CLASE 1.2

UNIDAD I

ESTUDIO DE FUNCIONES MATEMÁTICAS REALES

Idea de función. –

La noción de función viene del concepto de relación de dependencia. Así, por ejemplo, podemos decir que el **gasto en vestuario** de una persona depende del **sueldo** que gana, o en otras palabras, el **gasto en vestuario** es FUNCIÓN del **sueldo**. Por tanto, la variable gasto en vestuario depende o es función de la variable sueldo; y se nota que la variable gasto en vestuario es la variable dependiente, y la variable sueldo es variable independiente.

Claro está que la variable gasto en vestuario no solo depende de la variable sueldo, sino también de otras variables como por ejemplo del gusto de la persona.

Así, decimos que la variable dependiente, "depende" de dos o más variables independientes; en este caso se dice que es función de dos o más variables.

En este curso, estudiaremos funciones que dependen de una sola variable, y tanto la variable dependiente como la independiente serán reales, por ello diremos que estudiaremos funciones de variables reales, o simplemente FUNCIONES REALES.

Representando a la variable gasto en vestuario como y, a la variable sueldo como x, a la variable gusto como z, podemos escribir que y = f(x, z), que se lee "y es función de x y de z", función de dos variables.

También: y = f(x) "y es función de x", función de una variable

En general, $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ "y es función de n variables"

Conociendo la regla de dependencia, una función se puede escribir como una ecuación matemática; así tenemos:

- $y = f(x) = 2x - 6$
- $y = 3x^2 - 5x + 2$
- $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+3}$
- $g(x) = 4^x$
- $h(x) = \ln(x^2 - 4)$

1.1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

Sean A y B dos subconjuntos de los reales $\mathbb{R}$, es decir, $\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ B \subseteq \mathbb{R} \end{array}\right\}$ entonces, **función** es un subconjunto del producto cartesiano AxB, $f \subseteq AxB$ que cumple las siguientes condiciones:

i.) $\forall x \in A, \exists y \in B / (x, y) \in f$

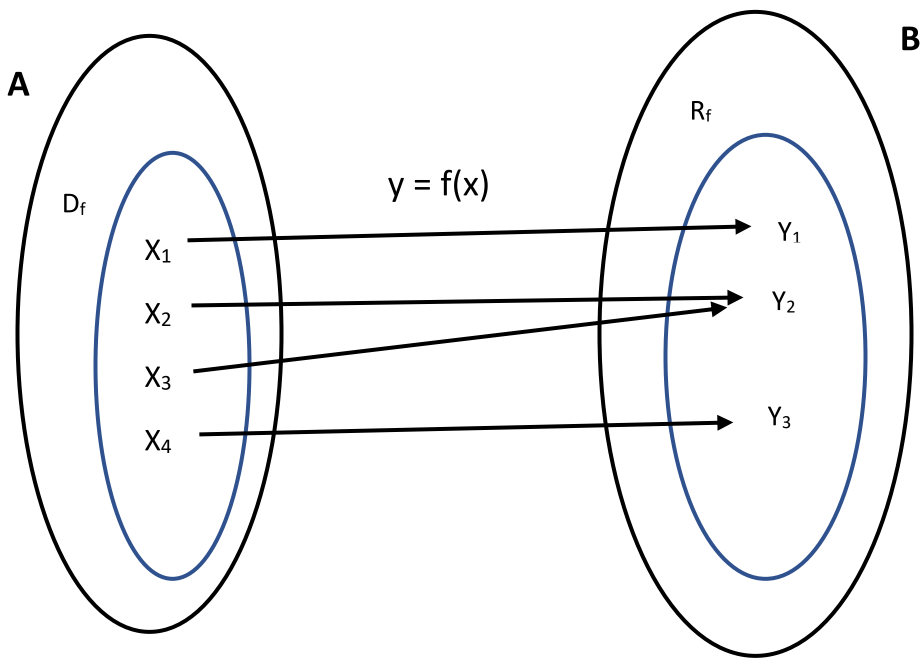
ii.) $si(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Longrightarrow y = y'$

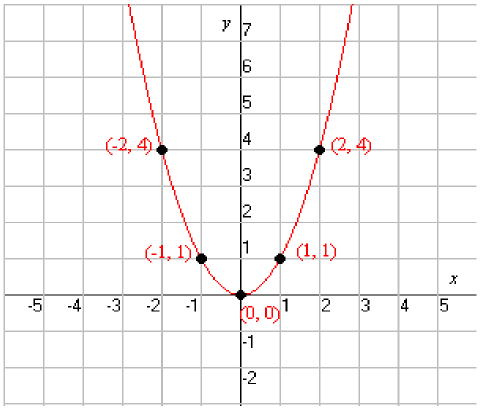
Con A llamado conjunto de salida y B conjunto de llegada.

Una función se nota formalmente como: $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$

X ⟶ y = f(x)

Que se lee: “La función f va de A en B, en donde a cada x elemento de A le corresponde un y elemento de B mediante la ley (o forma) y = f(x).





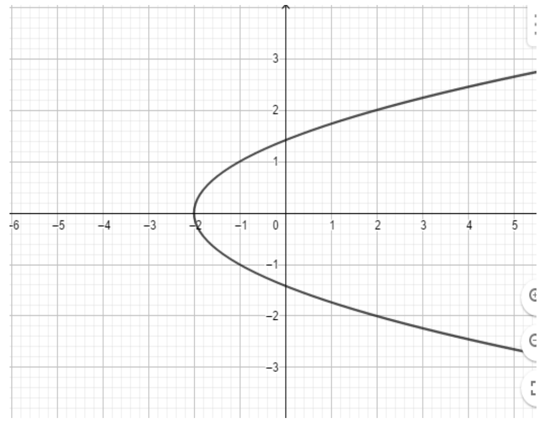


Figura a. Es función

Figura b. No es función

Ejemplos

1.) Sean los conjuntos $A = \{2,3,4,7\}\ y\ \ B = \{5,9,3,1\}$

¿Cuál de los siguientes conjuntos es función?

a) $f = \{(2,5), (3,9), (7,1)\}$
b) $f = \{(2,3), (4,1), (3,9), (7,1)\}$
c) $f = \{(2,5), (3.3), (3,1), (7,5), (4,1)\}$

a) No es función, pues no cumple con i) (es solo una aplicación)
b) Es función
c) No es función, porque no cumple con ii)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sean los conjuntos de salida A y llegada B. A = {1,2,3,4,5}; B = {1,4,9,16,25,36}

¿Cuál de los siguientes casos es función y cuáles no? Justifique su respuesta

a) f = {(1,1), (2,4), (3,9), (5,25)}
b) f = {(1,1), (2,4), (3,9), (2,16), (4,16), (5,5)}
c) f = {(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,16)}
d) f = {(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,36)}

2. Dado el conjunto de salida A = {2,4,6,7} y la función $f(x) = 2x^2 + x - 8$, encontrar el conjunto de llegada B
3. Dada la función $y = \log_5 x$ encontrar dos pares de conjuntos de salida y de llegada.

4. Dado el conjunto de salida A = {x/ x > 3} y la función $y = x^2$- 6, el conjunto de llegada será B = {y/ y > 3}
5. ¿Si la función es y = sen(x) y el conjunto de llegada es el intervalo B = [-1,1], el conjunto de salida son todos los reales?

1.2. DOMINIO Y RECORRIDO DE FUNCIONES

El **Dominio** de una función f, notado como **D_f,** es el conjunto formado por todos los elementos pertenecientes al conjunto de salida A para los cuales tiene sentido la función. En notación de conjuntos: $D_f = \{x \in A/(x, y) \in f\}$

El **Rango o Recorrido** de una función, notado como **R_f,** son todos los elementos de B obtenidos con los elementos del dominio mediante la ley y = f(x). En notación de conjuntos viene expresado como: $R_f = \{y = f(x)/x \in D_f\}$

También a cada $y \in B$ se le llama **imagen** de $x \in D_f$

Ejemplos

1. Si $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

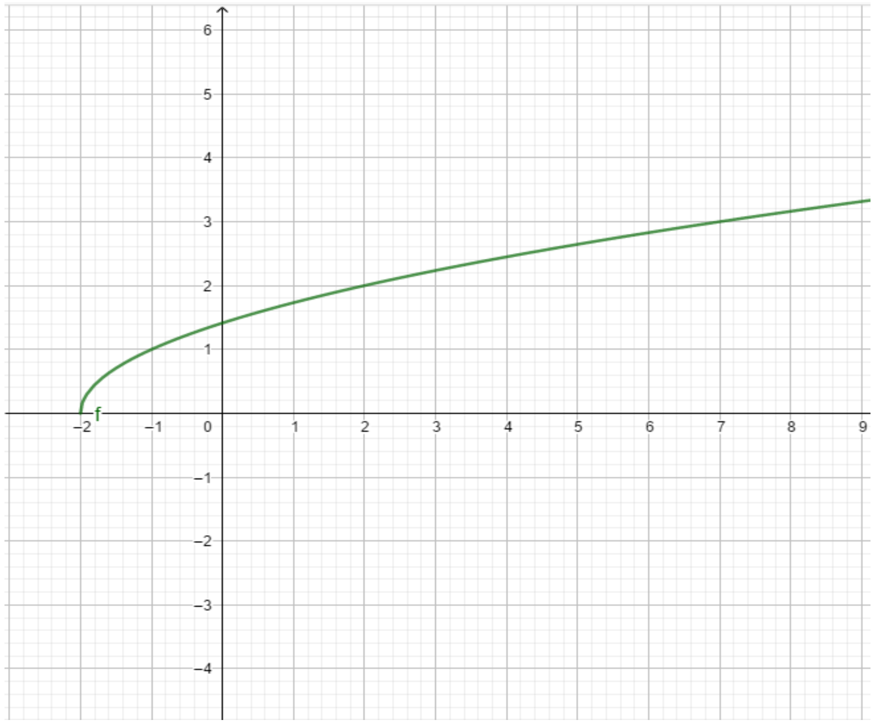
$x \rightarrow y = \sqrt{x+2}$ Encontrar el dominio y recorrido de la función

Existe $f(x) = \sqrt{x+2}$ si $x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$

Por tanto $D_f = \{x/x \geq -2\}$ que representando como intervalo será $D_f = [-2, \infty[$

También como $y = \sqrt{x+2} \geq 0 \implies y \geq 0$

Por tanto $R_f = \{y/y \geq 0\}$ que representando como intervalo será $R_f = [0, \infty[$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Tomar en cuenta la definición de dominio y recorrido, además de que la estrategia a utilizar para determinar D_f y R_f depende del tipo de función.

a.) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b.) $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

c.) $y = \frac{3}{x+1}$

d.) $y = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

e.) $y = \frac{2x}{(x-4)^2}$

CLASE DE EJERCICIOS

Objetivo. Determinar el dominio y recorrido de las funciones dadas.

1. Resolver los ejercicios de las actividades anteriores en caso de no haberlo terminado.
2. Encontrar el dominio y recorrido de las funciones dadas y comprobarlo utilizando un graficador

a. $y = \frac{1}{x^2-3}$

b. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-4}$
c. $y = x + \frac{1}{x}$
d. $y = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$

PARA FORO

¿Existen funciones que son relaciones? o ¿existen relaciones que son funciones? ¿Qué cree usted? Justifique.

PARA TRABAJO AUTÓNOMO

1. Conteste con V o F el siguiente enunciado: La ecuación de la circunferencia dada por $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$ representa una función matemática
2. Utilizando un graficador obtenga el dominio y recorrido de la función $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
3. Mediante un procedimiento matemático obtenga el dominio y recorrido de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-3}}$
4. Escriba una función x = f(t) para el movimiento de un auto con aceleración constante de 2 m/s^2 que parte con una velocidad inicial de 8 m/s. Considerar x la distancia recorrida y t el tiempo.