Clase 6.1

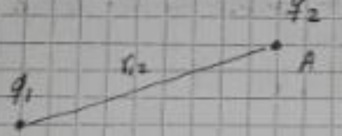
ENERGIA POTENCIAL ELECTROSTATICA

Es la energía en un campo electrostático.
La energía electrostática es numéricamente igual al trabajo necesario para tener una configuración dada de cargas.
Como el potencial está definido por: $V_A = \frac{Trabajo}{q} = \frac{W}{q}$

entonces el trabajo W (o energía potencial) será:

$$W = \boxed{U = q_2 V_A}$$

Siendo U la energía potencial electrostática
q_2 la carga ubicada en el punto A donde existe un campo eléctrico producido por otra carga q_1 previamente ubicada.
V_A potencial electrostático en el pto. A producido por q_1

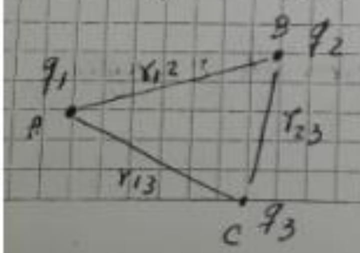


$$U = q_2 V_A$$

$$U = q_2 \frac{K q_1}{r_{12}} = \frac{K q_1 q_2}{r_{12}}$$

es la energía electrostática necesaria para tener la configuración dada de dos cargas.

Si queremos tener una configuración de tres cargas como en la siguiente figura



Se supone que primero ubico la carga q_1 en A; para ello no necesito hacer trabajo porque no hay ninguna carga que produzca potencial, entonces $U_1 = 0$

Luego ubico la q_2 en B, donde ya hay un potencial producido por la carga q_1; entonces

$$U_2 = q_2 V_1 \quad ; \quad V_1 \text{ potencial en B producido por } q_1$$

$$\therefore \ U_2 = q_2 \frac{k q_1}{r_{12}}$$

ahora si quiero añadir la carga q_3 en C, la energía necesaria será la suma

$$U_3 = q_3 V_1 + q_3 V_2$$

donde: V_1 es potencial producido por q_1 en C, y
V_2 es potencial producido por q_2 en C

Por tanto para tener la configuración de tres cargas como en la figura anterior necesitamos una energía total de

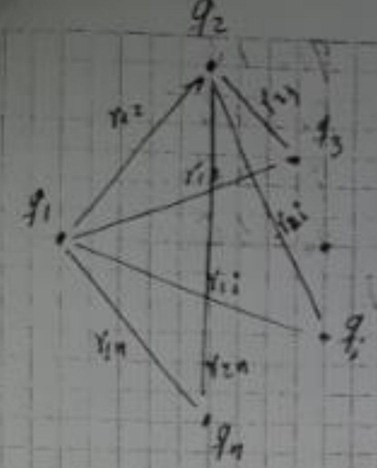
$$U_T = \overset{0}{\cancel{U_1}} + U_2 + U_3$$

$$U_T = q_2 V_1 + q_3 V_1 + q_3 V_2$$

$$U_T = q_2 \frac{k q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{k q_1}{r_{13}} + q_3 \frac{k q_2}{r_{23}}$$

$$\boxed{U_T = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k q_2 q_3}{r_{23}}}$$

Ahora para tener una configuración de n cargas

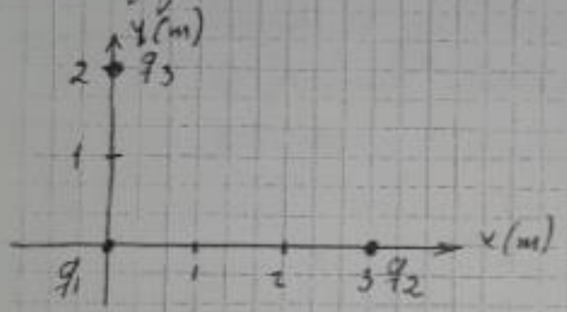


$$\boxed{U_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{k\, q_i\, q_j}{r_{ij}}}$$

para $i \neq j$

Ejemplos:

1.- Calcular la energía potencial gastada para tener una configuración como el de la figura



$q_1 = 1C$

$q_2 = -2C$

$q_3 = 3C$

$$U = U_2 + U_3$$

$$U = q_2 \frac{k\, q_1}{r_{12}} + \frac{q_3 k\, q_1}{r_{13}} + \frac{q_3 k\, q_2}{r_{23}}$$

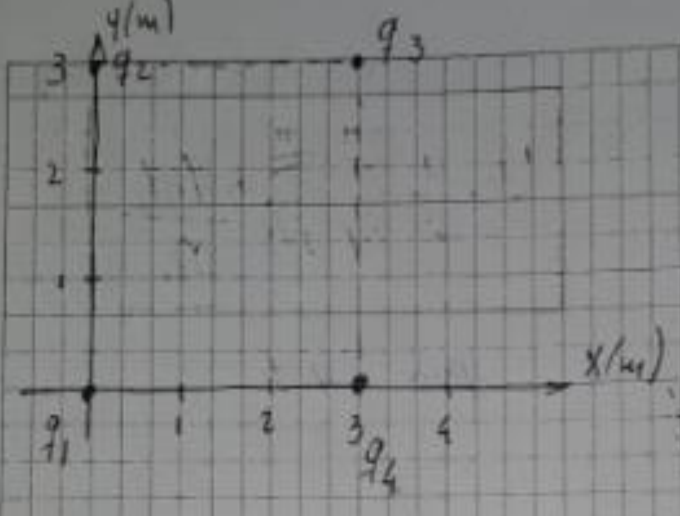
$r_{12} = 3\,m$

$r_{13} = 2\,m$

$r_{23} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6$

$$U = \frac{9\times10^9 \times 1 \times (-2)}{3} + \frac{9\times10^9 \times 1 \times (3)}{2} + \frac{9\times10^9 \times (-2)(3)}{3{,}6} = -7{,}5\times10^9\,J$$

2.- Calcular la energía potencial eléctrica del sistema de la figura



$q_1 = 1C$

$q_2 = 2C$

$q_3 = 3C$

$q_4 = 4C$

3.- Calcular la energía potencial necesaria para tener cargas de $q_1 = q_2 = q_3 = 2C$ ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado 1m. dentro de una cubeta con agua; $\varepsilon_{H_2O} = 81\varepsilon_0$.

Si tengo una distribución continua de cargas las Σ se convierten en $\int$

Ejemplos

1.- Calcular la energía que posee un cascarón esférico de carga Q

$dU = dq\,V_{(q)}$ debido a una carga q que ya llevé

$dU = \frac{kq}{a}\,dq \rightarrow U = \int_0^Q \frac{kq\,dq}{a} = \frac{kQ^2}{2a}$

2.- Calcular la energía de una esfera cargada de radio r

$dU = dQ_r \, V(Q_r)$; Q_r carga en la esfera ya llevada

$$dU = k\frac{Q_r}{r}\,dQ_r$$

$$Q_r = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \longrightarrow dQ_r = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$dU = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \rho 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho^2 4\pi r^4}{3\epsilon_0}dr$$

$$U = \int_0^a \frac{\rho^2 4\pi r^4 dr}{3\epsilon_0} = \frac{\rho^2 4\pi r^5}{15\epsilon_0}\Bigg|_0^a = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

como $\rho = \frac{Q_T}{\frac{4}{3}\pi a^3} \longrightarrow U = \frac{4\pi Q_T^2}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)^2}\frac{a^5}{15\epsilon_0} = \frac{3\,Q_T^2}{4\pi a\, 5\epsilon_0}$ //

Ahora la energía que mantiene unido al átomo de Uranio, siendo aproximadamente

$Q = 92\,e$
radio $a = 10^{-14}$ m } Considere una distribución continua de carga.

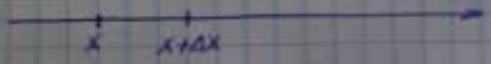
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular la energía necesaria para ubicar cargas de 10 C en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen de longitud 3m y 4m respectivamente y están dentro de un tanque con aceite. Permitividad relativa del aceite = 4
2. Calcular la energía de un alambre cargado con carga Q y de longitud 2m.

Clase 6.2

RELACION ENTRE POTENCIAL Y CAMPO ELECTRICO

Considerando dos puntos muy cercanos, y por facilidad solo en el eje x



El trabajo para mover una partícula de x a x+Δx

$$\Delta W = V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

si ÷ para Δx

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\longrightarrow \Delta W = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \quad *$$

Por "otro lado" $\Delta W = -\int_{x}^{x+\Delta x} \vec{E} \cdot d\vec{x} = -E_x \Delta x \quad **$

igualando las expresiones anteriores

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}}$$

igual para $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ y $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}}$$

si $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ llamado operador Nabla (en coordenadas rectangulares)

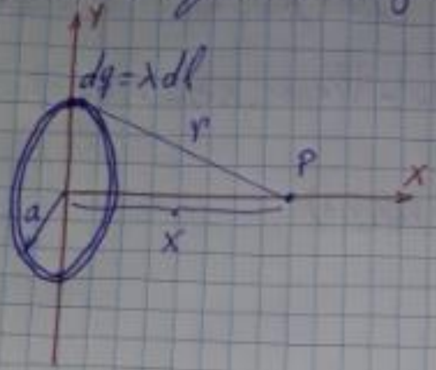
$$\vec{E} = -\nabla V = -\operatorname{grad} V$$

También $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$

Nabla en coordenadas esféricas.

Ejemplos

1.- Calcular el potencial y campo eléctrico en el punto P debido a un anillo de radio a con distribución lineal uniforme de carga λ



$$dV=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow V(P)=\int\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V(P)=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda a\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_0^{2\pi}$$

$$V(P)=\frac{\lambda a 2\pi}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 r}$$

$$V(P)=\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ahora $$\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{1/2}}\right)\vec{i}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{1/2}}\right)\vec{j}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{1/2}}\right)\vec{k}$$

$$\vec{E}=-\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left[\frac{0-\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{x^2+a^2}\right]\vec{i}-0\vec{j}-0\vec{k}$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}=\frac{\lambda a x}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}} \rightarrow E_x\vec{i}=\frac{\lambda a x}{2\varepsilon_0 r^{3/2}}\vec{i}$$

2.- Calcular el campo eléctrico de un dipolo

- Según ejercicio anterior (del dipolo)

$$V(x,y)=\frac{Py}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{E_x}\vec{i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{E_y}\vec{j} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{E_z}\vec{k}$$

$$E_x = \frac{-Py}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{0 - \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right] = \frac{3Pyx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{-P}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x^2+y^2)^{3/2} - y\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{1/2}\cancel{2}y}{(x^2+y^2)^3}\right]$$

$$E_y = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3Py^2}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{-P}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}\left(1 - \frac{3y^2}{(x^2+y^2)}\right)$$

$E_z = 0$ (porque V no depende de z, es en el plano $x-y$)

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{3Pyx}{4\pi\varepsilon_0 r^{5/2}}\vec{i} - \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 - \frac{3y^2}{r^2}\right)\vec{j} \quad //$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Calcular el campo eléctrico debido a una carga puntual q que se encuentra en el origen de coordenadas, a una distancia r.**
2. **Calcular el potencial y el campo de un alambre infinito cargado con densidad uniforme λ a una distancia a del alambre.**

Clase 6.3. PAE

Objetivo 1. Determinar la energía electrostática de ciertas configuraciones de carga en ejercicios.

1. Calcular la energía necesaria para tener cargas de 5 uC en los vértices de un cubo de arista 0.3m
2. El electrón-voltio (eV) es la unidad de energía más comúnmente utilizada en física de partículas elementales, y se define como la energía que alcanza un electrón bajo una diferencia de potencial de 1 V. (a) Halle la relación entre Joule y el eV.
3. ¿Qué velocidad tendrá un electrón cuya energía sea de 1 eV.

Objetivo 2. Determinar el campo eléctrico en un punto dado donde se conoce el potencial electrostático.

1. En una región del espacio existe un campo electrostático en el cual el potencial cumple la ley, $V(x) = \frac{Cx^2}{2} + V_0$

¿Cuál será la expresión del vector intensidad de dicho campo en el punto x = 1?

Tarea:

Actividad Colaborativa AC 1.3

1. Respecto a un sistema de coordenadas X-Y se han colocado partículas idénticas con carga 10^{-8} C en los puntos (0,0), (0,4), y (2,4). Considere los ejes calibrados en cm.
   a. Determine el trabajo para construir esta configuración
   b. Determine la diferencia de potencial entre los puntos (2,2) y (4,4)
2. En una región del espacio, el potencial electrostático viene dado por:
   $V(x, y, z) = K(x^2 + y^2 + z^2) + V_0 \;, con\; K = constante$
   a. Halle el vector campo en el punto (3,3,3)
   b. Halle el flujo del vector campo eléctrico a través de una superficie cerrada esférica con centro en el origen y de radio a. Interprete su respuesta.