زهرا توکلی 40120063 «باسمه تعالی» جبرخطی کاربردی تکلیف چهارم

قسمت supplementary exercises، chapter 3، صفحه‌ی 221:

سوال 19:

بسط برحسب سطر 3 — بسط برحسب سطر 4 — بسط برحسب سطر 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -7 \times (-1)^{4+3} \times 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 42 \times (-1)^{2+2} \times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 210 \times (1\times 4 - 3 \times 2) = 210 \times (-2) = \boxed{-420}$$

سوال 29: a.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB + IY \end{bmatrix} \Rightarrow XA = C \Rightarrow XAA^{-1} = CA^{-1} \Rightarrow \boxed{X = CA^{-1}}$$

$$XB + Y = D \Rightarrow CA^{-1}B + Y = D \Rightarrow \boxed{Y = D - CA^{-1}B}$$

اثبات بخش دوم a:

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det(I) \times \det(I) \times \det(A) \times \det(Y)$$

$$= 1 \times 1 \times \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

b.

$$AC = CA \Rightarrow \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$$

اثبات:

$$AC = CA \Rightarrow ACA^{-1} = C\underbrace{AA^{-1}}_{I} = C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}CA^{-1} = A^{-1}C \Rightarrow \underline{CA^{-1} = A^{-1}C}$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(A(D - CA^{-1}B)) = \det(A(D - A^{-1}CB))$$

$$= \det(AD - \underbrace{AA^{-1}}_{I}CB) = \det(AD - CB)$$

قسمت 5.1 exercises، صفحه‌ی 304:

سوال 33: اثبات: اگر λ مقدار ویژه‌ی ماتریس وارون‌پذیر A و x بردار ویژه‌ی نظیر آن باشد داریم:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x \Rightarrow$$ لذا $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ی A^{-1} است.

پس اگر λ مقدار ویژه‌ی ماتریس وارون‌پذیر A با بردار ویژه‌ی متناظر x باشد، x یک بردار ویژه‌ی A^{-1} هم هست و مقدار ویژه‌ی نظیر آن λ^{-1} خواهد بود.

Subject:
Year Month Date

سؤال 37: برای اینکه نشان دهیم s یک مقدار ویژه‌ی A است یک بردار x می‌یابیم به طوری که $Ax=sx$: A ستون‌های

$$A=[a_1\ a_2 \cdots a_n] \quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$Ax=sx \Rightarrow [a_1\ a_2 \cdots a_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=sx$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1a_{11}\\x_1a_{12}\\\vdots\\x_1a_{1n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2a_{21}\\x_2a_{22}\\\vdots\\x_2a_{2n}\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}x_na_{n1}\\x_na_{n2}\\\vdots\\x_na_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1a_{11}+x_2a_{21}+\cdots+x_na_{n1}\\x_1a_{12}+x_2a_{22}+\cdots+x_na_{n2}\\\vdots\\x_1a_{1n}+x_2a_{2n}+\cdots+x_na_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sx_1\\sx_2\\\vdots\\sx_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overbrace{(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1})}^{s}x_1\\(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{n2})x_2\\\underbrace{\quad}_{s}\ \vdots\\\underbrace{(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{nn})}_{s}x_n\end{bmatrix}$$

همان طور که در ماتریس های * و ** می‌بینیم اگر $x_1=x_2=\cdots=x_n$ آنگاه این دو ماتریس برابر خواهند بود. پس یک راستا برای بردار ویژه‌ای نظیر s پیدا کردیم و به صورت $\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{n\times1}$ است. پس s یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A است.

قسمت 5.2 exercises صفحه‌ی 312:

سؤال 31: A و A_1 ها مانندند $\Leftrightarrow \exists Q' \mid Q'A_1=AQ'$ و Q' وارون پذیر باشد

از آنجایی که Q وارون پذیر است، Q' می‌تواند برابر Q باشد و در این صورت Q' ای وجود خواهد داشت که $Q'A_1=AQ'$ باشد و بنابراین A و A_1 ها مانندند.

$$AQ'=QRQ' \xrightarrow{Q'=Q} AQ'=Q'\underbrace{RQ}_{A_1}=Q'A_1 \Rightarrow Q'A_1=AQ'$$

قسمت 5.3 exercises صفحه‌ی 319:

سؤال 37: اگر بخواهیم ماتریس 2x2 مان قطری پذیر نباشد باید مقادیر ویژه‌ی متمایز نداشته باشد پس باید 1 مقدار ویژه‌ی تکراری داشته باشد که منجر به 2 بردار ویژه‌ی مستقل خطی نشوند. علاوه براین معکوس پذیر است پس 0 مقدار ویژه‌ی آن نیست. اگر ماتریس بالا مثلثی $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ را در نظر بگیریم معکوس پذیر هست چون دترمینان آن مخالف صفر است ولی چون یک بردار ویژه‌ی مستقل خطی دارد قطری پذیر نیست (ماتریس بالا مثلثی است و یک مقدار ویژه‌ی تکراری برابر 1 دارد):

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}v_1+2v_2\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\Rightarrow \cancel{v_1}+2v_2=\cancel{v_1}$$

$$\Rightarrow v_2=0\Rightarrow\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بردار ویژه}} v=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

سؤال 38: ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم اگر A وارون پذیر نباشد باید:

$$A \text{ وارون ناپذیر است} \Rightarrow |A|=0\Rightarrow ad-bc=0\Rightarrow ad=bc\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

از طرفی می‌خواهیم A قطری پذیر باشد پس:

$$Av=\lambda v\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}av_1+bv_2\\cv_1+dv_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}av_1+bv_2=\lambda v_1 \xrightarrow{\times d} adv_1+bdv_2=\lambda dv_1\\ cv_1+dv_2=\lambda v_2 \xrightarrow{\times b} bcv_1+bdv_2=\lambda bv_2\end{matrix} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 0=\lambda dv_1-\lambda bv_2$$

$$\Rightarrow \lambda dv_1=\lambda bv_2$$

پس یا $\lambda=0$ یا اگر $\lambda\neq0$ باید یا $\frac{v_1}{v_2}=\frac{b}{d}$ یا از بین d و v_1 یکی صفر باشد و از بین b و v_2 هم حداقل یکی صفر باشد و v_1 و v_2 با هم صفر نشوند. مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix}2&0\\2&0\end{bmatrix}$ که شرط $\lambda_1=0$ و $\lambda_2\neq0$ ولی $b=0$ و $d=0$ را دارد، هم وارون ناپذیر است (دترمینان آن صفر است) و هم قطری پذیر است چون بالا مثلثی است و دو مقدار ویژه‌ی متمایز دارد.

قسمت chapter5 Supplementary exercises، صفحهٔ 369

سؤال 24: x یک بردار ویژهٔ ماتریس AB است پس: $\exists\lambda \mid ABx=\lambda x \xrightarrow{Bx=y} Ay=\lambda x \xrightarrow{\text{از چپ در } B \text{ ضرب می‌کنیم}} BAy=\lambda Bx$

Bx یک بردار ویژه برای BA است $\Rightarrow BAy=\lambda y$, $y\neq 0$ $(y=Bx, Bx\neq 0)$

یا می‌توان به صورت روبه‌رو اثبات کرد: اگر Bx یک بردار ویژه برای BA باشد باید $BABx=\lambda' Bx$ بشود:

$B\underbrace{ABx}_{\lambda x}=B\lambda x=\lambda Bx \Rightarrow$ Bx یک بردار ویژهٔ BA است

سؤال 40: $A=\begin{bmatrix}0.4 & -0.3\\ 0.4 & 1.2\end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0.4-\lambda & -0.3\\ 0.4 & 1.2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (0.4-\lambda)(1.2-\lambda)+0.12=0$

$\Rightarrow 0.48-0.4\lambda-1.2\lambda+\lambda^2+0.12=0$

$\Rightarrow \lambda^2-1.6\lambda+0.6=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-0.6)=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=0.6 \Rightarrow$ چون دو مقدار ویژهٔ متمایز داریم A قطری‌پذیر است

محاسبهٔ بردارهای ویژه:

$\lambda_1=1 \Rightarrow (A-\lambda_1 I)V=0 \Rightarrow (A-I)V=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-0.6 & -0.3\\ 0.4 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-0.6V_1-0.3V_2\\ 0.4V_1+0.2V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}-1.2V_1-0.6V_2=0\\ 1.2V_1+0.6V_2=0\end{cases} \Rightarrow$ بی‌نهایت جواب دارد $\Rightarrow 2V_1+V_2=0$ فقط $\Rightarrow V_2=-2V_1 \Rightarrow$ یک بردار ویژه می‌تواند $\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ باشد

$\lambda_2=0.6 \Rightarrow (A-\lambda_2 I)V=0 \Rightarrow (A-0.6I)V=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-0.2 & -0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-0.2V_1-0.3V_2\\ 0.4V_1+0.6V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow -0.2V_1-0.3V_2=0 \Rightarrow -0.2V_1=0.3V_2 \Rightarrow V_1=-\frac{3}{2}V_2 \Rightarrow$ یک بردار ویژه می‌تواند $\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$ باشد.

$\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}$ $Q^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & -3/4\\ -1/2 & -1/4\end{bmatrix} \Rightarrow$ A قطری‌پذیر است

$A=Q\Lambda Q^{-1} \Rightarrow A^k=Q\Lambda^k Q^{-1}=Q\begin{bmatrix}1^k & 0\\ 0 & 0.6^k\end{bmatrix}Q^{-1} \xrightarrow{\text{if } k\to\infty} A^k=Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}$

چون $0.6<1$ ، $0.6^\infty \simeq 0$ است.

$\xrightarrow{k\to\infty} A^k=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.75\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}$

قسمت 7.4 exercises صفحهٔ 472:

$\det(A^T)=\det(A)$

سؤال 17: اثبات: $\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)=(\det(A))^2 \Rightarrow |\det(A)|=\sqrt{\det(A^TA)}$

A^TA یک ماتریس مربعی متقارن است و می‌دانیم دترمینان هر ماتریس مربعی با حاصل ضرب مقادیر ویژه‌اش برابر است و اگر λ_i مقدار ویژهٔ A^TA باشد $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$ مقدار منفرد ماتریس A است. پس:

$$|\det(A)|=\sqrt{\det(A^TA)}=\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}=\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\cdots\sqrt{\lambda_n}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$$

چون A^TA متقارن است مقادیر ویژه نامنفی اند

سؤال 18: چون U و V دو ماتریس متعامد اند $U^{-1}=U^T$ و $V^{-T}=V$ است.

$$A_{n\times n}=U_{n\times n}\Sigma_{n\times n}V^T_{n\times n} \Rightarrow A^{-1}=(U\Sigma V^T)^{-1}=V^{-T}\Sigma^{-1}U^{-1}=V\Sigma^{-1}U^T$$

بنابراین برای پیدا کردن SVD ماتریس A^{-1} کافیست ماتریس های V و U^T را به دست آورده و Σ را وارون کنیم. چون Σ یک ماتریس قطری به صورت $\begin{bmatrix}\sigma_1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&\sigma_n\end{bmatrix}$ است $\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1}&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&&\frac{1}{\sigma_n}\end{bmatrix}$ است و چون A وارون پذیر است پس A^TA هم وارون پذیر می‌شود (زیرا $|A^TA|=|A^T||A|=|A|^2\neq 0$ و $|A|\neq 0 \Leftarrow$ A وارون پذیر) و بنابراین A^TA مقدار ویژهٔ صفر ندارد. پس A هم مقدار منفرد صفر ندارد و مشکلی در ساخت Σ^{-1} که نخواهیم داشت.

قسمت chapter 7 supplementary exercises، صفحهٔ 481:

سؤال 18: a. A متقارن است اگر و تنها اگر $A^T=A$ باشد.

$$A=\lambda_1u_1u_1^T+\cdots+\lambda_nu_nu_n^T \Rightarrow A^T=(\lambda_1u_1u_1^T+\cdots+\lambda_nu_nu_n^T)^T=(\lambda_1u_1u_1^T)^T+\cdots+(\lambda_nu_nu_n^T)^T$$

$$\Rightarrow A^T=\lambda_1(u_1^T)^Tu_1^T+\cdots+\lambda_n(u_n^T)^Tu_n^T=\lambda_1u_1u_1^T+\cdots+\lambda_nu_nu_n^T=A \Rightarrow$$ A ماتریس متقارن است.

b. λ_i مقدار ویژهٔ A است اگر و تنها اگر بردار غیرصفری باشد که $Av_i=\lambda_iv_i$. اگر برای هر λ_i، $v_i=u_i$ را در نظر بگیریم می‌بینیم $Au_i=\lambda_iu_i$ پس λ_i مقدار ویژهٔ A خواهد بود. مثلاً برای u_i داریم:

$$Au_i=(\lambda_1u_1u_1^T+\cdots+\lambda_nu_nu_n^T)u_i=\lambda_1u_1u_1^Tu_i+\cdots+\lambda_iu_iu_i^Tu_i+\cdots+\lambda_nu_nu_n^Tu_i$$

از آنجایی که $\{u_1\dots u_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathbb{R}^n$ است پس برای هر $i\neq j$، $u_i^Tu_j=0$, $u_i^Tu_i=\|u_i\|^2=1$

پس: $Au_i=\lambda_iu_iu_i^Tu_i=\lambda_iu_i\|u_i\|^2=\lambda_iu_i \Rightarrow$ λ_i مقدار ویژهٔ u_i است.

قسمت exercises 6.6 ، صفحه‌ی 343:

سوال 17: a. $j_{k+1}=1.6a_k$ و $a_{k+1}=0.3j_k+0.8a_k$

$$\begin{bmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} j_k \\ a_k \end{bmatrix}$$

b. محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی A:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1.6 \\ 0.3 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(0.8-\lambda)-0.48=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-0.8\lambda-0.48=0 \Rightarrow (\lambda-1.2)(\lambda+0.4)=0 \Rightarrow \lambda_1=1.2 , \lambda_2=-0.4$$

چون λ_1 بزرگ‌تر از 1 است، جمعیت رشد خواهد کرد.

بردار ویژه‌ی نظیر $\lambda_1=1.2$:

$$(A-1.2I)v=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.2 & 1.6 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1.2v_1+1.6v_2 \\ 0.3v_1-0.4v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0.3v_1=0.4v_2 \Rightarrow v_1=\frac{4}{3}v_2 \Rightarrow$$

یک بردار ویژه‌ی نظیر λ_1 ، $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ است. پس هر سال به‌ازای هر 4 نوجوان 3 بزرگسال خواهیم داشت.

سوال 9.1، صفحه‌ی 174 کتاب boyd:

$$\begin{bmatrix} (x_{t+1})_1 \\ (x_{t+1})_2 \\ (x_{t+1})_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} (x_t)_1 \\ (x_t)_2 \\ (x_t)_3 \end{bmatrix}$$

$$(x_{t+1})_1 = 0.9(x_t)_1 + 0(x_t)_2 + 0.05(x_t)_3$$
$$(x_{t+1})_2 = 0.1(x_t)_1 + 0.95(x_t)_2 + 0(x_t)_3$$
$$(x_{t+1})_3 = 0(x_t)_1 + 0.05(x_t)_2 + 0.9(x_t)_3$$

در نقطه‌ی تعادل $x_{k+1}=x_k$ پس:

$$x_{k+1}=Ax_k \Rightarrow x_k=Ax_k \Rightarrow (A-I)x_k=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -0.1\alpha+0.05\gamma=0 \\ 0.1\alpha-0.05\beta=0 \\ 0.05\beta-0.1\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

پس $x_e=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ نقطه‌ی تعادل سیستم است.