

Clase 13.1

Teorema 1.

Si existe $f'(x)$, entonces f es continua en x

Nota: El teorema recíproco no siempre se cumple

Teorema 2. Algebra de derivadas

Si existe $f'(x)$ y existe $g'(x)$ entonces:

- i. Existe $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- ii. Existe $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- iii. Existe $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$; $g(x) \neq 0$

Ejemplos

1. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

- a. $f(x) = x^2 + \sin x$
- b. $f(x) = 4x^3$
- c. $f(x) = x^{-2}$
- d. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
- e. $f(x) = xe^x$

2. Demostrar que las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas son:

- a. $(\tan x)' = (\sec x)^2 = \sec^2(x)$
- b. $(\operatorname{ctgx})' = -\operatorname{csc}^2(x)$
- c. $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$
- d. $(\operatorname{csc} x)' = -\operatorname{csc} x \cdot \operatorname{ctgx}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

- a. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
- b. $f(x) = \cos^2(x)$
- c. $f(x) = x^3\sqrt{x}$
- d. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- e. $f(x) = x \cdot \cos x$
- f. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Teorema 3. Derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena

Si $f = u(v(x))$, y existe $v'(x)$ y existe $u'(y)$ con $y = v(x)$, entonces existe $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Ejemplos

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a. $y = a^x$; con $a > 0$ constante

b. $y = \log x$

c. $y = \log_5 x$

d. $f(x) = \sin(x^2)$

e. $f(x) = (x^2 + 2)^5$

f. $f(x) = e^{2x} \ln x$

g. $f(x) = e^{3x}$

h. $f(x) = 4^x$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

b. $f(x) = \sec\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

c. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^3 + x} - 2}$

d. $f(x) = \ln(x + 1)^2$

Clase 13.2

Teorema 4. Derivadas de funciones inversas

Sea f continua y estrictamente monótona en el intervalo $[a, b]$. Sea g la función inversa de f . Si existe $f'(x)$ para todo $x \in]a, b[$, entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} ; \text{ con } f'(x) \neq 0$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = 3x + 2$, calcular la derivada de la función inversa

Sea $g(x) = \frac{x-2}{3} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = f^{-1}(x)$ la inversa de $f(x)$

Entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{3}$

Lo que equivale a obtener la derivada de $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{3}$

2. Calcular la derivada de $y = \arcsen x = \sin^{-1} x$

$$y = \sin x \rightarrow x = \sin^{-1} y$$

$$(\sin^{-1} y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Entonces: $(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Demostrar que las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas inversas son:

a. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

b. $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

c. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

d. $(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

e. $(\operatorname{arccsc} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Derivadas de funciones implícitas

Existen expresiones matemáticas en las cuales no está “despejada” la variable dependiente y (o incluso no es factible despejar). Es decir la función no se presenta como $y = f(x)$

Para derivar se considera justamente que $y = f(x)$ y se deriva utilizando el teorema del álgebra de derivadas y la regla de la cadena.

Ejemplos

1. Encontrar $\frac{dy}{dx} = y'$ si tenemos que $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1$
2. Encontrar y' si $x^2 + y^2 = 4$
3. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $4x^2 + y^2 = 20$ en el punto $(2, -2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:
 - a. $y = \operatorname{sen}^{-1}(x^2)$
 - b. $y = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x^2 + 2}$
 - c. $\sin x = x(1 + \tan y)$
 - d. $y = \cos(xy)$

Clase 13.3 PAE

Objetivo. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$
2. Determinar el valor de x en la cual la función $y = x^2 - 2x + 1$ tiene una derivada nula.
3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x - 2)^2 + 3$ en el punto $x = 2$
4. Encuentra la derivada de la función $y = 3 \sin x + 4 \tan x$
5. Hallar la derivada de $y = \ln(x^2 + 2x - 1)$

6. Calcular la derivada de $y = 3^{\sqrt{x+1}}$
7. Calcular la derivada de $y = 2^{\text{sen}x}$
8. Encontrar la derivada de $f(x) = \frac{\text{arc sen}x}{x}$
9. Encontrar y' si $2\text{sen}x \cos y = 1$
10. Encontrar la derivada de $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Trabajo Autónomo TA 2.13

Resolver todos los ejercicios propuestos de cada tema presentado en esta semana