Trabajo Autónomo 2.11 - Cálculo I

Primer Ciclo “A” - Ingeniería de Software

Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

1. **Estudiar la continuidad de** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}, & \textbf{si } x < 0 \\ 3x+1, & \textbf{si } x \geq 0 \end{cases}$

Respuesta:

Para estudiar la continuidad de la función $f(x)$, debemos analizarla en los puntos críticos y verificar la continuidad en su dominio.

Primero, estudiemos la continuidad de cada parte en sus respectivos dominios.

- Para $x < 0$:
$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$
La función está definida para todos los x tales que $x^2 - 1 \neq 0$. Entonces, no está definida en $x = \pm 1$. Pero, dado que consideramos solo $x < 0$, la función no está definida en $x = -1$. Por lo tanto, $f(x)$ no es continua en $x = -1$.
- Para $x \geq 0$:
$$f(x) = 3x + 1$$
Esta es una función lineal, y por lo tanto, es continua en todo su dominio.
- En $x = 0$: Debemos verificar el límite lateral y el valor de la función en este punto.
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2-1} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x+1) = 1$$
El límite lateral izquierdo no es igual al límite lateral derecho, por lo que $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

En resumen, $f(x)$ no es continua en $x = -1$ y $x = 0$.

2. **Estudiar la continuidad de** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & \textbf{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1-x}{x}, & \textbf{si } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{2x}{x-5}, & \textbf{si } x > 3 \end{cases}$

Respuesta:

Primero, estudiemos la continuidad de cada parte en sus respectivos dominios.

- Para $x \leq 1$:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 \quad \text{para } x \neq -1$$

  Esta simplificación es válida para $x \neq -1$, y es continua para todos los x en este dominio excepto en $x=-1$.

- Para $1 < x \leq 3$:

$$f(x) = \frac{1-x}{x}$$

  Esta es una función racional y está definida y es continua para todos los x en el intervalo $1 < x \leq 3$.

- Para $x > 3$:

$$f(x) = \frac{2x}{x-5}$$

  Esta es una función racional y está definida y es continua para todos los x en este dominio excepto en $x = 5$.

Ahora, estudiemos la continuidad en los puntos de unión $x = 1$ y $x = 3$:

- En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$f(1) = \frac{1^2-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

  Los límites laterales y el valor de la función en $x=1$ son iguales, por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x=1$.

- En $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1-x}{x} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-5}$$

  Para evaluar este límite, observamos que a medida que $x \to 3^+$, el denominador $x-5 \to -2$:

$$\frac{2\cdot 3}{3-5} = \frac{6}{-2} = -3$$

  Los límites laterales no son iguales, por lo que $f(x)$ no es continua en $x=3$.

En resumen, $f(x)$ es continua en todo su dominio excepto en $x=-1$ y $x=3$.

3. **Encontrar los siguientes límites:**
   a. $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$
   b. $\lim_{x \to \infty}(1+\frac{a}{x})^x$
   c. $\lim_{x \to \infty}(1+\frac{x}{n})^n$

Respuesta:

a. $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$
Este límite se puede evaluar utilizando la propiedad del logaritmo natural y la exponencial:

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}$$

Usamos la serie de Taylor para $\ln(1+x)$ alrededor de $x=0$:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Por lo tanto:

$$\frac{2}{x}\ln(1+x) \approx \frac{2}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots\right) = 2 - x + \cdots$$

Al tomar el límite cuando $x \to 0$, los términos más altos desaparecen:

$$\lim_{x \to 0} e^{2-x} = e^2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$$

b. $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$
Reconocemos este límite como una forma de la definición del número e:

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

c. $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
Aquí, observamos que al reescribir en términos de $y = \frac{n}{x}$, cuando $x \to \infty$, $y \to 0$:

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{y \to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}\cdot y\cdot n}$$

Esto se puede simplificar como:

$$\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^n \approx e^n$$

Pero al reevaluar en el contexto de $x \to \infty$, se observa que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ tiende a e^n:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^n$$

4. **Determinar las asíntotas que tiene la función** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

Respuesta:

Para determinar las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$, consideramos los siguientes tipos de asíntotas:

1. **Asíntotas verticales:**

   Las asíntotas verticales ocurren donde el denominador se hace cero y el numerador no es cero.

$$x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9 \implies x = \pm 3$$

   Por lo tanto, hay asíntotas verticales en $x = 3$ y $x = -3$.

2. **Asíntotas horizontales:**

   Las asíntotas horizontales se encuentran al evaluar los límites de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-9} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-9} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

   Por lo tanto, hay una asíntota horizontal en $y = 1$.

Entonces, las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ son:

- Asíntotas verticales en $x = 3$ y $x = -3$.
- Una asíntota horizontal en $y = 1$.

5. **Determinar las asíntotas oblicuas de la función** $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

Respuesta:

Para determinar las asíntotas oblicuas de la función primero debemos simplificar la expresión bajo la raíz para grandes valores de x:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$$

Podemos factorizar $4x^2$ de la expresión dentro de la raíz:

$$f(x) = \sqrt{4x^2\left(1 + \frac{2x}{4x^2} + \frac{1}{4x^2}\right)} = \sqrt{4x^2\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)}$$

Esto se puede simplificar aún más:

$$f(x) = 2x\sqrt{1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}}$$

Para $x \to \infty$, los términos $\frac{1}{2x}$ y $\frac{1}{4x^2}$ tienden a cero, así que podemos aproximar:

$$f(x) = 2x\sqrt{1} = 2x$$

Por lo tanto, la función se comporta como $y = 2x$ para valores grandes de x. Esta es la ecuación de la asíntota oblicua.

Para verificar esto, encontramos el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{x} - 2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2\right)$$

Nuevamente, los términos $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ tienden a cero:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4 + 0 + 0} - 2\right) = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Entonces, la función $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$ tiene una asíntota oblicua en $y = 2x$.