1) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$1 = \frac{3^1 - 1}{2}$$
$$1 = \frac{2}{2}$$
$$1 = 1$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$s_k = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$$

c) $n = k + 1$

$$s_{k+1} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1} + 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

Demostración:

$$s_{k+1} = s_k + 3^k$$
$$s_{k+1} = \frac{3^k - 1}{2} + 3^k$$
$$s_{k+1} \equiv \frac{3^k - 1 + 2 \cdot 3^k}{2}$$
$$s_{k+1} = \frac{3 \cdot 3^k - 1}{2}$$
$$s_{k+1} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

2) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \cdots + \frac{1}{(1+2+3+4+5+\cdots+n)} = \frac{2n}{(n+1)}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$1 = \frac{2 \cdot 1}{(1+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \cdots + \frac{1}{(1+2+3+4+5+\cdots+k)} = \frac{2k}{(k+1)}$$

c) $n = k + 1$

$$1+\frac{1}{(1+2)}+\cdots+\frac{1}{(1+2+3+4+5+\cdots+k)}+\frac{1}{(1+2+3+4+5+\cdots+k+(k+1))}=\frac{2(k+1)}{(k+2)}$$

Demostración:

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\mathrm{s}_{\mathrm{k}}+\frac{1}{(1+2+3+4+5+\cdots+k+(k+1))}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\frac{2\mathrm{k}}{(k+1)}+\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\frac{2(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\frac{2(k+1)}{(k+2)}$$

3) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

a) Paso Básico: $n=1$

$$1\cdot 2\cdot 3=\frac{1(2)(3)(4)}{4}$$

b) Paso Inductivo: $n=k$ ASUMIR

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

c) $n=k+1$

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Demostración:

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\mathrm{s}_{\mathrm{k}}+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k}+1}=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$s_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

$$s_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

4) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^k = \frac{1}{16}[5 + (4n-1)5^{n+1}]$$

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + n \cdot 5^n = \frac{1}{16}[5 + (4n-1)5^{n+1}]$$

Paso básico. $n = 1$

$$1 \cdot 5^1 == \frac{1}{16}[5 + (4 \cdot 1 - 1)5^{1+1}]$$

$$5 = \frac{1}{16}[80]$$

$$5 = 5$$

Paso inductivo $n = k$

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + k \cdot 5^k = \frac{1}{16}\left[5 + (4k-1)5^{k+1}\right]$$

$n = k + 1$

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \cdots + k \cdot 5^k + (k+1) \cdot 5^{(k+1)} = \frac{1}{16}\left[5 + (4(k+1) - 1)5^{(k+1)+1}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[5 + (4k+3)5^{k+2}\right] \text{TESIS}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$s_{k+1} = s_k + (k+1) \cdot 5^{(k+1)}$$

$$s_{k+1} = \frac{1}{16}\left[5 + (4k-1)5^{k+1}\right] + (k+1) \cdot 5^{(k+1)}$$

$$s_{k+1} = \frac{\left[5 + (4k-1)5^{k+1}\right] + 16(k+1) \cdot 5^{(k+1)}}{16}$$

$$s_{k+1} = \frac{5 + (4k-1)5^{k+1} + 16(k+1) \cdot 5^{(k+1)}}{16}$$

$$s_{k+1} = \frac{5 + 5^{k+1}[(4k-1) + 16(k+1)]}{16}$$

$$s_{k+1}=\frac{5+5^{k+1}[4k-1+16k+16]}{16}$$

$$s_{k+1}=\frac{5+5^{k+1}[20k+15]}{16}$$

$$s_{k+1}=\frac{5+5^{k+1}5[4k+3]}{16}$$

$$s_{k+1}=\frac{5+[4k+3]5^{k+2}}{16}$$

5) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

a) Paso Básico: $n=1$

$$1\cdot 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

$$1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$$

$$1\cdot 2=1\cdot 2$$

b) Paso Inductivo: $n=k$ ASUMIR

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

c) $n=k+1$

$$1\cdot 2+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Demostración:

$$1\cdot 2+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\frac{(k+1)(k+2)}{1}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

6) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$3 = \frac{1(4+6-1)}{3} = 3$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3}$$

c) $n = k + 1$

$$1 \cdot 3 + \cdots + (2k-1)(2k+1) + (2k+1)(2k+3) = \frac{(k+1)[4(k+1)^2+6(k+1)-1]}{3}$$

Demostración:

$$\mathrm{s_{k+1}} = \mathrm{s_k} + (2k+1)(2k+3)$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} + (2k+1)(2k+3)$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{k(4k^2+6k-1)+3(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{4k^3+6k^2-k+12k^2+24k+9}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{4k^3+18k^2+23k+9}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{4k^3+4k^2+14k^2+14k+9k+9}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{4k^2(k+1)+14k(k+1)+9(k+1)}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{(k+1)[4k^2+14k+9]}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{(k+1)[4k^2+8k+6k+4+6-1]}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{(k+1)[4k^2+8k+4+6k+6-1]}{3}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{(k+1)[4(k+1)^2+6(k+1)-1]}{3}$$

7) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$2 = 0 \cdot 2^2 + 2$$
$$2 = 2$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = (k-1)2^{k+1} + 2$$

c) $n = k + 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} = k2^{k+2} + 2$$

Demostración:

$$S_{K+1} = S_K + (k+1) \cdot 2^{k+1}$$

$$S_{K+1} = [(k-1)2^{k+1} + 2] + (k+1) \cdot 2^{k+1}$$

$$S_{K+1} = 2^{k+1}[(k-1) + (k+1)] + 2$$

$$S_{K+1} = 2^{k+1}[2k] + 2$$

$$S_{K+1} = k2^{k+2} + 2$$

8) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

c) $n = k + 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Demostración

$$S_{K+1} = S_K + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$S_{K+1} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$S_{K+1} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

9) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{(6n+4)}$$

a) Paso Básico: $n=1$

$$\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{(6\cdot 1+4)}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$$

b) Paso Inductivo: $n=k$ ASUMIR

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{(6k+4)}$$

c) $n=k+1$

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{k+1}{(6k+10)}$$

Demostración

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}}=s_k+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}}=\frac{k}{(6k+4)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}}=\frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}}=\frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}}=\frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}}=\frac{(k+1)}{(6k+10)}$$

10) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

a) Paso Básico: $n=1$

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1(3\cdot 1+7)}{2(1+1)(1+2)}$$

b) Paso Inductivo: $n=k$ ASUMIR

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)}$$

c) $n=k+1$

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}+\frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(3k+10)}{2(k+2)(k+3)}$$

Demostración

$$\mathrm{s_{k+1}}=s_k+\frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}}=\frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)}+\frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(3k+7)}{2}+\frac{k+5}{(k+3)}\right]$$

$$\mathrm{s_{k+1}}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(3k+7)(k+3)+2(k+5)}{2(k+3)}\right]$$

$$\mathrm{s_{k+1}}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{3k^2+16k^2+23k+10}{2(k+3)}\right]$$

$$\mathrm{s_{k+1}}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{(k+1)^2(3k+10)}{2(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}}=\frac{(k+1)(3k+10)}{2(k+2)(k+3)}$$

11) probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

d) Paso Básico: $n=1$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1(4)}{4(2)(3)}$$

e) Paso Inductivo: $n=k$ ASUMIR

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

f) $n=k+1$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Demostración

$$\mathrm{s_{k+1}} = s_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(k+3)}{4} + \frac{1}{(k+3)}\right]$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+3)}\right]$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+3)}\right]$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{(k+4)(k^2+2k+1)}{4(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{(k+4)(k+1)^2}{4(k+3)}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

12) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$a = \frac{a(r-1)}{r-1}$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k-1)}{r-1}$$

c) $n = k + 1$

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} + ar^k = \frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}$$

Demostración

$$\mathrm{s_{k+1}} = s_k + ar^k$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{a(r^k-1)}{r-1} + ar^k$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{a(r^k-1) + ar^k(r-1)}{r-1}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{a(r^k-1) + ar^k(r-1)}{r-1}$$

$$\mathrm{s_{k+1}} = \frac{ar^k - a + ar^{k+1} - ar^k}{r-1}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}$$

13) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$\left(1+\frac{3}{1}\right) = (1+1)^2$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{(2k+1)}{k^2}\right) = (k+1)^2$$

c) $n = k+1$

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{(2k+1)}{k^2}\right)\left(1+\frac{(2k+3)}{(k+1)^2}\right) = (k+1)^2$$

Demostración.

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = s_k\left(1+\frac{(2k+3)}{(k+1)^2}\right)$$
$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+1)^2\left(1+\frac{(2k+3)}{(k+1)^2}\right)$$
$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{(k+1)^2}\right)$$
$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+1)^2\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}$$
$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+2)^2$$

14) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right) = (1+1)$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right) = (k+1)$$

c) $n = k+1$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+2)$$

Demostración

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = s_k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+1)\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = (k+2)$$

15) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$1^2 = \frac{1(1)(3)}{3}$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

c) $n = k + 1$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Demostración

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = s_k + (2k+1)^2$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{(2k+1)}{3}[k(2k-1) + 3(2k+1)]$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{(2k+1)}{3}[2k^2 - k + 6k + 3]$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{(2k+1)}{3}[2k^2 + 5k + 3]$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{k+1}} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

16) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{(3n+1)}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{(3\cdot 1+1)}$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{(3k+1)}$$

c) $n = k + 1$

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{(3k+4)}$$

Demostración

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$s_{k+1} = \frac{k}{(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$s_{k+1} = \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$s_{k+1} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$s_{k+1} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$s_{k+1} = \frac{(k+1)}{(3k+4)}$$

17) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{3(2\cdot 1+3)}$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{3(2k+3)}$$

c) $n = k + 1$

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2k+5)}$$

Demostración

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$s_{k+1} = \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$s_{k+1} = \frac{k(2k+5)+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$s_{k+1} = \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

18) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo entero $n \geq 1$.

$$n! \leq n^n$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$1! = 1^1$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$k! \leq k^k$$

c) $n = k + 1$

$$(k+1)! \leq (k+1)^{(k+1)}$$

Demostración

$$(k+1)! = k!\,(k+1) \leq k^k(k+1) < (k+1)^k \cdot (k+1) = (k+1)^{k+1}$$

19) Probar la siguiente proposición usando el ***principio de inducción matemática*** para todo entero.

$$2^{2n} - 1 \text{ es divisible por } 3$$

a) Paso Básico: $n = 1$

$$2^{2\cdot 1} - 1$$
$$4 - 1$$
$$3 \text{ es divisible por } 3$$

b) Paso Inductivo: $n = k$ ASUMIR

$$2^{2k} - 1 \text{ es divisible por } 3$$
$$2^{2k} - 1 = 3q, \text{donde } q \in \mathbb{N}$$

c) $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\ &= 2^{2k}2^2 - 1 \\ &= 2^{2k}4 - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + 2^{2k} - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + 3q \\ &= 3(2^{2k} + 1) \\ &= 3 \cdot m \quad \text{donde } m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$