



دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سری سوم  
هوش مصنوعی  
پاییز ۱۴۰۳

استاد درس: دکتر حسین فلسفین  
دستیار آموزشی: امین کافی  
موعد تحویل تکلیف: جمعه ۲ آذر

## توجهات مهم پیش از ارسال پاسخها

□ پاسخها باید به صورت یک فایل ZIP یا RAR با نام HW2\_StudentNumber.\_\_\_\_ آماده شده و در بخش تعیین شده در سامانه یکتا آپلود شوند.

□ از ارسال پاسخها از طریق ایمیل یا تلگرام خودداری کنید. تنها پاسخهایی که در سامانه بارگذاری شده باشند بررسی خواهند شد.

□ در صورت استفاده از ابزارهای هوش مصنوعی مانند ChatGPT و ... لطفاً به قوانین ذکر شده مرتبط با استفاده از این ابزارها در سامانه یکتا توجه کنید.

□ در صورت وجود هرگونه ابهام یا سؤال، می‌توانید از طریق تلگرام با دستیار درس در ارتباط باشید: @iamin\_p

## ۱ مدل سازی

### ۱.۱ مربع لاتین متعامد

مربع لاتین از مرتبه  $n$  به عنوان یک آرایه  $n \times n$  تعریف می شود که از  $n$  نماد مجزا (معمولاً اعداد  $1, 2, \dots, n$ ) تشکیل شده و ویژگی آن این است که هر یک از  $n$  نماد دقیقاً یک بار در هر سطر و دقیقاً یک بار در هر ستون آرایه ظاهر می شود. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

فرض کنید  $A$  و  $B$  مربع های لاتین از مرتبه  $n$  باشند و عنصر در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام از  $A$  و  $B$  به ترتیب به عنوان  $a_{ij}$  و  $b_{ij}$  نشان داده شوند.  $A$  و  $B$  متعامد هستند اگر جفت های مرتب  $(a_{ij}, b_{ij})$  به تعداد  $n^2$  همگی یکتا باشند. برای مثال، مربع های لاتین کنار هم زیر متعامد هستند:

$$\begin{bmatrix} (3, 2) & (2, 1) & (1, 3) \\ (2, 1) & (1, 2) & (3, 1) \\ (1, 3) & (3, 1) & (2, 2) \end{bmatrix}$$

یک فرمول بندی از این مسئله با مرتبه ۵ (مربع ۵ در ۵) به عنوان یک مسئله ارضای محدودیت ارائه دهید. متغیرها، دامنه ها و محدودیت ها را مشخص کنید.

### ۲.۱ پوشاندن مستطیل

هدف پیدا کردن مختصاتی بدون همپوشانی در یک مستطیل بزرگ برای تعدادی مستطیل کوچک است. فرض کنید مستطیل بزرگی با عرض  $W$  و ارتفاع  $H$  داریم. هدف این است که تعدادی مستطیل کوچک تر را بدون همپوشانی در داخل این مستطیل بزرگ قرار دهیم. هر مستطیل کوچک  $R_i$  با استفاده از چهار متغیر  $x, y, w, h$  تعریف می شود. این متغیرها به شرح زیر هستند:

□  $R_{ix}$ : مختصات افقی شروع مستطیل  $R_i$  روی محور  $X$  (محل پایین سمت چپ مستطیل)

□  $R_{iy}$ : مختصات عمودی شروع مستطیل  $R_i$  روی محور  $Y$  (محل پایین سمت چپ مستطیل)

□  $R_{iw}$ : عرض مستطیل  $R_i$

□  $R_{ih}$ : ارتفاع مستطیل  $R_i$

مجموعه ای از این مستطیل ها باید درون مستطیل بزرگ  $W \times H$  قرار داده شوند، به گونه ای که همدیگر را نپوشانند و استفاده بهینه از فضای مستطیل بزرگ صورت گیرد. با فرض مشخص بودن تعداد، عرض و طول مستطیل های کوچک یک فرمول بندی برای یافتن نقاط شروع مستطیل های این مسئله ارائه دهید. متغیرها، دامنه ها و محدودیت ها را مشخص کنید.

### ۳.۱ جمعیت شهرها

کشوری دارای  $n$  شهر است. این شهرها با  $m$  جاده به هم متصل شده اند. این کشور قانون عجیبی دارد که هر دو شهر مجاور باید حداقل ۲۰۰۰ نفر جمعیتشان اختلاف داشته باشد. از طرفی برای جلوگیری از به وجود آمدن کلان شهر، جمعیت پرجمعیت ترین شهر نباید بیش از ۳ برابر کم جمعیت ترین شهر باشد. با فرض داشتن شهرها و جاده ها، مسئله یافتن جمعیت هر شهر را به صورت یک مسئله ارضای محدودیت مدل کنید.

## ۴.۱ وزرای گیج شده

در سال ۱۹۸۹ یک نسخه از مسئله N-Queens معروف پیشنهاد شد به نام Confused N-Queens. مسئله به این صورت است که باید تمامی راه‌های ممکن برای قرار دادن  $n$  وزیر روی یک صفحه شطرنج  $n \times n$  را پیدا کنید به طوری که در هر ستون فقط یک وزیر قرار گیرد و همه جفت‌های وزیرها یکدیگر را تهدید کنند. یک فرمول‌بندی از این مسئله را برای یافتن یک جواب به عنوان یک شبکه محدودیت ارائه دهید. متغیرها، دامنه‌ها و محدودیت‌ها را مشخص کنید. متغیرها، دامنه‌ها و محدودیت‌ها را مشخص کنید.

## ۲ اثبات

## ۱.۲

آیا از برقراری  $k+1$ -consistency می‌توان  $k$ -consistency را نتیجه گرفت؟ چرا؟

## ۲.۲

ثابت کنید که تعداد قیود روی  $n$  متغیر با اندازه دامنه  $k$  برابر  $2^{k^n}$  است، در حالی که تعداد شبکه‌های محدودیت دوتایی برابر  $2^{k^2 n^2}$  است.

## ۳ Consistency

## ۱.۳ رنگ‌آمیزی گراف

مسئله رنگ‌آمیزی گراف در شرایطی که گراف کامل با چهار رأس و سه رنگ داریم را در نظر بگیرید. آیا این مسئله arc-consistent هست؟ path-consistent چطور؟ 4-consistent؟ در صورتی که 4-consistent نیست آن را قویاً 4-consistent کنید. آیا می‌توان مسئله را تنها با اضافه کردن قیدهای باینری، 4-consistent کرد؟

## ۲.۳ شبکه محدودیت باینری

یک شبکه محدودیت باینری با متغیرهای  $X_1, X_2, X_3, X_4$  و با دامنه‌های زیر وجود دارد:

$$D_1 = \{1, 2, 3, 4\}, D_2 = \{3, 4, 5, 8, 9\}, D_3 = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}, D_4 = \{3, 5, 7, 8, 9\}$$

محدودیت‌ها به شرح زیر هستند:

$$C_1 : X_1 \geq X_2,$$

$$C_2 : X_2 > X_3 \quad OR \quad X_3 - X_2 = 2,$$

$$C_3 : X_3 \neq X_4$$

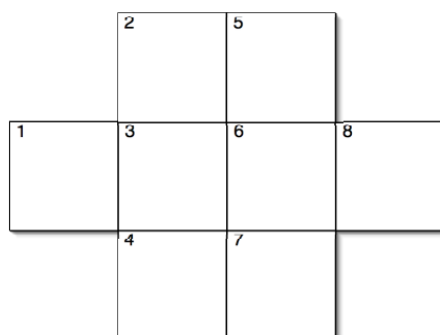
۱.۲.۳ گراف محدودیت را رسم کنید.

۲.۲.۳ آیا شبکه arc-consistent است؟ اگر نه، شبکه arc-consistent را محاسبه کنید.

۳.۲.۳ آیا شبکه ارضا پذیر است؟ اگر بله، یک راه حل ارائه دهید.

### ۳.۳ جدول

در یک مسئله، جدول زیر باید به گونه‌ای با اعداد ۱ تا ۸ شماره گذاری شود که هر دو خانه مجاور دو واحد یا بیشتر اختلاف داشته باشند. دو خانه را مجاور می‌گوییم اگر به صورت افقی، عمودی یا قطری در کنار هم باشند.



۱.۳.۳ گراف محدودیت را رسم کنید.

۲.۳.۳ آیا شبکه arc-consistent است؟ اگر نه، شبکه arc-consistent را محاسبه کنید.

۳.۳.۳ آیا شبکه ارضا پذیر است؟ اگر بله، یک راه حل ارائه دهید.

## ۴ حل با Backtracing یا Local search

### ۱.۴ چهار وزیر

از روش min-conflict (جستجوی محلی) برای حل مسئله چهار وزیر استفاده کنید. برای حالت اولیه وزیرها را روی قطر اصلی قرار دهید و در صورتی که heuristic دو حالت مساوی شد، تصادفی عمل کنید.

### ۲.۴ Puzzle Cryptarithmic

مسئله Puzzle Cryptarithmic زیر را در نظر بگیرید. الگوریتم backtracking را با هیوریستیک‌های MRV و LCV به صورت دستی برای آن انجام دهید و در هر مرحله متغیری که برای مقداردهی انتخاب می‌کنید، مقادیر دامنه متغیرهای دیگر بعد از مقداردهی آن و این که بازگشت به عقب نیاز هست یا نه را شرح دهید. (در صورتی که درخت/گراف مورد نظر ابعاد بزرگی دارد، رسم و بررسی قسمت کوچکی از آن کافی است)

$$GERALD + DONALD = ROBERT$$

## ۵ عملی

در این بخش به استفاده از ابزارهای MiniZinc و Google OR-Tools برای حل مسائل مطرح شده در بخش های قبلی پرداخته می شود. این ابزارها ابزارهایی قدرتمند برای مدل سازی و حل مسائل بهینه سازی و ارضای محدودیت هستند. MiniZinc یک زبان مدل سازی سطح بالا برای بیان مسائل بهینه سازی و محدودیت است که می تواند از طریق تعدادی حل کننده مختلف اجرا شود. برای نصب و استفاده از MiniZinc می توانید به این لینک مراجعه کنید. Google OR-Tools نیز یک کتابخانه متن باز است که برای حل مسائل بهینه سازی مانند مسیریابی، برنامه ریزی و تخصیص منابع استفاده می شود. این ابزار از زبان های برنامه نویسی مختلفی مانند Python، C++ و Java پشتیبانی می کند.

### ۱.۵ مربع لاتین متعامد

با استفاده از ابزار MiniZinc، مسئله مربع لاتین متعامد از درجه  $n$  که در بخش ۱.۱ توضیح داده شده است را مدل کنید. مدل شما باید متغیرها، دامنه ها و محدودیت های این مسئله را به طور کامل پیاده سازی کند. سپس با استفاده از MiniZinc، مدل را اجرا کرده و نتایج را برای مقادیر مختلف  $n$  بررسی کنید. در نهایت، با استفاده از ابزار Google OR-Tools نیز این مسئله را پیاده سازی کنید و سرعت اجرای این دو ابزار را برای مقادیر بزرگ تر  $n$  مقایسه کنید. گزارش شما باید شامل توضیحات کدها، نتایج اجرای هر دو ابزار و مقایسه آن ها باشد.

### ۲.۵ پوشاندن مستطیل

با استفاده از ابزار MiniZinc، مسئله چیدمان مستطیل ها که در بخش ۲.۱ توضیح داده شده است را مدل کنید. در مدل خود متغیرهای مختصات و ابعاد مستطیل ها را تعریف کرده و محدودیت های ذکر شده را اعمال کنید. مدل شما باید توانایی حل مسئله برای ابعاد و تعداد مستطیل های مختلف را داشته باشد. نتایج مدل را برای چندین مثال مختلف گزارش دهید.

### ۳.۵ جمعیت شهرها

با استفاده از ابزار Google OR-Tools، مسئله جمعیت شهرها از بخش ۳.۱ را پیاده سازی کنید. در مدل خود از روش Constraint Programming استفاده کنید تا جمعیت شهرها به گونه ای تعیین شود که تمام محدودیت های ذکر شده رعایت شوند. گزارش شما باید شامل کدهای مربوطه، توضیحات مدل، و نتایج اجرای مسئله باشد.

### ۴.۵ Hidato (امتیازی)

Hidato یک بازی پازل عددی است که هدف آن پر کردن یک شبکه  $n \times n$  با اعداد از ۱ تا  $m$  است به طوری که تمام اعداد به صورت پیوسته قرار گیرند. هر عدد باید دقیقاً یک بار ظاهر شود و عدد بعدی هر عدد باید در یکی از خانه های مجاور آن (عمودی یا افقی) قرار گیرد. بعضی از خانه ها ممکن است سد باشند و نتوان از آن ها استفاده کرد و همچنین بعضی خانه ها ممکن است یک مقدار پیش فرض داشته باشند. یک نمونه از این بازی را می توانید در این لینک مشاهده کنید.

این مسئله را به عنوان یک مسئله ارضای محدودیت با استفاده از ابزار MiniZinc یا OR-Tools مدل کنید. در مدل خود متغیرها و محدودیت هایی که پیوستگی اعداد را تضمین می کنند تعریف کنید. سپس مدل را برای اندازه های مختلف شبکه اجرا کنید و گزارش دهید که چه مدت زمان طول می کشد تا حل کننده به جواب برسد.

### ۵.۵ پیاده‌سازی AC-3 (امتیازی)

الگوریتم AC-3 یکی از روش‌های مهم برای بررسی و اصلاح دامنه متغیرها در مسائل ارضای محدودیت است. این الگوریتم را در زبان Python پیاده‌سازی کنید. وظیفه شما این است که با استفاده از این الگوریتم دامنه متغیرها را بررسی کرده و دامنه‌هایی که باعث نقض محدودیت‌ها می‌شوند را حذف کنید. کد شما باید قابلیت اجرای الگوریتم روی مجموعه‌ای از قیدهای ورودی را داشته باشد. در گزارش خود، نمونه‌ای از ورودی‌ها و خروجی‌های الگوریتم را ارائه دهید و زمان اجرای الگوریتم را تحلیل کنید.