Funciones:

$$f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x-4} \text{ si } x \to 4$$

$$g(x) = \frac{x^2-9}{x(x^2+1)} \text{ si } x \to 3 \text{ y si } x \to \infty$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-7x+6}{x^2+5x-6}, & \text{si } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad , \text{ si } x \to 1$$

Procedimiento:

1. **Para la primera función f(x) encontrar matemáticamente, el límite indicado.**

Respuesta:

Primero, simplificamos la función. Podemos multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del numerador:

$$f(x) = \frac{(3-\sqrt{x^2-7})(3+\sqrt{x^2-7})}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}$$

$$f(x) = \frac{9-(x^2-7)}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}$$

Simplificando el numerador:

$$f(x) = \frac{9-x^2+7}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})} = \frac{16-x^2}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}$$

Notamos que $16-x^2$ se puede factorizar como $(4-x)(4+x)$:

$$f(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}$$

$$f(x) = \frac{-(x-4)(4+x)}{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}$$

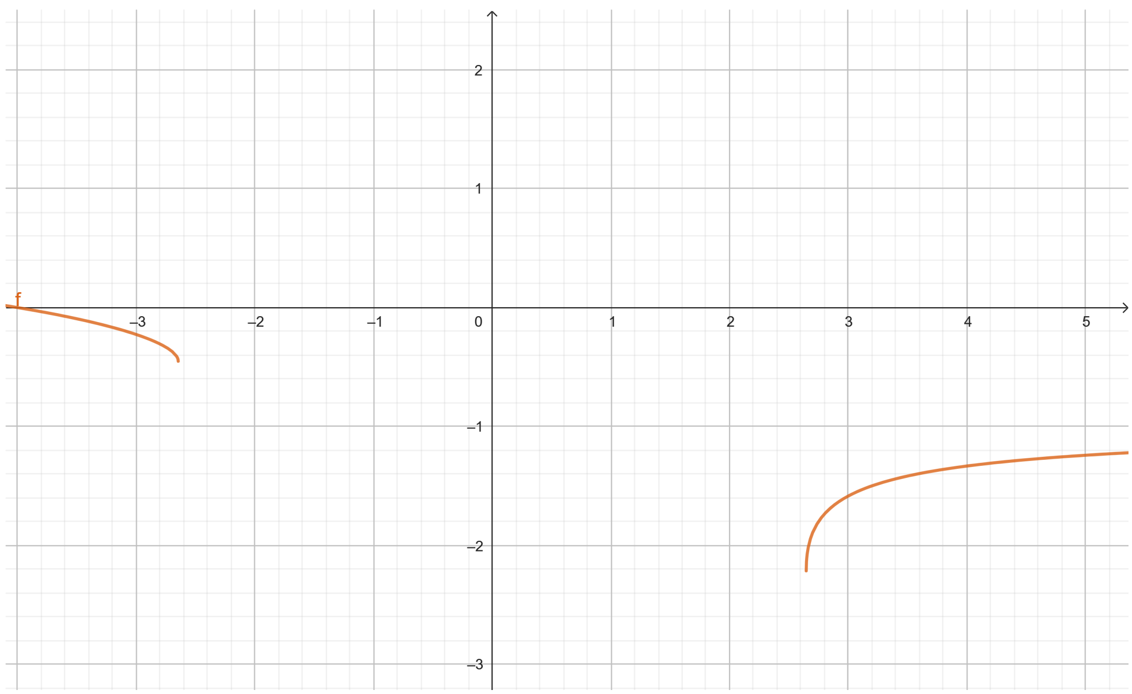
$$f(x) = \frac{-(4+x)}{3+\sqrt{x^2-7}}$$

Ahora, evaluamos el límite cuando $x \to 4$:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{-(4+4)}{3+\sqrt{4^2-7}} = \frac{-8}{3+\sqrt{9}} = \frac{-8}{3+3} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, el límite de la función cuando $x \to 4$ es $-\frac{4}{3}$.

2. **Usando el GeoGebra graficar la primera función, e imprimir en una escala adecuada (visible).**



3. **Comprobar el resultado obtenido matemáticamente con el observado en el gráfico.**

Respuesta:

Al graficar la función $f(x)$ usando GeoGebra, se observa que conforme x se acerca a 4 desde ambos lados, la función se aproxima al valor $-\frac{4}{3}$. Esto confirma el resultado obtenido matemáticamente.

4. **Repetir los numerales 1 y 2 para la función g(x) y h(x) .**

Para g(x) encontrar matematicamente el lımite indicado.:

Respuesta:
Simplificamos: $x^2 - 9$ se puede factorizar como $(x-3)(x+3)$:

$$g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x^2+1)}$$

Evaluamos el límite cuando $x \to 3$:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x^2+1)}$$

Sustituyendo $x = 3$:

$$g(3) = \frac{(3-3)(3+3)}{3(3^2+1)} = \frac{0 \cdot 6}{3(9+1)} = \frac{0}{30} = 0$$

Por lo tanto, el límite de la función cuando $x \to 3$ es 0.
Ahora, evaluamos el límite cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x(x^2+1)}$$

Dividimos el numerador y el denominador por x^2:

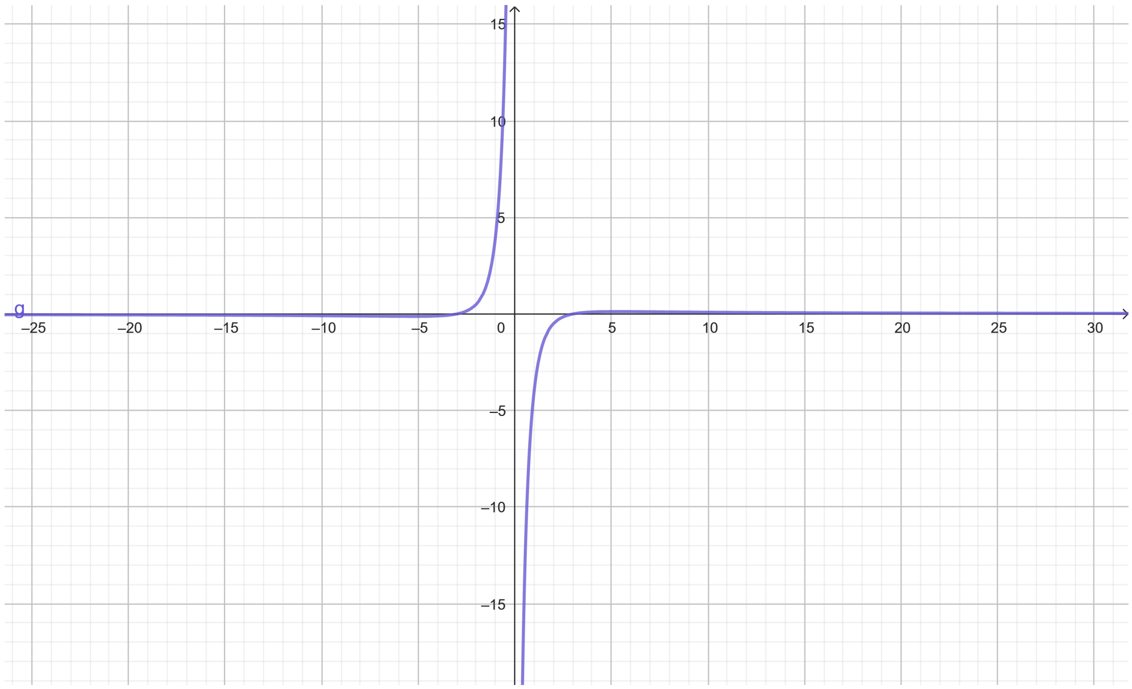
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{x(x^2+1)}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{9}{x^2}}{x + \frac{1}{x}}$$

Conforme x tiende a infinito, los términos $\frac{9}{x^2}$ y $\frac{1}{x}$ tienden a cero:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-0}{x+0} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo tanto, el límite de la función cuando $x \to \infty$ es 0.

Gráfico de g(x):



Para h(x) encontrar matematicamente el lımite indicado.:

Respuesta:

La función $h(x)$ está definida por partes:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 5x - 6}, & \text{si } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Primero, evaluamos el límite cuando $x \to 1$ desde la izquierda ($x \leq 1$):

$$h(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 5x - 6}$$

Factorizamos el numerador y el denominador:

$$h(x) = \frac{(x - 1)(x - 6)}{(x - 1)(x + 6)}$$

$$h(x) = \frac{x - 6}{x + 6}$$

Evaluamos el límite cuando $x \to 1$ desde la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \frac{1-6}{1+6} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$$

Ahora, evaluamos el límite cuando $x \to 1$ desde la derecha $(x > 1)$:

$$h(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Factorizamos el numerador y el denominador:

$$h(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$h(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Evaluamos el límite cuando $x \to 1$ desde la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Como los límites laterales no son iguales, el límite de $h(x)$ cuando $x \to 1$ no existe.

Gráfico de h(x):