EXAMEN DE RECUPERACIÓN (CÁLCULO 1)

1. Sean las funciones $f(x) = \ln(x+1)$ y $g(x) = x^2 - 5x + 6$:
   (a) Encontrar matemáticamente el dominio y recorrido de cada función.
   (b) Encontrar $\frac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio.
2. Determinar si la siguiente función es continua en $x = 1$ y en $x = 2$; además graficarla a mano.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

3. Determine las derivadas solicitadas en los siguientes literales:

Respuesta:

(a) La primera derivada de $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)$:

$$f(x) = \ln\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{3(x^2-1)}$$

(b) La segunda derivada de $f(x) = xe^x$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^x\right)$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{d}{dx}\left(e^x\right) + e^x \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^x + e^x\right)$$

$$f''(x) = x \cdot \frac{d}{dx}\left(e^x\right) + e^x \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2)$$

(c) La tercera derivada de $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$:

$$f(x) = (x-a)^{-n}$$

$$f'(x) = -n(x-a)^{-n-1} \cdot \frac{d}{dx}(x-a)$$

$$f'(x) = -n(x-a)^{-n-1}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-n(x-a)^{-n-1}\right)$$

$$f''(x) = -n(-n-1)(x-a)^{-n-2}$$

$$f''(x) = n(n+1)(x-a)^{-n-2}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(n(n+1)(x-a)^{-n-2}\right)$$

$$f'''(x) = n(n+1)(-n-2)(x-a)^{-n-3}$$

$$f'''(x) = -n(n+1)(n+2)(x-a)^{-n-3}$$

(d) La cuarta derivada de $f(x) = \ln x^2$:

$$f(x) = 2\ln x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$$

$$f''(x) = 2(-1)x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2}{x^2}\right)$$

$$f'''(x) = -2(-2)x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = 4(-3)x^{-4} = \frac{-12}{x^4}$$

4. Determine el ángulo que forma la curva $y = e^{0.5x}$ con la recta $x = 2$ en el punto de intersección.

Respuesta:

Para encontrar el ángulo que forma la curva $y = e^{0.5x}$ con la recta $x = 2$:

1. **Derivada de la función:**

$$y' = \frac{d}{dx}\left(e^{0.5x}\right)$$

$$y' = 0.5e^{0.5x}$$

$$y'(2) = 0.5e^{0.5\times 2} = 0.5e$$

2. **Cálculo del ángulo:**

$$\theta = \tan^{-1}(0.5e)$$