Aproximaciones usando las Sumas de Riemann

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[0, \frac{5}{2}]$, queremos aproximar el área bajo la curva en este intervalo mediante las Sumas de Riemann. Dividimos el intervalo en 10 subintervalos y calculamos la suma izquierda, derecha y del punto medio.

Dividimos el intervalo en 10 subintervalos de igual tamaño, con $\Delta x = \frac{1}{4}$.

Los intervalos son:

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad \left[\frac{3}{4}, 1\right], \quad \left[1, \frac{5}{4}\right],$$

$$\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right], \quad \left[\frac{7}{4}, 2\right], \quad \left[2, \frac{9}{4}\right], \quad \left[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right]$$

1 Suma Izquierda

La suma de Riemann izquierda se define como:

$$L = \sum_{i=1}^{10} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$$

donde los valores de x_{i-1} son los puntos izquierdos de cada intervalo.

Por lo tanto,

$$L = f(0) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + \dots$$

2 Suma Derecha

La suma de Riemann derecha se define como:

$$R = \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \cdot \Delta x$$

donde los valores de x_i son los puntos derechos de cada intervalo.

Por lo tanto,

$$R = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + \dots$$

3 Suma del Punto Medio

La suma de Riemann del punto medio se define como:

$$M = \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot \Delta x$$

donde los valores de $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ son los puntos medios de cada intervalo:

$$\frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}, \quad \dots$$

Por lo tanto,

$$M = f\left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \frac{1}{4} + \dots$$