

## باسمه تعالی

### جبر خطی کاربردی – تکلیف سری دوم

مهلت تحویل: شنبه ۱۲ آبان ۱۴۰۳

۱- فرض کنید  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  یک مجموعه یکه متعامد در  $\mathbb{R}^n$  است. نشان دهید برای هر بردار دلخواه  $x \in \mathbb{R}^n$  این نامساوی

$$\|x\|^2 \geq (x^T v_1)^2 + (x^T v_2)^2 + \dots + (x^T v_p)^2$$
 برقرار است:

همچنین بررسی کنید در چه صورتی نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

۲- نشان دهید برای دو بردار دلخواه  $u$  و  $v$ ، رابطه  $\|u\| = \|v\|$  برقرار است اگر و تنها اگر دو بردار  $u + v$  و  $u - v$  بر یکدیگر عمود باشند. آیا می‌توانید تعبیر هندسی این مطلب را در فضای دو بُعدی بیان کنید؟

۳- تمرین‌های کتاب:

5.1 a

5.4 b

5.5 c

5.6 d

۴- برنامه‌ای بنویسید که آگوریتم گرام-اشمیت را، با توضیحات زیر، پیاده‌سازی کند.

a. ورودی این برنامه تعدادی بردار است. برای سادگی این بردارها کنار هم قرار داده شده و به صورت یک ماتریس (هر ستون یک بردار) به برنامه داده می‌شود. این بردارها می‌توانند مستقل خطی یا وابسته خطی باشند. همچنین هیچ یک از بردارها صفر نیست.

b. خروجی برنامه یک پایه یکه متعامد برای فضای گستره بردارهای ورودی است. مجدداً برای سادگی، این بردارها در کنار یکدیگر قرار داده شده و به صورت یک ماتریس نشان داده می‌شوند. علاوه بر این، برنامه نشان می‌دهد که بردارهای ورودی مستقل خطی هستند یا وابسته خطی:

i. اگر بردارها مستقل خطی باشند، خروجی برنامه صرفاً بردارهای پایه است.

ii. اگر بردارها وابسته خطی باشند، برنامه دو خروجی دیگر نیز خواهد داشت:

- خروجی دوم برنامه اندیس بردارهایی است که وابسته خطی به بردارهای قبلی هستند. مثلاً [2 4] یعنی بردارهای دوم و چهارم به سایر بردارها وابسته هستند.

- خروجی سوم، ضرایب هر یک از بردارهای وابسته در پایه یکه متعامد به دست آمده است. مثلاً  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  یعنی ضرایب بردار دوم در پایه یکه متعامد ۱ و ۲ و ضرایب بردار چهارم ۳ و ۵ هستند (با فرض اینکه بعد فضا دو است).

C. برنامه را برای سه ورودی مقابل آزمایش کرده و نتیجه را گزارش کنید:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  و

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**تحويل تكليف:** برای تحويل تكليف، لطفا فایل‌های زیر را در یک پوشه قرار دهید. سپس پوشه را فشرده کرده و با نام شماره دانشجویی خود ذخیره کنید. این فایل فشرده را در سامانه بارگذاری کنید.

۱- حل مسائل تئوری تكليف

۲- برنامه پیاده‌سازی آگوریتم گرام-اشمیت

۳- خروجی برنامه نوشته شده به ازای سه مثال داده شده در قسمت C مسئله ۴