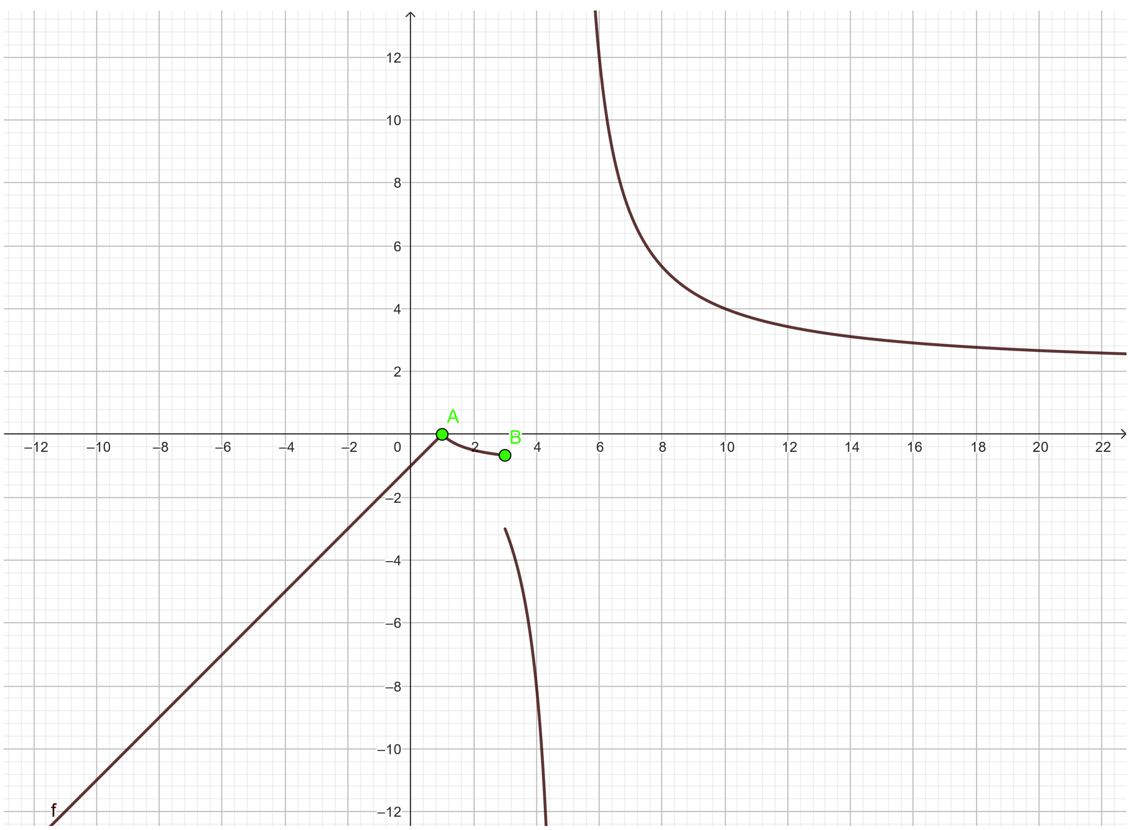
Funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & \text{si } x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{1-x}{x}, & \text{si } 1 < x \leq 3 \\[2ex] \dfrac{2x}{x-5}, & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1 \text{ y en } x = 3$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Procedimiento:

1. **Graficar la función f(x) utilizando el GeoGebra.**



2. **Del gráfico determine si la función es continua en los puntos dados.**

Respuesta:

Para determinar si la función $f(x)$ es continua en los puntos dados $x = 1$ y $x = 3$, evaluamos la continuidad en cada uno de estos puntos:

1. En $x = 1$:

- Evaluamos el límite cuando x se acerca a 1 por la izquierda ($x \leq 1$):

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

- Evaluamos el valor de la función en $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

- Evaluamos el límite cuando x se acerca a 1 por la derecha ($1 < x \leq 3$):

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - x}{x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$\Longrightarrow$ Por lo tanto, la función es continua en $x = 1$ porque:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

2. En $x = 3$:

- Evaluamos el límite cuando x se acerca a 3 por la izquierda ($1 < x \leq 3$):

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1 - x}{x} = \frac{1 - 3}{3} = -\frac{2}{3}$$

- Evaluamos el límite cuando x se acerca a 3 por la derecha ($x > 3$):

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x - 5} = \frac{2 \cdot 3}{3 - 5} = \frac{6}{-2} = -3$$

$\Longrightarrow$ Por lo tanto, la función no es continua en $x = 3$ porque:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$\Longrightarrow$ Por lo tanto, la función $f(x)$ es discontinua en $x = 3$.

3. **Si es discontinua, diga de qué tipo es:**

Respuesta:

Para determinar si la discontinuidad en $x = 3$ es evitable o inevitable, debemos considerar lo siguiente:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1-x}{x} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \cdot 3}{3-5} = \frac{6}{-2} = -3$$

En este caso, los límites laterales son diferentes ($-\frac{2}{3}$ y -3), lo que significa que no es posible ajustar el valor de la función en $x = 3$ para igualar los límites.

$\Longrightarrow$ Por lo tanto, la discontinuidad en $x = 3$ es **inevitable**.

4. **Encuentre analíticamente la(s) asíntotas que tiene la función g(x)**

Respuesta:

Para encontrar las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, analizamos los siguientes tipos de asíntotas:

1. Asíntotas verticales:

Las asíntotas verticales ocurren donde el denominador se hace cero y la función tiende a infinito. Para $g(x)$, esto ocurre cuando $x - 1 = 0$:

$$x = 1$$

$\Longrightarrow$ Por lo tanto, la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

2. Asíntotas horizontales:

Las asíntotas horizontales se encuentran al evaluar el límite de la función cuando x tiende a $\pm\infty$. Para $g(x)$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot 1 = -\infty$$

$\Longrightarrow$ Por lo tanto, la función no tiene asíntotas horizontales ya que tiende a infinito tanto en $x \to \infty$ como en $x \to -\infty$.

3. Asíntotas oblicuas:

Las asíntotas oblicuas se encuentran cuando la función no tiene asíntotas horizontales, y se determinan mediante la división larga del numerador por el denominador. Realizamos la división de x^2 por $x - 1$:

$$\frac{x^2}{x-1} = x + \frac{x}{x-1}$$

A medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el término $\frac{x}{x-1}$ tiende a 1. Entonces, la asíntota oblicua es:

$$y = x + 1$$

$\implies$ Por lo tanto, la función $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota oblicua $y = x + 1$.

5. **Utilizando el GeoGebra, grafique la(s) asíntotas encontradas en el numeral anterior.**