Definición

Se define una función real de variable real, o simplemente función real, como aquella función matemática que hace corresponder a cada número real $x \in \mathbb{R}$ otro número real $y \in \mathbb{R}$ a través de una regla de transformación f(x). Formalmente:

$$\begin{array}{llll} f: & Dom_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Donde:

f : Es la función de ℝ en ℝ, es decir, una regla de correspondencia que asigna a cada valor ℝ del dominio otro número real

Dom_f : Es el dominio de definición de la función f, también llamado campo de existencia. Esto es, el conjunto de posibles valores que puede tomar la entrada de la función, es decir, que tienen imagen. Puede ser, o bien el conjunto completo de los reales (ℝ), o bien un subconjunto de este: $Dom_f \subseteq \mathbb{R}$

Más formalmente: $Dom_f = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; \exists y = f(x) \in \mathbb{R} \,\}$

ℝ : Es el codominio de la función, es decir, el conjunto de posibles valores que podría tomar la variable dependiente

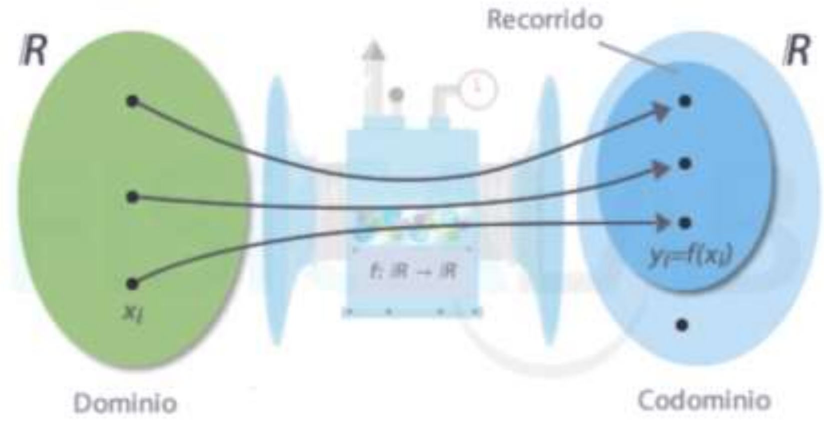
x : Es la variable independiente. En este caso, un número real que hace las veces de entrada de la función

y=f(x) : Es la variable dependiente, imagen de x. Es un número real que hace las veces de salida. Para obtener su valor se aplica la función sobre el elemento x

Recuerda el significado de los siguientes símbolos:	
•	**∃ existe un**
•	**∀ para todo**
•	**∈ pertenece a**
•	**/ tal que**
•	**⊂ subconjunto de**
•	**⊆ subconjunto o igual**

Hay que tener presente que, aunque no esté en la definición, el recorrido es igualmente importante. Es llamado también conjunto imagen o simplemente imagen de la función, y es el conjunto de valores que realmente toma la salida. Formalmente, $Rec_f = \{\, y \in \mathbb{R} \;/\; \exists x \in Dom_f \text{ con } f(x) = y \,\}$

Es un error muy habitual confundir el recorrido con el codominio. En las funciones reales de variable real tanto el dominio, como el codominio, como el conjunto imagen son números reales ($Dom_f \subseteq \mathbb{R}$, $Cod_f \subseteq \mathbb{R}$, $Rec_f \subseteq \mathbb{R}$). Visita el apartado de funciones matemáticas si necesitas aclarar estas ideas.



Función real

En la ilustración representamos el concepto de función real de variable real. Observa que la función f es una correspondencia, representada en la ilustración por una máquina azul, que asocia a cada elemento de un conjunto inicial llamado dominio (formado por números reales), otro número real de un conjunto denominado imagen o recorrido. Decimos que cada elemento concreto yi del recorrido es la imagen de un determinado elemento xi del dominio según yi=f(xi). Decimos que xi es su antiimagen.

Restricciones del dominio

En ocasiones puede resultar útil restringir el dominio de una función real a un subconjunto de $\mathbb{R}$. Recuerda que, aunque no se suela dar de manera explícita, tanto el dominio como el codominio forman parte de la propia definición formal de una función, y pueden cambiar enteramente las propiedades de esta, o incluso hacer que una correspondencia deje de ser considerada una función. De manera general, restringiremos el dominio de una función:

- Cuando sea matemáticamente imposible realizar alguna operación con ciertos valores x
- Cuando el contexto real del que se ha obtenido la función así lo determine
- Cuando lo necesitemos por alguna otra razón

Dedicaremos un apartado a aprender a calcular el dominio de una función real cuando no nos lo den de manera explícita. De momento, los siguientes ejemplos de funciones reales te ayudarán a entender mejor los casos señalados.

Ejemplos

Las siguientes funciones están expresadas mediante una ecuación algebraica. En todos los casos hemos prescindido de la definición formal del dominio y del codominio. Observa:

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 2$$

La función f es una función lineal (se trata de un polinomio de orden 1). Su dominio, si así lo decido en su definición, podría estar formado por todos los números reales, pues todos ellos tienen una imagen. Así, la imagen de x=2 es $y = f(2) = \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2} + 2 = 5$. De igual manera, el codominio, si así lo decidiese en su definición, también podría estar formado por todo $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

En esta ocasión, la función g es una función de proporcionalidad inversa. Dado que resulta imposible matemáticamente dividir entre 0, debemos "quitarlo" del dominio. Nuestro dominio de definición podría ser en este caso: Domf=$\mathbb{R}$-{0}=(-∞,0)∪(0,∞).

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot t^2$$

La función s tiene como variable independiente t. Observa que se trata de la ecuación del espacio que recorre un cuerpo sometido a una aceleración constante, en la que t representa el tiempo. En este contexto, podría tener sentido restringir el dominio de dicha función a los valores de t positivos, quedando Doms=[0,∞).

$$g(x) = x^2$$

La función g es una función cuadrática (polinomio de orden 2). Como tal, podríamos decidir que su dominio es el conjunto de los números reales. Observa que también podríamos decidir que, al igual que hicimos con la función s, su dominio fuesen solo los reales positivos. De esta manera, según hagamos una elección u otra, las propiedades de g cambian: Si elegimos todos los reales como dominio, dos elementos distintos del dominio podrían tener igual imagen (g(-1)=g(1)=1); en cambio, si sólo elegimos los reales mayores que cero, cada elemento del dominio tendrá una imagen distinta. Como puedes ver, el dominio es una parte muy importante en la definición de una función.

$$h(x) = \sqrt{x}$$

La función h es una función raíz. Un momento... ¿estás seguro que la raíz cuadrada es una función? Si lo piensas un poco, dos elementos distintos del dominio podrían tener la misma imagen ($f(4) = \sqrt{4} = \pm 2$, por ejemplo) y habíamos dicho que las funciones deben ser univaluadas, es decir, que a cada elemento del dominio le corresponderá un único elemento del conjunto final. Para que la función raíz sea una función, debemos restringir el codominio, por ejemplo, a los reales positivos, o a los reales negativos. Como puedes ver, el codominio también es una parte muy importante en la definición de una función. No obstante, en este nivel, y dado que ya hemos dicho que no es habitual encontrar el dominio y el codominio definidos de manera explícita, nos guiaremos por la siguiente convención:

- $h(x) = \sqrt{x} \Rightarrow Cod_f = [0, \infty)$
- $h(x) = -\sqrt{x} \Rightarrow Cod_f = (-\infty, 0]$

Es posible que encuentres una función expresada de manera implícita, esto es, sin despejar la variable dependiente. Por ejemplo: X^2**-Y=0**

Representación gráfica

Una función real de variable real está constituida por pares ordenados de elementos de $\mathbb{R}$, en la forma (x,f(x)). Dichos pares pueden ser representados sobre un sistema de ejes cartesianos mediante puntos P(x,y), con y=f(x). Sigue los siguientes pasos:

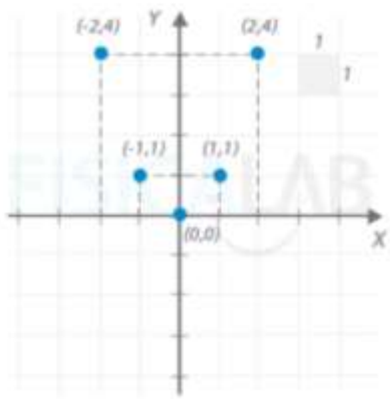
1. Elige el intervalo de valores del dominio que vas a representar. Por ejemplo, vamos a representar el intervalo [-2, 2] de la función f(x)=x2

2. Decide el número de puntos que vas a representar. Por ejemplo, cinco puntos. Recuerda que en el dominio de los números reales, la cantidad de puntos que podrías representar es ilimitada, así que cuantos más puntos decidas representar, más precisa será la representación

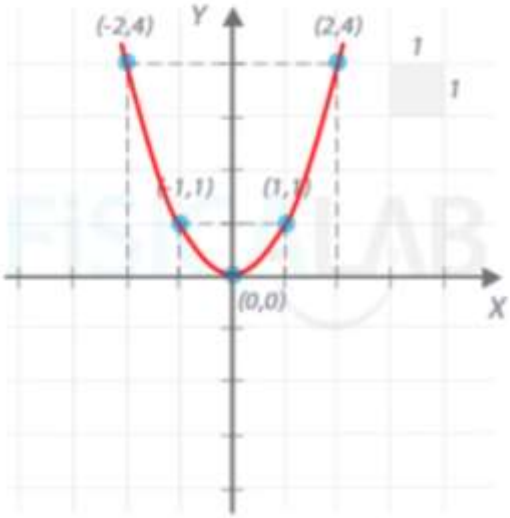
3. Elabora una tabla de valores con los puntos que vas a representar. La coordenada x de cada punto, debe pertenecer al dominio. Los puntos estarán situados de manera equiespaciada. La coordenada y de cada punto se obtiene como la imagen de los valores de x anteriores, aplicando la definición de la propia función. En nuestro caso, dado que hemos elegido 5 puntos, nos quedará x1=-2, x2=-1, x3=0, x4=1, x5=2 , y la tabla nos queda:

x	***y***
$x_1=\mathbf{-2}$	$y_1=f(x_1)=f(-2)=(-2)^2=\mathbf{4}$
$x_2=\mathbf{-1}$	$y_2=f(x_2)=f(-1)=(-1)^2=\mathbf{1}$
$x_3=\mathbf{0}$	$y_3=f(x_3)=f(0)=0^2=\mathbf{0}$
$x_4=\mathbf{1}$	$y_4=f(x_4)=f(1)=1^2=\mathbf{1}$
$x_5=\mathbf{2}$	$y_5=f(x_5)=f(2)=2^2=\mathbf{4}$

4. Pinta un sistema de coordenadas cartesianas x-y (eje de abscisas-eje de ordenadas) y se pinta cada punto sobre el sistema de coordenadas anterior.



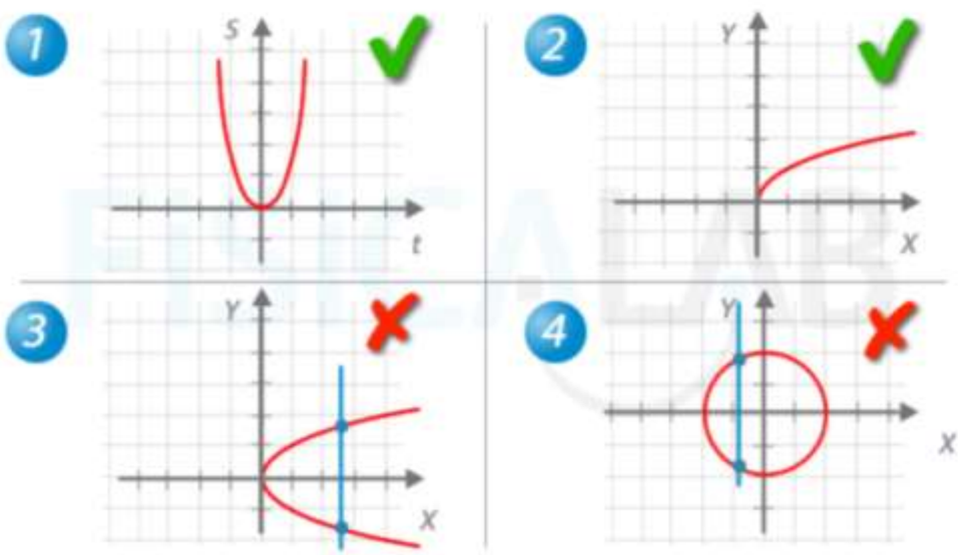
5. Une los puntos y obtén la representación final



La prueba de la recta vertical

En una función real, a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento imagen. De esta manera, a cada par (x,y) le corresponde en el plano un único punto P(x,y) = P(x,f(x)). Esto se traduce en que la gráfica de una función nunca vuelve "hacia atrás". Por tanto:

En una gráfica de una función y=f(x) ninguna recta vertical la debe cortar en más de un punto.



Prueba de la recta vertical

Un criterio para saber si una gráfica corresponde a una función es buscar una línea totalmente vertical que la atraviese en más de un punto. Si puedes encontrarla, significaría que para ese valor de x corresponderían varios valores de y, y por tanto la gráfica no corresponde a una función. Las gráficas 1 y 2 corresponden a funciones. La 3 y la 4 no, pues son atravesadas por las rectas verticales, en azul, en dos puntos distintos cada una.

Las funciones describen fenómenos concretos, de distinto tipo: físicos, químicos, económicos o incluso psicológicos. Observamos la realidad mediante la experimentación y luego buscamos los modelos generales que describan dichos fenómenos. No en vano, el concepto de función surgió históricamente en un intento de generalizar las fórmulas concretas que relacionaban las magnitudes, de igual manera que en dichas fórmulas se había pasado de utilizar números concretos a letras (variables) que representaban números cualesquiera.

En este apartado hemos estudiado las funciones reales. Gracias a ellas podemos describir distintos fenómenos que estudiaremos con profundidad en los temas de física.