

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ

по учебно-исследовательской работе №2

«Исследование систем марковского обслуживания на марковских моделях»

по дисциплине «**Моделирование**»

Вариант 53/3

Авторы: Кулаков Н. В.

Факультет: ПИиКТ

Группа: Р34312

Преподаватель: Алиев Т.И



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2023

Содержание

1. Постановка задачи и исходные данные.....	3
2. Выполнение.....	4
2.1. Описание исследуемых систем.....	4
2.2. Графическое представление систем.....	5
2.3. Перечень состояний марковского процесса для исследуемых систем.....	7
2.4. Размеченные графы переходов для систем.....	9
2.5. Матрицы интенсивностей переходов.....	11
2.6. Значения стационарных вероятностей.....	12
2.7. Характеристики систем.....	13
2.8. Графики сравнительного анализа характеристик.....	15
3. Итоги.....	16

1. Постановка задачи и исходные данные

Разработать марковские модели одно- и многоканальных СМО с однородным потоком заявок, рассчитать характеристики. Проанализировать и выбрать наилучший вариант построения СМО в соответствие с заданным критерием эффективности.

В процессе исследований для расчета характеристик функционирования СМО используется программа MARK.

Вариант 53/3.

Таблица 1: Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем

Вариант	Система 1		Система 2		Критерий эффектив
	П	ЕН	П	ЕН	
53	2 (E_2)	3	3	3/0/0	(в)

- П — число обслуживающих приборов
- П (E_k) — в одном из приборов длительность обслуживания распределена по закону Эрланга k-ого порядка
- ЕН — Емкости накопителей.
 - Представлена одним числом — общий накопитель перед всеми приборами.
 - X/Y/Z — перед первым/вторым/третьим приборами
- критерий эффективности в) — максимальная нагрузка системы

Таблица 2: Параметры нагрузки

Номер варианта	Интенсив.	Ср. длит. обл	Вероятности занятия прибора		
	λ , 1/с	b, с	П1	П2	П3

3	0.3	20	0.25	0.25	0.5
---	-----	----	------	------	-----

- в случае двухканальной СМО вероятность занятия прибора П1 выбирается из табл.2, а вероятность занятия прибора П2 принимается равной сумме вероятностей занятия приборов П2 и П3

2. Выполнение

Интенсивность обслуживания — 0.3 1/с, время обслуживания — 20 с.

2.1. Описание исследуемых систем

Система 1. В системе число обслуживающих приборов равно 2, причем в одном из них время обслуживания распределено по закону Эрланга 2-ого порядка, в другом — экспоненциальное распределение. Система имеет общую очередь длиной 3. При освобождении какого-либо из приборов заявка направляется в соответствие с вероятностным правилом: $[P(П1) = 1/3P(П2) = 0.25]$, если оба прибора свободны. Поток, поскольку разряжение вероятностное, остается экспоненциальным.

Система 2. В системе 3 обслуживающих прибора с временем обслуживания, распределенным по экспоненциальному закону. Длина очереди перед каждым из прибором 3, 0, 0 соответственно. Заявка направляется в очередь в соответствие с правилом: $[P(П1) = P(П2) = 1/2P(П3) = 0.25]$, даже если очередь заполнена (, тогда заявка отбрасывается).

Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует

Для **Система 1**, поскольку вероятностный выбор происходит от очереди, то осуществляется выбор и пересчет вероятностей, в случае если какие-то приборы свободны, а какие-то заняты. Для второго случая, поскольку нет общей

очереди, то заявка просто отбрасывается, в случае, если в системе есть занятые и незанятые приборы, а заявка вероятностно поступает на занятый прибор.

То есть для Система 1, если первый прибор занят, то следующая заявка, если первый прибор не освободится, поступит только во второй прибор, и никак не отбросится. В то время как, НУО если в Система 2 занят прибор 2, а заявка вероятностно поступает на прибор 2, то она отбросится.

2.2. Графическое представление систем

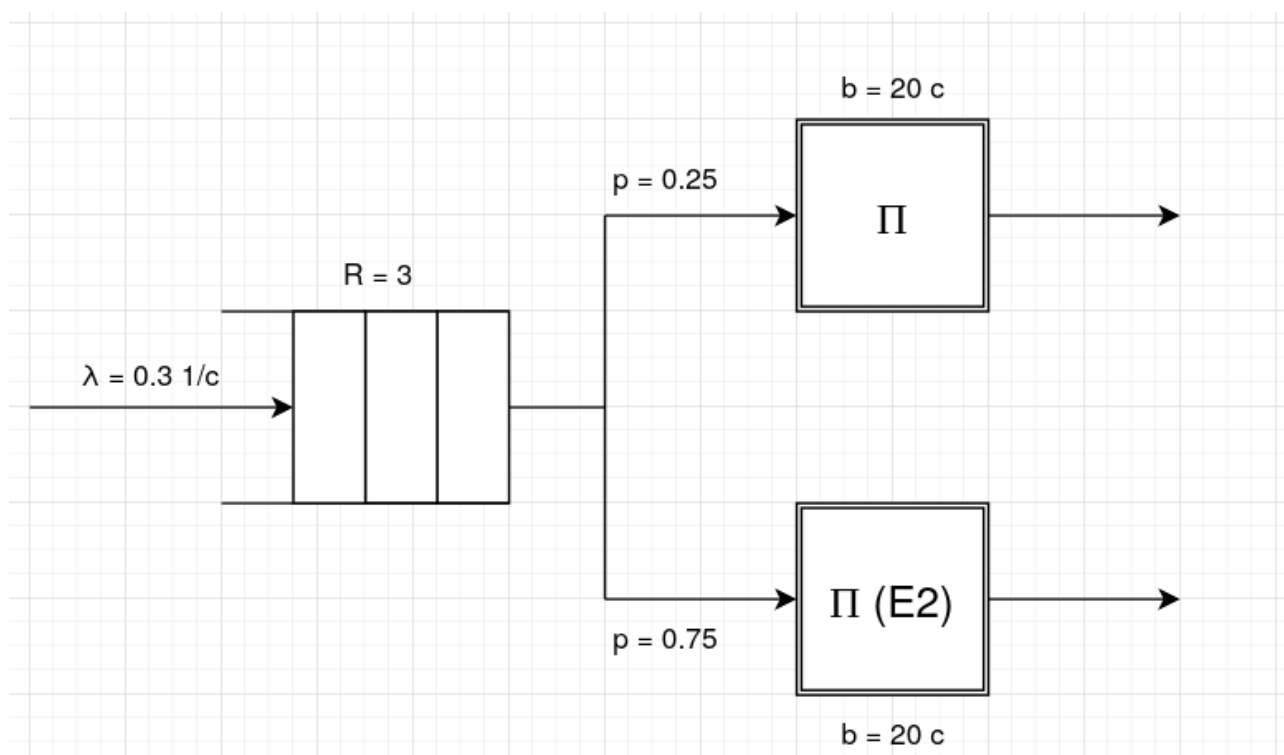


Рисунок 1: Графическое представление Система 1

Распределение Эрланга 2-ого порядка будет иметь второй прибор.

Так как нагрузка превышает 1 ($y = 0.3/(0.05+0.05) = 3$), то большая часть заявок будет отбрасывать, и хотя бы один прибор будет работать часто, поэтому скорее всего выбор, какой прибор назначить с распределением Эрланга, будет незначительным. Но все же, нормализованный эрланг стремится к нормальному распределению, что дает меньшее значение «околонулевых» значений времен обслуживания. Поэтому выдвину предположение, что для удовлетворения моего критерия эффективности будет лучше, если именно первый прибор будет

иметь распределение Эрланга, ведь тогда заявки будут чаще попадать во второй прибор (для него вероятность попадания выше), если оба прибора свободны, и в целом, если экспоненциальное распределение, имеющее больше околонулевых значений, быстро обработает какое-то из них, то прибор будет ожидать заявки, а соответственно, если сделать большую вероятность попадания заявок к нему, то скорее всего этот прибор будет ожидать меньше, так как к нему попадет больше заявок из буфера, пока он неожиданно не закончится, в то время как другой прибор получит свою заявку, и в большинстве случаев будет обрабатывать ее дольше (хотя матожидание у этих приборов равно), пока буфер снова не накопится.

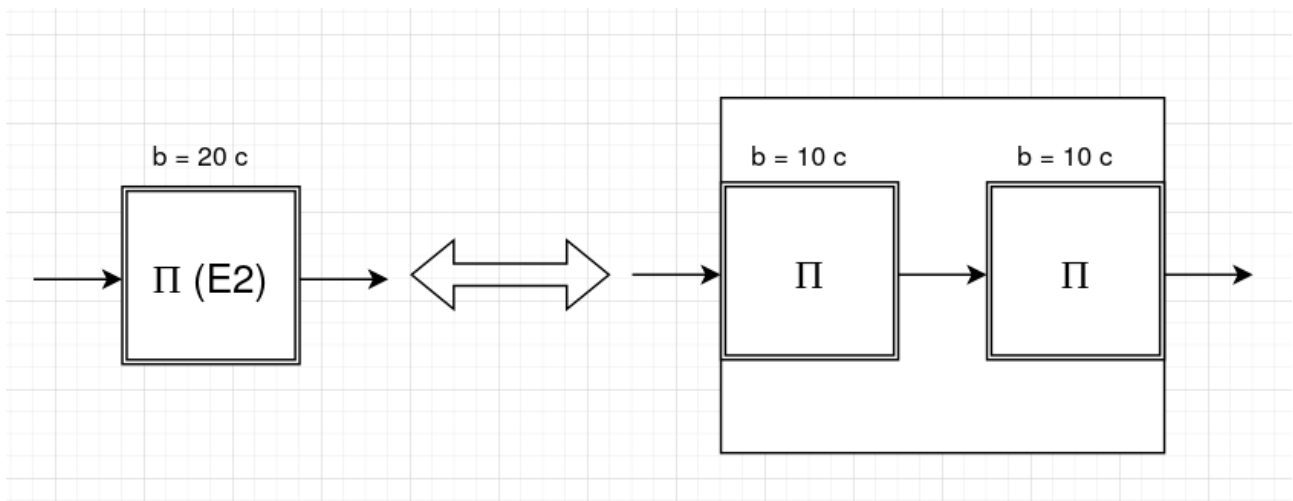


Рисунок 2: Эквивалент $\Pi(E2)$ через $\Pi(E1)$

Прибор с распределением Эрланга 2-ого порядка можно представить как последовательность из двух приборов с экспоненциальным распределением с матожиданием вдвое меньшим.

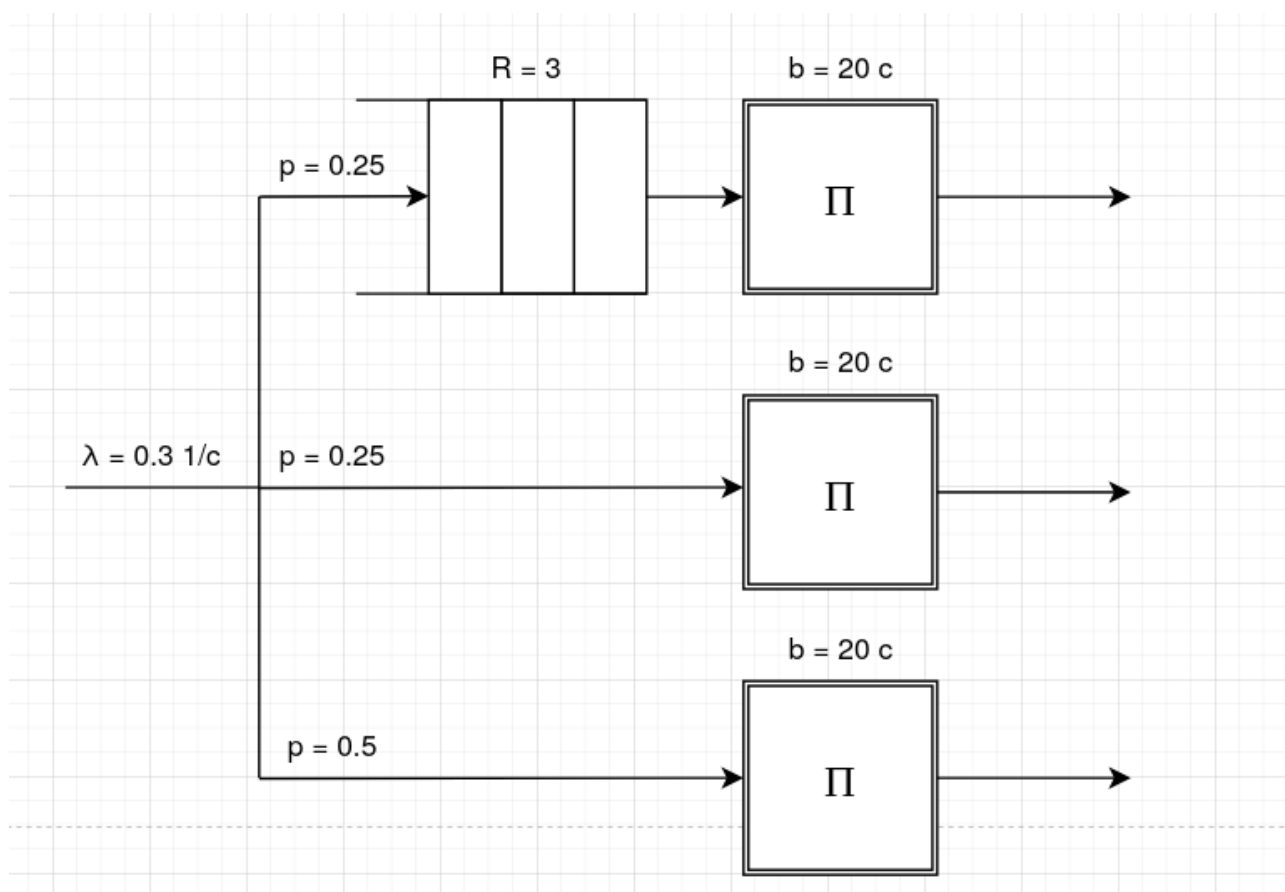


Рисунок 3: Графическое представление Система 2

2.3. Перечень состояний марковского процесса для исследуемых систем

Обозначения:

- P_k — номер прибора. 0 — прибор пуст, иначе в нем заявка. Поскольку используется распределение Эрланга 2-ого порядка, то буду отмечать номер этапа как 1, 2.
- O — длина общей очереди, O_k — связанной с k -ым Прибором

Таблица 3: Перечень состояний марковского процесса для исследуемых систем

Номер состояния	Система 1	Система 2
	$E_k(\Pi_1/\Pi_2/O)$	$E_k(\Pi_1/\Pi_2/\Pi_3/O_1)$
E0	$E_0(0/0/0)$	$E_0(0/0/0/0)$
E1	$E_1(1/0/0)$	$E_1(0/1/0/0)$

E2	E2(0/1/0)	E2(0/0/1/0)
E3	E3(1/1/0)	E3(0/1/1/0)
E4	E4(1/1/1)	E4(1/0/0/0)
E5	E5(1/1/2)	E5(1/1/0/0)
E6	E6(1/1/3)	E6(1/0/1/0)
E7	E7(0/2/0)	E7(1/1/1/0)
E8	E8(1/2/0)	E8(1/0/0/1)
E9	E9(1/2/1)	E9(1/1/0/1)
E10	E10(1/2/2)	E10(1/0/1/1)
E11	E11(1/2/3)	E11(1/1/1/1)
		E12(1/0/0/2)
		E13(1/1/0/2)
		E14(1/0/1/2)
		E15(1/1/1/2)
		E16(1/0/0/3)
		E17(1/1/0/3)
		E18(1/0/1/3)
		E19(1/1/1/3)

2.4. Размеченные графы переходов для систем

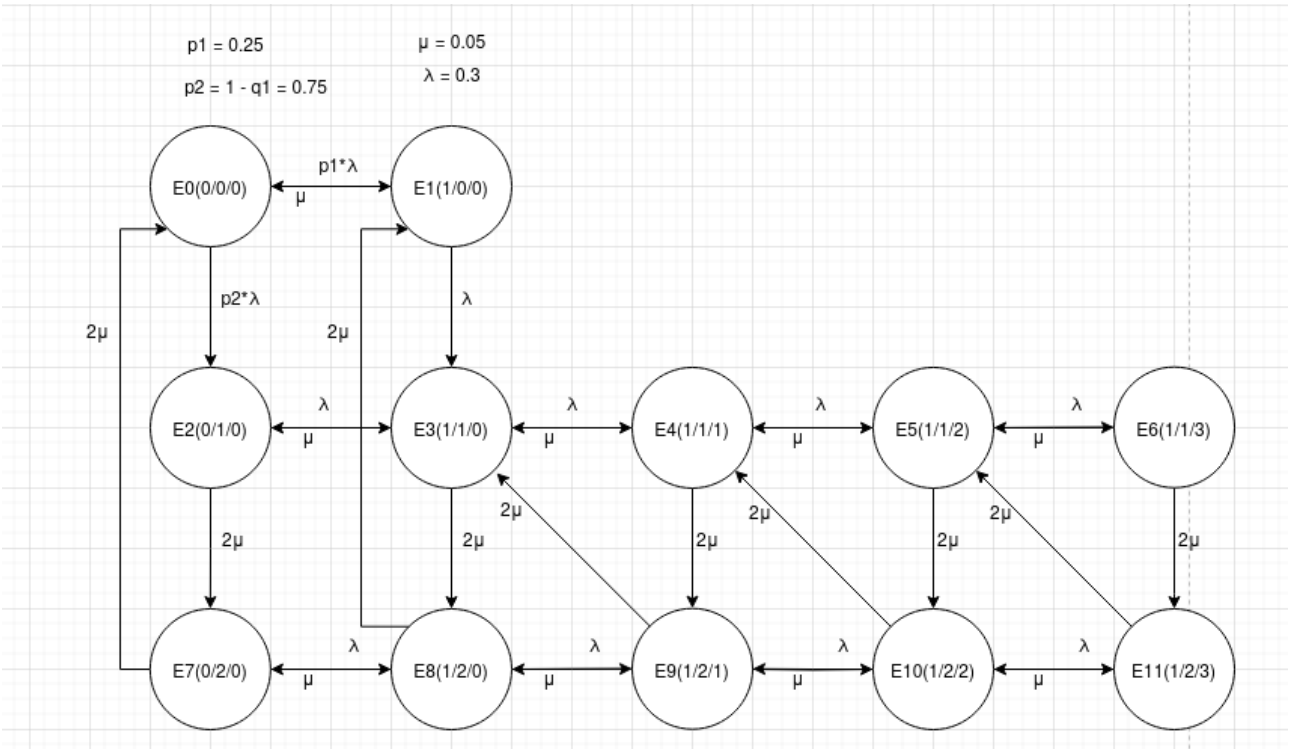


Рисунок 4: Размеченный граф переходов для Система 1

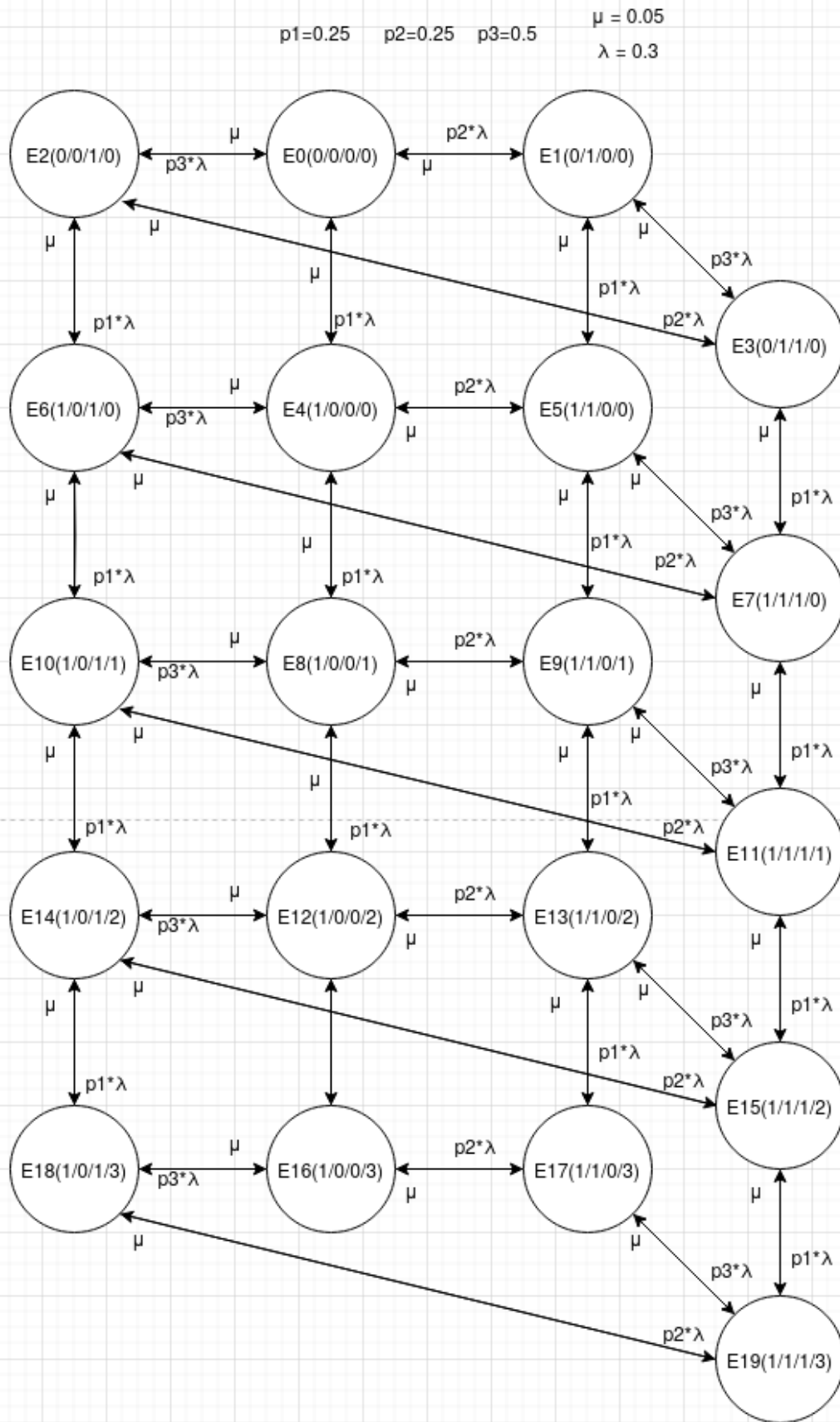


Рисунок 5: Размеченный граф переходов для Система 2

Как видно, фрагмент (E0, E1, E2, E3) повторяется построчно. Можно было бы визуально редуцировать столбцы графа (E1, E5, ...) и (E2, E6, ...), однако все равно пришлось бы считать состояния по-отдельности из-за неравности вероятностей переходов.

2.5. Матрицы интенсивностей переходов

Таблица 4: Матрица интенсивности Система 1 П2(E2)

	E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11
E0	-0.300	0.075	0.225									
E1	0.050	-0.350		0.300								
E2			-0.400	0.300				0.100				
E3			0.050	-0.450	0.300				0.100			
E4				0.050	-0.450	0.300				0.100		
E5					0.050	-0.450	0.300				0.100	
E6						0.050	-0.150					0.100
E7	0.100							-0.400	0.300			
E8		0.100						0.050	-0.450	0.300		
E9				0.100					0.050	-0.450	0.300	
E10					0.100					0.050	-0.450	0.300
E11						0.100					0.050	-0.150

Для того, чтобы поменять местами приборы, следует переместить ячейки (E0,E1) и (E0,E2), так как перемещение местами приборов равносильно перемещению вероятностей разряжения потока из очереди.

Таблица 5: Матрица интенсивностей Система 2

	E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19
E0	-0.300	0.075	0.150		0.075															
E1	0.050	-0.275		0.150		0.075														
E2	0.050		-0.200	0.075			0.075													
E3		0.050	0.050	-0.175				0.075												
E4	0.050				-0.350	0.075	0.150		0.075											
E5		0.050			0.050	-0.325		0.150		0.075										
E6			0.050		0.050		-0.250	0.075			0.075									
E7				0.050		0.050	0.050	-0.225				0.075								
E8					0.050			-0.350	0.075	0.150		0.075								
E9						0.050		0.050	-0.325		0.150		0.075							
E10							0.050	0.050		-0.250	0.075			0.075						
E11								0.050	0.050	0.050	-0.225				0.075					
E12								0.050				-0.350	0.075	0.150		0.075				
E13									0.050			0.050	-0.325		0.150		0.075			
E14										0.050		0.050		-0.250	0.075			0.075		
E15											0.050		0.050	0.050	-0.225				0.075	
E16												0.050				-0.275	0.075	0.150		
E17													0.050			0.050	-0.250		0.150	
E18														0.050		0.050		-0.175	0.075	
E19															0.050		0.050	0.050	-0.150	

2.6. Значения стационарных вероятностей

Также для демонстрации сравнений различных заданий приборов с распределением Эрланга 2-ого порядка поменяю местами вероятности p_1 и p_2 .

Таблица 6: Стационарные вероятности состояний

Номер состояния	Система 1 (E2 на П2)		Система 1 (E2 на П1)		Система 2	
	Обозн.	Вер-ть	Обозн.	Вер-ть	Обозн.	Вер-ть
0	E0(0/0/0)	0.0008	E0(0/0/0)	0.0008	E0(0/0/0/0)	0.0076
1	E1(1/0/0)	0.0020	E1(0/1/0)	0.0024	E1(0/1/0/0)	0.0114
2	E2(0/1/0)	0.0021	E2(1/0/0)	0.0018	E2(0/0/1/0)	0.0227
3	E3(1/1/0)	0.0132	E3(1/1/0)	0.0132	E3(0/1/1/0)	0.0341
4	E4(1/1/1)	0.0451	E4(1/1/1)	0.0452	E4(1/0/0/0)	0.0114
5	E5(1/1/2)	0.1460	E5(1/1/2)	0.1461	E5(1/1/0/0)	0.0171
6	E6(1/1/3)	0.2921	E6(1/1/3)	0.2921	E6(1/0/1/0)	0.0341
7	E7(0/2/0)	0.0013	E7(2/0/0)	0.0013	E7(1/1/1/0)	0.0512
8	E8(1/2/0)	0.0065	E8(2/1/0)	0.0065	E8(1/0/0/1)	0.0171
9	E9(1/2/1)	0.0245	E9(2/1/1)	0.0244	E9(1/1/0/1)	0.0256
10	E10(1/2/2)	0.0905	E10(2/1/2)	0.0905	E10(1/0/1/1)	0.0512
11	E11(1/2/3)	0.3757	E11(2/1/3)	0.3757	E11(1/1/1/1)	0.0768
12					E12(1/0/0/2)	0.0256
13					E13(1/1/0/2)	0.0384
14					E14(1/0/1/2)	0.0768
15					E15(1/1/1/2)	0.1152
16					E16(1/0/0/3)	0.0384
17					E17(1/1/0/3)	0.0576
18					E18(1/0/1/3)	0.1152
19					E19(1/1/1/3)	0.1727

Как видно из вероятностей состояний, расположение прибора с E2, не сильно влияет на общую картину, потому что большую часть времени в системе работает хотя бы один прибор. Поэтому здесь и в дальнейшем сойду на том, что П2 обслуживает заявки по Эрлангу.

2.7. Характеристики систем

Там, где проставлены знаки «?» не понятно как вычислять данные характеристики, поскольку поток из ограниченной очереди тривиальным образом не получается рассчитать (очередь ограниченного размера, два Прибора достают из очереди заявки при наличии). Поэтому, например, для Система 1 Приборов 1, 2, не понятно, что из себя представляет их характеристика производительности, и другие характеристики, которые рассчитываются на основании входящего потока.

Таблица 7: Характеристики систем

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	Система 1	Система 2
Нагрузка	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$y = \lambda / \mu$ (по опр.)	6	-
	П1 (C2)	$y_1 = \lambda / \mu_1 * p_1$	-	1.5
	П2 (C2)	$y_2 = \lambda / \mu_2 * p_2$	-	1.5
	П3(C2)	$y_3 = \lambda / \mu_3 * p_3$	-	3
	Сумм. (C2)	$y = (y_1 + y_2 + y_3)^{-1}$	-	6
Загрузка	П1 (C1)	$\rho_1 = 1 - (p_0 + p_2 + p_7)$	0.9958	-
	П2 (C1)	$\rho_2 = 1 - (p_0 + p_1)$	0.9972	-
	Сумм. (C1)	$\rho = 1/2 * (\rho_1 + \rho_2)^{-2}$	0.9965	-
	П1 (C2)	$\rho_1 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$	-	0.9242
	П2 (C2)	$\rho_2 = 1 - (p_0 + p_2 + \dots + p_{16} + p_{18})$	-	0.5999
	П3(C2)	$\rho_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_4 + p_5 + \dots + p_{16} + p_{17})$	-	0.7498
	Сумм. (C2)	$\rho = 1/3 * (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$	-	0.7580
Длина очереди	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$l = 1 * (p_4 + p_9) + 2 * (p_5 + p_{10}) + 3 * (p_6 + p_{11})$	2.546	-

1 Здесь можно рассмотреть как систему, состоящую из меньших систем, поэтому складываем

2 $(1/2 + 1/2) - (1/2 * (p_0 + p_2 + p_7) + 1/2 * (p_0 + p_1)) = 1/2 * (\rho_1) + 1/2 * (\rho_2) = 1/2 * (\rho_1 + \rho_2)$

	П1 (C2)	$l_1 = 1 * (p_8 + \dots + p_{11}) + \dots + 3 * (p_{16} + \dots + p_{19})$	-	1.8344
	П2 (C2)	Прибор не имеет своей очереди	-	0
	П3(C2)	Прибор не имеет своей очереди	-	0
	Сумм. (C2)	$l = l_1$	-	1.8344
Число заявок	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$m = m_1 + m_2 + l = \rho_1 + \rho_2 + l$	4.539	-
	П1 (C2)	$m_1 = l_1 + \rho_1$	-	2.758
	П2 (C2)	$m_2 = l_2 + \rho_2 = \rho_2$	-	0.5999
	П3(C2)	$m_3 = l_3 + \rho_3 = \rho_3$	-	0.7498
	Сумм. (C2)	$m = m_1 + m_2 + m_3$	-	4.1083
Время ожидания	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$w = l / \lambda'$	25.55	-
	П1 (C2)	$w_1 = l_1 / \lambda'_1$	-	39.70
	П2 (C2)	$w_2 = l_2 / \lambda'_2 = 0$	-	0
	П3(C2)	$w_3 = l_3 / \lambda'_3 = 0$	-	0
	Сумм. (C2)	$w = l / \lambda'$	-	16.13
Время пребывания	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$u = m / \lambda'$	45.54	-
	П1 (C2)	$u_1 = m_1 / \lambda'_1$	-	59.70
	П2 (C2)	$u_2 = m_2 / \lambda'_2$	-	20.00
	П3(C2)	$u_3 = m_3 / \lambda'_3$	-	20.00
	Сумм. (C2)	$u = m / \lambda'$	-	36.13
Вероятность потери	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$\pi = p_6 + p_{11}$	0.6678	-
	П1 (C2)	$\pi_1 = p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19}$	-	0.3839
	П2 (C2)	$\pi_2 = p_1 + p_3 + p_5 + \dots + p_{17} + p_{19}$	-	0.6001
	П3(C2)	$\pi_3 = p_2 + p_3 + p_6 + p_7 + \dots + p_{18} + p_{19}$	-	0.7500

	Сумм. (C2)	$\pi = P \times (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)^3$	-	0.6210
Производительность	П1 (C1)	?	?	-
	П2 (C1)	?	?	-
	Сумм. (C1)	$\lambda' = \lambda * (1 - \pi)$	0.0997	-
	П1 (C2)	$\lambda'_1 = \lambda * p_{1,1} * (1 - \pi_1)^4$	-	0.0462
	П2 (C2)	$\lambda'_2 = \lambda * p_{1,2} * (1 - \pi_2)$	-	0.0300
	П3(C2)	$\lambda'_3 = \lambda * p_{1,3} * (1 - \pi_3)$	-	0.0375
	Сумм. (C2)	$\lambda' = \lambda * (1 - \pi)$	-	0.1137

2.8. Графики сравнительного анализа характеристик

Таблица 8: Сравнительный анализ характеристик

	Нагрузка	Загрузка	Длина очереди	Число заявок	Время ожидания	Время пребывания	Вероятности потери	Производительность
Система 1	6.000	0.9965	2.546	4.539	25.55	45.54	0.6678	0.0997
Система 2	6.000	0.7580	1.834	4.108	16.13	36.13	0.6210	0.1137
Отн. Разн.	0.00%	-23.93%	-27.95%	-9.49%	-36.87%	-20.66%	-7.01%	14.04%

3 Р — столбец вероятностей поступления заявок к разным приборам. Операция эквивалентна матричному умножению матриц размерности (1x3) и (3x1)

4 $p_{1,1}$ - элемент матрицы поступления заявок

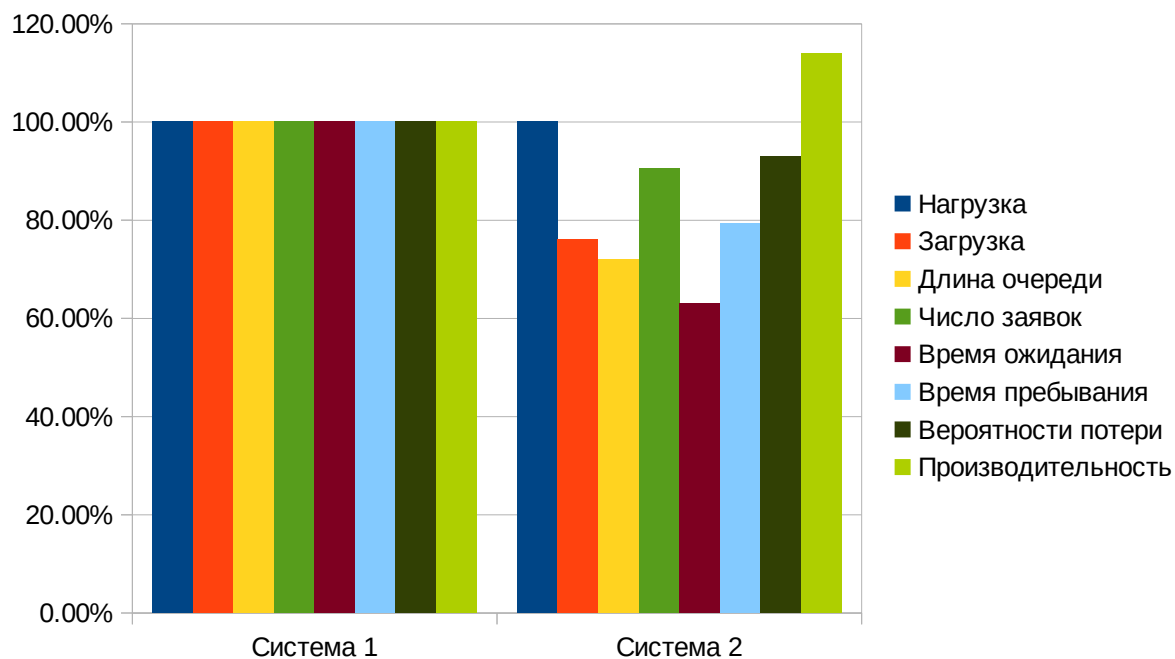


Таблица 9: График с относительным сравнительным анализом характеристик

3. Итоги

Рассмотренные системы довольно сильно различаются по структуре. В Система 1 — общая очередь (буфер), из которой два Прибора берут заявки. В Система 2 — для Приборов 2 и 3 отсутствует очередь, есть только для Прибора 1, однако количество Приборов равняется 3.

Так как обе системы имеют нагрузку, равную 6, то необходимо как минимум 6 приборов, чтобы при наличии бесконечной очереди успевать обрабатывать заявки, если они поток не раскладывается на независимые подпотоки, идущие независимо к Приборам. В рассмотренных системах это не так, поэтому как минимум половина заявок в обеих системах обрасывается: в первой - $\pi=0.6678$, во второй - $\pi=0.6210$.

Благодаря тому, что в первой системе есть общая очередь, то Приборы, в случае когда обработают заявку, могут получить следующую из нее, если очередь не пуста. Во второй системе для Приборов 2 и 3 это не так, поэтому у них значительно выше коэффициент потери и ниже загрузка. Также отсутствие очередей и разложение потока на подпотоки для каждого Прибора влияет в

целом на общую длину очереди, и, соответственно, на время пребывания и время ожидания, поскольку теперь для Прибора 1 нагрузка становится равной 1.5, в отличие от Система 1, где нагрузка к очереди равна 6, соответственно средняя длина очереди понижается, что также видно и на результатах.

Несмотря на то, что средняя загрузка в Система 2 ниже по сравнению с Система 1, из-за наличия трех приборов вместо двух, производительность системы все же выше на 14%.

Таким образом, если обобщить все вышесказанное, получим, что Система 2 имеет ниже загрузку (-24%), длину очереди (-28%), число заявок (-9.5%), время ожидания (-37%), время пребывания (-21%), вероятность потери (-7%), и выше производительность (14%). Поскольку требуется выбрать систему, с наибольшей загрузкой, то ей является Система 1, обладающая значением 99.65% при вероятности потери 67%.