Cálculo I

Corrección del Examen

Primer Ciclo "A" - Ingeniería de Software

Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

1. **Para la función $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$ determine:**
   a. El dominio y recorrido.
   b. Si la función es par o impar.
   c. Estudie la monotonía.

Solution:

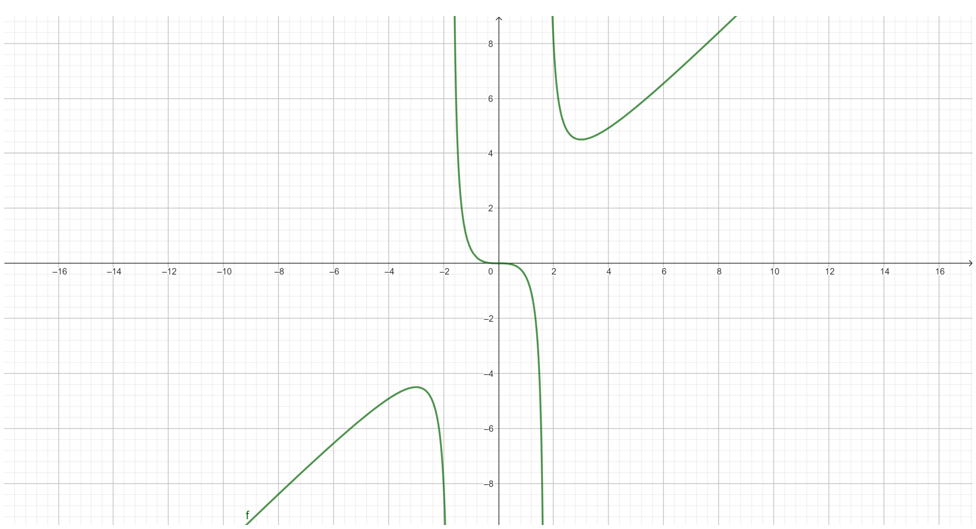
a. El dominio de la función son todos los números reales excepto los valores que hacen el denominador igual a cero, es decir, $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Por lo tanto, el dominio es $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

b. La función no es ni par ni impar. Para comprobar esto, evaluamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-3} = \frac{-x^3}{x^2-3} \neq f(x) \text{ y } \neq -f(x)$$

c. La monotonía de la función se determina asi:

- **Crece:** $]-\infty, 3] \cup [3, \infty[$
- **Decrece:** $\left[-3, -\sqrt{3}\right[\cup \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3\right]$



2. **Para la función $y = 1 + \tan x$ definida únicamente en el intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ determinar:**

   a. Si la función es biyectiva. Justifique su respuesta.

   b. Encuentre su inversa.

   c. Grafique en el mismo plano de la directa.

Solution:

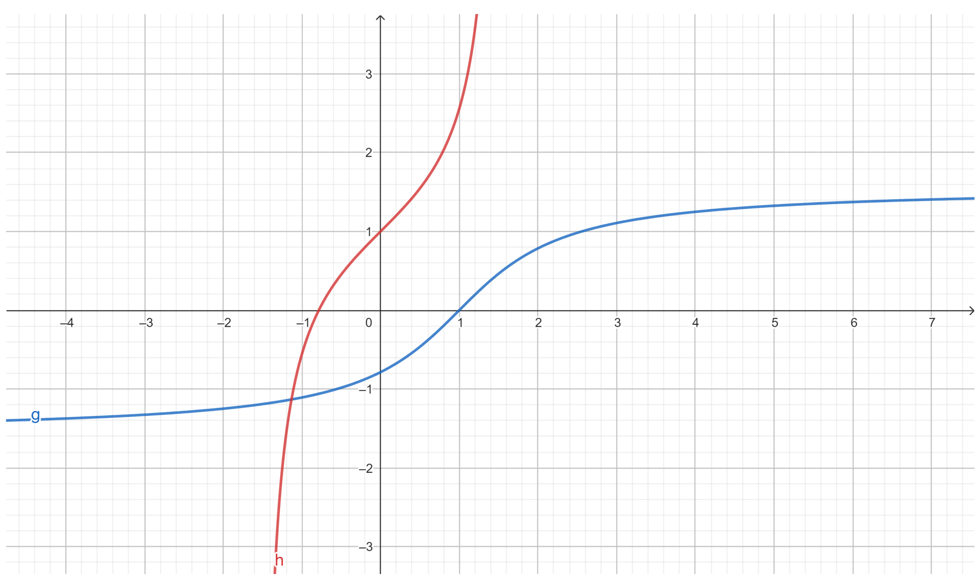
a. La función $y = 1+\tan x$ es biyectiva en el intervalo dado porque es continua y estrictamente creciente en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. Para encontrar la inversa, resolvemos $y = 1 + \tan x$ para x:

$$y - 1 = \tan x \Rightarrow x = \tan^{-1}(y - 1)$$

La inversa es $f^{-1}(y) = \tan^{-1}(y - 1)$.

c. La gráfica de $y = 1+\tan x$ y su inversa $y = \tan^{-1}(x-1)$ se puede representar en el mismo plano.



3. **Para la función $f(x) = 3^{x-3} - 2$ determine:**
   a. Su inversa si existe.
   b. Encuentre la función compuesta $f(f^{-1}(x))$.

Solution:

a. Para encontrar la inversa, resolvemos $y = 3^{x-3} - 2$ para x:

$$y + 2 = 3^{x-3} \Rightarrow x - 3 = \log_3(y+2) \Rightarrow x = \log_3(y+2) + 3$$

La inversa es $f^{-1}(x) = \log_3(x+2) + 3$.

b. La función compuesta $f(f^{-1}(x))$ es:

$$f(f^{-1}(x)) = f(\log_3(x+2) + 3) = 3^{(\log_3(x+2)+3)-3} - 2 = x + 2 - 2$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

4. **Calcular los límites indicados a continuación:**
   a. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3^x + 7}}{x + 2}$
   b. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$

Solution:

a. Para el límite $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3^x + 7}}{x + 2}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3^x + 7}}{x + 2} = \frac{\sqrt{3^2 + 7}}{2 + 2} = \frac{\sqrt{9 + 7}}{4} = \frac{\sqrt{16}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

b. Para el límite $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^2 - 4)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Levantamos la indeterminación:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x+2)}{x-1}$$

$$= \frac{2(2+2)}{2-1} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$