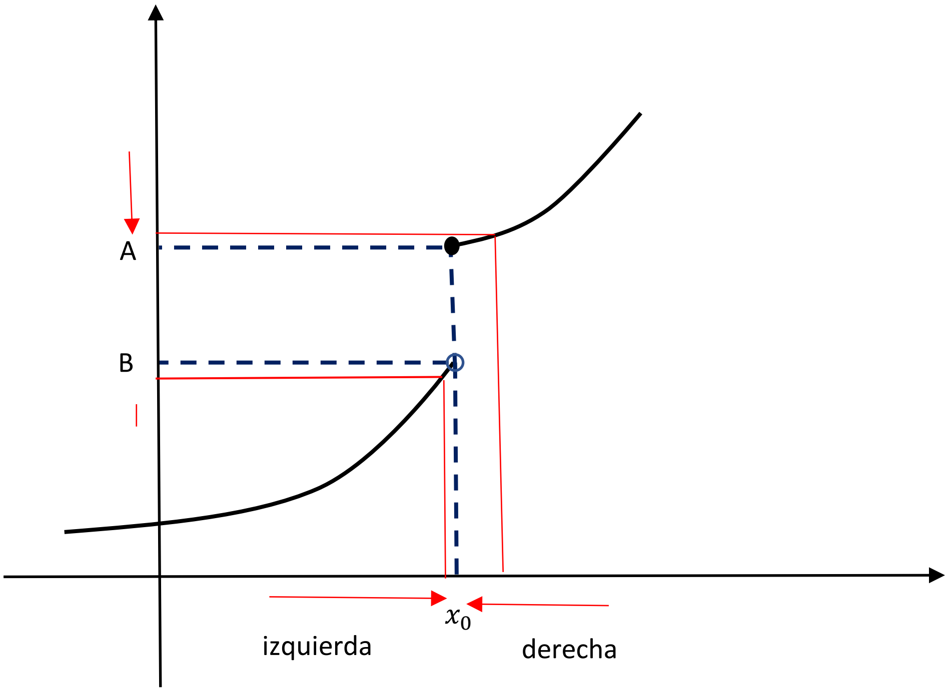
Clase 10.1

LÍMITES LATERALES

Sirve para estudiar funciones como la de la figura



Si x se acerca a x_0 por la izquierda ($x < x_0$) el valor de f(x) se acerca a B; y si x se acerca a x_0 por la derecha ($x > x_0$) entonces f(x) se acerca a A.

Pero $A \neq B$; pero no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Observación

El $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ \ existe \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

NOTACIÓN

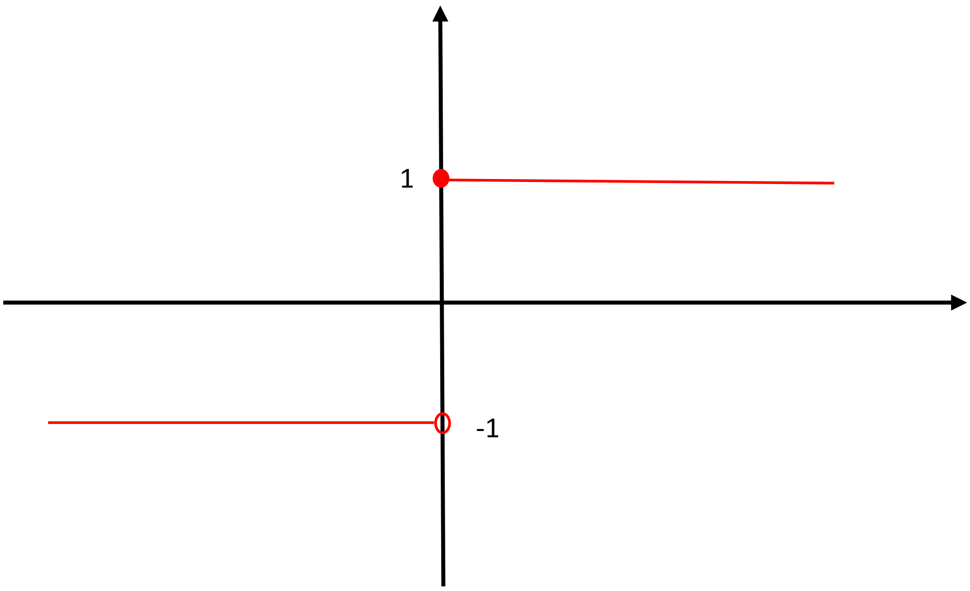
- El $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\ se\ lee\ límite\ de\ f(x)\ cuando\ x\ tiende\ a\ x_0\ por\ la\ izquierda$
- El $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\ se\ lee\ límite\ de\ f(x) cuando\ x\ tiende\ a\ x_0\ por\ la\ derecha$

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

En este caso: $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \ \ si \ \ x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 \ \ si \ \ x < 0 \end{cases}$

Si graficamos la función tenemos:



Por tanto, al calcular el límite no se puede reemplazar directamente el 0, pues justo, en cero hay un "salto" de la función. En estos casos es necesario aplicar los límites laterales y la observación.

$\operatorname{Lim}\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{cases}$ y como son diferentes, por la observación

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \ \ No \ existe$$

2. Calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} -x + 2 \ \ si \ \ x \leq 2 \\ (x-2)^2 \ \ si \ \ x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (-x + 2) = -2 + 2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2)^2 = (2-2)^2 = 0 \end{cases}$$

Como son iguales, por la observación, $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

3. Si $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$

Aplicando la definición de valor absoluto convertimos a la función dada en una función por partes.

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} = 1 & si \;\; x-2 \geq 0 \; (x \geq 2) \\ \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 & si \;\; x-2 < 0 \; (x < 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -1 = -1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 2} f(x) \quad No\ existe$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular $\lim_{x \to 1} |x-1|$
2. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

3. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & si \;\; x \geq 1 \\ x + b, & si \;\; x < 1 \end{cases}$ donde a y b son constantes.

   Para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$, ¿qué relación debe haber entre a y b?
4. Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$
5. Calcular $\lim_{x \to 0} f(x) \;\; si \;\; f(x) = \begin{cases} x^3 & si \;\; x \leq 0 \\ x^2 & si \;\; x > 0 \end{cases}$

LÍMITES INFINITOS

Ocurre cuando tenemos casos como de las siguientes figuras.

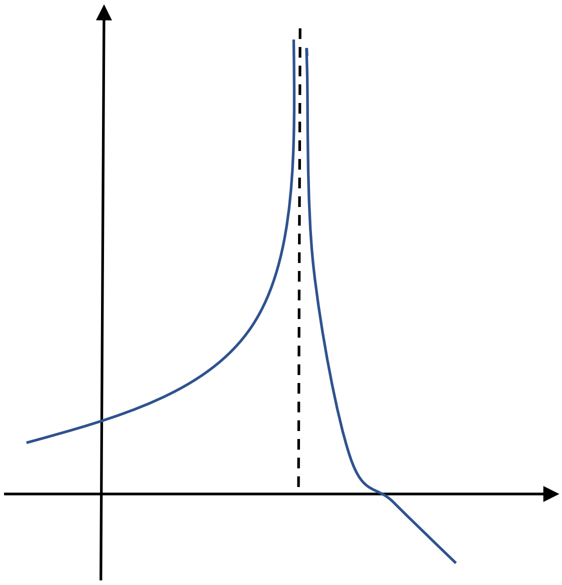


Figura a

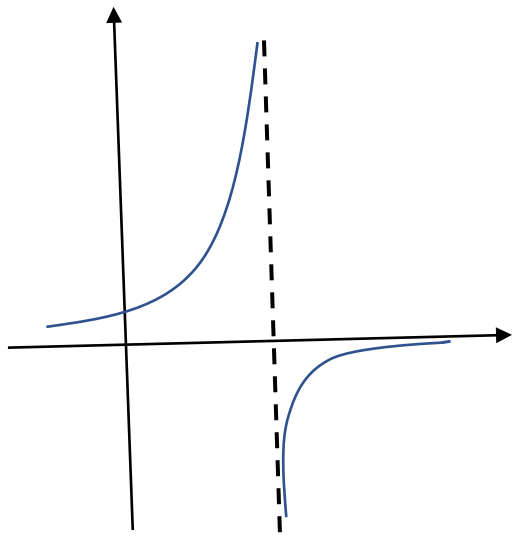


Figura b

En la figura a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ (igual puede ser } -\infty\text{)}$$

En la figura b

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = No\ existe, \text{ pues } \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$

$$\begin{cases} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \end{cases} \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \quad no\ existe$$

2. Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{1^- -1} = \dfrac{1}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{1^+ -1} = \dfrac{1}{+0} = +\infty \end{cases} \qquad entonces \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \quad no\ existe$$

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0^-)^2} = \dfrac{1}{0} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0^+)^2} = \dfrac{1}{0} = +\infty \end{cases} \qquad entonces \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad (impropio)$$

LÍMITES EN EL INFINITO

En las siguientes figuras vemos este caso

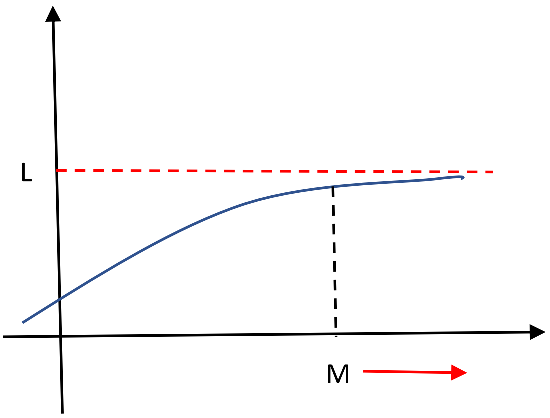


Figura a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

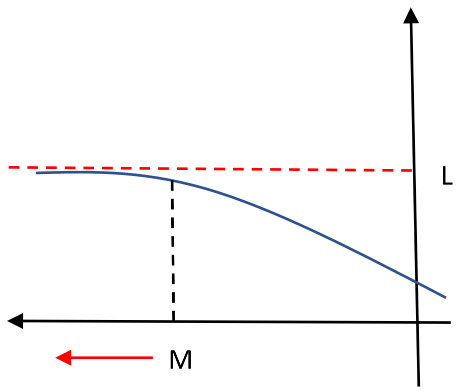


Figura b. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$

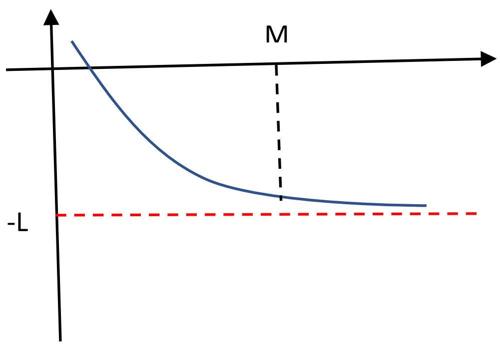


Figura c. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -L$

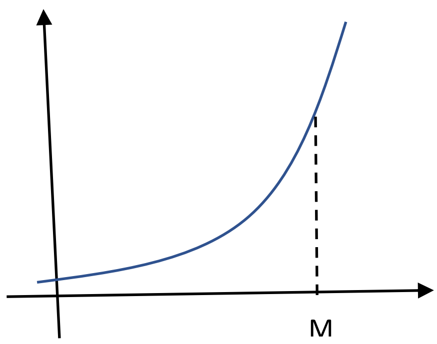


Figura d. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Clase 10.2

Observación

Si a es un número racional positivo y c es un número real cualquiera, tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^a}=0$$

De acuerdo con esto se puede concluir que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ que es el sustento para cuando tenemos indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$, dividir para la variable con el mayor exponente.

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+7}{x^2+3}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+7}{x^2+3}\right)=\frac{2\infty^2+\infty+7}{\infty^2+3}=\frac{\infty}{\infty}\ \textit{indeterminación}$$

Entonces: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+x+7}{x^2}}{\frac{x^2+3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+7.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}}{1+3.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}}=\frac{2+0+0}{1+0}=2$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-3}=\frac{\sqrt{9\infty^2+1}}{2\infty-3}=\frac{\infty}{\infty}\quad \textit{indeterminación}$

Entonces $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}{\frac{2x-3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{9+0}}{2-0}=\frac{3}{2}$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)=\sqrt{\infty^2-3\infty+1}-\infty=\infty-\infty$
   indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1-x^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}$$

$$= \frac{-3\infty+1}{\sqrt{\infty^2-3\infty+1}} = \frac{\infty}{\infty} \quad indeterminación$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x+1}-x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{-3}{\sqrt{1}+1} = -\frac{3}{2}$$

Límites de casos especiales

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log x = +\infty$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular los siguientes límites

a. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-5x+3}{-3x^2+x-2}$
b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x} + 2\right)$
c. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x}\right)$
d. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}\right)$

LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Hemos visto que el cálculo de los límites de muchas funciones consiste en la sustitución directa. Con las funciones trigonométricas, también se puede hacer esto.

- $\lim\limits_{x\to a} sen(x) = sena$
- $\lim\limits_{x\to a} cosx = cosa$
- $\lim\limits_{x\to a} tgx = tga$
- $\lim\limits_{x\to a} ctgx = ctga$
- $\lim\limits_{x\to a} secx = seca$
- $\lim\limits_{x\to a} cscx = csca$

Cuando hay una indeterminación, además de utilizar los diferentes métodos ya conocidos para levantar la indeterminación, en el caso de funciones trigonométricas, se aplica las identidades trigonométricas que nos ayuda a simplificar; además del siguiente límite conocido:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} = \frac{1-cos0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \quad indeterminación$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-cosx)(1+cosx)}{x(1+cosx)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-cos^2x}{x(1+cosx)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2x}{x(1+cosx)} = \lim_{x \to 0} \frac{sexx}{x} . \lim_{x \to 0} \frac{senx}{1+cosx}$$

$$= \frac{sen0}{1+cos0} = \frac{0}{1+1} = 0$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{senx} = \frac{tgo}{seno} = \frac{0}{0} \quad indeterminación$

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{cox.senx} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{cosx} = \frac{1}{cos0} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{sen2.0}{0} = \frac{0}{0} \quad indeterminación$

   Por la identidad trigonométrica: sen2x = 2senx.cosx

$$\lim_{x \to 0} \frac{2senx.cosx}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} . \lim_{x \to 0} cosx = 2.1. cos0 = 2.1.1 = 2$$

4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-tgx}{senx-cosx} = \frac{1-\tan\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0} \quad indeterminación$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-tgx}{senx-cosx} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{senx}{cosx}}{sex-cosx} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cosx-senx}{cosx(senx-cosx)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-(senx-cosx)}{cosx(senx-cosx)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{cosx} = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular los siguientes límites trigonométricos

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos^2 x}{x}$
b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos^2 x}{x}$
c. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{sen(x+1)}{x+1}$
d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen3x}{x}$
e. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen3x}{sen2x}$
f. $\lim\limits_{x\to \pi} x.secx$

Clase 10.3 PAE

Objetivo. Encontrar los límites de las funciones dadas.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^4-x^3-x^2-x}$

2. Calcular a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \quad si \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & si \ \ x < 0 \\ 3x+1 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3-2x+5}}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen2x}{\sqrt{1-cosx}}$

ACTIVIDAD COLABORATIVA 2.1

Resolver los siguientes ejercicios de límites

1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+5x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{3-\sqrt{4+x}}{x-5}$
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{sen(x-a)}$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{x}{x-2}\right)$

5. Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & si \quad x \le 1 \\ \frac{1-x}{x} & si \quad 1 < x \le 3 \\ \frac{2x}{x-5} & si \quad x > 3 \end{cases}$

6. $\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+x+2} - (x-5)\right]$

7. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

8. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x-4}\right)^{2x+3}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x - sen5x}{x}$

10. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3x^2}\right)^{\frac{5x}{2x-3}}$