CLASE 3.1.

1.7. Composición de funciones.

Definición. Sean las funciones $f: A \rightarrow B \;\; y \;\; g: C \;\rightarrow\; D$ dos funciones reales tal que: y = f(x) y z = g(y), se define la función compuesta como $gof: A \rightarrow D$ tal que (gof)(x) = g(f(x)) y se lee "g compuesta con f"

Observaciones

- Para que exista la función compuesta gof es necesario y suficiente que f(x) sea elemento del D_g, es decir, $R_f \subseteq D_g$
- El dominio de gof está formado por todos los $x \in D_f \; tales \; que \; f(x) \in D_g$

$$D_{gof} = \{x \in A / f(x) \in R_f \cap D_g\}$$

Ejemplos

1. Dadas las funciones $f(x) = x + 3 \;\; y \;\; g(x) = \frac{x}{x-1}$, obtener g(f(x)) y f(g(x))

Primero encontramos el dominio y recorrido de ambas funciones

$D_f = \mathbb{R} \; (por \; se \; polinómica); \;\; R_f = \mathbb{R} \; (es \; recta)$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\} \; ; \;\; R_g = \mathbb{R} - \{1\}$

Existe g(f(x)) si $R_f \subseteq D_g$ y esto no se cumple, por lo que no podemos encontrar.

Existe f(g(x)) si $R_g \subseteq D_f$ y esto si se cumple, por tanto $f\big(g(x)\big) = \frac{x}{x-1} + 3 = \frac{4x-3}{x-1}$

Y su dominio es: $D_{fog} = R_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2. Encontrar g(f(x)) si $f(x) = \sqrt{x} \;\; y \;\; g(x) = x^2 \;\; y \; su \; dominio$

$D_f = [0, \infty[\;\; ; \;\; R_f = [0, \infty[$

$D_g = \mathbb{R} \;\; ; \;\; R_g = [0, \infty[$

Existe g(f(x)) si $R_f \subseteq D_g$ y esto si se cumple, por tanto $g\big(f(x)\big) = x$

Y su dominio es $D_{gof} = R_f \cap D_g = [o, \infty[$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar g(f(x)), f(g(x)) y sus dominios (si es posible) en los siguientes casos

a. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 \;\; y \;\; g(x) = 2x - 3$
b. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+1}} \;\; y \;\; g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Clase 3.2

1.8. Funciones Inversas

Sea f(x) una función de A en B biyectiva, entonces se define la función inversa de f, notada como $f^{-1}(x)$ a la función $x = f^{-1}(y)$, *que intercambiando variables se puede escribir como*

$$y = g(x) = f^{-1}(x)$$

Observación. Gráficamente la función inversa es simétrica (respecto de la función identidad y = x) con el gráfico de la función directa y = f(x).

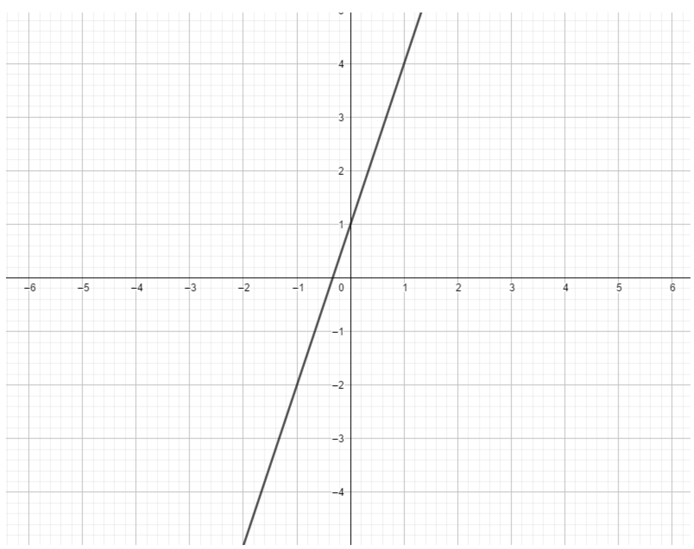
Notas

- Para encontrar la inversa, primero debemos demostrar que la función directa y = f(x) es biyectiva.
- El proceso de encontrar la función inversa consiste en, de la directa, despejar x = f(y), y luego intercambiar variables.
- El dominio de la función inversa es el recorrido de la directa; así mismo, el recorrido de la inversa es el dominio de la directa.

Ejemplos

1. Encontrar la inversa de la función y = f(x) = 3x + 1

Graficamos la función para comprobar que es biyectiva

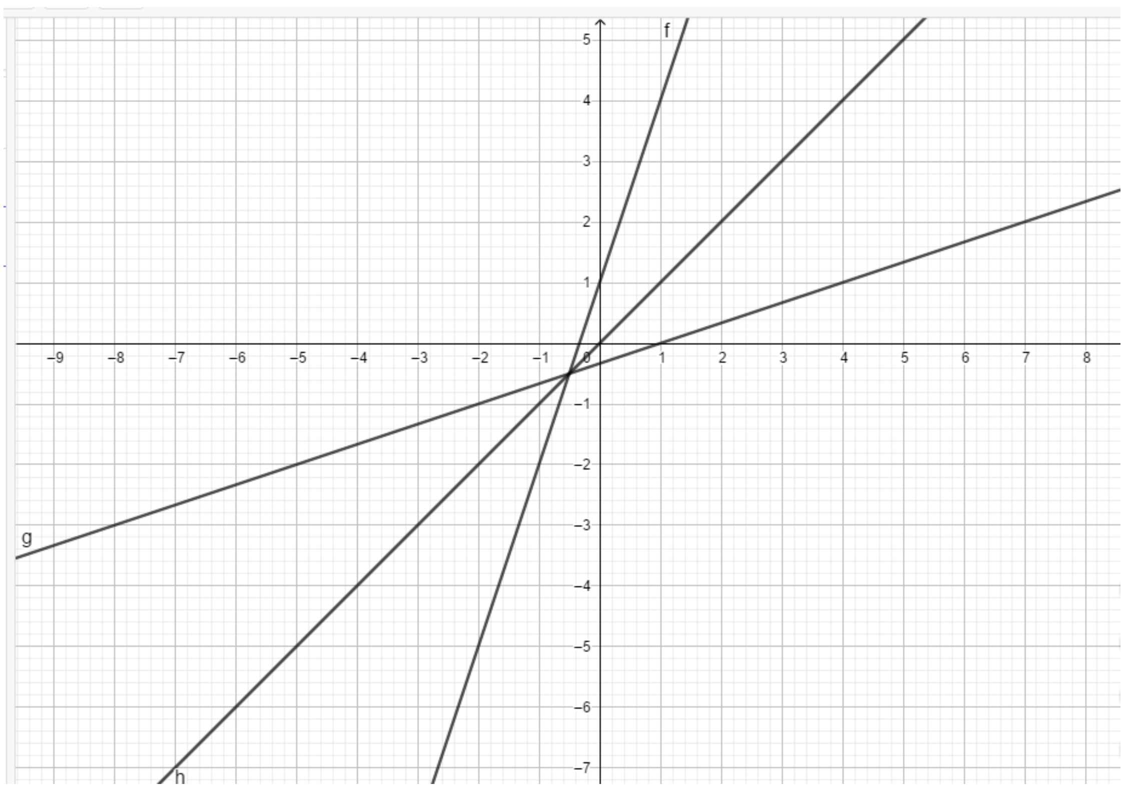


Como se puede ver el gráfico es una recta, y por tanto, si trazamos cualquier recta horizontal, corta en un solo punto al gráfico de la función directa; entonces es **inyectiva**. También, como no me dan el conjunto de llegada B, supongo que éste es el recorrido, y se puede ver que $\mathbb{R} = R_f = B$, por tanto, también es **sobreyectiva.** Es **biyectiva,** luego, si tiene inversa.

Despejando x tenemos $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$, e intercambiando variables la función inversa es:

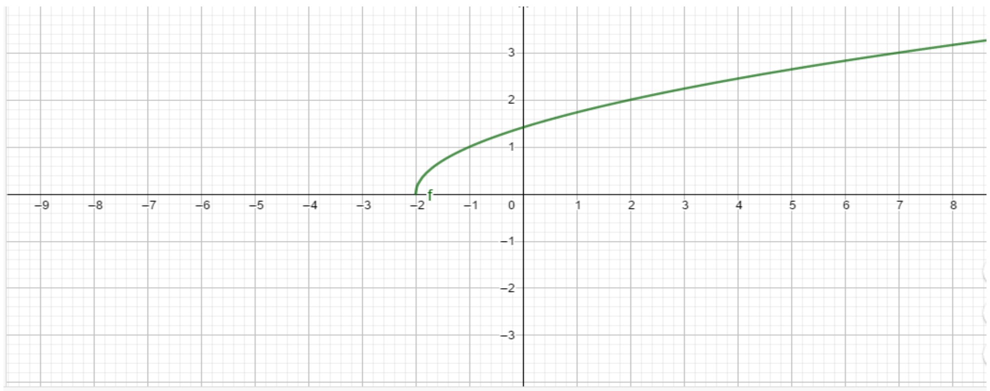
$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

Graficando la directa y su inversa en el mismo plano nos damos cuenta que la función inversa es simétrica a la función directa respecto a la recta y = x (función identidad)



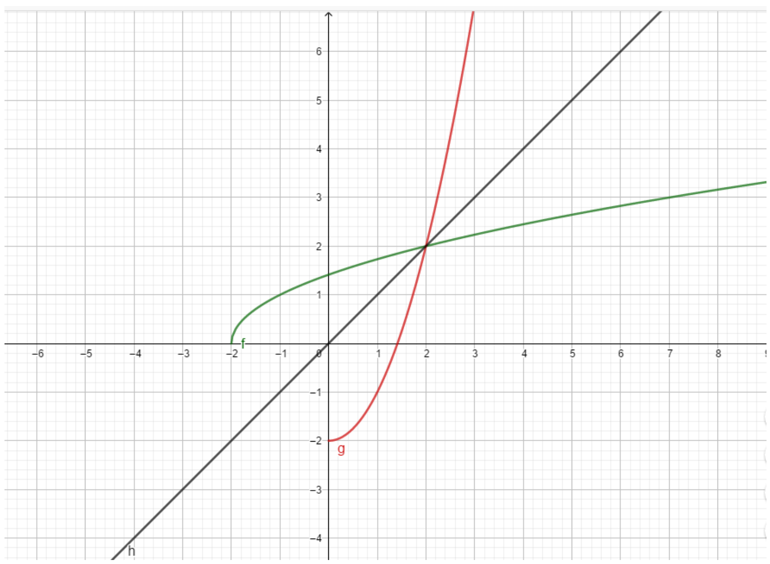
2. De la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ encontrar la inversa y graficar.

Solución: Viendo el gráfico podemos decir que f(x) es inyectiva, también es sobreyectiva, y por lo tanto es biyectiva.



Despejando x tenemos $x = y^2 - 2\,,\ y\ su\ inversa\ es\ g(x) = f^{-1}(x) = x^2 - 2$ que tiene como dominio $D_g = R_f = [0, \infty[\ \ y\ recorrido\ \ R_g = D_f = [-2, \infty[$

En el siguiente gráfico podemos ver que la inversa es simétrica con la directa, respecto a la función identidad (y=x).



EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar la función inversa (si es posible), para las siguientes funciones y graficar para comprobar que son simétricas.

a. $F(x) = x^3$
b. $F(x) = x^2+3x+2$
c. $y = \sqrt{4 - x^2}\ \ ;\ \ x \in [0,2]$
d. $y = \sqrt[3]{x+9}$
e. $y = \frac{1}{2x+3}$

1.9. Paridad de funciones.

Sea $f\colon\ A \to\ \ B\ \ una\ función\ tal\ que,\ \ si\ x \in A\ \ y\ (-x) \in A. Se\ dice\ que$:

i. $La\ función\ f\ es\ par\ ssi\ \forall x \in A,\ \ f(x) = f(-x)$

ii. $La\ función\ f\ es\ impar\ ssi\ \ \forall x \in A,\ \ f(x) = -f(-x)$

Observaciones:

- La gráfica de una función impar es simétrica respecto del eje vertical y.
- La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Si f es par y g es par, entonces f.g y f/g son pares
- Si f es par y g es impar, entonces f. g , g.f, f/g, y g/f son impares
- Si f es impar y g es impar, entonces f.g, g.f, f/g, y g/f son pares.
- Existen funciones que no son pares ni impares.

Ejemplos

1. Demostrar que y = x^2 +1, es función par

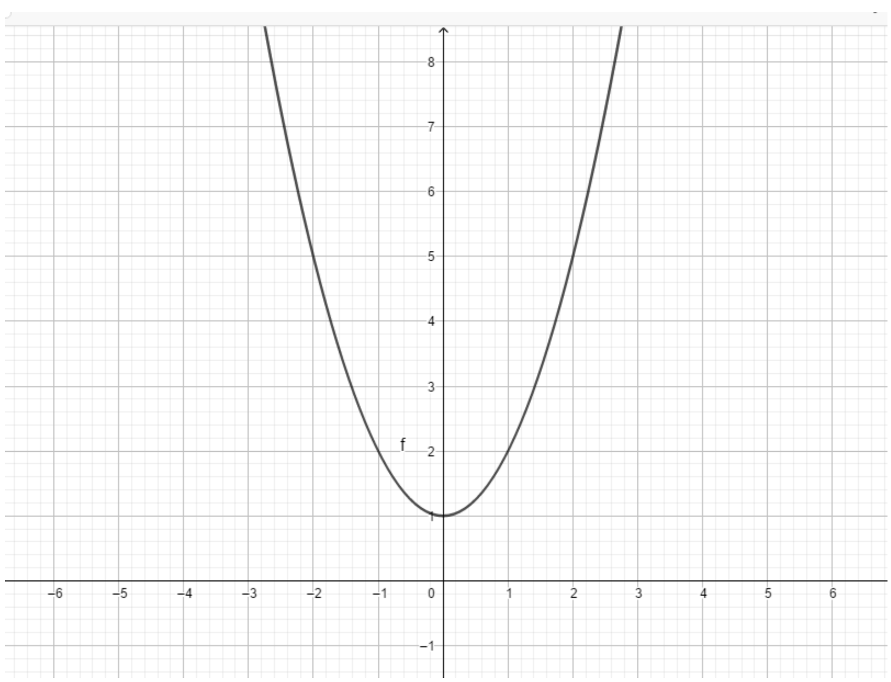
   Como el dominio de la función es todos los reales, entonces

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) =\ (x)^2 + 1 = x^2 + 1$

   $$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$$

   Entonces f(x) = f(-x), por tanto y = x^2+1 es par, lqqd.

   En el siguiente gráfico se ve que f(x) es simétrica respecto del eje y.



2. Estudiar la paridad de la función $y = \frac{x-1}{x+1}$

Podemos darnos cuenta que $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, por\ tanto$

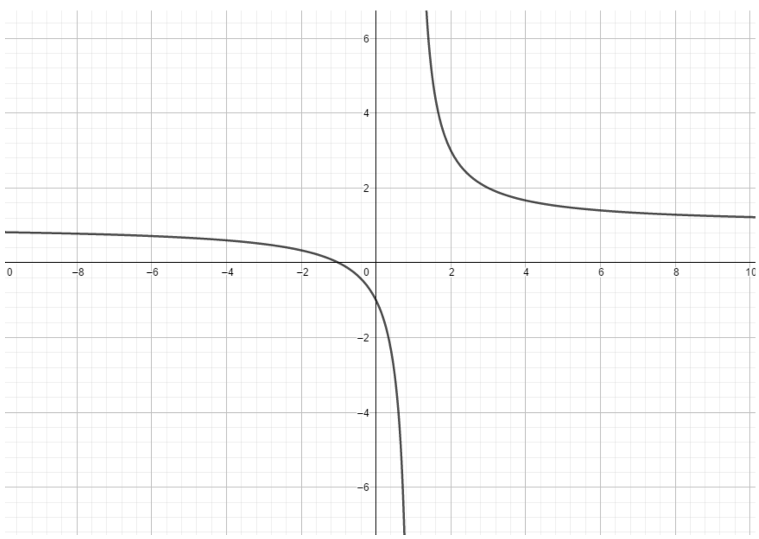
$$\forall x, -x \in D_f, \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1} = \frac{-(x+1)}{-(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$-f(-x) = -\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{-x+1}$$

Entonces $f(x) \neq f(-x), no\ es\ par$ y $f(x) \neq -f(-x), no\ es\ impar$

En el siguiente gráfico, vemos que no es simétrica respecto del eje y ni tampoco respecto del origen de coordenadas.



3. Demostrar analíticamente y gráficamente que f(x) = x^3 es impar

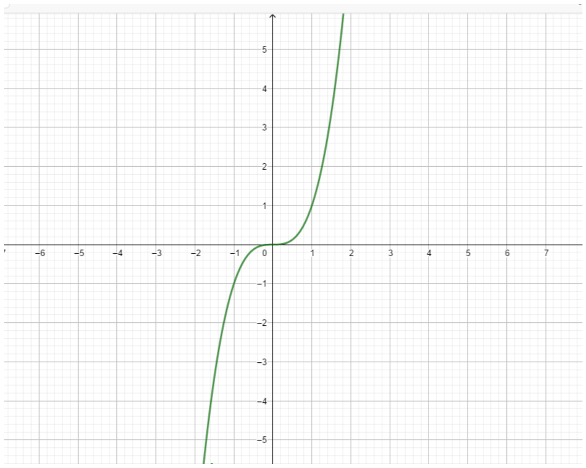
El dominio es todos los reales, por tanto

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -(x^3) = -f(x)$$

Entonces f(x) es impar.

En el siguiente gráfico vemos que es simétrica respecto del origen.



EJERCICIOS PROPUESTOS

Estudiar la paridad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - 2x$
b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
c. $f(x) = \frac{2}{x}$

1.10. Monotonía de funciones

Definiciones. Sea $f: A \longrightarrow B$ *una función real*

1. f *es estrictamente creciente en* A *ssi* $(\forall x_1, x_2 \in A)[x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)]$
2. f *es creciente en* A *ssi* $(\forall x_1, x_2 \in A)\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$
3. f *es estrictamente decreciente en* A *ssi* $(\forall x_1, x_2 \in A)[x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)]$
4. f *es decreciente en* A *ssi* $(\forall x_1, x_2 \in A)\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$
5. f *es constante en* A *ssi* $(\forall x_1, x_2 \in A)\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)]$

Ejemplos

1. Estudiar la monotonía de la función $y = -x^2 + 2$ y comprobar lo encontrado con el gráfico.

$D_f = \mathbb{R}$ (*por ser polinómica*)

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, con\ \ x_1 < x_2 \ \rightarrow (x_1)^2 > (x_2)^2\ \ para\ \ 0 > x_1 > x_2$ (pareja de negativos)

$\rightarrow\ (x_1)^2 < (x_2)^2\ \ para\ \ x_2 > x_1 > 0$ (pareja de positivos)

Entonces: para pareja de negativos

$-(x_1)^2 < -(x_2)^2$ (*al multiplicar por un número negativo cambia la desigualdad*)

y para pareja de positivos

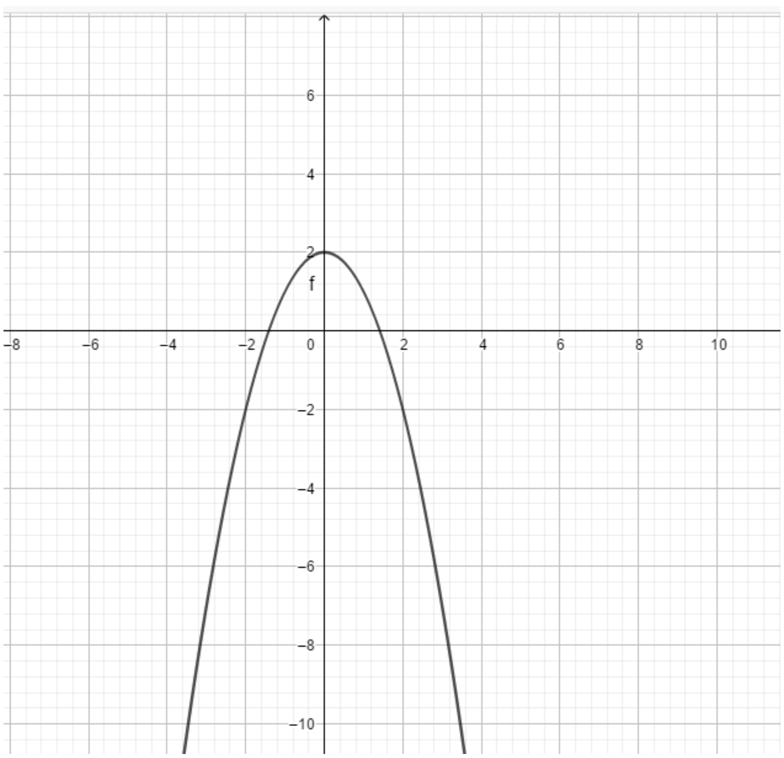
$-(x_1)^2 > -(x_2)^2$ $(al\ multiplicar\ por\ un\ número\ negativo\ cambia\ la\ desigualdad)$

Por tanto:

Para pareja x < 0 $\quad -x_1^2 + 2 < -x_2^2 + 2 \;\; \rightarrow \;\; f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$
$f\ es\ estrictamente\ creciente$

Para pareja x > 0 $\quad -x_1^2 + 2 > -x_2^2 + 2 \;\; \rightarrow \;\; f(x_1) > f(x_2) \;\rightarrow$
$f\ es\ estrictamente\ decreciente\ .$

Y estos intervalos de crecimiento y decrecimiento se comprobamos cuando graficamos la función.



EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:

a. $y = \sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}}$
b. $y = (x+1)^2$
c. $y = x^2 - x$

Clase de ejercicios (parte a)

Objetivo 1. Determinar si las siguientes funciones dadas son biyectivas

a. $f(x) = \sqrt{1 - x}$
b. $f(x) = x^3 - 2$
c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$

Objetivo 2. Determinar y encontrar (si existen) fog, gof, fof, y gog, sus dominios, y graficar las funciones existentes; en los siguientes casos:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$; $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
b. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{x}}$

Clase de ejercicios (parte b)

Objetivo 1. Obtener la inversa de la siguiente función y graficar para comprobar que es simétrica respecto a su directa. $f(x) = (2x - 5)^2$

Objetivo 2. Estudiar la paridad de la siguiente función y graficar.

$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^3}$

Objetivo 3. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizando la gráfica de la función $y = \sqrt{x^2 - 2}$

Para Trabajo Autónomo

1. Determinar si las siguientes funciones son biyectivas
   a. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$
   b. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-4}$
   c. $h(x) = 4x^2 - 2$
2. Con las funciones del ejercicio anterior encontrar fogoh, hogof, en el caso de ser posible.