

労働経済学

Lecture 2 数学的準備

張 俊超

24th April 2017

ミクロ経済学の復習

- ▶ 総和記号、一次関数、二次関数、対数関数
- ▶ 微分
- ▶ 選好、無差別曲線
- ▶ 予算制約条件で効用最大化

総和記号

$$\sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n$$

一次関数、二次関数

① 一次関数

$$y = f(x) = kx + b$$

② 二次関数の最大/最小値

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

対数関数

① $\ln XY = \ln X + \ln Y$

② $\ln \frac{X}{Y} = \ln X - \ln Y$

③ $\ln X^Y = Y \ln X$

④ $\ln 1 = 0$

⑤ $\ln 0$ 定義されていない

微分の公式

$$\textcircled{1} \quad c' = 0$$

$$\textcircled{2} \quad x' = 1$$

$$\textcircled{3} \quad cx' = c$$

$$\textcircled{4} \quad (x^c)' = cx^{c-1}$$

$$\textcircled{5} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\textcircled{6} \quad (e^x)' = e^x$$

$$\textcircled{7} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

微分の法則

$$\textcircled{1} \quad (cf(x))' = cf'(x)$$

$$\textcircled{2} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\textcircled{3} \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\textcircled{5} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\textcircled{6} \quad f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\text{例: } f(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2(2x)$$

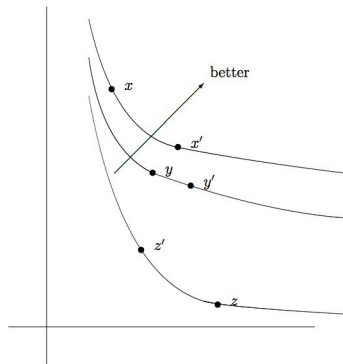
選好

- ▶ ミクロ経済学において、財に対する選好は常に以下の仮定をしている。簡単化のために、消費集合 $X = (x, y, z)$ にしする。 x, y, z の三種類の財しかない。
 - ▶ 反射性: X 集合上の任意の要素 x について、 $x \preceq x$ が成り立つ
例: りんごはりんごより厳密に望ましいか両者は無差別 (りんごはりんごより悪くはない)
 - ▶ 推移性: X 集合上の任意の 3 要素 x, y, z について、 $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば必ず $x \preceq z$ が成り立つ。
例: みかんはりんごより悪くはない、かつ、すいかはみかんより悪くはない場合、すいかは必ずりんごより悪くはない。
 - ▶ 完全性: X 集合上の任意の 2 要素 x, y について、必ず $x \preceq y$ もしくは $y \preceq x$ のいずれか少なくとも一方が成り立つ。
例: みかんはりんごより悪くはなければ、必ずりんごはみかんより悪くはない。
 - ▶ 選好順序 = 反射性 + 完備性 + 推移性 \Rightarrow 合理的な選好

効用関数

- ▶ 経済学では、抽象的な選好を表すために、効用関数を用いる。効用関数は労働者の間で、比較できません。
- ▶ 一人の労働者にとって、選好 \Longleftrightarrow 効用関数。
- ▶ 任意の二つの要素の (数量の) 組み合わせを考えましょう。 (x_a, y_a) の組み合わせを A、 (x_b, y_b) を B とする。労働者が A を B よりも好む時、 $U(x_a, y_a) > U(x_b, y_b)$ 。B を A よりも好む時、 $U(x_a, y_a) < U(x_b, y_b)$ 。A と B に対する選好は等しい時、 $U(x_a, y_a) = U(x_b, y_b)$ 。このような U が効用関数。

無差別曲線



- ▶ 効用関数の 2 財平面上の等高線図を無差別曲線と呼ぶ。
- ▶ 無差別曲線は一般的に凸性を持つ。曲線は原点に向くって、凸であること。
- ▶ 各曲線上、効用は同じ。しかし、原点から遠ければ遠いほど、効用が高くなる。

効用最大化

$$\begin{aligned} & \text{Max } U(x, y) \\ & \text{s.t. } p_x x + p_y y = I \end{aligned} \tag{1}$$

- ▶ p_x, p_y は財 x, y の値段、 I は所得。
- ▶ 効用 U を最大化するような、財な数量、 x と y を決める。
- ▶ (1) 式の解け方：ラグランジェ乗数法

ラグランジエ乗数法

- ① 最初に、目的関数を書く

$$U(x, y)$$

- ② そして、とにかく λ という不思議の数を隣に書く

$$U(x, y) + \lambda$$

- ③ 予算制約 $p_x x + p_y y = I$ の右辺を固定し、固定していない左辺を引いたものを λ の隣に書く

$$U(x, y) + \lambda(I - (p_x x + p_y y))$$

- ④ この関数の変数は x, y, λ となり、ラグランジエ関数と呼ぶ。
 $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(I - (p_x x + p_y y))$

- ⑤ ラグランジエ関数をそれぞれ x, y, λ について偏微分して、連立方程式を解ける。

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = I - (p_x x + p_y y) = 0$$

数理統計学の復習

- ▶ 確率変数、確率分布、分布関数
- ▶ 期待値と分散
- ▶ 共分散と相関

確率変数、確率分布、分布関数

- ▶ x_1, x_2, \dots, x_n なる n 個の値をとる変数 X に対して、 $X = x_i$ なる確率 p_i が与えられているとき、 X を確率変数という。
- ▶ 確率変数 X とそれに対応する確率 $P(X = x_i)$ との対応関係を確率分布という。
- ▶ 確率変数 X の値がある値 x までとる確率を $F(x)$ で表し、確率変数 X の分布関数という。つまり、分布関数は $F(x) = P(X \leq x)$ で与えられる。

離散型

X の値 x_i	x_1	x_2	\cdots	x_n
$P(X = x_i) = p_i = f(x_i)$	p_1	p_2	\cdots	p_n

- ▶ 確率分布は上記の表どおり。
- ▶ 確率変数 X の値を $x_1 < x_2 < \dots x_n$ とするときに、分布関数 $F(x_k) = P(X \leq x_k) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = \sum_{i=1}^k p_i$
- ▶ 確率分布 f と分布関数 F は次の性質をもつ。
 - ① $0 \leq p_i = f(x_i) \leq 1$
 - ② $F(x_k) = P(X \leq x_k) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1$
 - ③ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
 - ④ $a < b \iff F(a) < F(b)$

連続型

- ▶ 確率変数が連続的な値であれば、分布関数は以下で

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

- ▶ $f(x)$ は確率密度関数という。以下の性質を持つ。

① $f(x) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

③ 任意の実数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ について、 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

④ $f(x)$ は x において連続であれば、 $F'(x) = f(x)$

期待値と分散

- ▶ 離散型 $p_i = P(X = i)$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = \sum_{i=1}^k x_i p_i$$

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 p_i$$

- ▶ 連続型 $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

- ▶ 演算のルール

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

共分散と相関

- ▶ 共分散 $Cov(X, Y)$ は X と Y との間の関係を表す数値である。

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

共分散が大きい（正）→ X が大きいとき Y も大きい傾向がある

共分散が 0 に近い → X と Y にあまり関係はない

共分散が小さい（負）→ X が大きいとき Y は小さい傾向がある

- ▶ 相関係数

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

ρ_{XY} は -1 と 1 との間にある。 $|\rho_{XY}| = 1$ の場合、完全相関であり、 X と Y は線形関係である。 $\rho_{XY} = 0$ の場合、相関しない、全く線形関係ではない。

計量経済学の復習

- ▶ 労働経済学における実証分析に最小限の数学
- ▶ 計量経済学の基礎となる最小二乗法を復習
- ▶ 単回帰と重回帰
- ▶ OLS における仮定と BLUE 推定量

最小二乗法 (Ordinary Least Squares, OLS)

▶ なぜ必要か?

感覚的になんとなくわかることを数学的に表現できるように

(定性的 → 定量的)

▶ どんな時使うか?

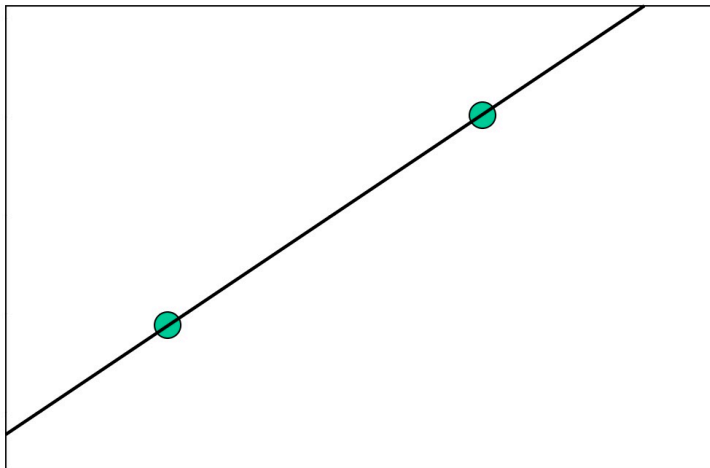
あいまいな情報を数字で表現したい時 (トレンド分析、変数の関係进行分析...)

データ解析を定量化したい時 (データの解釈と予測、データの近似式、データからの最適設計)

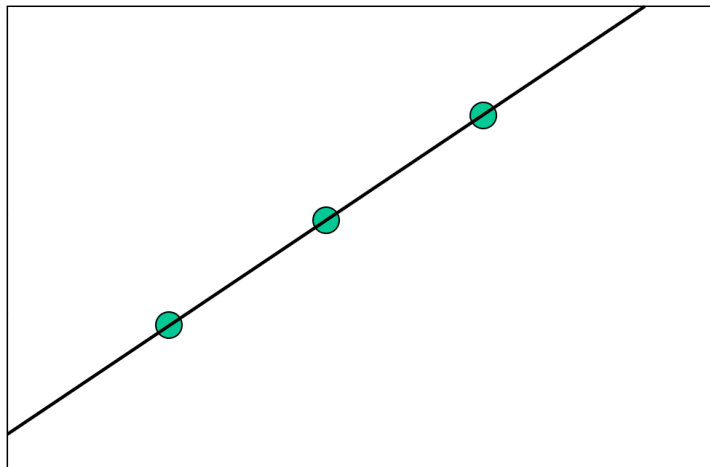
▶ 本質となる考え方

統計的に「誤差」を定義し、もっともらしい直線を引く

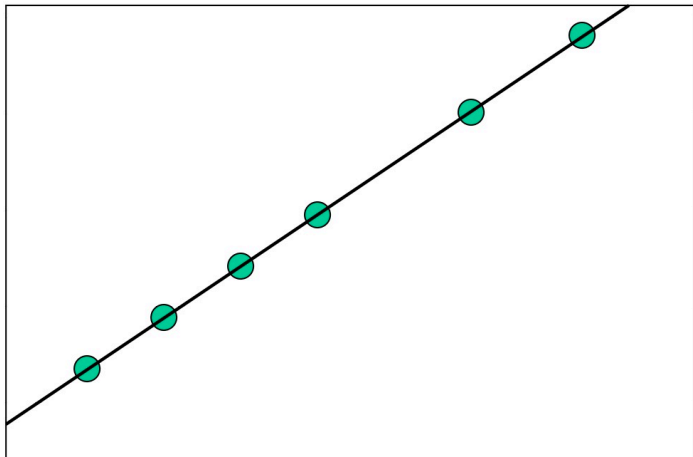
最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



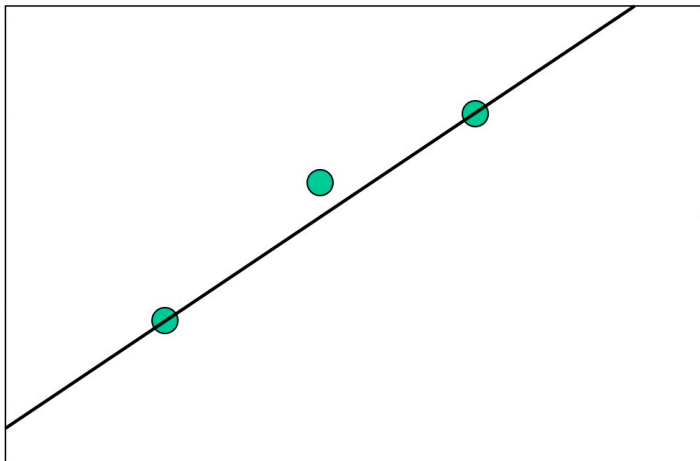
最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



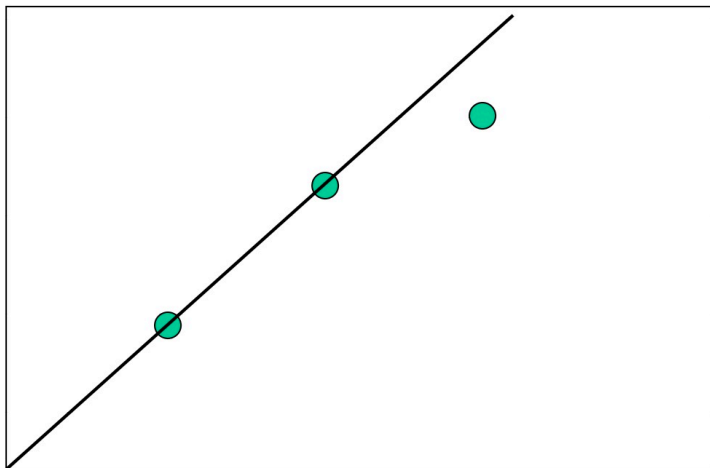
最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



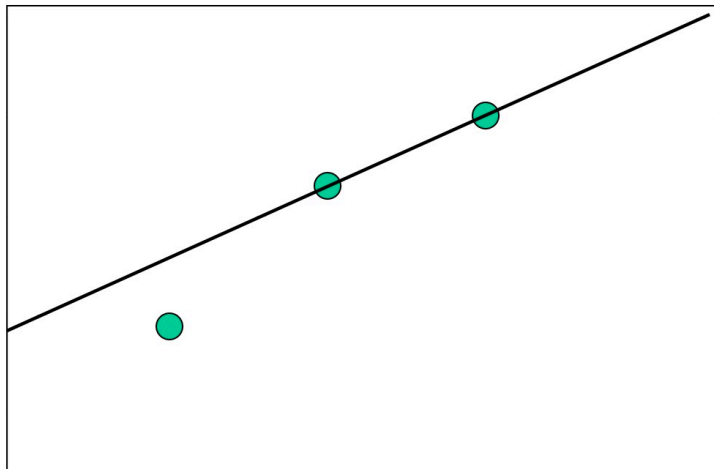
最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



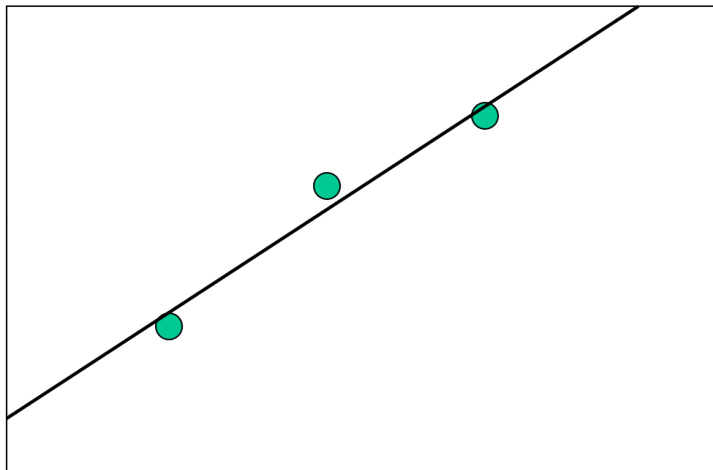
最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)

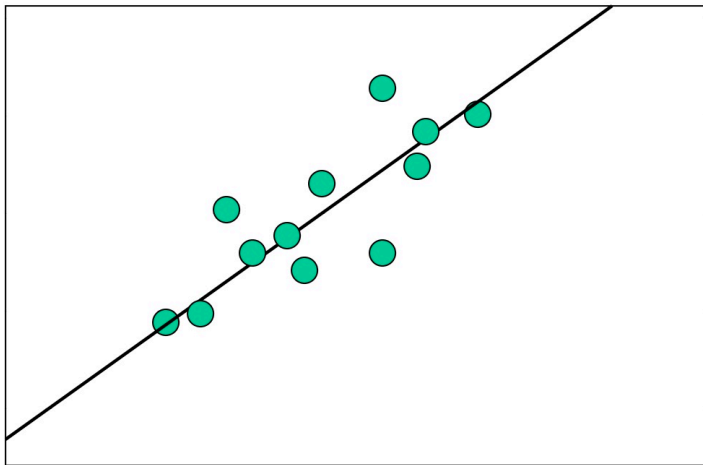


最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



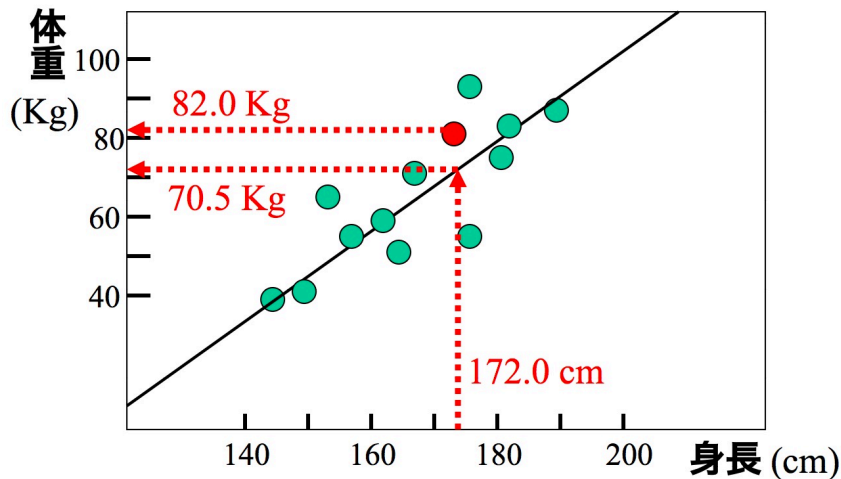
点が三つ以上になれば、直線当てはめには何らかの妥協が必要

最小二乗法のイメージ (直線当てはめ)



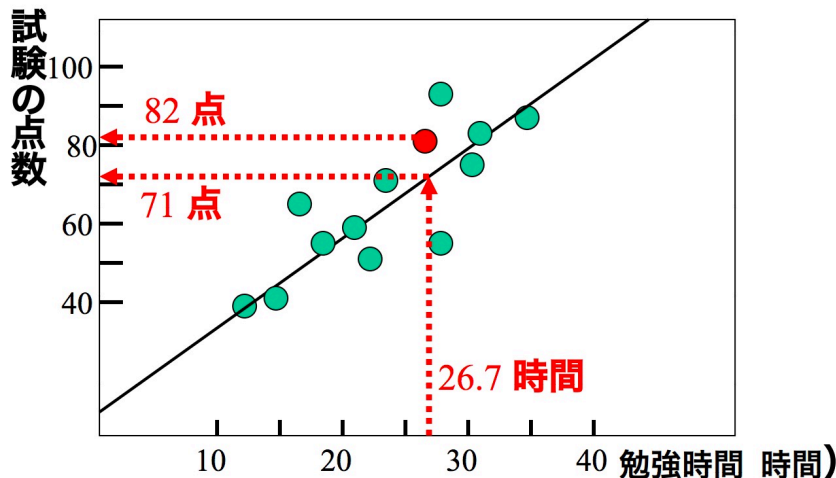
点が多くなると、直線当てはめには数学的基準が必要

最小二乗法の応用例



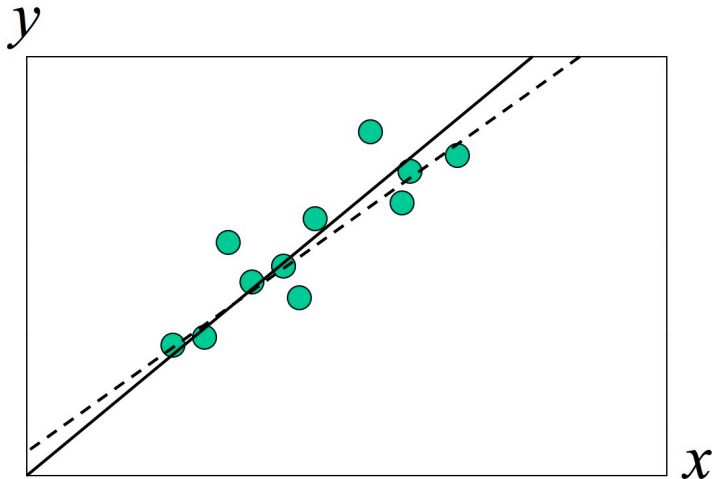
自分の身長から、平均的体重を推測できる

最小二乗法の応用例



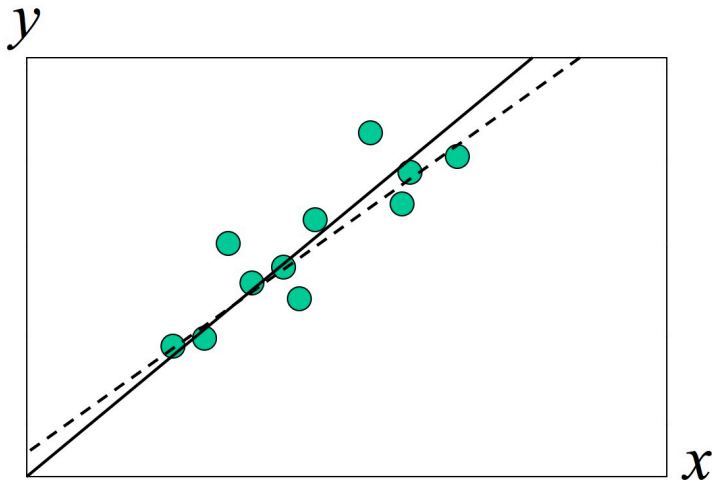
長い時間勉強をすれば、一般的に試験で良い点数が取れる

最小二乗法の統計的基準



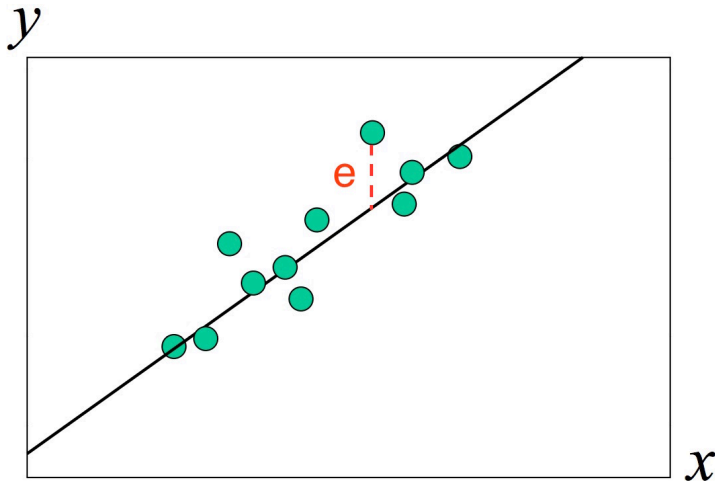
多数のデータから、直線の数式表現 ($y = ax + b$) を求める
(x, y) はデータから観察される

最小二乗法の統計的基準



多数のデータから、直線の数式表現 ($y = ax + b$) を求める
(x, y) はデータから観察される

最小二乗法の統計的基準



残差 e は垂直方向において各点から直線までの距離と定義される。(仮に $y = ax + b$ の関数型がわかる場合)

最小二乗法の統計的基準

n 個の点があり、 i 番目の点の座標値を (x_i, y_i)

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

RHS と LHS を両方二乗にして、

$$e_i^2 = \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

n 個の点の e_i^2 の和を取れば、

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2 \equiv S$$

S は残差二乗和と定義され、SSR または RSS という表記もある

最小二乗法の統計的基準

S を最小化することによって、 a と b の値が得られる

$$\arg \min S = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^n -2(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n \{y_i - (ax_i + b)\}^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^n -2(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

最小二乗法の統計的基準

 \Longleftrightarrow

$$\begin{cases} n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$\sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ と $\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ の性質を使って、

 \Longleftrightarrow

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases} \quad (5)$$

よって、 a と b を得られる。その他、行列の式、モーメント法、最大尤度法でも a と b を推定できる。違う手法で a と b を計算してみてください。

単回帰と重回帰

▶ 単回帰

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

左辺 y_i は被説明変数。従属変数、または結果変数とも呼ばれる。

右辺の x_i は説明変数。独立変数、または原因変数とも呼ばれる。

説明変数は一つだけ。

▶ 重回帰

$$y_i = a + bx_i + cz_i + \dots + e_i$$

説明変数: x_i, z_i, \dots

説明変数が二つ以上。

単回帰と重回帰

- ▶ (4) 式では、単回帰での a, b を計算した。 $S = f(a, b)$ を最小化するような a, b が得られた。
- ▶ 重回帰の場合、同様に、 $S = f(a, b, c, \dots)$ を最小化するような a, b, c, \dots が得られる。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

...

最小二乗法 (OLS) における仮定

① 線形性

真のモデルは $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ に従う。 α, β は推定すべき未知パラメータ。 u_i は誤差の実現値。

② 誤差項の期待値は 0

$$E(u_i) = 0$$

③ 誤差項の分散はすべての i について等しい

$$\text{Var}(u_i) = \sigma^2$$

④ 誤差項に系列相関は存在しない

$$\text{Cov}(u_i, u_j) = 0$$

⑤ 説明変数と誤差項の独立性

$$\text{Cov}(u_i, x_i) = 0$$

⑥ 正規分布の仮定

$$u_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}$$

仮定 1-5 を満たす場合、OLS 推定量は BLUE(Best Linear Unbiased Estimator) である。最良線形不偏推定量である。

決定係数 (R^2)、相関係数、t 検定、F 検定、p 値

- ▶ 計量経済学を履修してください。
- ▶ または、Wooldridge のテキストを独学してください。
- ▶ それらの知識がわからなくても講義内容の理解には問題ない。