زهرا توکلی 40120063 «به‌ نام تعالی» تکلیف سوم جبر خطی کاربردی

سؤال 2:

$$\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} DA + \overset{0}{EO} & DC + EB \\ FA + \overset{0}{GO} & FC + GB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} DA & DC+EB \\ FA & FC+GB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow DA = I \Rightarrow D = A^{-1}$$

$$FA = 0 \Rightarrow FAA^{-1} = 0A^{-1} \Rightarrow FI = F = 0$$

$$\overset{0}{FC} + GB = I \Rightarrow GB = I \Rightarrow G = B^{-1} \qquad DC + EB = 0 \Rightarrow EB = -DC \Rightarrow EBB^{-1} = -DCB^{-1}$$

$$\Rightarrow E = -DCB^{-1} = -A^{-1}CB^{-1}$$

پس وارون ماتریس بلوکی مورد نظر به صورت $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$ است.

سؤال 3:

$$t_1 = \frac{0+0+t_2+t_5}{4} \Rightarrow 4t_1 - t_2 - t_5 = 0$$

$$t_2 = \frac{0+t_1+t_3+t_6}{4} \Rightarrow 4t_2 - t_1 - t_3 - t_6 = 0$$

$$t_3 = \frac{20+t_2+t_4+t_7}{4} \Rightarrow 4t_3 - t_2 - t_4 - t_7 = 20$$

$$t_4 = \frac{20+20+t_3+t_8}{4} \Rightarrow 4t_4 - t_3 - t_8 = 40$$

$$t_5 = \frac{0+t_1+t_6+t_9}{4} \Rightarrow 4t_5 - t_1 - t_6 - t_9 = 0$$

$$t_6 = \frac{t_2+t_5+t_7+t_{10}}{4} \Rightarrow 4t_6 - t_2 - t_5 - t_7 - t_{10} = 0$$

$$t_7 = \frac{t_3+t_6+t_8+t_{11}}{4} \Rightarrow 4t_7 - t_3 - t_6 - t_8 - t_{11} = 0$$

$$t_8 = \frac{t_4+t_7+t_{12}+20}{4} \Rightarrow 4t_8 - t_4 - t_7 - t_{12} = 20$$

$$t_9 = \frac{0+t_5+t_{10}+t_{13}}{4} \Rightarrow 4t_9 - t_5 - t_{10} - t_{13} = 0$$

$$t_{10} = \frac{t_6+t_9+t_{11}+t_{14}}{4} \Rightarrow 4t_{10} - t_6 - t_9 - t_{11} - t_{14} = 0$$

$$t_{11} = \frac{t_7+t_{10}+t_{12}+t_{15}}{4} \Rightarrow 4t_{11} - t_7 - t_{10} - t_{12} - t_{15} = 0$$

$$t_{12} = \frac{t_8+t_{11}+t_{16}+100}{4} \Rightarrow 4t_{12} - t_8 - t_{11} - t_{16} = 100$$

$$t_{13} = \frac{40+t_9+t_{14}}{4} \Rightarrow 4t_{13} - t_9 - t_{14} = 40$$

$$t_{14} = \frac{40+t_{10}+t_{13}+t_{15}}{4} \Rightarrow 4t_{14} - t_{10} - t_{13} - t_{15} = 40$$

$$t_{15} = \frac{100+t_{11}+t_{14}+t_{16}}{4} \Rightarrow 4t_{15} - t_{11} - t_{14} - t_{16} = 100$$

$$t_{16} = \frac{200+t_{12}+t_{15}}{4} \Rightarrow 4t_{16} - t_{12} - t_{15} = 200$$

پس با حل دستگاه زیر می‌توانیم پاسخ را بیابیم:

$$\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \\ t_{10} \\ t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{14} \\ t_{15} \\ t_{16} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 40 \\ 40 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

سؤال ۱) : وقتی متغیری مانند x را n بار (با n دستگاه) اندازه گیری می کنیم با دستگاهی n معادله، ۱ مجهول روبه رو می شویم ($Ax=b$ که A بلند است) بهترین جواب برای این دستگاه، جوابی است که کمترین فاصله را با بردار b داشته باشد پس با مسئله least squares error روبه رو هستیم:

$\min_x \|Ax-b\|^2 \Rightarrow$ می دانیم جواب این مسئله، $x = A^+b = (A^TA)^{-1}A^Tb$ است.

پس:

measure		result
x	$=$	b_1
x	$=$	b_2
x	$\vdots$	b_n

$$\Rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}_{n\times1} \overset{x}{[x]}_{1\times1} = \overset{B}{\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow x = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}^T_{n\times1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{n\times1}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}^T_{n\times1}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}_{n\times1} = [n]^{-1}_{1\times1}\,[b_1+b_2+\dots+b_n]_{1\times1}$$

$$= \left[\frac{1}{n}\right]\left[b_1+b_2+\dots+b_n\right] = \left[\frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n}\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n}$$

پس بهترین تخمین میانگین همه اندازه گیری ها است.

a) 10.23: اگر $A^2=0$ باشد الزاماً نمی توان نتیجه گرفت $A=0$. مثلا اگر $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ را درنظر بگیریم می بینیم $A^2=0$ ولی $A\neq0$ است:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

b) 10.35: ماتریس Q متعامد است اگر $Q^TQ=I$ پس:

$U^TU=I$, $V^TV=I$

ماتریس UV متعامد است اگر و تنها اگر $(UV)^T(UV)=I$:

$$(UV)^T(UV)=V^T\underbrace{U^TU}_{I}V=V^TV=I\Rightarrow$$ UV متعامد است.

$$\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}\right)^T\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}^T\times\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}U^T&V^T\\U^T&-V^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\overset{I}{U^TU}+\overset{I}{V^TV}&U^TU-V^TV\\U^TU-V^TV&U^TU+V^TV\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2I&0\\0&2I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}$$

پس ماتریس $\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}U&U\\V&-V\end{bmatrix}$ هم متعامد است.

c) 11.8: می‌خواهیم نشان دهیم اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد $\|A^{-1}\| \ge \frac{\sqrt{n}}{\|A\|}$ است و اگر ماتریس کوچک باشد وارون آن بزرگ است و برعکس اگر ماتریس بزرگ باشد وارون آن کوچک است:

اثبات: می‌دانیم برای هر دو ماتریس A و B که بتوان ضرب AB را انجام داد، داریم:

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\| \Rightarrow \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\| \Rightarrow \underbrace{\|I\|}_{\sqrt{n}} \le \|A\|\|A^{-1}\| \Rightarrow \sqrt{n} \le \|A\|\|A^{-1}\| \Rightarrow \boxed{\|A^{-1}\| \ge \frac{\sqrt{n}}{\|A\|}}$$

e) 16.2: مثل این است که k دستگاه p معادله n مجهول داشته باشیم. $\min \|X\|^2$ subject to $\underset{p\times n}{C}\,\underset{n\times k}{X} = \underset{p\times k}{D}$ →

اثبات: اگر $X = [\overset{\text{ستون‌های } X}{x_1}\ x_2 \dots x_k]$ ، آنگاه $\|X\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_k\|^2$ و داریم

$$CX = D \Rightarrow C[x_1 \dots x_k] = [d_1 \dots d_k] \Rightarrow [Cx_1\ \ Cx_2 \dots Cx_k] = [d_1\ d_2 \dots d_k]$$

$$\Rightarrow Cx_1 = d_1,\ Cx_2 = d_2, \dots, Cx_k = d_k$$

می‌دانیم $\|\overset{\text{ماتریس } X}{X}\|^2$ که به صورت جمع یکسری توان 2 است زمانی min می‌شود که تک تک $\|x_i\|^2$ ها min شوند پس باید k مسئله به صورت $\min \|x_i\|^2$ subject to $Cx_i = d_i$ را حل کنیم یعنی به ازای هر ستون x و ستون نظیر آن در D یک مسئلهٔ least norm حل کنیم که پاسخ آن به صورت $C^{\dagger} d_i$ است پس، $\boxed{\hat{X} = [\hat{x}_1\ \hat{x}_2 \dots \hat{x}_k] = [C^{\dagger} d_1\ \ C^{\dagger} d_2 \dots C^{\dagger} d_k] = C^{\dagger} D}$ که $\|\hat{X}\|$ مینی‌مم است.

f) 16.3: $\min \|x - \overset{\text{given}}{y}\|^2$ subject to $Ax = b$

فرض کنیم $q = x - y$: $Aq = A(x-y) = Ax - Ay = b - Ay$

پس حل مسئلهٔ بالا مثل حل مسئلهٔ روبرو است: $\min \|q\|^2$ subject to $\underset{\text{مجهول}}{Aq} = \overset{\text{معلوم}}{b - Ay}$

این مسئله هم یک مسئلهٔ least norm است که جواب آن به صورت زیر است: $q = A^{\dagger}(b - Ay)$, $q = x - y \Rightarrow x - y = A^{\dagger}(b - Ay) \Rightarrow \boxed{x = A^{\dagger}(b - Ay) + y}$

:12.3 (d

a) $(Ax)^Tb = x^TA^Tb = x^T(A^Tb) = x^T(A^TA)\hat{x} = (x^TA^T)(A\hat{x}) = (Ax)^T(A\hat{x}) \Rightarrow (Ax)^Tb = (Ax)^T(A\hat{x})$

b) $(Ax)^Tb = (Ax)^T(A\hat{x}) \xrightarrow{x=\hat{x}} (A\hat{x})^Tb = (A\hat{x})^T(A\hat{x}) \Rightarrow (A\hat{x})^Tb = \|A\hat{x}\|^2$

پس زاویه‌ی بین b و $A\hat{x}$ برابر می‌شود با:

$$\angle(A\hat{x}, b) = \frac{(A\hat{x})^Tb}{\|A\hat{x}\|\|b\|} = \frac{\|A\hat{x}\|^2}{\|A\hat{x}\|\|b\|} = \frac{\|A\hat{x}\|}{\|b\|}$$

$$\frac{Ax^Tb}{\|Ax\|\|b\|} = \frac{(Ax)^T(A\hat{x})}{\|Ax\|\|b\|}$$

c) اگر $x=\hat{x}$ زاویه‌ی بین b و Ax را min کند، باید به ازای هر x داشته باشیم:

$$\cos^{-1}\left(\frac{(A\hat{x})^Tb}{\|A\hat{x}\|\|b\|}\right) \le \cos^{-1}\left(\frac{(Ax)^Tb}{\|Ax\|\|b\|}\right)$$

و چون $\cos^{-1}$ یک تابع نزولی است باید داشته باشیم:

$$\frac{(A\hat{x})^Tb}{\|A\hat{x}\|\|b\|} \ge \frac{(Ax)^Tb}{\|Ax\|\|b\|} \xrightarrow{a:\ x=\hat{x}} \frac{(A\hat{x})^T(A\hat{x})}{\|A\hat{x}\|\cancel{\|b\|}} \ge \frac{(Ax)^T(A\hat{x})}{\|Ax\|\cancel{\|b\|}} \Rightarrow \frac{(A\hat{x})^T(A\hat{x})}{\|A\hat{x}\|} \ge \frac{(Ax)^T(A\hat{x})}{\|Ax\|}$$

$\Rightarrow \|A\hat{x}\|\|Ax\| \ge (Ax)^T(A\hat{x}) \rightarrow$ طبق نامساوی کوشی - شوارتز این نامساوی درست است پس

$\hat{x}$ زاویه‌ی بین Ax و b هم minimum می‌کند.