1.1 复数

常晋德

中国海洋大学数学科学学院

2020 年 2 月 24 日

目录

1.1.1 复数域

数系的扩张与代数方程的求解有着紧密的联系：

- $x^2 = 2$ 引出无理数;

1.1.1 复数域

数系的扩张与代数方程的求解有着紧密的联系：

- $x^2 = 2$ 引出无理数;
- $x^2 = -1$ 引出复数（引入虚数单位 i, 规定 $\mathrm{i}^2 = -1$）.

1.1.1 复数域

数系的扩张与代数方程的求解有着紧密的联系：

- $x^2 = 2$ 引出无理数;
- $x^2 = -1$ 引出复数（引入虚数单位 i, 规定 $\mathrm{i}^2 = -1$）.

定义 1.1 (复数)

设 x 和 y 为实数, 则称形如 $x + \mathrm{i}y$ 或 $x + y\mathrm{i}$ 的数学表达式为**复数**（*complex number*）, 其中 i 为虚数单位, x 和 y 分别称为该复数的**实部**和**虚部**. 若记复数 $z = x + \mathrm{i}y$, 则其实部和虚部可分别记作 $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

利用实数可将复数分为两类:

- 实数, 即虚部为零的复数（在这个意义下, 视实数为复数的子集）;
- 不是实数的复数, 即虚部不为零的复数称为虚数.

利用实数可将复数分为两类:

- 实数, 即虚部为零的复数（在这个意义下, 视实数为复数的子集）;
- 不是实数的复数, 即虚部不为零的复数称为虚数.
  实部为零的虚数称为纯虚数.

利用实数可将复数分为两类:

- 实数, 即虚部为零的复数（在这个意义下, 视实数为复数的子集）;
- 不是实数的复数, 即虚部不为零的复数称为虚数.
  实部为零的虚数称为纯虚数.

实部和虚部都为 0 的复数称为复数 0.

我们说复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等, 是指它们的实部和虚部分别相等, 即

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

利用实数可将复数分为两类:

- 实数, 即虚部为零的复数（在这个意义下, 视实数为复数的子集）;
- 不是实数的复数, 即虚部不为零的复数称为虚数.
  实部为零的虚数称为纯虚数.

实部和虚部都为 0 的复数称为复数 0.

我们说复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等, 是指它们的实部和虚部分别相等, 即

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

特别地,

$$x + \mathrm{i}y = 0 \iff x = 0, y = 0.$$

复数域

复数的加、减、乘、除运算定义为

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2);$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\cdot\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0,$$

其中减法和除法分别是加法和乘法的逆运算.

复数域

复数的加、减、乘、除运算定义为

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2);$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\cdot\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0,$$

其中减法和除法分别是加法和乘法的逆运算. 复数运算满足如下的运算律:

交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$;
结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;
分配律: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

复数域

复数的加、减、乘、除运算定义为

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2);$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\cdot\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0,$$

其中减法和除法分别是加法和乘法的逆运算. 复数运算满足如下的运算律:

交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1,\ z_1z_2=z_2z_1$;

结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,\ z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

分配律: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

引入了上述运算和运算律的复数集称为复数域, 记作 $\mathbb{C}$.

共轭复数

两个复数 $x + \mathrm{i}y$ 和 $x - \mathrm{i}y$ 互称为共轭复数.

共轭复数

两个复数 $x + \mathrm{i}y$ 和 $x - \mathrm{i}y$ 互称为共轭复数.

复数 z 的共轭复数常记作 $\overline{z}$.

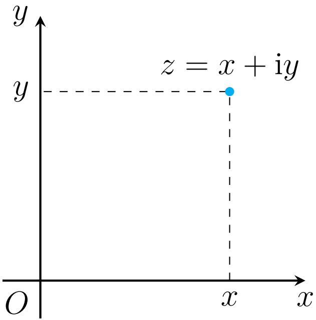
共轭复数有如下的重要公式

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

1.1.2 复平面

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与平面上的点坐标 (x,y) 之间可以一一对应起来:

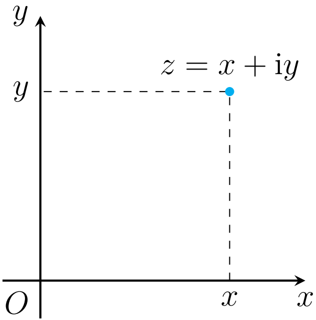
$$z=x+\mathrm{i}y \longleftrightarrow (x,y)$$



1.1.2 复平面

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与平面上的点坐标 (x, y) 之间可以一一对应起来:

$$z = x + \mathrm{i}y \longleftrightarrow (x, y)$$

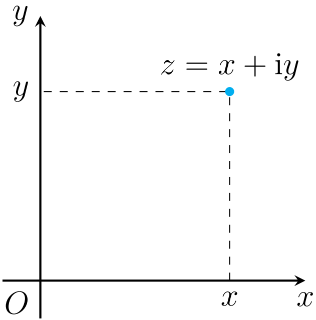


就像我们把与实数建立了对应关系的直线称为（实）数轴一样, 我们把与复数 z 建立了这种对应关系的平面称为复平面或 z 平面, 仍记作 $\mathbb{C}$.

1.1.2 复平面

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与平面上的点坐标 (x, y) 之间可以一一对应起来:

$$z = x + \mathrm{i}y \longleftrightarrow (x, y)$$

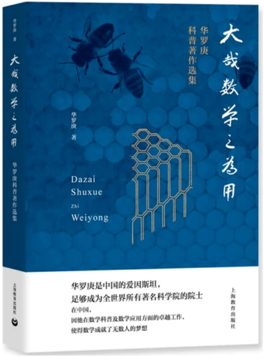


就像我们把与实数建立了对应关系的直线称为（实）数轴一样, 我们把与复数 z 建立了这种对应关系的平面称为复平面或 z 平面, 仍记作 $\mathbb{C}$.

- 因为 x 轴上的点对应着实数, 称 x 轴为实轴;
- 因为 y 轴上除原点外的点对应着纯虚数, 称 y 轴为虚轴.

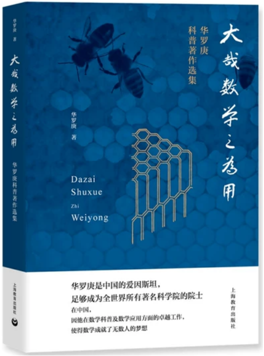
华罗庚先生在他 1964 年 1 月撰写的《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》的科普小册子中曾写道:

数与形,
本是相倚依,
焉能分作两边飞.
数缺形时少直观, 形少数时难入微;
数形结合百般好, 隔裂分家万事非.
切莫忘,
几何代数统一体,
永远联系, 切莫分离.



华罗庚先生在他 1964 年 1 月撰写的《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》的科普小册子中曾写道:

数与形,
本是相倚依,
焉能分作两边飞.
数缺形时少直观, 形少数时难入微;
数形结合百般好, 隔裂分家万事非.
切莫忘,
几何代数统一体,
永远联系, 切莫分离.



这首诗词点明了数形结合并非只是一个局限于解析几何中的数学思想, 它的后续表现形式为几何与代数的结合, 对近现代数学的发展有着深远的影响.

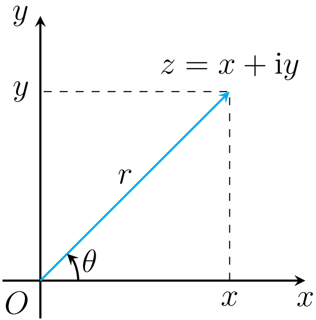
复平面就是“数形结合”思想的产物, 利用复平面这一直观几何对象, 复变函数的理论就会变得形象起来.

今后将不再区分复数和复平面上的点, 我们常直接称复数 z 为点 z.

复数也可以和平面向量一一对应起来

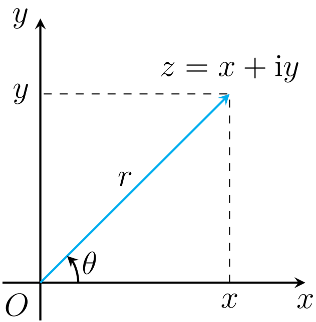
复数也可以和平面向量一一对应起来

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以与从原点 O 到点 $z = x + \mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应起来

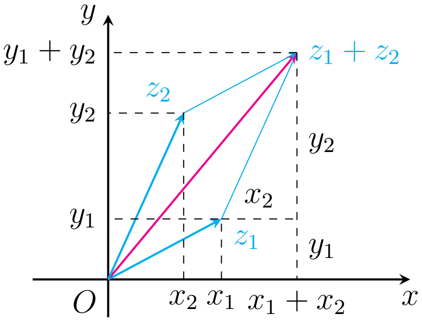


复数也可以和平面向量一一对应起来

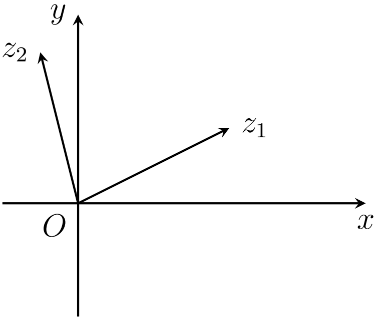
复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以与从原点 O 到点 $z = x + \mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应起来



在复平面上，复数的加法与平面向量的加法一致

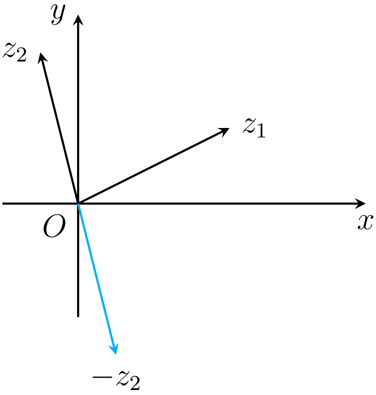


在复平面上，复数的减法与平面向量的减法也一致



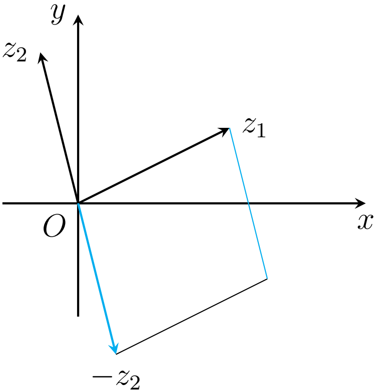
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

在复平面上, 复数的减法与平面向量的减法也一致



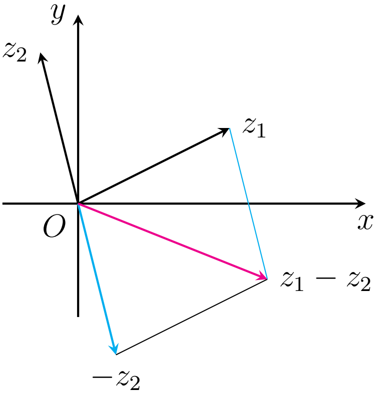
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

在复平面上, 复数的减法与平面向量的减法也一致



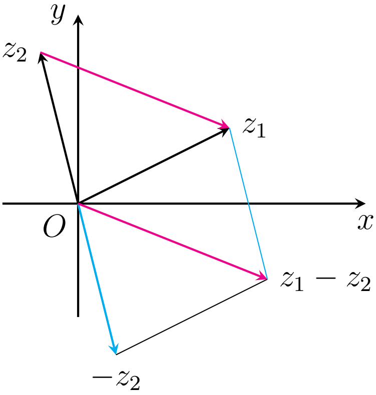
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

在复平面上, 复数的减法与平面向量的减法也一致



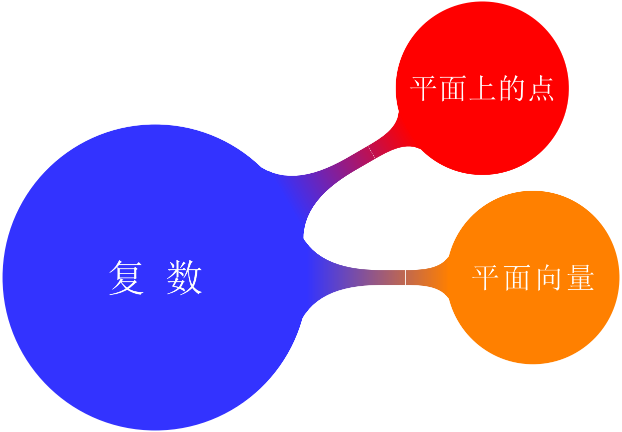
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

在复平面上, 复数的减法与平面向量的减法也一致



$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

复数的两个几何意义



对复数做出哪种几何解释，今后要根据具体情况而定.

1.1.3 复数的模与辐角

一个平面向量是被它的长度和角度（即方向）唯一确定的

$$\Downarrow$$

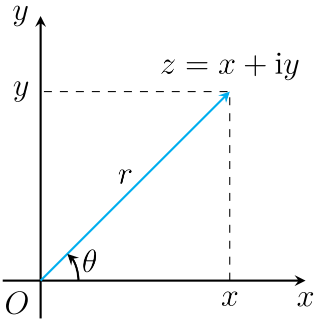
复数可以用平面向量的长度和角度来刻画

1.1.3 复数的模与辐角

一个平面向量是被它的长度和角度（即方向）唯一确定的

$$\Downarrow$$

复数可以用平面向量的长度和角度来刻画

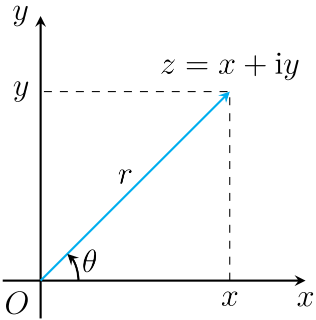


1.1.3 复数的模与辐角

一个平面向量是被它的长度和角度（即方向）唯一确定的

$$\Downarrow$$

复数可以用平面向量的长度和角度来刻画



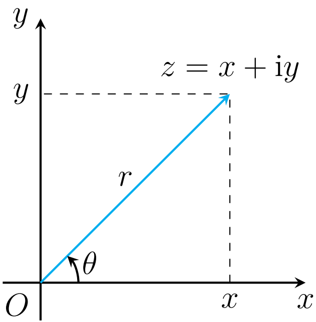
- 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值, 记为 $|z|$ 或 r.

1.1.3 复数的模与辐角

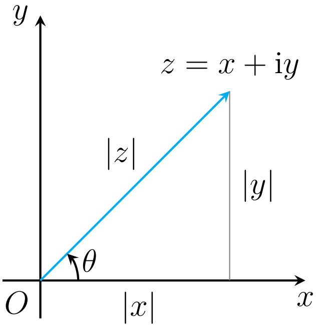
一个平面向量是被它的长度和角度（即方向）唯一确定的

$\Downarrow$

复数可以用平面向量的长度和角度来刻画

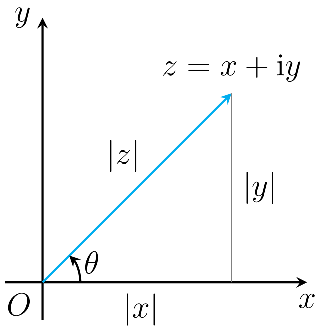


- 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**或**绝对值**, 记为 $|z|$ 或 r.
- 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度称为复数 z 的**辐角**, 记为 $\operatorname{Arg} z$.



由勾股定理可得

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

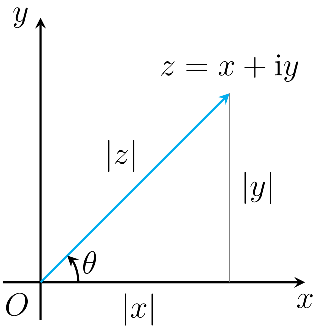


由勾股定理可得

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

由左图或上式可得

$$|x| \leq |z|, \ |y| \leq |z|, \ |z| \leq |x| + |y|.$$



由勾股定理可得

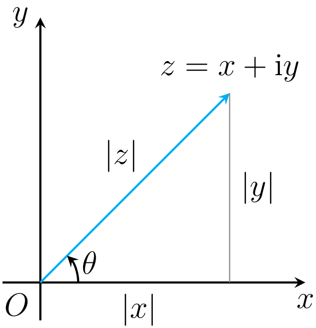
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

由左图或上式可得

$$|x| \leq |z|, \ |y| \leq |z|, \ |z| \leq |x| + |y|.$$

计算可得

$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$



由勾股定理可得

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

由左图或上式可得

$$|x| \leq |z|, \ |y| \leq |z|, \ |z| \leq |x| + |y|.$$

计算可得

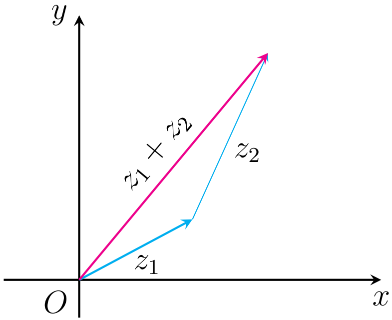
$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

所以

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \ (z_2 \neq 0).$$

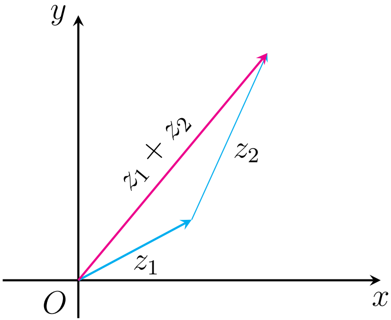
三角形不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

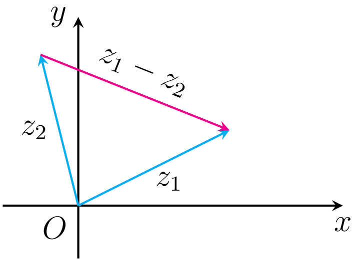


三角形不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

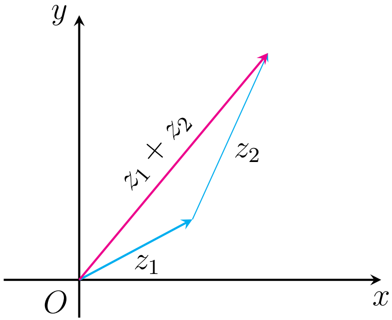


$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

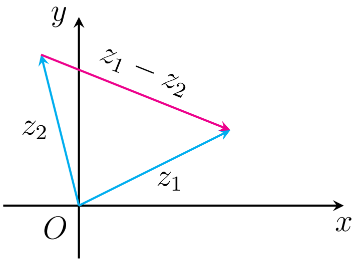


三角形不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

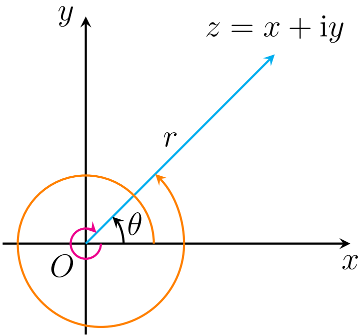


$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$$



$|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离.

任一非零复数都有无穷多个辐角值, 它们彼此之间相差 2π 的整数倍.



从正实轴出发,

- 逆时针旋转的角度值为正;
- 顺时针旋转的角度值为负.

称在 $(-\pi, \pi]$ 范围内的辐角值为辐角 $\mathrm{Arg} z$ 的主值, 或复数 z 的主辐角, 记为 $\arg z$.

称在 $(-\pi, \pi]$ 范围内的辐角值为辐角 $\mathrm{Arg} z$ 的主值, 或复数 z 的主辐角, 记为 $\arg z$. 我们有

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

称在 $(-\pi,\pi]$ 范围内的辐角值为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 或复数 z 的主辐角, 记为 $\arg z$. 我们有

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

注意对复数 $z = 0$ 谈辐角是无意义的.

称在 $(-\pi, \pi]$ 范围内的辐角值为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 或复数 z 的主辐角, 记为 $\arg z$. 我们有

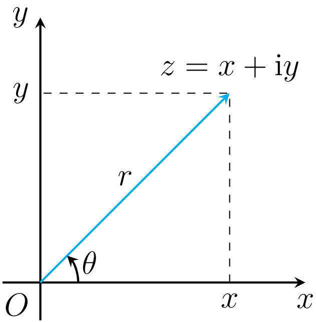
$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

注意对复数 $z = 0$ 谈辐角是无意义的.

当 $z = x + \mathrm{i}y$ 不在虚轴上时, 有如下的主辐角计算公式:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0, y \geq 0 \text{ 时;} \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0, y < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.



利用直角坐标和极坐标之间的关系式

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

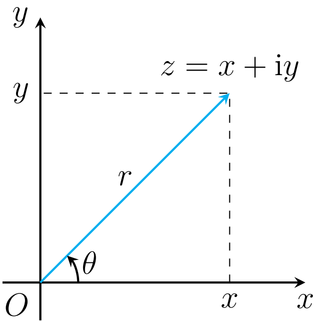
可得复数 z 在极坐标下的表示形式

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

特别地, 当 $r = 1$ 时有

$$z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

这种模为 1 的复数称为单位复数.



利用直角坐标和极坐标之间的关系式

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$$

可得复数 z 在极坐标下的表示形式

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

特别地, 当 $r=1$ 时有

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

这种模为 1 的复数称为单位复数.

单位复数作为向量来看便是单位向量, 而单位向量可以用来表示方向. 也就是说, 我们可以用单位复数来表示方向（或角度）.

历史上, 欧拉首先发现了指数函数与三角函数之间有着下面的奇妙联系:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta. \tag{1.1}$$

我们称之为欧拉公式.

历史上, 欧拉首先发现了指数函数与三角函数之间有着下面的奇妙联系:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.1}$$

我们称之为欧拉公式.

取 $\theta = \pi$ 得

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

- 1988 年《数学信使》(*Mathematical messenger*) 杂志将它评为最美的数学定理.
- 2004 年《物理世界》(*Physics World*) 杂志评选十大最伟大的公式, 它位列第二.

复数的三种表示形式

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 表达式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 可以重写为如下的简洁形式

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.2}$$

复数的三种表示形式:

- 代数形式 $z=x+\mathrm{i}y$;
- 三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$;
- 指数形式 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

复数的三种表示形式

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 表达式 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 可以重写为如下的简洁形式

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.2}$$

复数的三种表示形式:

- 代数形式 $z = x + \mathrm{i}y$;
- 三角形式 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$;
- 指数形式 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$
\begin{aligned}
1+\mathrm{i} &= \\
\mathrm{i} &= \\
-2 &=
\end{aligned}
$$

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$
\begin{aligned}
1+\mathrm{i} &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
\mathrm{i} &= \\
-2 &=
\end{aligned}
$$

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$
\begin{aligned}
1+\mathrm{i} &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}};\\
\mathrm{i} &= \\
-2 &=
\end{aligned}
$$

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}};$$

$$\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$-2 =$$

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}};$$

$$\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}};$$

$$-2 =$$

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}};$$

$$\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}};$$

$$-2 = 2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}.$$

∎

例 1.1

分别写出 $1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2$ 的三角形式和指数形式.

解

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}};$$

$$\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}};$$

$$-2=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}.$$

$\blacksquare$

错误的三角形式

$$\mathrm{i}=\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2},\qquad -2=2\cos\pi.$$

复数在指数形式下的乘法和除法

利用欧拉公式和三角和差公式可得

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

复数在指数形式下的乘法和除法

利用欧拉公式和三角和差公式可得

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

由此可推出

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

复数在指数形式下的乘法和除法

于是有

$$z_1 z_2 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.4}$$

复数在指数形式下的乘法和除法

于是有

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.4}$$

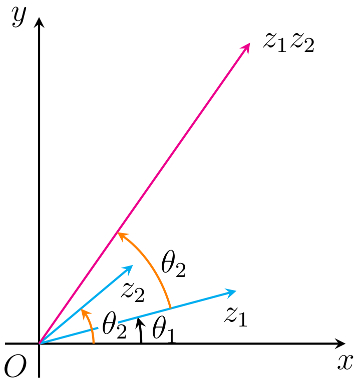
从上面复数乘法和除法的公式中直接可得

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \, (z_2 \neq 0), \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.6}$$

由于复数辐角的无穷多值性, 上面关于辐角的等式应在“集合”相等的意义下来理解, 即等式的两端应理解为集合.

复数乘法的几何意义



两个复数相乘相当于对其中一个复数所代表的向量做旋转和伸缩变换，旋转的角度和长度的伸缩比例由另一复数的辐角和模来确定.

特别地，对一个复数乘以一个单位复数相当于对其所表示的向量做旋转变换.

1.1.4 复数的乘幂与方根

对正整数 n, 定义非零复数 z 的 n 次乘幂（一般简称为 n 次幂）z^n 为 n 个 z 相乘的积.

1.1.4 复数的乘幂与方根

对正整数 n, 定义非零复数 z 的 n 次乘幂（一般简称为 n 次幂）z^n 为 n 个 z 相乘的积.

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

1.1.4 复数的乘幂与方根

对正整数 n, 定义非零复数 z 的 n 次乘幂（一般简称为 n 次幂）z^n 为 n 个 z 相乘的积.

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

若令 $r = 1$ 便可得棣莫弗公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

1.1.4 复数的乘幂与方根

对正整数 n, 定义非零复数 z 的 n 次乘幂（一般简称为 n 次幂）z^n 为 n 个 z 相乘的积.

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

若令 $r=1$ 便可得棣莫弗公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

若记 $z^{-1}=1/z$, 则可以证明当 n 为负整数时, 棣莫弗公式仍然成立.

对于复数 $z \neq 0$, 若存在复数 w 使得

$$w^n = z \ (n \geq 2),$$

则称 w 为复数 z 的 n 次方根, 记作 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

对于复数 $z \neq 0$, 若存在复数 w 使得

$$w^n = z \ (n \geq 2),$$

则称 w 为复数 z 的 n 次方根, 记作 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

为求出复数 z 的 n 次方根 w 的计算公式, 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则有

$$\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

对于复数 $z \neq 0$, 若存在复数 w 使得

$$w^n = z \ (n \geq 2),$$

则称 w 为复数 z 的 n 次方根, 记作 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

为求出复数 z 的 n 次方根 w 的计算公式, 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则有

$$\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

从而有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

对于复数 $z \neq 0$, 若存在复数 w 使得

$$w^n = z \ (n \geq 2),$$

则称 w 为复数 z 的 n 次方根, 记作 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

为求出复数 z 的 n 次方根 w 的计算公式, 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则有

$$\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

从而有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

由此解得

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

对于复数 $z \neq 0$, 若存在复数 w 使得

$$w^n = z \ (n \geq 2),$$

则称 w 为复数 z 的 n 次方根, 记作 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

为求出复数 z 的 n 次方根 w 的计算公式, 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则有

$$\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

从而有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

由此解得

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

所以 z 的 n 次方根

$$w_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

$$w_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

乍一看 z 的 n 次方根似乎有无穷多个, 但实际上却只有 n 个, 即

$$w_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.7}$$

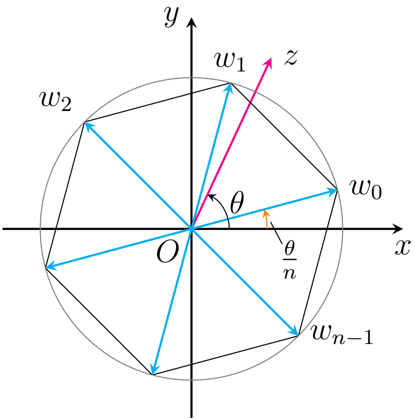
$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

乍一看 z 的 n 次方根似乎有无穷多个, 但实际上却只有 n 个, 即

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \ k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.7}$$

为什么?

n 次方根只有 n 个的几何论证

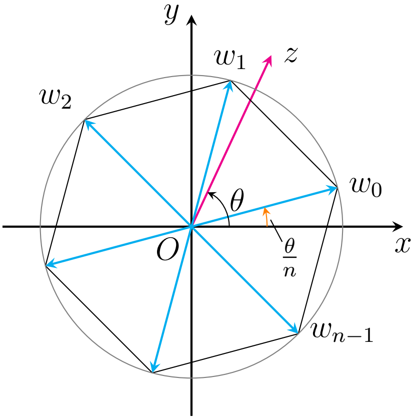


注意到

$$w_k = w_{k-1}e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由复数乘法的几何意义，这表明 w_k 可由 w_{k-1} 逆时针旋转 $2\pi/n$ 角度得到.

n 次方根只有 n 个的几何论证



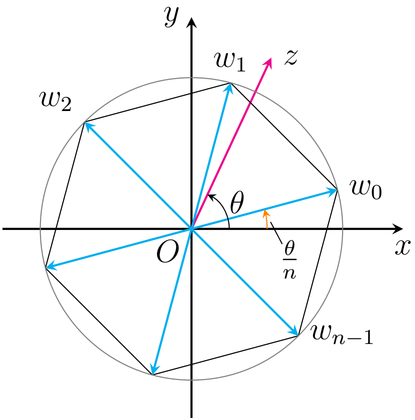
注意到

$$w_k = w_{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由复数乘法的几何意义，这表明 w_k 可由 w_{k-1} 逆时针旋转 $2\pi/n$ 角度得到.

先确定 $w_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$，将 w_0 逆时针旋转 $2\pi/n$ 即得 w_1，继续旋转下去，又可由 w_1 得到 $w_2, w_3, \cdots$.

n 次方根只有 n 个的几何论证



注意到

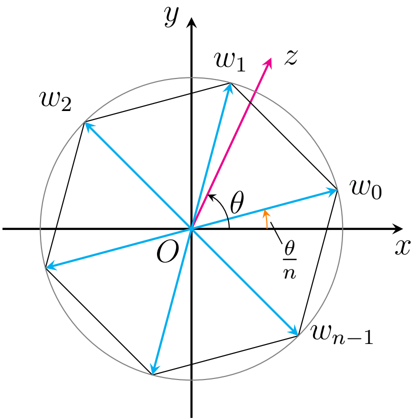
$$w_k = w_{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

由复数乘法的几何意义，这表明 w_k 可由 w_{k-1} 逆时针旋转 $2\pi/n$ 角度得到.

先确定 $w_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$，将 w_0 逆时针旋转 $2\pi/n$ 即得 w_1，继续旋转下去，又可由 w_1 得到 $w_2, w_3, \cdots$.

在旋转第 n 次后 (转过 2π 角度)，得到的 w_n 与 w_0 重合，此后的旋转过程不过是前 n 次旋转的重复而已.

n 次方根只有 n 个的几何论证



注意到

$$w_k = w_{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

由复数乘法的几何意义，这表明 w_k 可由 w_{k-1} 逆时针旋转 $2\pi/n$ 角度得到.

先确定 $w_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$, 将 w_0 逆时针旋转 $2\pi/n$ 即得 w_1, 继续旋转下去，又可由 w_1 得到 $w_2, w_3, \cdots$.

在旋转第 n 次后 (转过 2π 角度), 得到的 w_n 与 w_0 重合，此后的旋转过程不过是前 n 次旋转的重复而已.

类似地，从 w_0 起顺时针旋转也可得到类似的结论.

例 1.2

计算 $\sqrt[3]{-8}$.

解 因为 $-8=8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, 故由求根公式 $w_k=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ 得 -8 的 3 次方根为

$$w_k=\sqrt[3]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{3}},\quad k=0,1,2.$$

计算可得

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i};\\
w_1 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2;\\
w_2 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

■

注意在实数范围内, -8 的 3 次方根只有一个, 即 -2. 但在复数范围内, 任一非零复数（包括实数）都有 n 个不同的根.

作业

习题一

1. 计算：

$$(2)\ \frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+\frac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}};\quad (3)\ \frac{5}{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3-\mathrm{i})};\quad (4)\ (1-\mathrm{i})^4.$$

2. 求下列复数的实部 x 与虚部 y, 模 r 与辐角 θ：

$$(1)\ \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\quad (2)\ \left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n,\ n=2,3,4;$$

3. 设 $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, 试用三角形式表示 z_1z_2 及 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

4. 若 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$, 证明 $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta,\ n=2,3,\cdots$.

5. 用指数形式证明：

   (3) $(-1+\mathrm{i})^7=-8(1+\mathrm{i})$;　(4) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-10}=2^{-11}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

6. 解方程 $z^4+a^4=0\,(a>0)$.

9. 证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, 并说明其几何意义.
   提示: 利用公式 $|z|^2=z\overline{z}$.