LIMITI

(Richiami fondamentali da sapere ***ad maturitatem superandam***!)

<u>Scopo del limite:</u> in generale il limite serve per studiare il comportamento di una funzione in punti nei quali non sarebbe possibile altrimenti, ossia punti al *finito* nei quali la funzione non è definita oppure in punti agli *estremi del dominio* se questi non sono al finito.

Le ***forme indeterminate*** sono le seguenti:

$$\infty-\infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

<u>Non</u> sono forme indeterminate le seguenti (a fianco è indicato il risultato)

$$\frac{k}{\infty}=0 \qquad \frac{k}{0}=\infty \qquad 0^{\infty}=0 \qquad \infty^{\infty}=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty \qquad \frac{0}{\infty}=0 \qquad \frac{\infty}{0}=\infty$$

1. Limiti di *funzioni razionali* (rapporto di polinomi)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

In generale sostituire ad x il valore α: $\lim_{x\to\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$

1.1 Se $x\to x_0$ e si ottiene un numero finito l, il valore del limite è l. Se si ottiene una forma del tipo $\frac{0}{0}$, significa che numeratore e denominatore hanno come soluzione $x=x_0$ e sono quindi divisibili entrambi per $(x-x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)\cdot(x-x_0)}{B(x)\cdot(x-x_0)} \qquad \text{se } P(x_0)=Q(x_0)=0$$

1.2 Se $x\to\infty$ e si ottiene una forma del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ occorre raccogliere al numeratore x^n, dove n è il grado del polinomio al numeratore e al denominatore x^m, dove m è il grado del polinomio al denominatore e poi semplificare, ottenendo così i seguenti tre risultati

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 & \text{se il grado di } P(x) \text{ è minore di quello di } Q(x)\\ \dfrac{a}{b} & \begin{cases}\text{se il grado di } P(x) \text{ è uguale a quello di } Q(x) \text{ con } a \text{ coeffciente di}\\ \text{grado massimo di } P(x) \text{ e } b \text{ coefficiente di grado massimo di } Q(x)\end{cases}\\ \infty & \text{se il grado di } P(x) \text{ è maggiore di quello di } Q(x)\end{cases}$$

ESEMPI - ***funzioni razionali*:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-7}=\lim_{x\to 3}\frac{9-3-1}{27-18-7}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+6)}{(x+2)}=\frac{7}{3}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x+5}{2x^3-3x^2+9}=\frac{+\infty}{-\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^3}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1(1-0+0)}{x(2-0+0)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{9x^3+7x+5}{-2x^3-4x^2-1}=\frac{+\infty}{-\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3\left(9+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(-2-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(9+0+0)}{(-2-0-0)}=-\frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^3+3x+2}{x^2-7x+5}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}{x^2\left(1-\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x(5+0+0)}{(1-0+0)}=-\infty$$

2. Limiti di *funzioni irrazionali* (rapporto di radici n-esime)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[a]{P_b(x)}\pm\sqrt[c]{R_d(x)}}{\sqrt[e]{Q_f(x)}\pm\sqrt[g]{S_h(x)}}$$

dove con $P_b(x)$ si intende un polinomio in x di grado b, con $R_d(x)$ un polinomio in x di grado d, ecc.

In generale sostituire ad x il valore α:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[a]{P_b(x)}\pm\sqrt[c]{R_d(x)}}{\sqrt[e]{Q_f(x)}\pm\sqrt[g]{S_h(x)}}=\frac{\sqrt[a]{P_b(\alpha)}\pm\sqrt[c]{R_d(\alpha)}}{\sqrt[e]{Q_f(\alpha)}\pm\sqrt[g]{S_h(\alpha)}}$$

2.1 Se $x\to x_0$ e si ottiene un numero finito l, il valore del limite è l. Se si ottiene una forma del tipo $\frac{0}{0}$ si hanno i seguenti due casi:

2.1.1 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[a]{P_b(x)}\pm\sqrt[c]{R_d(x)}}{\sqrt[e]{Q_f(x)}\pm\sqrt[g]{S_h(x)}}=\dfrac{0\pm 0}{0\pm 0}$.

È necessario scomporre ciascun polinomio nel modo seguente: $\dfrac{\sqrt[a]{\widetilde{P}_{b-1}(x)\cdot(x-x_0)}\pm\sqrt[c]{\widetilde{R}_{d-1}(x)\cdot(x-x_0)}}{\sqrt[e]{\widetilde{Q}_{f-1}(x)\cdot(x-x_0)}\pm\sqrt[g]{\widetilde{S}_{h-1}(x)\cdot(x-x_0)}}$ e dividere numeratore e denominatore per $\sqrt[k]{x-x_0}$, dove k è il massimo tra gli indici a, c, e, g. In tal modo almeno uno tra il numeratore e il denominatore tende ad un valore diverso da zero, permettendo di risolvere il limite.

2.1.2 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[a]{P_b(x)}\pm\sqrt[c]{R_d(x)}}{\sqrt[e]{Q_f(x)}\pm\sqrt[g]{S_h(x)}}=\dfrac{\beta-\beta}{0\pm 0}$ o $\dfrac{0\pm 0}{\beta-\beta}$ oppure $\dfrac{\beta-\beta}{\gamma-\gamma}$.

È necessario razionalizzare rispettivamente il numeratore, il denominatore o entrambi ed eventualmente ricondursi al caso 1.1.

2.2 Se $x\to\infty$ e si ottiene una forma del tipo $\infty-\infty$ è necessario razionalizzare la parte della frazione che dà questa forma. Se si ottiene una forma del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ ed il numeratore e il denominatore sono del tipo

$$\frac{\sqrt[a]{P_b(x)}\pm\sqrt[c]{R_d(x)}}{\sqrt[e]{Q_f(x)}\pm\sqrt[g]{S_h(x)}}=\frac{\sqrt[a]{p_bx^b+p_{b-1}x^{b-1}+\ldots+p_1x+p_0}\pm\sqrt[c]{r_dx^d+r_{d-1}x^{d-1}+\ldots+r_1x+r_0}}{\sqrt[e]{q_fx^f+q_{f-1}x^{f-1}+\ldots+q_1x+q_0}\pm\sqrt[g]{s_hx^h+s_{h-1}x^{h-1}+\ldots+s_1x+s_0}}$$

è necessario raccogliere per ogni polinomio il termine di grado massimo: $\dfrac{\sqrt[a]{x^b\left(p_b+\frac{p_{b-1}}{x}+\ldots+\frac{p_1}{x^{b-1}}+\frac{p_0}{x^b}\right)}\pm\sqrt[c]{x^d\left(r_d+\frac{r_{d-1}}{x}+\ldots+\frac{r_1}{x^{d-1}}+\frac{r_0}{x^d}\right)}}{\sqrt[e]{x^f\left(q_f+\frac{q_{f-1}}{x}+\ldots+\frac{q_1}{x^{f-1}}+\frac{q_0}{x^f}\right)}\pm\sqrt[g]{x^h\left(s_h+\frac{s_{h-1}}{x}+\ldots+\frac{s_1}{x^{h-1}}+\frac{s_0}{x^h}\right)}}$; passando al limite, essendo $\dfrac{k}{\infty}=0$ rimane una forma del tipo: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[a]{p_bx^b}\pm\sqrt[c]{r_dx^d}}{\sqrt[e]{q_fx^f}\pm\sqrt[g]{s_hx^h}}$. Questa si può riscrivere come: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{p_b^{\frac{1}{a}}x^{\frac{b}{a}}\pm r_d^{\frac{1}{c}}x^{\frac{d}{c}}}{q_f^{\frac{1}{e}}x^{\frac{f}{e}}\pm s_h^{\frac{1}{g}}x^{\frac{g}{h}}}$ che può essere risolta raccogliendo al numeratore e al denominatore il termine $x^{\frac{n}{m}}$ essendo $\dfrac{n}{m}$ il *"grado"* massimo del numeratore o denominatore e quindi procedere come nel caso 1.2.

ESEMPI - ***funzioni irrazionali:***

$$\lim_{x\to+1}\frac{\sqrt[3]{x^2+3x+2}+\sqrt[4]{3x^3-x+2}}{\sqrt{3x+2}-\sqrt[9]{x^7+2}}=\frac{\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{4}}{\sqrt{5}-\sqrt[9]{3}}$$

$$\lim_{x\to+1}\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt[9]{x^3+5x^2-x-5}}=\frac{0+0}{0-0}=\lim_{x\to+1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+4)}-\sqrt[9]{(x^2+6x+5)(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to+1}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)}}{\sqrt[9]{x-1}}+\dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[9]{x-1}}}{\dfrac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{\sqrt[9]{x-1}}-\dfrac{\sqrt[9]{(x^2+6x+5)(x-1)}}{\sqrt[9]{x-1}}}=\lim_{x\to+1}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}(x+2)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}}(x+4)^{\frac{1}{2}}-(x^2+6x+5)^{\frac{1}{9}}}=\frac{0+0}{0-12}=0$$

$$\lim_{x\to+1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2}=\lim_{x\to+1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^4+1}}=$$

$$\lim_{x\to+1}\frac{x-x^4}{x-x^2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to+1}\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^4+1}}=$$

$$\lim_{x\to+1}(1+x+x^2)\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^4+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{+\infty-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[4]{x^2+3}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}}{\sqrt{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}+\sqrt[4]{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{3x}+\sqrt{x^4}}{\sqrt{2x}+\sqrt[4]{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^2}{3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}-2}+1\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}}+1\right)}{3^{\frac{1}{2}}+1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2+3\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}{2+3x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+3\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}\right)}{\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+3\right)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{10+x^{1+\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{10}{x^{\frac{3}{2}}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{10}{x^{\frac{3}{2}}}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{3x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{3x-1} = \frac{+\infty}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{\left(3-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to4}-\frac{4-x}{4-x}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to0}\frac{1+x-1+x}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \infty$$

2.1 Limiti di *funzioni irrazionali* - *con sostituzione:*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} = \left(\text{ponendo } x=t^2\right) \quad \lim_{t\to1}\frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t\to1}\frac{t-1}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to1}\frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\quad\frac{0}{0}=\quad\left(\text{ponendo } x=t^{12}\right)\quad\lim_{t\to1}\frac{t^4-1}{t^3-1}\quad=\quad\lim_{t\to1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)\cdot(t^2+1)}{(t-1)\cdot(t+1)}\quad=\quad\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{0}{0}=\left(\text{ponendo } 1+x=t^6\right)\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\quad\lim_{t\to1}\frac{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}{(t-1)\cdot(t+1)}=\quad\frac{3}{2}$$

3. Limiti *notevoli:*

$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{sin(f(x))}{f(x)}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{sin(\alpha\cdot f(x))}{f(x)}=\alpha$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{sin(\alpha\cdot f(x))}{sin(\beta\cdot f(x))}=\dfrac{\alpha}{\beta}$
$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{tg(f(x))}{f(x)}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{sin(f(x))}{tg(f(x))}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{\cos(f(x))-1}{f(x)}=0$
$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^{\alpha}$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e$
$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{1-\cos(f(x))}{(f(x))^2}=\dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a$

ESEMPI – *limiti notevoli:*

$$\lim_{x\to0}\frac{sin5x}{sin2x}\quad=\quad\lim_{x\to0}\frac{sin5x}{5x}\cdot\frac{2x}{sin2x}\cdot\frac{5x}{2x}=\quad\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}\quad=\quad\lim_{x\to0}(1+(-x))^{-\left(-\frac{1}{x}\right)}=\quad\lim_{x\to0}\left[(1+(-x))^{\left(-\frac{1}{x}\right)}\right]^{-1}=\quad\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{3}}\right]^3=e^3$$

4. Regola di *De L'Hospital*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si applica ***esclusivamente*** a forme indeterminate del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ oppure $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$; tuttavia è applicabile anche nel caso di forma indeterminata $0 \cdot \infty$ o $\infty - \infty$ riconducendosi alle due forme precedenti. Essendo ***spesso erroneamente applicato*** anche quando non ne sussistono le ipotesi, vengono qui schematicamente ricordate:

Ipotesi di applicabilità del ***Teorema di De L'Hospital:***

siano $-\infty \le a < b \le \infty$ e $f, g : (a,b) \to R$, soddisfacenti le seguenti ipotesi:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (oppure $+\infty, -\infty, \infty$)
- f e g derivabili in (a,b) e $g'(x) \neq 0; \forall x \in (a,b)$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finito o infinito)

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Questa regola è applicabile ricorsivamente, ossia se, applicata una volta, porta ad un forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$ e se sono ancora valide le ipotesi di applicabilità, si possono calcolare le derivate seconde del numeratore e denominatore e calcolare il valore del limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

4.1 Forma del tipo $0 \cdot \infty$: sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Basta riscrivere il limite come:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

ottenendo così delle forme che si sanno trattare con De L'Hospital, come visto sopra.

4.2 Forma del tipo $\infty - \infty$: in questo caso si cercherà di porre la differenza $f(x) - g(x)$ sotto forma o di quoziente o di prodotto in modo da ricondursi ad uno dei casi precedentemente trattati. Ad esempio:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) \qquad \text{se } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} \frac{1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} \quad \left(\text{forma indeterm. } \frac{0}{0}\right) \qquad \text{se } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ESEMPI – *regola di De L'Hospital:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + [tg(x)]^2}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{sin(2x) - 1}{2sin(x) - \sqrt{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos(2x)}{cos(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{1 - cos(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + [tg(x)]^2}{sin(x)} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{xsin(x)}{1 - cos(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x) + xcos(x)}{sin(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{2cos(x) - xsin(x)}{cos(x)} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{ln[sin(x)]}{ln[tg(x)]} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{sin(x)} \cdot cos(x)}{\dfrac{1}{tg(x)} \cdot \dfrac{1}{[cos(x)]^2}} = \lim_{x \to 0^+} [cos(x)]^2 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot ln(x) = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\dfrac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \cdot ln(x) \quad (n>0) \quad = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\dfrac{1}{x^n}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^{1+n}}} = \lim_{x \to 0^+} (-x^n) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \cdot ln(x) \quad (n<0) \quad = \frac{-\infty}{0^+} = \quad -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{ln(x)} - \frac{1}{x-1} = \infty - \infty = \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1-ln(x)}{x\cdot ln(x) - ln(x)} = \frac{0}{0} = \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{ln(x)+1-\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x - ln(x) = \quad \infty - \infty \qquad \lim_{x\to +\infty} x \cdot \left(1 - \frac{ln(x)}{x}\right) = \quad +\infty \cdot (1-0) = \qquad +\infty$$

Applicando De L'Hospital è inoltre possibile dimostrare i seguenti limiti (tralasciamo la semplice dimostrazione):

$$\lim_{x\to 0^+} x^\beta \cdot [ln(x)]^\alpha = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{[ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{[e^x]^\alpha}{x^\beta} = +\infty$$

$\forall \alpha, \beta \in R, \beta > 0$

5. Limiti di *funzioni elevate ad altre funzioni*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)}$$

Per limiti di questo tipo si hanno i seguenti casi:

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ allora è $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = l^m$
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ allora è $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = l^{\pm\infty}$
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ allora è $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} [f(x)-1]\cdot g(x)}$

- ***In generale:*** $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\log[f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\log[f(x)]} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\log[f(x)]}$

ESEMPI - *funzioni elevate ad altre funzioni*:

$$\lim_{x\to 1} (x)^{\frac{1}{1-x}} = \qquad 1^\infty = \qquad e^{\lim_{x\to 1} (x-1)\cdot\frac{1}{1-x}} = \qquad \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0} (x^x)^x = \lim_{x\to 0} x^{x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left(x^{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{x^2\cdot\log(x)} = e^0 = \qquad 1$$