Trabajo Autónomo 1.6 - Cálculo III

Tercer Ciclo A - Ingeniería de Software

Tema: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas (previamente demostrando si son homogéneas).

   (a) $y' = \dfrac{x^2 - 6y^2}{2xy}$

   Verificamos si la ecuación es homogénea aplicando el cambio de escala $x \to \lambda x$ y $y \to \lambda y$:

   $$y' = \frac{(\lambda x)^2 - 6(\lambda y)^2}{2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2(x^2 - 6y^2)}{\lambda^2(2xy)} = \frac{x^2 - 6y^2}{2xy}.$$

   Como la ecuación es homogénea, aplicamos el cambio de variable:

   $$y = vx \implies y' = v + xv' = f(v)$$

   Sustituyendo en la ecuación original y simplificando:

   $$v + xv' = \frac{x^2 - 6v^2x^2}{2x^2v} = \frac{x^2(1 - 6v^2)}{x^2(2v)} = \frac{1 - 6v^2}{2v} = f(v).$$

   Reescribimos en la forma separable:

   $$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{2v\,dv}{1 - 4v^2}.$$

   Integrando ambos lados:

   $$\ln x = -\frac{1}{4}\ln|1 - 4v^2| + C.$$

   Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$:

   $$\ln x = -\frac{1}{4}\ln|1 - 4(y/x)^2| + C.$$

   Tomando exponencial en ambos lados:

   $$x(1 - 4(y/x)^2)^{1/4} = e^C.$$

   Redefiniendo $C' = e^C$:

   $$(1 - 4(y/x)^2)^{1/4} = \frac{C'}{x}.$$

   Elevando ambos lados a la cuarta potencia:

$$1 - 4(y/x)^2 = \frac{C'^4}{x^4}.$$

Multiplicando por x^2:

$$y^2 = \frac{1}{4}x^2\left(1 - \frac{C'^4}{x^4}\right).$$

Tomando raíz cuadrada:

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{C'^4}{x^4}}.$$

(b) $y' = \dfrac{2x^2y}{x^3 - y^3}$

Verificamos si la ecuación es homogénea aplicando el cambio de escala $x \to \lambda x$ y $y \to \lambda y$:

$$y' = \frac{2(\lambda x)^2(\lambda y)}{(\lambda x)^3 - (\lambda y)^3} = \frac{2\lambda^3 x^2 y}{\lambda^3(x^3 - y^3)} = \frac{2x^2y}{x^3 - y^3}.$$

Como la ecuación es homogénea, aplicamos el cambio de variable:

$$y = vx \implies y' = v + xv'.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$v + xv' = \frac{2x^2(vx)}{x^3 - (vx)^3}.$$

Factorizamos x^3 en el denominador:

$$v + xv' = \frac{2vx^3}{x^3(1 - v^3)} = \frac{2v}{1 - v^3}.$$

Reescribimos en la forma separable:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - v^3}{2v}dv.$$

Separando términos:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{v} - v^2\right) dv.$$

Calculamos las integrales:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1.$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln|v|.$$

$$-\frac{1}{2}\int v^2 dv = -\frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3} = -\frac{v^3}{6}.$$

Sumamos los términos:

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|v| - \frac{v^3}{6} + C.$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$:

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{(y/x)^3}{6} + C.$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|x| = -\frac{y^3}{6x^3} + C.$$

Agrupando términos:

$$\frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|y| = -\frac{y^3}{6x^3} + C.$$

Tomando exponencial en ambos lados:

$$\frac{|x|^{3/2}}{|y|^{1/2}} = e^C e^{-\frac{y^3}{6x^3}}.$$

Redefiniendo $C' = e^C$:

$$\frac{|x|^{3/2}}{|y|^{1/2}} e^{\frac{y^3}{6x^3}} = C'.$$

Despejamos y:

$$y = \left(\frac{|x|^{3/2}}{C' e^{\frac{y^3}{6x^3}}}\right)^2.$$

(c) $y' = \dfrac{y - 10\sqrt{4x^2 - y^2}}{x}$

Verificamos si la ecuación es homogénea aplicando el cambio de escala $x \to \lambda x$ y $y \to \lambda y$:

$$y' = \frac{\lambda y - 10\sqrt{4\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}}{\lambda x} = \frac{\lambda\left(y - 10\sqrt{4x^2 - y^2}\right)}{\lambda x} = \frac{y - 10\sqrt{4x^2 - y^2}}{x}.$$

Como la ecuación es homogénea, aplicamos el cambio de variable:

$$y = vx \implies y' = v + xv'.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$v + xv' = \frac{vx - 10\sqrt{4x^2 - (vx)^2}}{x}.$$

Simplificamos el denominador:

$$v + xv' = \frac{vx - 10\sqrt{4x^2 - v^2x^2}}{x} = \frac{vx - 10x\sqrt{4 - v^2}}{x} = v - 10\sqrt{4 - v^2}.$$

Reescribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$xv' = -10\sqrt{4 - v^2}.$$

Separando los términos:

$$\frac{dv}{\sqrt{4 - v^2}} = -\frac{10}{x}dx.$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{4 - v^2}} = -10 \int \frac{dx}{x}.$$

La integral de la izquierda es $\arcsin\left(\frac{v}{2}\right)$ y la de la derecha es $-10\ln|x|$:

$$\arcsin\left(\frac{v}{2}\right) = -10\ln|x| + C.$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$:

$$\arcsin\left(\frac{y}{2x}\right) = -10\ln|x| + C.$$

Finalmente, despejamos y:

$$\frac{y}{2x} = \sin\left(-10\ln|x| + C\right).$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = 2x\sin\left(-10\ln|x| + C\right).$$

(d) $y' = \dfrac{2xy - y^2}{3x^2}$ con $y(8) = 1$

Verificamos si la ecuación es homogénea aplicando el cambio de escala $x \to \lambda x$ y $y \to \lambda y$:

$$y' = \frac{2(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2}{3(\lambda x)^2} = \frac{2\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2}{3\lambda^2 x^2} = \frac{2xy - y^2}{3x^2}.$$

Como la ecuación es homogénea, aplicamos el cambio de variable:

$$y = vx \implies y' = v + xv'.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$v + xv' = \frac{2x(vx) - (vx)^2}{3x^2} = \frac{2vx^2 - v^2x^2}{3x^2} = \frac{x^2(2v - v^2)}{3x^2} = \frac{2v - v^2}{3}.$$

Reescribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$v + xv' = \frac{2v - v^2}{3}.$$

Separando términos:

$$xv' = \frac{2v - v^2}{3} - v = \frac{2v - v^2 - 3v}{3} = \frac{-v^2 - v}{3}.$$

Es decir:

$$v' = \frac{-v(v+1)}{3x}.$$

Ahora, separando variables:

$$\frac{dv}{v(v+1)} = -\frac{dx}{3x}.$$

Descomponemos la fracción en la izquierda mediante fracciones parciales:

$$\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}.$$

Entonces:

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv = -\frac{dx}{3x}.$$

Integramos ambos lados:

$$\int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv = \int -\frac{dx}{3x}.$$

Las integrales son:

$$\ln|v| - \ln|v+1| = -\frac{1}{3}\ln|x| + C.$$

Simplificamos:

$$\ln\left|\frac{v}{v+1}\right| = -\frac{1}{3}\ln|x| + C.$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$:

$$\ln\left|\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1}\right| = -\frac{1}{3}\ln|x| + C = \ln\left|\frac{y}{y+x}\right|.$$

Finalmente:

$$\ln\left|\frac{y}{y+x}\right| = -\frac{1}{3}\ln|x| + C.$$

Usamos la condición inicial $y(8) = 1$ para determinar la constante C:

$$\ln\left|\frac{1}{1+8}\right| = -\frac{1}{3}\ln|8| + C.$$

Calculamos:

$$\ln\left|\frac{1}{9}\right| = -\frac{1}{3}\ln 8 + C = -\ln 9 = -\frac{1}{3}\ln 8 + C.$$

Así:

$$C = -\ln 9 + \frac{1}{3}\ln 8.$$

La solución general es:

$$\ln\left|\frac{y}{y+x}\right| = -\frac{1}{3}\ln|x| - \ln 9 + \frac{1}{3}\ln 8.$$

Finalmente, tomando la exponencial en ambos lados:

$$\frac{y}{y+x} = \frac{e^{-\frac{1}{3}\ln|x| - \ln 9 + \frac{1}{3}\ln 8}}{1} = \frac{e^{\frac{1}{3}\ln 8}}{9x^{1/3}}.$$

Reescribiendo:

$$\frac{y}{y+x} = \frac{2}{9x^{1/3}}.$$

Finalmente:

$$y = \frac{2x^{1/3}}{9 - 2x^{1/3}}.$$

2. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son exactas o no. En caso de serlo, resuélvalas.
   (a) $(3x+1) + (3y-1)y' = 0$

   Verificamos si la ecuación es exacta, para lo cual escribimos la ecuación en la forma estándar $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, donde

   $$M(x,y) = 3x + 1 \quad \text{y} \quad N(x,y) = 3y - 1.$$

   Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse la condición de exactitud, que es:

   $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

   Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Como ambas derivadas son iguales, la ecuación es exacta. Ahora, buscamos una función potencial $\psi(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y).$$

1: Encontrar $\psi(x,y)$ a partir de $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 3x + 1$:
Integramos respecto a x:

$$\psi(x,y) = \int (3x+1)\,dx = \frac{3x^2}{2} + x + h(y),$$

donde $h(y)$ es una función de integración que depende solo de y.
2: Encontrar $h(y)$ a partir de $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3y - 1$:
Derivamos $\psi(x,y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = h'(y) = 3y - 1.$$

Integrando con respecto a y:

$$h(y) = \frac{3y^2}{2} - y + C,$$

donde C es una constante de integración.
Por lo tanto, la función potencial es:

$$\psi(x,y) = \frac{3x^2}{2} + x + \frac{3y^2}{2} - y + C.$$

3: Solución de la ecuación:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x,y) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{3x^2}{2} + x + \frac{3y^2}{2} - y = C.$$

(b) $(3y-1) - (3x+1)y' = 0$

Verificamos si la ecuación es exacta, para lo cual escribimos la ecuación en la forma estándar $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, donde

$$M(x,y) = 3y - 1 \quad \text{y} \quad N(x,y) = -(3x+1).$$

Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse la condición de exactitud, que es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3.$$

Como las derivadas parciales no son iguales, la ecuación no es exacta.
Por lo tanto, no podemos resolverla directamente como una ecuación exacta.

(c) $(y^2 - 2x) + (2xy - e^y)y' = 0$

Verificamos si la ecuación es exacta, para lo cual escribimos la ecuación en la forma estándar $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, donde

$$M(x, y) = y^2 - 2x \quad \text{y} \quad N(x, y) = 2xy - e^y.$$

Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse la condición de exactitud, que es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Como ambas derivadas son iguales, la ecuación es exacta. Ahora, buscamos una función potencial $\psi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y).$$

1: Encontrar $\psi(x, y)$ a partir de $\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 - 2x$:
Integramos respecto a x:

$$\psi(x, y) = \int (y^2 - 2x)\, dx = y^2 x - x^2 + h(y),$$

donde $h(y)$ es una función de integración que depende solo de y.
2: Encontrar $h(y)$ a partir de $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy - e^y$:
Derivamos $\psi(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy + h'(y) = 2xy - e^y.$$

De aquí obtenemos:

$$h'(y) = -e^y.$$

Integrando con respecto a y:

$$h(y) = -e^y + C,$$

donde C es una constante de integración.
Por lo tanto, la función potencial es:

$$\psi(x,y) = y^2x - x^2 - e^y + C.$$

3: Solución de la ecuación:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x,y) = C \quad \Rightarrow \quad y^2x - x^2 - e^y = C.$$

(d) $y^2 - 2xyy' = 0$
Verificamos si la ecuación es exacta, para lo cual escribimos la ecuación en la forma estándar $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, donde

$$M(x,y) = y^2 \quad \text{y} \quad N(x,y) = -2xy.$$

Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse la condición de exactitud, que es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y.$$

Como las derivadas parciales no son iguales, la ecuación no es exacta. Por lo tanto, no podemos resolverla directamente como una ecuación exacta.

(e) $(x^2 + \sin x) - (y^2 - \cos y)y' = 0$

Verificamos si la ecuación es exacta, para lo cual escribimos la ecuación en la forma estándar $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, donde

$$M(x,y) = x^2 + \sin x \quad \text{y} \quad N(x,y) = -(y^2 - \cos y).$$

Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Como ambas derivadas son iguales, la ecuación es exacta. Ahora, buscamos una función potencial $\psi(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y).$$

1: Encontrar $\psi(x,y)$ a partir de $\frac{\partial \psi}{\partial x} = x^2 + \sin x$:
Integramos respecto a x:

$$\psi(x,y) = \int (x^2 + \sin x)\, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + h(y),$$

donde $h(y)$ es una función de integración que depende solo de y.
2: Encontrar $h(y)$ a partir de $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -(y^2 - \cos y)$:
Derivamos $\psi(x,y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = h'(y) = -(y^2 - \cos y).$$

De aquí obtenemos:

$$h'(y) = -y^2 + \cos y.$$

Integrando con respecto a y:

$$h(y) = -\frac{y^3}{3} + \sin y + C,$$

donde C es una constante de integración.
Por lo tanto, la función potencial es:

$$\psi(x,y) = \frac{x^3}{3} - \cos x - \frac{y^3}{3} + \sin y + C.$$

3: Solución de la ecuación:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x,y) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{3} - \cos x - \frac{y^3}{3} + \sin y = C.$$

(f) $(x^2 + \sin y) - (y^2 - \cos x)y' = 0$

Verificamos si la ecuación es exacta, para lo cual escribimos la ecuación en la forma estándar $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, donde

$$M(x,y) = x^2 + \sin y \quad \text{y} \quad N(x,y) = -(y^2 - \cos x).$$

Para que la ecuación sea exacta, debe cumplirse la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \sin x.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación no es exacta. Por lo tanto, no podemos resolverla directamente como una ecuación exacta.