Subject

Year   Month   Date

زهرا توکلی 40120063   «باسمه تعالی»   تکلیف دوم جبرخطی کاربردی

سؤال ۱: مجموعهٔ $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ چون یک متعامد است، پس مستقل خطی هم هست ولی اگر $n \neq p$ باشد برای فضای $\mathbb{R}^n$ یک پایه نیست. فرض کنیم مجموعهٔ $\{v_1, \dots, v_p, \dots, v_n\}$ یک پایهٔ یکهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ باشد. پس هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان برحسب آنها نوشت: $x = (x^Tv_1)v_1 + (x^Tv_2)v_2 + \dots + (x^Tv_p)v_p + \dots + (x^Tv_n)v_n$

$$\|x\|^2 = x^Tx = \left((x^Tv_1)v_1 + \dots + (x^Tv_p)v_p + \dots + (x^Tv_n)v_n\right)^T\left((x^Tv_1)v_1 + \dots + (x^Tv_p)v_p + \dots + (x^Tv_n)v_n\right)$$

$$= (x^Tv_1)^2 \underbrace{v_1^Tv_1}_{1} + (x^Tv_1)(x^Tv_2)\underbrace{v_1^Tv_2}_{0} + \dots + (x^Tv_p)^2 \underbrace{v_p^Tv_p}_{1} + (x^Tv_p)(x^Tv_1)\underbrace{v_p^Tv_1}_{0} + \dots + (x^Tv_n)^2 \underbrace{v_n^Tv_n}_{1} + \dots$$

$$= (x^Tv_1)^2 + (x^Tv_2)^2 + \dots + (x^Tv_p)^2 + \dots + (x^Tv_n)^2 \geq (x^Tv_1)^2 + (x^Tv_2)^2 + \dots + (x^Tv_p)^2$$

$\Rightarrow \|x\|^2 \geq (x^Tv_1)^2 + \dots + (x^Tv_p)^2$ به ازای هر $i \neq j$، جملات به صورت $(x^Tv_i)(x^Tv_j)v_i^Tv_j$ برابر 0 می‌شوند چون بردارها متعامدند و $v_i^Tv_j$ ها 0 می‌شوند. به ازای هر i، $(x^Tv_i)^2v_i^Tv_i = (x^Tv_i)^2\underbrace{\|v_i\|^2}_{1} = (x^Tv_i)^2$.

درصورتی نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود که $(x^Tv_{p+1})^2 + \dots + (x^Tv_n)^2$ برابر صفر شود. یعنی ضرایب $v_{p+1} \dots v_n$ در ترکیب خطی x برابر صفر باشد و بردار x فقط به $x_1 \dots x_p$ وابسته بوده و قابل بیان برحسب آنها باشد. اگر x به مؤلفه‌های مستقل خطی دیگری هم وابسته باشد، عدم تساوی برقرار می‌شود.

سؤال ۲: باید هر دو طرف قضیه را اثبات کنیم:

طرف اول: $(u+v)^T(u-v) = 0 \Rightarrow \|u\| = \|v\|$

اثبات: $(u+v)^T(u-v) = u^Tu - \cancel{u^Tv} + \cancel{v^Tu} - v^Tv = u^Tu - v^Tv = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$

$\Rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow \left|\|u\|\right| = \left|\|v\|\right| \Rightarrow \|u\| = \|v\|$

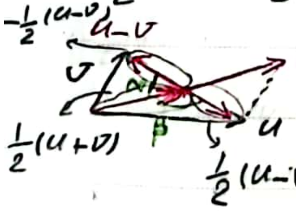
طرف دوم: $\|u\| = \|v\| \Rightarrow (u+v)^T(u-v) = 0$

اثبات: $\|u\| = \|v\| \Rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow \underline{u^Tu = v^Tv}$

$(u+v)^T(u-v) = u^Tu - \cancel{u^Tv} + \cancel{v^Tu} - v^Tv = u^Tu - v^Tv = u^Tu - u^Tu = 0$

*تفسیر هندسی آن در فضای دوبعدی: $(u+v)$ و $(u-v)$ دو بردار دوبعدی اند که هم راستا نیستند چون برهم عمودند. پس می‌توانند یک پایه برای u و v باشند و u و v را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v)$ و $v = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v)$



همان طور که در شکل می‌بینیم u جمع برداری $\frac{1}{2}(u+v)$ و $\frac{1}{2}(u-v)$ و v جمع برداری $\frac{1}{2}(u+v)$ و $-\frac{1}{2}(u-v)$ است که $\|\frac{1}{2}(u+v)\| = \|\frac{1}{2}(u+v)\|$ و $\|\frac{1}{2}(u-v)\| = \|-\frac{1}{2}(u-v)\|$. اگر دو بردار $u+v$ و $u-v$ برهم عمود باشند، دو زاویه مشخص شده (α و β) برابر خواهند بود و $\|u\| = \|v\|$ می‌شود و متوازی الاضلاع حاصل از u و v به لوزی یا مربع که اضلاع برابر دارند تبدیل می‌شود. $u+v$ و $u-v$ در یک حالت دیگر هم برهم عمودند اگر یکی از آنها بردار صفر و u و v به یکی از دو حالت زیر باشند.

$u - v = 0 \Rightarrow u = v$: یا $u + v = 0 \Rightarrow u = -v$:

سؤال 3 :

: 5.1

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \dots, c_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}$$

a) بله اگر $a_1 \dots a_k$ مستقل خطی باشند آنگاه $c_1 \dots c_k$ هم مستقل خطی خواهند بود برای اثبات آن باید نشان دهیم ترکیب خطی $c_1 \dots c_k$ فقط وقتی 0 می‌شود که همه ضرایب 0 باشند:

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_k c_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 a_1 \\ \alpha_1 b_1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_k a_k \\ \alpha_k b_k \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \\ \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots k$$

پس $c_1 \dots c_k$ مستقل اند

b) خیر مثال نقض: فرض کنیم $b_1 \dots b_k$ مستقل خطی باشند. آنگاه با توجه به قسمت قبل $c_1 \dots c_k$ مستقل خطی می‌شوند مستقل از اینکه $a_1 \dots a_k$ وابسته باشند یا مستقل. فرض کنیم $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$ به ازای برخی k تایی های مرتب $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ برابر بردار 0 شود و همچنین $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$ به ازای برخی k تایی دیگر بردار 0 شود. اگر بین این دسته از k تایی ها هیچ اشتراکی غیره وجود نداشته باشد و به عبارت دیگر فقط $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{k \text{ تا}}$ مشترک باشد، $c_1 \dots c_k$ ها مستقل وگرنه وابسته خواهند بود

5.4 : به ازای هر $i \neq j$، $a_1 \dots a_k$ دو به دو برهم عمودند ← $x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k$

$\beta_i \beta_j a_i^T a_j$ برابر صفر است.

$$\Rightarrow \|x\|^2 = x^T x = (\beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k)^T (\beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k)$$

$$= \beta_1^2 a_1^T a_1 + \overset{0}{\beta_1 \beta_2 a_1^T a_2} + \dots + \beta_k^2 a_k^T a_k = \beta_1^2 \|a_1\|^2 + \beta_2^2 \|a_2\|^2 + \dots + \beta_k^2 \|a_k\|^2$$

$$= \beta_1^{\cancel{2}} \frac{a_1^T x}{\cancel{\beta_1}} + \beta_2^{\cancel{2}} \frac{a_2^T x}{\cancel{\beta_2}} + \dots + \beta_k^{\cancel{2}} \frac{a_k^T x}{\cancel{\beta_k}} = \beta_1 (a_1^T x) + \beta_2 (a_2^T x) + \dots + \beta_k (a_k^T x) = \beta^T \alpha$$

اگر بردارهای α و β را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_k^T x \end{bmatrix} \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\beta^T \alpha}$$

5.5 :

$$(a - \gamma b) \perp b \Rightarrow (a - \gamma b)^T b = 0 \Rightarrow a^T b - \gamma b^T b = 0 \Rightarrow a^T b = \gamma b^T b \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{a^T b}{b^T b} = \frac{a^T b}{\|b\|^2}}$$

اثبات یکتا بودن γ: برهان خلف: فرض می کنیم دو عدد $\gamma_1 \neq \gamma_2$ داریم به طوری که:

$$(a - \gamma_1 b)^T b = 0 , (a - \gamma_2 b)^T b = 0 \Rightarrow (a - \gamma_1 b)^T b = (a - \gamma_2 b)^T b$$

$$\Rightarrow \cancel{a^T b} - \gamma_1 b^T b = \cancel{a^T b} - \gamma_2 b^T b \Rightarrow \gamma_1 \cancel{b^T b} = \gamma_2 \cancel{b^T b} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$ ← پس γ یکتا است.

5.6: اگر الگوریتم را از a_1 شروع کنیم، $q_1 = e_1, \dots, q_n = e_n$ است:

$\|a_1\| = 1$

$q_1 = a_1 = e_1$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = a_2 - (\overbrace{e_1^T a_2}^{1}) e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_2 \Rightarrow q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = e_2$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = a_3 - (\overbrace{e_1^T a_3}^{1}) e_1 - (\overbrace{e_2^T a_3}^{1}) e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_3 \Rightarrow q_3 = e_3$$

$\vdots$

$q_n = e_n$

بله چون هیچ کدام از $\tilde{q}_i$ ها صفر نشدند پس $a_1 \dots a_n$ مستقل خطی بوده اند و چون n بردار n بعدی مستقل خطی اند یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ محسوب می شوند.