4.3 洛朗级数

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 4 月 5 日

解析函数的孤立奇点

如果对函数 $f(z)$ 的奇点 z_0, 存在一个空心解析邻域, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

解析函数的孤立奇点

如果对函数 $f(z)$ 的奇点 z_0, 存在一个空心解析邻域, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

解析函数在孤立奇点处能否展成函数项级数形式?

解析函数的孤立奇点

如果对函数 $f(z)$ 的奇点 z_0, 存在一个空心解析邻域, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

解析函数在孤立奇点处能否展成函数项级数形式?

这个问题引出了**洛朗级数**.

目录

4.3.1 洛朗级数的收敛圆环

由级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.13}$$

与级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{4.14}$$

的和式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.15}$$

给出的函数项级数称为洛朗级数, 其中 a 和系数 c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 都是复常数.

- 洛朗级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.15}$$

有时也被称为双边幂级数.

- 洛朗级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.15}$$

有时也被称为双边幂级数.

- 洛朗级数是幂级数的推广. 因为当 $c_n = 0,\ n = -1, -2, \cdots$ 时, 级数(4.15)就是幂级数.

- 洛朗级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.15}$$

有时也被称为双边幂级数.

- 洛朗级数是幂级数的推广. 因为当 $c_n = 0$, $n = -1, -2, \cdots$ 时, 级数(4.15)就是幂级数.
- 为方便起见, 我们将洛朗级数(4.15)简记为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{4.16}$$

今后都将洛朗级数记为这个形式.

如果级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.13}$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{4.14}$$

都在点 z_0 收敛, 则称洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.16}$$

在点 z_0 收敛;

如果级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{4.13}$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{4.14}$$

都在点 z_0 收敛, 则称洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{4.16}$$

在点 z_0 收敛; 否则, 只要级数(4.13)和(4.14)其中有一个在点 z_0 发散, 就称洛朗级数(4.16)在点 z_0 发散.

我们曾经用类似的方式定义过微积分中的广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{4.16}$$

由两部分，即幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{4.13}$$

和负幂次级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{4.14}$$

构成.

洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{4.16}$$

由两部分，即幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{4.13}$$

和负幂次级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{4.14}$$

构成.

幂级数(4.13)的收敛性我们已经知道了，因此洛朗级数(4.16)的收敛性由负幂次级数(4.14)决定.

对负幂次级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{4.14}$$

只需做变换 $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$ 就可将其转化为我们熟悉的幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n.$$

对负幂次级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{4.14}$$

只需做变换 $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$ 就可将其转化为我们熟悉的幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n.$$

若此幂级数的收敛圆为 $|\zeta| < \dfrac{1}{R}$, 则负幂次级数(4.14)在 $|z-a| > R$ 内（绝对）收敛,

对负幂次级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{4.14}$$

只需做变换 $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$ 就可将其转化为我们熟悉的幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n.$$

若此幂级数的收敛圆为 $|\zeta| < \dfrac{1}{R}$, 则负幂次级数(4.14)在 $|z-a| > R$ 内（绝对）收敛, 在 $|z-a| \geq R_1$ $(R_1 > R)$ 内一致收敛.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛圆为 $|z-a|<R\,(R>0)$, 负幂次级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 的收敛区域为 $|z-a|>r\,(r<+\infty)$, 则

- 当 $r \geq R$ 时, 两者无公共收敛区域, 即洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 无收敛区域;
- 当 $r<R$ 时, 洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在圆环 $r<|z-a|<R\,(0 \leq r<R \leq +\infty)$ 内绝对收敛, 并且在任一闭圆环 $\alpha \leq |z-a| \leq \beta\,(r<\alpha<\beta<R)$ 上一致收敛.

综上所述可得

定理 4.12

若洛朗级数(4.16)的收敛圆环为 $K: r < |z-a| < R\,(0 \leq r < R \leq +\infty)$, 则(4.16)在圆环 K 内绝对收敛, 并且在任一闭圆环 $\alpha \leq |z-a| \leq \beta\,(r < \alpha < \beta < R)$ 上一致收敛. 洛朗级数(4.16)的和函数 $f(z)$ 在圆环 K 内解析, 并可逐项积分、逐项求导.

这个定理与定理 4.6 是相对应的.

洛朗简介

洛朗（1813-1854）是一名工程师，曾经负责位于英吉利海峡海岸上的 Le Havre 港口的扩建工程，使之成为法国的重要海港．在负责港口扩建工程期间，他开始写作数学论文．1843 年，洛朗为竞争法国科学院设的一个大奖，提交了一篇数学论文，其中包含了洛朗级数．不幸的是，他错过了论文提交截止日期．所以尽管得到了柯西的赏识，洛朗不仅与大奖无缘，论文也没被科学院接受出版．差不多同时期洛朗向科学院还提交过另一篇论文．同样虽然被柯西推荐发表，但却又一次被科学院忽视而未能出版．受此打击后，洛朗将研究方向转向了光波理论．在这个课题上洛朗发表了一系列论文．1846 年科学院有一个空缺职位，柯西提名了洛朗，但他没有当选．雅可比当选了这个职位．1854 年 9 月 2 日，年仅 42 岁的洛朗去世后．他的妻子又向法国科学院提交了他的两篇论文．一篇关于光学的论文又一次虽然得到柯西的推荐但未能发表．另一篇论文直到 1863 年才得以发表．

4.3.2 解析函数的洛朗展式

既然洛朗级数的和函数是其收敛圆环内的解析函数，那么反过来，圆环内的解析函数是否可以展成洛朗级数？

4.3.2 解析函数的洛朗展式

既然洛朗级数的和函数是其收敛圆环内的解析函数，那么反过来，圆环内的解析函数是否可以展成洛朗级数？

定理 4.13 (洛朗)

在圆环 $K: r < |z-a| < R\,(0 \le r < R \le +\infty)$ 内的解析函数 $f(z)$ 必可展成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in K, \tag{4.17}$$

其中系数

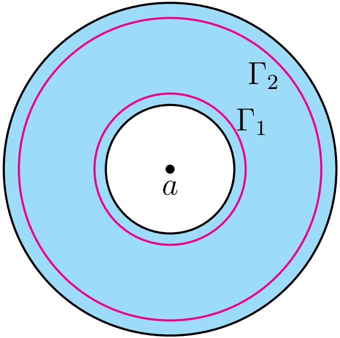
$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{4.18}$$

这里 Γ 为圆周 $|z-a| = \rho\,(r < \rho < R)$，并且此展式是唯一的.

证 设 z 为 K 内任意一点, 则总可以在 K 内取到两个圆周

$$\Gamma_1 : |\zeta - a| = \rho_1 \quad \text{和} \quad \Gamma_2 : |\zeta - a| = \rho_2,$$

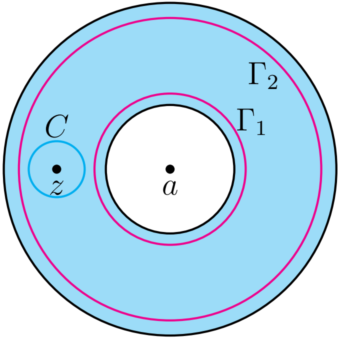
使得 z 位于圆环 $\rho_1 < |\zeta - a| < \rho_2$ 内.



证　设 z 为 K 内任意一点, 则总可以在 K 内取到两个圆周

$$\Gamma_1 : |\zeta - a| = \rho_1 \quad \text{和} \quad \Gamma_2 : |\zeta - a| = \rho_2,$$

使得 z 位于圆环 $\rho_1 < |\zeta - a| < \rho_2$ 内. 于是由柯西积分公式和复围线情形的柯西积分定理有



$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \end{aligned}$$

其中 C 是在圆环 $\rho_1 < |\zeta - a| < \rho_2$ 内以 z 为心的一个圆周.

所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.19}$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta. \tag{4.19}$$

对于第一个积分，只要照搬定理 4.7 的证明中的相应部分，就可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4.20}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.19}$$

对于第一个积分，只要照搬定理 4.7 的证明中的相应部分，就可得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4.20}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

对(4.19)式中的第二个积分可类似处理，我们有

$$\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{f(\zeta)}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{f(\zeta)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}. \tag{4.21}$$

$$\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{f(\zeta)}{(z-a)-(\zeta-a)} = \frac{f(\zeta)}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}. \tag{4.21}$$

当 $\zeta \in \Gamma_1$ 时,

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1.$$

于是(4.21)式可以展成一致收敛的级数

$$\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{f(\zeta)}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

沿 Γ_1 逐项积分, 再在两端乘以 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}$ 即得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{4.22}$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\cdots.$$

由式(4.19)、(4.20)和(4.22)以及围线形变原理即得展式(4.17).

沿 Γ_1 逐项积分, 再在两端乘以 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}$ 即得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{4.22}$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\cdots.$$

由式(4.19)、(4.20)和(4.22)以及围线形变原理即得展式(4.17).

最后证明展式是唯一的. 设 $f(z)$ 在圆环 K 内另有展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widetilde{c}_n(z-a)^n,\quad z\in K.$$

由定理4.12知, 它在圆周 $\Gamma: |z-a| = \rho\,(r < \rho < R)$ 上一致收敛. 于是乘以在 Γ 上有界的函数 $\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$ 后仍然一致收敛, 故可逐项积分得

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{c}_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\,\mathrm{d}z.$$

由定理4.12知, 它在圆周 $\Gamma : |z-a| = \rho\,(r < \rho < R)$ 上一致收敛. 于是乘以在 Γ 上有界的函数 $\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$ 后仍然一致收敛, 故可逐项积分得

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{c}_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\,\mathrm{d}z.$$

由例 3.2 知, 上式右端级数除 $n = m$ 的那一项积分为 $2\pi\mathrm{i}$, 其余各项均为零. 于是有

$$\widetilde{c}_m = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}z = c_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

所以展式是唯一的. ∎

定义 4.3

展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad z\in K, \tag{4.17}$$

右端的洛朗级数称为解析函数 $f(z)$ 在圆环 K 内的**洛朗展式**.

定义 4.3

展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,\quad z\in K, \tag{4.17}$$

右端的洛朗级数称为解析函数 $f(z)$ 在圆环 K 内的**洛朗展式**.

同泰勒展式一样, 洛朗展式的有效范围可通过圆环的边界上是否有奇点来确定.

4.3.3 洛朗展式举例

由于洛朗展式的系数公式

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{20}$$

比较复杂, 我们基本上不会直接利用它去求洛朗展式, 一般总是利用一些已知的泰勒展式来求洛朗展式.

例 4.11

求函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在下列各区域内的洛朗展式

(1) $0 < |z-1| < 1$; (2) $|z| < 1$; (3) $1 < |z| < 2$; (4) $2 < |z| < +\infty$.

解　先将函数 $f(z)$ 分解成如下的简单和式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

下面分别在各个区域内求它的洛朗展式.

解 先将函数 $f(z)$ 分解成如下的简单和式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

下面分别在各个区域内求它的洛朗展式.

(1) 当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

解 先将函数 $f(z)$ 分解成如下的简单和式

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

下面分别在各个区域内求它的洛朗展式.

(1) 当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

或者从展开区域 $0<|z-1|<1$ 中可以知道要求的洛朗展式的通项为 $c_n(z-1)^n$ 的形式, 而待展开的函数 $f(z)$ 的原表达式中正好含有 $(z-1)^{-1}$, 所以我们也可以直接从 $f(z)$ 的原表达式出发去求它的洛朗展式.

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(z-1)}$$
$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

最后一步对求和指标作了一个变换.

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(z-1)}$$
$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

最后一步对求和指标作了一个变换. 我们看到两种解法的结果是一样的, 这要归功于洛朗展式的唯一性.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} \times \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} \times \frac{1}{1-(z-1)}$$
$$= -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{+\infty} (z-1)^n.$$

最后一步对求和指标作了一个变换. 我们看到两种解法的结果是一样的, 这要归功于洛朗展式的唯一性.

(2) 当 $|z| < 1$ 时,

$$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

(3) 当 $1 < |z| < 2$ 时,

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(3) 当 $1 < |z| < 2$ 时,

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(4) 当 $2 < |z| < +\infty$ 时,

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}. \quad \blacksquare$$

(3) 当 $1<|z|<2$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(4) 当 $2<|z|<+\infty$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}. \quad \blacksquare$$

从这个例子可以看出一个函数在不同区域的洛朗展式是不同的. 所以在求洛朗展式时, 应特别注意是在什么区域内展开.

例 4.12

$\dfrac{\sin z}{z}$ 在 z 平面上有唯一的孤立奇点 $z=0$, 在其空心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内有洛朗展式

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots.$$

例 4.12

$\dfrac{\sin z}{z}$ 在 z 平面上有唯一的孤立奇点 $z=0$, 在其空心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内有洛朗展式

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots.$$

例 4.13

$\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 z 平面上有唯一的孤立奇点 $z=0$, 在其空心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内有洛朗展式

$$\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}=2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}.$$

作业

习题四

9. 将下列函数在指定的环域内展成洛朗级数:

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $0<|z|<1$, $1<|z|<+\infty$;

(3) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}$, $0<|z|<1$ (写出前四项即可).

10. 将下列各函数在指定点的空心邻域内展成洛朗级数, 并指出成立的范围:

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z=\mathrm{i}$.

11. 把 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ 在下列区域展成洛朗或泰勒级数：

(2) $|z| > 1$; (3) $|z+1| < 2$; (4) $|z+1| > 2$.

12. 把 $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ 展成在下列区域收敛的洛朗或泰勒级数：

(1) $0 < |z| < 1$. (2) $|z| > 1$. (5) $|z+1| < 1$. (7) $|z+1| > 2$.