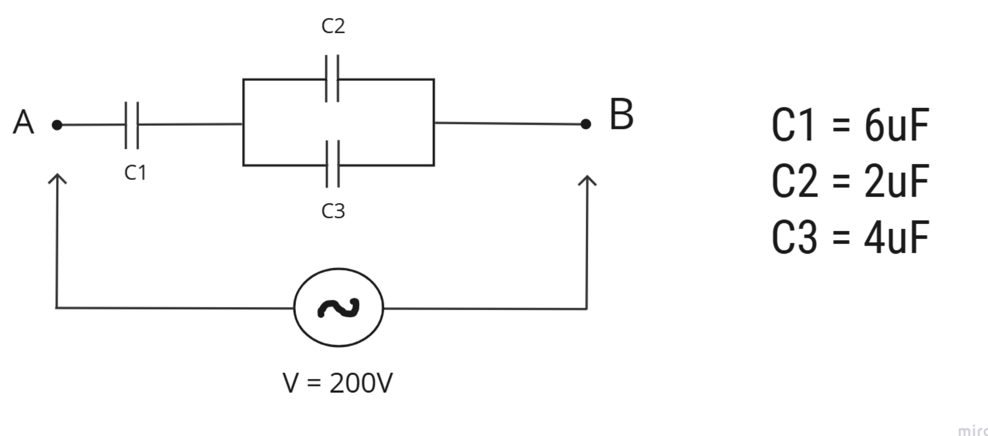
Trabajo Autónomo 2.11 - Fundamentos de Física para Ingeniería

Segundo Ciclo "A" - Ingeniería de Software

Tema: DIELÉCTRICOS Y CONDENSADORES
Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

1. **Se tiene un sistema formado por tres capacitores, como se muestra en la figura. Entre los terminales A y B de dicho sistema se ha aplicado una diferencia de potencial de 200 V. Determine:**
   a. La capacitancia equivalente del sistema.
   b. La carga y la diferencia de potencial en cada capacitor.



(a) Capacitancia equivalente

Capacitores en paralelo:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 2\mu F + 4\mu F = 6\mu F$$

Capacitores en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{6\mu F} + \frac{1}{6\mu F} = \frac{1}{3\mu F}$$

Por lo tanto, $C_{eq} = 3\mu F$

(b) Carga y la diferencia de potencial en cada capacitor

Carga total:

$$Q = C_{eq} \cdot V = 3\mu F \cdot 200V = 600\mu C$$

Diferencia de potencial en C1:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{600\mu C}{6\mu F} = 100V$$

Diferencia de potencial en C2 y C3:

$$V_2 = V_3 = V - V_1 = 200V - 100V = 100V$$

Carga en C2 y C3:

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 2\mu F \cdot 100V = 200\mu C$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 4\mu F \cdot 100V = 400\mu C$$

2. **Se tienen dos capacitores planos conectados entre sí, y se sabe que el potencial de cada uno es 200 V. Si se introduce un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 3$ entre las placas del capacitor C_1, calcule la carga y el potencial de cada capacitor si sus capacitancias antes de introducir el dieléctrico eran $C_1 = 0{,}05\,\mu F$ y $C_2 = 0{,}1\,\mu F$.**

   (a) **Carga en cada capacitor:**
   La carga en cada capacitor se puede calcular utilizando la fórmula:

   $$\boxed{Q = C \cdot V}$$

   Donde C es la capacitancia de cada capacitor y V es el potencial aplicado.
   - Para el capacitor C_1 con dieléctrico, la capacitancia aumenta debido a la introducción del dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 3$. La nueva capacitancia será:

   $$C_1' = C_1 \cdot \varepsilon_r = 0{,}05\,\mu F \times 3 = 0{,}15\,\mu F$$

   - Para el capacitor C_2, no se introduce dieléctrico, por lo que su capacitancia permanece igual: $C_2 = 0{,}1\,\mu F$.
   La carga Q_1 en el capacitor C_1 se calcula como:

   $$Q_1 = C_1' \cdot V = 0{,}15\,\mu F \cdot 200\,\mathrm{V} = 30\,\mu C$$

   Y la carga Q_2 en el capacitor C_2 se calcula como:

   $$Q_2 = C_2 \cdot V = 0{,}1\,\mu F \cdot 200\,\mathrm{V} = 20\,\mu C$$

   (b) **Potencial en cada capacitor:**
   El potencial en cada capacitor puede calcularse a partir de la carga y la capacitancia utilizando la fórmula:

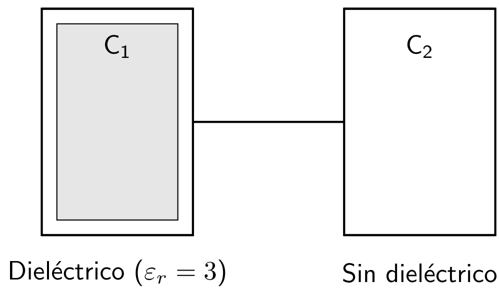
   $$\boxed{V = \frac{Q}{C}}$$

   Dado que los capacitores están conectados entre sí, el potencial total se distribuye entre ellos dependiendo de sus capacitancias. - Para C_1 con dieléctrico, el potencial será:

   $$V_1 = \frac{Q_1}{C_1'} = \frac{30\,\mu C}{0{,}15\,\mu F} = 200\,\mathrm{V}$$

   - Para C_2, el potencial será:

   $$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{20\,\mu C}{0{,}1\,\mu F} = 200\,\mathrm{V}$$



3. **Dentro de un capacitor plano cuyas placas tienen un área de $300\,\text{cm}^2$ y están separadas por una distancia $d = 1\,\text{cm}$, se introduce un dieléctrico que ocupa todo su volumen interior, de manera que su capacitancia ahora toma el valor de $C = 0{,}053\,\text{pF}$. Determine la permitividad relativa del dieléctrico.**

   La capacitancia de un capacitor con dieléctrico está relacionada con la capacitancia sin dieléctrico por la siguiente fórmula:

$$\boxed{C = C_0 \cdot \varepsilon_r}$$

donde:
- C_0 es la capacitancia sin dieléctrico.
- ε_r es la permitividad relativa del dieléctrico.

La capacitancia sin dieléctrico, C_0, se puede calcular utilizando la fórmula para la capacitancia de un capacitor plano:

$$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

donde:
- $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\text{F/m}$ es la permitividad del vacío.
- $A = 300\,\text{cm}^2 = 3 \times 10^{-2}\,\text{m}^2$ es el área de las placas.
- $d = 1\,\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$ es la distancia entre las placas.

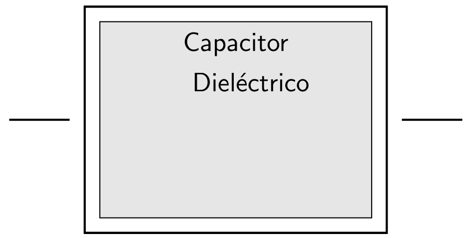
Sustituyendo:

$$C_0 = \frac{(8{,}854 \times 10^{-12})(3 \times 10^{-2})}{10^{-2}} = 2{,}6562 \times 10^{-12}\,\text{F} = 2{,}6562\,\text{pF}$$

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{0{,}053\,\text{pF}}{2{,}6562\,\text{pF}} \approx 20$$

Por lo tanto, la permitividad relativa del dieléctrico es $\varepsilon_r \approx 20$.

Separación $d = 1\,\text{cm}$



Área $= 300\,\text{cm}^2$

4. **La intensidad de corriente en el circuito varía de acuerdo con la ecuación $I = I_0 e^{-kt}$. Halle la cantidad de carga que atraviesa una sección del conductor en los dos primeros segundos. Tome $k = 0{,}5\,\text{s}^{-1}$ y $I_0 = 0{,}2\,\text{A}$.**

   La cantidad de carga Q que atraviesa una sección del conductor en un intervalo de tiempo $[0, t]$ se puede obtener integrando la corriente $I(t)$ con respecto al tiempo:

$$\boxed{Q = \int_0^t I(t)\,dt = \int_0^t I_0 e^{-kt}\,dt}$$

   Sustituyendo los valores dados, tenemos que $I_0 = 0{,}2\,\text{A}$, $k = 0{,}5\,\text{s}^{-1}$, y $t = 2\,\text{s}$:

$$Q = \int_0^2 0{,}2 e^{-0{,}5t}\,dt$$

   La integral de e^{-kt} es $-\frac{1}{k}e^{-kt}$, por lo tanto:

$$Q = 0{,}2\left[-\frac{1}{0{,}5}e^{-0{,}5t}\right]_0^2 = 0{,}2\left(-2e^{-1} + 2e^0\right) = 0{,}2\left(-\frac{2}{e} + 2\right)$$

   Usando $e \approx 2{,}718$, tenemos:

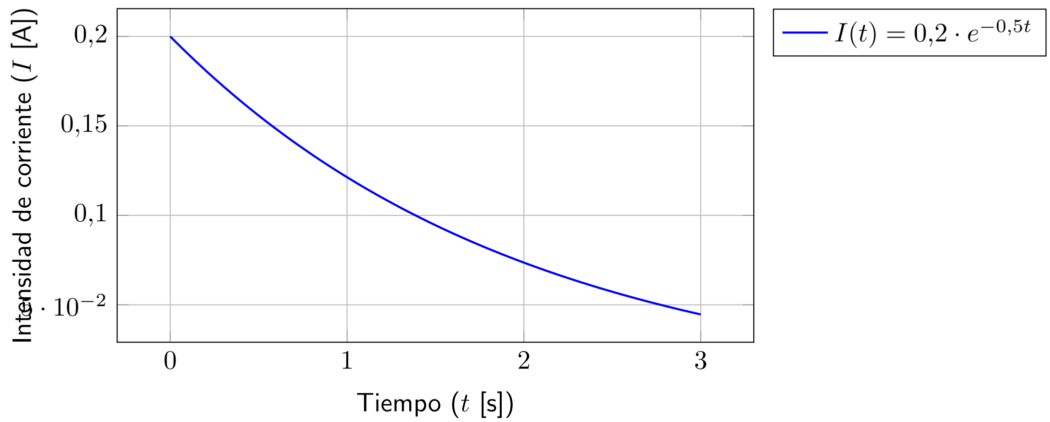
$$Q = 0{,}2\left(-\frac{2}{2{,}718} + 2\right) \approx 0{,}2\,(-0{,}735 + 2) \approx 0{,}2 \cdot 1{,}265 = 0{,}253\,\text{C}$$

   Por lo tanto, la cantidad de carga que atraviesa la sección del conductor en los primeros 2 segundos es aproximadamente:

$$Q \approx 0{,}253\,\text{C}$$

5. **Un conductor cilíndrico de sección transversal $A = 0{,}01\,\text{cm}^2$ está formado por dos conductores, de hierro y cobre, como se muestra en la figura. Las resistividades de los metales son $\delta_{\text{Cu}} = 1{,}75 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$ y $\delta_{\text{Fe}} = 9{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$. La longitud del conductor compuesto es 2.5 m. Entre los extremos se aplica una diferencia de potencial de 1.5 V. Halle:**

   a. La resistencia total del conductor.
   b. La intensidad de corriente por cada conductor.
   c. El valor de la intensidad del campo eléctrico en cada conductor.



(a) **La resistencia total del conductor.**

La resistencia de un conductor se calcula mediante la fórmula:

$$\boxed{R = \delta \frac{L}{A}}$$

Donde:
- δ es la resistividad del material,
- L es la longitud del conductor,
- A es el área de la sección transversal.

La resistencia total R_{total} es la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo. Si las resistencias de los conductores de cobre y hierro son R_{Cu} y R_{Fe} respectivamente, la resistencia total será:

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_{\text{Cu}}} + \frac{1}{R_{\text{Fe}}}}$$

La resistencia del cobre es:

$$R_{\text{Cu}} = \delta_{\text{Cu}} \frac{L}{A_{\text{Cu}}}$$

La resistencia del hierro es:

$$R_{\text{Fe}} = \delta_{\text{Fe}} \frac{L}{A_{\text{Fe}}}$$

Donde:
- $\delta_{\text{Cu}} = 1{,}75 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$,
- $\delta_{\text{Fe}} = 9{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$,
- $L = 2{,}5\,\text{m}$ (longitud del conductor),
- $A = 0{,}01\,\text{cm}^2 = 1 \times 10^{-8}\,\text{m}^2$ (área total del conductor),

De modo que se debe dividir el área A entre los dos conductores en proporción a sus resistividades.

$$A_{\mathsf{Cu}} = A \cdot \frac{\delta_{\mathsf{Fe}}}{\delta_{\mathsf{Cu}} + \delta_{\mathsf{Fe}}}$$

$$A_{\mathsf{Fe}} = A \cdot \frac{\delta_{\mathsf{Cu}}}{\delta_{\mathsf{Cu}} + \delta_{\mathsf{Fe}}}$$

Luego calculamos la resistencia de cada material y la resistencia total.

(b) **La intensidad de corriente por cada conductor.**

Una vez hallada la resistencia total R_{total}, la corriente total I_{total} se obtiene mediante la ley de Ohm:

$$\boxed{I_{\mathsf{total}} = \frac{V}{R_{\mathsf{total}}}}$$

Donde $V = 1{,}5\,\mathsf{V}$ es la diferencia de potencial. La corriente en cada conductor se obtiene utilizando la ley de Ohm para cada conductor:

$$I_{\mathsf{Cu}} = \frac{V}{R_{\mathsf{Cu}}}, \quad I_{\mathsf{Fe}} = \frac{V}{R_{\mathsf{Fe}}}$$

(c) **El valor de la intensidad del campo eléctrico en cada conductor.**

El campo eléctrico E en cada conductor se puede calcular utilizando la relación entre el campo eléctrico, la resistencia y la longitud del conductor:

$$\boxed{E = \frac{V}{L}}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en ambos conductores es el mismo:

$$E = \frac{1{,}5\,\mathsf{V}}{2{,}5\,\mathsf{m}} = 0{,}6\,\mathsf{V/m}$$

6. **Se enrolla un alambre de aluminio, formando espiras bien apretadas, sobre un cilindro de radio 5 cm. ¿Qué resistencia presenta dicho alambre cuando se ha enrollado una longitud de 200 m? El radio del alambre es 0.2 mm y la resistividad del aluminio es $\delta_{\mathsf{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathsf{m}$.**

Usando la fórmula general para la resistencia de un conductor:

$$R = \delta \frac{L}{A}$$

Donde:
- $\delta_{\mathsf{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathsf{m}$ es la resistividad del aluminio,
- $L = 200\,\mathsf{m}$ es la longitud del alambre enrollado,
- A es el área de la sección transversal del alambre.

El alambre tiene un radio de $r_{\mathsf{alambre}} = 0{,}2\,\mathsf{mm} = 0{,}2 \times 10^{-3}\,\mathsf{m}$, por lo tanto, el área de la sección transversal del alambre es:

$$A = \pi r_{\text{alambre}}^2 = \pi(0{,}2 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 = \pi \times 4 \times 10^{-8}\,\text{m}^2 = 1{,}256 \times 10^{-7}\,\text{m}^2$$

Ahora sustituimos los valores en la fórmula de la resistencia:

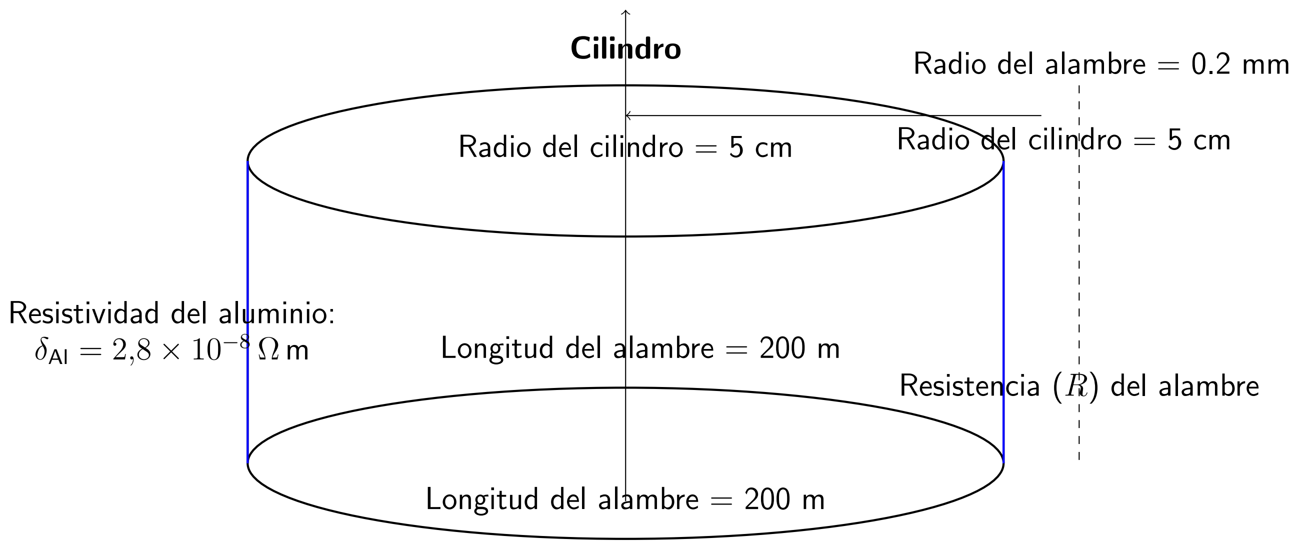
$$R = \delta_{\text{Al}} \frac{L}{A} = (2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}) \frac{200\,\text{m}}{1{,}256 \times 10^{-7}\,\text{m}^2}$$

$$R = (2{,}8 \times 10^{-8}) \times \frac{200}{1{,}256 \times 10^{-7}} = (2{,}8 \times 10^{-8}) \times 1{,}591 \times 10^{9}$$

$$R \approx 44{,}6\,\Omega$$

Por lo tanto, la resistencia del alambre enrollado es aproximadamente:

$$R \approx 44{,}6\,\Omega$$



7. **Si el resistor del problema anterior va a operar a una tensión de 120 V y la potencia máxima que puede disipar es 150 W, ¿qué longitud tendrá entonces?**

La potencia disipada por un resistor P está dada por la fórmula:

$$\boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

Donde:
- $V = 120\,\text{V}$ es la tensión aplicada,
- $R = 44{,}6\,\Omega$ es la resistencia del alambre calculada en la tercera pregunta.

Sustituyendo los valores:

$$P = \frac{(120)^2}{44{,}6} = \frac{14400}{44{,}6} \approx 323{,}1\,\text{W}$$

Sin embargo, la potencia máxima que puede disipar el resistor es de 150 W. Para asegurarse de que la potencia no exceda este límite, es necesario reducir la longitud del alambre.

Utilizamos la misma fórmula de potencia, pero resolviendo para R:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V^2}{P}$$

Sustituyendo $V = 120\,\text{V}$ y $P = 150\,\text{W}$:

$$R = \frac{(120)^2}{150} = \frac{14400}{150} = 96\,\Omega$$

Ahora, usamos la fórmula de resistencia para un conductor de longitud L:

$$R = \delta \frac{L}{A} \implies L = \frac{RA}{\delta}$$

Donde:
- $\delta_{\text{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$ es la resistividad del aluminio,
- $A = 1{,}256 \times 10^{-7}\,\text{m}^2$ es el área de la sección transversal del alambre.

Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{96\,\Omega \times 1{,}256 \times 10^{-7}\,\text{m}^2}{2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}}$$

$$L = \frac{1{,}205 \times 10^{-5}}{2{,}8 \times 10^{-8}} = 430{,}4\,\text{m}$$

Por lo tanto, para que la potencia disipada no exceda los 150 W, la longitud del alambre debe ser aproximadamente:

$$L \approx 430{,}4\,\text{m}$$

8. **Una lámpara eléctrica tiene un filamento de $80\,\Omega$ conectado a una línea de corriente continua de 110 V. ¿Cuál es la corriente que circula por el filamento? ¿Cuál es la potencia disipada por la bombilla?**

Utilizamos la fórmula de la resistencia R de un conductor:

$$R = \delta \frac{L}{A}$$

Donde:
- $R = 80\,\Omega$ es la resistencia del filamento,
- $\delta_{\text{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$ es la resistividad del aluminio,
- $A = 0{,}04\,\text{cm}^2 = 4 \times 10^{-8}\,\text{m}^2$ es el área de la sección transversal
del alambre, - L es la longitud del alambre que necesitamos determinar.

Despejamos L de la fórmula de resistencia:

$$L = \frac{RA}{\delta}$$

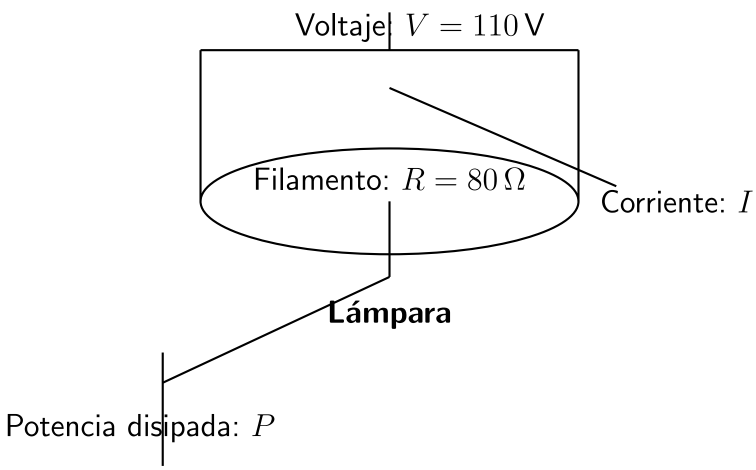
Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{80\,\Omega \times 4 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2}{2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}}$$

$$L = \frac{320 \times 10^{-8}}{2{,}8 \times 10^{-8}} = 114{,}3\,\mathrm{m}$$

Por lo tanto, la longitud del alambre es aproximadamente:

$$L \approx 114{,}3\,\mathrm{m}$$



9. **Un alambre de aluminio de 20 km de longitud y $0{,}04\,\mathrm{cm}^2$ de área transversal se encuentra a $20°$C. Si la temperatura se eleva a $30°$C, determine qué variación experimenta la resistencia de dicho alambre. Tome los siguientes datos: resistividad del aluminio a $20°$C, $\delta_{\mathrm{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$; coeficiente de resistividad de temperatura $\alpha_{\mathrm{r}} = 3{,}9 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$; coeficiente de dilatación superficial $b = 2\alpha_{\mathrm{r}}$.**

   Usamos la fórmula que relaciona la resistencia con la temperatura:

$$\boxed{R_T = R_0\left(1 + \alpha_{\mathrm{r}}(T - T_0)\right)}$$

Donde:
- R_T es la resistencia a la temperatura T,
- R_0 es la resistencia a la temperatura inicial T_0,
- $\alpha_{\mathrm{r}} = 3{,}9 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ es el coeficiente de resistividad de temperatura del aluminio, - $T = 30°$C es la temperatura final,
- $T_0 = 20°$C es la temperatura inicial.

Resistencia inicial R_0 a $20°$C. Usamos la fórmula de resistencia de un conductor:

$$R_0 = \delta_{\mathrm{Al}}\frac{L}{A}$$

Donde:
- $\delta_{\mathrm{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$,
- $L = 20\,\mathrm{km} = 20000\,\mathrm{m}$,
- $A = 0{,}04\,\mathrm{cm}^2 = 4 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2$.

Sustituyendo los valores:

$$R_0 = (2{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}) \times \frac{20000\,\mathrm{m}}{4 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2}$$

$$R_0 = 2{,}8 \times 10^{-8} \times 5 \times 10^{11} = 14\,\Omega$$

Resistencia final R_T a $30°$C:

$$R_T = 14\,\Omega\left(1 + 3{,}9 \times 10^{-3} \times (30 - 20)\right)$$

$$R_T = 14\,\Omega\left(1 + 3{,}9 \times 10^{-3} \times 10\right)$$

$$R_T = 14\,\Omega\,(1 + 0{,}039)$$

$$R_T = 14\,\Omega \times 1{,}039 = 14{,}546\,\Omega$$

Finalmente, la variación en la resistencia es:

$$\Delta R = R_T - R_0 = 14{,}546\,\Omega - 14\,\Omega = 0{,}546\,\Omega$$

Por lo tanto, la variación en la resistencia del alambre es:

$$\Delta R \approx 0{,}546\,\Omega$$