1.2 复变函数的基本概念

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 2 月 24 日

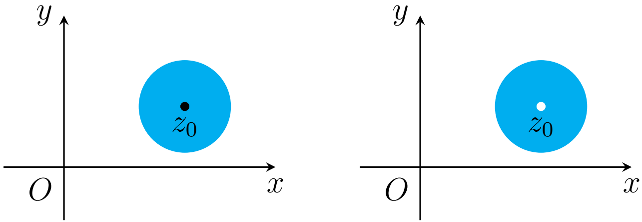
目录

1.2.1 区域与若尔当曲线

今后我们主要讨论的都是定义在曲线和区域上的复变函数, 因此有必要先介绍一下曲线和区域的概念.

平面曲线和区域的概念读者在高等数学中事实上已经学过了. 现在需要做的只是**回顾原来的概念**和**掌握它们的复数表示形式**.

邻域



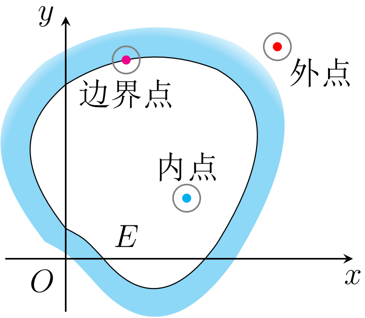
- 称以点 z_0 为心半径为 ε 的圆, 即点集 $\{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, 为点 z_0 的 ε 邻域;
- 称点集 $\{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ 为点 z_0 的 ε 空心邻域.

在无需指明邻域大小的情况下, 我们一般直接称邻域和空心邻域.

平面点的类型

设点集 $E \subset \mathbb{C}$.

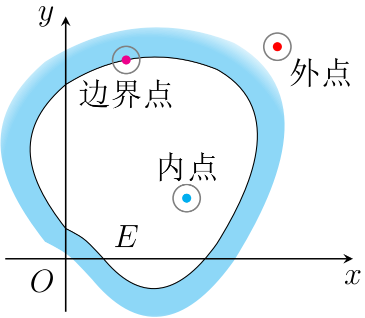
- 若点 z_0 有一邻域在 E 内, 则称 z_0 为 E 的内点;
- 若点 z_0 有一邻域与 E 无交集, 则称 z_0 为 E 的外点;
- 若点 z_0 的任一邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点, 则称 z_0 为 E 的边界点.



平面点的类型

设点集 $E \subset \mathbb{C}$.

- 若点 z_0 有一邻域在 E 内, 则称 z_0 为 E 的内点;
- 若点 z_0 有一邻域与 E 无交集, 则称 z_0 为 E 的外点;
- 若点 z_0 的任一邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点, 则称 z_0 为 E 的边界点.

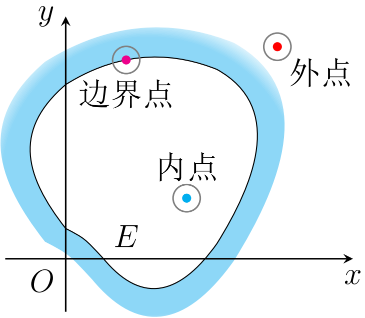


复平面上的任一点只能是 E 的内点、边界点或外点.

平面点的类型

设点集 $E \subset \mathbb{C}$.

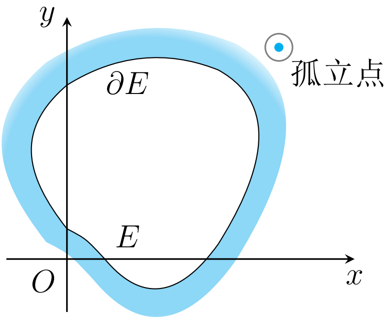
- 若点 z_0 有一邻域在 E 内, 则称 z_0 为 E 的内点;
- 若点 z_0 有一邻域与 E 无交集, 则称 z_0 为 E 的外点;
- 若点 z_0 的任一邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点, 则称 z_0 为 E 的边界点.



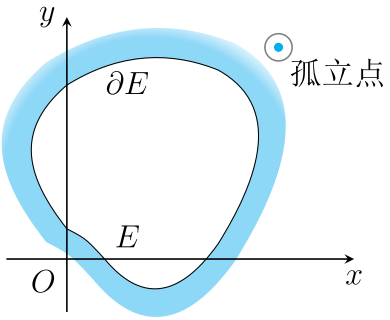
复平面上的任一点只能是 E 的内点、边界点或外点.

一个点集的边界点可以属于这个集合, 也可以不属于这个集合.

- 若 E 的点皆为内点, 则称 E 为开集.
- E 的全体边界点构成的集合称为 E 的边界, 记作 ∂E.
- 若 E 的边界点都属于 E, 则称 E 为闭集.
- 若点 $z_0 \in E$, 但 z_0 有一个空心邻域, 在其内所有的点都不属于 E, 则称 z_0 为 E 的孤立点.



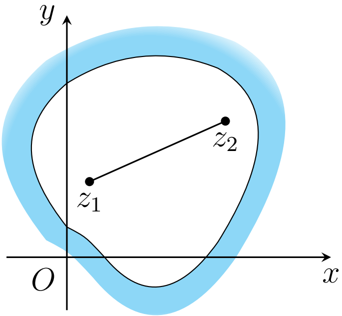
- 若 E 的点皆为内点, 则称 E 为开集.
- E 的全体边界点构成的集合称为 E 的边界, 记作 ∂E.
- 若 E 的边界点都属于 E, 则称 E 为闭集.
- 若点 $z_0 \in E$, 但 z_0 有一个空心邻域, 在其内所有的点都不属于 E, 则称 z_0 为 E 的孤立点.



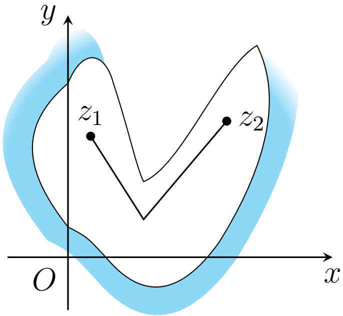
孤立点与内点、外点和边界点之间是什么关系?

连通集

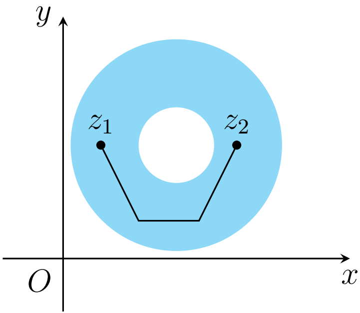
若点集 E 中任意两点均可用一条全含于 E 内的折线连接, 则称 E 为连通集.



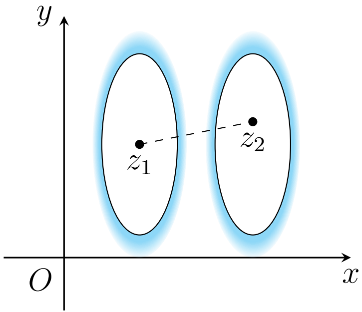
连通集



连通集



连通集



不连通集

- 非空连通开集称为区域（domain）.
- 区域 D 加上它的边界称为闭区域, 记作 $\overline{D}$.

$\boxed{\text{闭区域是区域吗?}}$

若存在一个实数 $M>0$ 使得 $|z|\leq M, z\in E$, 即 E 被包含在以原点为圆心的一大圆内, 则称 E 为有界集; 否则称 E 为无界集.

若存在一个实数 $M>0$ 使得 $|z|\le M, z\in E$, 即 E 被包含在以原点为圆心的一大圆内, 则称 E 为有界集; 否则称 E 为无界集.

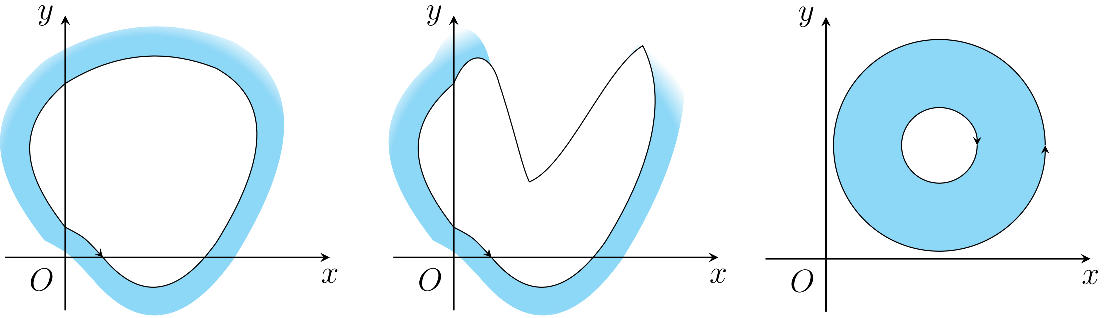
需要说明一点, 我们平常所说的“圆”的准确含义并不明确, 它既可以用来指到一点距离相等的点集构成的曲线, 也可以用来指同名曲线所围的区域. 由于这些含义在本课程中都会出现, 为避免歧义, 我们将使用不同的名词来区分它们, 具体约定见下面的例子.

例 1.3

复平面上以 z_0 为心, R 为半径的圆 $|z-z_0|<R$ 是有界区域. 闭圆 $|z-z_0|\le R$ 不是区域, 但是闭区域. 它们都以圆周 $|z-z_0|=R$ 为边界.

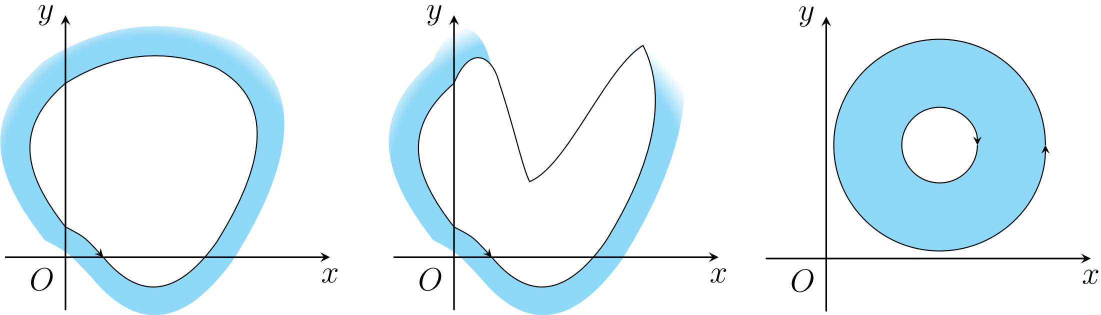
区域边界的方向

观察者沿区域边界的某个方向行走时，若其附近区域内的点总在观察者的左侧，则此方向为边界的正向.



区域边界的方向

观察者沿区域边界的某个方向行走时, 若其附近区域内的点总在观察者的左侧, 则此方向为边界的正向.



在未明言边界（曲线）的走向时, 默认取正向.

平面曲线的参数表示形式

- 在高等数学中, 平面曲线可以用一对参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

描述.

- 在复变函数论中, 平面曲线可以用实参数复值函数

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

来表示. 点 $z(\alpha)$ 和 $z(\beta)$ 分别称为此曲线的起点和终点.

平面曲线的基本概念

- 若 $x(t), y(t)$ 是在 $[\alpha, \beta]$ 上连续的两个实函数, 则

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

表示复平面上的一条连续曲线.

平面曲线的基本概念

- 若 $x(t), y(t)$ 是在 $[\alpha, \beta]$ 上连续的两个实函数, 则

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

  表示复平面上的一条连续曲线.

- 若点 $z(t_1) = z(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, 则称点 $z(t_1)$ 为此曲线的重点.

平面曲线的基本概念

- 若 $x(t), y(t)$ 是在 $[\alpha, \beta]$ 上连续的两个实函数, 则

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

表示复平面上的一条连续曲线.

- 若点 $z(t_1) = z(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, 则称点 $z(t_1)$ 为此曲线的重点.
- 无重点的曲线称为简单曲线或若尔当曲线.

平面曲线的基本概念

- 若 $x(t), y(t)$ 是在 $[\alpha, \beta]$ 上连续的两个实函数, 则

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

  表示复平面上的一条连续曲线.
- 若点 $z(t_1) = z(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, 则称点 $z(t_1)$ 为此曲线的重点.
- 无重点的曲线称为简单曲线或若尔当曲线.
- 起点与终点重合的曲线称为闭曲线.

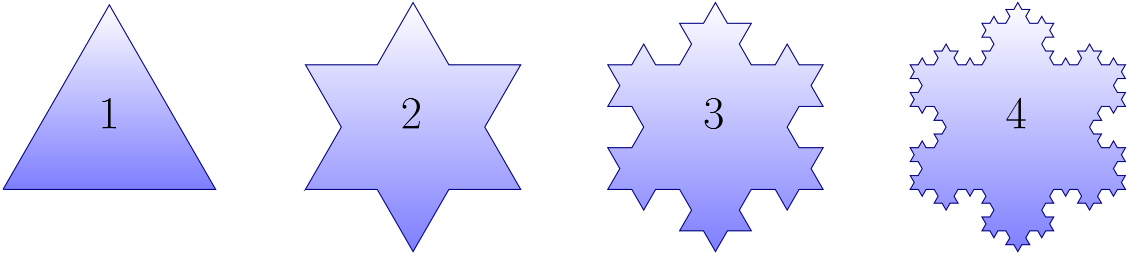
平面曲线的基本概念

- 若 $x(t), y(t)$ 是在 $[\alpha, \beta]$ 上连续的两个实函数, 则

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

  表示复平面上的一条连续曲线.
- 若点 $z(t_1) = z(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, 则称点 $z(t_1)$ 为此曲线的重点.
- 无重点的曲线称为简单曲线或若尔当曲线.
- 起点与终点重合的曲线称为闭曲线.
- 除起点与终点外, 再无其他重点的闭曲线称为简单闭曲线或若尔当闭曲线.

连续曲线在有限范围内可能无限长



科赫曲线（雪花曲线）

可求长的曲线: 光滑曲线

- 由参数方程
$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$
表示的曲线, 如果导函数 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在、连续且在一点处不同时为零, 则称其为光滑曲线.

由微积分中的曲线弧长计算公式可知, 光滑曲线是可求长的曲线.

可求长的曲线: 光滑曲线

- 由参数方程
$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$
表示的曲线, 如果导函数 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在、连续且在一点处不同时为零, 则称其为光滑曲线.

  由微积分中的曲线弧长计算公式可知, 光滑曲线是可求长的曲线.
- 由有限条光滑曲线衔接而成的连续曲线称为逐段光滑曲线.

  显然逐段光滑曲线也都是可求长的.

可求长的曲线: 光滑曲线

- 由参数方程
$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$
表示的曲线, 如果导函数 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在、连续且在一点处不同时为零, 则称其为光滑曲线.

  由微积分中的曲线弧长计算公式可知, 光滑曲线是可求长的曲线.

- 由有限条光滑曲线衔接而成的连续曲线称为逐段光滑曲线.

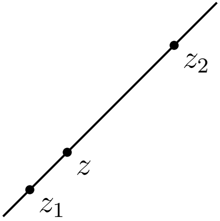
  显然逐段光滑曲线也都是可求长的.

今后讨论的曲线, 均默认是光滑曲线或逐段光滑曲线.

例 1.4

求连接点 z_1 和 z_2 的直线段和直线的复参数方程表示.

解 设 z 是连接点 z_1 和 z_2 的直线段上的任意一点，则 $z - z_1$ 和 $z_2 - z_1$ 是两个方向相同但长度不同的向量. 因此可得 $z - z_1 = (z_2 - z_1)t,\ 0 \le t \le 1$. 由此可知所求直线段的参数方程为



$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t,\ 0 \le t \le 1.$$

只需扩大参数 t 的取值范围，便可得过点 z_1 和 z_2 的直线的复参数方程为

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t,\ -\infty < t < +\infty.$$

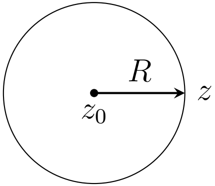
$\blacksquare$

例 1.5

求平面上以点 z_0 为心, R 为半径的圆周的复参数方程表示.

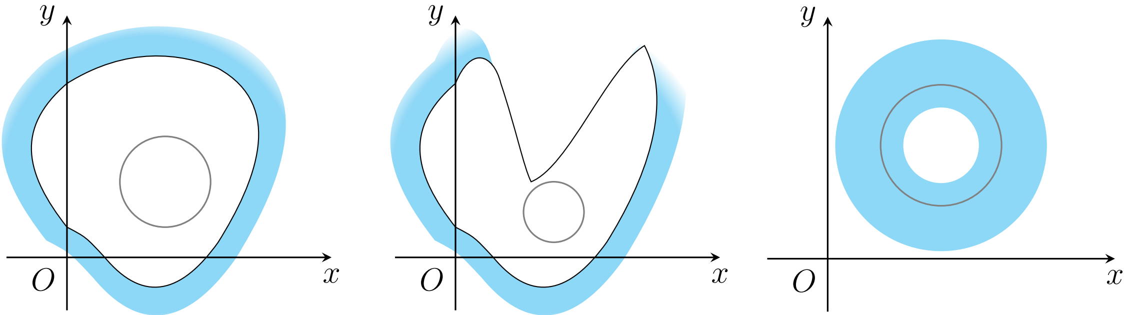
解 设 z 是该圆周上的任一点, 则应有 $|z-z_0|=R$. 于是可得 $z-z_0=Re^{i\theta}$, 其中 θ 是向量 $\overrightarrow{z_0z}$ 的角度. 当 θ 从 0 到 2π 变化时, 向量 $\overrightarrow{z_0z}$ 恰好绕定点 z_0 旋转一周, 所以所求圆周的复参数方程为

$$z=z_0+Re^{i\theta},\quad 0\le\theta\le2\pi.$$



定义 1.2

若区域 D 内的任一简单闭曲线所围内部的点都属于 D, 则称 D 为**单连通区域**（*simply connected domain*），否则称**为多连通区域**.



单连通区域　　单连通区域　　多连通区域

可以形象地说, 单连通区域是“无洞”的区域; 而多连通区域则是“有洞”的区域.

1.2.2 复变函数的概念

在微积分中, 从一个实数集到另一个实数集之间的映射称为函数. 我们可以类似地给出复变量函数（简称为复变函数）的定义.

定义 1.3

设 E 为一复数集. 若对 E 内的每个复数 z 都有唯一确定的复数 w 与之对应, 则称在 E 上确定了一个**单值复变函数** $w = f(z), z \in E$. 若对 E 内的每个复数 z, 都有几个或无穷多个复数 w 与之对应, 则称在 E 上确定了一个**多值复变函数** $w = f(z)$, $z \in E$. 称集合 E 为函数 $w = f(z)$ 的定义域, 集合 $\{w = f(z) | z \in E\}$ 为函数 $w = f(z)$ 的值域.

例 1.6

$w=|z|, w=|\overline{z}|, w=z^n$ (n为正整数) 及 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ $(z\neq 1)$ 均为单值函数;
$w=\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0, n$ 为正整数 $)$ 和 $w=\operatorname{Arg} z$ $(z\neq 0)$ 均为 z 的多值函数.

例 1.6

$w=|z|, w=|\overline{z}|, w=z^n$ (n为正整数) 及 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ $(z\neq 1)$ 均为单值函数;
$w=\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0, n$ 为正整数) 和 $w=\operatorname{Arg} z$ $(z\neq 0)$ 均为 z 的多值函数.

不同于实函数, 因为允许多值函数的存在, **每个复变函数都有反函数!**

将函数 $w=f(z)$ 从定义域到值域之间的对应关系反过来看, 就构成了一个从值域到定义域的对应关系, 这个对应关系就是函数 $w=f(z)$ 的反函数, 记作 $z=g(w)$ 或 $z=f^{-1}(w)$.

例 1.6

$w=|z|, w=|\bar{z}|, w=z^n$ (n为正整数) 及 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ $(z\neq 1)$ 均为单值函数;
$w=\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0, n$ 为正整数 $)$ 和 $w=\operatorname{Arg} z$ $(z\neq 0)$ 均为 z 的多值函数.

不同于实函数, 因为允许多值函数的存在, **每个复变函数都有反函数**!

将函数 $w=f(z)$ 从定义域到值域之间的对应关系反过来看, 就构成了一个从值域到定义域的对应关系, 这个对应关系就是函数 $w=f(z)$ 的反函数, 记作 $z=g(w)$ 或 $z=f^{-1}(w)$.

$w=\sqrt[n]{z}$ 和 $z=w^n$ 互为反函数.

例 1.6

$w=|z|, w=|\bar{z}|, w=z^n$ (n为正整数) 及 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ $(z\neq 1)$ 均为单值函数;
$w=\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0, n$ 为正整数) 和 $w=\operatorname{Arg} z$ $(z\neq 0)$ 均为 z 的多值函数.

不同于实函数, 因为允许多值函数的存在, **每个复变函数都有反函数**!

将函数 $w=f(z)$ 从定义域到值域之间的对应关系反过来看, 就构成了一个从值域到定义域的对应关系, 这个对应关系就是函数 $w=f(z)$ 的反函数, 记作 $z=g(w)$ 或 $z=f^{-1}(w)$.

$w=\sqrt[n]{z}$ 和 $z=w^n$ 互为反函数.

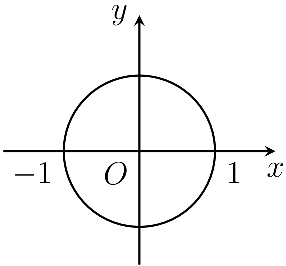
提 $w=\operatorname{Arg} z$ 的反函数没什么意义, 我们只关注有意义的复变函数.

多值函数并非复变函数特有的概念.

对实变函数也完全可以定义多值函数, 例如两个函数

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{和} \quad y=-\sqrt{1-x^2}$$

可用一个实二值函数表示.



为什么在讨论实变函数的时候一般不提多值函数的概念呢?

因为多值函数与单值函数并不是同等重要的概念，在两者之中，单值函数才是根本所在．试想如果一个函数取值都不能唯一确定的话，又如何能对它定义极限的概念，如何能讨论它的微分和积分？

因为多值函数与单值函数并不是同等重要的概念, 在两者之中, 单值函数才是根本所在. 试想如果一个函数取值都不能唯一确定的话, 又如何能对它定义极限的概念, 如何能讨论它的微分和积分?

不同于实函数的情形, 在复变函数中无法回避多值函数的概念，对多值函数我们将在第二章中做专门讨论.

今后提到 “函数” 一词, 如无特别说明, 均指单值函数.

复变函数的表示形式

设 $w = f(z)$ 是点集 E 上的复变函数.

若 $z = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$, 则

$$(x, y) \mapsto z \mapsto w \mapsto u \text{ 或 } v.$$

复变函数的表示形式

设 $w = f(z)$ 是点集 E 上的复变函数.

若 $z = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v$, 则

$$(x, y) \mapsto z \mapsto w \mapsto u \text{ 或 } v.$$

由此可知 u 和 v 都是关于 x 和 y 的二元实函数, 从而

$$w = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y).$$

复变函数的表示形式

设 $w=f(z)$ 是点集 E 上的复变函数.
若 $z=x+\mathrm{i}y, w=u+\mathrm{i}v$, 则

$$(x,y)\mapsto z\mapsto w\mapsto u\,\text{或}\,v.$$

由此可知 u 和 v 都是关于 x 和 y 的二元实函数, 从而

$$w=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y).$$

若 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $w=f(z)$ 又可表示为

$$w=u(r,\theta)+\mathrm{i}\,v(r,\theta).$$

例 1.7

设函数 $w = z^2 + 2$. 若 $z = x + \mathrm{i}y$, 则 w 可以写成

$$w = x^2 - y^2 + 2 + \mathrm{i}\,2xy;$$

若 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 w 又可以写成

$$w = r^2 \cos 2\theta + 2 + \mathrm{i}\,r^2 \sin 2\theta.$$

复变函数的图形

想一想, 复变函数的图形是什么样子的?

复变函数的图形

想一想, 复变函数的图形是什么样子的?

- 一元实函数 $y = f(x)$ 的图形是

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在直角坐标系下, 这是一个平面点集, 常为平面曲线.

复变函数的图形

想一想, 复变函数的图形是什么样子的?

- 一元实函数 $y = f(x)$ 的图形是

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在直角坐标系下, 这是一个平面点集, 常为平面曲线.

- 类比之下, 复变函数 $w = f(z)$ 的图形应为

$$\{(z, w) \mid w = f(z), z \in E\}.$$

复变函数的图形

想一想, 复变函数的图形是什么样子的?

- 一元实函数 $y = f(x)$ 的图形是

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在直角坐标系下, 这是一个平面点集, 常为平面曲线.

- 类比之下, 复变函数 $w = f(z)$ 的图形应为

$$\{(z, w) \mid w = f(z), z \in E\}.$$

若 $z = x + \mathrm{i}y$, 则 $w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

复变函数的图形

想一想，复变函数的图形是什么样子的?

- 一元实函数 $y = f(x)$ 的图形是

$$\{(x, y) \,|\, y = f(x), x \in D\}.$$

在直角坐标系下，这是一个平面点集，常为平面曲线.

- 类比之下，复变函数 $w = f(z)$ 的图形应为

$$\{(z, w) \,|\, w = f(z), z \in E\}.$$

若 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. 于是 $(z, w) = (x, y, u, v)$.

复变函数的图形

想一想, 复变函数的图形是什么样子的?

- 一元实函数 $y = f(x)$ 的图形是

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在直角坐标系下, 这是一个平面点集, 常为平面曲线.

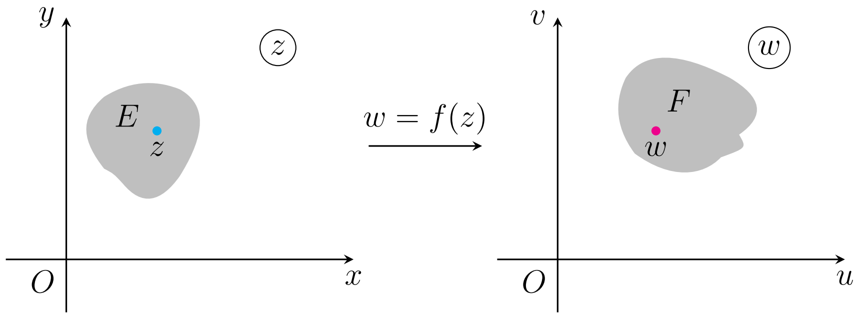
- 类比之下, 复变函数 $w = f(z)$ 的图形应为

$$\{(z, w) \mid w = f(z), z \in E\}.$$

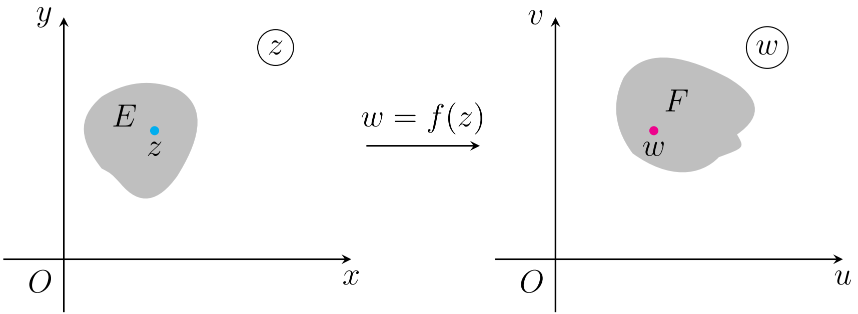
若 $z = x + \mathrm{i}y$, 则 $w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. 于是 $(z, w) = (x, y, u, v)$. 显然这是一个四维的点集. 因此不可能用平面或三维空间图形来表示复变函数.

作为平面图形变换的复变函数

虽然复变函数整体上不能用几何图形来表示，但若换一个角度，将定义域和值域分开来看，它可被看做是平面图形变换.



作为平面图形变换的复变函数



称自变量 z 所在的复平面为 z 平面, 函数值 w 所在的复平面为 w 平面, 函数 $w = f(z)$ 为从 z 平面到 w 平面的映射或变换, 点 w 为 z 的像点, 而点 z 为 w 的原像.

例 1.8

求下面的圆周和圆在映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 下的像集.

(1) 圆周 $|z| = r > 0$;　(2) 圆 $|z| < r < 1$.

能否由

$$|w| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$$

推出 $|z| = r$ 在映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 下变为 $|w| = \dfrac{1}{r}$?

例 1.8

求下面的圆周和圆在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的像集.

(1) 圆周 $|z|=r>0$; (2) 圆 $|z|<r<1$.

解 (1) 设圆周 $|z|=r$ 的参数方程为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi$, 则它的像集有参数方程

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

所以圆周 $|z|=r$ 在映射 $w=1/z$ 下的像集为圆周 $|w|=1/r$.

(2) 解

- 圆 $|z| < r < 1$ 可看作是同心圆周 $|z| = \rho, 0 < \rho < r$ 和原点 $z = 0$ 构成的.

(2) 解

- 圆 $|z| < r < 1$ 可看作是同心圆周 $|z| = \rho, 0 < \rho < r$ 和原点 $z = 0$ 构成的.
- 由 (1) 可知圆周
$$|z| = \rho, 0 < \rho < r$$
在映射 $w = 1/z$ 下的像集为
$$|w| = 1/\rho, 0 < \rho < r.$$

(2) 解

- 圆 $|z| < r < 1$ 可看作是同心圆周 $|z| = \rho, 0 < \rho < r$ 和原点 $z = 0$ 构成的.
- 由 (1) 可知圆周
$$|z| = \rho, 0 < \rho < r$$
在映射 $w = 1/z$ 下的像集为
$$|w| = 1/\rho, 0 < \rho < r.$$
- 当 ρ 从 r 逐渐减小为 0 时, 圆周 $|z| = \rho$ 逐渐收缩为原点, 而圆周 $|w| = 1/\rho$ 变得越来越大, 直至无穷大.

(2) 解

- 圆 $|z|<r<1$ 可看作是同心圆周 $|z|=\rho, 0<\rho<r$ 和原点 $z=0$ 构成的.
- 由 (1) 可知圆周

$$|z|=\rho, 0<\rho<r$$

在映射 $w=1/z$ 下的像集为

$$|w|=1/\rho, 0<\rho<r.$$

- 当 ρ 从 r 逐渐减小为 0 时, 圆周 $|z|=\rho$ 逐渐收缩为原点, 而圆周 $|w|=1/\rho$ 变得越来越大, 直至无穷大.

所以圆 $|z|<r$ 在映射 $w=1/z$ 下的像集为复平面上圆 $|w|=1/r$ 的外部区域. ∎

1.2.3 复变函数的极限与连续性

定义 1.4 (复变函数的极限)

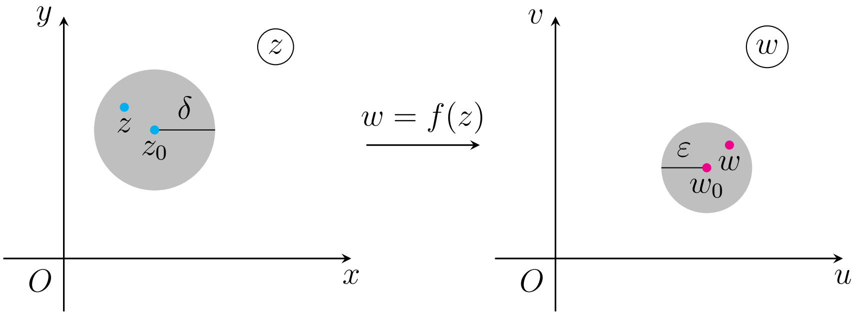
设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 如果存在一个复数 w_0, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

则称 $f(z)$ **在点** z_0 **有极限** w_0, 记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

复变函数极限的几何意义



当 z 充分接近 z_0 时, $w = f(z)$ 便可以任意接近 w_0.

定义 1.5 (复变函数的连续性)

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(z)$ **在点** z_0 **连续**.

定义 1.5 (复变函数的连续性)

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

则称 $f(z)$ **在点** z_0 **连续**.

函数 $w = f(z)$ 在 $z = z_0$ 处连续的充要条件是

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

定义 1.5 (复变函数的连续性)

设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $|z-z_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(z)$ **在点** z_0 **连续**.

函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续的充要条件是

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

定义 1.6

若函数 $f(z)$ 在点集 E 上的每一点处都连续, 则称 $f(z)$ 在 E **上连续**.

定理 1.1

设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处有极限, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0=u_0+\mathrm{i}v_0 \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0.$$

证明提示 由

$$f(z)-w_0=u-u_0+\mathrm{i}(v-v_0)$$

有

$$|u-u_0|\le|f(z)-w_0|,\qquad |v-v_0|\le|f(z)-w_0|$$

和

$$|f(z)-w_0|\le|u-u_0|+|v-v_0|.$$

由定理1.1和连续性的定义立即可得

定理 1.2

设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是二元实函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续.

我们知道两个实连续函数的和、差、积、商（分母在该点取值不为零）仍是连续函数, 两个实连续函数的复合函数仍是实连续函数. 于是由定理1.2可以推出:
如果两个复变函数在一点连续, 则它们的和、差、积、商（分母在该点取值不为零）在该点也连续. 两个复连续函数的复合函数仍是复连续函数.

定理 1.3

在有界闭集 E 上连续的函数 $f(z)$ 有如下性质:
(1) 在 E 上有界, 即存在 $M>0$, 使 $|f(z)|\leq M, z\in E$;
(2) $|f(z)|$ 在 E 上有最大值和最小值, 即在 E 上有两点 z_1, z_2 使

$$|f(z_1)|\leq|f(z)|\leq|f(z_2)|,\ z\in E.$$

证明提示 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则

$$|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}.$$

由此可知虽然形式上 $|f(z)|$ 是个复函数, 但实质上它是一个实二元函数.

定理 1.3

在有界闭集 E 上连续的函数 $f(z)$ 有如下性质:
(1) 在 E 上有界, 即存在 $M>0$, 使 $|f(z)| \leq M, z \in E$;
(2) $|f(z)|$ 在 E 上有最大值和最小值, 即在 E 上有两点 z_1, z_2 使

$$|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|,\ z \in E.$$

证明提示　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则

$$|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}.$$

由此可知虽然形式上 $|f(z)|$ 是个复函数, 但实质上它是一个实二元函数. 因为函数 $f(z)$ 在有界闭集 E 上连续, 由定理1.2可知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在有界闭集 E 上连续.

定理 1.3

在有界闭集 E 上连续的函数 $f(z)$ 有如下性质:
(1) 在 E 上有界, 即存在 $M>0$, 使 $|f(z)|\leq M, z\in E$;
(2) $|f(z)|$ 在 E 上有最大值和最小值, 即在 E 上有两点 z_1, z_2 使

$$|f(z_1)|\leq|f(z)|\leq|f(z_2)|,\ z\in E.$$

证明提示 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则

$$|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}.$$

由此可知虽然形式上 $|f(z)|$ 是个复函数, 但实质上它是一个实二元函数. 因为函数 $f(z)$ 在有界闭集 E 上连续, 由定理1.2可知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在有界闭集 E 上连续. 于是由实连续函数的性质可知, $|f(z)|$ 是在有界闭集 E 上连续的实二元函数. ∎

这是闭区间上连续函数的性质的推广, 对区域内的函数不一定成立. 例如

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

在 $|z| < 1$ 内连续, 但无界.

作业

习题一

11. 下列关系表示的 z 点的轨迹的图形是什么？它是不是区域？

(2) $|z| \leq |z-4|$;

(3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$;

(4) $0 < \arg(z-1) < \dfrac{\pi}{4}$ 且 $2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$;

(5) $|z| \geq 1$ 且 $\operatorname{Im} z > 0$;

(7) $|z| > 2$ 且 $|z-3| > 1$;

(9) $\operatorname{Im} z > 1$ 且 $|z| < 2$;

(10) $|z| < 2$ 且 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.

14. 试证 $\arg z\,(-\pi < \arg z \leq \pi)$ 在负实轴（包括原点）不连续.
提示: 考察 z 沿上、下半平面而趋于负实轴上的点的极限.

15. 一个复数列 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 以 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 为极限的充要条件为实数列 $x_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 及 $y_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 分别以 x_0 及 y_0 为极限.