Progetto Lauree Scientifiche: Dinamica di Popolazioni

Marco Caliari e Simone Zuccher

Liceo Scientifico Statale "E. Medi", Villafranca di Verona

a.s. 2009/2010

Indice

1 Modello matematico

Un modello matematico è un modello costruito usando il linguaggio e gli strumenti della matematica. Come tutti gli altri modelli usati nella scienza, il suo scopo è quello di rappresentare il più possibile fedelmente un determinato oggetto o fenomeno reale.

Tutti i settori della scienza fanno largo uso di modelli matematici per descrivere determinati aspetti del mondo reale. Gli strumenti matematici usati possono essere i più disparati.

1.1 Struttura di un modello

Un modello matematico è spesso costruito con lo scopo di fornire previsioni. Generalmente, il modello descrive la probabile evoluzione di un fenomeno sulla base di dati iniziali forniti dall'utente (*input*) e restituisce dei dati finali (*output*). L'efficacia del modello può quindi essere misurata comparando i dati finali con il risultato effettivo dell'evoluzione del fenomeno. Ad esempio, modelli matematici vengono continuamente proposti e testati in meteorologia o in economia.

1.2 Dipendenza dai dati iniziali

Un aspetto cruciale, che incide notevolmente sulla capacità di previsione di un modello matematico, è la dipendenza dai dati iniziali. Se una piccola variazione dell'input produce una forte variazione dell'output, la creazione di un modello efficiente risulta essere enormemente più complessa, e le previsioni a lungo termine possono risultare intrinsecamente impossibili. Un fenomeno con forte dipendenza dai dati iniziali, riassunto nel concetto di effetto farfalla, è detto *caotico*. La scienza che studia questi fenomeno è la teoria del caos. In un sistema di questo tipo, l'errore della previsione cresce esponenzialmente nel tempo.

Ad esempio, i fenomeni meteorologici sono generalmente caotici: per questo motivo, una previsione a lungo termine (ad esempio, la temperatura in una data città fra un anno) è impossibile. I pianeti del sistema solare si muovono invece in modo non caotico: per questo motivo è possibile prevedere eclissi con secoli d'anticipo. In sistemi non caotici, l'errore della previsione cresce generalmente in modo lineare nel tempo, o al più polinomiale.

1.3 Sistema dinamico

Nella fisica matematica contemporanea il concetto di *sistema dinamico* nasce dall'esigenza di costruire un modello generale in grado di descrivere tutti i sistemi che evolvono nel tempo secondo opportune leggi che legano lo *stato* presente a quelli futuri. Il concetto di stato è difficile da definire in maniera generale a causa dell'enorme varietà di forme che può assumere: si tratta in sostanza di una descrizione del sistema sufficientemente esauriente. Un sistema dinamico è definito da

- uno spazio delle fasi, ossia un insieme i cui elementi rappresentano tutti gli stati possibili che il sistema può assumere;

- un insieme di *tempi*: può essere un insieme *continuo* o uno *discreto*, a seconda del modello adottato. Il tempo rappresenta qui semplicemente un parametro al variare del quale il sistema descrive una traiettoria nello spazio delle fasi, e proprio da questa definizione prende l'appellativo *dinamico*;

- una *evoluzione*: il cambiamento degli stati del sistema al variare del tempo viene rappresentato da un insieme di funzioni dello spazio delle fasi in sé stesso. Esse vengono chiamate *funzioni di transizione* in quanto trasformano lo stato che si osserva all'istante iniziale in quello che il sistema assumerà dopo un certo tempo.

Facciamo un esempio di sistema dinamico molto semplice, così da introdurre anche la notazione che useremo in seguito. Consideriamo una colonia di batteri che si riproducono per *scissione* binaria. Siamo interessati a studiare il numero di individui della colonia ad un certo istante, sapendo che ogni batterio si divide in due dopo 20 minuti dalla sua creazione. Per poter scrivere un modello, dobbiamo fare *almeno* queste ipotesi/semplificazioni (DOMANDA):

- Supponiamo di conoscere il numero di individui nell'istante in cui iniziamo l'osservazione.

- Supponiamo che tutti gli individui siano "sincronizzati", cioè comincino tutti a scindersi dopo 20 minuti (ed esattamente dopo 20 minuti).

- La velocità di riproduzione dipende, per esempio, dalla temperatura, dall'umidità, dal PH, dalla quantità di ossigeno presente, ecc. Supponiamo che tutto ciò che influenza la velocità di riproduzione dei batteri rimanga costante nel tempo.

- Supponiamo che i batteri siano "immortali", almeno (!) nel periodo di osservazione.
- Supponiamo che tutti i batteri rimangano nello spazio di osservazione.
- Supponiamo che tutte le scissioni avvengano senza mutazioni tali da alterare il ciclo vitale dei nuovi individui.
- ...

Con tutte queste ipotesi, se indichiamo con x_1 il numero di individui nell'istante in cui iniziamo l'osservazione, dopo 20 minuti il numero di individui sarà $2x_1$, dopo altri 20 minuti $4x_1$ e così via. Allora lo spazio delle fasi è

$$\{x_1, 2x_1, 4x_1, 8x_1, \ldots\}$$

Per quanto riguarda l'insieme dei tempi, ci sono diverse possibilità. Possiamo prendere come istante iniziale t_1 il tempo (in minuti) trascorso tra il Big Bang e l'istante in cui iniziamo l'osservazione: al tempo $t_2 = t_1 + 20$ si ha la prima scissione, al tempo $t_3 = t_2 + 20$ la seconda e così via. Al tempo $t_5 + 10.5\ldots$ mancano nove minuti e mezzo alla quinta scissione. Con questa scelta, l'insieme dei tempi è

$$\{t\colon t \geq t_1\}$$

Una scelta più sensata è quella discreta, in cui si fissa l'istante iniziale a zero:

$$\{t_1, t_2, t_3, \ldots\} = \{0, 20, 40, \ldots\}$$

A questo punto, risulta conveniente definire x_2 come il numero di individui all'istante t_2: si ha allora $x_2 = 2x_1$. E x_3 il numero di individui all'istante t_3: quindi $x_3 = 2x_2 = 4x_1$. In generale, si ha

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad n \geq 1 \tag{1}$$

ove x_n è il numero di individui all'istante t_n.

Infine, qual è l'evoluzione? Al tempo t_{i+1} si è passati da x_1 individui a $x_{i+1} = 2x_i = 4x_{i-1} = \ldots = 2^i x_1$ individui. Dunque la funzione che trasforma lo stato iniziale x_1 nello stato x_i è

$$\varphi_{t_i}\colon x_1 \to 2^{i-1}x_1$$

Una crescita di popolazione di questo tipo è detta *crescita esponenziale* (termine di cui spesso si abusa). In questo caso, la base (costante) dell'esponenziale è maggiore di uno e quindi si ha una crescita vera e propria. Nel caso in cui la base sia uguale a uno, il numero di individui rimarrebbe costante. Infine, nel caso in cui la base sia minore di uno, il numero di individui decrescerebbe fino a zero. In ogni caso, si potrebbe parlare di *andamento esponenziale*.

1.4 Sugli scacchi e la crescita esponenziale

Il gioco degli scacchi è uno dei più antichi del mondo, per quanto non si sappia con precisione chi l'abbia inventato: si presume i cinesi, alcune migliaia di anni fa, o forse gli indiani. Lentamente, con il progredire delle relazioni commerciali, si diffuse in altre regioni e specialmente in Persia, dove divenne ben presto popolare. Il gioco arrivò in seguito in Egitto, portato da un ambasciatore persiano che volle insegnarlo anche al Faraone. Questi, entusiasta del gioco, al termine della partita, per testimoniare la propria gratitudine, invitò l'ambasciatore ad esprimere un desiderio qualsiasi che sarebbe stato senz'altro esaudito. L'interpellato rispose che voleva del grano: un chicco sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro sulla terza e cos continuando e raddoppiando, fino alla sessantaquattresima casella. "Una cosa da nulla"— proclamò il Faraone, stupito che la richiesta fosse così misera, e diede ordine al Gran Tesoriere di provvedere. Dopo oltre una settimana il funzionario, che nel frattempo aveva tentato di fare i conti, si presentò dicendo: "Maestà, per pagare l'ambasciatore non solo non è sufficiente il raccolto annuale dell'Egitto, non lo è neppure quello del mondo intero, e neppure i raccolti di dieci anni di tutto il mondo sono sufficienti".

Il numero di chicchi che il Faraone avrebbe dovuto dare all'ambasciatore persiano è il seguente:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

ossia più di 18 miliardi di miliardi di chicchi!

Per renderci conto di quanto grande sia questo numero, ricordiamo che la produzione mondiale di grano prevista per il 2009/2010 (vedi [1]) è di 656 milioni di tonnellate (ai tempi dei faraoni era molto meno...). Per difetto assumiamo che ci vogliano 10 chicchi per fare un grammo e che il numero di chicchi sulla scacchiera sia 18 miliardi di miliardi. Allora, il peso dei chicchi che il Faraone avrebbe dovuto consegnare all'ambasciatore persiano vale 1.8 miliardi di miliardi di grammi, ossia 1 800 000 milioni di tonnellate, vale a dire la produzione mondiale di grano di più di 2644 anni!

L'ambasciatore potrebbe essere stato un po' più modesto e chiedere solo i chicchi di grano presenti sull'ultima casella della scacchiera, cioè 2^{63}. Osserviamo che (EXCEL)

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \qquad (2)$$

e, ponendo $n = 62$, scopriamo che il numero di chicchi presenti sull'ultima casella è circa uguale al numero di chicchi presenti su tutte le altre e dunque la metà circa del numero totale di chicchi. In tal caso, sarebbero "bastati" 1322 anni di raccolto odierno.

1.5 Popolazione italiana

Consideriamo l'andamento della popolazione italiana nell'anno 2008. Dal sito dell'ISTAT [2] ricaviamo, tra le altre, le seguenti informazioni:

Popolazione al primo gennaio	59 619 290
Nati	576 659
Morti	585 126
Saldo migratorio e per altri motivi	434 245
Popolazione al 31 dicembre	60 045 068

Tabella 1: Bilancio demografico anno 2008. Dati ISTAT.

Il cosiddetto "saldo naturale" è di $-8\,467$ e l'aumento della popolazione è dovuto al saldo migratorio. Il numero di nuovi nati è pari circa al 9.67 per mille della popolazione iniziale e il numero di morti è pari circa al 9.81 per mille della popolazione iniziale. Ha senso esprimerli come frazione della popolazione? Abbastanza. Per quanto riguarda i nuovi nati, il loro numero dipende dalle coppie che decidono di avere figli. È abbastanza ragionevole pensare che se la popolazione dovesse raddoppiare, così anche il numero di coppie (e di ogni altro stato civile) e dunque il numero di nuovi nati. E lo stesso dicasi per quanto riguarda il numero di morti. Ad ulteriore conferma, guardiamo le percentuali di nuovi nati e morti negli anni scorsi:

Anno	% nati	% morti
2008	0.967	0.981
2007	0.954	0.965
2006	0.953	0.950
2005	0.948	0.970

Tabella 2: Percentuali di nuovi nati e morti negli anni 2005–2008. Dati ISTAT.

Si vede come queste percentuali si mantengano "più o meno" costanti.

Per quanto riguarda il flusso migratorio, invece, non ha molto senso esprimerlo in termini percentuali. Il numero di immigrati non dipende direttamente dalla numerosità della popolazione locale, quanto, piuttosto, da "quote" di immigrazione, decise anno per anno e dipendenti da vari fattori (disponibilità di lavoro *in primis*).

2 Il modello di Malthus

Vogliamo scrivere un modello matematico che, a partire dai dati della popolazione italiana nel 2008, possa predire l'andamento negli anni futuri. Abbiamo già capito che un insieme dei tempi conveniente è quello discreto $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\} = \{2008, 2009, 2010, \ldots\}$. Indichiamo con x_1 il numero di abitanti in Italia il primo gennaio 2008. Chiameremo poi x_2, x_3, eccetera il numero di abitanti in Italia il primo gennaio 2009, 2010, eccetera. Come al solito, assumeremo tutte le ipotesi semplificative che ci servono.

2.1 Solo nuovi nati

Cominciamo a scrivere il modello tenendo conto solo dei nuovi nati. Per questo, assumeremo essere fisso il *tasso di natalità* che chiameremo τ^{nati}. Dunque, il numero di abitanti nel 2009 (al primo gennaio) è (STUDENTI)

$$x_2 = x_1 + \tau^{\text{nati}} x_1$$

ossia il numero di abitanti nel 2008 più il numero di nuovi nati nel 2008. Ad essere precisi, poiché moltiplichiamo il numero intero x_1 per un numero decimale, dovremmo prendere la parte intera di x_2 (o ammettere che ci siano, per esempio, mezze persone...). Trascureremo questo fatto. Se il tasso di natalità si mantiene costante, possiamo scrivere, in generale, che nell'anno $2008 + n$ la popolazione è di

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\text{nati}} x_n = (1 + \tau^{\text{nati}}) x_n, \quad n \geq 1$$

abitanti.

Domande:

1. Usando il tasso attuale, quanto sarà la popolazione il primo gennaio 2020, ipotizzando che ci siano solo nascite e non morti?

2. In che anno si avrà una popolazione superiore a 70 milioni di abitanti, nelle stesse ipotesi?

3. Se si volessero raggiungere i 70 milioni di abitanti il primo gennaio 2020, quale dovrebbe essere il valore del tasso di natalità?

Questa espressione è molto simile a quella in equazione (1). In questo caso, la base dell'esponenziale è di poco maggiore di 1, comunque sufficiente a generare una vera crescita esponenziale della popolazione. Se si vuole conoscere la popolazione nell'anno $2008 + n$, basta osservare che

$$x_{n+1} = (1 + \tau^{\text{nati}}) x_n = (1 + \tau^{\text{nati}})^2 x_{n-1} = \ldots = (1 + \tau^{\text{nati}})^n x_1 \qquad (3)$$

2.2 Nuovi nati e morti

Se consideriamo anche i morti, chiamando τ^{morti} il *tasso di mortalità* fisso, il numero di abitanti nel 2009 è

$$x_2 = x_1 + \tau^{\text{nati}} x_1 - \tau^{\text{morti}} x_1$$

ossia il numero di abitanti nel 2008 più il numero di nuovi nati nel 2008 meno il numero di morti nel 2008. Se i due tassi si mantengono costanti, possiamo scrivere che nell'anno $2008 + n$ la popolazione è di

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\text{nati}} x_n - \tau^{\text{morti}} x_n = (1 + \tau^{\text{nati}} - \tau^{\text{morti}}) x_n, \quad n \geq 1 \tag{4}$$

L'andamento è ancora esponenziale, ma, essendo $\tau^{\text{morti}} > \tau^{\text{nati}}$, la popolazione è destinata all'estinzione. Il numero di abitanti nell'anno $2008 + n$ è, per quanto visto,

$$x_{n+1} = (1 + \tau^{\text{nati}} - \tau^{\text{morti}})^n x_1 \tag{5}$$

Domande:

4. Quanti abitanti ci saranno il primo gennaio 2100, considerando sia il tasso di natalità che di mortalità del 2008?

5. Mantenendo fisso il valore del tasso di natalità, quale dovrebbe essere il valore del tasso di mortalità per avere l'estinzione della popolazione il primo gennaio 2100?

Con i tassi attuali, quando si estinguerà la popolazione? Bisogna risolvere l'equazione (in n)

$$(1 + \Delta\tau)^n x_1 = 0$$

ove abbiamo posto $\Delta\tau = \tau^{\text{nati}} - \tau^{\text{morti}}$. Se $x_1 \neq 0$ e $0 < (1 + \Delta\tau) < 1$ tale equazione però non ammette soluzione. Dove sta il problema? Da nessuna parte: bisogna ricordare però che il numero di abitanti è un numero *naturale*. Non appena allora si raggiungerà una popolazione con al massimo un abitante, l'anno seguente ci sarà estinzione (anche perché un abitante non può avere figli...). Dunque, si deve risolvere l'equazione (in r)

$$(1 + \Delta\tau)^r x_1 = 1$$

(usiamo r perché vogliamo, come soluzione, n numero naturale e non r numero reale). L'estinzione avverrà al primo n numero naturale tale che $n > r$.

2.3 Nuovi nati, morti e migrazioni

Infine, aggiungiamo la quota di migrazione che chiamiamo m ed è costante e indipendente dal numero di abitanti (in generale, può essere positivo, nullo o negativo). Pertanto, nell'anno $2008 + n$ si ha

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\text{nati}} x_n - \tau^{\text{morti}} x_n + m = (1 + \Delta\tau)x_n + m$$

Questo modello di crescita di popolazione si chiama *modello di Malthus*. (EXCEL) Qual è l'andamento della popolazione? Nel caso italiano, si ha $1 + \Delta\tau < 1$ e $m > 0$. A partire dall'anno 2009 si ha

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 + \Delta\tau)x_1 + m = 60\,045\,068 > x_1 = 59\,619\,290 \\ x_3 &= (1 + \Delta\tau)x_2 + m > (1 + \Delta\tau)x_1 + m = x_2 \\ x_4 &= (1 + \Delta\tau)x_3 + m > (1 + \Delta\tau)x_2 + m = x_3 \end{aligned} \tag{6}$$

eccetera. Possiamo concludere (per il "principio di induzione del somaro") che

$$x_{n+1} > x_n, \quad n \geq 1 \tag{7}$$

Inoltre (ricordiamo che $\Delta\tau < 0$)

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta\tau x_1 + m \\ x_3 - x_2 &= \Delta\tau x_2 + m < \Delta\tau x_1 + m = x_2 - x_1 \\ x_4 - x_3 &= \Delta\tau x_3 + m < \Delta\tau x_2 + m = x_3 - x_2 \end{aligned}$$

eccetera. Quindi, la popolazione cresce, ma sempre meno. Si tratta di capire allora se la popolazione cresce fino ad esplodere *(esplosione)* oppure tende a stabilizzarsi. Se esplodesse, significa che, fissato un numero di abitanti grande a piacere, diciamo M, ad un certo punto questo numero sarebbe superato. Sia allora

$$M = -\frac{m}{\Delta\tau}$$

e sia N tale che

$$x_N > -\frac{m}{\Delta\tau}$$

Allora $\Delta\tau x_N + m < 0$ e quindi $x_{N+1} = x_N + \Delta\tau x_N + m < x_N$, in contrasto con quanto scritto in (7). Dunque la popolazione cresce ma non può superare la quantità $-m/\Delta\tau$, verso la quale si stabilizza (per inciso, nel caso italiano tale quantità vale circa 3 057 680 239).

Domande:

6. Considerando le nascite, le morti e il flusso migratorio, la popolazione si stabilizzerà, prima o poi, su un valore costante?
7. Quale dovrebbe essere il valore del flusso migratorio per mantenere una popolazione costante e uguale alla popolazione al primo gennaio 2008?
8. Quale dovrebbe essere il valore del flusso migratorio per avere una popolazione che si stabilizza attorno a 70 milioni di abitanti?

Per quanto abbiamo appena visto, per avere una popolazione costante e uguale a quella del primo gennaio 2008, dovrà essere

$$-\frac{m}{\Delta\tau} = x_1$$

cioè $m = -\Delta\tau x_1$. Si poteva pervenire a questo risultato anche risolvendo l'equazione (in m)

$$(1 + \Delta\tau)x_1 + m = x_1$$

che mantiene la popolazione nel 2009 uguale al 2008. Ovviamente, si può calcolare anche il flusso migratorio per fare in modo che la popolazione si stabilizzi attorno ad un valore, diciamo x_∞, fissato: basta risolvere l'equazione (in m)

$$-\frac{m}{\Delta\tau} = x_\infty$$

Sarebbe utile poter scrivere una formula che lega la popolazione x_{n+1} alla popolazione iniziale x_1, come in (3) e (5). Osserviamo che

$$\begin{aligned}
x_2 &= (1 + \Delta\tau)x_1 + m \\
x_3 &= (1 + \Delta\tau)x_2 + m = (1 + \Delta\tau)^2 x_1 + (1 + \Delta\tau)m + m \\
x_4 &= (1 + \Delta\tau)x_3 + m = (1 + \Delta\tau)^3 x_1 + (1 + \Delta\tau)^2 m + (1 + \Delta\tau)m + m
\end{aligned}$$

e quindi, in generale,

$$x_{n+1} = (1 + \Delta\tau)^n x_1 + \left(1 + (1 + \Delta\tau) + (1 + \Delta\tau)^2 + \ldots + (1 + \Delta\tau)^{n-1}\right) m$$

Per quanto visto in (2), si ha

$$x_{n+1} = (1 + \Delta\tau)^n x_1 + \frac{(1 + \Delta\tau)^n - 1}{(1 + \Delta\tau) - 1} m = (1 + \Delta\tau)^n x_1 + \frac{(1 + \Delta\tau)^n - 1}{\Delta\tau} m$$

Domande:

9. Quale dovrebbe essere il valore del flusso migratorio per avere 70 milioni di abitanti il primo gennaio 2100?

10. Fissato il flusso migratorio al valore nel 2008, quale dovrebbe essere il valore del tasso di natalità per avere 70 milioni di abitanti il primo gennaio 2100?

2.4 Possibili complicazioni

Il modello di Malthus è *lineare* (i termini x_n compaiono solo come monomi di grado uno) e a *coefficienti* (τ^{nati}, τ^{morti}, m) *costanti.* Si potrebbe complicare il modello assumendo coefficienti dipendenti dal tempo (cioè da n). In tal caso si avrebbe

$$x_{n+1} = x_n + (\tau_n^{\text{nati}} - \tau_n^{\text{morti}})x_n + m_n$$

Per i flussi migratori, la cosa appare plausibile, quando si fissino, per esempio per legge, pari a certe quantità negli anni a venire. Per i tassi di natalità e mortalità, è invece più probabile che possano dipendere dal numero di abitanti stesso (un governo potrebbe scoraggiare le nascite—togliendo i benefici che di solito si concedono alle famiglie numerose—qualora la popolazione raggiungesse livelli non sostenibili). In tal caso allora, essi sarebbero funzioni del numero di abitanti x_n e pertanto il modello diventerebbe *non lineare.*

Riferimenti bibliografici

[1] MercatiGrano.it. `http://www.mercatigrano.it/`.

[2] Geo demo ISTAT. `http://demo.istat.it/`.

[3] Wikipedia, the free encyclopedia. `http://www.wikipedia.org`.