1. **Compruebe que** $y_1 = \sin x$ **y** $y_2 = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ **son soluciones de** $y'' + y = 0$**:**

   Primero, verificamos para $y_1 = \sin x$:

   $$y_1' = \cos x \quad \text{y} \quad y_1'' = -\sin x$$

   Sustituyendo en la ecuación $y'' + y = 0$:

   $$y_1'' + y_1 = -\sin x + \sin x = 0 \quad \checkmark$$

   Ahora, para $y_2 = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$:

   $$y_2 = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos x$$

   $$y_2' = -2\sin x \quad \text{y} \quad y_2'' = -2\cos x$$

   $$y_2'' + y_2 = -2\cos x + 2\cos x = 0 \quad \checkmark$$

2. **Resolver por integración directa la siguiente ecuación diferencial:** $y''' - 5x = 0$**:**

   La ecuación dada es: $y''' - 5x = 0$

   1. Integramos una vez:

   $$y'' = \int 5x\, dx = \frac{5x^2}{2} + C_1$$

   2. Integramos de nuevo:

   $$y' = \int \left(\frac{5x^2}{2} + C_1\right) dx = \frac{5x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

   3. Una vez más:

   $$y = \int \left(\frac{5x^3}{6} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{5x^4}{24} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

   Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

3. **Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, encontrar la corriente** i **cuando** $t = 10$ **segundos que circula por el circuito resistivo inductivo de la figura.**

   Condición inicial: $i(0) = 15$ **Amp.**

   $V_S = 110$ Voltios
   $R = 10\Omega$
   $L = 5$Henrios
   $V_R = iR$
   $V_L = L\dfrac{di}{dt}$

Aplicamos la Ley de Voltajes de Kirchhoff al circuito:

$$V_s = V_R + V_L$$

Donde:

$$V_R = iR \quad \text{y} \quad V_L = L\frac{di}{dt}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$110 = 10i + 5\frac{di}{dt}$$

Reordenamos la ecuación diferencial:

$$\frac{di}{dt} + 2i = 22$$

Resolvemos la homogénea: $\frac{di_h}{dt} + 2i_h = 0$

$$i_h(t) = Ce^{-2t}$$

Buscamos una solución particular i_p: Suponemos $i_p = k$ (constante):

$$2k = 22 \quad \Rightarrow \quad k = 11$$

Solución general:

$$i(t) = i_h + i_p = Ce^{-2t} + 11$$

Usamos la condición inicial $i(0) = 15$:

$$15 = C + 11 \quad \Rightarrow \quad C = 4$$

Así que:

$$i(t) = 4e^{-2t} + 11$$

Calculamos $i(10)$:

$$i(10) = 4e^{-20} + 11 \approx 11 \quad (\text{ya que } e^{-20} \approx 0)$$

Por lo tanto, la corriente en $t = 10$ s es aproximadamente 11 A.

4. **Resuelva por dos métodos la ecuación diferencial: $y' = x + y + 1$:**

La ecuación diferencial dada es:

$$y' = x + y + 1$$

Método 1: Factor integrante Reescribimos:

$$y' - y = x + 1$$

El factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

Multiplicamos la ecuación por e^{-x}:

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = (x+1)e^{-x}$$

La izquierda es la derivada de $(e^{-x}y)$:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = (x+1)e^{-x}$$

Integramos ambos lados:

$$e^{-x}y = \int (x+1)e^{-x}\,dx$$

Usando integración por partes, obtenemos:

$$e^{-x}y = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Multiplicamos por e^{x}:

$$y = -x - 1 + Ce^{x}$$

Método 2: Ecuación diferencial lineal con sustitución Sea $v = y + x + 1 \Rightarrow v' = y' + 1$: Sustituyendo en la ecuación:

$$v' - 1 = x + (v - x - 1) + 1 \quad \Rightarrow \quad v' = v$$

La solución de $v' = v$ es:

$$v = Ce^{x}$$

Volvemos a y:

$$y + x + 1 = Ce^{x} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{x} - x - 1$$

Conclusión: Ambos métodos dan la misma solución general:

$$\boxed{y = Ce^{x} - x - 1}$$