Prueba 1

1. Compruebe que $y_1 = \sin x$ y $y_2 = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ son soluciones de $y'' + y = 0$:

   Primero, verificamos para $y_1 = \sin x$:

$$y_1' = \cos x \quad \text{y} \quad y_1'' = -\sin x$$

   Sustituyendo en la ecuación $y'' + y = 0$:

$$y_1'' + y_1 = -\sin x + \sin x = 0 \quad \checkmark$$

   Ahora, para $y_2 = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$:

$$y_2 = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos x$$

$$y_2' = -2\sin x \quad \text{y} \quad y_2'' = -2\cos x$$

$$y_2'' + y_2 = -2\cos x + 2\cos x = 0 \quad \checkmark$$

2. Resolver por integración directa la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' - 5x = 0$$

   1. $$y'' = \int 5x\,dx = \frac{5x^2}{2} + C_1$$

   2. $$y' = \int \left(\frac{5x^2}{2} + C_1\right) dx = \frac{5x^3}{6} + C_1x + C_2$$

   3. $$y = \int \left(\frac{5x^3}{6} + C_1x + C_2\right) dx = \frac{5x^4}{24} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$$

   Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

3. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, encontrar la corriente i cuando $t = 10$ segundos que circula por el circuito resistivo inductivo de la figura. Condición inicial: $i(0) = 15$ Amp.

$$V_S = 110 \text{ Voltios}, \quad R = 10\Omega, \quad L = 5 \text{ Henrios}, \quad V_R = iR, \quad V_L = L\frac{di}{dt}$$

Aplicamos la Ley de Voltajes de Kirchhoff al circuito:

$$V_s = V_R + V_L$$

Donde:

$$V_R = iR \quad \text{y} \quad V_L = L\frac{di}{dt}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$110 = 10i + 5\frac{di}{dt}$$

Reordenamos la ecuación diferencial:

$$\frac{di}{dt} + 2i = 22$$

Resolvemos la homogénea: $\frac{di_h}{dt} + 2i_h = 0$

$$i_h(t) = Ce^{-2t}$$

Buscamos una solución particular i_p: Suponemos $i_p = k$ (constante):

$$2k = 22 \quad \Rightarrow \quad k = 11$$

Solución general:

$$i(t) = i_h + i_p = Ce^{-2t} + 11$$

Usamos la condición inicial $i(0) = 15$:

$$15 = C + 11 \quad \Rightarrow \quad C = 4$$

Así que:

$$i(t) = 4e^{-2t} + 11$$

Calculamos $i(10)$:

$$i(10) = 4e^{-20} + 11 \approx 11 \quad (\text{ya que } e^{-20} \approx 0)$$

Por lo tanto, la corriente en $t = 10$ s es aproximadamente 11 A.

4. Resuelva por dos métodos la ecuación diferencial: $y' = x + y + 1$:

Método 1: Factor integrante Reescribimos:

$$y' - y = x + 1 \implies \begin{cases} P(x) = -1 \\ R(x) = x + 1 \end{cases}$$

El factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}$$

Dada la forma de la ecuacion sabemos que:

$$y = \frac{1}{u(x)} \left(\int u(x) R(x)\, dx + C \right)$$

$$y = e^x \cdot \int (x+1) e^{-x}\, dx = e^x \cdot \left(\int x e^{-x}\, dx + \int e^{-x}\, dx \right)$$

Usando integración por partes, obtenemos:

$$\int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C$$

Entonces:

$$y = e^x \cdot (-x e^{-x} - 2e^{-x} + C)$$

$$\boxed{y = Ce^x - x - 2}$$

Método 2: Separacion de variables
Sea $v = y + x + 1$, sabemos que si $y' = f(ax + by + c)$, entonces:

$$\int \frac{dv}{b \cdot f(v) + a} = \int dx$$

$$\int \frac{dv}{v + 1} = x + C$$

$$\ln |v + 1| = x + C \implies v = e^{x+C} - 1$$

Volvemos a y:

$$y + x + 1 = e^{x+C} - 1 \implies \boxed{y = C_1 e^x - x - 2}, \quad C_1 = e^C$$