CLASE 2.1.

1.3. GRÁFICAS DE FUNCIONES

Una función de una variable se representa geométricamente en el plano x – y.

En el gráfico de la función, todos los valores en el eje horizontal o x para los cuales existe la función representan el conjunto dominio de f, D_f; y todos los valores en el eje vertical o y para los cuales existe la función representan el conjunto recorrido de f, R_f.

En este curso, utilizaremos cualquier graficador disponible para un ordenador o celular como por ejemplo el Geogebra, WINFUN, etc.

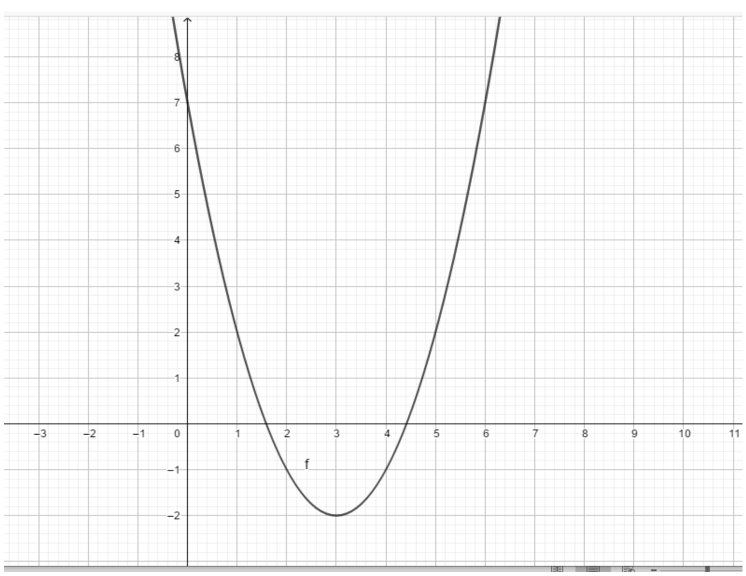
La idea de aprender este tema es que hay que realizar el gráfico de forma manual, pues una de las aplicaciones prácticas al finalizar este curso de Cálculo Diferencial es conocer todos los pasos que un graficador utiliza.

Pero lo más importante, aprender analizar el gráfico y obtener algunas características de la función, tales como su dominio y recorrido.

Ejemplos

1. Graficar la función $f(x) = (x-3)^2 - 2$ y del gráfico obtener su dominio y recorrido

Utilizando el Geogebra tenemos:

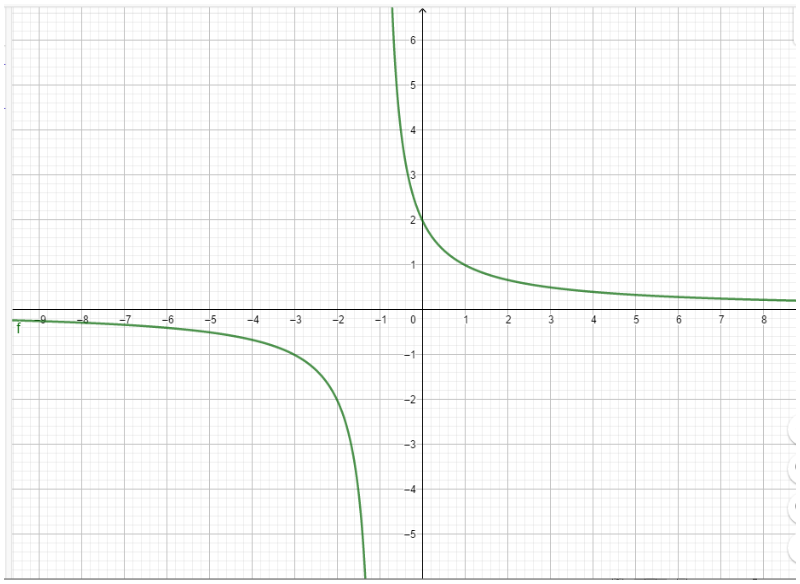


Del gráfico podemos ver que la función existe para todo x elemento de los reales, pero así mismo la función existe para valores en el eje y mayores o iguales a -2. Por tanto:

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [-2\,,\infty[$

2. Determinar el dominio y recorrido de la función $y = \frac{2}{x+1}$

Con Geogebra



$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Graficar y determinar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ b. $y = \frac{x+2}{\sqrt{x-2}}$ c. $y = \frac{2}{x^2-x-2}$

1.4. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES MATEMÁTICAS

$$\text{FUNCIONES} \begin{cases} ALGEBRAICAS & \begin{cases} Polinómicas \\ Racionales \\ \text{"Irracionales" (Radicales)} \\ Mixtas \end{cases} \\ TRASCENDENTES & \begin{cases} Trigonométricas \\ Exponenciales \\ Logarítmicas \end{cases} \end{cases}$$

Funciones polinómicas. Son del tipo polinomio, es decir

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...+ a_2x^2 + a_1x + a_0$$

EJEMPLOS

- $P_0(x) = 3$ función constante
- $P_1(x) = 2x-1$ función lineal (ecuación de una recta)
- $y = 3x^2-x+6$ función cuadrática (ecuación de una parábola)
- $y = x^5+2x^3-2x-8$ función polinómica de quinto grado

Nota: Cualquier función polinómica tiene como dominio a todo el conjunto de los reales, $\mathbb{R}$

Funciones Racionales

Son del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)\ y\ Q(x)\ polinomios,\ Q(x) \neq 0$

EJEMPLOS

- $f(x) = \frac{x^2+2}{3}$
- $y = \frac{x}{(x+1)^2}$

Funciones Irracionales o radicales

EJEMPLOS

- $f(x) = \sqrt{x+5}$
- $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt[3]{x-2}}$

Funciones trigonométricas. Tipo

- $y = \mathrm{sen} x$
- y = cosx
- $y = tg(x^2-3)$

Funciones exponenciales. Son aquellas que tienen a la variable independiente en el exponente. EJEMPLOS:

- $y = e^x$
- $y = 4^x$
- $y = 5^{x^2+2}$

Funciones logarítmicas. Aquellas que tienen a la variable independiente en el argumento del logaritmo.

EJEMPLOS

- $y = \log_5(x-2)$
- $y = \log x$
- $y = \ln(x^4 - 1)$

Funciones Mixtas. Como su nombre lo dice son combinaciones de cualquier tipo de funciones descritas anteriormente.

EJEMPLOS PROPUESTOS

1. Indique la clase de funciones que son las dadas a continuación
   - $f(x) = x^2 + \sqrt{x-3}\ln x$
   - $y = (3^x - x)\cos(x+2)$

CLASE 2.2.

1.5. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Sean f(x) y g(x) dos funciones reales. Se define las siguientes operaciones:

i. La suma f(x) + g(x) = (f + g)(x) siempre que $x \in D_f \cap D_g$ y su dominio es

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

Igual para la resta

-

ii. El producto (f.g)(x) = f(x).g(x) siempre que $x \in D_f \cap D_g$ y su dominio es

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

iii. El cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $\in D_f \cap D_g$ y $g(x) \neq 0$, su dominio es

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x\ /g(x) = 0\}$$

Ejemplos

1. Con las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = x^2 - 2$, encontrar: f + g, fxg, $\frac{f}{g}$ y $\frac{g}{f}$; además los respectivos dominios de las nuevas funciones.

SOLUCIÓN

Primero determinamos el dominio y recorrido de las dos funciones

Existe f*3.0/82(x) si $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \implies D_f = [-2\,, \infty[$

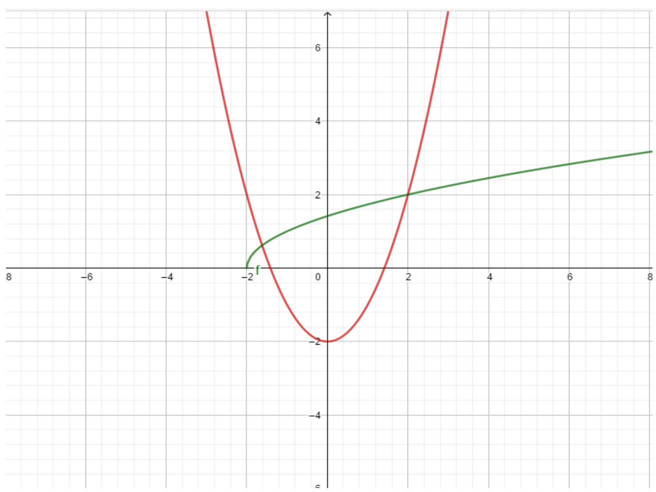
El $D_g = \mathbb{R}$ $(por\ ser\ polinómica)$

Esto lo podemos comprobar graficando las funciones

Como es lógico podemos realizar cualquier operación en el intervalo de los dominios donde existan las dos funciones, entonces:

i) $(f+g)(x) = \sqrt{x+2}$+(x^2-2) $= \sqrt{x+2} + x^2 - 2$ y $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2\,,\infty[$

ii) $(f.g)(x) = \sqrt{x+2}\,(x^2-2)$ y $D_{f.g} = D_f \cap D_g = [-2\,,\infty[$

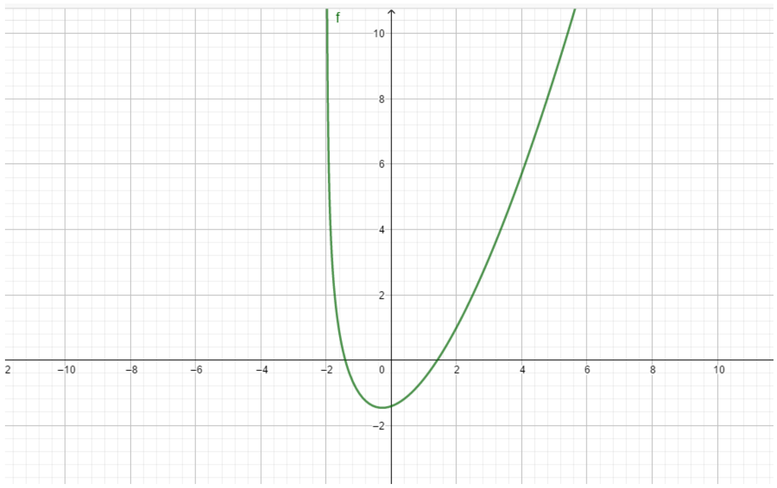


iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-2}$ $y,$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x\ tal\ que\ g(x) = 0\} = [-2\,,-\sqrt{2}[\,\cup\,]-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2}\,,\infty[$

iv) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$=$\frac{x^2-2}{\sqrt{x+2}}$ y $D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x\ tal\ que\ f(x) = 0\} =$ $]-2\,,\infty[$

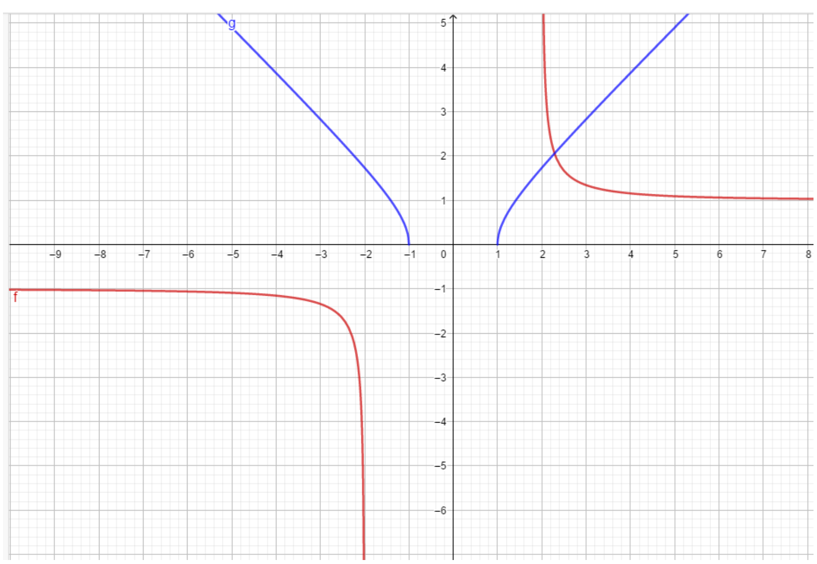
Graficando esta última función encontrada podemos comprobar su dominio encontrado



2. Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ $\;y\;$ $g(x) = \sqrt{x^2-1}\,, encontrar\; \left(\frac{f}{g}\right)(x)\,,$ $\left(\frac{g}{f}\right)(x)\;\; y\; sus\; dominios$

SOLUCIÓN

En este caso vamos a encontrar los dominios solo graficando con el Geogebra.



$D_f = \left]-\infty\,, -2\right[\; \cup\; \left]2\,,\infty\right[$ y $D_g = \left]-\infty\,, -1\right] \cup \left[1\,,\infty\right[$

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x}{x^2-4}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-1}} \quad y \quad D_{\frac{f}{g}} =]-\infty\,,-2[\ \cup\ ]2\,,\infty[$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2-1}}{x} \quad y \quad D_{\frac{g}{f}} =]-\infty\,,-2[\ \cup\ ]2\,,\infty[$$

CLASE DE EJERCICIOS

Objetivos. Encontrar las operaciones básicas de dos funciones dadas y sus dominios

Tarea. Encontrar la suma, resta, producto y cociente de las siguientes parejas de funciones:

a.) $f(x) = x^3 - 2 \quad y \quad g(x) = (x+1)^2$
b.) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} \quad y \ g(x) = -2x + 1$

PARA FORO

Conteste con V o F a las siguientes preguntas de razonamiento

1. ¿Todas las funciones polinómicas son racionales?
2. ¿Existen funciones racionales que son polinómicas?

PARA TRABAJO AUTÓNOMO

1. Escribir dos ejemplos cualesquiera de cada tipo de funciones algebraicas
2. Para el siguiente par de funciones, encuentre analíticamente los dominios y recorridos

   $f(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$

3. Utilizando un graficador, grafique las funciones del ejercicio anterior
4. Calcule f.g y g/f con las funciones del ejercicio 2
5. Grafique las funciones encontradas en el ejercicio anterior

1.6. TIPOS DE FUNCIONES

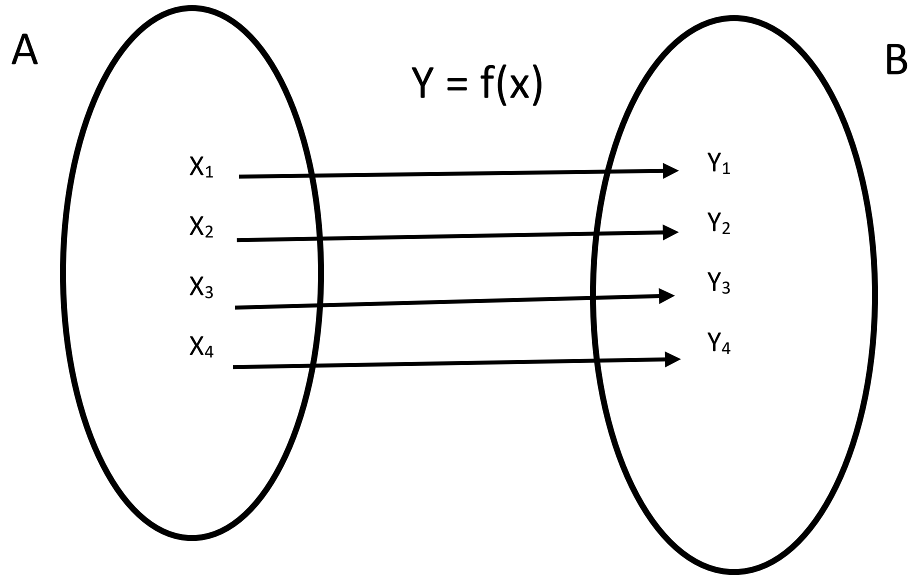
Existen funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Definición de función inyectiva.

Se dice que una función, f, es inyectiva si a elementos diferentes del conjunto de salida A le corresponden imágenes diferentes del conjunto de llegada B. Es decir,

$\forall x_1, x_2 \in A, con\ x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$

A las funciones inyectivas también se las conoce como funciones de uno en uno.



Observación. Gráficamente se puede determinar si una función es inyectiva si al trazar cualquier recta horizontal, ésta corta a la curva en un solo punto.

Definición de función sobreyectiva.

Se dice que una función, f, es sobreyectiva si para todos los elementos del conjunto de llegada B, existen los x elementos de A tal que f(x) = y. Es decir, R_f = B

Nota: Para demostrar que una función es sobreyectiva, necesariamente tiene que venir descrito el conjunto B. Si éste no es el caso se considera que el conjunto de llegada B es el recorrido; y de esta manera la función siempre será sobreyectiva.

Definición de función biyectiva.

Una función f, es biyectiva si a la vez es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplos

1. Sea la función f que va de los reales como conjunto de salida a los reales como conjunto de llegada, donde y = f(x) = x^2-1. Demostrar que f(x) no es inyectiva, no es sobreyectiva y no es biyectiva.

Resolución

Primero obtenemos el dominio y recorrido de la función

$D_f = \mathbb{R}$ $(por\ ser\ polinómica)$

$\forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 1 \geq -1 \rightarrow y \geq -1$

$$R_f = [-1, \infty[$$

P.D. que f es inyectiva:

$$P.D. Si\ \ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ con\ x_1 \neq\ x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Con un ejemplo mostramos que no cumple:

Sean x_1 = -2 y x_2 = 2, entonces $x_1 \neq x_2 \quad \longrightarrow \quad (-2)^2 - 1 = (2)^2 - 1 \quad \longrightarrow \quad 3 = 3$

Por lo que f(x) no es inyectiva (no cumple con la definición). LQQD

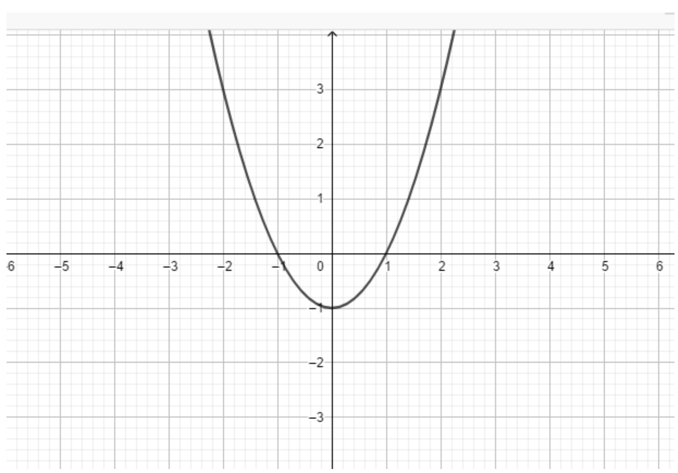
P.D. que f es sobreyectiva, es decir, $R_f = B$

El conjunto de llegada dado es $B = \mathbb{R}$, y en nuestro caso $R_f = [-1, \infty[\neq \mathbb{R}$ por lo que f(x) no es sobreyectiva.

Como no es inyectiva, ni tampoco sobreyectiva, entonces f(x) no es biyectiva.

NOTA: Es suficiente que f(x) no se inyectiva o no sea sobreyectiva para que no sea biyectiva.

También podemos demostrar que la función dada no es inyectiva, ni sobreyectiva, y por lo tanto no es biyectiva, graficando la función mediante cualquier graficador y analizando. A continuación, probamos lo dicho:

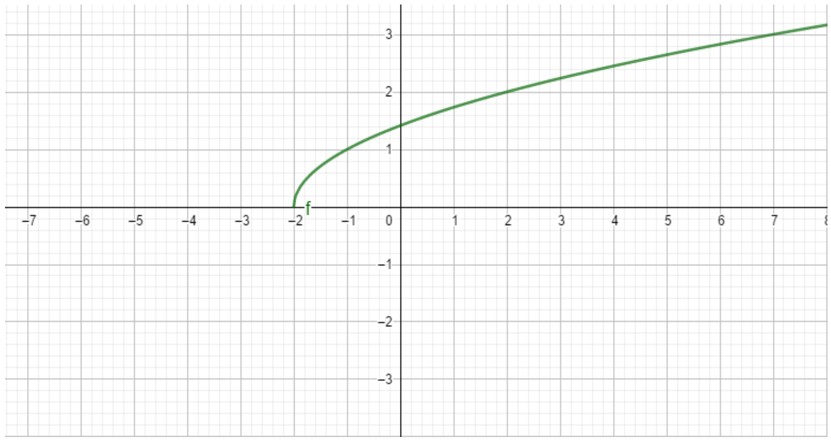


Si trazamos cualquier recta horizontal cortará al gráfico de la función en dos puntos, entonces f(x) no es inyectiva.

También vemos que el recorrido de f(x) no es todos los reales, por lo que no es sobreyectiva.

Concluyendo tampoco es biyectiva.

2. Demostrar qué tipo de función es $y = \sqrt{x+2}$ es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva



De gráfico podemos decir que cualquier recta horizontal corta a f(x) en un solo punto, por lo que es inyectiva.

Como no dan su conjunto de llegada, suponemos que B = R_f , entonces es sobreyectiva.

Al ser inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar si las funciones dadas son: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

a. $y = \frac{x-2}{x^2-4}$
b. $y = \sqrt{x^2 - x - 2}\,; A = \mathbb{R}\ y\ B = [0, \infty[$
c. $y = \frac{x^2+2}{x^2-9}\,; A = \mathbb{R}\ y\ B =]-\infty, -3]$
d. $y = \left|\frac{x+3}{x-3}\right|$