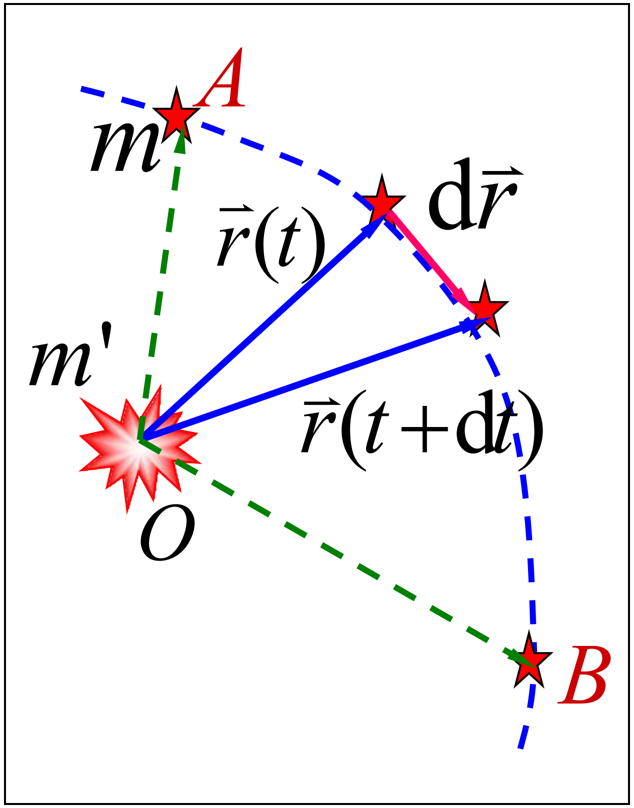
一　万有引力、重力、弹性力作功的特点

1）　万有引力作功

以m'为参考系，m的位置矢量为$\vec{r}$.

m' 对 m 的万有引力为

$$\boxed{\vec{F}=-G\frac{m'm}{r^3}\vec{r}}$$



m由A点移动到B点时$\vec{F}$ 作功为

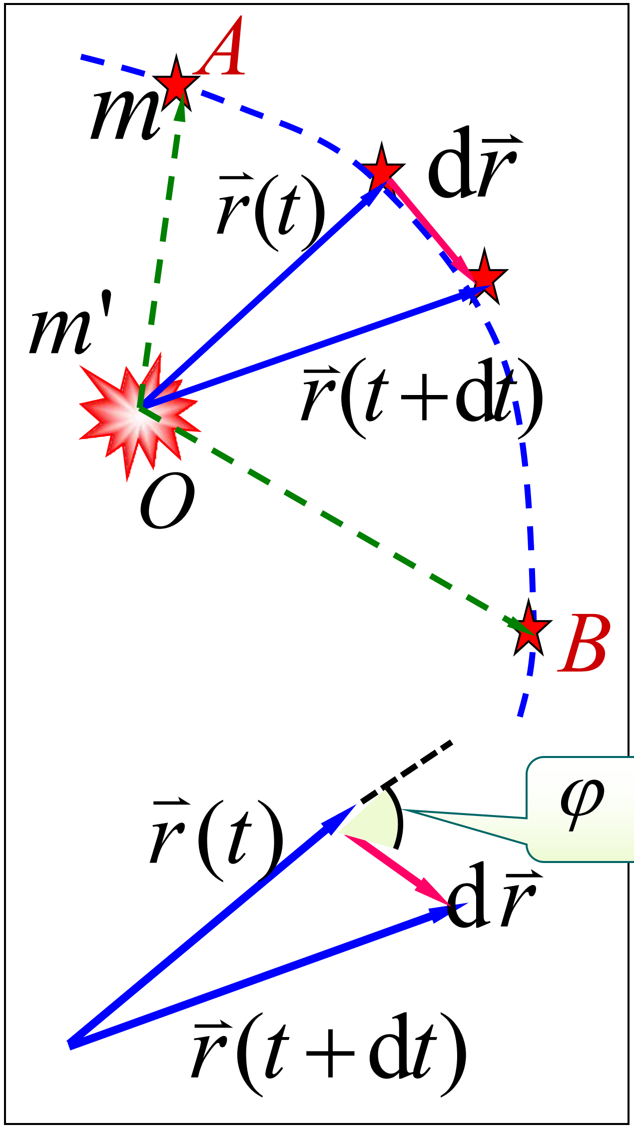
$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_A^B-G\frac{m'm}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{A}^{B}-G\frac{m'm}{r^{3}}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r}=r\left|d\vec{r}\right|\cos\varphi=rdr$$

$$W=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{m'm}{r^{2}}\mathrm{d}r$$

$$W=-\left[(-G\frac{m'm}{r_B})-(-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$



2） 重力作功

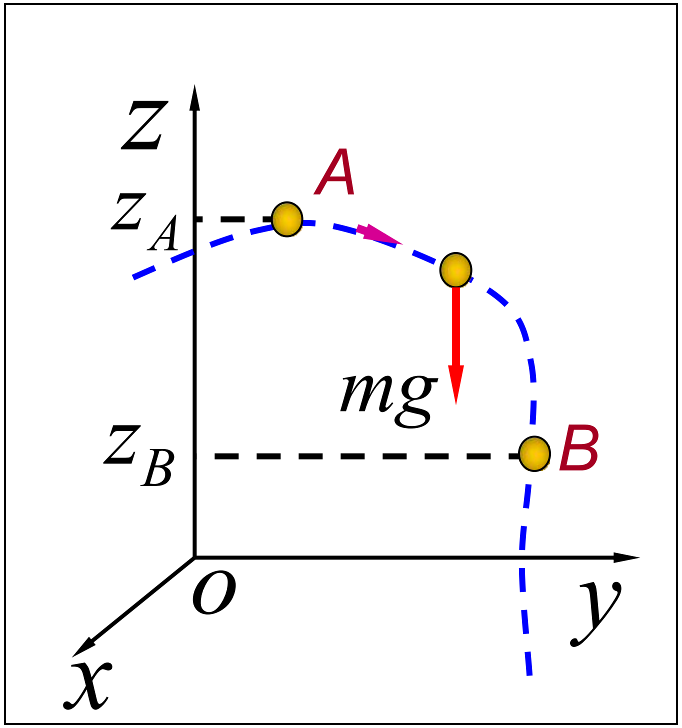
$$\boxed{\vec{P} = -mg\vec{k}}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

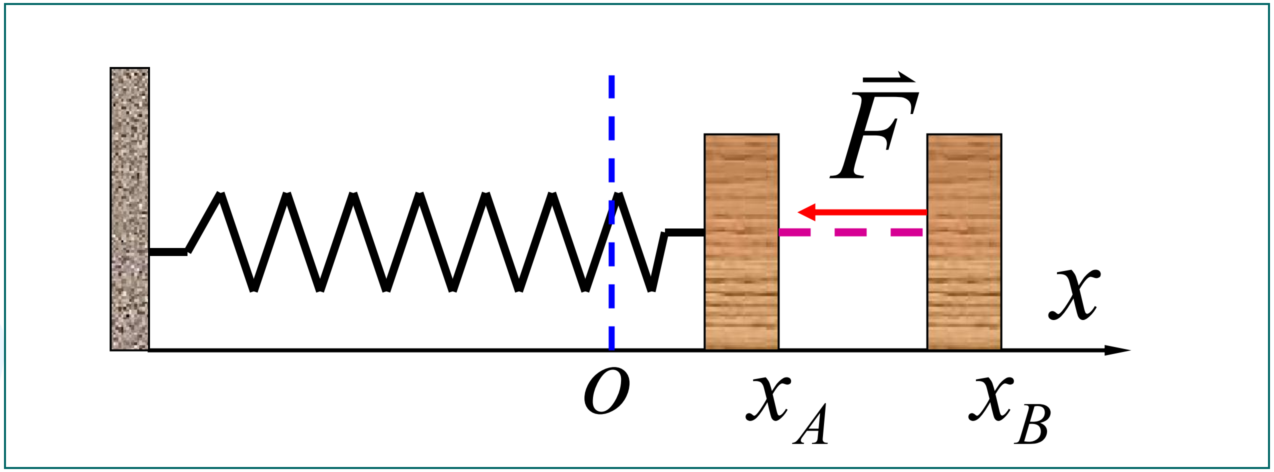
$$W = \int_A^B \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z$$

$$= -(mgz_B - mgz_A)$$

$$W = \oint -mg\,\mathrm{d}z = 0$$



3） 弹性力作功



$$\boxed{\vec{F} = -kx\vec{i}}$$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F\mathrm{d}x = \int_{x_A}^{x_B} -kx\mathrm{d}x$$

$$W = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$$

$$W = \oint -kx\mathrm{d}x = 0$$

二　保守力和非保守力

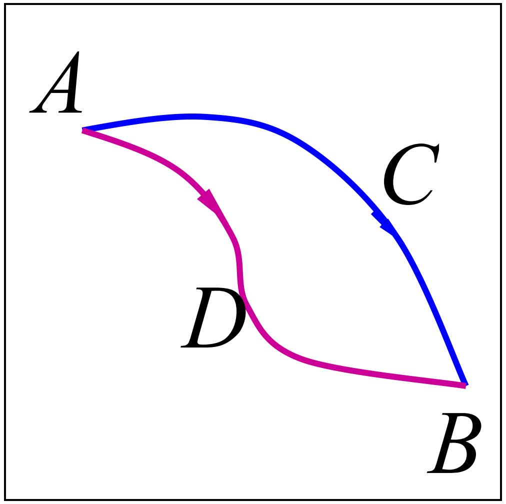
　　保守力：力所作的功与路径无关，仅决定于相互作用质点的始末相对位置．

引力功　$W=-\left[(-G\frac{m'm}{r_B})-(-G\frac{m'm}{r_A})\right]$

重力功　$W=-(mgz_B-mgz_A)$

弹力功　$W=-(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2)$

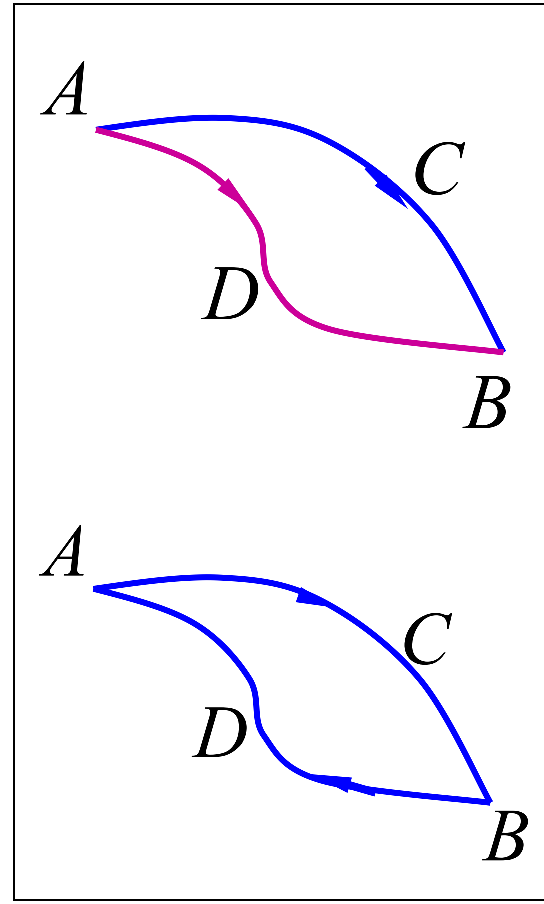
$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$



$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\oint_{l}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\cancel{\int_{ACB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}+\cancel{\int_{BDA}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\oint_{l}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$$



物体沿闭合路径运动 一周时，
保守力对它所作的功等于零 .

非保守力：力所作的功与路径有关 .（例如摩擦力）

三 势能

- 势能 与物体间相互作用及相对位置有关的能量 .

重力功

$$W = -(mgz_B - mgz_A)$$

引力功

$$W = -\left[(-G\frac{m'm}{r_B}) - (-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$

弹力功

$$W = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$$

重力势能

$$E_p = mgz$$

引力势能

$$E_p = -G\frac{m'm}{r}$$

弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

- 保守力的功

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_P$$

讨论

- 势能是状态函数 $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$
- 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关.
- 势能函数的形式与保守力的性质密切相关，对应于一种保守力的函数就可以引进一种相关的势能函数。
- 势能是属于系统的.
- 势能计算 $\boxed{W = -(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}) = -\Delta E_{\mathrm{p}}}$

令 $E_{\mathrm{p0}} = 0$ $\boxed{E_{\mathrm{p}}(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p0}}=0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$

势能只具有相对意义

重力势能（以地面为零势能点）$E_P = \int_y^0 -mgdy = -mg(0-y) = mgy$

弹性势能（以弹簧平衡位置处为零势能点）

$$E_p = \int_x^0 -kx \bullet dx = -(0-\frac{1}{2}kx^2) = \frac{1}{2}kx^2$$

引力势能（以无穷远为零势能点）

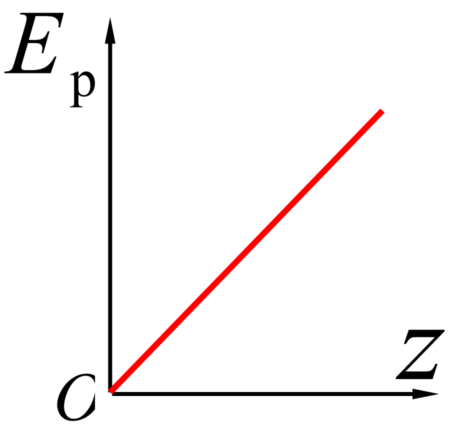
$$E_P = \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\frac{1}{r}$$

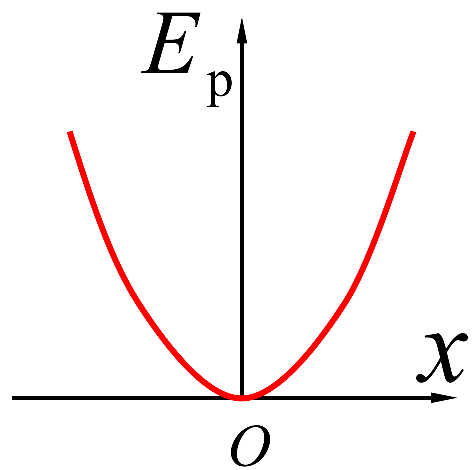
质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

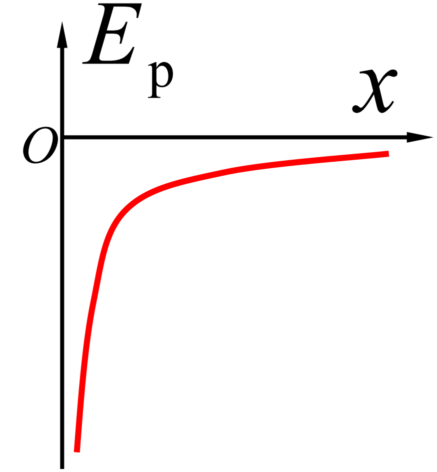
$$E = E_k + E_p$$

四 势能曲线

$$E_\mathrm{p}=mgz \qquad E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2 \qquad E_\mathrm{p}=-G\frac{m'm}{r}$$







重力势能曲线　　弹性势能曲线　　引力势能曲线

$z=0,\quad E_\mathrm{p}=0 \qquad x=0,\quad E_\mathrm{p}=0 \qquad r\to\infty,\quad E_\mathrm{p}=0$

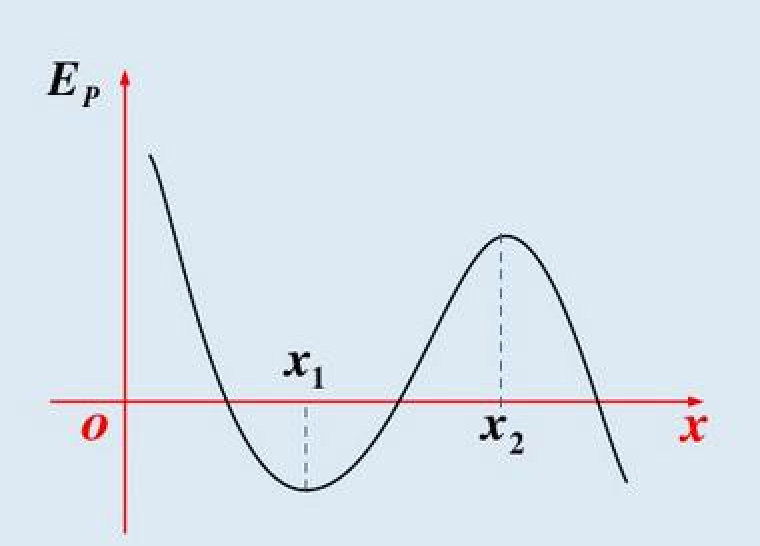
势能曲线提供的信息

1、质点在轨道上任意位置时，
质点系所具有的势能值。

2、势能曲线上任意一点的斜率 $\left(dE_P / dl\right)$ 的负值，
表示质点在该处所受的保守力

利用势能曲线分析质点的平衡位置及特征。

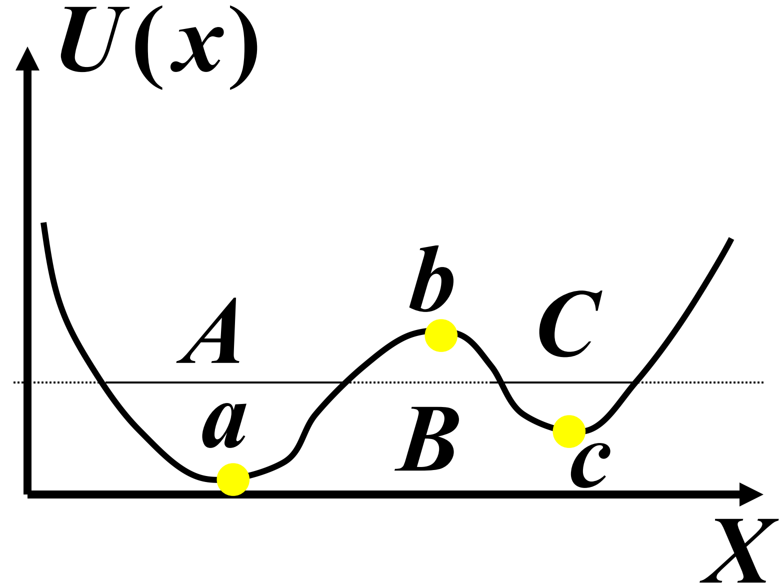
- x_1 位置
  - 当 $x < x_1$ 时，$f > 0$
  - 当 $x > x_1$ 时，$f < 0$
  - 力总是指向平衡位置，因此是稳定平衡。



- x_2 位置
  - 当 $x < x_2$ 时，$f < 0$
  - 当 $x > x_2$ 时，$f > 0$
- 力总是背离平衡位置，因此是不稳定平衡。

力总是指向平衡位置

稳定平衡 ⇒ a, c



力总是背离平衡位置 不稳定平衡 ⇒ b