CLASE 6.1.

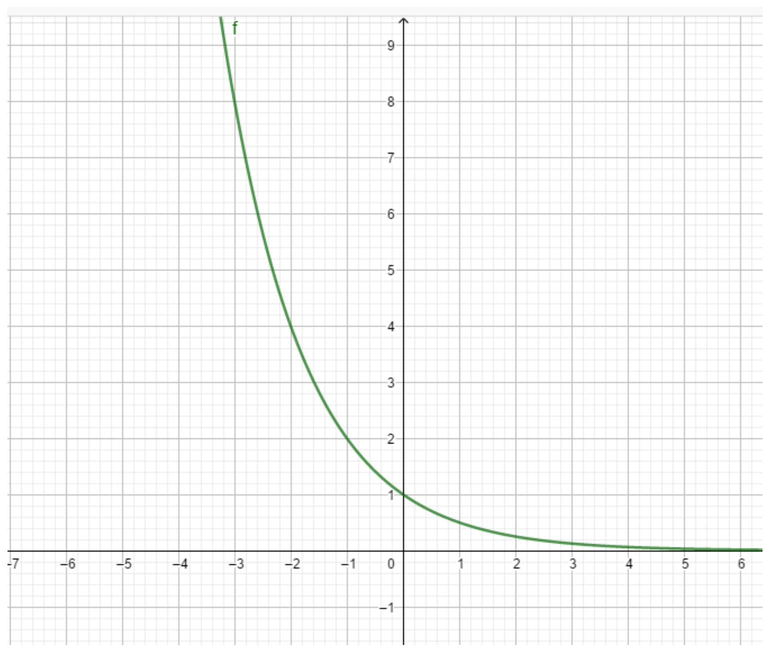
Funciones Exponenciales.

Una función exponencial, es aquella en la cual la variable independiente está en el exponente, y tiene la forma $y = a^x$, $con\ \ 0 < a < 1\ \ y\ a > 1,\ \ x \in \mathbb{R}$

Clasificación. Las funciones exponenciales se clasifican en base a los valores que puede tomar la base a.

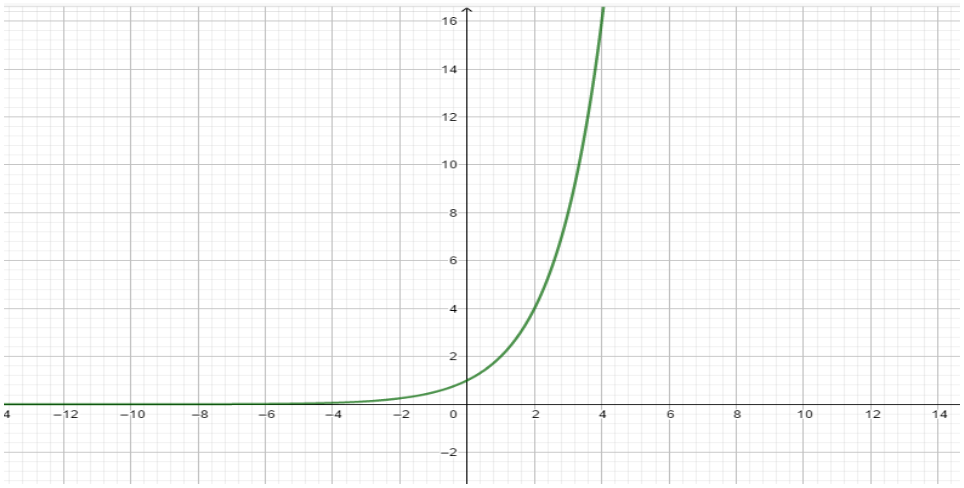
Base 0 < a < 1

- $x < 0\ \rightarrow y > 1$
- $x = 0\ \rightarrow y = 1$
- $x > 0\ \rightarrow 0 < y < 1$



Base a > 1

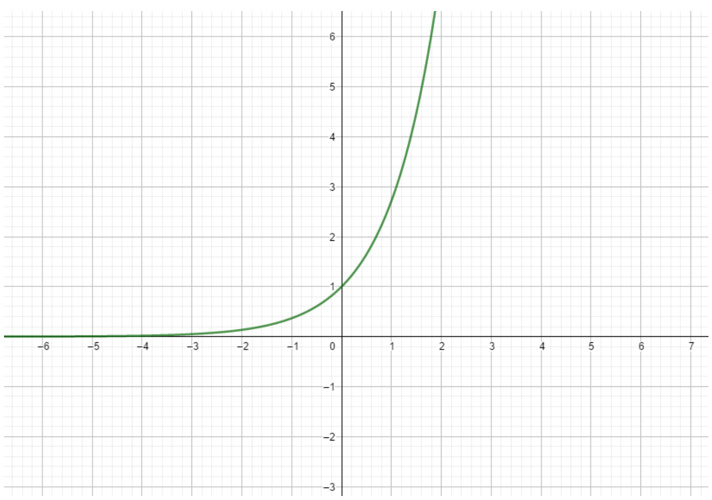
- $x < 0\ \rightarrow 0 < y < 1$
- $x = 0\ \rightarrow y = 1$
- $x > 0\ \rightarrow y > 1$



Ejemplos

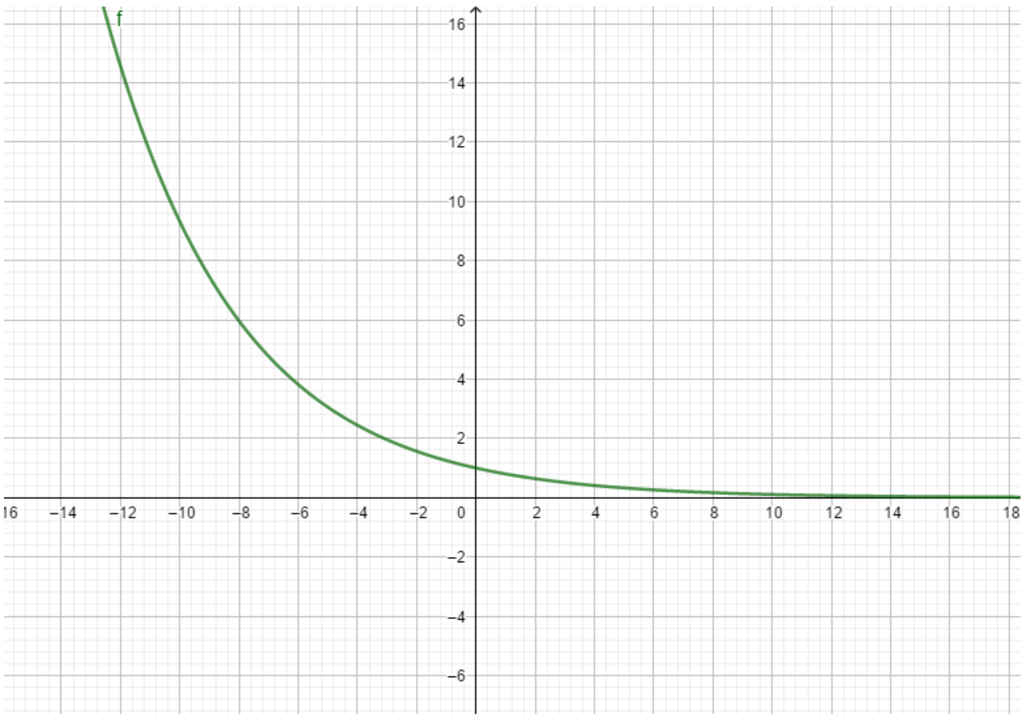
1. Determinar las características de la función exponencial $y = e^x$

Del siguiente gráfico podemos extraer las características



- $D_f = \mathbb{R} \;\; y \;\; R_f =]0, \infty[$
- Es biyectiva, por lo que tiene inversa (lo encontraremos en el siguiente tema)
- No es par ni impar
- Es estrictamente creciente en todo su dominio

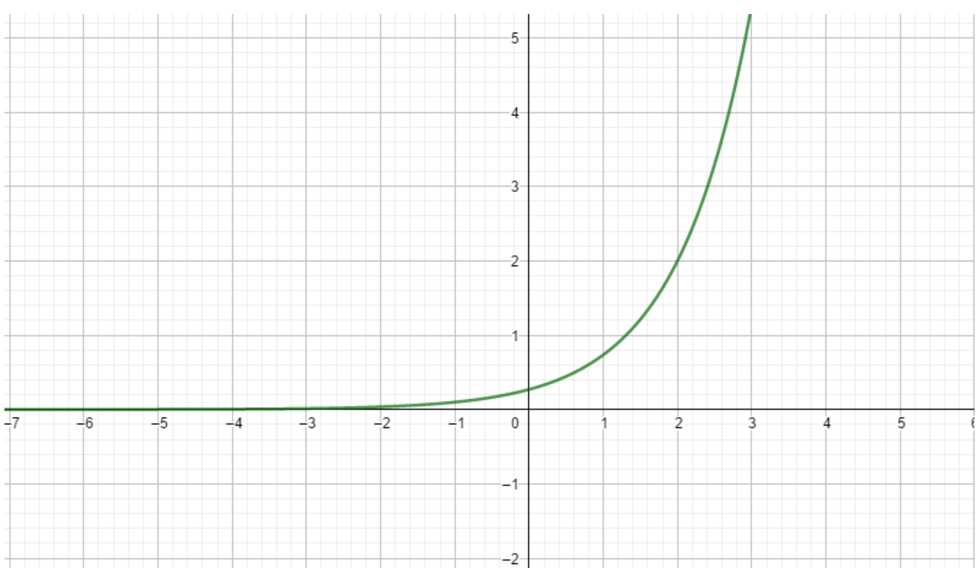
2. Determinar las características de la función $y = 0.8^x$



- $D_f = \mathbb{R}\ y\ R_f =]0, \infty[$
- Es biyectiva y por lo tanto tiene su inversa
- No es par ni impar
- Es estrictamente decreciente en todo su dominio

3. Determinar las características de la función $y = 2e^{x-2}$

Graficando



Las características son las mismas que de la función $y = e^x$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Graficar y encontrar las características de las siguientes funciones exponenciales:

a. $y = -0.5^x$
b. $y = 2 + 4^x$
c. $y = 1.5^{x+2} + 2$

Clase de ejercicios

Objetivo. Obtener las características de las siguientes funciones trascendentes directamente desde los gráficos.

a. $y = -2 + sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
b. $y = cos^{-1}(x)$
c. $y = e^{x^2}$
d. $y = -0.5^x$

TAREA: Actividad Colaborativa

Para las funciones f(x) = tg(x) e g(x) = 4^x-2 determine:

a. Grafique las dos funciones
b. Dominio y recorrido
c. Diga si las funciones son biyectivas o no
d. Realice la composición g(f(x)) y encuentre su dominio
e. Obtenga la inversa de g(x)
f. Estudie la monotonía de f(x)
g. Estudie la paridad de las dos funciones

Clase 6.2

Funciones logarítmicas.

Son funciones de la forma:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \log_a(x)} \;\; ; \;\; con\ a\ llamada\ base\ del\ logaritmo\ y\ x\ el\ argumento.$$

La función inversa de una función exponencial del tipo $y = a^x$, es la función logarítmica, en otras palabras: $Si\ y = f(x) = a^x \iff x = \log_a(y)$, o lo que es lo mismo $f^{-1}(x) = \log_a x$

Clasificación de las funciones logarítmicas.

Debido a que son las inversas de las funciones exponenciales, la clasificación también depende de la base del logaritmo. Así:

Base 0 < a < 1

Ejemplos: $y = \log_{0.1} x$

$y = \log_{0.3} x$

$y = \log_{0.5} x$

$y = \log_{0.7}(x^2 - 2)$

Base a > 1

Ejemplos: $y = \log_{1.3} x$

$y = \log_2 x$

$y = \log_e x = \ln x\,; con\ e = 2.718281828 \dots \dots (llamado\ número\ de\ Euler)$

$y = \log_5 x^3$

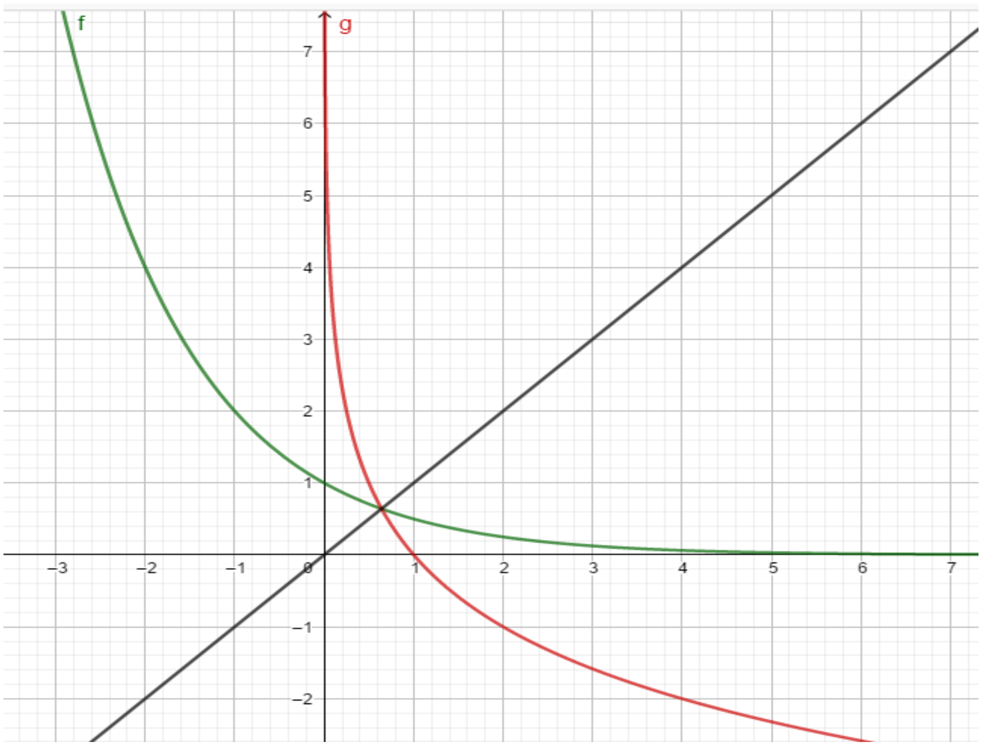
$y = \log_{10} x = \log x$

$y = \log_{30} x$

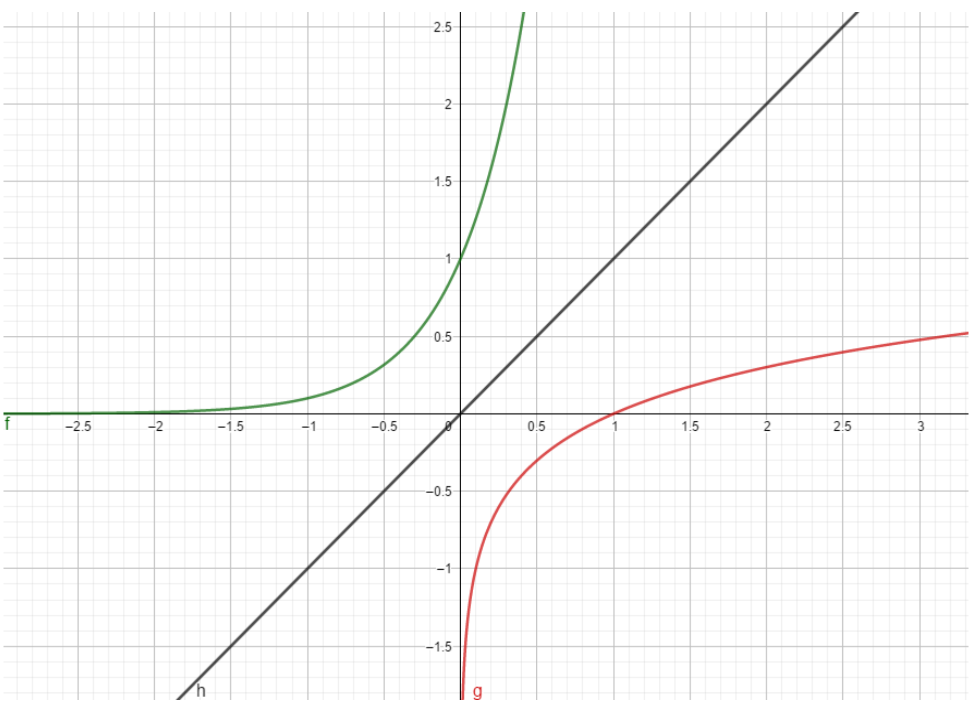
Cuando la base del logaritmo es e ($y = \ln x$) se conoce como logaritmo natural o Neperiano; en todos los otros casos se llama logaritmo vulgar o de Briggs.

La función logarítmica, al ser la inversa de la función exponencial será simétrica respecto de la función identidad como veremos en los siguientes gráficos.

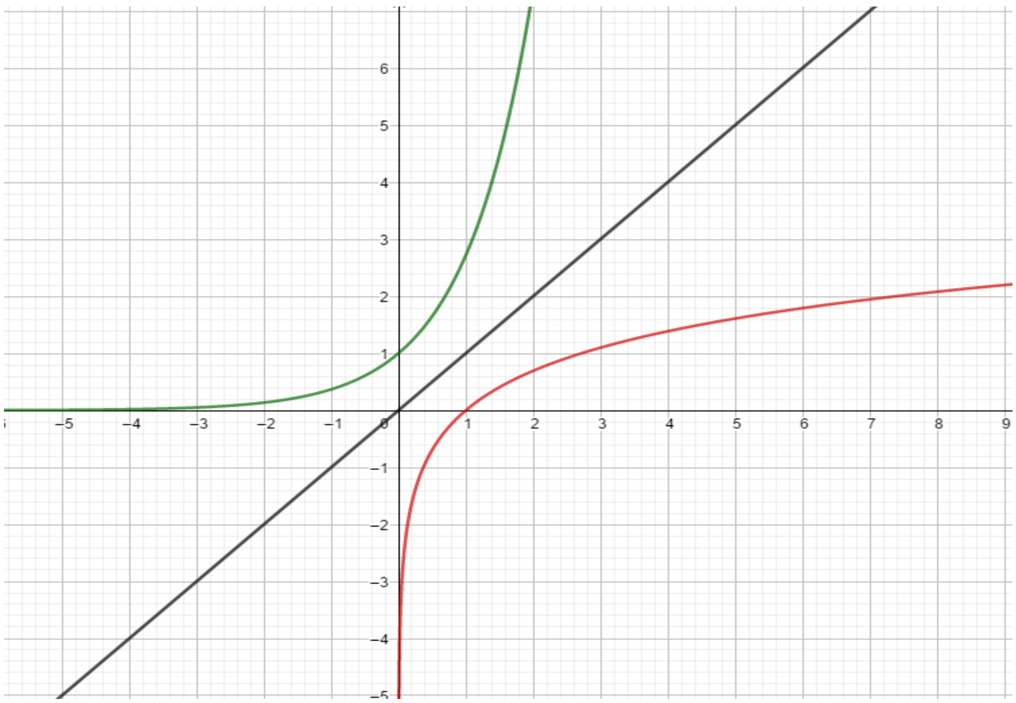
Funciones $f(x) = 0.5^x$ y $f^{-1}(x) = \log_{0.5} x$



Funciones $f(x) = 10^x \quad y \quad f^{-1}(x) = \log x$

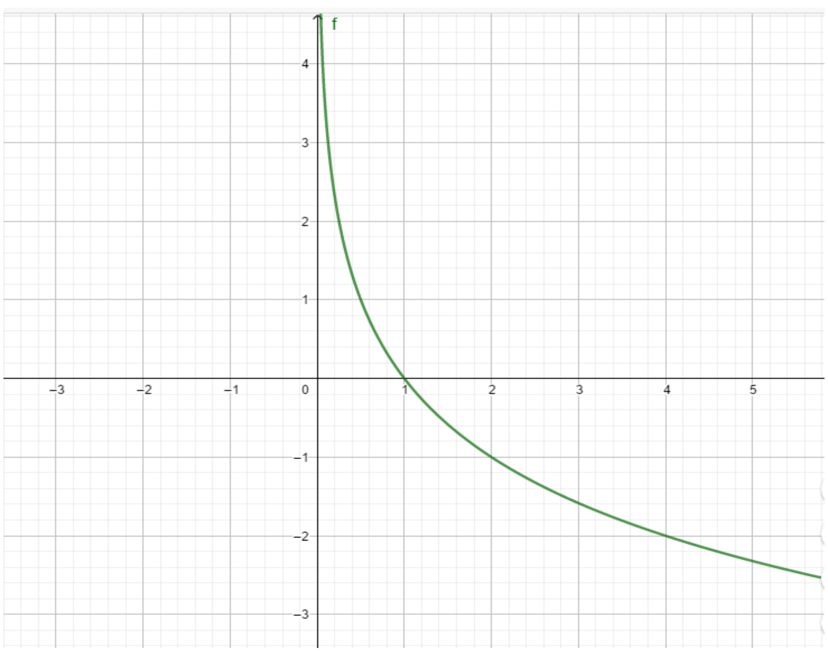


Funciones $f(x) = e^x \quad y \quad f^{-1}(x) = \ln x$

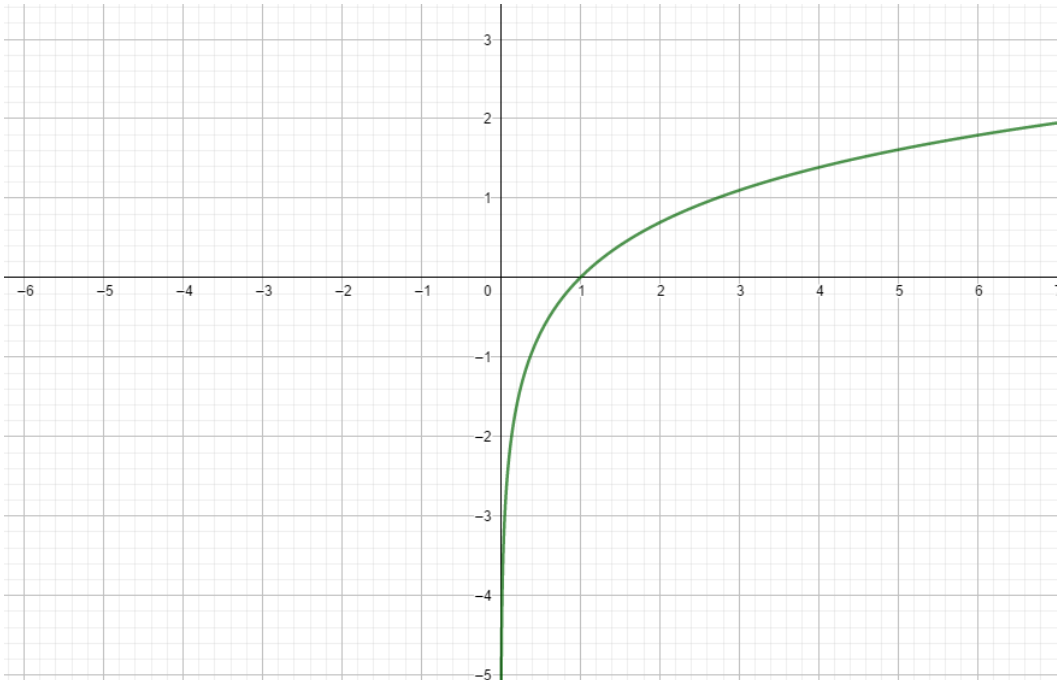


Por tanto, el gráfico de las funciones logarítmicas son las siguientes:

Base 0 < a < 1



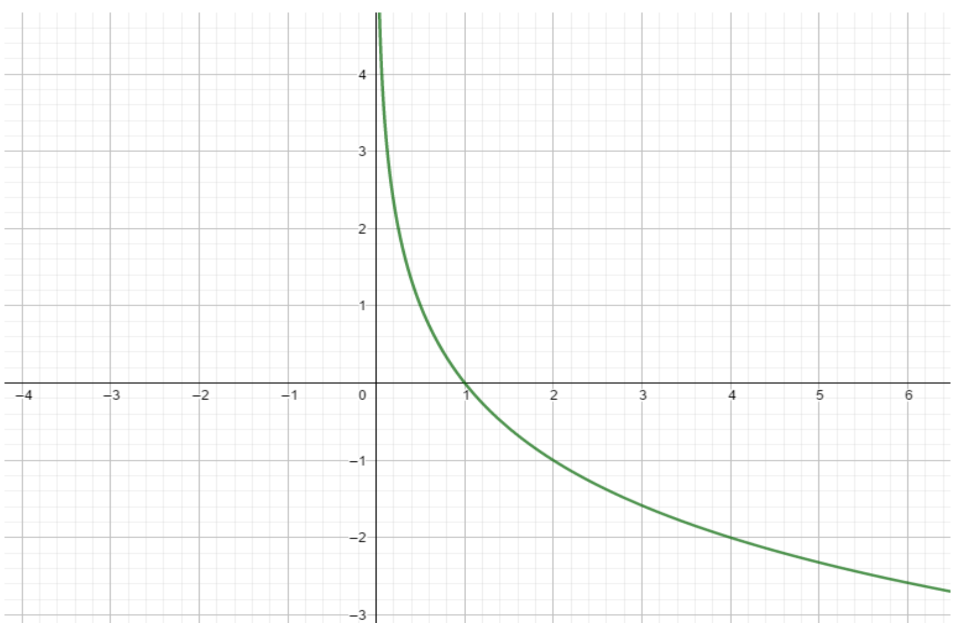
Base a > 1



Ejemplos

1. Determinar las características de la función logarítmica $y = \log_{0.7} x$

Graficamos la función



- $D_f =]0, \infty[\qquad R_f = \mathbb{R}$
- La función es biyectiva

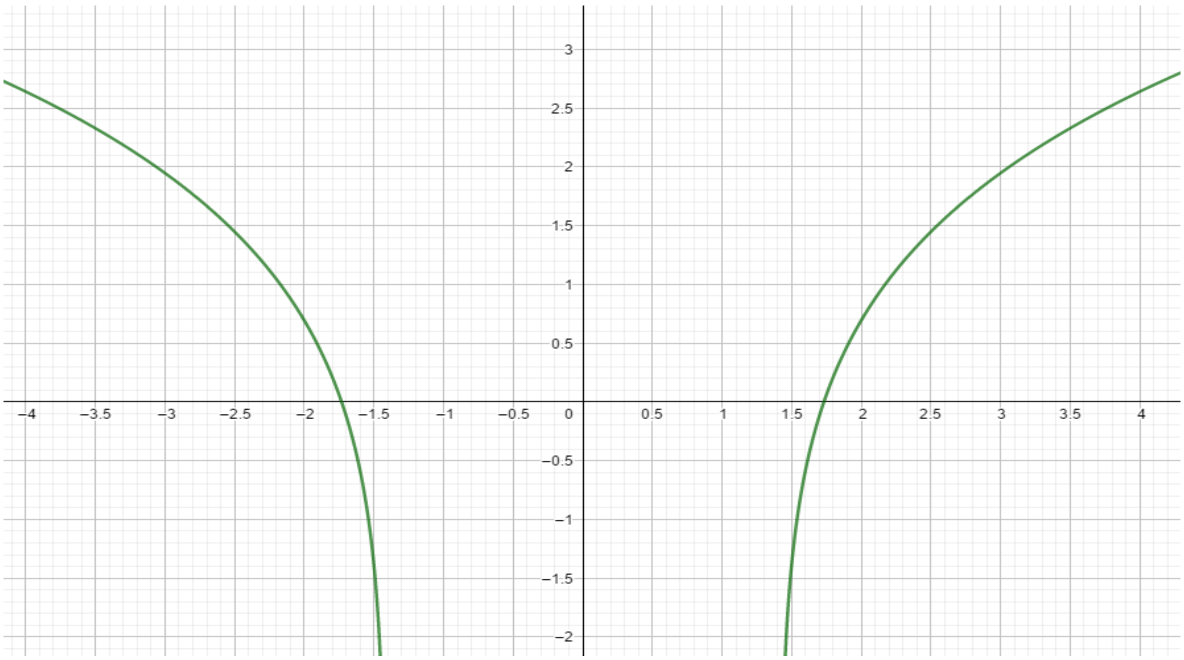
- La función no es par ni impar
- La función es estrictamente decreciente en todo su dominio

2. Determinar las características de la función $y = \ln(x^2 - 2)$

- Existe f(x) si $x^2 - 2 > 0$, lo que significa $x^2 > 2$, o $x > \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad x > \pm\sqrt{2} \quad \rightarrow -\sqrt{2} > x > \sqrt{2}$

Por tanto, su $D_f = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, \infty\right[\ y\ su\ R_f = \mathbb{R}$

Que es igual a lo que encontramos en el gráfico siguiente de la función dada.



- En este caso la función no es biyectiva (pues no es inyectiva)
- La función es par (es simétrica respecto del eje y)
- Es estrictamente decreciente en el intervalo $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[$
- Es estrictamente creciente en el intervalo $\left]\sqrt{2}, \infty\right[$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Graficar y obtener las características de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log_{0.3} x$
b. $f(x) = \log_{0.3}(x - 2)$
c. $f(x) = 5 \ln x$
d. $f(x) = x \log x$

Nota: Como en cualquier calculadora solo nos permite calcular los logaritmos cuyas bases son e y 10, si queremos obtener logaritmos en otras bases, tenemos que utilizar la siguiente fórmula para transformar logaritmos de bases desconocidas b, a logaritmos de bases conocidas a.

$$\boldsymbol{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}}$$

Clase de ejercicios

Objetivo. Determinar características de las siguientes funciones en general

a. $y = |x|$
b. $y = |x^3|$
c. $y = x^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
d. $y = \sqrt{x-4}\, e^x$
e. $y = \ln\sqrt{x-4}$