Clase 12.2

Límite algebraico fundamental

Conocemos con este nombre al: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Evaluando directamente da 1^{∞} que es indeterminado.

Haciendo el reemplazo $x=\frac{1}{t};\ si\ x\to 0 \ \Rightarrow\ t\to\infty$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e \quad \text{(por definición)}$$

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$

Reemplazando da 1^{∞}

Entonces: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}\frac{1}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right]^{\frac{1}{4}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right]^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}}$

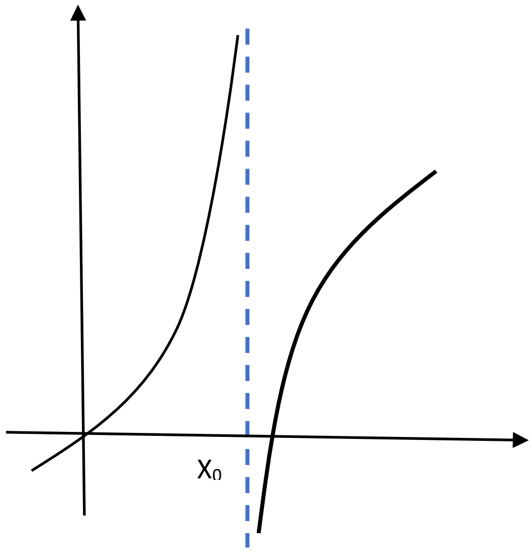
EJEMPLOS PROPUESTOS

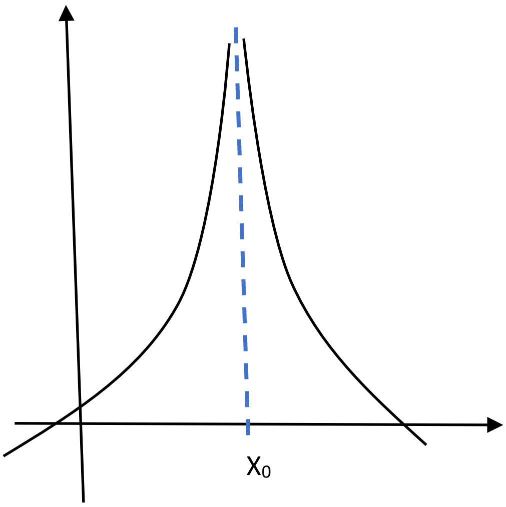
1. Encontrar los siguientes límites
   a. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$
   b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$
   c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$

Asíntotas verticales

Sea f(x) una función y x_0 un punto donde no existe $f(x_0)$, si se cumple que

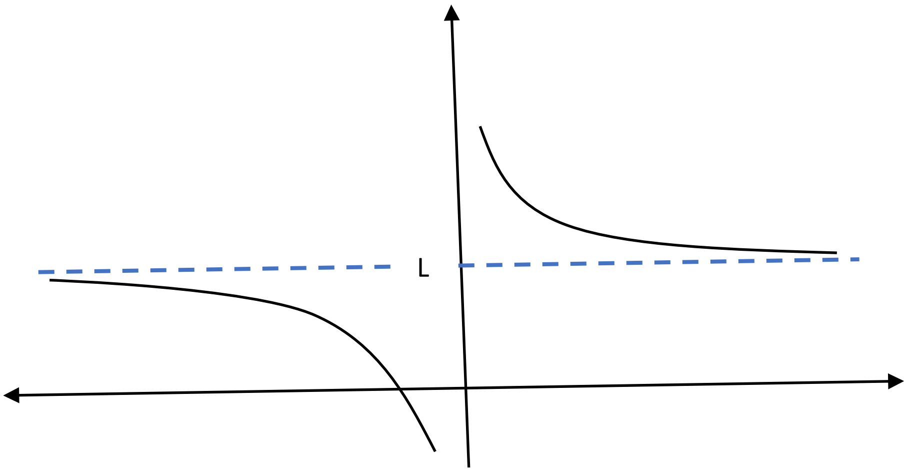
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty \quad y \quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mp\infty$ se dice que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de f(x).





Asíntotas horizontales

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L,$ se dice que **y = L** es asíntota horizontal de f(x).



Asíntotas oblicuas.

Una recta cuya ecuación es y = mx + b es una asíntota oblicua de la función f(x) con:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$, y

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Observación. Si m = 0 no existe asíntotas oblicuas.

Ejemplos

1. Demostrar que x=1 es asíntota vertical, e y = 0 es asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Entonces x = 1 es ecuación de una asíntota vertical de f(x)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty - 1} = -0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty - 1} = 0$$

Son iguales, entonces y = 0 ecuación de una asíntota horizontal de f(x)

Esto se comprueba graficando

2. Determinar si la función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ tiene una asíntota oblicua y encontrar la ecuación de dicha asíntota.

La función dada tendrá una asíntota oblicua y esta tendrá como ecuación: y = m x + b si $m \neq 0$

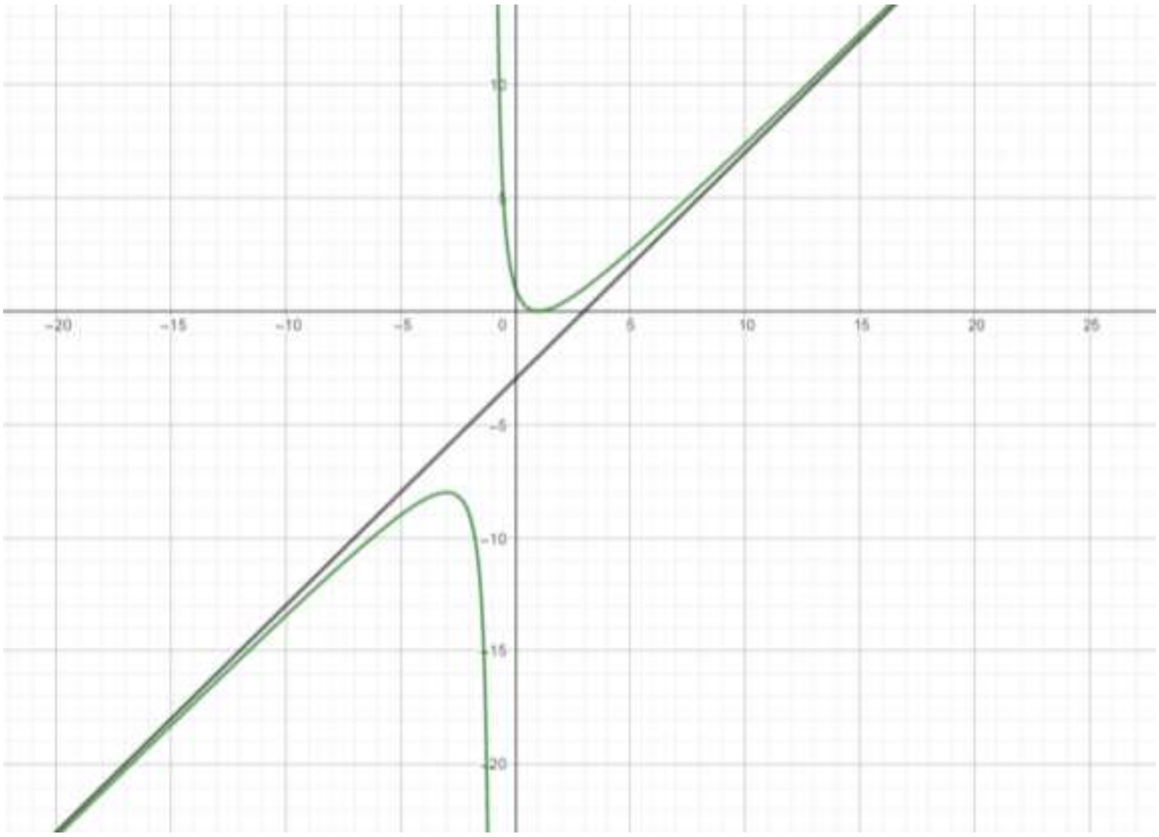
$$\operatorname*{Lim}_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (indeterminado)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1-0+0}{1+0} = 1 = m$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x+1} - 1x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2-2x+1}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+1}{x+1} = -\frac{\infty}{\infty}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-3x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-3+0}{1+0} = -3$$

Entonces la ecuación de la asíntota oblicua es $y = x - 3$, que graficando comprobamos



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar las asíntotas que tiene la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$
2. Determinar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

Prueba ACD 2 LA PRÓXIMA SEMANA

Clase 12.3

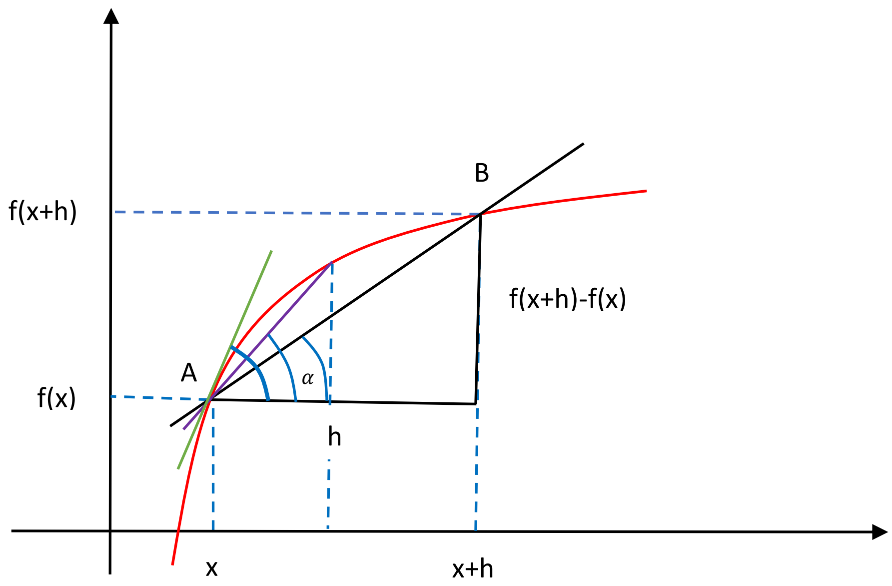
IV DERIVADAS

Definición de derivada.

Sea $f: [a, b] \to\to \mathbb{R}\,; x \in\,]a, b[, si\ \exists\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, decimos que f es derivable (diferenciable) en x; y la derivada de f en x es igual al valor del límite anterior, y se representa como f'(x) o $\frac{df}{dx}$

Por tanto: $\boldsymbol{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

Interpretación geométrica de la derivada.



La $tg(\alpha) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m\ (pendiente\ de\ la\ recta\ secante\ AB)$

Pero si $h \to 0, entonces\ \ (x+h) \to x,$ la secante AB se convierte en tangente a f(x) en el punto A (en el punto x), por tanto:

$$\lim_{h\to 0} tg(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m = f'(x)$$

La derivada de la función f(x) en el punto x es la pendiente de la recta tangente en el punto x

Obtención de las fórmulas de las derivadas de funciones básicas.

1. Derivada de una función constante f(x) = C

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C-C}{h} = 0$$

$\boldsymbol{f'(x) = 0}$ (la derivada de una constante es cero)

2. $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$\boldsymbol{f'(x) = 1}$

3. $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$

4. $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$

----

5. Si $f(x) = x^n \quad con\; n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$$

6. $Si\; f(x) = x^{\frac{1}{n}}; \;\; \forall x > 0 \;\; y\; n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}}$$

Derivadas de funciones trascendentes básicas

7. Si f(x) = senx

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$\boldsymbol{f'(x) = \cos x}$

8. Si f'(x) = cosx

$$\boldsymbol{f'(x) = -\sin x}$$

9. Si f(x) = e^x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^x$$

$$\boldsymbol{f'(x) = e^x}$$

10. Si $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{h}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x}}$$