

**Funciones:**

$$f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x - 4} \text{ si } x \rightarrow 4$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 1)} \text{ si } x \rightarrow 3 \text{ y si } x \rightarrow \infty$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 5x - 6}, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}, \text{ si } x \rightarrow 1$$

**Procedimiento:**

1. Para la primera función  $f(x)$  encontrar matemáticamente, el límite indicado.

**Respuesta:**

Primero, simplificamos la función. Podemos multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del numerador:

$$f(x) = \frac{(3 - \sqrt{x^2 - 7})(3 + \sqrt{x^2 - 7})}{(x - 4)(3 + \sqrt{x^2 - 7})}$$

$$f(x) = \frac{9 - (x^2 - 7)}{(x - 4)(3 + \sqrt{x^2 - 7})}$$

Simplificando el numerador:

$$f(x) = \frac{9 - x^2 + 7}{(x - 4)(3 + \sqrt{x^2 - 7})} = \frac{16 - x^2}{(x - 4)(3 + \sqrt{x^2 - 7})}$$

Notamos que  $16 - x^2$  se puede factorizar como  $(4 - x)(4 + x)$ :

$$f(x) = \frac{(4 - x)(4 + x)}{(x - 4)(3 + \sqrt{x^2 - 7})}$$

$$f(x) = \frac{-(x - 4)(4 + x)}{(x - 4)(3 + \sqrt{x^2 - 7})}$$

$$f(x) = \frac{-(4+x)}{3 + \sqrt{x^2 - 7}}$$

Ahora, evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{-(4+4)}{3 + \sqrt{4^2 - 7}} = \frac{-8}{3 + \sqrt{9}} = \frac{-8}{3+3} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, el límite de la función cuando  $x \rightarrow 4$  es  $-\frac{4}{3}$ .

2. Usando el GeoGebra graficar la primera función, e imprimir en una escala adecuada (visible).

**Respuesta:**

3. Comprobar el resultado obtenido matemáticamente con el observado en el gráfico.

**Respuesta:**

Al graficar la función  $f(x)$  usando GeoGebra, se observa que conforme  $x$  se acerca a 4 desde ambos lados, la función se aproxima al valor  $-\frac{4}{3}$ . Esto confirma el resultado obtenido matemáticamente.

4. Repetir los numerales 1 y 2 para la función  $g(x)$  y  $h(x)$ .

**Para  $g(x)$  encontrar matematicamente el limite indicado.:**

**Respuesta:**

Simplificamos:  $x^2 - 9$  se puede factorizar como  $(x - 3)(x + 3)$ :

$$g(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x^2 + 1)}$$

Evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x^2+1)}$$

Sustituyendo  $x = 3$ :

$$g(3) = \frac{(3-3)(3+3)}{3(3^2+1)} = \frac{0 \cdot 6}{3(9+1)} = \frac{0}{30} = 0$$

Por lo tanto, el límite de la función cuando  $x \rightarrow 3$  es 0.

Ahora, evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 1)}$$

Dividimos el numerador y el denominador por  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{x(x^2+1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{9}{x^2}}{x + \frac{1}{x}}$$

Conforme  $x$  tiende a infinito, los términos  $\frac{9}{x^2}$  y  $\frac{1}{x}$  tienden a cero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{x + 0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo tanto, el límite de la función cuando  $x \rightarrow \infty$  es 0.

**Grafico de g(x):**

**Respuesta:**

**Para h(x) encontrar matematicamente el limite indicado.:**

**Respuesta:**

La función  $h(x)$  está definida por partes:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 5x - 6}, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Primero, evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow 1$  desde la izquierda ( $x \leq 1$ ):

$$h(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 5x - 6}$$

Factorizamos el numerador y el denominador:

$$h(x) = \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x+6)}$$

$$h(x) = \frac{x-6}{x+6}$$

Evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow 1$  desde la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \frac{1-6}{1+6} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$$

Ahora, evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow 1$  desde la derecha ( $x > 1$ ):

$$h(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Factorizamos el numerador y el denominador:

$$h(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$h(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Evaluamos el límite cuando  $x \rightarrow 1$  desde la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Como los límites laterales no son iguales, el límite de  $h(x)$  cuando  $x \rightarrow 1$  no existe.

**Grafico de h(x):**

**Respuesta:**