Trabajo Autónomo 2.10 - Cálculo I

Primer Ciclo “A” - Ingeniería de Software

Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

1. **Calcular los siguientes límites:**

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x - 3x^2 + 8x^3}{2x - 5x^2}$

   b. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3 - \sqrt{4+x}}{x - 5}$

   c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x^2 + x}$

   d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 3}{x + 4}$

Respuesta:

a. Para calcular este límite, factorizamos x:

$$\frac{4x - 3x^2 + 8x^3}{2x - 5x^2} = \frac{x(4 - 3x + 8x^2)}{x(2 - 5x)} = \frac{4 - 3x + 8x^2}{2 - 5x}$$

Luego, sustituir $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4 - 3x + 8x^2}{2 - 5x} = \frac{4 - 3(0) + 8(0)^2}{2 - 5(0)} = \frac{4}{2} = 2$$

b. Este límite tiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Factorizamos el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 5} \frac{3 - \sqrt{4+x}}{x - 5} \cdot \frac{3 + \sqrt{4+x}}{3 + \sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 5} \frac{(3 - \sqrt{4+x})(3 + \sqrt{4+x})}{(x - 5)(3 + \sqrt{4+x})}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{9 - (4 + x)}{(x - 5)(3 + \sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 5} \frac{5 - x}{(x - 5)(3 + \sqrt{4+x})}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{-(x - 5)}{(x - 5)(3 + \sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 5} \frac{-1}{3 + \sqrt{4+5}} = \frac{-1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{-1}{3 + 3} = \frac{-1}{6}$$

c. Este límite también tiene una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Factorizamos el numerador y denominador:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)(x^2 + 2x - 3)$$

$$x^4 - x^3 - x^2 + x = x(x-1)(x^2-1)$$

$$= x(x-1)(x-1)(x+1) = x(x-1)^2(x+1)$$

Simplificamos:

$$\frac{(x-1)(x^2+2x-3)}{x(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{x+3}{x(x+1)} = \frac{1+3}{1(1+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

d. Evaluamos el límite al sustituir $x = 2$:

$$\frac{2-3}{2+4} = \frac{-1}{6}$$

2. **Calcular** $\lim_{x \to 1} |x-1|$

Respuesta:

Consideramos el comportamiento de la función a medida que x se acerca a 1 desde ambos lados.

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x < 1 \\ x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Cuando $x \to 1^-$:

$$\lim_{x \to 1^-} |x-1| = \lim_{x \to 1^-} (1-x) = 0$$

- Cuando $x \to 1^+$:

$$\lim_{x \to 1^+} |x-1| = \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$$

Dado que ambos límites laterales son iguales, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 1} |x-1| = 0$$

3. **Calcular** $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

Respuesta:

Consideramos el comportamiento de la función a medida que x se acerca a 0 desde ambos lados.

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Cuando $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

- Cuando $x \to 0^-$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Dado que los límites laterales son diferentes, podemos concluir que el límite no existe:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \text{ no existe}$$

4. **Si** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \textbf{si } x \geq 1 \\ x + b, & \textbf{si } x < 1 \end{cases}$ **donde a y b son constantes.**

Para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$**, ¿qué relación debe haber entre a y b?**

Respuesta:

Para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$, los límites laterales deben ser iguales y también deben ser iguales al valor de la función en ese punto, si está definido.

Calculamos los límites laterales al acercarse x a 1:

- Cuando $x \to 1^-$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + b) = 1 + b$$

- Cuando $x \to 1^+$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$$

Para que los límites laterales sean iguales:

$$1 + b = 3$$

Despejamos b:

$$b = 3 - 1 = 2$$

Entonces, para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$, debe cumplirse que $b = 2$.

5. **Calcular** $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$

Respuesta:
Primero simplificamos la expresión. Notamos que $x^2 - 1$ se puede factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$|x^2 - 1| = |(x - 1)(x + 1)|$$

Así, el límite se convierte en:

$$\lim_{x \to 1} \frac{|(x - 1)(x + 1)|}{x - 1}$$

Podemos simplificar cancelando $x - 1$ en el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{|(x - 1)(x + 1)|}{x - 1} = \lim_{x \to 1} |x + 1|$$

Dado que $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} |x + 1| = |1 + 1| = 2$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = 2$$

6. **Calcular** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **si** $f(x) = \begin{cases} x^3, & \textbf{si } x \leq 0 \\ x^2, & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$

Respuesta:

Consideramos los límites laterales:

- Cuando $x \to 0^-$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 = 0^3 = 0$$

- Cuando $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

Dado que ambos límites laterales son iguales, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

7. **Calcular los siguientes límites:**

a. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{-3x^2 + x - 2}$

b. $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x} + 2)$

c. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x})$

d. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x})$

Respuesta:

a. Para calcular este límite, dividimos el numerador y el denominador por x^2:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{-3x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{-3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

A medida que $x \to -\infty$, los términos $\frac{5}{x}$, $\frac{3}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ y $\frac{2}{x^2}$ tienden a 0:

$$= \frac{1 + 0 + 0}{-3 + 0 + 0} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

b. Para este límite, factorizamos $\sqrt{x^2}$ fuera de la raíz y simplificamos:

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x} + 2) = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2(1 + \frac{5}{x^2})} - \sqrt{x} + 2)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (|x|\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \sqrt{x} + 2)$$

Dado que x es negativo, $|x| = -x$:

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} - \sqrt{x} + 2)$$

A medida que $x \to -\infty$, $\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \to 1$ y $\sqrt{x} \to -\infty$:

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x - \sqrt{x} + 2) = \infty$$

c. Para este límite, factorizamos $\sqrt{x^2}$ fuera de la raíz y simplificamos:

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \to \infty} (x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}})$$

$$= \lim_{x \to \infty} x(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}})$$

Usamos la fórmula de la diferencia de raíces:

$$= \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{(1 + \frac{3}{x}) - (1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1$$

d. Para este límite, factorizamos $\sqrt{x^2}$ fuera de la raíz y simplificamos:

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}) = \lim_{x \to \infty} x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{4}{x}})$$

Usamos la fórmula de la diferencia de raíces:

$$= \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{(1 + \frac{1}{x^2}) - (1 - \frac{4}{x})}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

8. **Calcular los siguientes límites trigonométricos:**

   a. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2 x}{x}$

   b. $\lim_{x \to 0} \frac{cos^2 x}{x}$

   c. $\lim_{x \to -1} \frac{sen(x+1)}{x+1}$

   d. $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{x}$

   e. $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{sen(2x)}$

   f. $\lim_{x \to \pi} x * secx$

Respuesta:

a. Utilizamos la identidad trigonométrica $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

Podemos escribirlo como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$$

Sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, entonces:

$$= \lim_{x \to 0} (\sin x \cdot 1) = \sin 0 = 0$$

b. Dado que $\cos^2 x$ es continuo en $x = 0$ y $\cos^2 0 = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\cos^2 x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

La expresión $\frac{1}{x}$ tiende a infinito mientras que $\cos^2 x$ tiende a 1:

$$= \infty$$

c. Haciendo un cambio de variable $u = x + 1$, entonces cuando $x \to -1$, $u \to 0$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}$$

Sabemos que $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$:

$$= 1$$

d. Usamos la fórmula $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, con $u = 3x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

e. Usamos las fórmulas $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ con $u = 3x$ y $v = 2x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(2x)}{2x}} \cdot \frac{3x}{2x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

f. Dado que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $\cos \pi = -1$:

$$\lim_{x \to \pi} x \cdot \sec x = \lim_{x \to \pi} x \cdot \frac{1}{\cos x} = \pi \cdot \frac{1}{-1} = -\pi$$