Clase 11.1

III CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Introducción.

Intuitivamente la continuidad de una función y = f(x) significa que, si x está próximo a un punto x_0, entonces f(x) está muy cercano a $f(x_0)$ tanto como nosotros queremos; es decir, no se producen saltos bruscos de la función en el punto x_0.

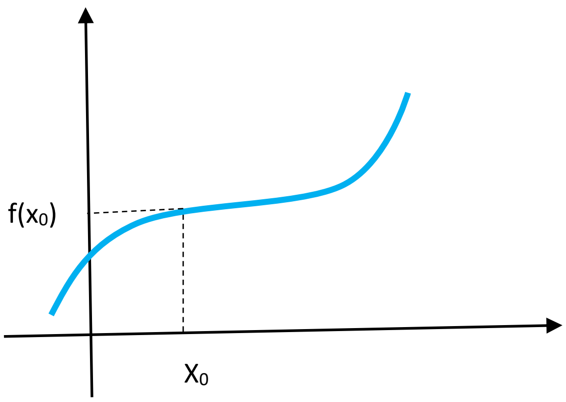


Figura a: Función continua en x_0

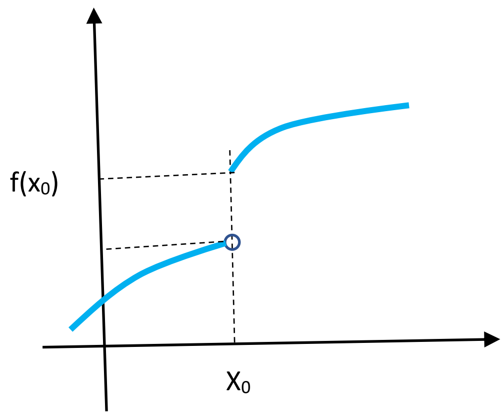


Figura b: Función discontinua en x_0

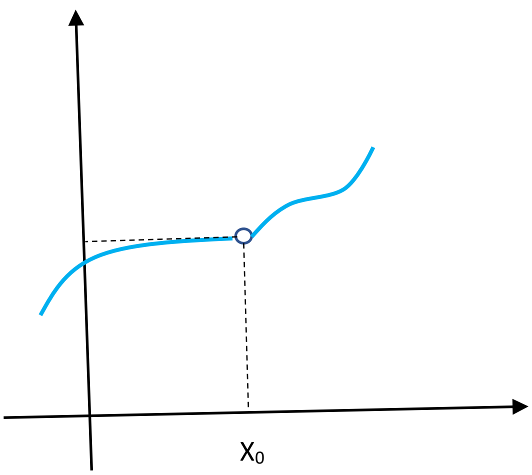


Figura c: Función discontinua en x_0

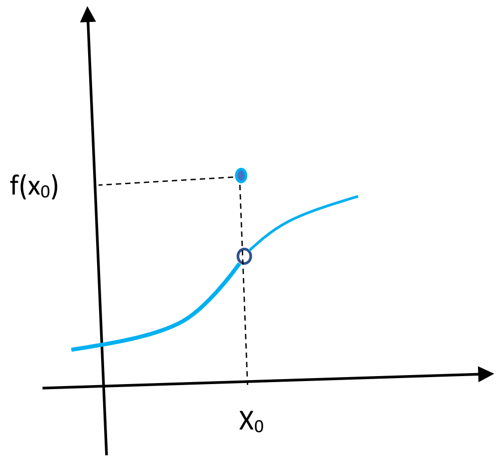


Figura d: Función discontinua en x_0

Definición de continuidad de una función en un punto x_0.

Una función f(x) se dice que es continua en un punto x_0 si se verifica a la vez las siguientes condiciones:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\quad existe\ y\ es\ propio$
2. $f(x_0)$ $\quad existe$

3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Observación. Para que exista el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no necesariamente f debe estar definida en x_0.

Ejemplos de funciones continuas

1. La función constante es continua en todo punto. En efecto si f(x) = K, entonces:
   a. $\lim_{x \to x_0} K = K$
   b. $f(x_0) = K$
   c. K = K
2. La función identidad es continua en todo punto de su dominio que son los reales.
3. Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio que son los reales.
4. Las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ son continuas, excepto en los puntos donde q(x) = 0.
5. Las funciones sen(x) y cos(x) son continuas en todo los reales.
6. La función exponencial es continua en todo los reales
7. La función logarítmica es continua en x > 0

Ejemplos

1. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en x = 1
   a. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad indeterminado$

      $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2 \quad existe\ y\ es\ propio$

   b. $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad no\ existe$

   c. No se puede ni comparar

Por tanto, la función dada no es continua en x = 1

2. Estudiar la continuidad x = 0 y en x = 2 de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x \leq 0 \\ 2x - 1 & si \; 0 < x \leq 2 \\ x + 5 & si \; x > 2 \end{cases}$$

En x = 0

a. $\lim_{x \to 0} f(x) \;\; \to\to\to\to \;\; \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$

$\lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = 2(0) - 1 = -1$

Entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

b. $f(0) = 0^2 - 1 = -1$

c. -1 = -1

$f(x) es\ continua\ en\ x = 0$

En x = 2

a. $\lim_{x \to 2} f(x) \to\to\to\to \;\; \lim_{x \to 2^-} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} (x + 5) = 2 + 5 = 7$

Entonces $\lim_{x \to 2} f(x) \;\; no\ existe$

Por tanto, la función no es continua en x = 2

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x) = |x^2 - 2x| + 3$
2. Halle el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo los reales

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & si \; x \leq -2 \\ kx & si \; x > -2 \end{cases}$$

Clase 11.2

Teoremas sobre continuidad de funciones

Teo.1. Sea f y g dos funciones continuas en un punto x_0, entonces:

a. $(f \pm g)\ es\ continua\ en\ x_0$
b. $(f.g)\quad es\ continua\ en\ x_0$
c. $\left(\frac{f}{g}\right)\quad con\ g(x) \neq 0\ \ es\ continua\ en\ x_0$

(la demostración que omitimos se hace con propiedades de los límites)

Teo.2. PRINCIPIO DE INTERCALACIÓN (TEOREMA DEL SANDWICH)

Si f, g ,h son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \ \forall x \in N(x_0, \delta)$ y si además $\lim_{x \to x_0} f(x) = A = \lim_{x \to x_0} h(x),\ \ entonces\ \ \lim_{x \to x_0} g(x) = A$

Teo.3. Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces gof es continua en x_0

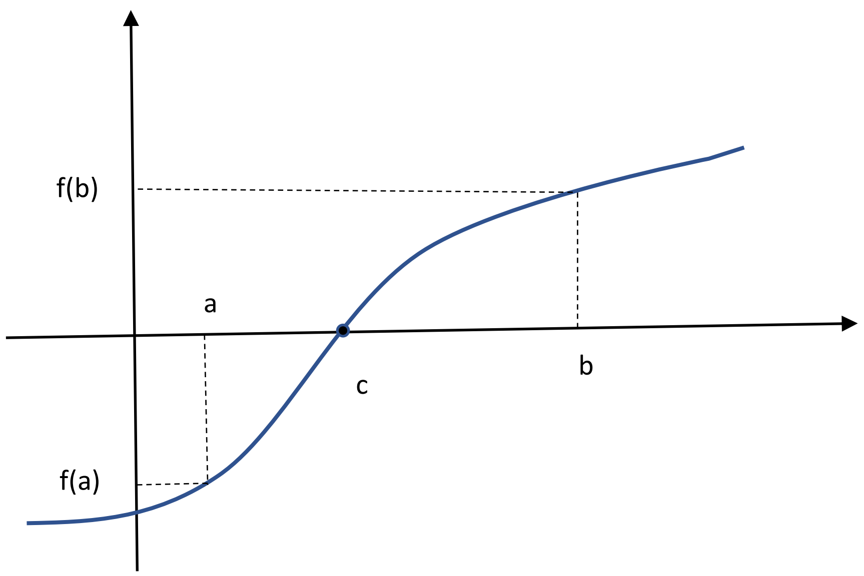
Teo.4. Si f es continua en L y $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(L)$

Teo.5. La inversa de una función continua, si existe, es continua

Teo.6. Si f es continua en $[a, b]$ entonces, f es acotada en $[a, b]$

Teo.7. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma sus valores máximos y mínimos en $[a, b]$

Teo. 9, de Bolzano. Si f es continua en $[a, b]$. Si f(a) y f(b) tiene diferente signo, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que f(c) = 0



Teo. 10. Del valor intermedio. Sea f continua en $[a, b], si\ f(a) \neq f(b)$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b)

DEFINICIÓN. F es continua en un intervalo $[a, b]$ ssi f es continua en cada punto de $[a, b]$. En a y b se considera continuidad por la derecha y por la izquierda respectivamente.

Ejemplos

1. Demostrar que $h(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}$ es continua en todos los reales

Considerando $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ y $g(x) = x^2 + x + 1$ y que las dos son funciones existen y son continuas en todos los reales, entonces por el teo.3 h = fog también es continua en todos los reales.

2. Demostrar que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[2,3]$

Como el dominio de f(x) es polinómica, es continua en todos los reales; entonces:

$$f(2) = 2^3 - 2.2^2 - 2 = -2 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 2.3^2 - 2 = 7 > 0$$

Distinto signo, por el teorema de Bolzano existe un c tal que f(c)= 0, el c es la raíz que habrá que calcular.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demostrar que $f(x) = (\log x)^3$ es continua en todo punto x > 0
2. Demostrar que $f(x) = \sqrt[3]{cos^2 x + 1}$ es continua en todos los reales.

Discontinuidad de funciones. Tipos.

Una función f(x) se dice que es discontinua en x_0 si f(x) no es continua. En este caso se puede distinguir dos posibilidades.

a. Si no existe el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ o su límite es impropio, se dice que la discontinuidad es esencial o **inevitable**.
b. Si existe el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y es propio, se dice que la discontinuidad **es evitable**

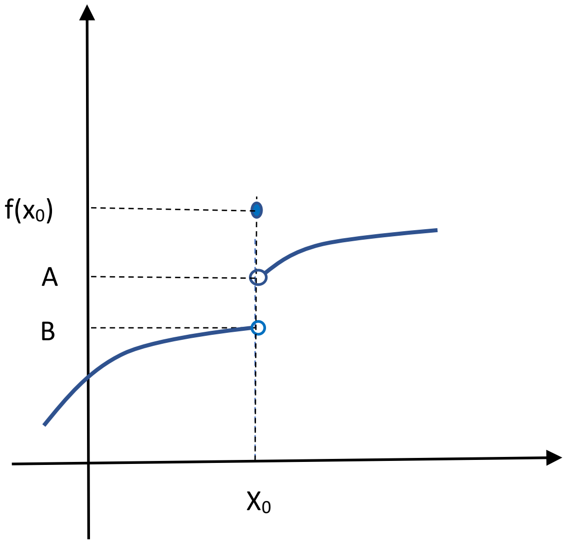


Figura a. No existe límite. Disc. Inevitable

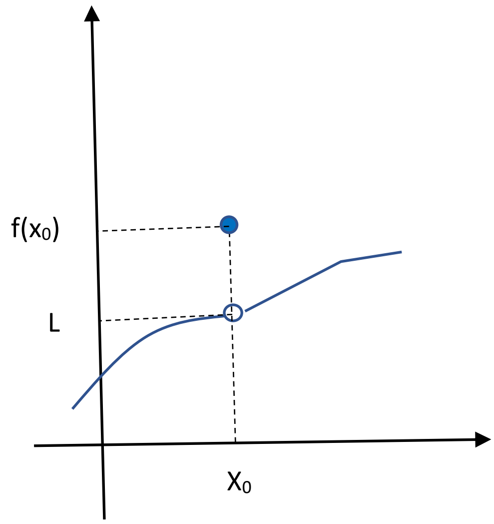


Figura b. Existe límite. Disc. Evitable

Observación: La discontinuidad se dice evitable, porque se puede redefinir la función para que sea continua.

Ejemplos

1.

a) Determinar si la función $f(x) = 2\frac{x^2-x}{x-1}$ es continua o discontinua.

b) ¿Si es discontinua de qué tipo es?

c) Si es evitable, redefina para que sea continua

a) **El dominio de f(x) es $\mathbb{R} - \{1\}$, por lo que el problema de continuidad está en x = 1

Entonces: $\lim_{x\to 1} 2\frac{x^2-x}{x-1} = 2\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad indeterminado$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x = 2(1) = 2$$

$$f(1) = 2\frac{(1^2-1)}{1-1} = \frac{0}{0} \quad no\ existe$$

$$Por\ tanto\ la\ función\ no\ es\ continua\ en\ x = 1$$

b) Como existe el límite (es 2) la continuidad es de tipo evitable

c) Al redefinir, pongo el valor del límite en el valor de la función en el punto donde no existe, de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\frac{x^2-x}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$$

De esta manera ya podemos probar que la función redefinida es continua.

Continuidad lateral. Definiciones

a. Se dice que f(x) es continua en x_0 por la izquierda si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
b. Se dice que f(x) es continua en x_0 por la derecha si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Observación. Se dice que f(x) es continua en x_0 si y solo si f es continua por la derecha y por la izquierda y sus límites son iguales.

Ejemplos.

1. Determinar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 3 \\ 3 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ en x = 3

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2\,,\ \ entonces\ es\ continua\ por\ la\ izquierda\ en\ x = 3$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3\,,\ \ entonces\ es\ continua\ por\ la\ derecha\ en\ x = 3$$

Pero como $2 \neq 3$, entonces f(x) no es continua en x = 3

Clase 11.3 PAE

1. Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & si\ x < 0 \\ 3x + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$
2. Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & si\ x \leq 1 \\ \frac{1-x}{x} & si\ 1 < x \leq 3 \\ \frac{2x}{x-5} & si\ x > 3 \end{cases}$

Trabajo Autónomo TA 2.1

Resolver los ejercicios propuestos esta semana