

## Trabajo Autónomo 2.11 - Cálculo I

Primer Ciclo 'A' - Ingeniería de Software

**Estudiante:** Ariel Alejandro Calderón

1. **Estudiar la continuidad de**  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1}, & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

### Respuesta:

*Para estudiar la continuidad de la función  $f(x)$ , debemos analizarla en los puntos críticos y verificar la continuidad en su dominio.*

Primero, estudiemos la continuidad de cada parte en sus respectivos dominios.

- Para  $x < 0$ :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

La función está definida para todos los  $x$  tales que  $x^2 - 1 \neq 0$ . Entonces, no está definida en  $x = \pm 1$ . Pero, dado que consideramos solo  $x < 0$ , la función no está definida en  $x = -1$ . Por lo tanto,  $f(x)$  no es continua en  $x = -1$ .

- Para  $x \geq 0$ :

$$f(x) = 3x + 1$$

Esta es una función lineal, y por lo tanto, es continua en todo su dominio.

- En  $x = 0$ : Debemos verificar el límite lateral y el valor de la función en este punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 1) = 1$$

El límite lateral izquierdo no es igual al límite lateral derecho, por lo que  $f(x)$  no es continua en  $x = 0$ .

En resumen,  $f(x)$  no es continua en  $x = -1$  y  $x = 0$ .

2. **Estudiar la continuidad de**  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1 - x}{x}, & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{2x}{x - 5}, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

### Respuesta:

Primero, estudiemos la continuidad de cada parte en sus respectivos dominios.

- Para  $x \leq 1$ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1 \quad \text{para } x \neq -1$$

Esta simplificación es válida para  $x \neq -1$ , y es continua para todos los  $x$  en este dominio excepto en  $x = -1$ .

- Para  $1 < x \leq 3$ :

$$f(x) = \frac{1 - x}{x}$$

Esta es una función racional y está definida y es continua para todos los  $x$  en el intervalo  $1 < x \leq 3$ .

- Para  $x > 3$ :

$$f(x) = \frac{2x}{x - 5}$$

Esta es una función racional y está definida y es continua para todos los  $x$  en este dominio excepto en  $x = 5$ .

Ahora, estudiemos la continuidad en los puntos de unión  $x = 1$  y  $x = 3$ :

- En  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Los límites laterales y el valor de la función en  $x = 1$  son iguales, por lo tanto,  $f(x)$  es continua en  $x = 1$ .

- En  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1 - x}{x} = \frac{1 - 3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x - 5}$$

Para evaluar este límite, observamos que a medida que  $x \rightarrow 3^+$ , el denominador  $x - 5 \rightarrow -2$ :

$$\frac{2 \cdot 3}{3 - 5} = \frac{6}{-2} = -3$$

Los límites laterales no son iguales, por lo que  $f(x)$  no es continua en  $x = 3$ .

En resumen,  $f(x)$  es continua en todo su dominio excepto en  $x = -1$  y  $x = 3$ .

### 3. Encontrar los siguientes límites:

- a.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$
- b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$
- c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

#### Respuesta:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$

Este límite se puede evaluar utilizando la propiedad del logaritmo natural y la exponencial:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)}$$

Usamos la serie de Taylor para  $\ln(1+x)$  alrededor de  $x = 0$ :

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Por lo tanto:

$$\frac{2}{x} \ln(1+x) \approx \frac{2}{x} \left( x - \frac{x^2}{2} + \dots \right) = 2 - x + \dots$$

Al tomar el límite cuando  $x \rightarrow 0$ , los términos más altos desaparecen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{2-x} = e^2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

Reconocemos este límite como una forma de la definición del número  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Aquí, observamos que al reescribir en términos de  $y = \frac{n}{x}$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y} \cdot y \cdot n}$$

Esto se puede simplificar como:

$$\left[ \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^n \approx e^n$$

Pero al reevaluar en el contexto de  $x \rightarrow \infty$ , se observa que  $\left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n$  tiende a  $e^n$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^n$$

#### 4. Determinar las asíntotas que tiene la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

**Respuesta:**

Para determinar las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ , consideramos los siguientes tipos de asíntotas:

##### 1. Asíntotas verticales:

Las asíntotas verticales ocurren donde el denominador se hace cero y el numerador no es cero.

$$x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9 \implies x = \pm 3$$

Por lo tanto, hay asíntotas verticales en  $x = 3$  y  $x = -3$ .

##### 2. Asíntotas horizontales:

Las asíntotas horizontales se encuentran al evaluar los límites de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

Por lo tanto, hay una asíntota horizontal en  $y = 1$ .

Entonces, las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$  son:

- Asíntotas verticales en  $x = 3$  y  $x = -3$ .
- Una asíntota horizontal en  $y = 1$ .

5. **Determinar las asíntotas oblicuas de la función**  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

**Respuesta:**

Para determinar las asíntotas oblicuas de la función primero debemos simplificar la expresión bajo la raíz para grandes valores de  $x$ :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$$

Podemos factorizar  $4x^2$  de la expresión dentro de la raíz:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{2x}{4x^2} + \frac{1}{4x^2}\right)} = \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)}$$

Esto se puede simplificar aún más:

$$f(x) = 2x\sqrt{1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}}$$

Para  $x \rightarrow \infty$ , los términos  $\frac{1}{2x}$  y  $\frac{1}{4x^2}$  tienden a cero, así que podemos aproximar:

$$f(x) = 2x\sqrt{1} = 2x$$

Por lo tanto, la función se comporta como  $y = 2x$  para valores grandes de  $x$ . Esta es la ecuación de la asíntota oblicua.

Para verificar esto, encontramos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)$$

Nuevamente, los términos  $\frac{2}{x}$  y  $\frac{1}{x^2}$  tienden a cero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4 + 0 + 0} - 2 \right) = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Entonces, la función  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$  tiene una asíntota oblicua en  $y = 2x$ .