Diagrama de Árbol

Supongamos que lanzas una moneda 3 veces seguidas ¿Cómo se pueden ilustrar todos los posibles resultados? ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga en cara tres veces seguidas?

Marco Teórico

Se utilizó la regla de la suma para eventos dependientes así como para eventos mutuamente inclusivos y mutuamente excluyentes. La regla de la suma, o principio de la suma, se utiliza para encontrar $P(A\ or\ B)$ mientras que la regla de multiplicación se utiliza para eventos independientes.

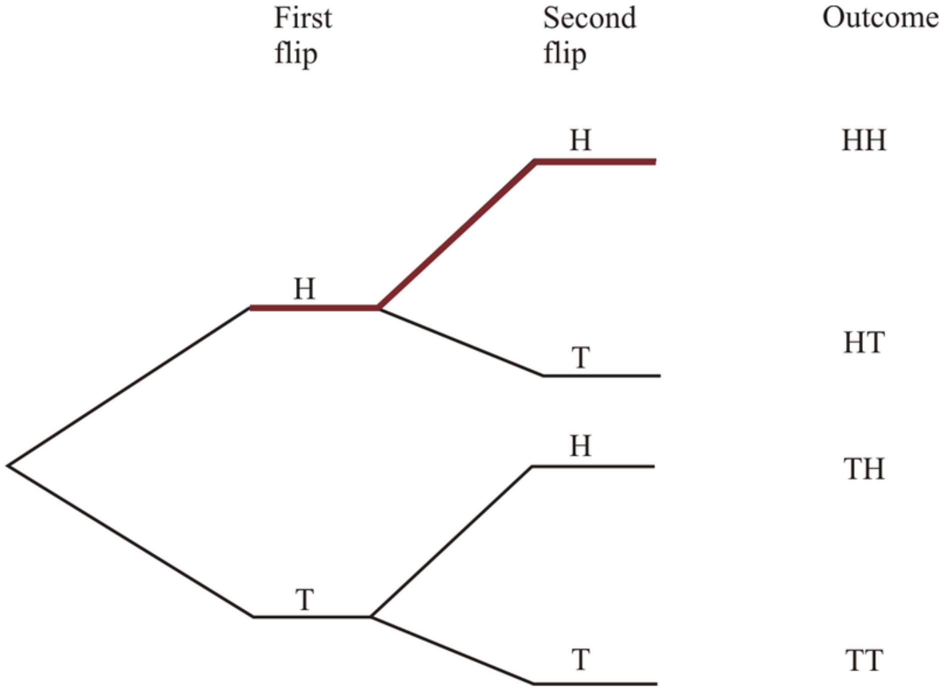
Regla de la Suma - Para 2 eventos, Ay B, la probabilidad de seleccionar un evento u otro está dado por:
$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.
Regla de Multiplicación - Para 2 eventos independientes, Ay B, cuando el resultado de A no cambia la probabilidad de B entonces la probabilidad de A y B está dada por: $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$.

Los diagramas de árbol son otra manera de mostrar los resultados de eventos simples de probabilidad. En un diagrama de árbol cada resultado se representa como una rama de un árbol.

Ejemplo A

Si lanzas una moneda 2 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras? Usa un diagrama de árbol para encontrar la respuesta.

Éste es un ejemplo de eventos independientes porque el resultado de un evento no afecta los resultados del segundo evento. ¿Qué quiere decir esto? Cuando lanzas la moneda una vez tienes la misma probabilidad de obtener cara (H) o sello (T). En el segundo lanzamiento también tienes la misma oportunidad de conseguir cara o sello. En otras palabras es igual de probable conseguir cara o sello en el primer lanzamiento como lo es en el segundo. Puedes representar los resultados de estos eventos en un diagrama de árbol.



En el diagrama de árbol se puede ver que la probabilidad de obtener cara la primera vez es $\frac{1}{2}$. Comenzando a lanzar la moneda habiendo salido cara anteriormente la probabilidad de obtener una segunda cabeza será de nuevo $\frac{1}{2}$ Pero ¿cómo se calcula la probabilidad de obtener *2* caras? Estos son eventos independientes ya que el resultado de lanzar la primera moneda de ningún modo afecta el resultado de lanzar la segunda moneda. Por lo tanto podemos calcular la probabilidad de la siguiente manera:

$$P(A \text{ and } B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(A \text{ and } B) = \frac{1}{4}$$

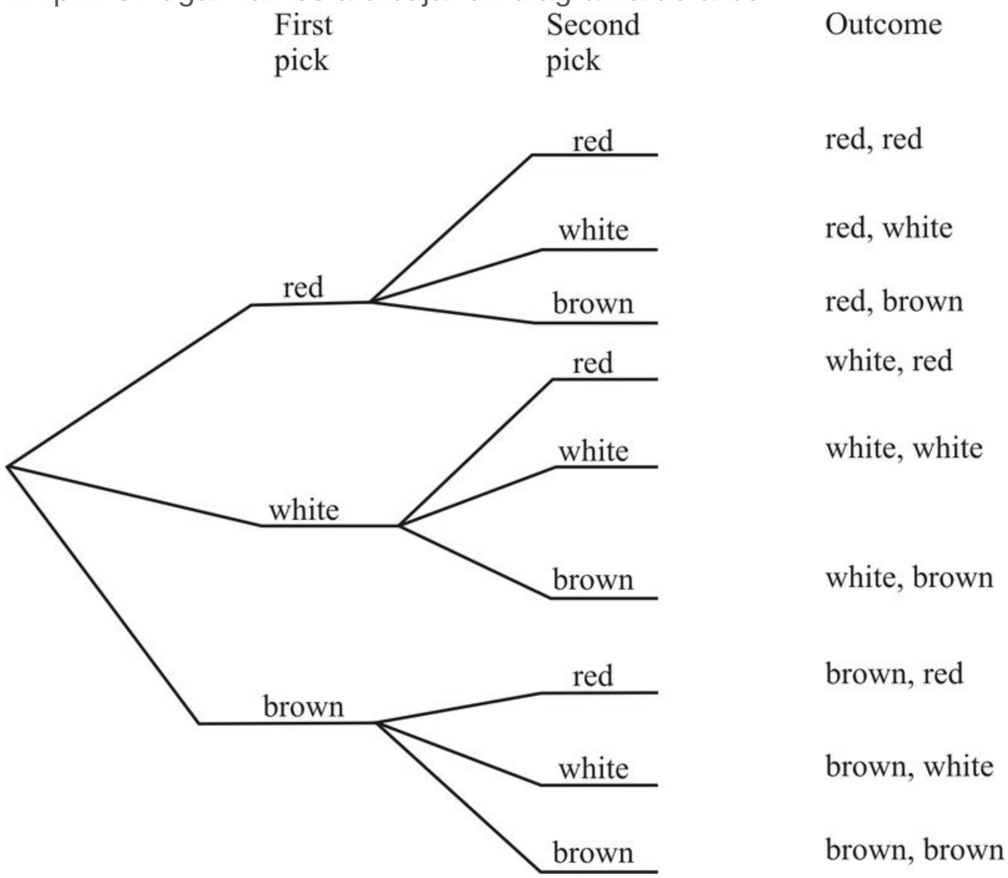
Así podemos concluir que la probabilidad de obtener 2 caras al lanzar una moneda dos veces es $\frac{1}{4}$ o un 25%.

Probemos con un ejemplo un poco más difícil.

Ejemplo B

Irvin abre su gaveta de calcetines para conseguir un par para ponerse para la escuela. Él mira en el cajón de los calcetines y ve 4 calcetines rojos, 8 calcetines blancos y 6 calcetines marrones. Irvin mete la mano en el cajón y saca un calcetín rojo. Lleva shorts azules y no le combina por lo que lo reemplaza. Extrae un calcetín blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que Irvin saque un calcetín rojo, lo reemplace y luego saque un calcetín blanco?

En primer lugar vamos a dibujar un diagrama de árbol.



Hay 18 calcetines en cajón de Irvin. La probabilidad de obtener un calcetín rojo cuando se saca el primer calcetín es:

$$P(\text{red}) = \frac{4}{18}$$

$$P(\text{red}) = \frac{2}{9}$$

Irvin coloca de nuevo el calcetín en el cajón y saca el segundo calcetín. La probabilidad de obtener un calcetín blanco en el segundo sorteo es:

$$P(\text{white}) = \frac{8}{18}$$
$$P(\text{white}) = \frac{4}{9}$$

Por lo tanto la probabilidad de obtener un calcetín rojo y luego un calcetín blanco cuando el primer calcetín es *reemplazado* es:

$$P(\text{red and white}) = \frac{2}{9} \times \frac{4}{9}$$
$$P(\text{red and white}) = \frac{8}{81}$$

Una parte importante de éste tipo de problemas es que el orden no es importante.

Digamos que Irvin eligió un calcetín blanco, lo reemplazó y luego cogió un calcetín rojo. Calcular la probabilidad.

$$P(\text{white and red}) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{9}$$
$$P(\text{white and red}) = \frac{8}{81}$$

Así que independientemente del orden en que se toman los calcetines la probabilidad es la misma. En otras palabras:

$$P(\text{red and white}) = P(\text{white and red}).$$

Ejemplo C

En el Ejemplo B, ¿qué pasa si el primer calcetín está *no sustituido* ?

La probabilidad de que el primera calcetín sea de color rojo es:

$$P(\text{red}) = \frac{4}{18}$$
$$P(\text{red}) = \frac{2}{9}$$

La probabilidad de escoger un calcetín blanco, sin que el rojo se regrese al cajón, cambia a:

$$P(\text{white}) = \frac{6}{17}$$

Notice the denominator decreased by 1. We now have **17** remaining socks in the drawer.

Al denominador se le resta uno ya que no se reemplazó el calcetín rojo. Así que ahora la probabilidad de seleccionar un calcetín rojo y luego un calcetín blanco es:

$$P(\text{red and white}) = \frac{2}{9} \times \frac{6}{17}$$

$$P(\text{red and white}) = \frac{12}{153}$$

$$P(\text{red and white}) = \frac{4}{51}$$

Si el primer calcetín es de color blanco ¿será $P(\text{red and white}) = P(\text{white and red})$ como lo encontramos en el ejemplo 1? Vamos a ver.

$$P(\text{white}) = \frac{6}{18}$$

$$P(\text{white}) = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de escoger un calcetín rojo en la segunda selección actual:

$$P(\text{red}) = \frac{4}{17}$$

Notice the denominator decreased by 1. We now have **17** remaining socks in the drawer.

$$P(\text{white and red}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{17}$$

$$P(\text{white and red}) = \frac{4}{51}$$

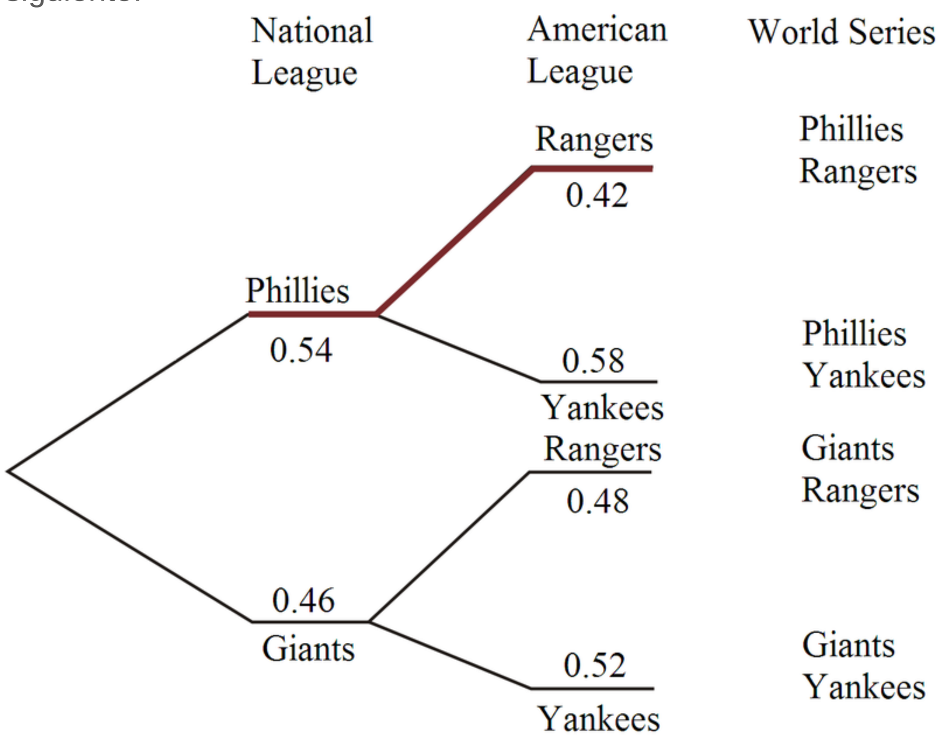
Al igual que con el último ejemplo $P(\text{red and white}) = P(\text{white and red})$ ¿Entonces cuándo importa verdaderamente el orden? Lo sabremos en el siguiente concepto.

Puntos a tener en cuenta

- ¿Cómo son útiles los diagramas de árbol para determinar las probabilidades?

Ejercicios Resueltos

En una encuesta a los fanáticos del béisbol se les preguntó quién les gustaría que ganara los playoffs de la Liga Nacional. 54% respondieron que les gustaría que ganaran Los Filis y el 46% respondió que les gustaría que Los Gigantes ganaran. Luego se les preguntó a los fans quién les gustaría que ganara los playoffs de la Liga Americana si Los Filis ganan los playoffs de la Liga Nacional y quién les gustaría ganara los playoffs de la Liga Americana si los Gigantes ganaran los playoffs de la Liga Nacional. Si los Filis gananan los playoffs de la Liga Nacional el 42% de los aficionados respondieron que quieren que Los Rangers ganen Liga Americana mientras que el 58% dijo que quieren que Los Yankees ganen. Si los Gigantes ganan los playoffs de la Liga Nacional el 48% de los aficionados respondieron que quieren que los Rangers ganen las eliminatorias de la Liga Americana mientras que el 52% dijo que ellos quieren que ganan Los Yankees. Los resultados del estudio se muestran en el diagrama de árbol siguiente:



Según la encuesta ¿qué porcentaje de los aficionados quieren cada una de la posibles parejas de equipos? ¿Todas las probabilidades suman a 100%?

Respuesta:

El porcentaje de los fans queriendo cada uno de las posibles parejas de equipos se puede calcular de la siguiente manera:

$$P(\text{Phillies and Rangers}) = 0.54 \times 0.42$$
$$P(\text{Phillies and Rangers}) = 0.2268$$
$$P(\text{Phillies and Rangers}) = 22.68\%$$
$$P(\text{Phillies and Yankees}) = 0.54 \times 0.58$$
$$P(\text{Phillies and Yankees}) = 0.3132$$
$$P(\text{Phillies and Yankees}) = 31.32\%$$
$$P(\text{Giants and Rangers}) = 0.46 \times 0.48$$
$$P(\text{Giants and Rangers}) = 0.2208$$
$$P(\text{Giants and Rangers}) = 22.08\%$$
$$P(\text{Giants and Yankees}) = 0.46 \times 0.52$$
$$P(\text{Giants and Yankees}) = 0.2392$$
$$P(\text{Giants and Yankees}) = 23.92\%$$

Ahora vamos a añadir todas las probabilidades.

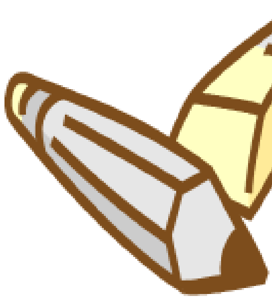
$$22.68\% + 31.32\% + 22.08\% + 23.92\% = 100\%$$

Todas las probabilidades, de hecho, se suman 100%.

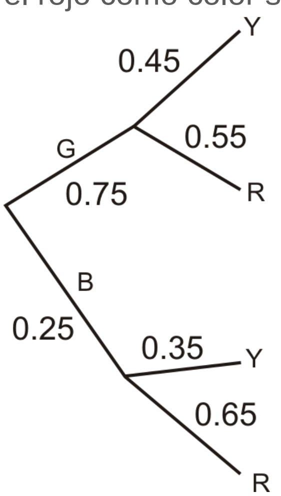
Ejercicios

1. Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 4 bolas azules. Thomas mete la mano en la bolsa y coge una bola al azar. Esa misma se coloca de nuevo en la bolsa. Thomas mete de nuevo la mano en la bolsa y coge otra bola al azar.
    a. Dibuja un diagrama de árbol para representar a este problema.
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que Thomas recoge:
        a. 2 bolas rojas
        b. La probabilidad de escoger una bola roja por segunda vez

2. Un maestro tiene una caja de premios para que los estudiantes que hacen un trabajo excepcional en clases de matemáticas. Dentro de la caja hay 20 lápices de matemáticas y 10 borradores nuevos. Janet completó un problema difícil para la Prof. Cameron y ella recompensó la resolución innovadora de Janet. Janet mete la mano en la caja y saca un premio. Lo devuelve a la caja. Luego mete de nuevo la mano y escoge un premio por segunda vez.
    a. Dibuje un diagrama de árbol para representar éste problema.
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que Janet meta la mano en la caja y escoja una goma de borrar en la segunda elección?

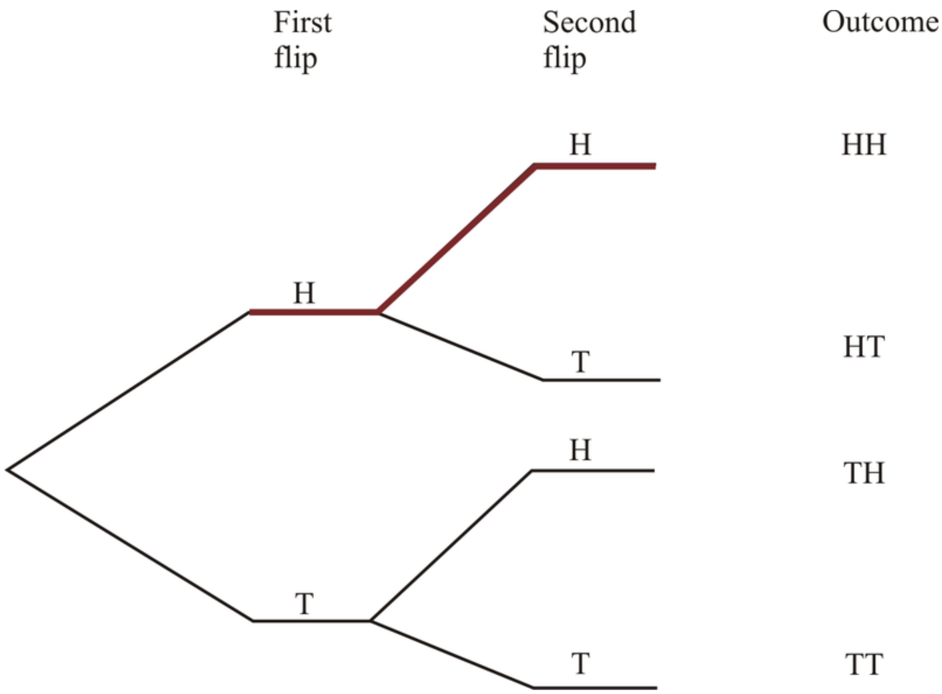


3. A los estudiantes de la Escuela Secundaria BDF se les preguntó sobre sus preferencias con respecto a los nuevos colores de la escuela. Se les dio a elegir entre verde y azul como colores base y rojo y amarillo como el color secundario. Los resultados del estudio se muestran en el diagrama de árbol a continuación. Puedes ver que el 75% de los estudiantes eligen el verde como color base. De éste 75%, 45% eligió el amarillo como color secundario. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante en Escuela Secundaria BDF seleccione el rojo como color secundario si él o ella escogió el azul como color base?

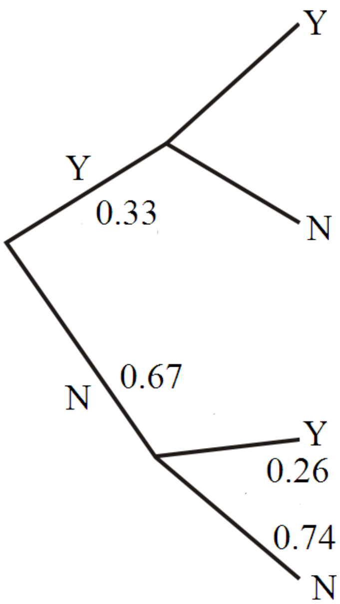


4. En la pregunta 3, ¿qué combinación de colores quieren más los estudiantes de la Escuela Secundaria BDF?

5. De acuerdo con el diagrama de árbol siguiente ¿cuál es la probabilidad de obtener 1 cara y 1 sello al lanzar una moneda 2 veces? Tenga en cuenta que 1 cara y 1 sello puede significar una cara y luego un sello o un sello y luego una cara.



6.
7. Si se lanza una moneda 4 veces, ¿cuántas ramas tendrá el diagrama de árbol en ésta situación?
8. Si se tira un dado 2 veces, ¿cuántas ramas tendrá el diagrama de árbol para en esa situación?
9. Supongamos que un diagrama de árbol tiene 4 ramas y 3 de las ramas representan las siguientes probabilidades de resultados: 0,12, 0,53 y 0,28 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad del resultado de la rama restante?
10. Saca las repuestas para las preguntas 12 y 13 del diagrama de árbol presentado a continuación:



11.
12. Si la probabilidad de responder que sí a ambas preguntas es 0.1947 ¿cuál es la probabilidad de responder afirmativamente a la segunda pregunta si la respuesta a la primera pregunta fue sí también?
13. En la pregunta 9 si la probabilidad de responder que sí a ambas preguntas es 0.1947 ¿cuál es la probabilidad de responder que no a la segunda pregunta si la respuesta a la primera pregunta fue sí?