数学物理方法知识要点

第一章　复数与复变函数

1. 复数的基本运算：加减乘除四则运算、乘幂和方根运算、共轭运算

$$z = re^{i\theta},\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

2. 复数的三种表示形式：代数、指数和三角表示形式 $z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

   三角不等式 $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.　$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \ne 0)$,

   $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$, $\mathrm{Arg}\,\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$.

3. 一些平面曲线（例如直线段和圆弧）的复参数表示形式.

   连接点 z_1 和 z_2 的直线段和直线的复参数方程表示为 $z = z_1 + (z_2 - z_1)t,\ 0 \le t \le 1$.

   以 z_0 为圆心, R 为半径的圆周为 $|z-z_0| = R$, 它的复参数方程表示形式为 $z = z_0 + Re^{i\theta},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

4. 连续函数的性质

   定理 1. *设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点集 E 上有定义, $z_0 \in E$, 则 $f(z)$ 沿 E 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 连续的充要条件是二元实函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 沿 E 在点 (x_0, y_0) 连续.*

   定理 2. *在有界闭集 E 上连续的函数 $f(z)$ 有如下性质:*

   (1) 在 E 上有界, 即存在 $M > 0$, 使 $|f(z)| \le M, z \in E$;

   (2) $|f(z)|$ 在 E 上有最大值和最小值, 即在 E 上有两点 z_1, z_2 使

$$|f(z_1)| \le |f(z)| \le |f(z_2)|,\ z \in E.$$

第二章　解析函数

1. 利用求导运算法则和基本求导公式进行求导运算

   若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 z 可导, 则有

   (1) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$;

   (2) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;

   (3) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \ne 0$;

   (4) 复合函数求导链式法则 $\dfrac{df[g(z)]}{dz} = \dfrac{df(w)}{dw}\dfrac{dg(z)}{dz}$, 其中 $w = g(z)$.

   幂函数的导数公式为 $\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$.

   多项式函数 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n\ (a_0 \ne 0)$ 在 z 平面上处处可导, 有理函数除在分母的零点之外都可导.

2. 解析函数的定义, 特别注意在一点解析与在一点可导的差别

定义 1. 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内处处可导, 则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 D 内的**解析函数**, 或称函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

解析函数的和、差、积、商以及复合函数仍是解析函数.

多项式函数是复平面上的解析函数, 有理函数在复平面上除去分母的零点之外的区域解析.

3. 函数解析的充要条件及其应用

   若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导, 则 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=u_x-\mathrm{i}u_y=v_y+\mathrm{i}v_x$.

   定理 3. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微且满足 C–R 条件 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

   推论 1. 若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 有一阶连续偏导数, 且满足 C–R 条件, 则 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导.

   定理 4. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内的每一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微且满足 C–R 条件.

4. 掌握解析函数与调和函数之间的关系, 特别是利用调和函数构造解析函数的方法.

   定义 2. 若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数, 并且满足二维**拉普拉斯方程**

   $$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,$$

   则称 $\varphi(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数.

   定义 3. 若 u 和 v 都是区域 D 内的调和函数, 并满足 C–R 条件

   $$u_x=v_y, u_y=-v_x,$$

   则称 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

   定理 5. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析, 当且仅当 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

   例 1. 验证 $u=x^3-3xy^2$ 是平面上的调和函数, 并求以它为实部的解析函数.

   解 因为

   $$\begin{aligned} u_x &= 3x^2-3y^2, u_y=-6xy,\\ u_{xx} &= 6x, \qquad u_{yy}=-6x. \end{aligned}$$

   故 u 是平面上的调和函数. 要求以 u 为实部的解析函数, 先利用 C-R 方程中的一个得

   $$v_y=u_x=3x^2-3y^2.$$

   于是可求得

   $$v=\int(3x^2-3y^2)\,\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是待定的一元实函数. 为确定 $\varphi(x)$, 再利用 C-R 方程中的另一个方程 $v_x = 6xy + \varphi'(x) = -u_y = 6xy$, 得 $\varphi'(x) = 0$. 于是 $\varphi(x) = C$. 因此 $v = 3x^2y - y^3 + C$, 而所求解析函数为

$$f(z) = u + \mathrm{i}v = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C).$$

因为解析函数一定可以写成复变量 z 的表达式, 我们令 $y = 0$ 得 $f(x) = x^3 + \mathrm{i}C$, 于是有 $f(z) = z^3 + \mathrm{i}C$. ∎

5. 基本初等解析函数的定义和基本性质

指数函数 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ 在整个 z 平面上解析, 且 $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$, 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为（基本）周期.

正弦函数 $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$ 和余弦函数 $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$ 都是无界整函数.

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi, \mathrm{i}\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. $\mathrm{Ln}\, z^2 = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z \neq 2\,\mathrm{Ln}\, z$.

幂函数 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln} z}$.

第三章　柯西定理　柯西积分

1. 复积分的参数方程计算法, 适用于被积函数为连续但非解析的复函数情形

如果积分路径 C 的参数方程为 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \alpha \le t \le \beta$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. 复积分的基本性质

如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿曲线 C 可积, 则有

(1) $\displaystyle\int_C af(z)\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, a 是复常数;

(2) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是由曲线 C_1 和 C_2 衔接而成;

(4) $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C^- 表示与 C 方向相反的曲线.

定理 6 (积分估计定理)**.** *设函数 $f(z)$ 在曲线 C 上连续, 且 $|f(z)| \le M, z \in C$, 则*

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \le ML,$$

其中 L 是 C 的长度, 中间的积分为第一类曲线积分.

3. 柯西积分定理

定理 7 (柯西积分定理)**.** *设 $f(z)$ 是单连通区域 D 内的解析函数, C 是 D 内的一条围线, 则*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

定理 8 (复围线情形的柯西积分定理)**.** *设 D 是由复围线 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 所围成的区域. 若函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析, 则*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

即

$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

推论 2 (围线变形原理)**.** 设 C_1 和 C_2 是两条围线, 其中 C_2 在 C_1 的内部. 若函数 $f(z)$ 在 C_1 和 C_2 所围成的闭区域上解析, 则

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

4. 利用牛顿–莱布尼兹公式对在单连通区域内的解析函数进行积分计算

定理 9. 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数, 则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z, z_0 \in D.$$

5. 利用柯西积分公式和高阶求导公式进行围线积分计算, 这是利用留数计算复围线积分的特殊情形

定理 10 (柯西积分公式)**.** 设 D 是以围线（或复围线）C 为边界的区域. 如果函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z, \quad z_0 \in D.$$

定理 11 (柯西积分型导数公式)**.** 条件同上一定理, 则函数 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

6. 了解莫雷拉定理（柯西积分逆定理）和刘维尔定理

定理 12 (莫雷拉定理)**.** 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内的任一围线 C, 有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

在整个复平面上解析的函数称为**整函数**. 例如多项式, $\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z$ 都是整函数. 当然常数函数也是整函数.

定理 13 (刘维尔定理)**.** 有界整函数必为常数.

第四章　解析函数的级数展式

1. 幂级数的收敛性质

定理 14 (阿贝尔)**.** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 则它在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛, 并且在任意闭圆 $|z| \leq k|z_0| (0 < k < 1)$ 上一致收敛.

推论 3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在点 z_1 处发散, 则它在以原点为心经过 z_1 的圆周的外部（即 $|z| > |z_1|$）处处发散.

定理 15. 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, 若它的系数满足

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l\text{（达朗贝尔）},$$

或

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l\text{（柯西）},$$

或

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = l\text{（柯西-阿达马）},$$

则它的收敛半径

$$R = \begin{cases} 0, & l = +\infty, \\ +\infty, & l = 0, \\ \dfrac{1}{l}, & 0 < l < +\infty. \end{cases}$$

幂级数在收敛圆周上的收敛性完全无规律可言.

定理 16. 设 $K: |z-a| < R\,(0 < R \le +\infty)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛圆, 则它的和函数 $f(z)$ 有如下性质:

(1) $f(z)$ 在收敛圆 K 内解析.

(2) 在 K 内, 对幂级数可以逐项积分或逐项微分任意多次, 并且有

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)c_n(z-a)^{n-m},\ m = 1, 2, 3, \cdots.$$

(3) 系数 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots$.

(4) 幂级数的表示形式是唯一的, 即若有 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, 则有 $b_n = c_n, n = 0, 1, 2, \cdots$.

2. 解析函数的泰勒展式

定理 17 (泰勒)**.** 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域 $K: |z-z_0| < R$ 内解析, 则 $f(z)$ 在 K 内可以展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad z \in K,$$

其中系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

这里 C 为 K 内包围 z_0 的任意一条围线, 并且此展式是唯一的.

解析函数的泰勒展式的收敛半径等于从展开点到距离它最近的奇点（不包括可去奇点）之间的距离.

定理 18. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析的充分必要条件是 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有幂级数展式即泰勒展式.

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\quad \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nz^n,\quad |z|<1;$$

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nz^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!},\quad |z|<+\infty.$$

3. 解析函数的零点定义和零点的阶的三种判别方法

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点, 且 $f(a)=0$, 则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的**零点**. 若 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$, 但 $f^{(m)}(a)\neq 0$, 则称 a 为 $f(z)$ 的 m **阶零点**.

命题 1. 点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点当且仅当 $f(z)$ 在点 a 处的泰勒展式的最低幂次项的幂次为 m.

定理 19. 点 a 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点当且仅当存在一个在 a 的某个邻域内解析的函数 $\varphi(z)$ 满足

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),\quad \varphi(a)\neq 0.$$

4. 了解解析函数零点的孤立性和解析函数的唯一性定理

定理 20 (解析函数的唯一性定理)**.** 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内解析, $z_k\,(k=1,2,3,\cdots)$ 是 D 内互不相同的点, 且点列 $\{z_k\}$ 在 D 内有聚点. 如果 $f(z_k)=g(z_k), k=1,2,3,\cdots$, 则在 D 内恒有 $f(z)=g(z)$.

5. 洛朗级数的概念和展开方法

定理 21 (洛朗)**.** 在圆环 $K: r<|z-a|<R\,(0\le r<R\le+\infty)$ 内的解析函数 $f(z)$ 必可展成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n,\quad z\in K,$$

其中系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

这里 Γ 为圆周 $|z-a|=\rho\,(r<\rho<R)$, 并且此展式是唯一的.

例 2. 求函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在下列各区域内的洛朗展式.

(a) $0<|z-1|<1$; (b) $|z|<1$; (c) $1<|z|<2$; (d) $2<|z|<+\infty$.

解 先将函数 $f(z)$ 分解成如下的简单和式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

下面分别在各个区域内求它的洛朗展式.

(a) 当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

或者从展开区域 $0<|z-1|<1$ 中可以知道要求的洛朗展式的通项为 $c_n(z-1)^n$ 的形式, 而待展开的函数 $f(z)$ 的原表达式中正好含有 $(z-1)^{-1}$, 所以我们也可以直接从 $f(z)$ 的原表达式出发去求它的洛朗展式.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} \times \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} \times \frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n. \end{aligned}$$

最后一步对求和指标作了一个变换. 我们看到两种解法的结果是一样的, 这要归功于洛朗展式的唯一性.

(b) 当 $|z|<1$ 时,

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

(c) 当 $1<|z|<2$ 时,

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} == -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(d) 当 $2<|z|<+\infty$ 时,

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}.$$ ∎

6. 解析函数孤立奇点的定义和分类以及三类孤立奇点的判别法, 特别注意极点的阶的判别法

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某个空心解析邻域内有洛朗展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

我们称非负幂部分即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 为 $f(z)$ 在点 a 的**正则部分**或**解析部分**, 而称负幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为函数 $f(z)$ 在点 a 的**主要部分**或**奇异部分**.

定义 4. 设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点.

(1) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零, 则称点 a 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.

(2) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限多项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}\,(c_{-m} \neq 0),$$

则称点 a 为 $f(z)$ 的m **阶极点**.

(3) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为无穷多项, 则称点 a 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点. 若极限 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且是有限复数, 则 a 为可去奇点; 若极限 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, 则 a 为极点; 若极限 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在, 则 a 为本性奇点.

定理 22. 设点 a 为解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列三个命题等价:

(1) a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点;

(2) 在 a 的某个空心邻域内, $f(z)$ 可表示为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 处解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点（这时 a 本为 $g(z)$ 的可去奇点, 视作解析点）.

推论 4. 若一个真有理函数（即分子上的多项式函数的次数比分母上的多项式的低的有理函数）$f(z)$ 的全部极点为 $z_1,z_2,\cdots,z_m$, 则它可以被表示为如下的部分分式展式

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{c_{kj}}{(z-z_k)^j},$$

其中 n_k 为极点 z_k 的阶, 即一个真有理函数可以表示成它的全部极点的洛朗展式的主要部分的和.

7. 无穷远点为孤立奇点的定义和分类以及判别方法

定义 5. 若 $\zeta=0$ 为 $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点, 则相应地称 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点（视作解析点）、m 阶极点或本性奇点.

设在 $r<|z|<+\infty$ 内, $f(z)$ 可展成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{-\infty}c_nz^n+\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^n,$$

我们称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_nz^n$ 为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的**主要部分**, 而称 $\sum\limits_{n=0}^{-\infty}c_nz^n$ 为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的**正则部分**. 有了 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分的概念后, 由定义 5, 我们也可再次直接从主要部分出发对孤立奇点 ∞ 进行分类. 另外, 注意有

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{\zeta\to 0}f\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

上述讨论说明有限孤立奇点处的结论均可相应地推广到无穷远点为孤立奇点的情形.

定理 23. $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为 m 阶极点的充要条件是下列两个条件之中的任何一条成立:

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分为 $c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m(c_m\neq 0)$;

(2) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的某空心邻域内能表成 $f(z)=z^m\psi(z)$, 其中 $\psi(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内解析, 且 $\psi(\infty)\neq 0$.

第五章　留数及其应用

1. 利用留数定理计算复围线积分

定义 6. 设函数 $f(z)$ 以有限点 a 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$ 内解析, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\ (\Gamma:|z-a|=\rho,0<\rho<R)$$

为 $f(z)$ 在孤立奇点 a 的**留数**, 记作 $\mathrm{Res}[f(z);a]$.

定理 24 (留数定理)**.** 设函数 $f(z)$ 在（复）围线 C 所围闭区域上, 除有限个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外解析, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z); a_k].$$

设函数 $f(z)$ 在点 a 的空心解析邻域 $0 < |z-a| < R$ 内有洛朗展式 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, 有 $\mathrm{Res}[f(z); a] = c_{-1}$.

解析函数在有限可去奇点处的留数必为零.

定理 25. 设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$, 则

$$\mathrm{Res}[f(z); a] = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

即

$$\mathrm{Res}[f(z); a] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{\mathrm{d}z^{n-1}}.$$

推论 5. 当 a 为 $f(z)$ 的一阶极点时,

$$\mathrm{Res}[f(z); a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

推论 6. 设 $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z), \psi(z)$ 在点 a 解析, $\varphi(a) \neq 0$, a 是 $\psi(z)$ 的一阶零点, 则

$$\mathrm{Res}[f(z); a] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

2. 偶解析函数在**原点**处的留数为零

3. 利用广义留数定理（即无穷远点处的留数）计算复围线积分

定义 7. 设 ∞ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 ∞ 的空心邻域 $0 \le r < |z| < +\infty$ 内解析, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z,\ (\Gamma: |z| = \rho,\ \rho > r)$$

为$f(z)$ **在 ∞ 的留数**, 记作 $\mathrm{Res}[f(z); \infty]$. 这里 Γ^- 表示沿顺时针方向积分.

设 $f(z)$ 在 $0 \le r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, 有 $\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -c_{-1}$.

解析函数在无穷远点的留数不一定为零.

命题 2. 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, 则 $\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)$.

$$\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\zeta^2}f(\frac{1}{\zeta}); 0\right].$$

定理 26. 若函数 $f(z)$ 在扩充 z 平面上, 包括无穷远点在内, 只有有限个孤立奇点, 则 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数总和为零.

4. 利用留数定理计算三类实积分

若 $R(x,y)$ 是关于 x 和 y 的二元有理函数, 则称 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 为**三角有理函数**. 在单位圆周 $|z|=1$ 上, 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$, 则有

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}},\ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta.$$

于是由计算复积分的参数方程法有

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}R(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}})\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}.$$

定理 27. 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数, 且 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 高两次以上. 若 $f(z)$ 在实轴上无极点, 在上半 z 平面的全部极点为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z);a_k].$$

定理 28. 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 为多项式函数, 且 $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 高. 若 $\lambda>0$, 且 $f(z)$ 在实轴上无极点, 在上半 z 平面的极点为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z};a_k].$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x,$$

所以实积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\ \text{和}\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$$

可转化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

进行计算, 只需根据需要取计算结果的实部或虚部即可.

第七章　数学物理方程的导出和基本概念

1. 定解问题的概念和分类

定解问题是由一个泛定方程加上适当的定解条件构成的. 只包含初始条件的定解问题称为**初值问题**或**柯西问题**. 只包含边界条件的定解问题称为**边值问题**. 根据边界条件的不同, 边值问题可进一步分为**第一类边值问题**（又称为**狄利克雷问题**）、**第二类边值问题**（又称为**诺依曼问题**）和 **第三类边值问题**（又称为**罗宾问题**）. 既包含初始条件又包含边界条件的定解问题称为**混合问题**或**初边值问题**.

弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的初始条件有两个:

$$\begin{aligned}&\text{初始位移}\quad u(x,0)=\varphi(x),\\&\text{初始速度}\quad u_t(x,0)=\psi(x).\end{aligned}$$

热传导方程 $u_t = a^2 u_{xx}$ 的初始条件只有一个:

$$\text{初始温度} \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

弦振动方程的三类边界条件（主要以 $x=0$ 端为例）:

(1) 端点固定时, 边界条件为 $u(0,t) = 0,\ t \geq 0.$ 一般地, 端点位移已知时, 边界条件为 $u(0,t) = g(t),\ t \geq 0.$

(2) 端点自由的边界条件为 $u_x(0,t) = 0,\ t \geq 0.$ 一般地, 若垂直作用在端点的外力已知, 边界条件为 $u_x(0,t) = g(t),\ t \geq 0.$

(3) 端点为弹性支撑的边界条件为

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0,\ t \geq 0,$$
$$u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ t \geq 0.$$

如果在 u 轴方向还有外力作用, 则边界条件为

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = g(t),\ t \geq 0,$$
$$u_x(l,t) + hu(l,t) = g(t),\ t \geq 0.$$

热传导方程的三类边界条件为:

(1) 在 $x=0$ 端的温度已知, 即 $u(0,t) = \psi(t)$.

(2) 在 $x=0$ 端的热流密度已知, 即 $u_x(0,t) = \psi(t)$. 特别地, 边界绝热条件为 $u_x(0,t) = 0$.

(3) 当所考察对象与周围介质通过边界有热量交换时, 会出现第三类边界条件, 一般写为 $u_x(0,t) + \sigma u(0,t) = \psi(t)$.

2. 了解定解问题的适定性: 解的存在性、唯一性和稳定性.

第八章　分离变量法

1. 利用分离变量法求解偏微分方程混合问题或边值问题（见 8.1 节、8.2 节和 8.5 节）

例 3. 用分离变量法解弦方程混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \quad (1a) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \quad (1b) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \quad (1c) \end{cases}$$

解　设方程(1a)有变量分离形式的非零特解

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2}$$

将其代入泛定方程(1a)中得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

两边同除以 $a^2 X(x)T(t)$ 得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

可得两个常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{3}$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

将非零特解(2)代入边界条件(1b)中可得

$$X(0) = X(l) = 0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < l, & \text{(4a)} \\ X(0) = X(l) = 0. & \text{(4b)} \end{cases}$$

对 λ 分三种情况进行讨论:

1) 若 $\lambda < 0$, 则方程(4a)的通解为

$$X(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

将其代入边界条件(4b)得

$$A + B = 0,$$
$$A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,l} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0.$$

解此线性方程组可得 $A = B = 0$, 只有零解, 故在此种情形下特征值问题(4)无解.

2) 若 $\lambda = 0$, 则方程(4a)的通解为

$$X(x) = Ax + B.$$

将其代入边界条件(4b)得

$$B = 0, \quad Al + B = 0.$$

由此可得 $A = B = 0$, 只有零解, 故在此种情形下特征值问题(4)也无解.

3) 若 $\lambda > 0$, 则方程(4a)的通解为可表示为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

将其代入边界条件(4b)得

$$A = 0, \quad A\cos\sqrt{\lambda}\,l + B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

由此可得 $B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. 因为已知 $A = 0$, 而要求的是非零解, 所以必有 $B \neq 0$, 故有

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

此方程有解

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是可知对应 λ_n 有非零解

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

综上所述, 特征值问题(4)有特征值和特征函数

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

把特征值 λ_n 代入方程(3)中, 注意到 $\lambda_n > 0$, 得其通解为

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n \sin\frac{n\pi at}{l},$$

其中 C_n, D_n 是任意常数. 于是可得对应于特征值 λ_n 的特解为

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad n = 1, 2, \cdots,$$

叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$\begin{aligned} C_n =& \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots; \\ D_n =& \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

∎

2. 非齐次边界条件的处理

以下面的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{5}$$

为例来介绍边界条件齐次化的方法. 设

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

其中 $w(x,t)$ 是一个待定的辅助函数. 由混合问题(5)可知 $v(x,t)$ 是如下的定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) - w_{tt} + a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \quad (6a) \\ v(0,t) = u(0,t) - w(0,t), v(l,t) = u(l,t) - w(l,t), & t \geq 0, \quad (6b) \\ v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0), v_t(x,0) = \psi(x) - w_t(x,0), & 0 \leq x \leq l \quad (6c) \end{cases}$$

的解. 为使(6b)中的边界条件为齐次条件, 只需选取适当的函数 $w(x,t)$ 使之满足

$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = g_1(t) - w(0,t) = 0, \quad v(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = g_2(t) - w(l,t) = 0,$$

即

$$w(0,t) = g_1(t), \quad w(l,t) = g_2(t). \tag{7}$$

能够实现边界条件齐次化的辅助函数 $w(x,t)$ 有很多, 我们大可在选择辅助函数 $w(x,t)$ 的时候, 优先考虑那些使得定解问题(6)的形式尽可能简单的辅助函数 $w(x,t)$. 我们尝试考虑能否再要求

$$w_{xx} = 0.$$

显然, 满足这一条件的函数 $w(x,t)$ 必有如下的形式

$$w(x,t) = A(t)x + B(t),$$

其中 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是待定的函数. 再由边界条件(7)便可确定

$$A(t) = \frac{1}{l}[g_2(t) - g_1(t)],\ B(t) = g_1(t).$$

所以我们找到的辅助函数为

$$w(x,t) = \frac{x}{l}[g_2(t) - g_1(t)] + g_1(t).$$

因此定解问题(5)的求解可转换为求解定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) - \dfrac{x}{l}[g_2''(t) - g_1''(t)] - g_1''(t), & 0 < x < l, t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - \dfrac{x}{l}[g_2(0) - g_1(0)] - g_1(0), & 0 \leq x \leq l, \\ v_t(x,0) = \psi(x) - \dfrac{x}{l}[g_2'(0) - g_1'(0)] - g_1'(0), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

边界条件齐次化的方法本质上只是线性叠加原理对线性偏微分方程的一个特殊应用而已.

对某些非齐次边界条件的定解问题, 在边界条件齐次化时, 连使辅助函数满足 $w_{xx} = 0$ 这样简单的要求都做不到, 例如两端都是第二类边界条件的情形. 这时仍应考虑使 $v(x,t)$ 满足的方程尽可能的简单, 即使方程的非齐次项尽可能的简单. 所以一般选辅助函数 $w(x,t)$ 为关于 x 的多项式函数, 并且应使多项式的次数尽可能的低. 下面我们列出常见的几类边界条件齐次化时可选取的辅助函数 $w(x,t)$ 的形式:

(1) $u(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t), w(x,t) = g_2(t)x + g_1(t)$;

(2) $u_x(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t), w(x,t) = g_1(t)(x - l) + g_2(t)$;

(3) $u_x(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t), w(x,t) = g_1(t)x + \dfrac{g_2(t) - g_1(t)}{2l}x^2$.

3. 非齐次定解问题的齐次化

对混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = A, u(l,t) = B, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, 只要 $w(x)$ 满足

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + f(x) = 0, & 0 < x < l, \\ w(0) = A, w(l) = B, \end{cases}$$

$v(x,t)$ 便满足齐次定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - w(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

第十章　积分变换法

1. 傅里叶变换的定义: $\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x,\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$

   线性性质:　$F[c_1f_1+c_2f_2]=c_1F[f_1]+c_2F[f_2]$;

   位移性质:　$F[f(x-a)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}\widehat{f}(\omega)$;

   相似性质:　$F[f(kx)]=\dfrac{1}{|k|}\widehat{f}\left(\dfrac{\omega}{k}\right),\ k\neq 0$;

   微分性质:　$F[f'(x)]=\mathrm{i}\omega\widehat{f}(\omega)$;

   卷积性质:　$F[f*g(x)]=\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$.

2. 利用傅里叶变换求解偏微分方程初值问题:

例 4. 用傅里叶变换求解一维热传导方程初值问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

解　关于 x 作傅里叶变换. 记 $\widehat{u}(\omega,t)=F[u], \widehat{\varphi}(\omega)=F[\varphi]$, 由微分性质和线性性质有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t)=-a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t), & t>0,\\ \widehat{u}(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$

其中的 ω 视为参数. 解得

$$\widehat{u}(\omega,t)=\widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}.$$

对 $\widehat{u}(\omega,t)$ 作傅里叶逆变换, 便可得到解 $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi.$

例 5. 用傅里叶变换求解一维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

解　关于 x 作傅里叶变换, 记 $\widehat{u}(\omega,t)=F[u], \widehat{\varphi}(\omega)=F[\varphi], \widehat{\psi}(\omega)=F[\psi]$, 则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\widehat{u}(\omega,t)=-a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t), & t>0,\\ \widehat{u}(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega), \widehat{u}_t(\omega,0)=\widehat{\psi}(\omega). \end{cases}$$

解得

$$\widehat{u}(\omega,t)=\widehat{\varphi}(\omega)\cos a\omega t+\frac{1}{a\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin a\omega t.$$

做傅里叶逆变换得解为 $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$

3. 拉普拉斯变换的定义: $\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$, $f(t) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_0-\mathrm{i}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{i}\infty} \widehat{f}(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$.

   线性性质: $\mathcal{L}[\alpha f+\beta g] = \alpha\mathcal{L}[f]+\beta\mathcal{L}[g]$;

   延迟性质: $\mathcal{L}[f(t-\tau)H(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-\tau s}\widehat{f}(s)\,(\tau>0)$;

   微分性质: $\mathcal{L}[f'(t)] = s\widehat{f}(s)-f(0)$, $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\widehat{f}(s)-sf(0)-f'(0)$;

   卷积性质: $\mathcal{L}[f*g(t)] = \widehat{f}(s)\widehat{g}(s)$.

4. 利用拉普拉斯变换求解常微分方程和积分方程.
   常用公式: $\mathcal{L}[t^n\mathrm{e}^{at}] = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.

例 6. 求解一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t)+ay(t) = f(t), \quad t>0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

解 对方程两边作拉普拉斯变换得

$$s\widehat{y}(s)-y_0+a\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

解得

$$\widehat{y}(s) = \frac{y_0}{s+a}+\frac{\widehat{f}(s)}{s+a}.$$

两边作逆变换, 由卷积性质得

$$y(t) = y_0\mathrm{e}^{-at}+\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

■

例 7. 求解二阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+\omega^2y(t) = f(t), \quad t>0, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \end{cases}$$

其中 $\omega \neq 0$ 为实数.

解 对方程两边作拉普拉斯变换得

$$s^2\widehat{y}(s)-sy_0-y_1+\omega^2\widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

解得

$$\widehat{y}(s) = y_0\frac{s}{s^2+\omega^2}+y_1\frac{1}{s^2+\omega^2}+\frac{\widehat{f}(s)}{s^2+\omega^2} = y_0\frac{s}{s^2+\omega^2}+\frac{y_1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\omega\widehat{f}(s)}{s^2+\omega^2}.$$

两边作逆变换, 由卷积性质得

$$y(t) = y_0\cos\omega t+\frac{y_1}{\omega}\sin\omega t+\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

■

第十一章　波动方程的初值问题

1. 用达朗贝尔解法（即行波法）求解波动方程初值问题

例 8.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \quad (8a) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \quad (8b) \end{cases}$$

解　设方程(8a)的通解为

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at). \tag{9}$$

把通解(9)代入初始条件(8b)中, 得

$$f(x) + g(x) = \varphi(x),$$
$$-af'(x) + ag'(x) = \psi(x).$$

对上面的第二式从 x_0 到 x 积分得

$$-af(x) + ag(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + c,$$

其中 C 是一个任意常数. 从上面的两个关于 f 和 g 的函数方程中可以解出

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{c}{2a},$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{c}{2a}.$$

把它们代入通解(9)中便可得一维波动方程初值问题的**达朗贝尔公式**

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \qquad \blacksquare$$

2. 波的影响区域、依赖区间和决定区域（见 11.1.2 小节）

区间 $[x_1, x_2]$ 中的扰动的影响区域为无穷倒立梯形区域 $\{(x,t) | x_1 - at \le x \le x_2 + at,\ t > 0\}$；

点 (x_0, t_0) 的依赖区间为区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$;

区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域为以区间 $[x_1, x_2]$ 为底边, 顶点为 $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_2 - x_1}{2a}\right)$ 的等腰三角形区域.

3. 半无界弦振动问题

例 9.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \quad (10a) \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \quad (10b) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \ge 0. \quad (10c) \end{cases}$$

解　首先设解可表示为

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at). \tag{11}$$

把它代入初始条件(10c)中得

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad x \ge 0,$$
$$-af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \quad x \ge 0.$$

对上面第二式从 x_0 到 x 积分得

$$-af(x)+ag(x)=\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+c,\quad x\geq 0,$$

其中 c 是一个任意常数. 从上面的方程中解出

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{c}{2a},\quad x\geq 0,\tag{12}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{c}{2a},\quad x\geq 0.\tag{13}$$

把通解(11)代入边界条件(10b)中得

$$f(-at)+g(at)=0.$$

令 $\xi=-at$, 则得

$$f(\xi)=-g(-\xi),\quad \xi<0,$$

即

$$f(x)=-g(-x)=-\frac{1}{2}\varphi(-x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{-x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{c}{2a},\quad x<0.\tag{14}$$

当 $x\geq at$ 时, 把式(12)和(13)代入通解(11)中得

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi;$$

当 $0\leq x<at$ 时, 把式(14)和(13)代入通解(11)中得

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

∎