Trabajo Autónomo 1.3 - Cálculo III

Tercer Ciclo A - Ingeniería de Software

Tema: Ecuaciones diferenciales de primer orden
Estudiante: Ariel Alejandro Calderón

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales dadas.

1. **Resolver la ecuación diferencial:** $y' + x^2 y = 4x^3$ **con la condición inicial** $y(1) = 1$**.**

   Es una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma:

   $$y' + P(x)y = Q(x),$$

   donde $P(x) = x^2$ y $Q(x) = 4x^3$.

   El factor integrante se define como:

   $$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int x^2 dx} = e^{\frac{x^3}{3}}.$$

   Multiplicamos toda la ecuación por $\mu(x)$:

   $$e^{\frac{x^3}{3}} y' + x^2 e^{\frac{x^3}{3}} y = 4x^3 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

   Observamos que el lado izquierdo es la derivada de un producto:

   $$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^3}{3}} y\right) = 4x^3 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

   Integrando ambos lados respecto a x:

   $$\int \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^3}{3}} y\right) dx = \int 4x^3 e^{\frac{x^3}{3}} dx.$$

   El lado izquierdo simplemente da:

   $$e^{\frac{x^3}{3}} y.$$

   Para resolver el lado derecho, usamos **integración por partes** con:

   - $u = 4x^3 \Rightarrow du = 12x^2 dx$.
   - $dv = e^{\frac{x^3}{3}} dx \Rightarrow v = e^{\frac{x^3}{3}} \frac{1}{x^2}$ (por derivación inversa de e^u).

Aplicando integración por partes:

$$\int 4x^3 e^{\frac{x^3}{3}} dx = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot 4x - \int e^{\frac{x^3}{3}} \cdot 4dx.$$

$$= 4xe^{\frac{x^3}{3}} - \int 4e^{\frac{x^3}{3}} dx.$$

Aproximando la integral, encontramos que:

$$\int 4x^3 e^{\frac{x^3}{3}} dx = 4e^{\frac{x^3}{3}} x + C.$$

Por lo tanto:

$$e^{\frac{x^3}{3}} y = 4xe^{\frac{x^3}{3}} + C. \implies y = 4x + Ce^{-\frac{x^3}{3}} \text{ (Solución general)}$$

Aplicación de la condición inicial $y(1) = 1$:

$$1 = 4(1) + Ce^{-\frac{1^3}{3}}. \implies C = (1-4)e^{\frac{1}{3}}. \implies C = -3e^{\frac{1}{3}}.$$

Sustituyendo C:

$$y = 4x - 3e^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{x^3}{3}} \text{ (Solución especifica)}$$

2. **Resolver la ecuación diferencial:** $(1-x^2)y' - 2y = 0$
   Reescribir en forma estándar:
$$y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0.$$
   Es una ecuación diferencial de variables separables:
$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x^2-1}dx.$$
   Descomponemos la fracción:
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$
   Entonces:
$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx.$$
   Resolviendo:
$$\ln|y| = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C.$$
$$\ln|y| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$
   Solución general:
$$y = C\frac{x-1}{x+1}.$$
3. **Resolver la ecuación diferencial:** $y' + y = 0$ **con la condición inicial** $y(0) = 1$**.**
   Reescribimos la ecuación diferencial:
$$y' + y = 0$$
   Identificamos:
$$P(x) = 1, \quad R(x) = 0$$
   Calculamos el factor integrante:
$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int 1\,dx} = e^x$$
   Multiplicamos por el factor integrante:
$$e^x y' + e^x y = 0$$

Reconocemos que el lado izquierdo es la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = 0$$

Integramos ambos lados:

$$e^x y = C$$

Despejamos y:

$$y = Ce^{-x}$$

Usamos la condición inicial $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^0$$

$$C = 1$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = e^{-x}$$

4. **Resolver la ecuación diferencial:** $y' + 3(y - 1) = 2x$ **con la condición inicial** $y(0) = 4$**.**

Reorganizamos la ecuación:

$$y' + 3y = 2x + 3 \implies \begin{cases} P(x) = 3 \\ R(x) = 2x + 3 \end{cases}$$

El factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$$

Entonces podemos decir que:

$$y = \frac{1}{u(x)}\left(\int u(x)R(x)\,dx + C\right) = \frac{1}{e^{3x}}\left(\int e^{3x}(2x+3)\,dx + C\right)$$

Resolviendo integral:

$$\int e^{3x}(2x+3)\,dx = 2\int xe^{3x}\,dx + 3\int e^{3x}\,dx$$

$$\to 2\int xe^{3x}\,dx;\; u = x;\; du = dx;\; dv = 3x\,dx;\; v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$2\int xe^{3x}\,dx = 2\cdot\left(x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\right) = \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x}$$

$$\to 3\int e^{3x}\,dx = e^{3x}$$

Entonces, la solución general:

$$y = \frac{1}{e^{3x}}\left(\frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + e^{3x} + C\right)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + 1 + C\cdot e^{-3x} = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9} + C\cdot e^{-3x}$$

Para encontrar la constante C, usamos la condición inicial $y(0) = 4$.

$$y(0) = 4 = \frac{2(0)}{3} + \frac{7}{9} + C\cdot e^{0}$$

$$4 = \frac{7}{9} + C \implies C = \frac{29}{9}$$

Finalmente, la solución especifica es:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9} + \frac{29}{9}e^{-3x}$$