Clase 15.1

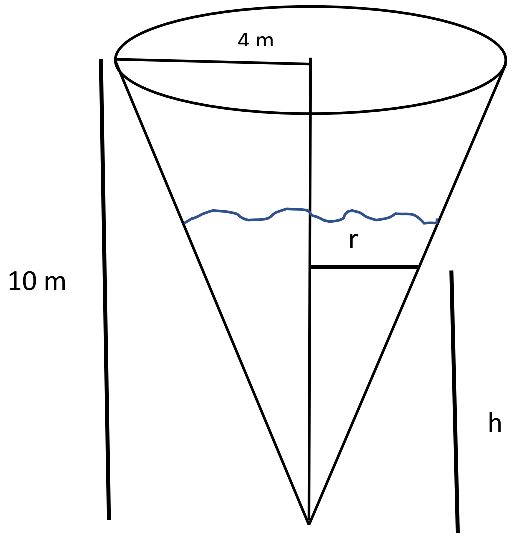
Derivadas como coeficientes de variación

Suponemos que z es una cantidad física que depende de las cantidades también físicas y, y esta depende de x, por tanto, el coeficiente de variación de z respecto de x es el producto entre el coeficiente de variación de z respecto de y con el coeficiente de variación de y respecto de x. Es decir, aplicamos la regla de la cadena.

Si $\boldsymbol{z(y(x))}$ $\boldsymbol{entonces}$ $\quad \boldsymbol{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}$

Ejemplos

1. Un recipiente tiene forma de cono circular. La altura es 10 m y el radio de la base 4 m. Se introduce agua en el recipiente a una rapidez constante de 5 m^3/min. ¿Con que velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m?



El volumen de un cono de altura h y radio r viene dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

El volumen es función de dos variables h y r. Necesitamos poner solo en función de la variable h. Para esto consideramos la relación de semejanza entre dos triángulos rectángulos.

Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.

En nuestro caso: $\frac{4}{r} = \frac{10}{h} \quad \rightarrow \rightarrow r = \frac{2}{5}h$

$$V = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{2}{5}h\right)^2 = \frac{4\pi}{75} h^3$$

Además, la altura depende del tiempo $h = h(t)$, con lo que tenemos

$$V = V(h(t))$$

$$V = \frac{4\pi}{75}h^3(t)$$

Entonces por regla de la cadena: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}$

Tengo de dato $\frac{dV}{dt} = 5\frac{m^3}{min}$ y $\frac{dV}{dh} = \frac{4\pi}{25}h^2$ $y\ pregunta$ $\frac{dh}{dt} =?$

Por tanto $5 = \frac{4\pi}{25}h^2\frac{dh}{dt}$ $en\ h = 5\ m$

$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi}\frac{m}{min}$

2. Un barco navega paralelamente a una costa de perfil recto a una velocidad de 12 Km/h y a una distancia de 4 Km. Cuál es la velocidad de aproximación a un faro en la costa en el instante en que diste precisamente 5 Km del faro.
3. Una plancha circular se dilata por el calor y su radio aumenta con una rapidez de $\frac{1}{100}\frac{cm}{s}$. Determinar con qué rapidez aumenta el área de la plancha en el instante en que el radio es de 2m.

EJERCICIOS PROPUESTOS

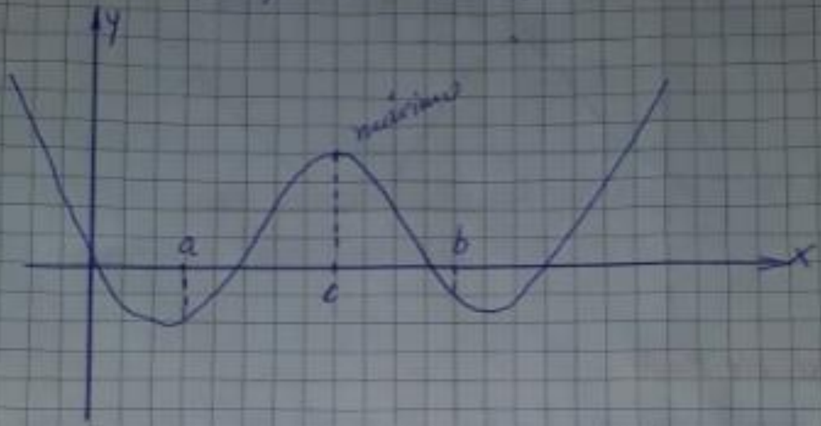
1. El volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua de un depósito cónico son todas funciones del tiempo. Hallar la fórmula que muestre la velocidad a la que sale el agua del depósito cónico.
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a 0.03m/s. Con qué rapidez cambia el volumen y las áreas laterales cuando la arista tiene, a) 1 m, b) 10 m.
3. Un punto se mueve sobre la gráfica de la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ $de\ modo\ que$ $\frac{dx}{dt} = 2\ \frac{cm}{s}$ Hallar $\frac{dy}{dt}$ $cuando\ x = 2\ cm.$

Clase 15.2

MAXIMOS Y MINIMOS, PUNTOS CRITICOS Y CONVEXIDAD DE FUNCIONES

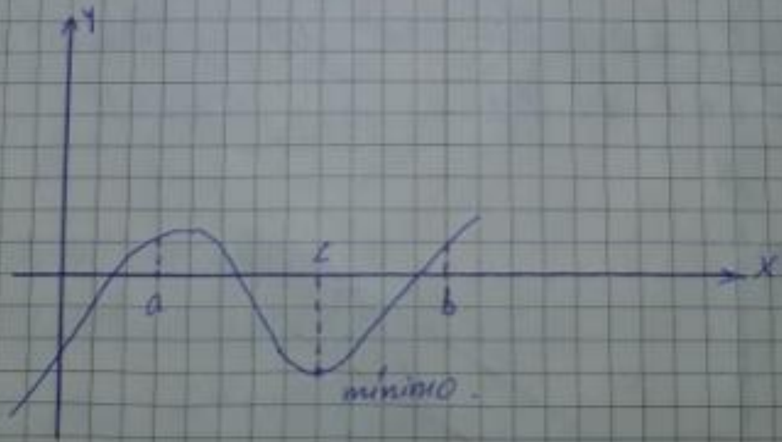
Definición. MAXIMO

Sea $f:[a,b]\to R$, f tiene un máximo relativo en c ssi $c\in]a,b[$ tq. $f(x)\le f(c)$, $\forall x\in[a,b]$



Definición. MÍNIMO

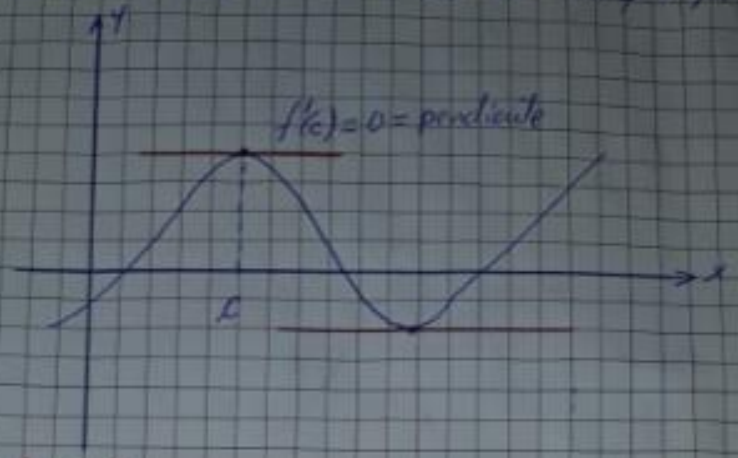
Sea $f:[a,b]\to R$, f tiene un mínimo relativo en c ssi $c\in]a,b[$ tq $f(x)\ge f(c)$ $\forall x\in[a,b]$



NOTA: A los máximos y mínimos relativos se les denomina extremos de la función en el intervalo $[a,b]$

Teorema.- Anulación de la derivada en un extremo

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y si f tiene un máximo (o mínimo) relativo en $c \in]a,b[$ entonces $\exists f'(c)$ tal que $f'(c)=0$

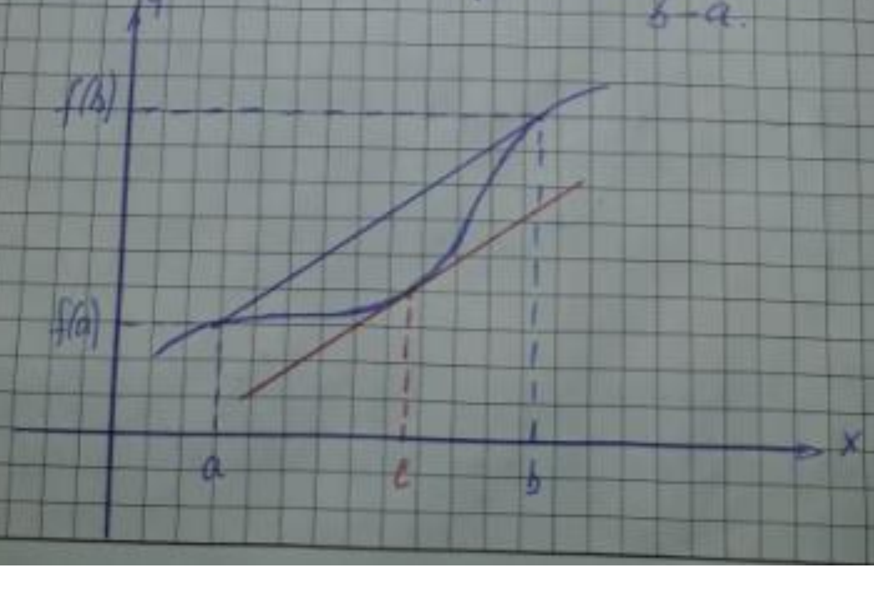


Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a,b]$, f es derivable en $]a,b[$ y $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tq $f'(c)=0$

Teorema del valor medio de Lagrange.-

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f es continua en $[a,b]$ y f derivable en $]a,b[$
$\Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tq $\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$



Teorema del valor medio de Cauchy

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$; $\exists f' \; y \; \exists g'$ en $]a,b[\Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tq.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \text{si } g(b) \neq g(a) \text{ y } g'(c) \neq 0$$

Ejemplos._

1\. Calcular los puntos donde $f(x) = x^3 - 3x + 3$ tiene máximos y/o mínimos

* Por el teo. de la anulación de la derivada

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$ → $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

pero no sabemos si son máximos o mínimos

2\._ Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$. Hallar todos los c tal que $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

$f(1) = (1)^3 - 5(1)^2 - 3(1) = -7$

$f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 - 3(3) = 27 - 45 - 9 = -27$

$$f'(c) = \frac{-27 - (-7)}{3 - 1} = -10$$

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3 = -10$

$3x^2 - 10x + 7$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(7)}}{2(3)} = \frac{10 \pm 4}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} \\ x_2 = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Encontrar los máximos y/o mínimos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

2.- Para qué punto c la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$

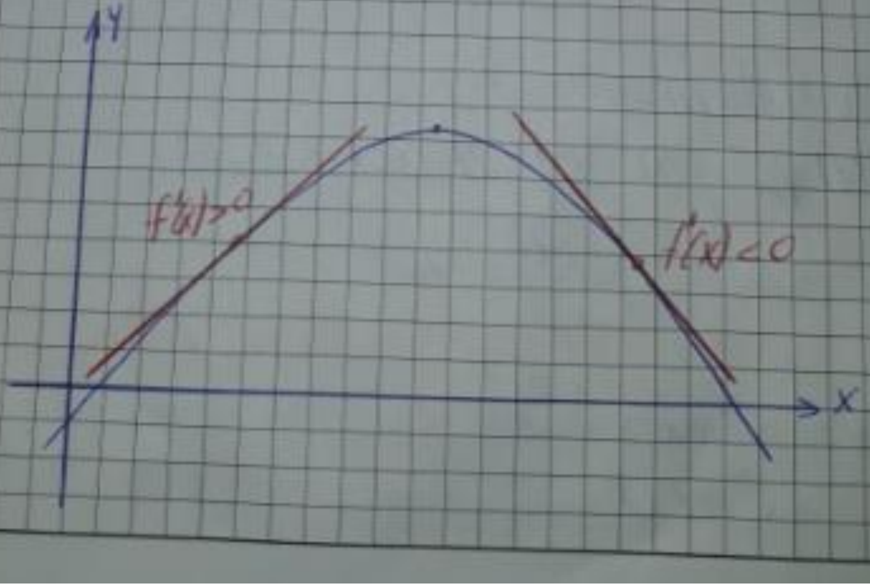
Teorema ..

Si f es continua en $[a,b]$ y f derivable en $]a,b[$

i) Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$

ii) Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$

iii) Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ es constante en $[a,b]$



3

Teorema.- Criterio de la primera derivada.

Cuando f es continua en $[a,b]$ y f es derivable en $]a,b[$, existe un $c \in]a,b[$ tq $f'(c)=0$ entonces:

i) Si $f'(x)>0, \forall x<c \wedge f'(x)<0 \ \forall x>c \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en c

ii) Si $f'(x)<0, \forall x<c \wedge f'(x)>0, \forall x>c \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en c

NOTA.- Puede no existir $f'(c)$ pero en c ser máximo o míni

Teorema. Criterio de la segunda derivada

Sea c un punto crítico de f en $]a,b[$

Si $\exists f''(x) \ \forall x \in]a,b[\Longrightarrow$

i) Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[\rightarrow f$ tiene un máximo relativo en c

ii) Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[\rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en c.

EJEMPLOS.

1.- Utilizando los criterios de la primera y segunda derivada determinar que el punto crítico de $f(x) = -x^2+3x+4$ es máximo o mínimo

$$f'(x) = -2x+3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$ es el punto crítico (máximo o mínimo)

* Con criterio de primera derivada

Sea $x = 1 < \frac{3}{2}$ y $x = 2 > \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = -2(1)+3 = 1 > 0 \\ f'(2) = -2(2)+3 = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{en } x = \frac{3}{2} \text{ hay máximo}$$

* Con criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = -2 < 0 \quad \forall x \Rightarrow \text{en } x = \frac{3}{2} \text{ hay máximo}$$

2.- Determinar que son (máx. o mín) los puntos críticos de la función $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow x_1 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; x_2 = 1 \end{array}\right\} \text{son los puntos críticos}$$

Con criterio de la segunda derivada

$f''(x) = 6x$

en $x=-1 \rightarrow f''(-1)=6(-1)=-6<0$

$\Rightarrow$ en $x=-1$ hay un máximo

en $x=1 \rightarrow f''(1)=6(1)=6>0$

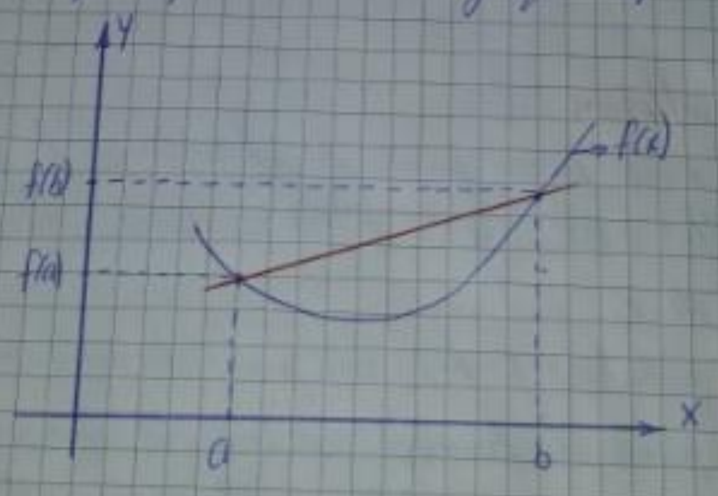
$\Rightarrow$ en $x=1$ hay un mínimo.

EJERCICIO PROPUESTO

1.- Encontrar los puntos máximos y los mínimos de la función $f(x)=x^3-x$

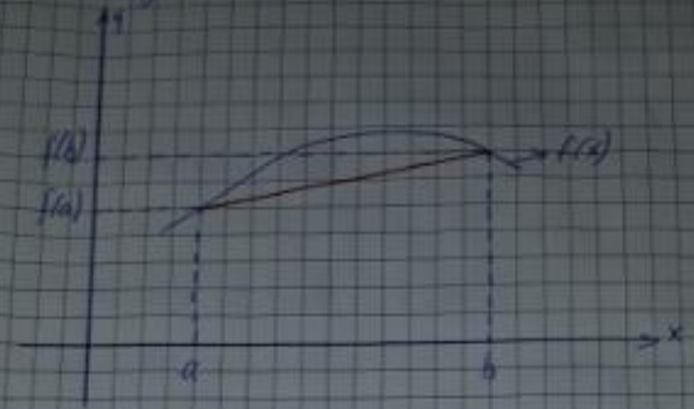
Convexidad. Definición.-

Se dice que una función f es convexa en $[a,b]$ si en este intervalo la cuerda que une los puntos $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$ queda por encima de la gráfica de f



Concavidad. Definicion

Se dice que una función f es cóncava en $[a,b]$ si en este intervalo la cuerda que une los puntos $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f.



Teorema.-

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$

i) Si $f''(x) > 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es convexa en $[a,b]$ y hay mínimo en un $c \in]a,b[$

ii) Si $f''(x) < 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es cóncava en $[a,b]$ y hay un máximo en un $c \in]a,b[$.

Punto de inflexion.-

Un punto $x = c$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$ si $f'(c)$ existe, y si $f''(x)$ cambia de signo antes y después de c.

En otras palabras $x = c$ es un punto de inflexión si en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa o viceversa. Además $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$

EJERCICIOS

1.- Estudiar los intervalos donde $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ es cóncava y cóncava

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12 = 6(x-2)$

Para punto de inflexión $y''(x)=0$ y $y'''(x)\neq 0$

$\rightarrow \quad y''(x)=0 \quad 6x-12=0$

$x=2 \quad$ y $y'''(2)=6\neq 0$

$\Rightarrow$ en $x=2$ hay punto de inflexión

* $f(x)$ es cóncava para $f''(x)<0$

$6x-12<0$

$x<2$ (es $\cap$ en $]-\infty,2[$ //

* $f(x)$ es convexa para $f''(x)>0$

$6x-12>0$

$x>2$ (es convexa en $]2,\infty[$ //

Probar graficando en geogebra

2.- Estudiar la concavidad (y convexidad) de $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

$$f'(x)=\frac{0+2x}{(1-x^2)^2}=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2(1-x^2)^2-2x\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2(1-x^2)^2+8x^2(1-x)}{(1-x^2)^4}$$

$$=\frac{2(1-x^2)[(1-x^2)+4x^2]}{(1-x^2)^4}=\frac{2-2x^2+8x^2}{(1-x^2)^3}=\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

* Es cóncava si $\dfrac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}<0$; el numerador es + $\forall x\in\mathbb{R}$

$\rightarrow f''(x)<0$ si $(1-x^2)^3<0$

$1-x^2<0$

$1<x^2$

$x>\pm 1$

$-1>x>1$

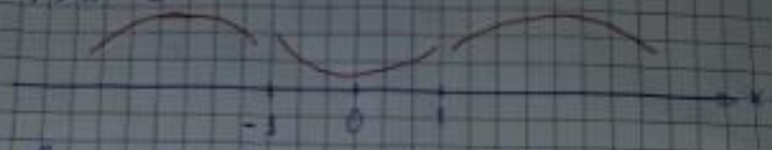
* Es convexa en $f''(x) > 0$

$$\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} > 0$$

$$(1-x^2)^3 > 0 \qquad x < \pm 1$$

$$1-x^2 > 0 \qquad -1 < x < 1$$

$$1 > x^2$$



Por tanto los puntos de inflexión ... en $x_1=-1$ y $x_2=1$ ... Entonces

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} = 0 \qquad (6x^2+2=0)$$

pero $6x^2+2 \neq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ no hay puntos de inflexión,

pues para $x=-1$ y $x=1$ no existe $f(x)$

EJERCICIOS PROPUESTO

1.- Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión si existen de la función $y=(x^2-3x+2)e^x$

Clase 15.3

PAE. Resolución de ejercicios de gráficos de funciones

6

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es la utilidad para graficar funciones.
Los pasos para graficar una función son:

1.- Determinar dominio (y recorrido)
2.- Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (si es que existen)
3.- Aplicando el criterio de la primera derivada determinar los intervalos donde la función es creciente, decreciente y los puntos críticos.
4.- Aplicando el criterio de la segunda derivada determinar los intervalos donde la función es cóncava y convexa y los puntos de inflexión
5.- Determinar los puntos de corte con los ejes
6.- Graficar la función.

EJEMPLOS

1.- Dibujar la función $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$

a.) Dominio (y Recorrido)

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Recorrido = ?

$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$

$yx + y = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x - yx - y + 1 = 0$

$x^2 - (2+y)x + (1-y) = 0$

$x = \frac{(2+y) \pm \sqrt{[-(2+y)]^2 - 4(1-y)}}{2}$

$\Rightarrow \exists x \Leftrightarrow [-(2+y)]^2 - 4(1-y) \geq 0$

$(2+y)^2 \geq 4-4y$

$\cancel{4} + 4y + y^2 \geq \cancel{4} - 4y$

$y^2 + 8y \geq 0$

$y(y+8) \geq 0$

$[y \geq 0 \wedge (y+8) \geq 0] \vee [y \leq 0 \wedge (y+8) \leq 0]$

$[y \geq 0 \wedge y \geq -8] \vee [y \leq 0 \wedge y \leq -8]$

$y \geq 0 \quad \vee \quad y \leq -8$

$\therefore \quad R_f =]-\infty, -8] \cup [0, \infty[$

b) Asíntotas.-

Verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} \dfrac{(x-1)^2}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \dfrac{(x-1)^2}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

Horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^2}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ indet.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$\Rightarrow$ no existen asíntotas horizontales

Oblicuas:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - x}{x+1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x+1}{x+1} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ indeterminado}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -3$$

$\Rightarrow$ la asíntota oblicua tiene como ecuación la recta $y = x - 3$

3.- Criterio de la primera derivada

a) Si $f'(x) > 0 \to f(x)$ es estric. creciente

b) Si $f'(x) < 0 \to f(x) \downarrow$

c) Si $f'(x) = 0 \to$ puntos críticos

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1) - (x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)[2x+2-x+1]}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

para $\uparrow$ $\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} > 0$; $(x+1)^2 > 0$ siempre

$\therefore$ $(x-1)(x+3) > 0$ si $[(x-1) > 0 \wedge (x+3) > 0] \vee [(x-1) < 0 \wedge (x+3) < 0]$

$[x > 1 \wedge x > -3] \vee [x < 1 \wedge x < -3]$

$(x > 1 \vee x < -3)$

luego $f(x)$ es $\uparrow$ en $]-\infty, -3[\cup [1, \infty[$

para $\downarrow$ $\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} < 0$; $(x+1)^2 > 0$ siempre

$(x-1)(x+3) < 0 \xrightarrow{\text{si}} [(x-1) < 0 \wedge (x+3) > 0] \vee [(x-1) > 0 \wedge (x+3) < 0]$

$(x < 1 \wedge x > -3) \vee (x > 1 \wedge x < -3)$

$(-3 < x < 1) \vee \emptyset$

luego $f(x) \downarrow$ en $]-3, 1[$

c) Ptos críticos $f'(x) = 0$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} = 0 \longrightarrow (x-1)(x+3) = 0$$

$\Rightarrow$ en $x = 1$ y $x = -3$

4- Criterio de la 2.da derivada

a) $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa y $\exists$ mínimo

b) $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava y $\exists$ máximo

c) $f''(x) = 0 \Rightarrow$ puede existir ptos de inflexión si además $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = \frac{[(x+3)+(x-1)](x+1)^2 - [(x-1)(x+3)2(x+1)]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - [(x^2+2x-3)(2x+2)]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2+2x+1 - x^2-2x+3)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)4}{(x+1)^4} = \frac{8(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

En $x = -3 \rightarrow f''(-3) = \dfrac{8}{(-3+1)^3} = -1 < 0$

en $x = -3$ hay un máximo y es cóncava

$$f(-3) = \frac{(-3-1)^2}{-3+1} = -8 \rightarrow \text{pto. } (-3, -8)$$

En $x = 1 \rightarrow f''(1) = \dfrac{8}{(1+1)^3} = 1 > 0$

en $x = 1$ hay un mínimo y es convexa.

$f''(x) = 0$

$\frac{8}{(x+1)^3} = 0 \rightarrow 8 = 0$ absurdo

no hay ptos. de inflexión

5.- Puntos de corte con los ejes

Si $y = 0 = \frac{(x-1)^2}{x+1} \rightarrow (x-1)^2 = 0$

$(x-1) = 0$

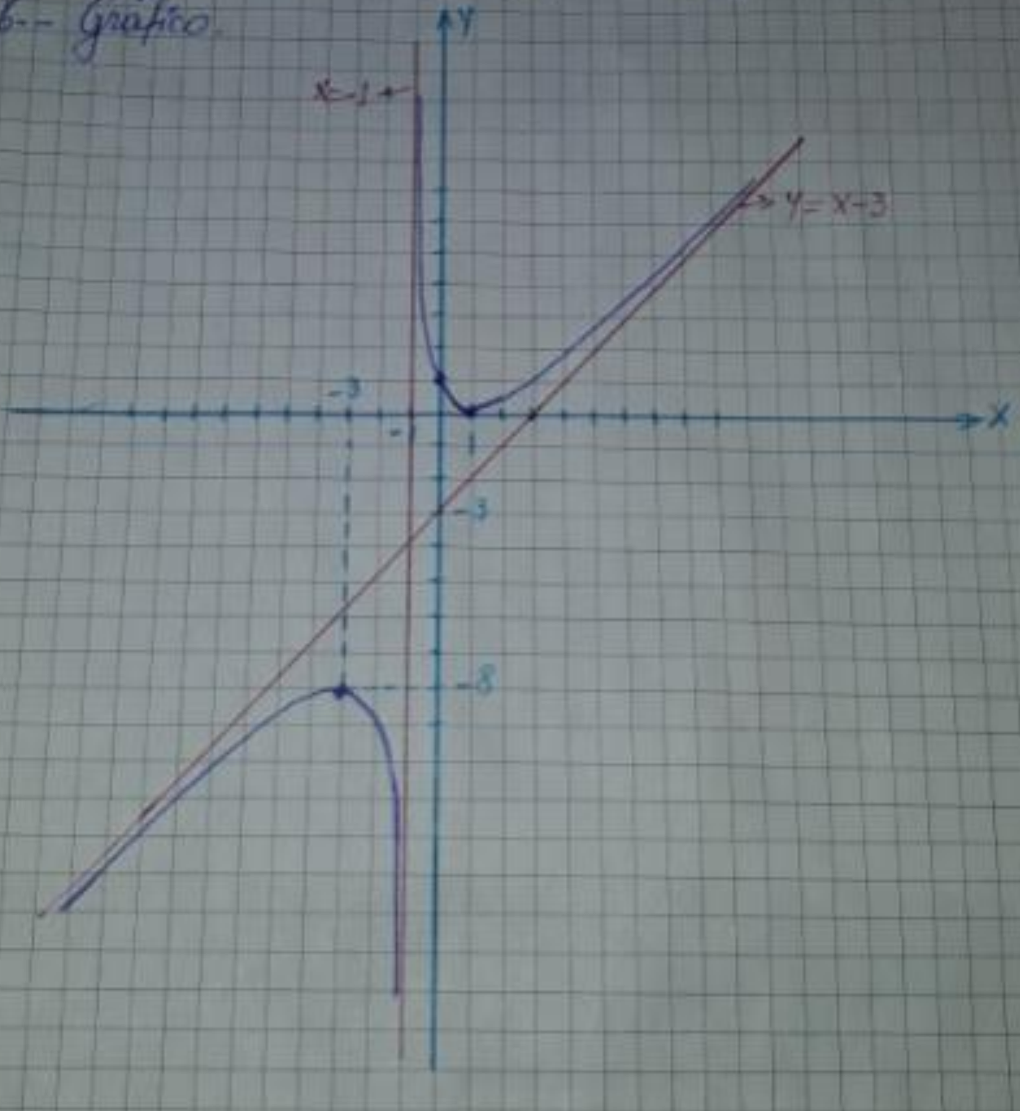
$x = 1$ es doble

Si $x = 0$

$y = \frac{(0-1)^2}{0+1} = 1$

$y = f(1) = \frac{(1-1)^2}{(1+1)} = 0 \Rightarrow$ pto $(1,0)$

6.- Gráfico



EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Graficar la función $y = \frac{x^2}{x^2-9}$

2.- Graficar $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

3.- Graficar $y = 3x^5 - 5x^3$

4.- Graficar $y = \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x$