Corrección del Examen II

Cálculo I

Primer Ciclo "A" - Ingeniería de Software

1. **Determinar si la función** $f(x) = \begin{cases} 3x-5, & \textbf{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$ **es continua en** $x = 1$

Evaluamos las tres condiciones de continuidad:

(I). **Existencia de** $f(1)$**:** Dado que $x = 1$ pertenece al dominio de la primera rama, evaluamos:

$$f(1) = 3(1) - 5 = -2.$$

(II). **Existencia del límite cuando** $x \to 1$**:** Evaluamos el límite lateral izquierdo y derecho:

- Límite cuando $x \to 1^-$ (usando la primera rama):

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 5) = 3(1) - 5 = -2.$$

- Límite cuando $x \to 1^+$ (usando la segunda rama):

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}.$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Dado que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$$

$\implies$ Entonces el límite existe y es igual a -2.

(III). **Igualdad entre** $f(1)$ **y** $\lim_{x \to 1} f(x)$**:**

$$f(1) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = -2.$$

$\implies$ Dado que las tres condiciones de continuidad se satisfacen, entonces $f(x)$ **es continua en** $x = 1$.

2. **Escribir las derivadasde las siguientes funciones:**

(a) Para $y = ax^n$, donde a es constante y $n \in \mathbb{N}$:

$$y' = anx^{n-1}.$$

(b) Para $y = \frac{a}{x}$, donde a es constante:

$$y' = -\frac{a}{x^2}.$$

(c) Para $y = a\cos(x)$, donde a es constante:

$$y' = -a\sin(x).$$

(d) Para $y = ab^x$, donde a y b son constantes y $b > 1$:

$$y' = ab^x \ln(b).$$

(e) Para $y = a\sin^{-1}(x)$, donde a es constante:

$$y' = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(f) Para $y = \sin(x)\cos(x)$: Usamos el producto de funciones:

$$y' = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

(g) Para $y = \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$: Simplificamos primero: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, entonces:

$$y = \frac{\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \cos(x).$$

Por lo tanto:

$$y' = -\sin(x).$$

(h) Para $y = (\ln(a))\log_a(x)$, donde $a > 3$: Usamos $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$:

$$y = \ln(a) \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \ln(x).$$

Derivamos:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

3. **Encontrar la derivada de las siguientes funciones:**

   (a) Para $y = 2x^{-2} + 3e^2 - 2\ln(2x)$:

   Derivamos cada término:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(2x^{-2}\right) + \frac{d}{dx}\left(3e^2\right) - \frac{d}{dx}\left(2\ln(2x)\right).$$

   - Derivada del primer término:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^{-2}\right) = -4x^{-3}.$$

   - Derivada del segundo término ($3e^2$ es constante):

$$\frac{d}{dx}\left(3e^2\right) = 0.$$

   - Derivada del tercer término (aplicamos regla de la cadena):

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln(2x)\right) = 2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{2}{x}.$$

   Entonces:

$$y' = -4x^{-3} - \frac{2}{x}.$$

   (b) Para $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$:

   Reescribimos la función como:

$$y = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/2}.$$

   Derivamos usando la regla de la cadena y la regla del cociente:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2-x}{2+x}\right).$$

   Calculamos la derivada del cociente :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \frac{(2+x)(-1)-(2-x)(1)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2}.$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{-4}{(2+x)^2}.$$

$$y' = -\frac{2}{(2+x)^2\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}}.$$

$$y' = -\frac{2\sqrt{2+x}}{(2+x)^2\sqrt{2-x}}.$$

4. **Resolver:**
   (a) Encontrar y' en la siguiente ecuación: $x-(y+1)^2=2xy$
   (b) Encontrar la tercera derivada de $y=xe^{-x}$
   (a) Encontrar y' en la ecuación $x-(y+1)^2=2xy$:

   Derivamos implícitamente con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}\left((y+1)^2\right)=\frac{d}{dx}(2xy).$$

   - Derivada del primer término:

$$\frac{d}{dx}(x)=1.$$

   - Derivada del segundo término (regla de la cadena):

$$\frac{d}{dx}((y+1)^2)=2(y+1)y'.$$

   - Derivada del tercer término (regla del producto):

$$\frac{d}{dx}(2xy)=2\left(y+xy'\right).$$

   Sustituimos:

$$1-2(y+1)y'=2y+2xy'.$$

   Despejar y':

$$1-2y-2(y+1)y'=2xy'.$$
$$1-2y=2xy'+2(y+1)y'.$$
$$1-2y=y'(2x+2y+2).$$
$$y'=\frac{1-2y}{2x+2y+2}.$$

   (b) Encontrar la tercera derivada de $y=xe^{-x}$:

   Derivamos sucesivamente: - Primera derivada:

$$y'=\frac{d}{dx}(xe^{-x})=e^{-x}-xe^{-x}.$$

   - Segunda derivada:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=-e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=-2e^{-x}+xe^{-x}.$$

   - Tercera derivada:

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(-2e^{-x}+xe^{-x}\right)=2e^{-x}+(e^{-x}-xe^{-x}).$$

   Simplificamos:

$$y'''=3e^{-x}-xe^{-x}.$$

5. **La posicion en funcion del tiempo (distancia - tiempo) de un movil viene dado como:** $x = -5t + 10\sin(2t)$**, donde** x **esta en metros y** t **esta en segundos.**

   (a) Encuentre las ecuaciones de la velocidad(rapidez) y de la aceleracion.

   (b) Encuentre la posicion, velocidad y aceleracion para los tiempos $t = 0$ y $t = 5$ segundos.

   (a) Encuentre las ecuaciones de la velocidad (rapidez) y de la aceleración: La posición en función del tiempo está dada por:

   $$x(t) = -5t + 10\sin(2t).$$

   - La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

   $$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-5t + 10\sin(2t)\right).$$

   Derivamos:

   $$v(t) = -5 + 10 \cdot 2\cos(2t) = -5 + 20\cos(2t).$$

   - La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

   $$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-5 + 20\cos(2t)\right).$$

   Derivamos:

   $$a(t) = -20 \cdot 2\sin(2t) = -40\sin(2t).$$

   (b) Encuentre la posición, velocidad y aceleración para los tiempos $t = 0$ y $t = 5$ segundos:

   Sustituimos $t = 0$ y $t = 5$ en las ecuaciones:
   - Para $t = 0$:

   $$x(0) = -5(0) + 10\sin(2(0)) = 0,$$
   $$v(0) = -5 + 20\cos(2(0)) = -5 + 20(1) = 15,$$
   $$a(0) = -40\sin(2(0)) = -40(0) = 0.$$

   - Para $t = 5$:

   $$x(5) = -5(5) + 10\sin(2(5)) = -25 + 10\sin(10).$$

Aproximamos $\sin(10)$ usando radianes:

$$x(5) \approx -25 + 10(-0.544) = -25 - 5.44 = -30.44.$$

$$v(5) = -5 + 20\cos(10).$$

Aproximamos $\cos(10)$:

$$v(5) \approx -5 + 20(-0.839) = -5 - 16.78 = -21.78.$$

$$a(5) = -40\sin(10).$$

Usando $\sin(10) \approx -0.544$:

$$a(5) \approx -40(-0.544) = 21.76.$$

Resultados:

- Para $t = 0$: $x = 0$, $v = 15$, $a = 0$.
- Para $t = 5$: $x \approx -30.44$, $v \approx -21.78$, $a \approx 21.76$.