Trabajo Autónomo - Estructuras Discretas

Primer Ciclo "A" - Ingeniería de Software

Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

1. **¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con cinco consonantes y tres vocales de modo que cada palabra comience y termine en consonante?**

Respuesta:

- Número de formas de elegir la primera consonante: 5
- Número de formas de elegir la vocal: 3
- Número de formas de elegir la última consonante: 5

Entonces, el número total de palabras posibles es:

$$5 \times 3 \times 5 = 75$$

2. **Determine el número de enteros de seis dígitos (que no comiencen con cero) en los que**
   a. Ningún dígito se pueda repetir.
   b. Se pueden repetir los dígitos.

Respuesta:

a. Para números de seis dígitos donde ningún dígito se repita y no comiencen con cero:
$$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$$
b. Para números de seis dígitos donde se puedan repetir los dígitos y no comiencen con cero:
$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900000$$

3. **¿Cuántas permutaciones existen para las ocho letras a,b,c,d,e,f,g,h?**

Respuesta:
El número total de permutaciones de 8 letras distintas es:

$$8! = 40320$$

4. **¿De cuántas formas es posible ordenar los símbolos a,b,c,d,e,e,e,e,e de modo que ninguna e quede junto a otra?**

Respuesta:

Primero, ordenamos las letras a, b, c, y d. Hay $4!$ maneras de hacer esto:

$$4! = 24$$

Entre estas letras, hay 5 huecos donde se pueden colocar las 'e's (antes de la primera letra, entre las letras, y después de la última letra):

$$\_a\_b\_c\_d\_$$

Debemos colocar las 5 'e's en estos 5 huecos de modo que ninguna 'e' quede junto a otra. La única manera de hacer esto es elegir 5 de los 5 huecos disponibles, lo cual solo tiene 1 forma:

$$\binom{5}{5} = 1$$

Entonces, es simplemente el número de formas de ordenar a, b, c, y d:

$$4! = 24$$

5. **Un estudiante que realiza un examen debe responder 7 de las 10 preguntas. El orden no importa. ¿De cuántas formas puede responder el examen?**

Respuesta:

El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k está dado por el coeficiente binomial:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde $n!$ (n factorial) es el producto de todos los enteros positivos hasta n, es decir, $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$.

En este caso, queremos elegir 7 preguntas de un total de 10, por lo que $n = 10$ y $k = 7$:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!}$$

Ahora calculamos $10!$, $7!$, y $3!$:

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del coeficiente binomial:

$$\binom{10}{7} = \frac{3628800}{5040 \times 6} = \frac{3628800}{30240} = 120$$

6. **Juan quiere dar una fiesta para algunos de sus amigos. Debido al tamaño de su casa, sólo puede invitar a 11 de sus 20 amigos. ¿De cuántas formas puede seleccionar a los invitados?**

Respuesta:
En este caso, queremos elegir 11 amigos de un total de 20, por lo que $n = 20$ y $k = 11$:

$$\binom{20}{11} = \frac{20!}{11!(20-11)!} = \frac{20!}{11!9!}$$

$$20! = 20\times19\times18\times17\times16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$11! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 39916800$$

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

Para evitar el cálculo directo de $20!$, podemos simplificar usando la relación de factoriales:

$$\binom{20}{11} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{11!}$$

$$\binom{20}{11} = 167960$$

7. **Un frasco contiene varias bolas rojas, azules y blancas. Suponiendo que las bolas del mismo color son indistinguibles y el orden importa, ¿cuántas secuencias diferentes pueden ocurrir si alguien dibuja...**

   a. 3 bolas y sale una de cada color?
   b. 5 bolas y obtiene 3 rojas y 2 azules?
   c. 5 bolas y obtiene exactamente 3 bolas rojas?
   d. 2 bolas, ambas del mismo color?

Respuesta:

a. Para 3 bolas y sale una de cada color, hay $3!$ permutaciones posibles:

$$3! = 6$$

b. Para 5 bolas con 3 rojas y 2 azules, el número de secuencias diferentes es:

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

c. Para 5 bolas con exactamente 3 bolas rojas y las otras 2 de cualquier color, necesitamos considerar todas las combinaciones posibles. Si suponemos solo tres colores (rojo, azul, blanco), el conteo se hace más complicado y puede variar según la interpretación.

d. Para 2 bolas del mismo color (suponiendo tres colores posibles), tenemos 3 combinaciones posibles:

$$1 \text{ combinación por cada color} \times 3 \text{ colores} = 3$$

8. **Un club tiene 12 estudiantes de primer año y 8 de segundo año.**
   a. ¿De cuántas maneras podemos elegir un comité de 4 personas, 2 estudiantes de primer año y 2 estudiantes de segundo año?
   b. ¿De cuántas maneras podemos elegir un comité de 4 personas con al menos 2 estudiantes de primer año?

Respuesta:

a. Número de maneras de elegir 2 estudiantes de primer año y 2 de segundo año:

$$\binom{12}{2} \times \binom{8}{2} = 66 \times 28 = 1848$$

b. Para elegir un comité de 4 personas con al menos 2 estudiantes de primer año, consideramos los casos:

- 2 estudiantes de primer año y 2 de segundo año: $66 \times 28 = 1848$
- 3 estudiantes de primer año y 1 de segundo año:

$$\binom{12}{3} \times \binom{8}{1} = 220 \times 8 = 1760$$

- 4 estudiantes de primer año:

$$\binom{12}{4} = 495$$

Sumando todos los casos:

$$1848 + 1760 + 495 = 4103$$