Problema 1

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de tal manera que su aceleración en cualquier tiempo $t \geq 0$, está dada por $a = 8 - 12t$.

(a) Encuentre la posición x de la partícula, medida del origen 0 a cualquier tiempo t ¿0, asumiendo que inicialmente está localizada en x = 2 y está viajando a una velocidad $V = -2$.

(b) Resuelva a) si solo se sabe que la partícula está localizada inicialmente en x = 2 y en x = 7, cuando t = 1.

1. Analizar y comprender el problema presentado

La partícula P se mueve a lo largo del eje x con una aceleración dependiente del tiempo:

$$a(t) = 8 - 12t$$

2. Revisar o investigar las leyes físicas que presenta el problema

Sabemos que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Asimismo, la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Para encontrar la posición $x(t)$, integramos sucesivamente la aceleración.

3. Modelar el problema como una ecuación diferencial con valores iniciales

Dado que $a(t) = \frac{dv}{dt}$, la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dv}{dt} = 8 - 12t$$

Con la condición inicial $v(0) = -2$.

Luego, como $v(t) = \frac{dx}{dt}$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

Con la condición inicial $x(0) = 2$.

4. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

Para la ecuación de aceleración:

$$\int dv = \int (8 - 12t)dt$$

$$v(t) = 8t - 6t^2 + C_1$$

Para la ecuación de velocidad:

$$\int dx = \int (8t - 6t^2 + C_1)dt$$

$$x(t) = 4t^2 - 2t^3 + C_1 t + C_2$$

5. Encontrar la solución específica

Usamos las condiciones iniciales:

1. $v(0) = -2 \Rightarrow 8(0) - 6(0)^2 + C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = -2$

2. $x(0) = 2 \Rightarrow 4(0)^2 - 2(0)^3 - 2(0) + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

Sustituyendo en la ecuación de posición:

$$x(t) = 4t^2 - 2t^3 - 2t + 2$$

6. Encontrar la solución del problema real

$$x(t) = 4t^2 - 2t^3 - 2t + 2$$

Para la segunda parte del problema, donde se da que $x(0) = 2$ y $x(1) = 7$:

$$4(1)^2 - 2(1)^3 - 2(1) + C_2 = 7$$

Resolviendo para C_2:

$$4 - 2 - 2 + C_2 = 7 \implies C_2 = 7$$

Por lo que la nueva ecuación de posición es:

$$x(t) = 4t^2 - 2t^3 - 2t + 7$$

Literal b): El problema enuncia que "la partícula está localizada inicialmente en x = 2 y en x = 7, cuando t = 1" lo cual es **imposible**, ya que un cuerpo no puede hallarse en dos posiciones distintas a la vez.

Problema 2

Una partícula se mueve a lo largo del eje x, de tal manera que su velocidad es proporcional al producto de su posición instantánea x (medida de x = 0) y el tiempo t (medido de t = 0). Si la partícula está localizada en $x = 25m$ cuando t = 0 seg. y $x = 12m$ cuando t = 1seg, ¿dónde estará cuando t=2?

1. Analizar y comprender el problema presentado

La partícula se mueve a lo largo del eje x, y su velocidad v es proporcional al producto de su posición instantánea x y el tiempo t:

$$v = kxt$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Las condiciones iniciales son:
- $x(0) = 25$ m
- $x(1) = 12$ m

Nos piden encontrar $x(2)$.

2. Revisar o investigar las leyes físicas que presenta el problema

Sabemos que la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo la relación dada en el problema:

$$\frac{dx}{dt} = kxt$$

Esta es una ecuación diferencial separable.

3. Modelar el problema como una ecuación diferencial con valores iniciales

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dx}{dt} = kxt$$

con las condiciones:

$$x(0) = 25, \quad x(1) = 12$$

4. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

Reescribimos la ecuación en forma separable:

$$\frac{dx}{x} = ktdt$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{dx}{x} = \int ktdt$$

Resolviendo:

$$\ln |x| = \frac{kt^2}{2} + C$$

Despejando x:

$$x(t) = e^C e^{\frac{kt^2}{2}}$$

Definiendo $e^C = C_1$:

$$x(t) = C_1 e^{\frac{kt^2}{2}}$$

5. Encontrar la solución específica

Usamos la condición inicial $x(0) = 25$:

$$25 = C_1 e^{\frac{k(0)^2}{2}} \implies C_1 = 25$$

Entonces,

$$x(t) = 25e^{\frac{kt^2}{2}}$$

Ahora usamos $x(1) = 12$ para encontrar k:

$$12 = 25e^{\frac{k(1)^2}{2}}$$

$$\frac{12}{25} = e^{\frac{k}{2}}$$

Tomamos logaritmo natural:

$$\ln\left(\frac{12}{25}\right) = \frac{k}{2}$$

$$k = 2\ln\left(\frac{12}{25}\right)$$

6. Encontrar la solución del problema real

Ahora buscamos $x(2)$:

$$x(2) = 25e^{\frac{k(2)^2}{2}}$$

Sustituyendo $k = 2\ln\left(\frac{12}{25}\right)$:

$$x(2) = 25e^{\frac{2\ln(12/25)\cdot 4}{2}}$$

$$x(2) = 25e^{4\ln(12/25)}$$

$$x(2) = 25\left(e^{\ln(12/25)}\right)^4$$

$$x(2) = 25\left(\frac{12}{25}\right)^4$$

Resolviendo:

$$x(2) = 25 \times \left(\frac{20736}{390625}\right)$$

$$x(2) \approx 1{,}33 \text{ m}$$

Por lo tanto, la partícula estará aproximadamente en $x(2) = 1{,}33$ m cuando $t = 2$ segundos.