Problema 1

El radio se desintegra con una velocidad proporcional a la cantidad presente. La vida media es de 1600 años, tiempo necesario para que se descomponga la mitad. Hallar la cantidad desintegrada en 100 años.

1. Analizar y comprender el problema presentado
La desintegración radiactiva sigue un modelo exponencial donde la tasa de cambio de la cantidad de sustancia N es proporcional a la cantidad presente:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

donde:

- $N(t)$ es la cantidad de radio en el tiempo t,
- k es la constante de desintegración,
- el signo negativo indica que la cantidad de material disminuye con el tiempo.

Se nos proporciona la vida media:

$$t_{1/2} = 1600 \text{ años}$$

y queremos determinar la cantidad desintegrada en $t = 100$ años.

2. Revisar o investigar las leyes físicas que presenta el problema
La ecuación diferencial de desintegración radiactiva es:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

donde:

- N_0 es la cantidad inicial de la sustancia radiactiva
- k es la constante de desintegración que depende de la vida media.

Sabemos que la relación entre la constante de desintegración k y la vida media es:

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

3. Modelar el problema como una ecuación diferencial con valores iniciales
La ecuación diferencial es:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

y su solución es:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Para encontrar k, usamos la vida media:

$$k = \frac{\ln 2}{1600} \implies k \approx \frac{0{,}693}{1600} \approx 0{,}000433$$

4. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial
La cantidad de radio en cualquier tiempo t está dada por:

$$N(t) = N_0 e^{-0{,}000433t}$$

5. Encontrar la solución específica
Para hallar la cantidad desintegrada en $t = 100$ años, calculamos:

$$N(100) = N_0 e^{-0{,}000433(100)}$$

$$N(100) = N_0 e^{-0{,}0433}$$

$$N(100) \approx N_0(0{,}9576)$$

La cantidad desintegrada es:

$$\Delta N = N_0 - N(100)$$

$$\Delta N = N_0 - N_0(0{,}9576)$$

$$\Delta N = N_0(1 - 0{,}9576)$$

$$\Delta N = N_0(0{,}0424)$$

6. Encontrar la solución del problema real
El porcentaje de sustancia que se ha desintegrado en 100 años es:

$$4{,}24\,\% \text{ de la cantidad inicial}$$

Por lo que, en términos absolutos:

$$\Delta N = 0{,}0424 N_0$$

Problema 2

Suponga que una gota de un líquido se evapora con una velocidad proporcional a su superficie. Hallar el radio de la gota en función del tiempo.

1. Analizar y comprender el problema presentado
Tenemos una gota de líquido que se evapora a una velocidad proporcional a su superficie.
Si suponemos que la gota es esférica, su volumen está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

y su superficie por:

$$S = 4\pi r^2$$

Dado que la evaporación implica la pérdida de volumen, podemos escribir la ecuación diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = -kS$$

donde: - V es el volumen de la gota, - S es la superficie de la gota, - k es una constante de proporcionalidad positiva.

2. Revisar o investigar las leyes físicas que presenta el problema
Sustituyendo la expresión de V y S:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = -k(4\pi r^2)$$

Calculando la derivada:

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -4\pi k r^2$$

Simplificando:

$$\frac{dr}{dt} = -k$$

3. Modelar el problema como una ecuación diferencial con valores iniciales
Tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dr}{dt} = -k$$

con la condición inicial:

$$r(0) = r_0$$

donde r_0 es el radio inicial de la gota.

4. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial
Separando variables:

$$dr = -kdt$$

Integrando ambos lados:

$$r = -kt + C$$

5. Encontrar la solución específica
Usando la condición inicial $r(0) = r_0$:

$$r_0 = -k(0) + C \Rightarrow C = r_0$$

Por lo que la solución es:

$$r(t) = r_0 - kt$$

6. Encontrar la solución del problema real
El radio de la gota en función del tiempo es:

$$r(t) = r_0 - kt$$

Esta ecuación indica que la gota se evapora de manera lineal con el tiempo hasta que $r(t) = 0$, es decir, cuando:

$$t = \frac{r_0}{k}$$

lo que significa que la gota desaparece completamente en $t = r_0/k$.