  为中心,  $at$  为半径的球体. 式(15)中的右端积分项常被称为**推迟势**, 它表明在  $t - r/a$  时刻在点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的外力作用  $f$  在  $t$  时刻才会影响到点  $M(x, y, z)$ , 延迟了  $r/a$  长的时间, 这是因为在点  $(\xi, \eta, \zeta)$  的外力作用  $f$  以速度  $a$  传到点  $M(x, y, z)$  需要时长  $r/a$ .

## 习题十作业

5. 一根无限长的弦与 $x$ 轴的正半轴重合，并处于平衡状态中，弦的左端点位于原点. 当 $t > 0$ 时左端点作微小振动 $A \sin \omega t$ ，试证弦的振动规律为

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & (t \leq \frac{x}{a}), \\ A \sin \omega \left(t - \frac{x}{a}\right) & (t > \frac{x}{a}), \end{cases}$$

9. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left( u_{xx} + \frac{2}{x} u_x \right) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (-\infty < x < +\infty), \\ (-\infty < x < +\infty), \end{matrix}$$

其中 $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  为充分光滑的已知函数.

提示：令 $v(x, t) = xu(x, t)$ .

### 15. 利用三维泊松公式求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u(x, y, z, 0) = x^3 + y^2z & (-\infty < x, y, z < +\infty), \\ u_t(x, y, z, 0) = 0 & (-\infty < x, y, z < +\infty). \end{cases}$$

### 17. 求解定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2(v_{xx} + v_{yy}) + c^2v, \\ v(x, y, 0) = \varphi(x, y) & (-\infty < x, y < +\infty), \\ v_t(x, y, 0) = \psi(x, y) & (-\infty < x, y < +\infty), \end{cases}$$

其中 $c$ 为已知正常数,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$ 为充分光滑的已知函数.

提示: 在三维波动方程中令 $u(x, y, z, t) = e^{\frac{cz}{a}} v(x, y, t)$ .