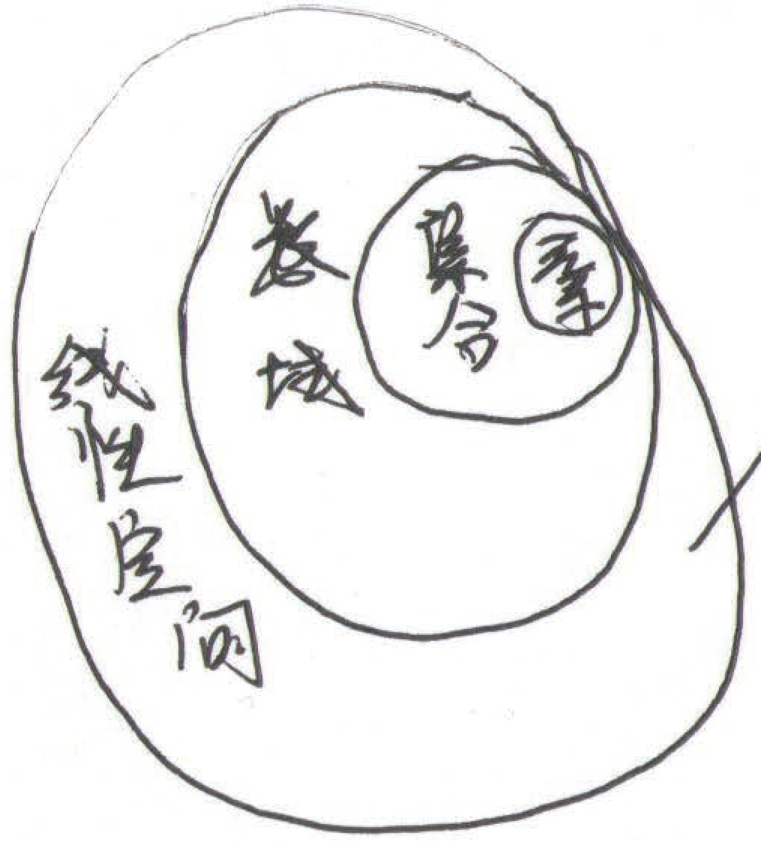
线性空间 (V)

零元：V中元素，$0+\alpha=\alpha$

负元：V中元素，$\alpha+\beta=0$，$\alpha=-\beta$

数域F：是一个数集（满足加减乘除）
线性空间V：是一个集合



加法：交换、结合、零元、负元

数乘：结合（数、向量）
分配（数、向量）

线性表示：向量β和一组向量$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，$k_1\sim k_n$不全为0

线性无关：一组向量$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 中 $k_1\sim k_n$全为0

则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关向量组

线性空间(V)的基：V中一组线性无关向量组
$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

若$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，则$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为向量$\beta$在$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下坐标

例：$V=\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\in R^{2\times2} \,\middle|\, a_1-a_2+a_3-a_4=0\right\}$

求：V的维数与一个基β

解：我们知道线性方程组为：

$a_1-a_2+a_3-a_4=0$

$\underbrace{[1,-1,1,-1]}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=0$

四个变量a_1,a_2,a_3,a_4，一个方程
那么自由变量为3个
无关向量组中的向量也为3个 → 维数为3

→根据以上可知秩矩阵为1.

求基β就是求上面方程组基础解系.

4个变量a_1,a_2,a_3,a_4，确定一个变量，修改其他3个自由变量

我们确定a_1 $[a_1-a_2+a_3-a_4=0]$

① $\begin{cases}a_2=1\\a_3=0\\a_4=0\end{cases}\to a_1=1$ ② $\begin{cases}a_2=0\\a_3=1\\a_4=0\end{cases}\to a_1=-1$ ③ $\begin{cases}a_2=0\\a_3=0\\a_4=1\end{cases}\to a_1=1$

所以基础解系：

$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $A_2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$ $A_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ （与PPT不一样，但基有很多，我这种比较容易理解）

过渡矩阵

引言：多个线性空间(V)有多个基(无关向量组)，基与基之间可以过渡的，因而引出过渡矩阵.

$$\beta_2 = \beta_1 P$$

P为基β_1到基β_2的过渡矩阵.

例：$P(t)$两个基：$\beta_1=\{1, t, t^2\}$

$\beta_2=\{t+1, t-2, t^2\}$

求基β_2到β_1的过渡矩阵 ($\beta_1=\beta_2 P$)

解：思想：就是β_1中每个向量都可以用β_2表示(坐标)

而所有β_1向量被β_2表示的坐标合起来是P.

① β_1中第一个向量在β_2下坐标 $x=[x_1, x_2, x_3]^T$

$$1 = [t+1, t-2, t^2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1-2x_2) + (x_1+x_2)t + x_3 t^2$$

解之 $x=[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0]$

② β_1中第二个向量(t)在β_2下坐标 $x=[x_1, x_2, x_3]^T$

$\longrightarrow x=[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0]^T$

③ $\longrightarrow x=[0, 0, 1]^T$

根据以上知：$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

子空间

零空间：$N(A) \triangleq \{x \in R^n \mid Ax=0\}$

$\dim N(A) = n - \underbrace{\text{rank}A}_{\text{秩}} = n-r$

基为 $Ax=0$ 基础解系

列空间：$R(A) \triangleq \{Ax \mid x \in R^n\}$

$\dim R(A) = \text{rank}\,A = r$

基为A列向量极大线性无关组.

和空间：$W_1+W_2=\{\alpha \in V \mid \alpha=\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$

$W_1 = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$

$W_2 = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$

$W_1+W_2 = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m\}$

交空间：$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \in V \mid \alpha \in W_1 \text{ 且 } \alpha \in W_2\}$

$\boxed{\text{定理：} \dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)}$

例题下一页

例

$a_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$ $a_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ $a_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $a_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$

$W_1=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ $W_2=\mathrm{span}\{\alpha_3,\alpha_4\}$

求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 维数和基

解：① $W_1+W_2=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&2&-2&2\\0&1&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&0&\cancel{\ }&4\\0&0&\cancel{\ }&8\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\0&3&-5&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

∴ 极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

∴ $\dim(W_1+W_2)=3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 W_1+W_2 的基.

② 设 $\xi\in W_1\cap W_2$，那么 ξ 既是 W_1 和 W_2

$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$

$\to x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-x_3\alpha_3-x_4\alpha_4=0$

$\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0\ \longrightarrow\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\\1\end{bmatrix}$

∴ 基为：$-1\alpha_1+4\alpha_2=[-5\ 2\ 3\ 7]^T$

~~根据 dim(W₁∩W₂)~~ ∴ $\dim(W_1\cap W_2)=1$

线性变换

定义：V_1,V_2 是同一数域下上线性空间，T 是 $V_1\to V_2$ 映射.

T 就是 V_1 到 V_2 线性变换.

设 T 为 $V^n\to V^m$ 的线性变换，$B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V^n 基.

$B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 是 V^m 基.

那 $T\alpha_i\in V^m$（因为 T 为 $V^n\to V^m$ 变换，~~再~~ $\alpha_i\in V^n$，

那么 $T\alpha_i\in V^m$，所以可以用 V^m 的基 B_β 表示）

∴ $T\alpha_i=B_\beta\cdot A_i$

$TB_\alpha=T\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=B_\beta\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$

$=\{B_\beta A_1,B_\beta A_2,\cdots,B_\beta A_n\}$

例：定义 $R^{2\times2}$ 上线性变换 T：

$TX=CX-XC$，$X\in R^{2\times2}$，$C=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$

解：因为 $X\in R^{2\times2}$，没有约束条件，所以基为4个

$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ $E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ $E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

∴ ~~本事~~ $TE_1=CE_1-E_1C=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，

因为线性变换依然在基底 $\{E_1,E_2,E_3,E_3\}$ 线性空间下

所以依然可以用 $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 来表示.

$TE_1=CE_1-E_1C=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\{E_1,E_2,E_3,E_3\}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$TE_2 = CE_2 - E_2C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}[-1, 0, 0, 1]^T$

$TE_3 = CE_3 - E_3C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}[0, 0, 0, 0]^T$

$TE_4 = CE_4 - E_4C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}[0, 0, -1, 0]^T$

∴ T在$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$下矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设T为$V^n \to V^m$，记$N(T) = \{\xi \in V^n \mid T\xi = 0\}$

$R(T) = \{T\xi \in V^m \mid \xi \in V^n\}$

零空间：$N(T)$，为V^n的子空间

值空间：$R(T)$，为V^m的子空间

零度：$null(T) = n - rank(A)$（n是A矩阵中未知数个数）

秩：$rank(T) = r$

线性变换(T)的特征值与特征向量。

设$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$V^n$的基，T在基B下矩阵为A

A的特征值~~为~~λ_i = T的特征值

~~A的~~T的特征向量 $= B \cdot X_i$（A的特征向量）

$\beta_i = BX_i$　　$\lambda_i = \lambda_\beta$

例：$P_2(t) \to P_2(t)$线性变换T：

$$TP(t) = P(t) + (t+1)\frac{dP(t)}{dt}$$

求T的特征值和特征向量

解：因为$P_2(t)$为多项式，取基为$B = \{1, t, t^2\}$

把B_i代入式子.

$$\begin{cases} T(1) = 1 = B[X_1, X_2, X_3]^T \\ T(t) = 2t+1 = B[X_4, X_5, X_6]^T \\ T(t^2) = 2t + 3t^2 = B[X_7, X_8, X_9]^T \end{cases}$$

$$\to A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

那么A特征值，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 3$

对应特征向量 $\alpha_1 = [1, 0, 0]^T$，$\alpha_2 = [1, 1, 0]^T$，$\alpha_3 = [1, 2, 1]^T$

可知T的特征值，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 3$

对应T特征向量：

$$\begin{cases} \beta_1 = B\alpha_1 = 1 \\ \beta_2 = B\alpha_2 = 1+t \\ \beta_3 = B\alpha_3 = 1+2t+t^2 \end{cases}$$

T可对角化

矩阵可对角化条件：

- ①有 n 个特征值（求各不相同）$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \cdots \neq \lambda_n$
- ②若存在多重根（$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2}$）（$n$重根）那么代入 λ_i 所求齐次线性方程的基础解系个数~~等于重数~~ n（与多重根重数相等）

例：定义线性变换T：$TX = XC$，$\forall X \in R^{2\times2}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求：1) T特征值和特征向量。

2) T是否可对角化？若可以，求 $R^{2\times2}$ 的基B，使得T在B下的矩阵是对角矩阵。

解：$X \in R^{2\times2}$，所以取 $R^{2\times2}$ 基为

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TE_1 = E_1C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}[1,1,0,0]^T$$

$$TE_2 = E_2C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}[1,1,0,0]^T$$

$$TE_3 = E_3C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}[0,0,1,1]^T$$

$$TE_4 = E_4C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}[0,0,1,1]^T$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & & \\ -1 & \lambda-1 & & \\ & & \lambda-1 & -1 \\ & & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-2)^2$$

A特征值是：$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = \lambda_4 = 2$

将 $\lambda_1 = \lambda_2$ 代入，$(\lambda I - A) = 0$，得

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{得基础解系：} \begin{cases} \alpha_1 = [1,-1,0,0] \\ \alpha_2 = [0,0,1,-1] \end{cases}$$

则T对应向量：
$$\begin{cases} \beta_1 = \{E_1,E_2,E_3,E_4\}^T \cdot \alpha_1 = [1,-1,0,0]^T \\ \beta_2 = \{E_1,E_2,E_3,E_4\}^T \cdot \alpha_2 = [0,0,1,-1]^T \end{cases}$$

将 $\lambda_3 = \lambda_4$ 代入 $(\lambda I - A) = 0$，得

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{得基础解系：} \begin{cases} \alpha_3 = [1,1,0,0] \\ \alpha_4 = [0,0,1,1] \end{cases}$$

则T对应向量：
$$\begin{cases} \beta_3 = \{E_1,E_2,E_3,E_4\}^T \cdot \alpha_3 = [1,1,0,0]^T \\ \beta_4 = \{E_1,E_2,E_3,E_4\}^T \cdot \alpha_4 = [0,0,1,1]^T \end{cases}$$

$\because \beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关 $\longrightarrow$ T可对角化

T在 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$ 下矩阵是对角阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$