# 2.1 解析函数的概念及柯西 – 黎曼条件

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 3 月 2 日

# 目录

## 2.1.1 导数与微分

解析函数就是在区域内可导的复变函数. 为什么不直接叫可导函数而称为解析函数的原因, 我们将在随后的两章中逐步说明.

## 2.1.1 导数与微分

解析函数就是在区域内可导的复变函数. 为什么不直接叫可导函数而称为解析函数的原因, 我们将在随后的两章中逐步说明.

**定义 2.1 (复变函数导数的定义)**

设函数 $w = f(z)$ 在区域 $D$ 内有定义, 点 $z \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在且为有限复数, 则称函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ **可导**, 并称此极限值为函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的**导数**, 记作

$$f'(z_0) \quad \text{或} \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}.$$

如果记 $\Delta z = z - z_0$, 则导数的定义式也可写为下面的形式

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

这时总假定 $\Delta z$ 足够小以保证 $f(z_0 + \Delta z)$ 有定义. 因为是在内点处定义的导数, 这里对 $\Delta z$ 趋于零的方式没有任何限制.

如果记 $\Delta z = z - z_0$, 则导数的定义式也可写为下面的形式

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

这时总假定 $\Delta z$ 足够小以保证 $f(z_0 + \Delta z)$ 有定义. 因为是在内点处定义的导数, 这里对 $\Delta z$ 趋于零的方式没有任何限制.

实变函数的可导性和可微性等价, 复变函数呢?

## 定义 2.2 (复变函数可微的定义)

设函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内有定义. 若函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 处的改变量可表示为

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+\alpha(z)\Delta z,$$

其中 $A$ 为某个复常数, $\alpha(z)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(z)=0$, 则称**函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **处可微**, 称 $A\Delta z$ **为函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **的微分**.

### 定义 2.2 (复变函数可微的定义)

设函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内有定义. 若函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 处的改变量可表示为

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+\alpha(z)\Delta z,$$

其中 $A$ 为某个复常数, $\alpha(z)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(z)=0$, 则称**函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **处可微**, 称 $A\Delta z$ **为函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **的微分**.

用和高等数学中完全相同的方法, 可以证明: 复变函数可导和可微是等价的.

## 定义 2.2 (复变函数可微的定义)

设函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内有定义. 若函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0$ 处的改变量可表示为

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+\alpha(z)\Delta z,$$

其中 $A$ 为某个复常数, $\alpha(z)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(z)=0$, 则称**函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **处可微**, 称 $A\Delta z$ **为函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **的微分**.

用和高等数学中完全相同的方法, 可以证明: 复变函数可导和可微是等价的.

同样有: 如果函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处可导, 则定义2.2中的复常数 $A=f'(z_0)$.

**例 2.1**

问函数 $f(z)=\overline{z}$ 是否可导（或可微）？

解　函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处有定义.

**例 2.1**

问函数 $f(z) = \overline{z}$ 是否可导（或可微)?

**解** 函数 $f(z) = \overline{z}$ 在复平面上处处有定义. 按 $z = x + \mathrm{i}y$ 的习惯表示, 可记 $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$.

**例 2.1**

问函数 $f(z)=\overline{z}$ 是否可导（或可微）?

**解** 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处有定义. 按 $z=x+\mathrm{i}y$ 的习惯表示, 可记 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$. 于是对复平面上的任意一点 $z_0$, 我们有

$$\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}.$$

**例 2.1**

问函数 $f(z)=\overline{z}$ 是否可导（或可微）?

解 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处有定义. 按 $z=x+\mathrm{i}y$ 的习惯表示, 可记 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$. 于是对复平面上的任意一点 $z_0$, 我们有

$$\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}.$$

当 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋于 $z$ 时, 有 $\Delta y=0$, 于是可得

$$\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

由此可知当 $\Delta z\to 0$ 时, $\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}$ 沿此路径的极限为1;

当 $z+\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋于 $z$ 时, 有 $\Delta x=0$, 于是可得

$$\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{-\mathrm{i}\Delta y}{\mathrm{i}\Delta y}=-1.$$

由此可知当 $\Delta z\to 0$ 时, $\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}$ 沿当前路径的极限为 $-1$.

当 $z+\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋于 $z$ 时, 有 $\Delta x=0$, 于是可得

$$\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{-\mathrm{i}\Delta y}{\mathrm{i}\Delta y}=-1.$$

由此可知当 $\Delta z\to 0$ 时, $\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}$ 沿当前路径的极限为 $-1$.

所以当 $\Delta z\to 0$ 时, $\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}$ 的极限不存在. 这说明函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处不可导. ∎

在高等数学中, 我们熟知一元实函数可导必连续, 但连续未必可导.

在高等数学中，我们熟知一元实函数可导必连续，但连续未必可导.

在复变函数论中，这个结论依然成立. 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 可导，则有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)] &= \lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\cdot\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\ &= 0\cdot f'(z_0)=0.\end{aligned}$$

所以可导必连续.

在微积分中, 想举出一个处处连续但处处不可导的函数的例子不是件容易的事（因为实初等函数都是可导的）, 但在复变函数中这样的例子可以说到处都是, 例如例2.1中的函数就是一个.

在微积分中, 想举出一个处处连续但处处不可导的函数的例子不是件容易的事（因为实初等函数都是可导的），但在复变函数中这样的例子可以说到处都是, 例如例2.1中的函数就是一个.

学完本节内容后, 请读者思考一下**在复变函数中这类反例为什么变多了**.

由于形式上, 复变函数的导数定义与一元实函数是一样的, 并且有相同的极限运算法则. 所以利用与微积分中相同的方法可证明下面的求导法则: 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 $z$ 可导, 则有

(1) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$;

(2) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;

(3) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0$;

(4) 复合函数求导链式法则 $\dfrac{\mathrm{d}f[g(z)]}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}\dfrac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}$, 其中 $w = g(z)$;

(5) $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$, 其中 $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 是两个互为反函数的单值函数, 且 $\varphi'(w) \neq 0$.

- 由定义可知, 如果 $f(z)$ 为常数函数, 则 $f'(z) = 0$;

- 由定义可知, 如果 $f(z)$ 为常数函数, 则 $f'(z) = 0$;
- 如果 $f(z) = z$, 则 $f'(z) = 1$.

- 由定义可知, 如果 $f(z)$ 为常数函数, 则 $f'(z) = 0$;
- 如果 $f(z) = z$, 则 $f'(z) = 1$.
- 利用数学归纳法, 由求导法则 (2) 可得

$$\frac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1},$$

其中 $n$ 是一个正整数.

- 又由求导法则 (1), 可知多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

在 $z$ 平面上处处可导, 并且

$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} z + a_{n-1}.$$

- 又由求导法则 (1), 可知多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

在 $z$ 平面上处处可导, 并且

$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} z + a_{n-1}.$$

注意我们现在讨论的是复变函数, 一切讨论都默认是在复数范围内进行（今后也要切记这一点）, 所以多项式函数 $P(z)$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均可以为复数.

- 又由求导法则 (1), 可知多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

在 $z$ 平面上处处可导, 并且

$$P'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}z + a_{n-1}.$$

注意我们现在讨论的是复变函数, 一切讨论都默认是在复数范围内进行（今后也要切记这一点）, 所以多项式函数 $P(z)$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均可以为复数.

- 由两个多项式函数的比的形式定义的函数称为有理函数（或有理分式函数）. 由求导法则 (3), 可知有理函数

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m} \ (a_0, b_0 \neq 0)$$

在 $z$ 平面上除多项式函数 $Q(z)$ 的零点外均可微.

## 2.1.2 柯西 – 黎曼条件

一个复变函数连续等价于它的实部和虚部连续，
那么一个复变函数可导是否等价于它的实部和虚部可导或可微吗?

## 2.1.2 柯西 – 黎曼条件

一个复变函数连续等价于它的实部和虚部连续，
那么一个复变函数可导是否等价于它的实部和虚部可导或可微吗?

答案是否定的. 例 2.1 中的函数 $f(z) = \overline{z} = x - iy$ 就是一个反例.

设 $z = x + \mathrm{i}y$,

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

假设它可导在点 $z$ 处可导, 我们能得到些什么呢?

设 $z = x + \mathrm{i}y$,

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

假设它可导在点 $z$ 处可导, 我们能得到些什么呢?

记

$$\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y, \quad f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v,$$

其中

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y), \quad \Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y),$$

设 $z = x + \mathrm{i}y$,

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

假设它可导在点 $z$ 处可导, 我们能得到些什么呢?

记

$$\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y, \quad f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v,$$

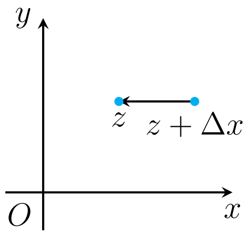
其中

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y), \quad \Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y),$$

则有

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}. \tag{2.1}$$

这里无论 $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$ 沿什么路径趋于零, 极限表达式(2.1)总是成立的.

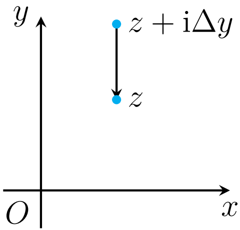



让 $\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋于零，即 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$，则导数的极限表达式(2.1)变为

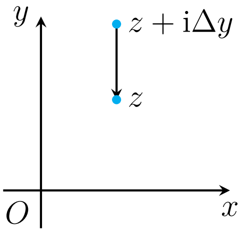
$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \mathrm{i} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\
&= u_x + \mathrm{i} v_x.
\end{aligned}
$$

让 $\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋于零，即 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$，则导数的极限表达式(2.1)变为

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - \mathrm{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = v_y - \mathrm{i}u_y.$$



让 $\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋于零，即 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$,
则导数的极限表达式(2.1)变为




$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - \mathrm{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = v_y - \mathrm{i}u_y.$$

由

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$$

可得

$$u_x = v_y, \; u_y = -v_x. \tag{2.2}$$

这对关于 $u$ 和 $v$ 的一阶偏微分方程称为柯西 – 黎曼条件，记为 C – R 条件.

至此我们已经证明了

## 定理 2.1

若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导, 则
(1) 偏导数 $u_x, u_y, v_x, v_y$ 在点 $(x,y)$ 存在;
(2) $u$ 和 $v$ 满足 C – R 条件(2.2);
(3) $f'(z)$ 可用 $u$ 和 $v$ 的偏导数表达出来, 即

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=u_x-\mathrm{i}u_y=v_y+\mathrm{i}v_x. \tag{2.3}$$

至此我们已经证明了

**定理 2.1**

若函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可导, 则
(1) 偏导数 $u_x, u_y, v_x, v_y$ 在点 $(x, y)$ 存在;
(2) $u$ 和 $v$ 满足 C – R 条件(2.2);
(3) $f'(z)$ 可用 $u$ 和 $v$ 的偏导数表达出来, 即

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y = u_x - \mathrm{i}u_y = v_y + \mathrm{i}v_x. \tag{2.3}$$

公式(2.3)是一个常用的复变函数求导公式.

现在我们知道了, 不同于一般的复变函数, 可导的复变函数并不只是由两个互不相干的实二元函数组成的，它的实部与虚部通过柯西—黎曼条件

$$u_x = v_y, \; u_y = -v_x$$

联系在了一起.

现在我们知道了, 不同于一般的复变函数, 可导的复变函数并不只是由两个互不相干的实二元函数组成的，它的实部与虚部通过柯西—黎曼条件

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x$$

联系在了一起.

柯西—黎曼条件是复变函数可导的充分条件吗?

## 例 2.2

设 $f(z)=\sqrt{|xy|}$. 证明 $f(z)$ 在 $z=0$ 处满足 C–R 条件, 但是不可导.

证　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则有 $u(x,y)=\sqrt{|xy|}, v(x,y)=0$. 计算可得

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0),$$

$$u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0).$$

显然 $f(z)$ 在 $z=0$ 处满足 C–R 方程. 但令 $\Delta z=\Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta r\cos\theta\cdot\Delta r\sin\theta|}}{\Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\sqrt{|\cos\theta\cdot\sin\theta|}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

由于上式的极限随 $\theta$ 变化而变化, 即 $\Delta z$ 沿从原点出发的不同射线趋于 0 时有不同的极限值, 所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可导. ∎

那么, 实部和虚部的可微性再加上它们满足柯西–黎曼方程是否足以构成复变函数可导的充分条件呢?

那么, 实部和虚部的可微性再加上它们满足柯西–黎曼方程是否足以构成复变函数可导的充分条件呢? 下面的定理给出了肯定的答案.

**定理 2.2**

函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可微的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 $(x, y)$ 可微且满足 C–R 条件.

**定理 2.2**

函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微且满足 C–R 条件.

证 先证**必要性**. 设 $f(z)$ 在点 $z$ 可微, 则有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\alpha(z)\Delta z,$$

其中 $\alpha(z)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(z)=0$.

## 定理 2.2

函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可微的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微且满足 C–R 条件.

证 先证**必要性**. 设 $f(z)$ 在点 $z$ 可微, 则有

$$f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \alpha(z)\Delta z,$$

其中 $\alpha(z)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(z) = 0$. 记

$$f'(z) = a + \mathrm{i}b, \quad \Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y, \quad f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v,$$

则通过简单的计算可得

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2,$$

其中 $\beta_1 = \mathrm{Re}\,[\alpha(z)\Delta z], \beta_2 = \mathrm{Im}\,[\alpha(z)\Delta z]$.

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2,$$

其中 $\beta_1 = \mathrm{Re}\,[\alpha(z)\Delta z], \beta_2 = \mathrm{Im}\,[\alpha(z)\Delta z]$. 易知 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都是

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

的高阶无穷小量.

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2,$$

其中 $\beta_1 = \mathrm{Re}\,[\alpha(z)\Delta z], \beta_2 = \mathrm{Im}\,[\alpha(z)\Delta z]$. 易知 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都是

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

的高阶无穷小量. 比较等式两边的实部与虚部得

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \beta_1,\ \ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta_2.$$

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2,$$

其中 $\beta_1 = \mathrm{Re}\,[\alpha(z)\Delta z], \beta_2 = \mathrm{Im}\,[\alpha(z)\Delta z]$. 易知 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都是

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

的高阶无穷小量. 比较等式两边的实部与虚部得

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \beta_1,\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta_2.$$

于是由实二元函数微分的定义, 可知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微且

$$a = u_x = v_y,\ b = -u_y = v_x.$$

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2,$$

其中 $\beta_1 = \mathrm{Re}\,[\alpha(z)\Delta z], \beta_2 = \mathrm{Im}\,[\alpha(z)\Delta z]$. 易知 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都是

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

的高阶无穷小量. 比较等式两边的实部与虚部得

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \beta_1,\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta_2.$$

于是由实二元函数微分的定义, 可知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微且

$$a = u_x = v_y,\ b = -u_y = v_x.$$

要证**充分性**, 只需将必要性的证明逆推一遍即可（详见教材）. ∎

定理 2.2 的证明过程实质上就是将结论在它的复数表述形式和实数表述形式之间做了一个“翻译”. 由于我们现在对解析函数还几乎一无所知, 所以一般会回到微积分中去寻找答案. 因此这种“翻译式”的论证方法是我们目前讨论解析函数性质的常用方法.

定理 2.2 的证明过程实质上就是将结论在它的复数表述形式和实数表述形式之间做了一个“翻译”. 由于我们现在对解析函数还几乎一无所知, 所以一般会回到微积分中去寻找答案. 因此这种“翻译式”的论证方法是我们目前讨论解析函数性质的常用方法.

因为二元实函数的可微性可由它的偏导数的连续性推出, 所以有下面的推论.

**推论 2.1**

若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 有一阶连续偏导数, 且满足 C–R 条件, 则 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导（即可微）.

# 特别说明

需要注意：虽然在形式上，复变函数的导数定义与一元实函数是一样的，但实质上却有很大的不同．实变函数极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

的极限路径仅限于实轴（一条直线）上，但复变函数极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

的极限路径是复平面上的任意路径，因此复可导比实可导的条件要强得多！

## 2.1.3 解析函数的定义

**定义 2.3 (解析函数的定义)**

如果函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内处处可导, 则称**函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **处解析**, 或称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的**解析点**. 如果函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内的每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 $D$ 内的**解析函数**, 或称**函数** $f(z)$ **在区域** $D$ **内解析**.

## 2.1.3 解析函数的定义

**定义 2.3 (解析函数的定义)**

如果函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内处处可导，则称**函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **处解析**，或称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的**解析点**. 如果函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内的每一点都解析，则称 $f(z)$ 是区域 $D$ 内的**解析函数**，或称**函数** $f(z)$ **在区域** $D$ **内解析**.

为方便起见，我们今后可能会说"解析函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析"，这时应理解为 $f(z)$ 在包含 $\overline{D}$ 的某个区域内解析.

## 2.1.3 解析函数的定义

**定义 2.3 (解析函数的定义)**

如果函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内处处可导, 则称**函数** $f(z)$ **在点** $z_0$ **处解析**, 或称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的**解析点**. 如果函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内的每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 $D$ 内的**解析函数**, 或称**函数** $f(z)$ **在区域** $D$ **内解析**.

为方便起见, 我们今后可能会说"**解析函数** $f(z)$ **在闭区域** $\overline{D}$ **上解析**", 这时应理解为 $f(z)$ 在包含 $\overline{D}$ 的某个区域内解析.

在一些其它教材和专业文献里, 解析函数又被称为全纯函数或正则函数.

## 2.1.3 解析函数的定义

**定义 2.3 (解析函数的定义)**

如果函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某个邻域内处处可导, 则称**函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处解析**, 或称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的**解析点**. 如果函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内的每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 $D$ 内的**解析函数**, 或称**函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析**.

为方便起见, 我们今后可能会说 "**解析函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析**", 这时应理解为 $f(z)$ 在包含 $\overline{D}$ 的某个区域内解析.

在一些其它教材和专业文献里, 解析函数又被称为全纯函数或正则函数.

由解析函数的定义和前面所列的求导法则易知, **解析函数的和、差、积、商以及复合函数仍是解析函数**. 显然, 多项式函数是复平面上的解析函数.

# 奇点

**定义 2.4 (奇点的定义)**

若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 不解析, 但在 $z_0$ 的任一邻域内总有 $f(z)$ 的解析点, 则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的**奇点**.

有理函数的分母的零点便是它的奇点, 因为在这些点处有理函数无定义, 在其它点处则都可导.

由解析函数的定义和定理 2.2 立即可得

**定理 2.3**

函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 $D$ 内解析的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 $D$ 内的每一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微且满足 C–R 方程.

**例 2.3**

试证函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析, 且 $f'(z)=f(z)$.

## 例 2.3

试证函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析，且 $f'(z)=f(z)$.

证 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则有 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y, v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$.

### 例 2.3

试证函数 $f(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析, 且 $f'(z) = f(z)$.

证 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, 则有 $u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y, v(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$. 计算可得

$$u_x = \mathrm{e}^x \cos y,\ u_y = -\mathrm{e}^x \sin y, \qquad v_x = \mathrm{e}^x \sin y,\ v_y = \mathrm{e}^x \cos y.$$

**例 2.3**

试证函数 $f(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析, 且 $f'(z) = f(z)$.

证 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, 则有 $u(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y, v(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y$. 计算可得

$$u_x = \mathrm{e}^x\cos y,\ u_y = -\mathrm{e}^x\sin y, \qquad v_x = \mathrm{e}^x\sin y,\ v_y = \mathrm{e}^x\cos y.$$

容易验证这四个偏导数满足 C–R 条件.

## 例 2.3

试证函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面内解析, 且 $f'(z)=f(z)$.

证　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则有 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y, v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$. 计算可得

$$u_x=\mathrm{e}^x\cos y,\ u_y=-\mathrm{e}^x\sin y,\qquad v_x=\mathrm{e}^x\sin y,\ v_y=\mathrm{e}^x\cos y.$$

容易验证这四个偏导数满足 C–R 条件. 同时因为它们都是在整个平面上有定义的实初等函数, 从而可知它们都是连续函数. 于是由推论2.1可知 $f(z)$ 在复平面上解析, 且有

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y=f(z).$$ ∎

**例 2.4**

判别函数 $f(z) = x^3 - \mathrm{i}(y^3 - 3y)$ 在哪些点可导, 在哪些点解析?

**例 2.4**

判别函数 $f(z)=x^3-\mathrm{i}(y^3-3y)$ 在哪些点可导, 在哪些点解析?

解 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则有 $u(x,y)=x^3, v(x,y)=-y^3+3y$. 计算得

$$u_x=3x^2, u_y=0, \qquad v_x=0, v_y=-3y^2+3.$$

显然这四个一阶偏导数都连续, 故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 处处可微. 但只有当 $x^2+y^2=1$ 时, C–R 条件才成立. 所以 $f(z)$ 只在圆周 $x^2+y^2=1$ 上可导.

## 例 2.4

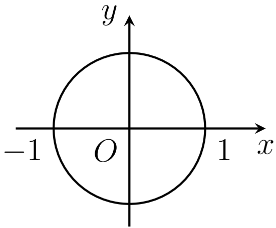
**判别函数 $f(z) = x^3 - \mathrm{i}(y^3 - 3y)$ 在哪些点可导, 在哪些点解析?**

解　设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, 则有 $u(x,y) = x^3, v(x,y) = -y^3 + 3y$. 计算得

$$u_x = 3x^2, u_y = 0, \qquad v_x = 0, v_y = -3y^2 + 3.$$

显然这四个一阶偏导数都连续, 故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 处处可微. 但只有当 $x^2 + y^2 = 1$ 时, C–R 条件才成立. 所以 $f(z)$ 只在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上可导.

根据解析点的定义, 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点要成为 $f(z)$ 的解析点, 就需要在它的一个邻域内, $f(z)$ 处处可导. 显然圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 无法覆盖住它自身任何一个点的邻域, 所以 $f(z)$ 在复平面上无解析点. ∎



## 命题 2.1

**设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内处处有 $f'(z)=0$, 试证明 $f(z)$ 在 $D$ 内为一常数.**

证明思路　要证明 $f(z)$ 在区域 $D$ 内为一常数, 只需证明 $f(z)$ 在区域 $D$ 内的任意两点上取值相同. 为此, 任取区域 $D$ 内两点, 用一条 $D$ 内的折线连接两点. 我们可以证明 $f(z)$ 在这条折线上恒为一个常数. 要证明这一点, 只需证明 $f(z)$ 在任一直线段上恒为一个常数. 上一章的例题可知, 任一直线段都可用复参数方程表示出来. 设直线段的参数方程为 $z=z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, 则 $f(z)$ 在这个直线段上可用一元函数 $f[z(t)]$ 来表示. 于是由复合函数求导链式法则可得

$$\frac{\mathrm{d}f[z(t)]}{\mathrm{d}t} = f'(z)z'(t) = 0,\ \alpha < t < \beta.$$

由此可知, $f(z)$ 的实部和虚部在直线段上都为常数, 即 $f(z)$ 在直线段上为常数. 所以 $f(z)$ 在这条折线上恒为一个常数. ∎

另一证明思路　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则由导数公式(2.3)有

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y.$$

所以从 $f'(z)=0$ 可推出

$$u_x=u_y=0,\quad v_x=v_y=0.$$

现在问题变成了证明若一个二元实函数在一个区域内偏导数处处为零, 则它为常数.

# 作业

习题二

2. 试证：
   (1) $f(z) = x^3 - \mathrm{i}y^3$ 仅在原点有导数;
   (2) $f(z) = |z|^2$ 仅在原点有导数.

4. 若函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 上解析, 并满足下列条件之一, 证明 $f(z)$ 必为常数.

   (2) $\overline{f(z)}$ 在 $D$ 上解析;
   (3) $|f(z)|$ 在 $D$ 上是一常数;
   (4) $\operatorname{Re} f(z)$ 在 $D$ 上是一常数.

5. 试证下列函数在 $z$ 平面上解析, 并分别求出导数.

   (1) $\mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y)$;

6. 试证下列函数在复平面上不解析.

   (2) $\mathrm{e}^{\overline{z}}$.