Resolución de los ejercicios y explicación detallada

Resolución de los ejercicios y explicación detallada

Ejercicio 1: Subconjunto en $\mathbb{R}^3$

Dado el subconjunto:

$$W = \{(a + 2b, a - b, 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Conclusión: W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Explicación:

Para demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, debemos verificar que W satisface las siguientes condiciones:

1. El vector cero está en W.
2. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
3. Si $\mathbf{u} \in W$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\mathbf{u} \in W$.

1. El vector cero está en W:

Consideramos $a = 0$ y $b = 0$:

$$(a + 2b, a - b, 3b) = (0 + 2 \cdot 0, 0 - 0, 3 \cdot 0) = (0, 0, 0)$$

Por lo tanto, $(0, 0, 0) \in W$.

2. Cerradura bajo la adición:

Sean $\mathbf{u} = (a+2b, a-b, 3b)$ y $\mathbf{v} = (c+2d, c-d, 3d)$ dos vectores en W. Entonces,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + 2b + c + 2d, a - b + c - d, 3b + 3d)$$

Podemos reescribir esto como:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = ((a + c) + 2(b + d), (a + c) - (b + d), 3(b + d))$$

Dado que $a + c \in \mathbb{R}$ y $b + d \in \mathbb{R}$, se sigue que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

3. Cerradura bajo la multiplicación por un escalar:

Sea $\mathbf{u} = (a + 2b, a - b, 3b) \in W$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$c\mathbf{u} = c(a + 2b, a - b, 3b) = (ca + 2cb, ca - cb, 3cb)$$

Podemos reescribir esto como:

$$c\mathbf{u} = (c(a + 2b), c(a - b), 3(cb))$$

Dado que $ca \in \mathbb{R}$ y $cb \in \mathbb{R}$, se sigue que $c\mathbf{u} \in W$.

Conclusión:

Dado que W contiene el vector cero, y es cerrado bajo la adición y la multiplicación por un escalar, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Contraejemplo:

Consideremos el siguiente conjunto:

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 & b \\ a+b+1 & 0 \\ 0 & c+1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Este conjunto no es un subespacio vectorial porque:

- **No contiene al vector cero:** Al hacer $a = 0$, $b = 0$, y $c = 0$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 0 \\ 0+0+1 & 0 \\ 0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Esto no es la matriz nula.

- **No es cerrado bajo la suma:** Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ a+b+1 & 0 \\ 0 & c+1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} d+1 & e \\ d+e+1 & 0 \\ 0 & f+1 \end{pmatrix}$ dos matrices en W'. Entonces,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ a+b+1 & 0 \\ 0 & c+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d+1 & e \\ d+e+1 & 0 \\ 0 & f+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d)+2 & b+e \\ (a+d)+(b+e)+2 & 0 \\ 0 & (c+f)+2 \end{pmatrix}$$

  Las constantes 1 se suman dos veces, alterando la estructura original. Por lo tanto, $\mathbf{A} + \mathbf{B} \notin W'$.