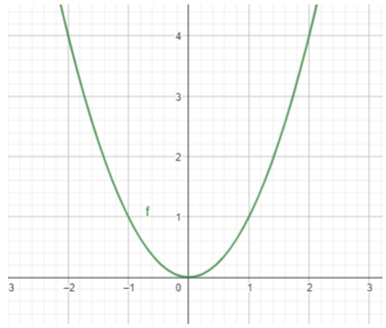
1. Escriba solo si la proposición es verdadera o falsa.



   (a) El principio de Inducción matemática es un método que permite verificar enunciados matemáticos.

   (b) Se puede aplicar el determinante de una matriz a cualquier sistema de ecuaciones.

   (c) La matriz escalonada reducida no tiene solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (d) Puede $(3, -1, 4)$ ser escrito como combinación lineal de $(1, -1, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(3, -5, -2)$.

   (e) ¿El conjunto $S = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes?

Solution:

(a) Verdadero.

(b) Falso.

(c) Falso.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Falso.

(e) Falso.

2. Use la sustitución hacia atrás para resolver el sistema de ecuaciones. Escriba así (x, y, z) la solución.

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 24 \\ y + 2z &= 6 \\ z &= 8 \end{aligned}$$

Solution:

$$z = 8$$
$$y + 2(8) = 6 \quad \Rightarrow \quad y = -10$$
$$2x - (-10) + 5(8) = 24 \quad \Rightarrow \quad x = -13$$

Solución: $(-13, -10, 8)$

3. Encontrar una matriz X tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution: Queremos encontrar una matriz X tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$. Multiplicamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{31} & 1 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{32} \\ 4 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{31} & 4 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{32} \\ 0 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{21} + 1 \cdot x_{31} & 0 \cdot x_{12} + 4 \cdot x_{22} + 1 \cdot x_{32} \end{bmatrix}$$

Igualando a la matriz objetivo:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 4x_{11} + x_{21} & 4x_{12} + x_{22} \\ 4x_{21} + x_{31} & 4x_{22} + x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 \\ x_{12} &= 0 \\ 4x_{11} + x_{21} &= 0 \Rightarrow x_{21} = -4 \\ 4x_{12} + x_{22} &= 1 \Rightarrow x_{22} = 1 \\ 4x_{21} + x_{31} &= 1 \Rightarrow x_{31} = 1 \\ 4x_{22} + x_{32} &= 1 \Rightarrow x_{32} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz X es:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Determine el tipo de solución y cuántas variables libres para el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 2 \\ 3x - 6y + 15z &= 0 \end{aligned}$$

Solution: El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 2 \\ 3x - 6y + 15z &= 0 \end{aligned}$$

Representamos el sistema en forma de matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & -6 & 15 & 0 \end{array}\right]$$

Realizamos la reducción de Gauss-Jordan:

1. **Paso 1:** Sustituir la fila 2 por la fila 2 menos 3 veces la fila 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

2. **Paso 2:** La fila 2 muestra que $0 = -6$, que es una contradicción.

Conclusión: El sistema es inconsistente y no tiene solución.

5. Demostrar la siguiente expresión matemática por inducción matemática.

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Solution: Demostración por inducción:

1. **Base de inducción:**

Para $n = 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}$$

La base es verdadera.

2. **Paso inductivo:**

Supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Demuéstralo para $n = k + 1$:

$$\text{Añade el término } \frac{1}{(3(k+1)-2) \cdot (3(k+1)+1)} = \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$\frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$\text{Factoriza: } \quad \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

Por lo tanto, la fórmula es verdadera para $n = k + 1$.

Conclusión: La fórmula es verdadera para todo $n \geq 1$ por inducción matemática.