CLASE 4.1.

Flujo Eléctrico y Ley de Gauss.

El flujo de campo eléctrico es una propiedad matemática que tienen todos los campos vectoriales.

Para definir cuantitativamente el flujo de campo eléctrico Φ, consideremos una superficie colocada dentro de un campo eléctrico externo como en la siguiente figura:

El campo $\vec{E}_i$ que atraviesa la superficie infinitesimal $\overrightarrow{\Delta S}_i = \Delta S\vec{n}$ es el flujo de campo eléctrico Φ_i; con $\vec{n}$ el vector unitario de la superficie ΔS . Todo vector relacionado con una superficie cerrada se le representa en sentido hacia afuera de la misma.

Matemáticamente, se define el flujo de campo eléctrico como el producto escalar de los vectores campo eléctrico y superficie.

$$\Phi_i = \vec{E}_i . \overrightarrow{\Delta S}_i$$

Por lo que el **flujo total** tendremos mediante la integral de superficie.

$$\Phi = \oiint \vec{E}. \overrightarrow{dS} \quad \text{o simplemente} \quad \boldsymbol{\Phi = \int \vec{E}. \overrightarrow{dS}}$$

Ley de Gauss. La ley de Gauss dice “El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada en esa superficie”. Matemáticamente tenemos

$$\boldsymbol{\Phi = \int \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

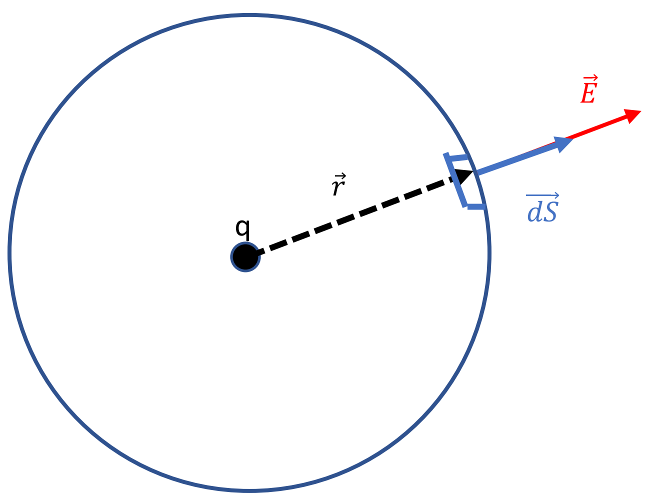
La ley de Gauss es un método alternativo para encontrar el campo eléctrico de cuerpos cargados que tienen de alguna forma simetría.

Ejemplos

1. Calcular el campo eléctrico producido por una carga puntual q, a una distancia r.

Para resolver este problema aplicamos la Ley de Gauss y debe obtenerse igual resultado que el que obtuvimos anteriormente (escalarmente $E = k\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$).

Para esto dibujamos una **superficie Gaussiana** (que es hipotética) en forma de esfera con centro en la carga puntual y que su superficie contenga al punto donde queremos calcular el campo eléctrico.



Aplicando la ley de Gauss: $\int \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Desarrollando el producto punto: $\int EdS\cos 0^o = \frac{q}{e_0}$

Como E es constante en cualquier punto de la esfera, y de igual forma los vectores $\vec{E}\ y\ \overrightarrow{dS}$ forman siempre un ángulo de 0º tendremos

$E\int dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (una integral de superficie)

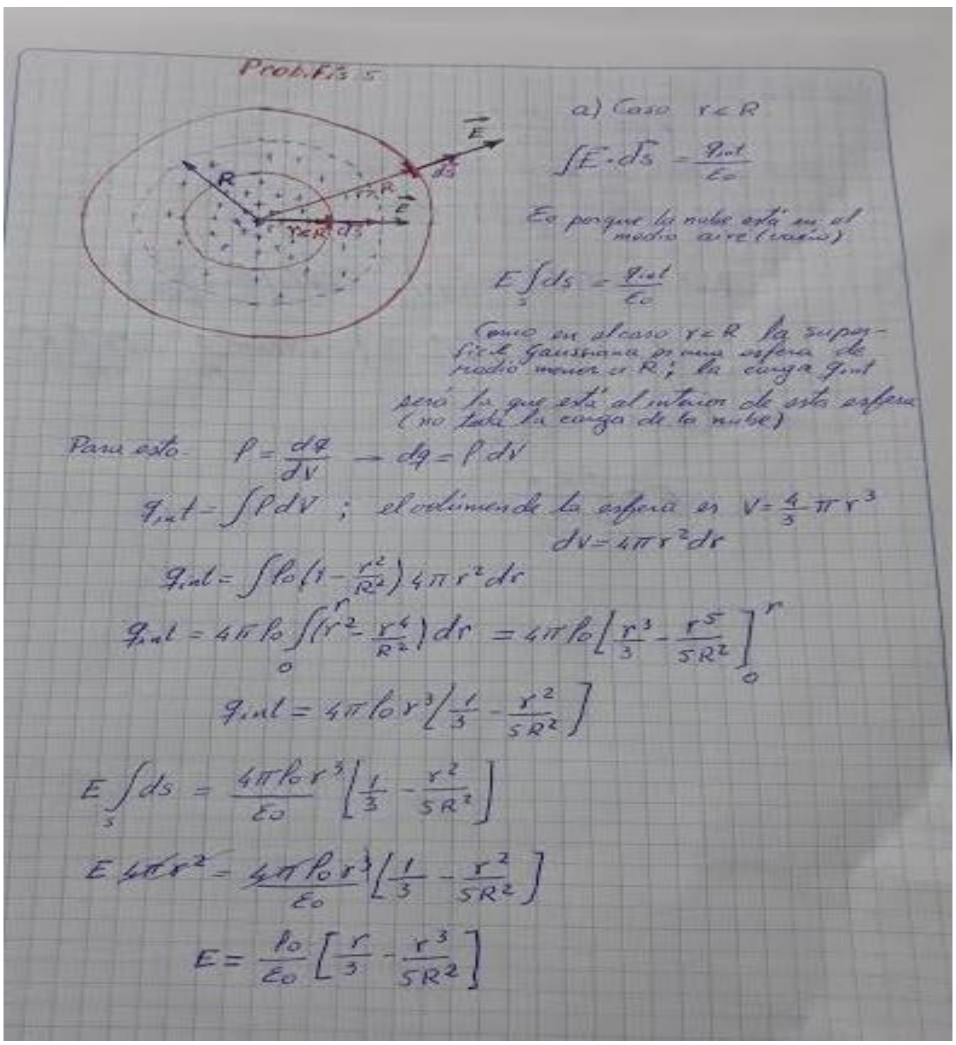
La integral de superficie no es más que integrar (sumar) todos los dS, lo que evidentemente nos da la superficie de la esfera que es $S = 4\pi r^2$; con lo cual

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2. Calcular el campo eléctrico de una nube esférica de radio R, cargada con densidad volumétrica de carga dada por $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$. Calcular en los casos r < R y r > R

(En Carpeta: Docum.Fisica/Prob.Fís5)



Prob.Fís 5

a) Caso $r < R$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ε_0 porque la nube está en el medio aire (vacío)

$$E \int_S ds = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Como en el caso $r < R$ la superficie Gaussiana es una esfera de radio menor a R; la carga q_{int} será la que está al interior de esta esfera (no toda la carga de la nube)

Para esto $\rho = \frac{dq}{dV} \rightarrow dq = \rho\, dV$

$q_{int} = \int \rho\, dV$; el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$dV = 4\pi r^2 dr$

$$q_{int} = \int \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$q_{int} = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]_0^r$$

$$q_{int} = 4\pi\rho_0 r^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2}\right]$$

$$E \int_S ds = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2}\right]$$

$$E\, \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4\pi}\rho_0 r^3}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2}\right]$$

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right]$$

b) caso $r>R$

$$E\int ds = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

q_{int} es toda la carga de la nube

$$q_{int} = \int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)4\pi r^2 dr$$

$$q_{int} = 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right]_0^R = 4\pi\rho_0\left[\frac{R^3}{3}-\frac{R^5}{5R^2}\right]$$

$$q_{int} = 4\pi\rho_0 R^3\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right] = 4\pi\rho_0 R^3\frac{2}{15} = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$$

$$\Rightarrow E\,\cancel{4}\cancel{\pi} r^2 = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cancel{\pi}\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0}$$

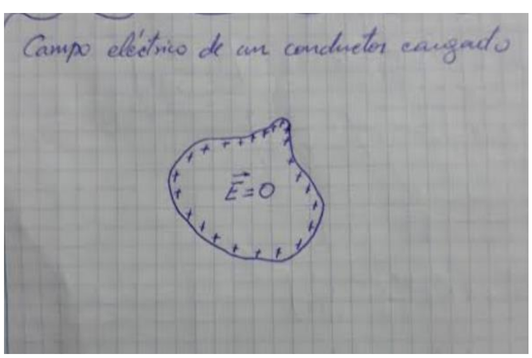
$$E = \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2}$$

CLASE 4.2.

Distribución de carga y campo eléctrico en conductores cargados.

Un material conductor es aquel que tiene facilidad de movimiento de sus cargas, pero si además está cargado y aislado, este exceso de cargas se distribuye en su superficie externa.

Por este motivo el **campo eléctrico en el interior de un cuerpo cargado conductor es nulo;** en caso contrario se generaría fuerza electrostática y esta es de repulsión.

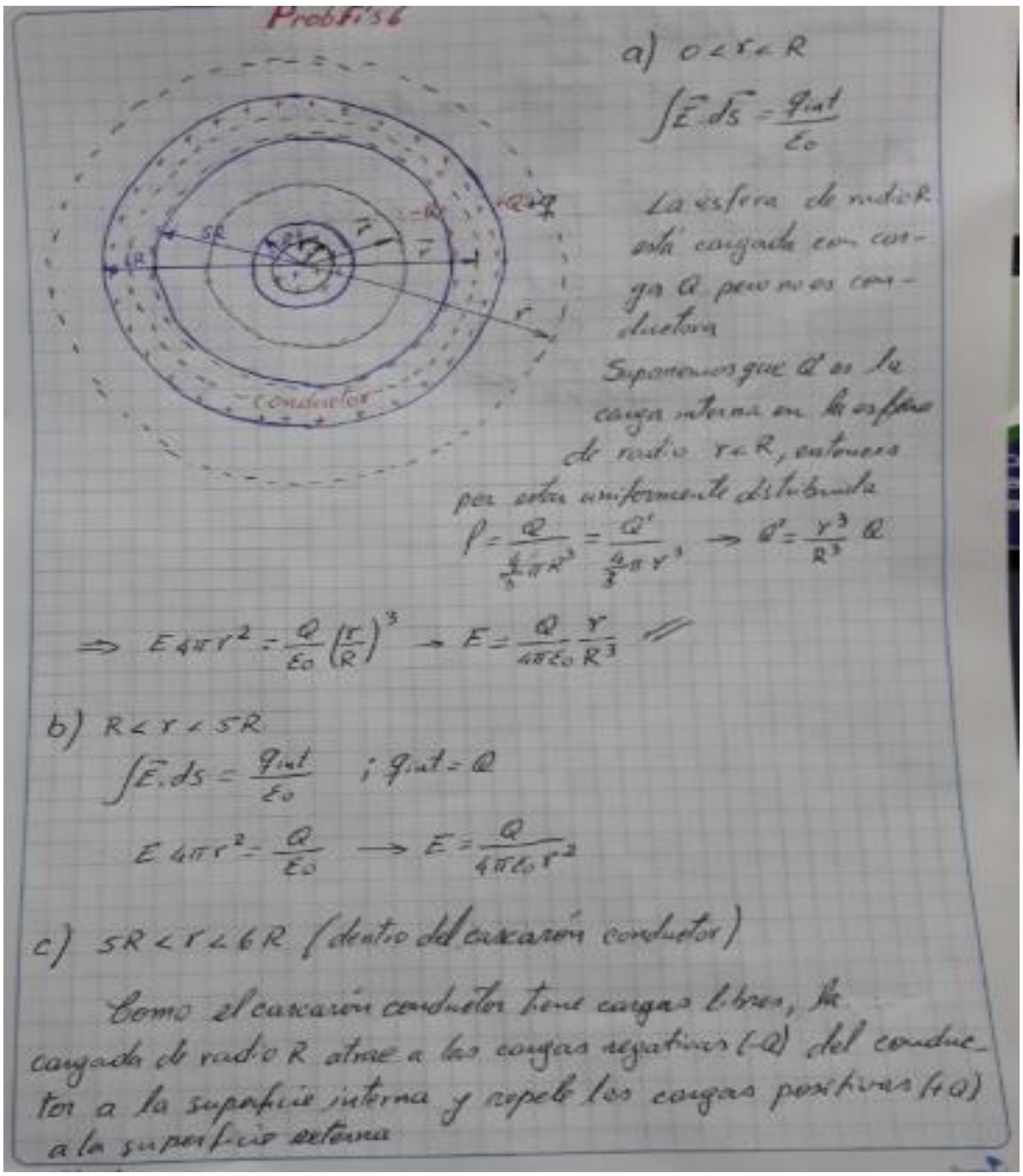


Aplicando la ley de Gauss y al no tener carga interna demostramos que el campo al interior es nulo

$$\int \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{0}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow\Longrightarrow \quad \vec{E} = 0$$

Ejemplos

1. Considere una distribución volumétrica de carga Q uniformemente distribuida y de radio R, rodeada por un cascarón esférico conductor cargado con carga neta q. El radio interno del cascarón es 5R y el externo es 6R. Obtener el campo eléctrico en los siguientes casos: a) 0 < r < R, b) R < r < 5R, c) 5R < r < 6R, d) r > 6R



a) $0 < r < R$

$$\int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La esfera de radio R está cargada con carga Q pero no es conductora

Suponemos que Q' es la carga interna en la esfera de radio r<R, entonces por estar uniformemente distribuida

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \rightarrow Q' = \frac{r^3}{R^3} Q$$

$$\Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

b) $R < r < 5R$

$$\int \vec{E}.ds = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad ; q_{int} = Q$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

c) $5R < r < 6R$ (dentro del cascarón conductor)

Como el cascarón conductor tiene cargas libres, la cargada de radio R atrae a las cargas negativas (-Q) del conductor a la superficie interna y repele las cargas positivas (+Q) a la superficie externa entonces $\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q+(-Q)}{\varepsilon_0} \rightarrow E = 0$$

d) $r > 6R$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad ; q_{int} = Q+q$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q+q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2. Calcular el campo eléctrico de un cilindro conductor cargado con carga neta Q de radio 10 cm y longitud infinita. A) en puntos tal que el radio sea menor a 10 cm ($0 < r < 10$ cm), y B) si $r > 10$ cm.

Clase de ejercicios

Objetivo. Resolver los siguientes ejercicios

1. Aplicando la ley de gauss, encontrar el campo eléctrico en un punto situado a una distancia a de un alambre infinito cargado con densidad lineal de carga λ.
2. Una esfera de radio R_1 (m) tiene una carga -Q uniformemente distribuida en todo su volumen. Se sobrepone un cascarón esférico de radio $R_2 > R_1$ con carga superficial uniformemente distribuida Q. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos posibles.
3. Un cuerpo esférico macizo conductor de radio R = 10 cm, tiene carga uniformemente distribuida de valor $q = 10^{-6}$ C. Determine:
   a. El valor del campo eléctrico para un punto interior al conductor.
   b. El valor del campo eléctrico para un punto exterior al conductor.
   c. Dibuje la gráfica E vs. R

TAREA

Las preguntas siguientes se elaboraron para que repase los puntos más importantes abordados en este tema. Si tiene dudas acuda a los textos de la bibliografía.

1. Explique cómo debemos proceder para verificar si existe campo eléctrico en un punto dado del espacio
2. Si conocemos la intensidad del campo eléctrico E en un punto y el valor de una carga q colocada en dicho punto, ¿cómo podemos calcular el valor de la fuerza eléctrica que actúa sobre q?
3. Suponga que se conoce el vector $\vec{E}$ en un punto dado. Diga en qué sentido tiende a moverse una carga eléctrica colocada en dicho punto, si el signo de la carga es positivo, y si es negativo.
4. Escriba la expresión que permite calcular el campo eléctrico producido por una carga puntual en un punto dado. Explique el significado de cada símbolo que aparece en esta expresión.
5. Describa cómo hay que proceder para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$, creado en un punto P por varias cargas puntuales.
6. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en el interior de una esfera maciza cargada? ¿Y si esta fuera hueca?
7. Conociendo una línea de fuerza de un campo eléctrico, explique cómo podemos determinar la dirección y el sentido del vector $\vec{E}$ en cada punto de esa línea.
8. ¿Cómo es posible obtener información acerca del valor de la intensidad de un campo eléctrico observando un diagrama de sus líneas de fuerza?
9. ¿Qué es un campo eléctrico uniforme? Trace un dibujo que muestre este tipo de campo.
10. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en el interior de un conductor cargado?
11. ¿Cuál es la dirección del vector $\vec{E}$ en puntos exteriores al conductor, pero cercanos a su superficie?
12. Consulte lo que se conoce como “jaula de Faraday”