TRABAJO AUTÓNOMO

NOMBRE: Ariel Alejandro Calderón

CURSO: Software

1) Considere las sig. funciones $f(x) = x^2 - 2x - 1$ y $g(x) = x - 2|x|$ con $x \in \mathbb{R}$. Se define la función $h(x)$ en todo $\mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) < g(x) \end{cases}$$

a) Identifique y grafique la función h en el intervalo $[-6, 2]$

b) Decida si h es inyectiva en $[-6, 2]$. Justifique su respuesta.

c) Grafique $-h(x)$ en el intervalo $[-10, 10]$.

● Análisis de $g(x)$

* Por el valor absoluto, $g(x)$ puede "transformarse" en dos func. distintas dependiendo si x es posit. o negativa.

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \geq 0 \quad (1) \\ 3x & \text{si } x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

• $x \geq 0$

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$g(x) = -x$ (1)

* ¿Cuándo $f(x) \geq g(x)$? $\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 1 \geq -x$

$\boxed{x^2 - x - 1 \geq 0}$ (3)

* Desigualdad cuadrática

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

> La parábola $x^2 - x - 1$ es positiva fuera del intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

• $x < 0$

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

$g(x) = 3x$

* ¿Cuándo $f(x) \geq g(x)$? $\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 1 \geq 3x$

$x^2 - 5x - 1 \geq 0$

* Desigualdad cuadrática

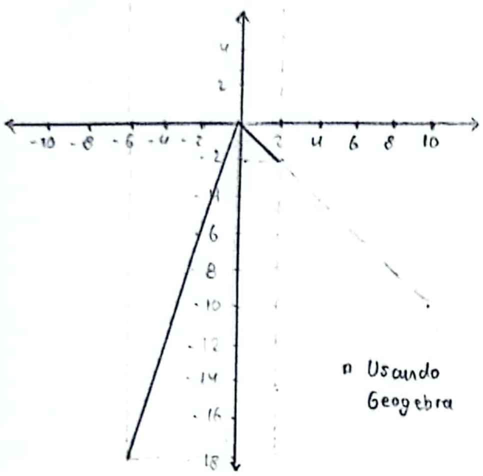
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$$

> La parábola $x^2 - 5x - 1$ es positiva fuera del intervalo $\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}, \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)$

• Se define $h(x)$ de la sig. forma:

- $x \geq 0 \rightarrow h(x) = f(x)$ si $x \in \left[0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ (I)
- $x < 0 \rightarrow h(x) = f(x)$ si $x \leq \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ (II)
- En cualquier otro caso, $g(x) = h(x)$ (III)

a) En $[-6, 2] \rightarrow h(x) = g(x)$ (III)



b) INYECTIVIDAD:

$$\boxed{\forall x \in D_f \; \forall y \in D_f \; (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)}$$

↳ Entonces si $g(x) = g(y)$, entonces $g(x)$ es inyectiva

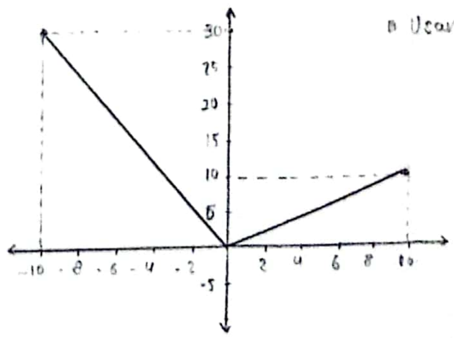
• $x \geq 0$ ✓ • $x < 0$ ✓ • $x > 0$ y $x < 0$ ✗

$(-x) = (-y)$ $\quad$ $3(x) = 3(y)$ $\quad$ $(-x) \neq 3(y)$

* Esto indica que hay un valor dentro del rango que puede ser alcanzado por dos valores dif. de dominio.

↳ Entonces la función NO es inyectiva cuando $h(x) = g(x)$

c) En $[-10, 10] \rightarrow -h(x) = -g(x)$ (III)



② Dadas las funciones $f(x) = [x-1]$ y $g(x) = x^2 - 3x - 2$, con dominio $\mathbb{R}$, donde $[\ ]$ es la función parte entera, Determine todos los $x \in \mathbb{R}$, tales que: $(f \circ g)(x) = 4$

* La notación $f(x) = [x-1]$ generalmente se refiere a la función parte entera, también conocida como la función suelo.

* ¿Cuando $f\circ g(x)$ es 4?

$$\boxed{(f \circ g)(x) = [x^2 - 3x - 3]}$$

$$\boxed{x^2 - 3x - 3 = 4} \Rightarrow x^2 - 3x - 3 - 4 = 0$$

① $x^2 - 3x - 7 = 0$ ← Ecuación cuadrática

① $$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 28}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

* Reemplazo los valores x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática en $(f\circ g)(x)$:

$$f\left(\frac{3+\sqrt{37}}{2}\right) = \left[\left(\frac{3+\sqrt{37}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3+\sqrt{37}}{2}\right) - 3\right] = 4$$

$$f\left(\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right) = \left[\left(\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right) - 3\right] = 4$$

* Estos son los valores de $x \in \mathbb{R}$ que son: $(f\circ g)(x) = 4$

③ Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ con dominio $\mathbb{R} - \{1\}$

a) Determine recorrido de f y de g

b) Demuestre que f y g son ambas inyectivas

c) Calcule $f^{-1} \circ g^{-1}(x)$

a) Usando el graficador en Geogebra, podemos visualizar que:

$$\begin{cases} R_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ R_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

b) INYECTIVIDAD

$f(x)$

$f(a) = f(b)$

$$\frac{a}{a-1} = \frac{b}{b-1}$$

$a(b-1) = b(a-1)$

$ab - a = ba - b$

$\boxed{-a = -b}$

$g(x)$

$g(a) = g(b)$

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{b-1}$$

$b - 1 = a - 1$

$\boxed{b = a}$

c) $f^{-1} \circ g^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)$

$$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$$

$y = x(y-1)$

$y = xy - x$

$-x = y - xy$

$-x = y(1-x)$

$$\boxed{y = \frac{-x}{1-x}}$$

$g^{-1}(x)$

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1}{y-1}$$

$x(y-1) = 1$

$xy - x = 1$

$xy = x + 1$

$$\boxed{y = \frac{x+1}{x}}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = \frac{-\left(\frac{x+1}{x}\right)}{1-x} = \boxed{\frac{-x-1}{-x^2+x}}$$

CS CamScanner