1. Determine los valores de m para los cuales las ecuaciones diferenciales dadas tienen una solución de la forma $y = e^{mx}$:
   (a) $y'' + 10y' + 25y = 0$
   (b) $y'' + 5y' + 25y = 0$

Solución

(a) Consideramos la ecuación característica asociada:

$$m^2 + 10m + 25 = 0.$$

Factorizando,

$$(m+5)^2 = 0 \Rightarrow m = -5.$$

(b) La ecuación característica es:

$$m^2 + 5m + 25 = 0.$$

Resolviendo con la fórmula cuadrática:

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 100}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-75}}{2} = \frac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{2}.$$

2. Resuelva la ecuación diferencial:

$$y' + 3(y-1) = 2x$$

con $y(0) = 4$.

Solución

La ecuación diferencial es:

$$y' + 3(y-1) = 2x.$$

Reescribiéndola en la forma estándar:

$$y' - 3y = 2x - 3.$$

Este es un caso de ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución general es:

$$y(x) = e^{\int -3dx} \left(\int (2x-3)e^{\int 3dx} dx + C \right).$$

Calculando el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{-3x}.$$

Multiplicando la ecuación por $\mu(x)$:

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = (2x-3)e^{-3x}.$$

Observamos que el lado izquierdo es la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right) = (2x-3)e^{-3x}.$$

Integramos ambos lados:

$$e^{-3x}y = \int (2x-3)e^{-3x}dx.$$

Resolviendo la integral por partes:

$$\int 2xe^{-3x}dx = -\frac{2x}{3}e^{-3x} + \frac{2}{9}e^{-3x},$$

$$\int -3e^{-3x}dx = e^{-3x}.$$

Por lo tanto:

$$e^{-3x}y = -\frac{2x}{3}e^{-3x} + \frac{2}{9}e^{-3x} + e^{-3x}C.$$

Multiplicando por e^{3x}:

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{2}{9} + Ce^{3x}.$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 4$:

$$4 = -\frac{2(0)}{3} + \frac{2}{9} + Ce^{0}.$$

$$4 = \frac{2}{9} + C.$$

$$C = \frac{36}{9} - \frac{2}{9} = \frac{34}{9}.$$

La solución final es:

$$y(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{2}{9} + \frac{34}{9}e^{3x}.$$

3. Resuelva la ecuación diferencial de primer orden:

$$x^2 + \sin x - (y^2 - \cos y)y' = 0$$

Solución

La ecuación diferencial dada es:

$$x^2 + \sin x - (y^2 - \cos y)y' = 0.$$

Reescribiéndola en la forma estándar:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

donde:

$$M(x, y) = x^2 + \sin x, \quad N(x, y) = -(y^2 - \cos y).$$

Verificamos la condición de exactitud, calculando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación es exacta.

Ahora encontramos la función potencial $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = x^2 + \sin x.$$

Integramos con respecto a x:

$$F(x, y) = \int (x^2 + \sin x)dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + g(y).$$

Ahora usamos la ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = -(y^2 - \cos y).$$

Derivamos $F(x, y)$ respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - \cos x + g(y)\right) = g'(y).$$

Igualando con $N(x, y)$:

$$g'(y) = -(y^2 - \cos y).$$

Integrando con respecto a y:

$$g(y) = -\frac{y^3}{3} + y \sin y + C.$$

Por lo tanto, la solución implícita de la ecuación diferencial es:

$$\frac{x^3}{3} - \cos x - \frac{y^3}{3} + y \sin y = C.$$

4. Resuelva la ecuación diferencial:

$$y' - \frac{3y}{x} = \frac{1}{y^3}, \quad y(1) = 1$$

Solución

La ecuación diferencial dada es:

$$y' - \frac{3y}{x} = \frac{1}{y^3}, \quad y(1) = 1.$$

Reescribiéndola en la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} + \frac{1}{y^3}.$$

Observamos que es una ecuación de variables separables. Reescribimos:

$$y^3 dy = (3yx + 1)\,\frac{dx}{x}.$$

Separando términos:

$$y^3 dy = \frac{dx}{x} + 3y\,dx.$$

Sin embargo, reorganizando mejor:

$$(y^3 - 3y)dy = \frac{dx}{x}.$$

Factorizamos el lado izquierdo:

$$y(y^2 - 3)dy = \frac{dx}{x}.$$

Ahora integramos ambos lados:

$$\int \frac{y(y^2 - 3)}{1} dy = \int \frac{dx}{x}.$$

Para el lado izquierdo, expandimos la integral:

$$\int y^3 dy - 3\int y dy.$$

Resolvemos:

$$\frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} = \ln|x| + C.$$

Aplicamos la condición inicial $y(1) = 1$:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \ln 1 + C.$$

Dado que $\ln 1 = 0$, tenemos:

$$C = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{5}{4}.$$

Por lo tanto, la solución implícita es:

$$\frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} = \ln|x| - \frac{5}{4}.$$

5. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por:
$$v(t) = \frac{1}{t^2+1}.$$
Asumiendo que inicialmente se encuentra en el origen, ¿en qué tiempo la partícula se ha desplazado 1m?

Solución

La ecuación diferencial dada es:
$$v(t) = \frac{1}{t^2+1}.$$
Sabemos que la velocidad $v(t)$ es la derivada de la posición $x(t)$ con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Por lo tanto, la ecuación es:
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2+1}.$$
Para encontrar la posición $x(t)$, integramos ambos lados:

$$x(t) = \int \frac{1}{t^2+1} dt.$$

La integral de $\frac{1}{t^2+1}$ es una función estándar:

$$x(t) = \tan^{-1}(t) + C.$$

Dado que la partícula comienza en el origen, tenemos la condición inicial $x(0) = 0$. Sustituyendo en la ecuación:
$$0 = \tan^{-1}(0) + C.$$
Sabemos que $\tan^{-1}(0) = 0$, por lo que:

$$C = 0.$$

Entonces, la posición $x(t)$ es:

$$x(t) = \tan^{-1}(t).$$

Ahora, queremos saber en qué tiempo la partícula se ha desplazado 1 metro, es decir, cuando $x(t) = 1$. Entonces, resolvemos:

$$1 = \tan^{-1}(t).$$

Despejamos t:

$$t = \tan(1).$$

Por lo tanto, el tiempo en el que la partícula se ha desplazado 1 metro es:

$$t = \tan(1) \approx 1.557.$$