Ripasso di Fluidodinamica

Simone Zuccher

24 ottobre 2009

1 Le equazioni di Navier-Stokes

Tralasciamo la derivazione dettagliata e diamo solo un'idea di come si arriva alle equazioni complete. Nel farlo ricordiamo che le equazioni di Navier-Stokes sono la riscrittura

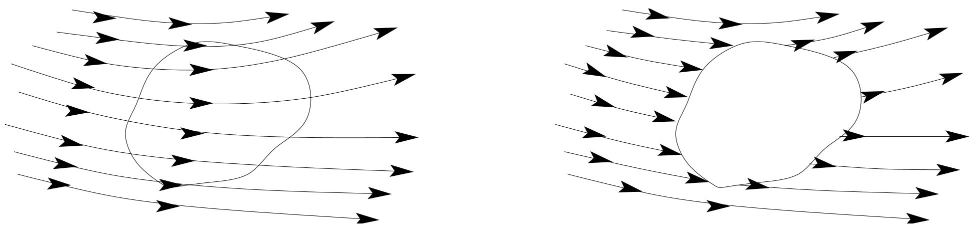

Figura 1: *Volume di controllo* fisso (sinistra), *volume materiale* in movimento assieme al fluido (destra)

di princìpi di conservazione di cui si richiede il soddifacimento all'interno di un certo volume, che può essere analizzato secondo due approcci diversi (si veda la figura 1):

1. *Euleriano*: il volume in esame prende il nome di *volume di controllo* perché è fisso nello spazio e quindi le molecole di fluido al suo interno cambiano nel tempo; il sistema costituito dal solo volume di controllo è *aperto* in quanto consente lo scambio sia di massa che di enegia con il resto del fluido

2. *Lagrangiano*: il volume in esame prende il nome di *volume materiale* perché si muove con il fluido e quindi le molecole di fluido al suo interno sono sempre le stesse; il sistema costituito dal solo volume materiale è *chiuso* in quanto non scambia massa ma solo energia con il resto del fluido.

In ogni caso, supponiamo che nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ siano definiti, in ogni punto $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ed ad ogni istante di tempo t, un campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ed una densità di massa per unità di volume $\rho(\mathbf{r}, t)$.

1.1 Conservazione della massa in un volume fisso

Concentriamoci su un *volume fisso* V, non dipendente dal tempo, come in figura 1 (sinistra). Se $M_V(t)$ è la massa di fluido contenuta nel volume V al tempo t e $\Phi_S(\rho\mathbf{u}, t)$ è il flusso di massa *uscente* dal volume V attraverso la superficie S, frontiera di V ($S = \partial V$), allora a seguito della conservazione della massa prescritta dalla fisica si ha che l'aumento di massa M_V nel volume V in un certo intervallo di tempo deve essere uguale al flusso di massa *entrante* nel volume V durante lo stesso intervallo di tempo, che è l'opposto di quello uscente. In formule:

$$\frac{\mathrm{d}M_V(t)}{\mathrm{d}t} = -\Phi_S(\rho\mathbf{u}, t). \tag{1.1}$$

La massa di fluido è

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t)\,\mathrm{d}V,$$

pertanto la *variazione di massa contenuta nel volume* V nell'unità di tempo (rapidità con la quale la massa contenuta in V varia) è

$$\frac{\mathrm{d}M_V(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(\mathbf{r}, t)\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V. \tag{1.2}$$

Si osservi il passaggio dalla derivata totale alla derivata parziale in quanto $M_V = M_V(t)$, mentre $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$.

D'altra parte, il *flusso di massa uscente* dal volume V attraverso la sua superficie di frontiera $S = \partial V$ è, a seguito del teorema della divergenza,

$$\Phi_S(\rho\mathbf{u}, t) = \int_S \rho(\mathbf{r}_{|S}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S})\,\mathrm{d}S = \int_V \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t))\,\mathrm{d}V, \tag{1.3}$$

dove $\mathbf{r}_{|S}$ è la posizione $\mathbf{r}$ ristretta alla superficie di frontiera $S = \partial V$, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S})$ è il versore normale *uscente* dalla superficie nel punto $\mathbf{r}_{|S}$, e $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ è la velocità nel generico punto $\mathbf{r}$ al tempo t.

Utilizzando le uguaglianze (1.2) e (1.3), la legge di conservazione (1.1) diventa

$$\int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_V \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t))\,\mathrm{d}V$$

ovvero, allegerendo la notazione e portando tutto sotto un unico integrale,

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V = 0.$$

Siccome questa equazione deve essere vera per *qualsiasi* V (piccolo a piacere), si conclude che per ogni punto dello spazio $\mathbb{R}^3$ dove sono definiti il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ e la densità $\rho(\mathbf{r}, t)$ deve essere

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

nota come equazione di continuità o di conservazione della massa.

1.2 Conservazione della massa in un volume variabile nel tempo

Si può arrivare all'equazione di continuità anche considerando un volume materiale V_t, variabile nel tempo, che possa cambiare sia di forma che di volume e racchiuso da una *superficie chiusa* $S_t = \partial V_t$, anch'essa variabile nel tempo, tale che sia la superficie sia i punti interni al volume *si muovano assieme al fluido*, come in figura 1 (destra). Siccome ogni punto della superficie ha la stessa velocità del campo di moto esterno, la velocità relativa tra la superficie e il fluido è nulla e quindi non c'è flusso del vettore velocità attraverso S_t. Pertanto la massa contenuta all'interno del volume variabile nel tempo deve conservarsi:

$$\frac{\mathrm{d}M_{V_t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} \rho(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = 0.$$

A causa della dipendenza di V_t dal tempo, anche l'integrale di volume su V_t *dipende dal tempo* e quindi bisogna fare molta attenzione nel calcolare la derivata $\mathrm{d}M_{V_t}/\,\mathrm{d}t$.

Nel caso semplice di funzioni reali di variabile reale, la derivata rispetto al tempo dell'integrale con estremi variabili si riduce, per il *teorema di Leibniz* (che fa uso del teorema fondamentale del calcolo integrale unitamente al teorema di derivazione delle funzioni composte), all'espressione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = -f(a(t),t)\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + f(b(t),t)\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Introducendo le velocità di variazione degli estremi di integrazione

$$v_a(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{e} \qquad v_b(t) = \frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t},$$

si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + f(b(t),t)v_b(t) - f(a(t),t)v_a(t).$$

Si osservi che il termine $f(b(t),t)v_b(t) - f(a(t),t)v_a(t)$ è semplicemente il flusso netto di f *uscente* dal dominio $I_t = [a(t); b(t)]$. Il teorema di Leibniz può essere generalizzato a integrali di volumi variabili nel tempo per grandezze scalari:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = \int_{V_t} \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{S_t} f(\mathbf{r}_{|S},t)\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S})\,\mathrm{d}S,$$

dove $\mathbf{r}_{|S}$ è la posizione ristretta alla superficie di frontiera $S_t = \partial V_t$ e $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S},t)$ è la velocità con la quale si muove la frontiera S_t. Come detto inizialmente, assumiamo che ogni punto della superficie che racchiude V_t si muova alla velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S},t)$ pari alla velocità del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S},t)$ in $\mathbf{r}_{|S}$ al tempo t, i.e.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S},t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S},t).$$

Il teorema di Leibniz si riscrive allora come

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V &= \int_{V_t} \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{S_t} f(\mathbf{r}_{|S},t)\mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S})\,\mathrm{d}S \\
&= \int_{V_t} \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{V_t} \nabla\cdot\left(f(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\mathrm{d}V \\
&= \int_{V_t}\left[\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(f(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\right]\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Allegerendo la notazione, la conclusione è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = \int_{V_t}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V,$$

noto anche come *teorema del trasporto di Reynolds.*

Dalla conservazione della massa in un volume variabile nel tempo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} \rho(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = 0$$

segue, quindi,

$$\int_{V_t}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V = 0,$$

ma siccome quest'ultima equazione deve essere vera per *qualsiasi* V_t (piccolo a piacere), allora deve essere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

ormai nota come equazione di continuità (o di conservazione della massa).

1.3 Derivata temporale dell'integrale di una grandezza vettoriale su un volume variabile nel tempo

Quanto visto in precedenza si estende senza difficoltà al caso di un campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} \mathbf{f}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} \hat{\mathbf{x}}_1 f_1(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} \hat{\mathbf{x}}_2 f_2(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} \hat{\mathbf{x}}_3 f_3(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V \\
&= \hat{\mathbf{x}}_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f_1(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V + \hat{\mathbf{x}}_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f_2(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V + \hat{\mathbf{x}}_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f_3(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V \\
&= \sum_{i=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f_i(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V,
\end{aligned}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}_i$ sono i versori lungo gli assi $x_i, i = 1 \ldots 3$, e f_i sono le tre componenti di $\mathbf{f}$. Concentriamoci su una singola componente f_i. Siccome per essa vale in teorema di Reynolds si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f_i(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = \int_{V_t}\left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \nabla\cdot(f_i\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V = \int_{V_t}\left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j}\right]\mathrm{d}V, \tag{1.4}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della notazione di Einstein

$$\frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_i u_3}{\partial x_3} = \nabla\cdot(f_i\mathbf{u}).$$

Utilizzando l'uguaglianza (1.4) si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t}\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V &= \sum_{i=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f_i(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V \\
&= \sum_{i=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_i\int_{V_t}\left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j}\right]\mathrm{d}V \\
&= \int_{V_t}\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{f}\otimes\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t}\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = \int_{V_t}\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{f}\otimes\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V,$$

dove il simbolo $\otimes$ denota il prodotto tensoriale tra $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}$ e la divergenza di questo prodotto, $\nabla\cdot(\mathbf{f}\otimes\mathbf{u})$, va letta in notazione di Einstein come

$$\nabla\cdot(\mathbf{f}\otimes\mathbf{u}) = \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j}, \quad i = 1\ldots 3.$$

1.4 La derivata sostanziale

Consideriamo un campo scalare $f(\mathbf{r},t)$, funzione dello spazio e del tempo (per esempio la temperatura). Se si vuole seguire la variazione di f nel tempo a $\mathbf{r}$ fissato, ossia dal punto di vista *Euleriano*, basta la derivata *parziale*

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Se invece si vuole seguire la variazione di f muovendosi lungo la traiettoria descritta da una ipotetica particella che cambia la propria posizione nel tempo secondo la legge oraria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ossia dal punto di vista *Lagrangiano*, allora è necessario considerare la derivata *totale*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{r}(t), t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f,
\end{aligned}$$

essendo $\mathbf{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ la velocità con la quale la particella si muove. Se la particella si muove assieme al fluido, e la velocità di quest'ultimo è $\mathbf{u}$, allora anche la particella si muove con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ e la derivata totale dal punto di vista Lagrangiano diventa

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

L'operatore $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ prende il nome di *derivata sostanziale (oppure materiale, o anche Lagrangiana) di f rispetto al tempo t*. Essa non è altro che la variazione della grandezza scalare f ottenuta seguendo una particella di fluido che si muove alla velocità $\mathbf{u}$.

Si osservi che, se due campi di densità $\rho(\mathbf{r}, t)$ e di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ soddisfano l'equazione di continuità, moltiplicando quest'ultima per un campo scalare $f(\mathbf{r}, t)$ si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f\frac{\partial \rho}{\partial t} + f\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

ma

$$\begin{aligned}
f\frac{\partial \rho}{\partial t} + f\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \frac{\partial f\rho}{\partial t} - \rho\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\rho\mathbf{u}) - \rho\mathbf{u} \cdot \nabla f \\
&= \frac{\partial f\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f\rho\mathbf{u}) - \rho\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = 0
\end{aligned}$$

per cui

$$\frac{\partial f\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f\rho\mathbf{u}) = \rho\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}.$$

Pertanto, la derivata totale rispetto al tempo dell'integrale su un volume variabile della quantità $f\rho$ è, ricordando il teorema del trasporto di Reynolds,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_t} f\rho \, \mathrm{d}V = \int_{V_t} \left[\frac{\partial f\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f\rho\mathbf{u})\right] \mathrm{d}V = \int_{V_t} \rho\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} \, \mathrm{d}V.$$

1.5 Equazioni complete

Consideriamo un volume materiale V_t variabile nel tempo e racchiuso da una superficie $S_t = \partial V_t$ tale che ogni punto di essa ed ogni punto interno ad essa si muova alla stessa velocità del campo di moto esterno. Come visto nel caso dell'equazione di continuità, il flusso attraverso la superficie S_t è nullo in quanto la velocità relativa tra il campo di moto esterno e la superficie stessa è nulla in ogni punto di S_t. Pertanto il volume V_t è un sistema *chiuso*, nel senso che la massa al suo interno non varia, però ci possono essere delle forze esterne che agiscono sul sistema e ci può essere passaggio di energia (calore e/o lavoro delle forze esterne) attraverso la superficie S_t. Pertanto devono essere verificate tre leggi fondamentali:

1. conservazione della massa: $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$,
2. seconda legge di Newton: $\dfrac{\mathrm{d}m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$,
3. primo principio della termodinamica: $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$,

dove m è la massa totale del sistema espressa in kilogrammi [kg], t è il tempo espresso in secondi [s], $\mathbf{v}$ è la velocità espressa in metri al secondo [m/s], $\mathbf{F}$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema misurata in Newton [N], U è l'energia interna espressa in Joule [J], Q è il calore *fornito* al sistema espresso in Joule [J] e W è il lavoro *compiuto* dal sistema, anch'esso espresso in Joule [J]. Se indichiamo con ρ la densità del fluido, con $\mathbf{u}$ la sua velocità, con e la sua densità (per unità di massa) di energia interna e con e^t la sua densità di energia totale per unità di massa, somma delle densità (per unità di massa) di energia interna e ed energia cinetica,

$$e^t = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2},$$

allora richiedere che i suddetti tre princìpi siano verificati per il fluido in esame porta a scrivere

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V_t} \rho \,\mathrm{d}V = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})\right] \mathrm{d}V = 0$,
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V_t} \rho \mathbf{u} \,\mathrm{d}V = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u})\right] \mathrm{d}V = \mathbf{F}$,
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V_t} \rho e^t \,\mathrm{d}V = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho e^t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u})\right] \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$.

Dopo aver espresso in modo opportuno i termini di destra come integrali sul volume variabile V_t, se si richiede che queste tre uguaglianze siano verificate *in ogni* volume V_t di un fluido che soddisfi le seguenti ipotesi:

- il fluido è un continuo (non singole molecole)
- il fluido è localmente in equilibrio termodinamico
- il fluido è Newtoniano (dipendenza lineare del tensore degli sforzi dal tensore dai gradienti di velocità attraverso la *viscosità di taglio* μ, in generale $\mu = \mu(T, p)$)

- per il fluido vale l'ipotesi di Stokes (la *viscosità di dilatazione* λ vale $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, in generale $\lambda = \lambda(T,p)$),

- il fluido è isotropo (le sue proprietà fisiche non dipendono dalla particolare direzione spaziale)

- la trasmissione del calore nel fluido avviene per conduzione secondo la legge di Fourier, in generale $k = k(T,p)$

- la trasmissione di calore nel fluido per effetto dell'irraggiamento è trascurato

allora si ottengono le equazioni di Navier-Stokes che, per come sono state qui introdotte, non sono altro che una (quasi) banale riscrittura di tre princìpi fondamentali della fisica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\delta_{ij}\right)\right) + \rho g_i \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \rho e^t}{\partial t} + \frac{\partial \rho e^t u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\delta_{ij}\right)\right) + u_j\rho g_j, \tag{1.7}$$

Il sistema è composto da cinque equazioni:

- una equazione di conservazione della massa (1.5),

- tre equazioni, una per ogni direzione, che esprimono la seconda legge di Newton (1.6),

- una equazione che esprime il primo principio della termodinamica (1.7),

ma le incognite sono sette:

- ρ, la densità del fluido,

- u, v, w, le tre componenti della velocità del fluido nelle direzioni x_1, x_2, x_3,

- p, la pressione del fluido,

- e, l'energia interna per unità di massa del fluido,

- T, la temperatura del fluido,

pertanto è, apparentemente, irrisolubile. In realtà vanno aggiunte sia l'equazione di stato

$$F(\rho, p, T) = 0,$$

che lega le tre variabili di stato densità, pressione e temperatura, sia la dipendenza dell'energia interna e dallo stato termodinamico del sistema. Pertanto, se si esprime lo stato termodinamico del sistema tramite pressione e temperatura (due variabili termodinamiche) si ha, in generale,

$$\rho = \rho(T,p) \qquad \text{e} \qquad e = e(T,p), \tag{1.8}$$

che riducono le variabili termodinamiche ρ, p, T, e da quattro a due. Le equazioni (1.5), (1.6) e (1.7), completate dalle opportune relazioni termodinamiche (1.8), costituiscono quindi un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari avente lo stesso numero di equazioni ed incognite. Si ricordi che $\mu = \mu(T,p)$ e $k = k(T,p)$ sono funzioni note della temperatura e della pressione (in realtà non dipendono quasi per nulla dalla pressione).

L'equazione dell'energia si trova spesso scritta, invece che per la variabile e^t, per la variabile e, ovvero per la densità (per unità di massa) di energia interna. Ricordiamo che e^t può essere riscritta in notazione di Einstein come

$$e^t = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = \frac{u_j^2}{2}.$$

Se indichiamo con d_{kj} il tensore degli sforzi viscosi

$$d_{kj} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right),$$

dopo aver osservato che, grazie all'equazione di continuità

$$\varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \forall \varphi = \varphi(\mathbf{r}, t),$$

l'equazione della quantità di moto può essere rielaborata, per $1 \leq k \leq 3$, nelle seguenti forme tra loro equivalenti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k \\
\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k \\
\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k \\
\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k \\
\rho u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k \\
\rho \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k \\
\rho \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial x_j} + \frac{u_k^2}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k \\
\frac{\partial \rho \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{u_k^2}{2} u_j}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k.
\end{aligned}$$

Sommando le tre equazioni per $k = 1, 2, 3$ e sfruttando la notazione di Einstein, si ottiene un'unica equazione

$$\frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} u_j}{\partial x_j} = -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k,$$

dove gli indici sui quali fare le sommatorie sono sia j che k, e quindi può essere riarrangiata come

$$\frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} u_j}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_j \rho g_j.$$

Sottraendo quest'ultima equazione all'equazione dell'energia per e^t riscritta come

$$\frac{\partial \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k d_{kj}}{\partial x_j} + u_j \rho g_j,$$

e dopo aver sviluppato le derivate rispetto a x_j, si ottiene l'equazione di bilancio la per sola energia interna e

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + d_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Si noti che, in questa forma, non compare l'effetto delle forze di volume g_j. Riespandendo il termine d_{kj}, l'equazione per esteso risulta essere

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$