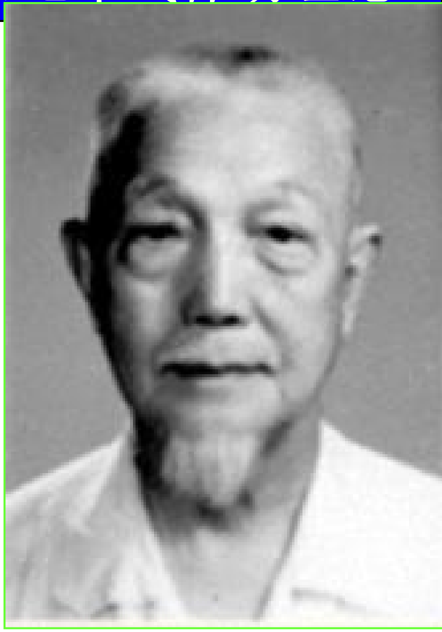
麦克斯韦分子速率分布定律

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$ → 气体分子的速率是随机的，但在平衡态下则是有规律的。

虽然个别分子的速率是不确定的, 可以取零到无穷大的一切可能值，但是，对处于平衡态的气体，大量分子的速率具有确定的统计分布。

1859年Maxwell用概率论导出了气体分子速率分布律，后由Boltzmann使用经典统计力学理论导出。

1920年Stern用实验证实了Maxwell气体分子速率分布律，我国科学家葛正权也与1933年验证了该定律。



葛正权

1921年毕业于南京高等师范工科，1929年自费赴美留学，在南加州大学攻读物理，1930年获硕士学位后，入旧金山加州大学伯克利研究院攻读博士学位，研究课题是“用分子束方法证明麦克斯韦一波尔兹曼分子速率分布定律实验”，1933年完成重要学术论文《用分子束方法证明麦克斯韦 -波尔兹曼分子速率分布定律，并测定双原子的铋分子的分解热》。

获物理学博士及美国物理学会和数学学会金钥匙各一枚。

1933年回国，先后在武汉大学.解放军第二军医大学任教，积极从事教学、科研工作,指导制成国内第一架脑电波直流放大器，装配成50万倍的 场效应电子显微镜 并与一机部、上海照相器材厂等合作研制静电复印机。1984年加入中国共产党。1988年3月因病逝世。

气体分子的速率分布 分布函数

气体分子可具有各种可能的速率。通常用某一速率区间内的分子数占总分子数的百分比来描述分子按速率的分布规律。

①.将速率从 $0 \to \infty$ 分割成很多相等的速率区间。

②.求气体在平衡态下分布在各区间内的分子数。

③.各区间内分子数占气体分子总数的百分比。

1. 符号约定

N——一定量的气体分子总数

ΔN ($\mathrm{d}N$)——速率分布在某一区间 v—$v+\Delta v$(v—$v+\mathrm{d}v$) 内的气体分子数

$\Delta N/N$ ($\mathrm{d}N/N$)——分布在速率区间 v—$v+\Delta v$(v—$v+\mathrm{d}v$) 内的气体分子数占总分子数的比率

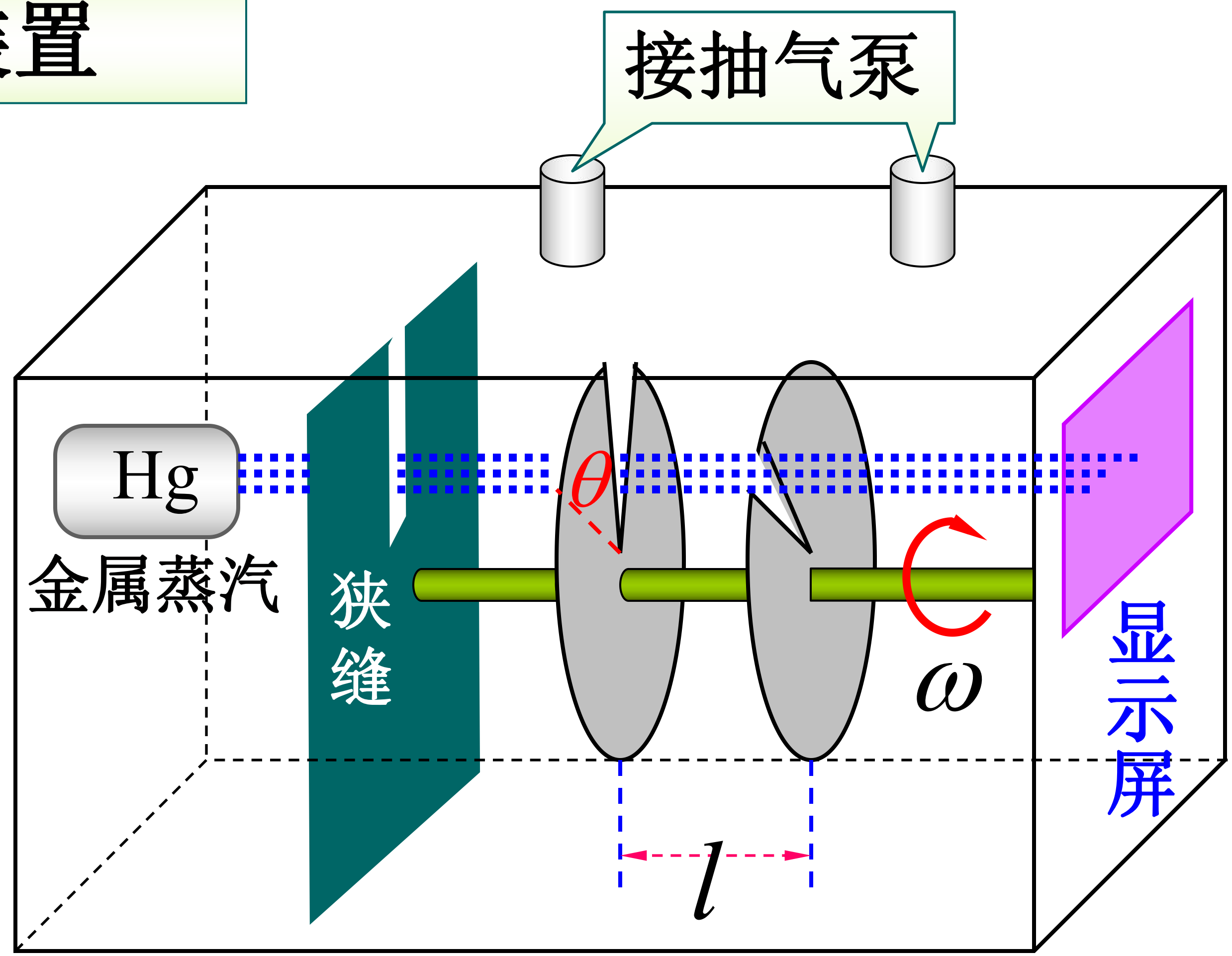
测定气体分子速率分布的实验

实验装置

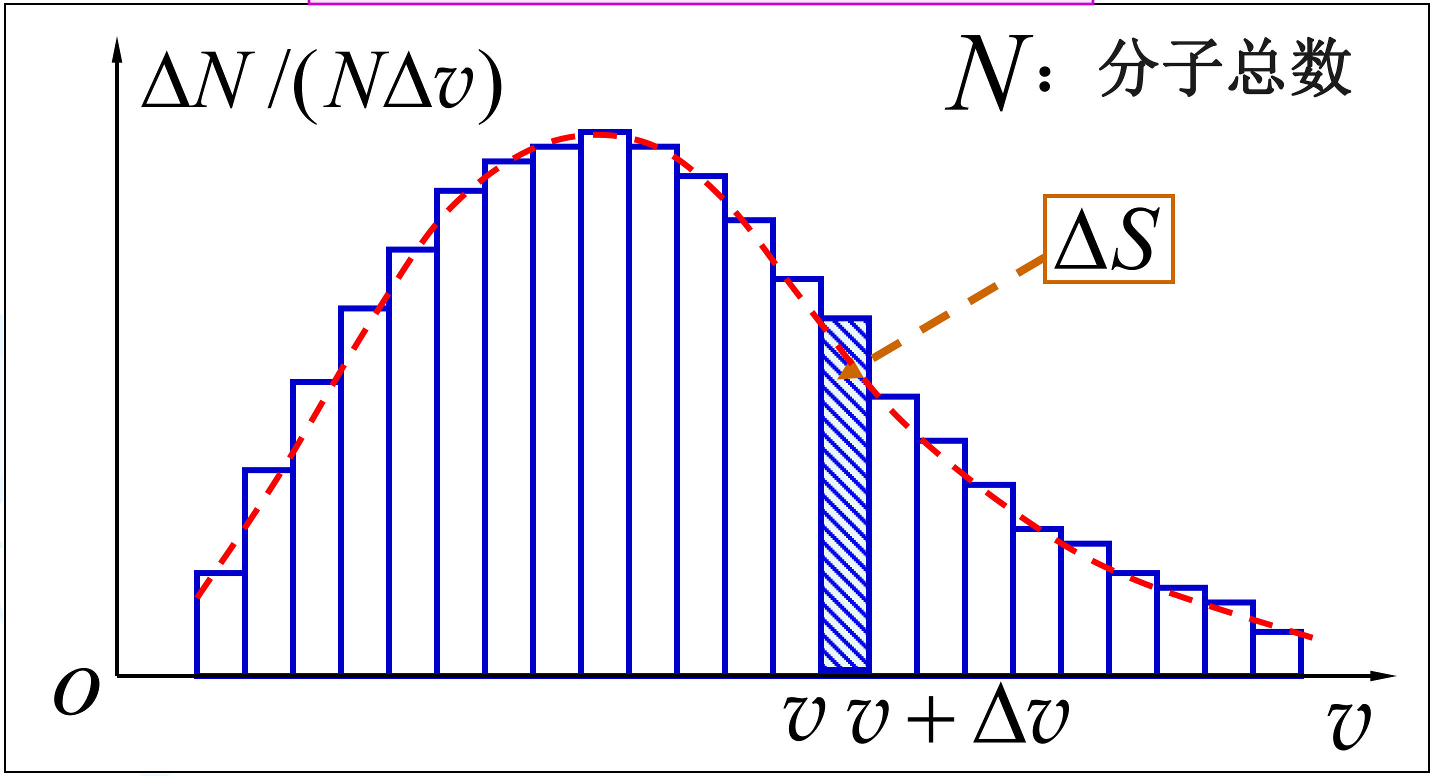
$$\theta \approx 2^\circ$$

$$\frac{l}{v} = \frac{\theta}{\omega}$$

$$v = \frac{\omega}{\theta} l$$



分子速率分布图

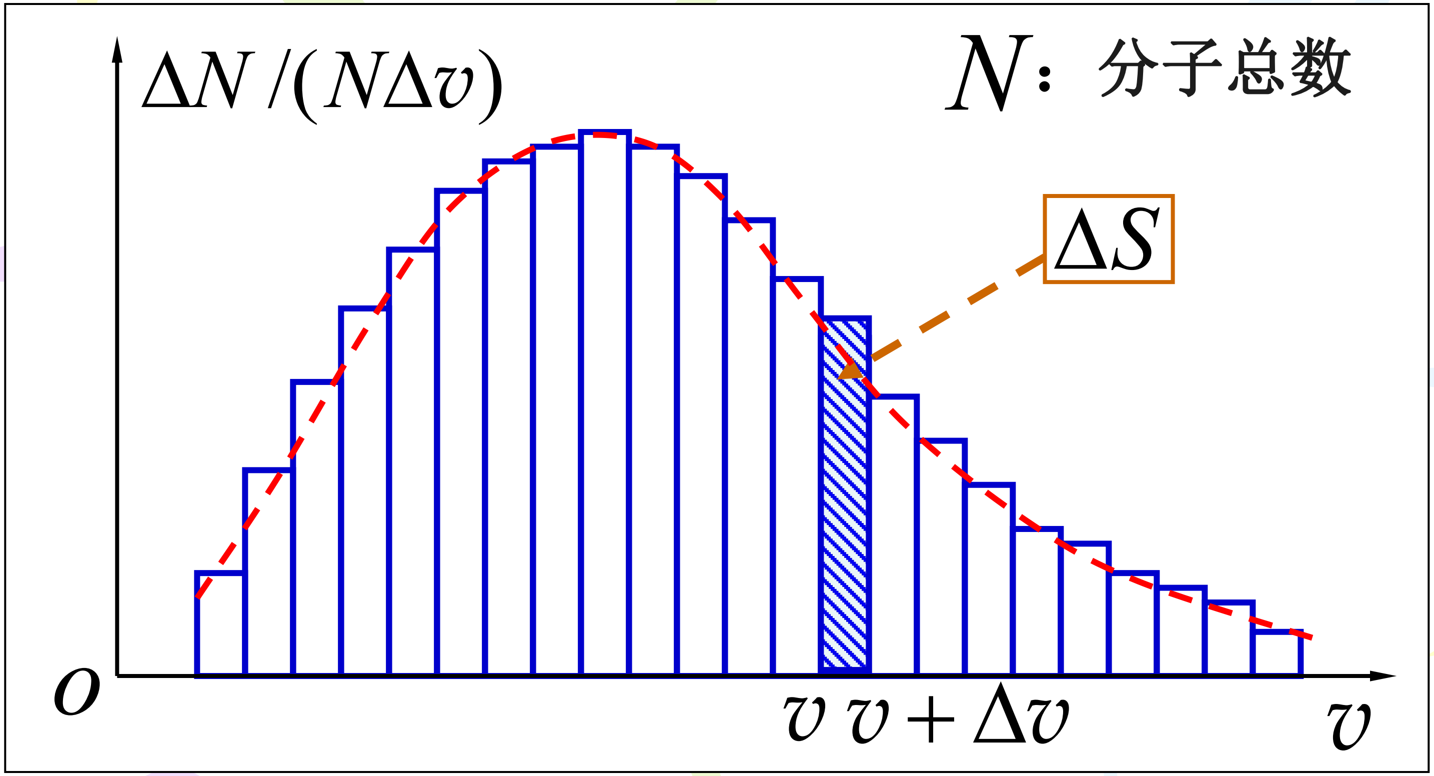


ΔN 为速率在 $v \longrightarrow v+\Delta v$ 区间的分子数.

$$\boxed{\Delta S = \frac{\Delta N}{N}}$$

表示速率在 $v \longrightarrow v+\Delta v$ 区间的分子数占总数的百分比 .

2. 气体分子速率分布的实验规律



① $\Delta N/N$与v和Δv有关；

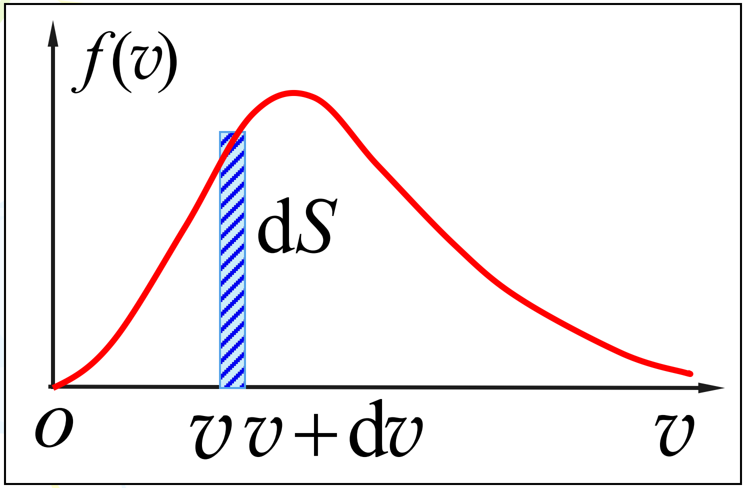
② 速率小和大的分子数少，速率中等的分子数多；

③ $\Delta N/N$ 存在一个最大值；

④ $\Delta N/N$ 同气体所处的状态及种类有关；

分布函数

$$f(v)=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta N}{N\Delta v}=\frac{1}{N}\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta v}=\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v}$$

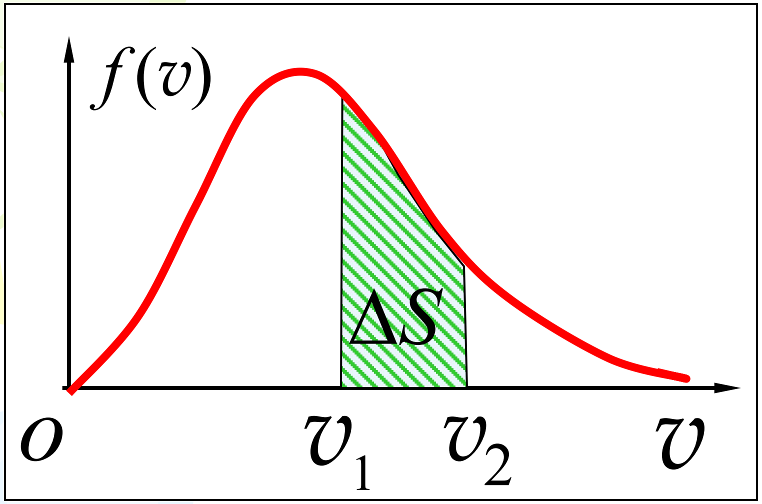


物理意义

表示在温度为 T 的平衡状态下，速率在 v 附近单位速率区间 的分子数占总数的百分比 .

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=f(v)\mathrm{d}v=\mathrm{d}S$$

表示速率在 $v\to v+\mathrm{d}v$ 区间的分子数占总分子数的百分比 .



$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(v)\mathrm{d}v = \mathrm{d}S$$

速率位于$v \to v + \mathrm{d}v$ 内分子数

$$\mathrm{d}N = Nf(v)\mathrm{d}v$$

速率位于 $v_1 \to v_2$ 区间的分子数 $\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} N f(v)\mathrm{d}v$

速率位于 $v_1 \to v_2$ 区间的分子数占总数的百分比

$$\Delta S = \frac{\Delta N(v_1 \to v_2)}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)\mathrm{d}v$$

◆ 归一化条件

$$\int_0^N \frac{\mathrm{d}N}{N} = \int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v = 1$$

练习：试说明下列各式的物理意义。

$$(1)\ f(v)dv, \qquad (2)\ Nf(v)dv,$$

$$(3)\ \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv, \qquad (4)\ \int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv.$$

答：由速率分布函数可知

$$\boxed{f(v)=\frac{dN}{Ndv}}$$

$$(1)\ f(v)dv=\frac{dN}{N}$$

表示在速率v附近，dv速率区间内分子出现的概率。

$$f(v)=\frac{dN}{Ndv}$$

$$(2)\ Nf(v)dv = dN$$

表示在速率v附近，dv速率区间内的分子个数。

$$(3)\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{\Delta N}{N}$$

表示在速率区间$v_1 \sim v_2$内，分子出现的概率。

$$(4)\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \Delta N$$

表示在速率区间$v_1 \sim v_2$内，分子出现的个数。

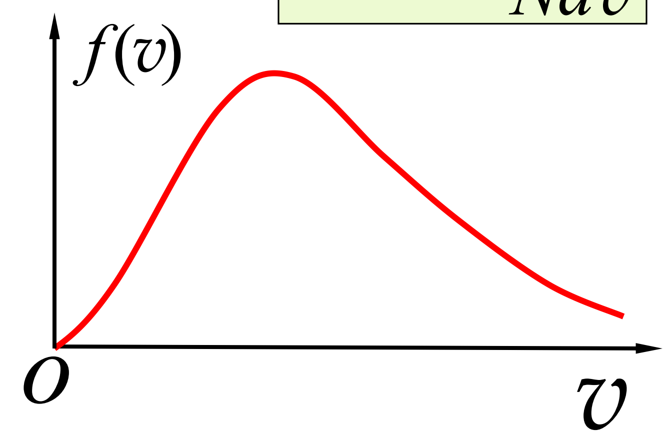
二 麦克斯韦气体速率分布定律

麦氏分布函数 $f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v$$

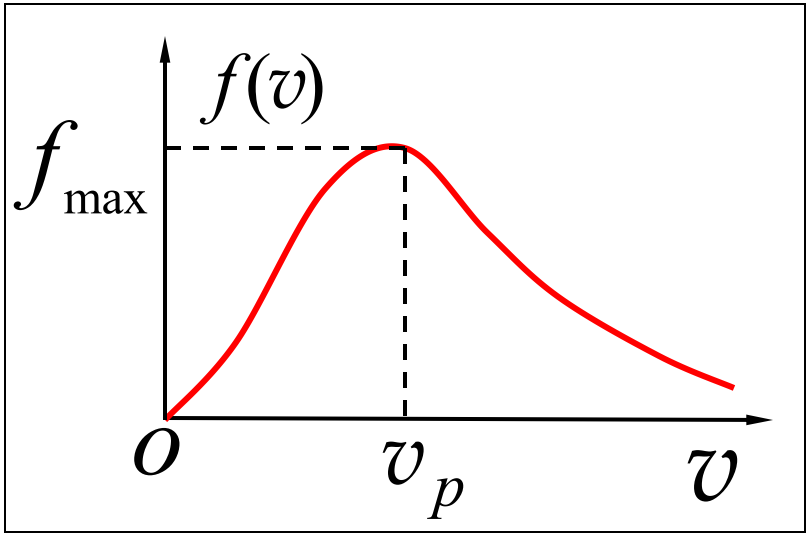
反映理想气体在热动平衡条件下，各速率区间分子数占总分子数的百分比的规律．

$$f(v)=\frac{dN}{Ndv}$$



三　三种统计速率

1） 最概然速率 v_p



$$\left.\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}\right|_{v=v_\mathrm{p}}=0$$

根据分布函数求得

$$\because M=mN_\mathrm{A},R=N_\mathrm{A}k$$

$$v_\mathrm{p}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\approx 1.41\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

$$\boxed{\therefore v_\mathrm{p}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

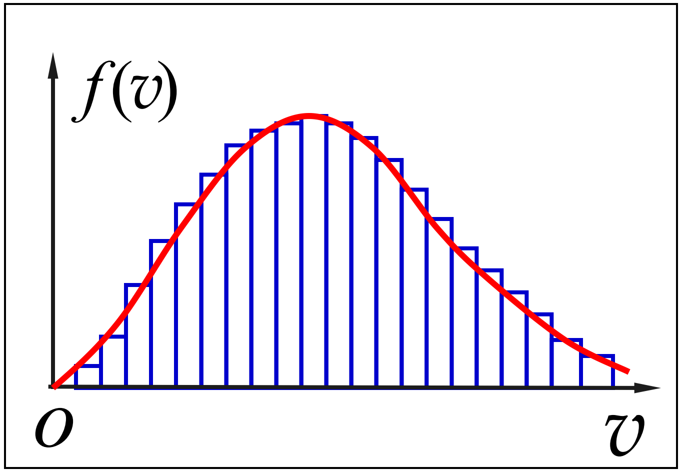
物理意义

气体在一定温度下分布在最概然速率 v_p 附近单位速率间隔内的相对分子数最多 .

2）平均速率 $\overline{v}$

$$\overline{v}=\frac{v_1\mathrm{d}N_1+v_2\mathrm{d}N_2+\cdots+v_i\mathrm{d}N_i+\cdots+v_n\mathrm{d}N_n}{N}$$

$$\overline{v}=\frac{\int_0^N v\mathrm{d}N}{N}=\frac{\int_0^\infty vNf(v)\mathrm{d}v}{N}$$



$$\overline{v}=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\boxed{\overline{v}\approx 1.60\sqrt{\frac{kT}{m}}=1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}}$$

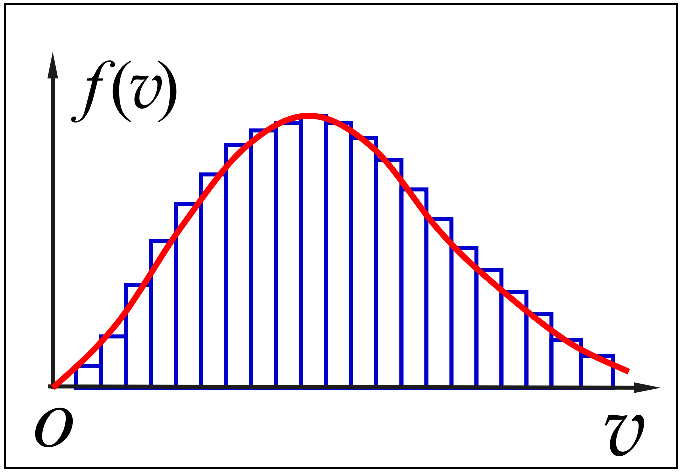
由平均速率公式 $\boxed{\overline{v}=\int_0^\infty vf(v)dv}$

我们可以进一步得到计算一个与速率有关的物理量 $g(v)$ 在整个速率空间上的统计平均值的公式:

$$\boxed{\overline{g(v)}=\int_0^\infty g(v)f(v)dv}$$

利用此公式可计算分子的方均根速率、分子的平均平动动能等。

3） 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$



$$\overline{v^2}=\frac{\int_0^N v^2\mathrm{d}N}{N}=\frac{\int_0^\infty v^2 Nf(v)\mathrm{d}v}{N}$$

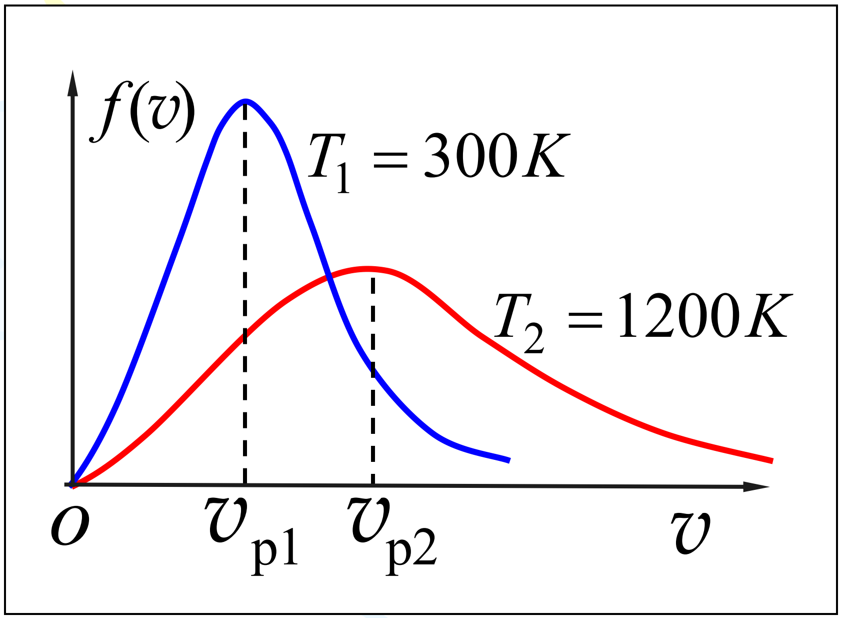
$$\boxed{\overline{v^2}=\frac{3kT}{m}}$$

$$\left\{\begin{aligned}
v_{\mathrm{rms}}&=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}\\
\overline{v}&\approx 1.60\sqrt{\frac{kT}{m}}=1.60\sqrt{\frac{RT}{M}}\\
v_{\mathrm{p}}&=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}
\end{aligned}\right.$$

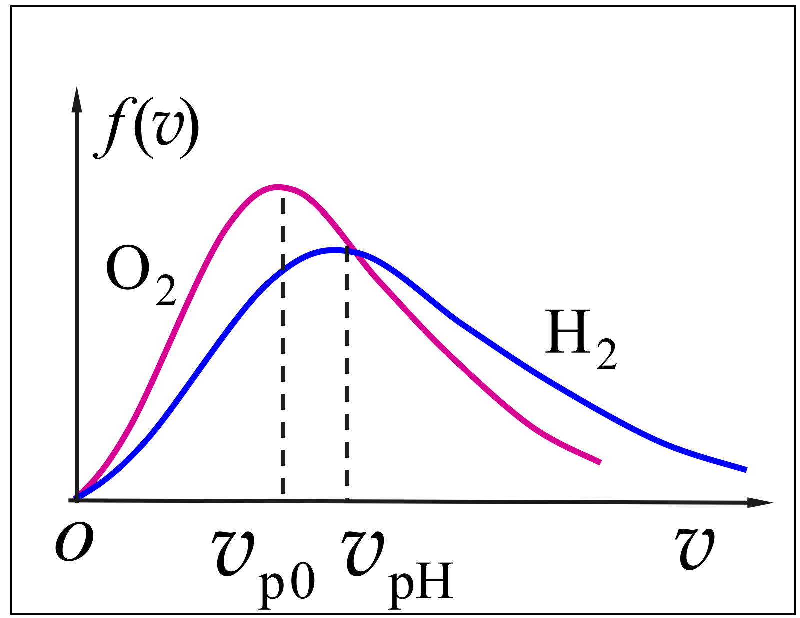
$$\boxed{v_{\mathrm{p}}<\overline{v}<\sqrt{\overline{v^2}}}$$

7－5　麦克斯韦气体分子速率分布率

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\qquad \overline{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\qquad \sqrt{\overline{v^{2}}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



N_2分子在不同温度下的速率分布



同一温度下不同气体的速率分布

讨论

麦克斯韦速率分布中最概然速率 v_p 的概念下面哪种表述正确？

（A）v_p 是气体分子中大部分分子所具有的速率.

（B）v_p 是速率最大的速度值.

（C）v_p 是麦克斯韦速率分布函数的最大值.

★（D）速率大小与最概然速率相近的气体分子的比率最大.

例 计算在 27°C 时，氢气和氧气分子的方均根速率 v_{rms} .

$$M_{\mathrm{H}}=0.002\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1} \qquad R=8.31\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$$

$$M_{\mathrm{O}}=0.032\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1} \qquad T=300\mathrm{K}$$

$$v_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

氢气分子 $v_{\mathrm{rms}}=1.93\times10^{3}\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

氧气分子 $v_{\mathrm{rms}}=483\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

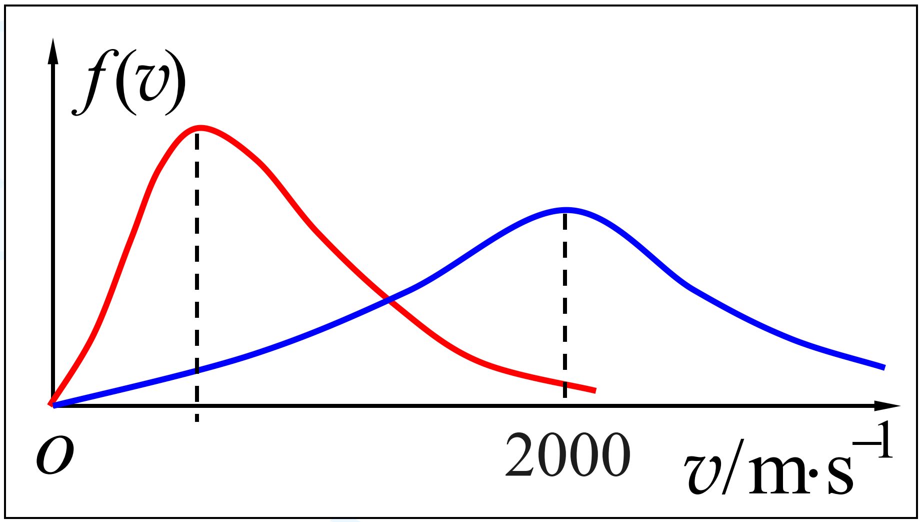
例　已知分子数 N，分子质量 m，分布函数 $f(v)$ 求　**1**）速率在 $v_{\mathrm{p}} \sim \overline{v}$ 间的分子数；**2**）速率在 $v_{\mathrm{p}} \sim \infty$ 间所有分子动能之和．

速率在 $v \rightarrow v+\mathrm{d}v$ 间的分子数 $\boxed{\mathrm{d}N = Nf(v)\mathrm{d}v}$

1）$$\int_{v_{\mathrm{p}}}^{\overline{v}} Nf(v)\mathrm{d}v$$

2）$$\int_{v_{\mathrm{p}}}^{\infty} \frac{1}{2} m v^2 Nf(v)\mathrm{d}v$$

例 如图示两条 $f(v)\sim v$ 曲线分别表示氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线，从图上数据求出氢气和氧气的最可几速率．



$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\because m(H_2)<m(O_2)$$

$$\therefore v_p(H_2)>v_p(O_2)$$

$$\therefore v_p(H_2)=2000\text{m/s}$$

$$\frac{v_p(H_2)}{v_p(O_2)}=\sqrt{\frac{m(O_2)}{m(H_2)}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=4$$

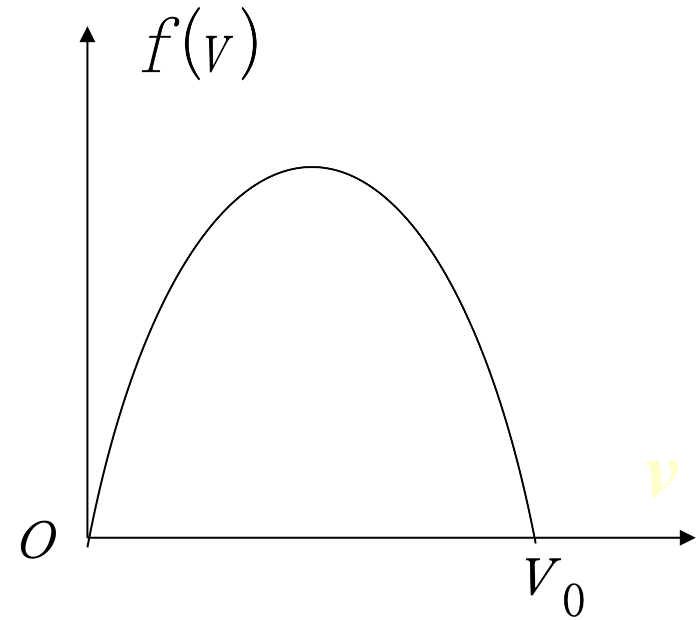
$$\therefore v_p(O_2)=500\text{m/s}$$

例： 设想有N个气体分子，其速率分布函数为

$$f(v)=\begin{cases} Av(v_0-v) & 0\le v\le v_0 \\ 0 & v>v_0 \end{cases}$$

试求: (1) 常数A；(2) 最概然速率，平均速率和方均根速率；(3) 速率介于$0\sim v_0/3$之间的分子数；(4) 速率介于$0\sim v_0/3$之间的气体分子的平均速率。

解： (1)气体分子的分布曲线如图



由归一化条件

$$\int_0^\infty f(v)dv=1$$

$$\int_0^{v_0} Av(v_0-v)dv=\frac{A}{6}v_0^3=1$$

$$A=\frac{6}{v_0^3}$$

(2)最概然速率由 $\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v_p} = 0$ 决定，即

$$\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v_p} = A(v_0 - 2v)\big|_{v_p} = 0 \longrightarrow v_p = \frac{v_0}{2}$$

平均速率

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv = \int_0^{v_0} \frac{6}{v_0^3} v^2 (v_0 - v)dv = \frac{v_0}{2}$$

方均速率

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)dv = \int_0^{v_0} \frac{6}{v_0^3} v^3 (v_0 - v)dv = \frac{3}{10} v_0^2$$

方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{10}} v_0$$

(3)速率介于0~v_0/3之间的分子数

$$\Delta N=\int dN=\int_0^{\frac{v_0}{3}} Nf(v)dv=\int_0^{\frac{v_0}{3}} N\frac{6}{v_0^{\ 3}}v(v_0-v)dv=\frac{7N}{27}$$

(4)速率介于0~v_0/3之间的气体分子平均速率为

$$\overline{v}_{0\sim v_0/3}=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}} vdN}{\int_0^{\frac{v_0}{3}} dN}=\frac{\int_0^{\frac{v_0}{3}} N\frac{6}{v_0^{\ 3}}v^2(v_0-v)dv}{7N/27}=\frac{3v_0}{14}$$

讨论

速率介于$v_1\sim v_2$之间的气体分子的平均速率的计算

$$\overline{v}_{v_1\sim v_2}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v)\,dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv}$$

$$\cancel{\overline{v}_{v_1\sim v_2}=\int_{v_1}^{v_2} v f(v)\,dv}$$

对于v的某个函数$g(v)$，一般地，其在某一速率区间上的统计平均值可以表示为：

$$\overline{g(v)}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} g(v) f(v)\,dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv}$$