

# Note di Fluidodinamica

Simone Zuccher

6 giugno 2014

Queste note non hanno nessuna pretesa di completezza né vogliono sostituire i numerosi libri di testo sulla fluidodinamica. Sono le dispense del corso di *Dinamica dei Fluidi* tenuto dall'autore presso l'Università degli Studi di Verona per studenti iscritti al terzo anno del corso di laurea in matematica applicata. Sono state pensate per evitare allo studente l'inconveniente di doversi procurare più libri di testo dai quali estrarre, di volta in volta, i diversi argomenti trattati durante il corso. Esse sono il frutto di approssimazioni successive operate ininterrottamente a partire dall'anno accademico 2009-2010 e sono da considerarsi in *continuo divenire*.

Alcuni testi per eventuali approfondimenti (in nessun modo richiesti per prepararsi all'esame) sono:

- Batchelor, K.K.: *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press (2000)
- Chorin, A.J. & Marsden, J.E.: *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Third Edition, Springer-Varlag (1993)
- Kundu, P.K. & Cohen, I.M.: *Fluid Mechanics*, Third Edition, Elsevier Academic Press (2004)
- Lamb, H.: *Hydrodynamics*, Sixth Edition, Dover Publications (1945)
- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M.: *Fluid Mechanics*, Volume VI of "Course of Theoretical Physics", Second Edition, Pergamon Press (1987)
- Quartapelle L. & Auteri, F.: *Fluidodinamica incompressibile*, Casa Editrice Ambrosiana (2013)
- Quartapelle L. & Auteri, F.: *Fluidodinamica comprimibile*, Casa Editrice Ambrosiana (2013)
- Riccardi, G. & Durante, D.: *Elementi di fluidodinamica*, Springer-Varlag (2006)
- White, F.M.: *Fluid Mechanics*, Fourth Edition, Mc Graw Hill (2001)

Per segnalare eventuali errori presenti in queste note, oppure per suggerire possibili migliorie, scrivere all'indirizzo email: [zuccher@sci.univr.it](mailto:zuccher@sci.univr.it). L'ultima versione di questo file è reperibile al link <http://profs.sci.univr.it/~zuccher/downloads/fd-zuccher.pdf>

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione ai fluidi</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Definizione di fluido . . . . .  | 1         |
| 1.2      | Ipotesi del continuo e proprietà fisiche dei fluidi . . . . .                          | 2         |
| 1.2.1    | La densità . . . . .   | 2         |
| 1.2.2    | La viscosità . . . . .   | 3         |
| 1.2.3    | La tensione superficiale . . . . .   | 4         |
| 1.2.4    | Alcuni valori per i fluidi più comuni . . . . .  | 4         |
| 1.3      | Fluido, flusso, corrente . . . . .   | 4         |
| 1.4      | Alcune considerazioni cinematiche . . . . .  | 5         |
| 1.5      | Forze e sforzi nei fluidi . . . . .  | 6         |
| 1.6      | La relazione costitutiva per fluidi newtoniani isotropi . . . . .                      | 10        |
| <b>2</b> | <b>Le equazioni di governo</b>   | <b>13</b> |
| 2.1      | Volume di controllo fisso o in moto con il fluido . . . . .                            | 13        |
| 2.2      | Conservazione della massa in un volume fisso $V$ . . . . .                             | 13        |
| 2.3      | Conservazione della massa in un volume $\mathcal{V}_t$ in moto con il fluido . . . . . | 15        |
| 2.4      | Dai principi di conservazione alle equazioni di Navier-Stokes . . . . .                | 17        |
| 2.4.1    | La seconda legge di Newton . . . . .   | 18        |
| 2.4.2    | Il primo principio della termodinamica . . . . .                                       | 19        |
| 2.5      | Le equazioni di Navier-Stokes complete . . . . .                                       | 21        |
| 2.6      | Condizioni iniziali e al contorno . . . . .  | 22        |
| 2.7      | La derivata sostanziale . . . . .  | 23        |
| 2.8      | Forma conservativa e forma convettiva . . . . .  | 24        |
| 2.9      | Forme alternative per l'equazione dell'energia . . . . .                               | 25        |
| 2.9.1    | Equazione dell'energia interna . . . . .   | 25        |
| 2.9.2    | Equazione dell'entropia . . . . .  | 26        |
| 2.9.3    | Equazione dell'entalpia . . . . .  | 27        |
| 2.9.4    | Equazione della temperatura . . . . .  | 27        |
| 2.10     | Adimensionalizzazione delle equazioni di governo . . . . .                             | 28        |
| <b>3</b> | <b>Casi particolari delle equazioni di governo</b>                                     | <b>31</b> |
| 3.1      | Correnti particolari . . . . .   | 31        |
| 3.1.1    | Dipendenza dal tempo . . . . .   | 31        |
| 3.1.2    | Effetto della viscosità . . . . .  | 31        |
| 3.1.3    | Conduzione termica . . . . .   | 31        |
| 3.1.4    | Entropia . . . . .   | 33        |
| 3.1.5    | Comprimibilità . . . . .   | 33        |
| 3.1.6    | Correnti barotropiche . . . . .  | 35        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.2      | Corrente incomprimibile . . . . .   | 36        |
| 3.3      | Corrente ideale, equazioni di Eulero . . . . .                                | 36        |
| 3.4      | Corrente irrotazionale . . . . .  | 37        |
| 3.5      | Corrente barotropica non viscosa: forma di Crocco . . . . .                   | 37        |
| 3.6      | Il teorema di Bernoulli nelle diverse forme . . . . .                         | 38        |
| 3.6.1    | Il caso stazionario . . . . .   | 38        |
| 3.6.2    | Il caso irrotazionale instazionario . . . . .                                 | 39        |
| 3.6.3    | Il caso irrotazionale e stazionario . . . . .                                 | 39        |
| <b>4</b> | <b>Alcune soluzioni esatte</b>  | <b>41</b> |
| 4.1      | Corrente incomprimibile e parallela . . . . .                                 | 41        |
| 4.2      | Canale piano infinito: corrente di Couette e di Poiseuille . . . . .          | 42        |
| 4.3      | Tubo a sezione circolare: corrente di Hagen-Poiseuille . . . . .              | 43        |
| 4.4      | Corrente lungo un piano inclinato . . . . .                                   | 44        |
| 4.5      | Corrente tra due cilindri coassiali contro-rotanti . . . . .                  | 46        |
| <b>5</b> | <b>Dinamica della vorticità</b>   | <b>49</b> |
| 5.1      | Alcune definizioni . . . . .  | 49        |
| 5.2      | Equazione per la vorticità nel caso generale . . . . .                        | 52        |
| 5.3      | Casi particolari . . . . .  | 55        |
| 5.3.1    | Corrente a viscosità e densità costanti . . . . .                             | 55        |
| 5.3.2    | Corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative . . . . . | 55        |
| 5.4      | Dinamica della vorticità: 3D vs 2D . . . . .                                  | 56        |
| 5.5      | Il teorema di Kelvin . . . . .  | 57        |
| 5.6      | Teoremi di Helmholtz e loro significato geometrico . . . . .                  | 58        |
| 5.6.1    | Primo teorema di Helmholtz . . . . .  | 58        |
| 5.6.2    | Secondo teorema di Helmholtz . . . . .  | 59        |
| 5.6.3    | Terzo teorema di Helmholtz . . . . .  | 59        |
| <b>6</b> | <b>Lo strato limite</b>   | <b>61</b> |
| 6.1      | Teoria dello strato limite di Prandtl . . . . .                               | 61        |
| 6.1.1    | Risoluzione numerica per lo strato limite 2D su lamina piana . . . . .        | 64        |
| 6.2      | Equazione di Blasius (corrente esterna uniforme) . . . . .                    | 66        |
| 6.2.1    | Risoluzione numerica dell'equazione di Blasius . . . . .                      | 71        |
| 6.2.2    | Spessore dello strato limite . . . . .  | 71        |
| 6.2.3    | Valore asintotico della velocità normale alla parete . . . . .                | 72        |
| 6.2.4    | Resistenza di attrito . . . . .   | 72        |
| 6.3      | Grandezze caratteristiche dello strato limite . . . . .                       | 73        |
| 6.3.1    | Lo spessore di spostamento . . . . .  | 73        |
| 6.3.2    | Lo spessore di quantità di moto . . . . .                                     | 74        |
| 6.3.3    | Fattore di forma . . . . .  | 74        |
| 6.4      | Equazione integrale di von Kàrmàn . . . . .                                   | 75        |
| <b>7</b> | <b>Stabilità e transizione</b>  | <b>77</b> |
| 7.1      | Corrente confinata in un tubo – l'esperimento di Reynolds . . . . .           | 77        |
| 7.2      | La transizione in correnti aperte – lo strato limite . . . . .                | 79        |
| 7.3      | Stabilità lineare per correnti piane e parallele . . . . .                    | 81        |
| 7.3.1    | Teorema di Squire . . . . .   | 85        |
| 7.3.2    | Stabilità non viscosa . . . . .   | 87        |

|                    |  |            |
|--------------------|--|------------|
| 7.3.3              | Stabilità viscosa . . . . .  | 89         |
| <b>8</b>           | <b>La turbolenza</b>   | <b>91</b>  |
| 8.1                | Caratteristiche fenomenologiche di una corrente turbolenta . . . . .               | 91         |
| 8.2                | Scale turbolente . . . . .   | 93         |
| 8.2.1              | Cascata di energia . . . . .   | 93         |
| 8.2.2              | La teoria di Kolmogorov . . . . .  | 95         |
| 8.3                | DNS: la simulazione diretta della turbolenza . . . . .                             | 98         |
| 8.4                | RANS: le equazioni mediate di Reynolds . . . . .                                   | 98         |
| 8.5                | Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds . . . . .              | 101        |
| 8.5.1              | Ipotesi di Boussinesq e viscosità turbolenta . . . . .                             | 101        |
| 8.5.2              | Modello di ordine 0 per $\nu_T$ : <i>mixing length</i> . . . . .                   | 102        |
| 8.5.3              | Modello di ordine 1 per $\nu_T$ : $K$ . . . . .                                    | 104        |
| 8.5.4              | Modello di ordine 2 per $\nu_T$ : $K-\epsilon$ . . . . .                           | 107        |
| 8.6                | LES: simulazione dei grandi vortici . . . . .                                      | 108        |
| <b>9</b>           | <b>Leggi di conservazione iperboliche</b>  | <b>111</b> |
| 9.1                | Leggi di conservazione e carattere iperbolico . . . . .                            | 111        |
| 9.2                | Equazioni iperboliche . . . . .  | 112        |
| 9.2.1              | Il caso scalare lineare a coefficienti costanti (trasporto) . . . . .              | 112        |
| 9.2.2              | Il caso scalare non lineare . . . . .  | 114        |
| 9.2.3              | Onda d'urto, soluzione debole e condizione di Rankine-Hugoniot . . . . .           | 117        |
| 9.2.4              | Il problema di Riemann (non lineare) . . . . .                                     | 120        |
| 9.3                | Alcuni metodi numerici per equazioni iperboliche . . . . .                         | 124        |
| 9.3.1              | Il caso lineare . . . . .  | 124        |
| 9.3.2              | Il caso non lineare . . . . .  | 126        |
| 9.4                | Sistemi iperbolicici lineari . . . . .   | 127        |
| 9.5                | Sistemi iperbolicici non lineari . . . . .   | 128        |
| 9.5.1              | Genuina non linearità, degenerazione lineare e discontinuità di contatto . . . . . | 129        |
| 9.5.2              | Soluzioni possibili del problema di Riemann nel caso nonlineare . . . . .          | 130        |
| 9.6                | Problema di Riemann per le equazioni di Eulero 1D . . . . .                        | 131        |
| 9.6.1              | Soluzione generale del problema di Riemann . . . . .                               | 132        |
| <b>Appendice A</b> | <b>Vettori, tensori, operatori differenziali</b>                                   | <b>135</b> |
| A.1                | Vettori in $\mathbb{R}^3$ e operazioni su di essi . . . . .                        | 135        |
| A.1.1              | Alcune identità vettoriali . . . . .   | 137        |
| A.2                | Gradiente, divergenza, rotore e laplaciano . . . . .                               | 138        |
| A.3                | Tensori (cenni) e notazione di Einstein . . . . .                                  | 141        |
| A.3.1              | Alcune proprietà del simbolo di Levi-Civita . . . . .                              | 144        |
| A.3.2              | Rivisitazione di alcune proprietà delle operazioni tra vettori . . . . .           | 145        |
| <b>Appendice B</b> | <b>Richiami su alcuni teoremi fondamentali</b>                                     | <b>147</b> |
| B.1                | Teorema della divergenza e del rotore . . . . .                                    | 147        |
| B.1.1              | Teorema della divergenza . . . . .   | 147        |
| B.1.2              | Teorema del rotore (o di Stokes) . . . . .   | 147        |
| B.2                | Significato fisico-geometrico di gradiente, divergenza e rotore . . . . .          | 148        |
| B.2.1              | Il gradiente . . . . .   | 148        |
| B.2.2              | La divergenza . . . . .  | 148        |
| B.2.3              | Il rotore . . . . .  | 149        |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| B.3  | Teorema di Leibniz . . . . .  | 150        |
| B.4  | Teorema del trasporto di Reynolds . . . . .                                   | 153        |
| B.4.1  | Il caso di una funzione scalare . . . . .                                     | 153        |
| B.4.2  | Il caso di un campo vettoriale . . . . .                                      | 155        |
| <b>Appendice C Termodinamica e trasmissione del calore</b>       |   | <b>157</b> |
| C.1  | Termodinamica classica . . . . .  | 157        |
| C.1.1  | Sistema termodinamico in equilibrio . . . . .                                 | 157        |
| C.1.2  | Funzioni di stato . . . . .   | 158        |
| C.1.3  | I principi della termodinamica . . . . .                                      | 160        |
| C.1.4  | I gas perfetti . . . . .  | 161        |
| C.1.5  | Calori specifici, relazioni di Maxwell e altri coefficienti termodinamici . . | 162        |
| C.2  | Trasmissione del calore . . . . .   | 165        |
| C.2.1  | Conduzione . . . . .  | 165        |
| C.2.2  | Convezione . . . . .  | 166        |
| C.2.3  | Irraggiamento . . . . .   | 166        |
| <b>Appendice D Coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche</b> |   | <b>169</b> |
| D.1  | Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane . . . . .                 | 169        |
| D.2  | Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche . . . . .                | 170        |
| D.3  | Equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche . . . . .                   | 171        |

# Lista dei simboli

## Simboli matematici

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$       | Prodotto <i>scalare</i> tra i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$                                   |
| $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$      | Prodotto <i>vettoriale</i> tra i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$                                |
| $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$     | Prodotto <i>tensoriale</i> tra i tensori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$                                |
| $\nabla^2 \varphi$                  | Laplaciano della funzione scalare $\varphi$   |
| $\nabla \varphi$                    | Gradiente della funzione scalare $\varphi$  |
| $\nabla \cdot \mathbf{v}$           | Divergenza della funzione vettoriale $\mathbf{v}$   |
| $\nabla \times \mathbf{v}$          | Rotore della funzione vettoriale $\mathbf{v}$   |
| $\partial V$                        | Frontiera dell'insieme $V$  |
| $d\varphi$                          | Differenziale <i>inesatto</i> della funzione scalare $\varphi$                                      |
| $d\varphi$                          | Differenziale <i>esatto</i> della funzione scalare $\varphi$  |
| $\Delta \varphi, \Delta \mathbf{v}$ | Variazione finita della grandezza scalare $\varphi$ o vettoriale $\mathbf{v}$                       |
| $ \mathbf{v} $                      | Modulo (o intensità) del vettore $\mathbf{v}$ ( $ \mathbf{v}  = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ ) |
| $\frac{d}{dt}$                      | Derivata (ordinaria) rispetto al tempo  |
| $\frac{\partial}{\partial t}$       | Derivata parziale rispetto al tempo   |
| $\frac{\partial}{\partial x_1}$     | Derivata parziale rispetto alla coordinata spaziale $x_1$   |
| $\frac{D}{Dt}$                      | Derivata sostanziale  |

## Simboli greci maiuscoli

|                        |  |
|------------------------|--|
| $\Gamma_C(\mathbf{v})$ | Circuitazione del vettore $\mathbf{v}$ lungo la linea chiusa e orientata $C$ |
| $\Phi_S(\mathbf{v})$   | Flusso del vettore $\mathbf{v}$ attraverso la superficie $S$                 |
| $\Omega$ [rad/s]       | Velocità angolare  |

## Simboli greci minuscoli

|                             |                        |
|-----------------------------|------------------------|
| $\delta_{ij}$               | Tensore di Kronecker   |
| $\varepsilon_{ijk}$         | Tensore di Levi-Civita |
| $\kappa$ [W/(m K)]          | Conducibilità termica  |
| $\lambda$ [m]               | Libero cammino medio   |
| $\mu$ [kg/(m s)]            | Viscosità dinamica     |
| $\nu$ [m <sup>2</sup> s]    | Viscosità cinematica   |
| $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | Densità                |

|                       |       |                                       |
|-----------------------|-------|---------------------------------------|
| $\sigma$              | [N/m] | Tensione superficiale                 |
| $\sigma_{ij}$         | [Pa]  | Tensore degli sforzi                  |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | [Pa]  | Vettore sforzo o tensore degli sforzi |
| $\boldsymbol{\omega}$ | [Hz]  | Vettore vorticità                     |

## Simboli latini maiuscoli

|               |                   |   |
|---------------|-------------------|---|
| $C$           | [m]               | Curva <i>fissa</i> (di controllo)                     |
| $\mathcal{C}$ | [m]               | Curva <i>materiale</i> (in moto con la corrente)      |
| $D = d_{ij}$  | [Pa]              | Tensore degli sforzi viscosi                          |
| $E$           | [J]               | Energia interna                                       |
| $\mathbf{F}$  | [N]               | Vettore forza   |
| $H$           | [J]               | Entalpia  |
| $K$           | [J]               | Energia cinetica                                      |
| $L$           | [m]               | Lunghezza caratteristica                              |
| $M$           | [kg]              | Massa totale contenuta in un certo volume             |
| $\mathcal{M}$ | [g/mol]           | Massa molecolare                                      |
| $\mathcal{P}$ | [Pa]              | Potenziale termodinamico di pressione                 |
| $Q$           | [J]               | Calore  |
| $R$           | [J/(mol K)]       | Costante universale dei gas                           |
| $\mathcal{R}$ | [J/(kg K)]        | $R/\mathcal{M}$ , varia da gas a gas                  |
| $\mathbf{S}$  | [m <sup>2</sup> ] | Vettore superficie (normale uscente)                  |
| $S$           | [m <sup>2</sup> ] | Superficie <i>fissa</i> (di controllo)                |
| $\mathcal{S}$ | [m <sup>2</sup> ] | Superficie <i>materiale</i> (in moto con la corrente) |
| $S$           | [J]               | Entropia  |
| $T$           | [K]               | Temperatura assoluta                                  |
| $U$           | [J]               | Energia potenziale                                    |
| $V$           | [m <sup>3</sup> ] | Volume <i>fisso</i> (di controllo)                    |
| $\mathcal{V}$ | [m <sup>3</sup> ] | Volume <i>materiale</i> (o in moto con il fluido)     |
| $W$           | [J]               | Lavoro  |

## Simboli latini minuscoli

|  |                     |   |
|--|---------------------|---|
| $d_{ij}$                                   | [Pa]                | Tensore degli sforzi viscosi                                      |
| $e$  | [J/kg]              | Energia interna per unità di massa                                |
| $e_{\text{tot}}$                           | [J/kg]              | Energia totale (energia interna più meccanica) per unità di massa |
| $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ |                     | Base canonica di $\mathbb{R}^3$                                   |
| $h$  | [J/kg]              | Entalpia per unità di massa                                       |
| $m$  | [kg]                | Massa   |
| $\hat{\mathbf{n}}$                         |                     | Vettore normale uscente   |
| $p$  | [Pa]                | Pressione   |
| $\dot{\mathbf{q}}$                         | [W/m <sup>2</sup> ] | Vettore flusso di calore  |
| $\mathbf{r}$                               | [m]                 | Vettore posizione   |
| $s$  | [J/kg]              | Entropia per unità di massa                                       |
| $t$  | [s]                 | Tempo   |
| $\hat{\mathbf{t}}$                         |                     | Vettore tangente  |
| $\mathbf{u}$                               | [m/s]               | Vettore velocità  |
| $u_1, u_2, u_3$                            | [m/s]               | Componenti del vettore velocità                                   |
| $u, v, w$                                  | [m/s]               | Componenti del vettore velocità                                   |



|                 |                          |   |
|-----------------|--------------------------|---|
| $\mathbf{v}$    |                          | Generico vettore                              |
| $v$             | $[\text{m}^3/\text{kg}]$ | Volume specifico (inverso della densità)      |
| $v_1, v_2, v_3$ |                          | Componenti del generico vettore $\mathbf{v}$  |
| $x_1, x_2, x_3$ | $[\text{m}]$             | Componenti del vettore posizione $\mathbf{r}$ |

Simboli di gruppi adimensionali

|    |                    |
|----|--------------------|
| Ec | Numero di Eckert   |
| Kn | Numero di Knudsen  |
| Ma | Numero di Mach     |
| Pe | Numero di Péclet   |
| Pr | Numero di Prandtl  |
| Re | Numero di Reynolds |



# Capitolo 1

## Introduzione ai fluidi

### 1.1 Definizione di fluido

Che cos'è un fluido? Nell'accezione comune per fluido si intende *un particolare stato della materia che comprende i liquidi, i gas ed il plasma*. In pratica, i fluidi non hanno una forma propria ma assumono la forma del recipiente nel quale sono contenuti e quindi si potrebbe dire che i fluidi siano tutte le sostanze che non si trovano allo stato solido. In realtà questa è una definizione molto parziale e qualitativa che si basa sul fatto che i fluidi sono in qualche modo deformabili (assumono la forma del recipiente che li contiene), mentre i solidi lo sono di meno (anche un longherone di un aereo, pur essendo solido, è deformabile).

Per una definizione più accurata è necessario introdurre il concetto di sforzo (*stress* in Inglese). Con riferimento alla figura 1.1, consideriamo un elemento infinitesimo di superficie

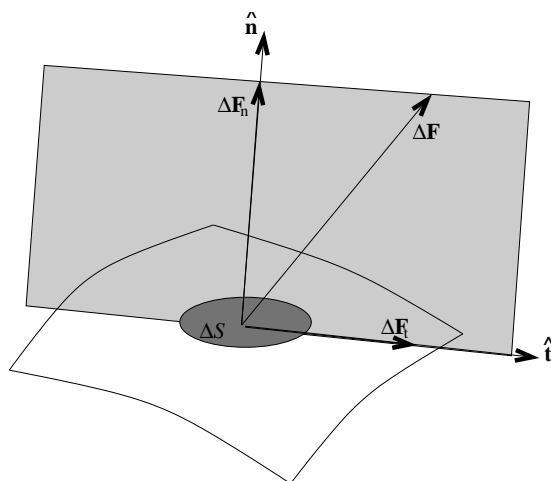


Figura 1.1: Forza  $\Delta \mathbf{F}$  agente su una superficie  $\Delta S$  e scomposta nelle sue componenti normale  $\Delta \mathbf{F}_n$  e tangenziale  $\Delta \mathbf{F}_t$ .

$\Delta S$  sul quale agisce una forza infinitesima  $\Delta \mathbf{F}$  diretta arbitrariamente. Definiamo *sforzo*  $\boldsymbol{\sigma}$  il limite del rapporto tra la forza  $\Delta \mathbf{F}$  e la superficie  $\Delta S$  sulla quale viene esercitata quando la superficie stessa tende a zero, ovvero

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}.$$

Siccome lo sforzo è una *densità superficiale di forza*, le sue unità di misura sono  $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ .

Sempre riferendoci alla figura 1.1, se  $\hat{\mathbf{n}}$  è il *versore normale uscente* dalla superficie, allora la forza può essere scomposta in una componente normale alla superficie  $\Delta\mathbf{F}_n$  ed una tangenziale (parallela) ad essa  $\Delta\mathbf{F}_t$ :

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta\mathbf{F}_n + \Delta\mathbf{F}_t,$$

dove  $\Delta\mathbf{F}_t$  giace nel piano individuato dai vettori  $\Delta\mathbf{F}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  ed è perpendicolare a  $\Delta\mathbf{F}_n$ . Si osservi che  $\Delta\mathbf{F}_n$  è la proiezione di  $\Delta\mathbf{F}$  sul versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , mentre  $\Delta\mathbf{F}_t$  è il vettore che sommato a  $\Delta\mathbf{F}_n$  deve ridare  $\Delta\mathbf{F}$ , ossia

$$\Delta\mathbf{F}_n = (\Delta\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \quad \Delta\mathbf{F}_t = \Delta\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F}_n.$$

Dalla definizione di sforzo, segue che lo *sforzo normale*  $\sigma_n$  e lo *sforzo tangenziale*  $\sigma_t$  sono rispettivamente definiti come

$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}_n}{\Delta S}, \quad \sigma_t = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}_t}{\Delta S}.$$

Grazie alla definizione di sforzo normale e tangenziale possiamo dare ora una definizione più rigorosa di fluido. *Per fluido intendiamo una sostanza in grado di deformarsi in modo continuo ed indefinitamente quando viene sottoposta ad uno sforzo tangenziale esterno.* In altre parole, in condizioni di quiete, un fluido può opporsi solo a sforzi normali, mentre se sottoposto a sforzi tangenziali si mette necessariamente in moto. Lo sforzo normale, in condizioni statiche, viene detto *pressione*. Si osservi che questa definizione è di tipo fenomenologico, in quanto prescinde dalla struttura intima del materiale e considera solo la sua risposta ad azioni esterne.

## 1.2 Ipotesi del continuo e proprietà fisiche dei fluidi

### 1.2.1 La densità

Preso un volumetto di fluido  $\Delta V$ , si definisce *densità* e si indica con la lettera greca  $\rho$  il rapporto tra la massa  $\Delta m$  di materia in esso contenuto ed il volume stesso  $\Delta V$ ,

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Le unità di misura sono  $\text{kg/m}^3$ . Si potrebbe pensare di ottenere una misura puntuale sempre più precisa della densità prendendo un volume molto piccolo di fluido ( $\Delta V \rightarrow 0$ ). Al contrario, se le dimensioni di  $\Delta V$  sono dell'ordine del libero cammino medio delle molecole (per l'aria  $\lambda_{\text{aria}} \approx 10^{-7}\text{m}$ , per l'acqua  $\lambda_{\text{aria}} \approx 10^{-9}\text{m}$ ), all'interno del volumetto potrebbe esserci un numero di molecole variabile nel tempo in modo casuale che causerebbe una densità casuale, o addirittura potrebbe non esserci alcuna molecola, il che comporterebbe densità nulla, come schematizzato in figura 1.2. Al fine di evitare questo problema, supponiamo di guardare il fluido su una scala spaziale maggiore di quella del libero cammino medio in modo tale da considerare la densità una *funzione continua* dello spazio e del tempo. Questa viene comunemente detta *ipotesi del continuo*. Si osservi che il libero cammino medio  $\lambda$  varia al variare della pressione, in particolare per un gas esso aumenta al diminuire della pressione (si pensi ai gas rarefatti). Un parametro adimensionale che misura la bontà dell'ipotesi del continuo è il *numero di Knudsen* definito come

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L},$$

essendo  $L$  una dimensione caratteristica del problema in esame (la dimensione del lato del volumetto nel caso della densità). Affinché sia valida l'ipotesi del continuo deve essere  $\text{Kn} \ll 1$ .

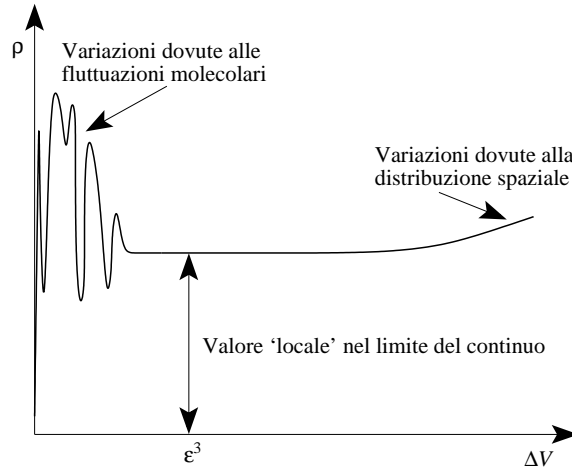


Figura 1.2: Densità  $\rho$  in funzione del volumetto infinitesimo  $\Delta V$ . Variazioni di  $\rho$  si possono osservare sia a causa della distribuzione spaziale di densità (che varia da punto a punto) per  $\Delta V > \epsilon^3$ , sia a causa del moto casuale delle molecole di fluido per  $\Delta V \rightarrow 0$ . Il valore corretto di densità locale si ha per  $\Delta V \approx \epsilon^3$

Se indichiamo con  $\epsilon$  la lunghezza del lato di un volumetto di fluido sufficientemente piccolo in modo che al suo interno la densità sia uniforme, ma sufficientemente grande rispetto al libero cammino medio delle molecole, una definizione più rigorosa della densità puntuale di un fluido è

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \text{con} \quad \frac{\lambda}{\epsilon} \ll 1 \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

### 1.2.2 La viscosità

Un'altra caratteristica dei fluidi è la loro *viscosità dinamica*, comunemente indicata con la lettera greca  $\mu$  e avente come unità di misura  $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$  (oppure  $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ). Molto grossolanamente può essere pensata come una misura della difficoltà incontrata da “strati di fluido” nello “scorrere” l'uno rispetto all'altro. Intuitivamente, questo è collegabile allo scambio di quantità di moto tra strati di fluido dovuto all'agitazione termica, pertanto la viscosità è una misura della diffusione di quantità di moto a livello molecolare. A conferma di questa idea intuitiva, sperimentalmente si osserva proprio che la viscosità dei gas aumenta all'aumentare della temperatura a seguito, evidentemente, dell'aumento di scambio di quantità di moto dovuto all'aumentata agitazione termica. Nei liquidi, invece, si osserva l'opposto in quanto all'aumentare della temperatura i legami tra le molecole diventano più “labili” e quindi strati di fluidi possono “scivolare” più agevolmente l'uno rispetto all'altro. L'effetto della pressione sulla viscosità è molto marginale e, per questo, può essere tranquillamente trascurato.

Anziché utilizzare la viscosità dinamica, in fluidodinamica si usa spesso la *viscosità cinematica*, indicata con la lettera greca  $\nu$  e definita come

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Le sue unità di misura sono  $\text{m}^2/\text{s}$ . Siccome nella definizione di  $\nu$  compare la densità  $\rho$ , la viscosità cinematica dipende sia dalla temperatura che dalla pressione (l'effetto di quest'ultima è più marcato per i gas).

### 1.2.3 La tensione superficiale

Un'altra caratteristica dei fluidi, *esclusiva* di quelli che si presentano sotto forma di liquidi, è la *tensione superficiale*. Essa gioca un ruolo fondamentale nel caso di superfici libere come per esempio all'interfaccia tra un liquido e l'aria, oppure nella formazione di bolle e menischi, o nei fenomeni di capillarità. Viene comunemente indicata con la lettera greca  $\sigma$ , le sue unità di misura sono N/m, e può essere interpretata come la manifestazione macroscopica delle forze tra le molecole che cambiano in presenza di due fluidi diversi non miscibili (tipicamente un liquido e un gas). La tensione superficiale sarà, nel seguito di questo corso, trascurata.

### 1.2.4 Alcuni valori per i fluidi più comuni

Le proprietà fisiche dei fluidi sono riassunte in tabella 1.1, mentre in tabella 1.2 sono riportati i loro valori misurati (a 20° C) per alcuni fluidi tra i più comuni.

| Simbolo  | descrizione           | unità di misura                      |
|----------|-----------------------|--------------------------------------|
| $\rho$   | densità               | kg/m <sup>3</sup>                    |
| $\mu$    | viscosità dinamica    | N·s/m <sup>2</sup> (oppure kg/(m·s)) |
| $\nu$    | viscosità cinematica  | m <sup>2</sup> /s                    |
| $\sigma$ | tensione superficiale | N/m                                  |

Tabella 1.1: Riassunto delle proprietà fisiche di un fluido

| Fluido       | $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | $\mu$ [N·s/m <sup>2</sup> ] | $\nu$ [m <sup>2</sup> /s] | $\sigma$ [N/m] |
|--------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|----------------|
| Aria         | 1.205                       | $1.79 \times 10^{-5}$       | $1.486 \times 10^{-5}$    | $\varnothing$  |
| Acqua        | 997.3                       | $1.001 \times 10^{-3}$      | $1.004 \times 10^{-6}$    | 0.0728         |
| Olio d'oliva | 920                         | 0.084                       | $9.13 \times 10^{-5}$     | 0.0320         |
| Mercurio     | 13600                       | $1.552 \times 10^{-3}$      | $1.141 \times 10^{-7}$    | 0.465          |
| Glicerina    | 1261                        | 1.495                       | $1.19 \times 10^{-3}$     | 0.0631         |
| Etanolo      | 789                         | $1.201 \times 10^{-3}$      | $1.521 \times 10^{-6}$    | 0.0223         |

Tabella 1.2: Caratteristiche fisiche dei fluidi più comuni a 20° C.

## 1.3 Fluido, flusso, corrente

In Inglese le parole *flow* e *flux* indicano due concetti diversi ma vengono entrambe tradotte in Italiano con la parola *flusso*. Per evitare confusione distingueremo tra fluido, flusso e corrente nel modo seguente.

- **Fluido.** Un fluido è una sostanza in grado di deformarsi in modo continuo ed indefinitamente quando viene sottoposta ad uno sforzo tangenziale esterno, ovvero incapace di supportare uno sforzo di taglio in condizioni statiche (si veda la sezione 1.1).
- **Flusso.** Il flusso di un vettore  $\mathbf{v}$  attraverso una superficie  $S$  è lo scalare

$$\Phi_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

essendo l'integrale esteso a tutta la superficie  $S$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  il versore *localmente* uscente da essa. Si osservi che, a seguito del *teorema della divergenza* (si veda la sezione B.1.1, pagina 147),

dalla definizione di flusso e sotto opportune ipotesi di regolarità sia di  $S$  che di  $\mathbf{v}$ , segue

$$\Phi_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV,$$

essendo  $S \equiv \partial V$  (la superficie  $S$  è la frontiera del volume  $V$ ) e  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  la divergenza di  $\mathbf{v}$ . Tale teorema è detto anche *teorema di Green* o *teorema di Gauss* o *teorema di Ostrogradsky*.

- **Corrente.** Una corrente è un particolare campo di moto di un particolare fluido univocamente definito dalla terna  $(\rho, \mathbf{u}, p)$  essendo
  - $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  la funzione scalare  $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  che descrive il campo di densità in funzione della posizione  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  e del tempo  $t$
  - $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  la funzione vettoriale  $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$  che descrive il campo di velocità in funzione della posizione e del tempo
  - $p = p(\mathbf{r}, t)$  la funzione scalare  $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  che descrive il campo di pressione in funzione della posizione e del tempo.

Assumiamo che tutti i campi siano sufficientemente regolari (lisci).

## 1.4 Alcune considerazioni cinematiche

Data una corrente caratterizzata da un campo scalare di pressione  $p$  e da un campo vettoriale di velocità  $\mathbf{u}$ , entrambi funzioni dello spazio e del tempo, il moto del fluido può essere descritto utilizzando due approcci diversi:

- (a) *Lagrangiano*: inseguendo, istante per istante al variare del tempo, una “particella di fluido” che si trovava nella posizione  $\mathbf{r}_0$  al tempo iniziale  $t = 0$ ;
- (b) *Euleriano*: rimanendo fissi in una certa posizione  $\mathbf{r}$  del campo di moto e descrivendo la densità e la velocità al trascorrere del tempo  $t$ .

Per la descrizione del campo di moto è utile introdurre i concetti di *linea di corrente*, *traiettoria* e *linea di fumo*.

- Definiamo *linea di corrente* una linea  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\sigma)$  tangente in ogni suo punto al vettore velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , dove  $\sigma$  è la variabile scelta per la parametrizzazione della curva. Matematicamente la linea di corrente passante per il punto  $\mathbf{r}_0$  quando  $\sigma = 0$  si determina risolvendo il problema differenziale ordinario

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\xi}(\sigma)}{d\sigma} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}(\sigma), t) \\ \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{r}_0. \end{cases}$$

Si osservi la soluzione di questo problema è *unica* se  $|\mathbf{u}| \neq 0 \wedge |\mathbf{u}| < \infty$ , mentre può accadere che infinite linee di corrente passino per i punti in cui  $|\mathbf{u}| = 0$  (punto *di ristagno*) oppure per i punti in cui  $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$ .

- Definiamo *traiettoria* di una “particella di fluido” passante per il punto  $\mathbf{r}_0$  al tempo  $t = 0$  l’insieme dei punti  $\mathbf{R}$  occupati dalla stessa “particella di fluido” nei successivi istanti di

tempo  $t$ . Matematicamente la traiettoria del punto materiale che si trova nella posizione  $\mathbf{r}_0$  al tempo  $t = 0$  si determina risolvendo il problema differenziale ordinario

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \\ \mathbf{R}(0) = \mathbf{r}_0. \end{cases}$$

Si osservi che le traiettorie di particelle che passano dallo stesso punto  $\mathbf{r}_0$  in tempi diversi ( $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \dots$ ) sono diverse. Al contrario, se il campo di velocità non dipende dal tempo, allora le traiettorie delle particelle che passano in istanti diversi dallo stesso punto  $\mathbf{r}_0$  coincidono tra loro e coincidono anche con le linee di corrente.

- Definiamo *linea di fumo* la linea che, al tempo  $t$ , congiunge tutti i punti occupati dalle particelle che sono passate dal punto  $\mathbf{r}_e$  detto *punto di emissione*, negli istanti precedenti. Questa definizione, apparentemente complicata, trova spiegazione nelle visualizzazioni con fumo ottenute sperimentalmente nelle quali una foto istantanea ritrae tutte le particelle di fluido che sono passate, in istanti precedenti, dal punto di emissione  $\mathbf{r}_e$ . Nel caso in cui il campo di velocità non dipenda dal tempo, linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

## 1.5 Forze e sforzi nei fluidi

Dato un volume finito di fluido  $V$ , di forma arbitraria, consideriamo sulla sua superficie esterna  $S$  un elemento infinitesimo di superficie  $\Delta S$ , di normale esterna  $\hat{\mathbf{n}}$ , che costituisce una delle quattro facce del tetraedro di volume infinitesimo  $\Delta V$  avente le altre tre facce perpendicolari ai tre assi coordinati e passanti dal punto  $O$ , come mostrato in figura 1.3. In generale, questo

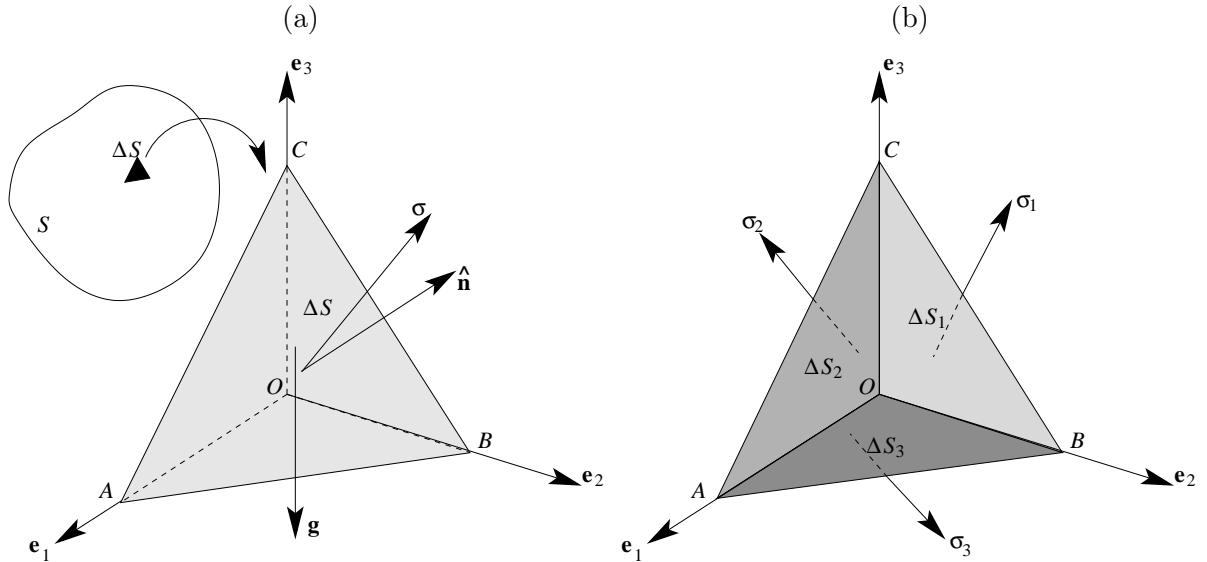


Figura 1.3: Elemento di fluido di forma tetraedrica soggetto ad un campo di forze di volume  $\mathbf{g}$  e ad una forza superficiale  $\Delta \mathbf{F}$  distribuita sulla superficie infinitesima  $\Delta S$  di normale uscente  $\hat{\mathbf{n}}$

volumetto infinitesimo è soggetto a due tipi di forze:

- forze di volume, che indichiamo con  $\Delta \mathbf{F}_{\Delta V}$ ;



- forze di superficie, che indichiamo con  $\Delta \mathbf{F}_{\Delta S}$ .

Le forze di volume sono quelle che agiscono *all'interno* del volume infinitesimo, tipicamente a seguito di un'azione a distanza, come il peso e forze di tipo elettromagnetico. Se  $\mathbf{g}$  indica la densità di forza per unità di massa, la forza di volume totale  $\Delta \mathbf{F}_{\Delta V}$  agente sul volume infinitesimo è

$$\Delta \mathbf{F}_{\Delta V} = \rho \mathbf{g} \Delta V.$$

Le forze di superficie sono dette anche forze di contatto in quanto implicano uno scambio di quantità di moto a livello molecolare attraverso le superfici del volumetto. Se questo volumetto è soggetto ad una forza  $\Delta \mathbf{F}$  agente sulla superficie infinitesima  $\Delta S$  di normale uscente  $\hat{\mathbf{n}}$  (si osservi che questa è *una* delle forze di superficie a cui è soggetto il volumetto, le altre sono le forze di superficie  $\Delta \mathbf{F}_1$ ,  $\Delta \mathbf{F}_2$  e  $\Delta \mathbf{F}_3$  sulle tre facce del tetraedro perpendicolari agli assi coordinati  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ ), indichiamo con  $\boldsymbol{\sigma} = \Delta \mathbf{F} / \Delta S$  lo sforzo corrispondente. Tale sforzo ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore  $\Delta \mathbf{F}$  che, in generale, *non è parallelo* al versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  (figura 1.3 (a)). Si osservi che, in generale, la forza  $\Delta \mathbf{F}$  e lo sforzo  $\boldsymbol{\sigma}$  dipendono sia dall'orientazione della normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ , sia dalla posizione  $\mathbf{r}$  in cui viene applicata la forza, sia dal tempo  $t$ :

$$\Delta \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) \Delta S.$$

La convenzione scelta prevede che lo sforzo  $\boldsymbol{\sigma}$  sia il rapporto tra la forza esercitata *dal fluido esterno al tetraedro sul fluido interno al tetraedro* e la superficie  $\Delta S$  in modo che la componente normale dello sforzo  $\sigma_n$  sia di *trazione*. Per il terzo principio della dinamica, la forza esercitata dal fluido interno al tetraedro sull'esterno in corrispondenza della faccia  $\Delta S$  di normale uscente  $-\hat{\mathbf{n}}$  è uguale ed opposta a  $\Delta \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t)$ :

$$\Delta \mathbf{F}(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) = -\Delta \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) \iff \boldsymbol{\sigma}(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) \Delta S = -\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) \Delta S,$$

pertanto lo sforzo è una *funzione dispari* di  $\hat{\mathbf{n}}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}, t). \quad (1.1)$$

Tralasciamo, per ora, la dipendenza dello sforzo dal tempo. Per quanto riguarda la dipendenza dalla posizione, siccome il tetraedro è infinitesimo, supponiamo che  $\boldsymbol{\sigma}$  non dipenda sensibilmente dalla posizione sulla superficie laterale quanto piuttosto dalla particolare *giacitura*  $\hat{\mathbf{n}}$  che caratterizza la superficie  $\Delta S$ . Siccome il tetraedro è stato scelto in modo che le tre facce diverse da  $\Delta S$  siano parallele ai piani formati dal sistema di riferimento locale cartesiano e ortogonale ( $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ ), se indichiamo con  $\Delta S_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , l'estensione della superficie della faccia del tetraedro che giace sul piano perpendicolare al versore  $\mathbf{e}_j$ , allora la *normale uscente* dalla faccia  $\Delta S_j$  è il versore *opposto* a  $\mathbf{e}_j$  e lo sforzo agente sulla faccia  $\Delta S_j$  è  $\boldsymbol{\sigma}_j(-\mathbf{e}_j)$ . Si osservi che l'estensione della superficie  $\Delta S_j$  è la proiezione della superficie orientata  $\Delta \mathbf{S}$  sul piano perpendicolare alla direzione  $\mathbf{e}_j$ , ossia

$$\Delta S_j = \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_j = \Delta S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_j = n_j \Delta S.$$

Se con  $\Delta \mathbf{F}_{\Delta S}$  indichiamo la somma di tutte le forze di superficie agenti sul tetraedro, ossia la somma tra la forza  $\Delta \mathbf{F}$  agente sulla faccia di normale esterna  $\hat{\mathbf{n}}$  e le forze  $\Delta \mathbf{F}_j$  agenti sulle facce

aventi come normali esterne i versori  $-\mathbf{e}_j$ , allora si ha:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{F}_{\Delta S} &= \Delta \mathbf{F} + \sum_{j=1}^3 \Delta \mathbf{F}_j \\
 &= \sigma(\hat{\mathbf{n}}) \Delta S + \sum_{j=1}^3 \sigma_j(-\mathbf{e}_j) \Delta S_j \\
 &= \sigma(\hat{\mathbf{n}}) \Delta S - \sum_{j=1}^3 \sigma_j(\mathbf{e}_j) n_j \Delta S \\
 &= \left( \sigma(\hat{\mathbf{n}}) - \sum_{j=1}^3 \sigma_j(\mathbf{e}_j) n_j \right) \Delta S.
 \end{aligned}$$

Si osservi che  $\Delta \mathbf{F}_{\Delta S}$  è la sommatoria vettoriale delle forze di superficie agenti sul tetraedro, ed è diversa da  $\Delta \mathbf{F}$  che è, invece, la forza agente sulla sola superficie orientata  $\Delta \mathbf{S} = \Delta S \hat{\mathbf{n}}$ . Introducendo la *notazione di Einstein sugli indici ripetuti* (ogni volta che in una espressione compaiono indici ripetuti, va effettuata una somma su di essi fino al loro esaurimento, per i dettagli si veda la sezione A.3), si può scrivere semplicemente

$$\Delta \mathbf{F}_{\Delta S} = [\sigma(\hat{\mathbf{n}}) - \sigma_j(\mathbf{e}_j) n_j] \Delta S.$$

Se  $\Delta \mathbf{p} = \rho \mathbf{u} \Delta V$  indica la quantità di moto nel volumetto in considerazione, il secondo principio della dinamica assicura che

$$\frac{d\Delta \mathbf{p}}{dt} = \Delta \mathbf{F}_{\Delta S} + \Delta \mathbf{F}_{\Delta V} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u} \Delta V) = [\sigma(\hat{\mathbf{n}}) - \sigma_j(\mathbf{e}_j) n_j] \Delta S + \rho \mathbf{g} \Delta V.$$

Siccome stiamo considerando il volumetto di fluido nel limite  $\Delta V \rightarrow 0$ ,  $\Delta V$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\Delta S^1$  e, pertanto, la relazione precedente diventa semplicemente

$$[\sigma(\hat{\mathbf{n}}) - \sigma_j(\mathbf{e}_j) n_j] \Delta S = 0.$$

Inoltre, poiché tale relazione deve essere vera per qualsiasi superficie infinitesima  $\Delta S$ , si ha  $\sigma(\hat{\mathbf{n}}) = \sigma_j(\mathbf{e}_j) n_j$ , ossia

$$\sigma(\hat{\mathbf{n}}) = \sigma_1(\mathbf{e}_1) n_1 + \sigma_2(\mathbf{e}_2) n_2 + \sigma_3(\mathbf{e}_3) n_3. \quad (1.2)$$

Questo risultato è detto anche *Teorema del tetraedro di Cauchy* e stabilisce che lo sforzo agente in un punto su una generica giacitura individuata dalla normale  $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$  è una funzione lineare e omogenea degli sforzi agenti nel punto stesso su tre superfici elementari passanti per il medesimo punto, le cui normali  $\mathbf{e}_j, j = 1, 2, 3$ , siano linearmente indipendenti. I coefficienti della combinazione lineare sono le componenti del versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ . Pertanto, se si conoscono gli sforzi agenti su tre superfici aventi normali linearmente indipendenti (ossia mutuamente perpendicolari) passanti per il medesimo punto è possibile ottenere lo sforzo  $\sigma$  su una superficie elementare di generica normale  $\hat{\mathbf{n}}$  passante per quel punto. Per rendere la notazione più snella, da qui in avanti tralasceremo di scrivere la dipendenza dello sforzo dalla giacitura della superficie alla quale è riferito.

<sup>1</sup>Se  $\Delta \ell$  indica una dimensione lineare caratteristica del volumetto  $\Delta V$ , allora nel limite  $\Delta \ell \rightarrow 0$  si ha  $\Delta V \sim \Delta \ell^3$  e  $\Delta S \sim \Delta \ell^2$ , pertanto  $\Delta V \sim \Delta S^{\frac{3}{2}}$  è infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\Delta S$ .

Se per il vettore  $\boldsymbol{\sigma}$  e per ciascun vettore  $\boldsymbol{\sigma}_j$  vengono esplicitate le tre componenti

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_j = \begin{bmatrix} \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \\ \sigma_{3j} \end{bmatrix},$$

allora si ha che la componente  $i$ -esima dello sforzo  $\boldsymbol{\sigma}$  agente sulla superficie individuata dalla normale  $\hat{\mathbf{n}}$  è

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Si osservi che  $\sigma_{ij}$  è un tensore doppio (una matrice) e che la componente della forza lungo  $\mathbf{e}_i$  è immediatamente deducibile dalla relazione precedente

$$\Delta F_i = (\boldsymbol{\sigma} \Delta S)_i = \sigma_{ij} n_j \Delta S.$$

Pertanto, in  $\sigma_{ij}$  il primo indice  $i$  indica la direzione lungo la quale agisce la forza, mentre il secondo indice  $j$  indica l'orientazione della superficie sulla quale essa agisce.

La relazione 1.2 è stata ricavata dal secondo principio della dinamica, detto anche teorema della quantità di moto. Con considerazioni simili, se  $d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) dV$  indica il momento della quantità di moto infinitesima associata al volumetto  $\Delta V$  (ossia il momento angolare) rispetto al vertice  $O$  del tetraedro (si veda la figura 1.3) per cui  $\mathbf{r}$  è il raggio vettore spiccato da  $O$  al punto in cui viene valutata la variabile di integrazione nel volumetto  $\Delta V$ , il teorema del momento angolare assicura che

$$\frac{d\Delta \mathbf{L}}{dt} = \Delta \mathbf{M}_{\Delta S} + \Delta \mathbf{M}_{\Delta V},$$

dove  $\Delta \mathbf{M}_{\Delta S}$  è il momento delle forze di superficie e  $\Delta \mathbf{M}_{\Delta V}$  il momento delle forze di volume. Esplicitando si ha

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Delta S_{\text{tot}}} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) dV \right) = \int_{\Delta S_{\text{tot}}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} dS + \int_{\Delta V} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g}) dV,$$

essendo  $S_{\text{tot}}$  la superficie *totale* del tetraedro che racchiude il volume  $\Delta V$  ( $S_{\text{tot}} = \Delta S + \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$ ). Come osservato in precedenza, il sistema di riferimento è centrato nel vertice  $O$  del tetraedro (si veda la figura 1.3) per cui  $\mathbf{r}$  è dell'ordine di  $\Delta V^{\frac{1}{3}}$ . La  $i$ -esima componente del primo integrale a secondo membro può essere riscritta come

$$\left( \int_{\Delta S_{\text{tot}}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} dS \right)_i = \int_{\Delta S_{\text{tot}}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k dS = \int_{\Delta S_{\text{tot}}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = \int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV,$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del teorema della divergenza. Sviluppando la derivata rispetto a  $x_l$  si ha

$$\int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV = \int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) dV = \int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} \left( \sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) dV,$$

pertanto il teorema del momento angolare diventa

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Delta V} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) dV \right) = \mathbf{e}_i \int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV + \mathbf{e}_i \int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV + \int_{\Delta V} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g}) dV.$$

Analizzando gli ordini di grandezza si scopre che il primo integrale del secondo membro è dell'ordine di  $\Delta V$ , mentre tutti gli altri sono dell'ordine di  $\Delta V^{\frac{4}{3}}$  (si ricodi che  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$  è

dell'ordine di  $\Delta V^{\frac{1}{3}}$ ) e quindi infinitesimi di ordine superiore e trascurabili rispetto a  $\Delta V$ . Pertanto, nel limite  $\Delta V \rightarrow 0$ , l'equazione si riduce a

$$\mathbf{e}_i \int_{\Delta V} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = 0$$

che equivale a

$$\mathbf{e}_1 \int_{\Delta V} \varepsilon_{1jk} \sigma_{kj} dV + \mathbf{e}_2 \int_{\Delta V} \varepsilon_{2jk} \sigma_{kj} dV + \mathbf{e}_3 \int_{\Delta V} \varepsilon_{3jk} \sigma_{kj} dV = 0$$

e che, dovendo essere vera per *qualsiasi*  $\Delta V$ , implica

$$\varepsilon_{1jk} \sigma_{kj} = \varepsilon_{2jk} \sigma_{kj} = \varepsilon_{3jk} \sigma_{kj} = 0$$

ossia

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ricordando che  $\varepsilon_{ijk} = 0$  se due dei tre indici sono uguali, che  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$  e che  $\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$ , per le 3 componenti si ha

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad \varepsilon_{1jk} \sigma_{kj} = 0 &\iff \varepsilon_{123} \sigma_{32} + \varepsilon_{132} \sigma_{23} = 0 \iff \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ i = 2 : \quad \varepsilon_{2jk} \sigma_{kj} = 0 &\iff \varepsilon_{231} \sigma_{13} + \varepsilon_{213} \sigma_{31} = 0 \iff \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ i = 3 : \quad \varepsilon_{3jk} \sigma_{kj} = 0 &\iff \varepsilon_{312} \sigma_{21} + \varepsilon_{321} \sigma_{12} = 0 \iff \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{12}. \end{aligned}$$

Pertanto *il tensore degli sforzi è simmetrico*, ovvero

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},$$

e le sue componenti indipendenti sono solo 6.

Per quanto detto alla fine della sezione 1.1, se  $i = j$  si parla di *sforzo normale*, mentre se  $i \neq j$  si parla di *sforzo tangenziale* o *sforzo di taglio*. Si osservi che gli sforzi normali sono responsabili della *variazione di volume* di un elemento di fluido a parità di forma, mentre gli sforzi tangenziali sono responsabili della *deformazione* (variazione di forma) di un elemento di fluido.

In *condizioni statiche*, siccome il fluido è sempre in uno stato di *compressione* e non ci sono sforzi di tangenziali, si ha

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

essendo  $p$  la *pressione statica* (o pressione termodinamica) e  $\delta_{ij}$  il simbolo di Kronecker.

Nel caso di fluidi in moto, il tensore  $\sigma_{ij}$  diventa

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij},$$

dove  $d_{ij}$  è legato, tramite la viscosità, ai gradienti di velocità. La *reologia* si occupa di stabilire questo legame.

## 1.6 La relazione costitutiva per fluidi newtoniani isotropi

Nella meccanica dei continui deformabili, le *relazioni costitutive* (dette anche equazioni costitutive, leggi costitutive o legami costitutivi) sono relazioni matematiche che caratterizzano il comportamento macroscopico dei materiali costituenti un corpo continuo. Nel caso di un fluido,

esse stabiliscono il legame tra il tensore degli sforzi  $\sigma_{ij}$  e le velocità di deformazione (o gradienti di velocità). È chiaro che le relazioni costitutive sono la vera parte di modellazione delle equazioni della dinamica dei fluidi, in quanto cambiando il modello (cioè il legame tra sforzi e velocità di deformazione) cambiano le equazioni di governo. Il modello più semplice di fluido è quello di *fluido newtoniano*, per il quale il tensore  $d_{ij}$  dipende *linearmente* dai gradienti di velocità:

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l},$$

dove  $A_{ijkl}$  è un tensore di ordine 4 costituito da 81 costanti. Il tensore  $d_{ij}$  deve dipendere solo dalle derivate prime del campo di velocità e non dal campo di velocità  $\mathbf{u}$  a causa del fatto che lo sforzo deve essere invariante al variare del sistema di riferimento (tralasciamo qui la dimostrazione). Intuitivamente, si può pensare che nel fluido si ingenerino degli sforzi a seguito dello “scorrimento” di strati di fluido gli uni sugli altri, il che significa che la velocità del fluido varia da strato a strato, ovvero che esiste un gradiente di velocità. Viceversa, velocità uniforme significherebbe un moto rigido, che intuitivamente non comporta degli sforzi all’interno del fluido stesso. Tentiamo di capire come potrebbe essere semplificato il tensore  $A_{ijkl}$  in modo da evitare di introdurre tante costanti.

In assenza di comportamenti particolari del fluido lungo direzioni preferenziali, possiamo assumere che il fluido sia *isotropo*, ossia che le sue caratteristiche, in particolare i gradienti di velocità, non dipendano dall’orientazione. Il tensore isotropo di base è il tensore di Kronecker e tutti i tensori isotropi di ordine pari si possono ottenere come somme di prodotti di tensori di Kronecker. Introducendo i coefficienti scalari  $\mu, \mu_1$  e  $\mu_2$  si ha che il generico tensore  $A_{ijkl}$  di ordine (o rango) quattro può essere espresso nella forma

$$A_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{il} \delta_{jk} + \mu_2 \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

Siccome il tensore degli sforzi  $\sigma_{ij}$  è simmetrico (come dimostrato nella sezione 1.5), allora anche il tensore  $d_{ij} = A_{ijkl} \partial u_k / \partial x_l$  deve esserlo e bisogna richiedere, come minimo, che  $A_{ijkl}$  sia simmetrico rispetto agli indici  $i$  e  $j$ :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} \quad \Rightarrow \quad \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{il} \delta_{jk} + \mu_2 \delta_{ij} \delta_{kl} = \mu \delta_{jk} \delta_{il} + \mu_1 \delta_{jl} \delta_{ik} + \mu_2 \delta_{ji} \delta_{kl}.$$

Cerchiamo ora le condizioni sotto le quali tale relazione è sempre vera. Se  $i = j \wedge k = l$  i termini moltiplicati per  $\mu_2$  risultano non nulli e si ha

$$\mu \delta_{jl} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{jl} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{jj} \delta_{ll} = \mu \delta_{jl} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{jl} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{jj} \delta_{ll},$$

ossia

$$\mu \delta_{jl}^2 + \mu_1 \delta_{jl}^2 + \mu_2 = \mu \delta_{jl}^2 + \mu_1 \delta_{jl}^2 + \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\mu + \mu_1) \delta_{jl}^2 + \mu_2 = (\mu + \mu_1) \delta_{jl}^2 + \mu_2,$$

che è *sempre vera* per ogni coppia di indici  $(j, l)$ . Al contrario, se  $i \neq j \vee k \neq l$  allora la simmetria  $A_{ijkl} = A_{jikl}$  implica

$$\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{il} \delta_{jk} = \mu \delta_{jk} \delta_{il} + \mu_1 \delta_{jl} \delta_{ik},$$

che riscritta dà

$$\delta_{il} \delta_{jk} (\mu_1 - \mu) = \delta_{jl} \delta_{ik} (\mu_1 - \mu),$$

che è vera per ogni combinazione degli indici *se e solo se*  $\mu_1 = \mu$ . Il tensore di ordine 4 diventa quindi

$$A_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} + \mu_2 \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

Si osservi che scambiando gli indici  $k$  e  $l$  l'espressione del tensore non cambia, che equivale a dire che il tensore  $A_{ijkl}$  risulta simmetrico *anche* rispetto agli indici  $k$  e  $l$ , ovvero

$$A_{ijkl} = A_{jilk}.$$

Il fatto che entrambi i tensori  $A_{ijkl}$  e  $d_{ij} = A_{ijkl}\partial u_k/\partial x_l$  siano simmetrici rispetto agli indici  $(i, j)$  e  $(k, l)$  implica che l'eventuale parte antisimmetrica di  $\partial u_k/\partial x_l$  debba essere nulla, altrimenti darebbe origine ad una parte antisimmetrica di  $d_{ij}$ . Si osservi che il tensore doppio  $\partial u_k/\partial x_l$  può, infatti, essere scomposto in due parti, una *simmetrica*  $S_{kl}$  e l'altra *antisimmetrica*  $\xi_{kl}$ ,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = S_{kl} + \xi_{kl}.$$

Siccome la simmetria rispetto agli indici  $(i, j)$  e  $(k, l)$  impone che la parte  $\xi_{kl}$  sia nulla, si ha

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = A_{ijkl} (S_{kl} + \xi_{kl}) = A_{ijkl} S_{kl} = \frac{1}{2} (\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} + \mu_2 \delta_{ij} \delta_{kl}) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Ragionando su come debbano essere gli indici  $k$  ed  $l$  rispetto a  $i$  e  $j$  affinché vi siano dei termini non nulli, si osserva che  $\delta_{ik} \delta_{jl} \neq 0 \iff (k = i \wedge l = j)$ ,  $\delta_{il} \delta_{jk} \neq 0 \iff (l = i \wedge k = j)$  e che  $\delta_{kl} \neq 0 \iff k = l = s$ . Eseguendo la sommatoria sugli indici ripetuti  $(k, l)$  si ha quindi

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \mu_2 \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right) = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu_2 \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij}.$$

Pertanto, l'ipotesi di *isotropia* ed il fatto che  $d_{ij}$  debba essere simmetrico hanno portato alla semplice relazione

$$d_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu_2 \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij},$$

dove i coefficienti  $\mu$  e  $\mu_2$  variano da fluido a fluido, sono funzioni della temperatura, e vanno determinati sperimentalmente utilizzando correnti semplici. In realtà  $\mu$  è la viscosità dinamica ed è sempre *positiva*, mentre  $\mu_2$  prende il nome di *secondo coefficiente di viscosità*. Le due viscosità possono essere riassunte nella *viscosità di volume*  $\mu_v$  così definita

$$\mu_v = \mu_2 + \frac{2}{3} \mu.$$

La viscosità di volume è identicamente nulla per gas perfetti monoatomici, mentre per gas poliatomici e liquidi è comunque molto piccola. L'*ipotesi di Stokes* assume  $\mu_v = 0$ , che non è quindi molto lontano dalla realtà, da cui  $\mu_2 = -\frac{2}{3} \mu$ ; pertanto

$$d_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right). \quad (1.3)$$

Questa espressione di  $d_{ij}$  fu derivata, tramite considerazioni analoghe a quelle fatte qui, da Saint-Venant nel 1843 e da Stokes nel 1845. Essa era stata ricavata anche da Navier nel 1822 e da Poisson nel 1829 sfruttando considerazioni di tipo microscopico basate sull'attrito interno al fluido.

Per la determinazione di  $\mu$ , si osservi che nel caso di una corrente bidimensionale (cioè una corrente nella quale  $u_3 \equiv 0$  e  $\partial \cdot / \partial x_3 \equiv 0$ ) e parallela ( $u_2 \equiv 0$  e  $\partial \cdot / \partial x_1 \equiv 0$ ), si ha

$$d_{12} = d_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

pertanto  $\mu$  è ricavabile sperimentalmente dal rapporto tra lo sforzo applicato  $d_{12} = d_{21}$  (ovvero la forza per unità di superficie) e il gradiente di velocità  $\partial u_1 / \partial x_2$  ottenuto.

## Capitolo 2

# Le equazioni di governo

### 2.1 Volume di controllo fisso o in moto con il fluido

Le equazioni di governo, note come equazioni di Navier-Stokes, non sono altro che la riscrittura di principi di conservazione di cui si richiede il soddisfacimento all'interno di un certo volume,

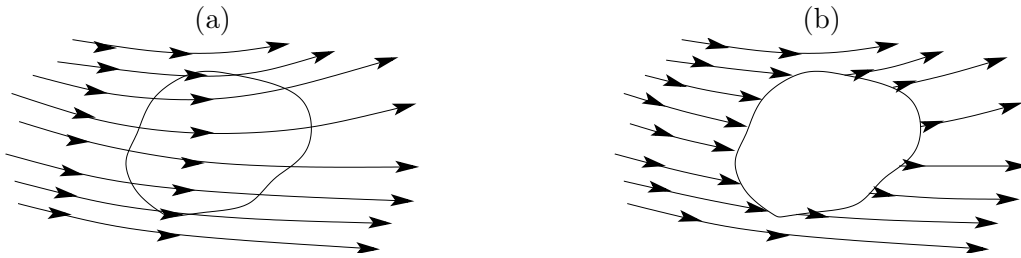


Figura 2.1: *Volume di controllo fisso* (sinistra), *volume materiale* in movimento assieme al fluido (destra)

che può essere analizzato secondo due approcci diversi (si veda la figura 2.1).

- (a) *Euleriano*: il volume in esame viene indicato con  $V$  e prende il nome di *volume di controllo* perché è fisso nello spazio e quindi le molecole di fluido al suo interno cambiano nel tempo; il sistema costituito dal solo volume di controllo è *aperto* in quanto consente lo scambio sia di massa che di energia con il resto del fluido.
- (b) *Lagrangiano*: il volume in esame viene indicato con  $\mathcal{V}_t$  e prende il nome di *volume materiale* perché si muove con il fluido e quindi le molecole di fluido al suo interno sono sempre le stesse; il sistema costituito dal solo volume materiale è *chiuso* in quanto non scambia massa ma solo energia con il resto del fluido.

In ogni caso, supponiamo che nello spazio tridimensionale  $\mathbb{R}^3$  siano definiti, in ogni punto  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  ed ad ogni istante di tempo  $t$ , un campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ed una densità di massa per unità di volume  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .

### 2.2 Conservazione della massa in un volume fisso $V$

Concentriamoci su un *volume fisso*  $V$ , non dipendente dal tempo, come mostrato in figura 2.1 (sinistra). Se  $M_V(t)$  è la massa di fluido contenuta nel volume  $V$  al tempo  $t$ , allora l'eventuale aumento o diminuzione di massa  $\Delta M_V = M_V(t + \Delta t) - M_V(t)$  dopo un intervallo di tempo

$\Delta t$  è dovuto alla massa rispettivamente entrante o uscente dal volume di controllo. Con riferimento alla figura 2.2, calcoliamo la massa *uscente* nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  da un pezzettino

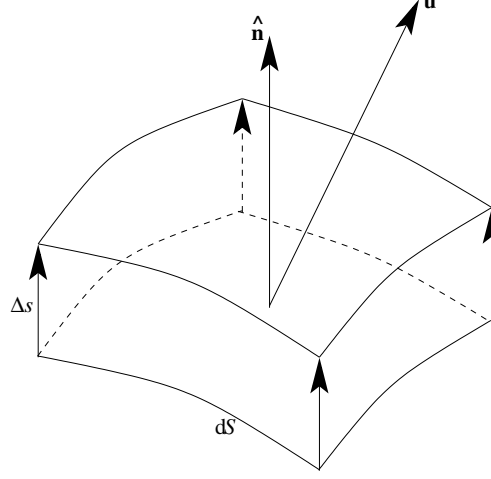


Figura 2.2: Volume  $\Delta V$  spazzato dalle molecole uscenti dall'elemento infinitesimo di superficie  $dS$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  tra  $t$  e  $t + \Delta t$ .

infinitesimo  $dS$  della superficie  $S$  che fa da contorno al volume di controllo  $V$ . Se  $\hat{\mathbf{n}}$  denota il versore normale uscente da  $dS$ , allora la massa che attraversa tale superficie infinitesima è

$$\Delta m = -\rho \Delta V,$$

dove  $\Delta V$  è il volume spazzato dalle molecole *uscenti* da  $dS$  e il segno negativo a destra è dovuto al fatto che se le molecole escono da  $dS$  allora la massa all'interno del volume  $V$  diminuisce. Se  $\Delta s$  è lo spazio percorso *perpendicolarmente alla superficie* e verso l'esterno dalle molecole di fluido che si muovono con velocità  $\mathbf{u}$ , allora  $\Delta s = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t$  ed il volume spazzato dalle molecole uscenti è

$$\Delta V = dS \Delta s = dS \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t.$$

La variazione di massa attraverso la superficie infinitesima  $dS$  durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$  è quindi

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = -\frac{\rho dS \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t}{\Delta t} = -\rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

da cui, integrando su tutta la superficie  $S$ , si ha

$$\frac{\Delta M_V}{\Delta t} = \frac{M_V(t + \Delta t) - M_V(t)}{\Delta t} = - \int_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS,$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  è il versore normale *uscente* dalla superficie nel punto  $\mathbf{r}$ , e  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  è la velocità del fluido nel punto  $\mathbf{r}$ , al tempo  $t$ . Si osservi che l'integrale di superficie a destra è il *flusso di massa uscente* dalla superficie  $S$ , ossia il flusso del vettore  $\rho \mathbf{u}$ ,

$$\Phi_S(\rho \mathbf{u}, t) = \int_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS, \quad (2.1)$$

e quindi il bilancio di massa durante l'intervallo  $\Delta t$  è semplicemente

$$\frac{\Delta M_V}{\Delta t} = -\Phi_S(\rho \mathbf{u}, t).$$



Questo equivale a dire che l'aumento di massa all'interno del volume è pari al flusso di massa *entrante* nel volume attraverso la sua frontiera.

Passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , l'espressione precedente diventa

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = -\Phi_S(\rho \mathbf{u}, t), \quad (2.2)$$

dove

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV,$$

da cui

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = - \int_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS.$$

Siccome l'integrale di sinistra è esteso al volume e la derivata è calcolata rispetto al tempo, l'ordine dei due operatori può essere invertito ottenendo

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV. \quad (2.3)$$

Si osservi il passaggio dalla derivata totale alla derivata parziale in quanto  $M_V = M_V(t)$ , mentre  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ .

Utilizzando il teorema della divergenza (per i dettagli si veda l'appendice B.1.1), se la superficie  $S$  è la frontiera del volume  $V$  ( $S = \partial V$ ), sotto opportune ipotesi di regolarità sia di  $S$  che di  $\mathbf{u}$ , il flusso di massa entrante può essere espresso come l'integrale di volume della divergenza:

$$-\Phi_S(\rho \mathbf{u}, t) = - \int_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = - \int_V \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) dV.$$

Pertanto, la legge di conservazione (2.2) diventa

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) dV$$

ovvero, alleggerendo la notazione e portando tutto sotto un unico integrale,

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Siccome questa equazione deve essere vera per *qualsiasi*  $V$  (piccolo a piacere), si conclude che per ogni punto dello spazio  $\mathbb{R}^3$  dove sono definiti il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e la densità  $\rho(\mathbf{r}, t)$  deve essere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

nota come equazione di continuità o di conservazione della massa.

## 2.3 Conservazione della massa in un volume $\mathcal{V}_t$ in moto con il fluido

Si può arrivare all'equazione di continuità anche considerando un volume materiale  $\mathcal{V}_t$ , variabile nel tempo (il pedice  $t$  indica proprio la dipendenza dal tempo), che possa cambiare sia di forma

che di volume e racchiuso da una *superficie chiusa*  $\mathcal{S}_t = \partial\mathcal{V}_t$ , anch'essa variabile nel tempo, tale che tutti i punti della superficie e tutti i punti interni ad essa (ovvero tutti i punti del volume  $\mathcal{V}_t$ ) *si muovano assieme al fluido*, come in figura 2.1 (destra). Siccome ogni punto della superficie ha la stessa velocità del campo di moto esterno, la velocità relativa tra la superficie e il fluido è nulla e quindi non c'è trasporto di massa attraverso  $\mathcal{S}_t$ . Il sistema è chiuso e la massa contenuta all'interno del volume variabile nel tempo deve conservarsi:

$$\frac{dM_{\mathcal{V}_t}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = 0.$$

A causa della dipendenza di  $\mathcal{V}_t$  dal tempo, anche l'integrale di volume su  $\mathcal{V}_t$  *dipende dal tempo* e quindi bisogna fare molta attenzione nel calcolare la derivata  $dM_{\mathcal{V}_t}/dt$ .

Nel caso semplice di funzioni reali di variabile reale, la derivata rispetto al tempo dell'integrale con estremi variabili si riduce, per il *teorema di Leibniz* (si veda la sezione B.3 a pagina 150 per la dimostrazione) a

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t)v_b(t) - f(a(t), t)v_a(t).$$

Si osservi che il termine  $f(b(t), t)v_b(t) - f(a(t), t)v_a(t)$  è semplicemente il flusso netto di  $f$  *uscende* dal dominio  $I_t = [a(t); b(t)]$ . Il teorema di Leibniz può essere generalizzato a integrali su volumi variabili nel tempo di grandezze scalari (per la dimostrazione si veda la sezione B.4.1 a pagina 153):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}_t} f(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}) d\mathcal{S},$$

dove  $\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}$  è la posizione ristretta alla superficie di frontiera  $\mathcal{S}_t = \partial\mathcal{V}_t$  e  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t)$  è la velocità con la quale si muove la frontiera  $\mathcal{S}_t$ . Se ogni punto della superficie che racchiude  $\mathcal{V}_t$  si muove alla velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t)$  pari alla velocità della corrente  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t)$  in  $\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}$  al tempo  $t$ , i.e.  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|_{\mathcal{S}}}, t)$ , grazie al teorema della divergenza, si ottiene (tutti i passaggi sono descritti nella sezione B.4.1).

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right] d\mathcal{V},$$

noto anche come *teorema del trasporto di Reynolds*.

Dalla conservazione della massa in un volume variabile nel tempo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = 0$$

segue, quindi,

$$\int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \right] d\mathcal{V} = 0,$$

ma siccome quest'ultima equazione deve essere vera per *qualsiasi*  $\mathcal{V}_t$  (piccolo a piacere), allora deve essere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0,$$

ormai nota come equazione di continuità (o di conservazione della massa).

## 2.4 Dai principi di conservazione alle equazioni di Navier-Stokes

Consideriamo un volume materiale  $\mathcal{V}_t$  variabile nel tempo e racchiuso da una superficie  $\mathcal{S}_t = \partial\mathcal{V}_t$  tale che ogni punto di essa ed ogni punto interno ad essa si muova alla stessa velocità del campo di moto esterno. Come visto nel caso dell'equazione di continuità, il flusso attraverso la superficie  $\mathcal{S}_t$  è nullo in quanto la velocità relativa tra il campo di moto esterno e la superficie stessa è nulla in ogni punto di  $\mathcal{S}_t$ . Pertanto il volume  $\mathcal{V}_t$  è un sistema *chiuso*, nel senso che la massa al suo interno non varia, però ci possono essere delle forze esterne che agiscono sul sistema e ci può essere passaggio di energia (calore e/o lavoro delle forze esterne) attraverso la superficie  $\mathcal{S}_t$ . Le tre leggi fondamentali che devono essere necessariamente verificate sono:

1. conservazione della massa:  $M = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = 0,$
2. secondo principio della dinamica (II legge di Newton):  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$
3. primo principio della termodinamica (conservazione dell'energia):  $\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt},$

dove  $M$  è la massa totale del sistema espressa in kilogrammi [kg] e contenuta nel volume materiale  $\mathcal{V}_t$  al tempo  $t$ ,  $\mathbf{p}$  è la quantità di moto del sistema espressa in kilogrammi per metri al secondo [kg m/s],  $\mathbf{F}$  è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema misurata in Newton [N],  $E$  è l'energia totale del sistema in moto espressa in Joule [J],  $Q$  è il calore *fornito* al sistema espresso in Joule [J] e  $W$  è il lavoro *compiuto* dal sistema, anch'esso espresso in Joule [J]. Il simbolo  $d$  indica un differenziale *inesatto*, ovvero una forma differenziale che integrata lungo un cammino chiuso non dà necessariamente zero (tipicamente il lavoro della forza di attrito). Si osservi che il primo principio della termodinamica è stato scritto per unità di tempo, quindi le grandezze in gioco sono delle potenze e le unità di misura sono W, mentre la versione comunemente nota parla di calore e lavoro, le cui unità di misura sono J. Inoltre nella forma qui introdotta compare  $E$ , l'energia totale del sistema, mentre il primo principio parla di *energia interna* e recita che *il calore fornito al sistema viene in parte trasformato in lavoro e in parte in aumento di energia interna*, ossia

$$dQ = dW + dU, \quad (2.4)$$

dove  $U$  è l'energia interna, ovvero l'insieme di tutte le forme di energia microscopiche possedute dal sistema. Tipicamente, per un gas *mediamente* in quiete e contenuto in un recipiente chiuso, l'energia interna è essenzialmente energia di agitazione termica. Il primo principio nella forma comune (2.4) si riferisce ad un sistema *mediamente in quiete*; nel caso di un sistema costituito da un fluido in moto, l'energia interna al sistema stesso include in modo ineluttabile anche l'energia cinetica  $K$  dovuta al moto medio (non nullo) della massa di fluido. Si parla, quindi, di energia *totale*  $E = U + K$ . Per esempio, se consideriamo un pallone pieno d'aria e fermo, le molecole di gas al suo interno si muovono a seguito dell'agitazione termica, dipendentemente dalla temperatura dell'aria in esso contenuta, ma il gas è *mediamente* in quiete. Se il pallone viene calciato, le molecole di gas al suo interno continuano ad avere lo stesso moto di agitazione termica rispetto al baricentro del pallone che avevano prima del calcio, ma il baricentro del pallone ora possiede una velocità non nulla che conferisce al gas all'interno del pallone un'energia cinetica *macroscopica*  $K$  diversa da zero.

Se indichiamo con  $\rho$  la densità del fluido, con  $\mathbf{u}$  la sua velocità, con  $e$  la densità di energia interna per unità di massa e con  $e_{\text{tot}}$  la densità di energia totale per unità di massa, somma

delle densità (per unità di massa) di energia interna  $e$  ed energia cinetica,

$$e_{\text{tot}} = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2},$$

allora richiedere che i suddetti tre principi siano verificati per il fluido in esame porta a scrivere

1.  $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V} = 0,$
2.  $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V} = \mathbf{F},$
3.  $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho e_{\text{tot}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_{\text{tot}} \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}.$

La conservazione della massa è già stata ampiamente descritta nella sezione 2.3. Di seguito verranno descritti nel dettaglio la seconda legge di Newton ed il primo principio della Termodinamica per un fluido in moto.

### 2.4.1 La seconda legge di Newton

Per quanto riguarda la seconda legge di Newton, la sommatoria delle forze  $\mathbf{F}$  agenti sul volume materiale è dovuta sia alle forze di volume sia alle forze risultanti dall'integrale degli sforzi sulla superficie  $\mathcal{S}$ . Se consideriamo la  $i$ -esima componente di  $\mathbf{F}$ , si ha

$$F_i = \int_{\mathcal{V}_t} \rho g_i d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j d\mathcal{S},$$

dove  $g_i$  è la forza di volume per unità di massa (quindi un'accelerazione) nella direzione  $x_i$  e  $\sigma_{ij}$  il tensore degli sforzi. Facendo uso del teorema della divergenza (B.1), l'integrale degli sforzi sulla superficie  $\mathcal{S}_t$  può essere riscritto come integrale sul volume  $\mathcal{V}_t$

$$\int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\mathcal{V},$$

per cui  $F_i$  diventa

$$F_i = \int_{\mathcal{V}_t} \rho g_i d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\mathcal{V}.$$

Come visto, i fluidi *in condizioni statiche* sono in grado di opporsi solo a sforzi normali, solitamente di compressione, di pari intensità nelle tre direzioni, e chiamati *pressione*:  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ , il segno negativo è dovuto all'azione di compressione sul fluido. Al contrario, *in condizioni dinamiche* esiste un contributo al tensore degli sforzi che chiamiamo  $d_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}.$$

Ricordando che per un *fluido newtoniano*

$$d_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right), \quad (2.5)$$

si ha

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right), \quad (2.6)$$

da cui

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{\mathcal{V}_t} \rho g_i \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} \left[ -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i \right] d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

In conclusione, la seconda legge di Newton espressa per componenti diventa

$$\int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i \right] d\mathcal{V},$$

ma siccome questa uguaglianza deve essere verificata *in ogni* volume  $\mathcal{V}_t$ , segue

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i.$$

### 2.4.2 Il primo principio della termodinamica

Per un ripasso sulla termodinamica e sulla trasmissione del calore si veda l'appendice C. Si osservi che, per definire lo stato di un sistema termodinamico, è necessario che esso sia in condizioni di *equilibrio termodinamico*, il che significa che le variabili termodinamiche che lo caratterizzano (tipicamente pressione, volume e temperatura) sono *ben definite e non variano nel tempo*. Nei sistemi non in equilibrio le variabili termodinamiche non sono in genere definibili: per esempio ad un gas in equilibrio in un recipiente possiamo assegnare come volume quello del recipiente che lo contiene, ma non ha senso parlare del volume del gas che sta uscendo da una bombola. Affinché un sistema sia in equilibrio termodinamico devono essere verificate contemporaneamente queste quattro condizioni:

- equilibrio meccanico: c'è equilibrio tra tutte le forze applicate (la somma vettoriale delle forze applicate al sistema è nulla) e tutti i momenti applicati (la loro somma è nulla);
- equilibrio termico: non ci sono flussi di calore, la temperatura è costante nel tempo ed è la stessa in ogni punto del sistema;
- equilibrio chimico: non avvengono reazioni chimiche o fenomeni di diffusione, la composizione chimica è costante nel tempo ed è la stessa in ogni punto del sistema;
- equilibrio nucleare: non avvengono fissioni, cioè reazioni nucleari in cui atomi sono divisi in frammenti in un processo che libera energia, o fusioni nucleari, dove vi è l'unione di due nuclei leggeri per formare un nucleo più pesante.

Evidentemente, un fluido in moto e nel quale avvengono scambi di calore non può essere in equilibrio termodinamico *globale* in quanto le variabili termodinamiche cambiano sia nello spazio, sia nel tempo. Definiamo un sistema in *equilibrio termodinamico globale* se le variabili termodinamiche non cambiano né nel tempo né nello spazio (sono costanti). Tuttavia, per un fluido in moto si può pensare che nell'intorno di un punto le variabili termodinamiche varino di poco, sia nel tempo che nello spazio. In pratica, su piccola scala, si può assumere che il fluido sia in *equilibrio termodinamico locale*. Questo significa che le variabili termodinamiche possono variare nel tempo e nello spazio, ma lo fanno molto lentamente.

Sotto questa fondamentale ipotesi di equilibrio termodinamico locale, procediamo calcolando dapprima la potenza termica trasmessa per *conduzione dall'ambiente esterno al fluido*. La legge di Fourier assicura che, *localmente*, la potenza termica per unità di superficie è

$$\dot{\mathbf{q}} = -\kappa \nabla T,$$

per cui il *flusso di calore entrante* nel sistema attraverso la sua superficie di frontiera  $\mathcal{S}_t$ , ovvero la potenza termica entrante, è il flusso di  $\dot{\mathbf{q}}$  attraverso  $\mathcal{S}_t$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{S}_t} \dot{\mathbf{q}} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_t} (-\kappa \nabla T) \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_t} \kappa \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_t} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j d\mathcal{S},$$

essendo  $\hat{\mathbf{n}}$  la *normale uscente* dalla superficie (si osservi la presenza del versore  $-\hat{\mathbf{n}}$  in quanto viene valutato il flusso di calore *entrante* nel sistema). Utilizzando l'ormai noto teorema della divergenza si ha

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{S}_t} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\mathcal{V}.$$

Per quanto riguarda la potenza delle forze agenti sul volume materiale  $\mathcal{V}_t$ , basta ricordare che la potenza meccanica è il prodotto scalare tra la forza agente e la velocità di spostamento

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{\mathcal{V}_t} \rho g_i u_i d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j u_i d\mathcal{S},$$

dove il segno negativo ‘ $-$ ’ deriva dal fatto che il lavoro è *subito dal sistema* in quanto è *compiuto dalle forze esterne* agenti su di esso. Sfruttando ancora il teorema della divergenza in forma tensoriale si può riscrivere l'integrale di superficie come integrale di volume

$$\int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j u_i d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j} d\mathcal{V},$$

da cui, ricordando la relazione (2.6),

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= - \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j} + \rho g_i u_i \right] d\mathcal{V} \\ &= - \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \left( -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) \right) + \rho g_i u_i \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) - \rho g_i u_i \right] d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

In conclusione, il primo principio della Termodinamica *per un fluido in moto* scritto in forma tensoriale diventa

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_{\text{tot}} u_j}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\mathcal{V} - \\ &\quad \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) - \rho g_i u_i \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} \left[ -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i u_i \right] d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Siccome l'uguaglianza deve essere verificata per *qualsiasi*  $\mathcal{V}_t$ , allora deve essere

$$\frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_{\text{tot}} u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + u_i \rho g_i.$$

## 2.5 Le equazioni di Navier-Stokes complete

Per arrivare a scrivere le equazioni precedenti partendo dalla conservazione della massa, dalla seconda legge di Newton e dal primo principio della Termodinamica, abbiamo richiesto che il fluido soddisfacesse diverse ipotesi, di seguito riassunte:

- il fluido è un continuo (sezione 1.2), ossia non lo si guarda come un insieme di singole molecole sulla scala del libero cammino medio  $\lambda$  ma su una scala spaziale  $L$  molto più grande in modo che il numero di Knudsen sia  $\text{Kn} = \lambda/L \ll 1$  ( $\lambda \approx 10^{-7}$  m per l'aria);
- il fluido è isotropo (sezione 1.6), cioè le sue proprietà fisiche non dipendono dalla particolare direzione spaziale;
- il fluido è Newtoniano (sezione 1.6), ovvero il tensore degli sforzi dipende linearmente dal tensore dai gradienti di velocità attraverso la *viscosità*  $\mu$ , in generale  $\mu = \mu(T, p)$ ;
- per il fluido vale l'ipotesi di Stokes (sezione 1.6) che assume un legame tra il *secondo coefficiente di viscosità*  $\mu_2$  e la *viscosità*,  $\mu_2 = -\frac{2}{3}\mu$ , quindi in generale  $\mu_2 = \mu_2(T, p)$ ;
- il fluido è localmente in equilibrio termodinamico (sezione 2.4.2), il che significa che le variabili termodinamiche variano sia nel tempo che nello spazio, ma di poco;
- la trasmissione del calore nel fluido (sezione 2.4.2) avviene solo per conduzione secondo la legge di Fourier, in generale  $\kappa = \kappa(T, p)$ , mentre l'effetto dell'irraggiamento è trascurato.

Le equazioni precedentemente ricavate prendono il nome di *equazioni di Navier-Stokes* e, per come sono state qui introdotte, non sono altro che una (quasi banale) riscrittura di tre principi fondamentali della fisica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_{\text{tot}} u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + u_i \rho g_i, \quad (2.10)$$

Si osservi che, siccome

$$e_{\text{tot}} = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2},$$

al posto della densità di energia totale per unità di massa  $e_{\text{tot}}$  si può considerare semplicemente l'energia interna per unità di massa  $e$ .

Il sistema è composto da cinque equazioni:

- una equazione di conservazione della massa (2.8),
- tre equazioni, una per ogni direzione, che esprimono la seconda legge di Newton (2.9),

- una equazione che esprime il primo principio della termodinamica (2.10),

ma le incognite sono, apparentemente, sette:

- $\rho$ , la densità del fluido,
- $u_1, u_2, u_3$ , le tre componenti della velocità del fluido nelle direzioni  $x_1, x_2, x_3$ ,
- $p$ , la pressione del fluido,
- $e$ , l'energia interna per unità di massa del fluido,
- $T$ , la temperatura del fluido.

Il problema sembrerebbe *malposto* ma non lo è in quanto vanno aggiunte sia l'equazione di stato  $F(\rho, p, T) = 0$ , che lega le tre variabili di stato densità, pressione e temperatura, sia la dipendenza dell'energia interna  $e$  dallo stato termodinamico del sistema. Pertanto, se si esprime lo stato termodinamico del sistema tramite pressione e temperatura (due variabili termodinamiche) si ha, in generale,

$$\rho = \rho(T, p) \quad \text{e} \quad e = e(T, p), \quad (2.11)$$

che riducono le variabili termodinamiche  $\rho, p, T, e$  da quattro a due. Le equazioni (2.8), (2.9) e (2.10), completate dalle opportune relazioni termodinamiche (2.11), costituiscono quindi un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari avente lo stesso numero di equazioni ed incognite. Si ricordi che  $\mu = \mu(T, p)$  e  $\kappa = \kappa(T, p)$  sono funzioni note della temperatura e della pressione (in realtà non dipendono quasi per nulla dalla pressione).

## 2.6 Condizioni iniziali e al contorno

Il sistema completo delle equazioni di Navier-Stokes è (molto) non lineare. Una sua caratteristica peculiare è quella di costituire un sistema *ibrido* iperbolico/parabolico. Infatti la prima equazione per la conservazione della massa è iperbolica mentre le equazioni del bilancio della quantità di moto e di conservazione dell'energia sono di natura parabolica. Si dice allora che le equazioni di Navier-Stokes comprimibili costituiscono un sistema parabolico incompleto. Il carattere di *incompletezza* è dovuto all'assenza di un termine di tipo laplaciano nell'equazione di conservazione della massa, ma non significa affatto che le equazioni richiedano di essere modificate o completate per potere condurre a un problema matematicamente ben posto. Questa asimmetria delle equazioni della dinamica dei fluidi è forse l'aspetto più specifico di questo sistema di equazioni. Esso ha delle conseguenze di natura fondamentale sulla teoria matematica delle equazioni di Navier-Stokes comprimibili. Ad esempio, se consideriamo un problema in una regione completamente delimitata da pareti solide, le condizioni al contorno del problema di una corrente comprimibile viscosa in tale caso comprenderanno la specificazione della velocità e, ad esempio, della temperatura su tutto il contorno ma non esisterà alcuna condizione al contorno per la variabile densità.

In generale, per le condizioni iniziali è richiesto un campo dato *almeno* per ogni variabile che evolve nel tempo (tipicamente  $\rho, \mathbf{u}, e$ )

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \quad e(\mathbf{r}, 0) = e_0(\mathbf{r}),$$



mentre per le condizioni al contorno è necessario che sia soddisfatta *almeno* la *no-slip condition* che prevede la perfetta adesione del fluido a superfici solide. Se indichiamo con  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$  tali superfici, la condizione diventa

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_{\mathcal{S}} = \mathbf{b}(\mathbf{r}_{\mathcal{S}}, t).$$

Chiaramente, il dato iniziale  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  e quello al contorno  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_{\mathcal{S}}, t)$  non possono essere incompatibili.

Il problema delle condizioni al contorno per le equazioni di Navier-Stokes è una materia piuttosto complessa e non esiste, se non per situazioni molto schematiche e semplificate, una dimostrazione matematica di esistenza ed unicità della soluzione. Tuttavia, per domini *chiusi*, si può affermare che in tutti i casi di interesse pratico le condizioni al contorno sono quattro e non cinque, come ci si potrebbe immaginare. Quando il contorno è una parete solida, tre di queste sono la no-slip condition, mentre l'altra è una condizione sulla temperatura o sul flusso di calore alla parete. Per i problemi *esterni* occorre assegnare anche una condizione all'infinito, che nella maggior parte dei casi consiste nel richiedere che velocità, pressione e temperatura assumano un valore costante e noto (quello della corrente all'infinito).

Nel caso particolare di problema non viscoso il sistema si abbassa di ordine. Nel caso subsonico bisogna assegnare una sola condizione su di un intero contorno chiuso, più altre tre (due se non si considera l'equazione dell'energia) sulla sola parte del contorno dove il fluido è entrante.

## 2.7 La derivata sostanziale

Consideriamo un campo scalare  $f(\mathbf{r}, t)$ , funzione dello spazio e del tempo (per esempio la temperatura). Se si vuole seguire la variazione di  $f$  nel tempo a  $\mathbf{r}$  fissato, ossia dal punto di vista *Euleriano*, basta la derivata *parziale*

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Se invece si vuole seguire la variazione di  $f$  muovendosi lungo la traiettoria descritta da una ipotetica particella che cambia la propria posizione nel tempo secondo la legge oraria  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , ossia dal punto di vista *Lagrangiano*, allora è necessario considerare la derivata *totale* in quanto  $f(\mathbf{r}(t), t)$  è una funzione solo del tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t), t) &= \frac{d}{dt}f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

essendo  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$  la velocità con la quale la particella si muove. Se la particella si muove assieme al fluido, e la velocità di quest'ultimo è  $\mathbf{u}$ , allora anche la particella si muove con velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  e la derivata totale dal punto di vista Lagrangiano diventa

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

L'operatore  $\frac{D}{Dt}$  prende il nome di *derivata sostanziale* (oppure *materiale*, o anche *Lagrangiana*) di  $f$  rispetto al tempo  $t$ . Essa non è altro che la variazione della grandezza scalare  $f$  lungo le linee di corrente che, per definizione, sono istantaneamente tangenti al campo di velocità  $\mathbf{u}$ . Si osservi che la derivata sostanziale:

- (a) sott'intende *sempre* un campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  senza il quale l'operatore stesso perde di significato,
- (b) *non* è una vera e propria derivata, in quanto le derivate sono solo ordinarie o parziali, però se  $\alpha, \beta, f, g$  sono tutti campi scalari funzioni dello spazio e del tempo, e se  $\alpha(\mathbf{r}, t) df(\mathbf{r}, t) = \beta(\mathbf{r}, t) dg(\mathbf{r}, t)$ , allora vale la relazione  $\alpha(\mathbf{r}, t) \frac{Df}{Dt}(\mathbf{r}, t) = \beta(\mathbf{r}, t) \frac{Dg}{Dt}(\mathbf{r}, t)$ .

Dimostriamo un'identità notevole che coinvolge l'integrale di volume della derivata sostanziale. Siano  $\rho(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  due campi di densità e velocità che soddisfano l'equazione di continuità. Moltiplicando quest'ultima per un generico campo scalare  $f(\mathbf{r}, t)$  si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \frac{\partial \rho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

ma

$$f \frac{\partial \rho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial f \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) - \rho \frac{Df}{Dt},$$

per cui

$$f \frac{\partial \rho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) - \rho \frac{Df}{Dt} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) = \frac{\partial f \rho}{\partial t} + \frac{\partial f \rho u_j}{\partial x_j} = \rho \frac{Df}{Dt}. \quad (2.12)$$

Questa uguaglianza, assieme al teorema del trasporto di Reynolds applicato allo scalare  $f\rho$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \rho dV = \int_{V_t} \left[ \frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) \right] dV,$$

porta all'uguaglianza notevole

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \rho dV = \int_{V_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV.$$

## 2.8 Forma conservativa e forma convettiva

Le equazioni (2.8), (2.9) e (2.10) sono scritte in *forma conservativa* in quanto stabiliscono che la somma tra l'aumento nel tempo di una grandezza e la sua divergenza (legata al flusso uscente della grandezza stessa) deve o essere nulla o essere uguale ad un certo termine di destra. Tuttavia, le equazioni di governo possono essere riscritte in *forma convettiva* utilizzando la derivata sostanziale, da cui il particolare significato di “variazione di una grandezza seguendo il fluido”. Sviluppando le derivate nell'equazione di continuità (2.8)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

e sfruttando la definizione di derivata sostanziale appena introdotta, l'equazione di continuità si riscrive in *forma convettiva* come

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (2.13)$$

Per l'equazione della quantità di moto (2.9) basta sfruttare l'uguaglianza (2.12) e sostituire in quest'ultima  $f\rho = \rho u_i$  ottenendo l'equazione di quantità di moto in *forma convettiva*:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i. \quad (2.14)$$

Infine, l'equazione dell'energia (2.10), sfruttando ancora l'uguaglianza (2.12) e sostituendo  $f\rho = \rho e_{\text{tot}}$ , si ottiene l'equazione dell'energia in *forma convettiva*:

$$\rho \frac{De_{\text{tot}}}{Dt} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + u_j \rho g_j. \quad (2.15)$$

## 2.9 Forme alternative per l'equazione dell'energia

### 2.9.1 Equazione dell'energia interna

L'equazione dell'energia si trova spesso scritta, invece che per la variabile  $e_{\text{tot}}$ , per la variabile  $e$ , ovvero per la densità (per unità di massa) di energia interna. Al fine di ricavare l'equazione per  $e$  si osservi che  $e_{\text{tot}}$  può essere riscritta come

$$e_{\text{tot}} = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = e + \sum_{j=1}^3 \frac{u_j^2}{2} = e + \frac{u_j u_j}{2},$$

e che, grazie all'equazione di continuità (2.8), vale l'uguaglianza

$$\varphi \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \forall \varphi = \varphi(\mathbf{r}, t).$$

Se indichiamo con  $d_{kj}$  il tensore degli sforzi viscosi

$$d_{kj} = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right),$$

l'equazione della quantità di moto in forma convettiva (2.14) può essere rielaborata nelle seguenti forme tra loro equivalenti (dove vale la notazione di Einstein per le somme sull'indice  $j$ )

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_k}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial x_j} + \frac{u_k^2}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \rho \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{u_k^2}{2} u_j}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Sommando le tre equazioni per  $k = 1, 2, 3$  e sfruttando la notazione di Einstein, si ottiene un'unica equazione

$$\frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} u_j}{\partial x_j} = -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k,$$

dove gli indici sui quali fare le sommatorie sono sia  $j$  che  $k$ , e quindi può essere riarrangiata come

$$\frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} u_j}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_j \rho g_j, \quad (2.16)$$

che è semplicemente la forma conservativa dell'equazione dell'energia cinetica. Sottraendo quest'ultima equazione all'equazione dell'energia per  $e_{\text{tot}}$  riscritta come

$$\frac{\partial \rho \left( e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \left( e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k d_{kj}}{\partial x_j} + u_j \rho g_j,$$

e dopo aver sviluppato le derivate rispetto a  $x_j$ , si ottiene l'equazione di bilancio la per sola energia interna  $e$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + d_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Si noti che, in questa forma, non compare l'effetto delle forze di volume  $g_j$ . Questo è consistente con il fatto che le forze di volume possono far variare *esclusivamente* l'energia cinetica del fluido e non quella interna (che dipende, invece, dalla termodinamica). Riespandendo il termine  $d_{kj}$ , l'equazione per esteso risulta essere

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (2.17)$$

ovvero, in *forma convettiva*

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.18)$$

### 2.9.2 Equazione dell'entropia

Dalla Termodinamica (si veda l'equazione (C.6) in appendice C) è noto che

$$T ds = de + p dv,$$

dove  $s$  è la densità di entropia per unità di massa ( $s = S/m$ ) e  $v = 1/\rho$  è il volume specifico (il volume per unità di massa, l'inverso della densità). Passando alla densità si ottiene

$$T ds = de + p d \left( \frac{1}{\rho} \right) = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

da cui, passando dai differenziali alle derivate sostanziali e moltiplicando per la densità,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Si osservi che il termine  $\rho \frac{De}{Dt}$  si ottiene immediatamente dall'equazione (2.18), mentre per riscrivere il termine  $\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$  moltiplichiamo l'equazione di continuità in forma convettiva (2.13) per  $p/\rho$  ottenendo l'uguaglianza

$$\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

In conclusione si ha

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$

da cui si ottiene l'equazione per l'entropia

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.19)$$

### 2.9.3 Equazione dell'entalpia

Dalla Termodinamica (si veda l'equazione (C.7) in appendice C) è noto che

$$dh = T ds + v dp,$$

dove  $h$  è la densità di entalpia per unità di massa ( $h = H/m$ ) e  $v = 1/\rho$  è il volume specifico. Passando alla densità si ottiene

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp,$$

da cui

$$\frac{Dh}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt} + \frac{Dp}{Dt}.$$

Sommando  $\frac{Dp}{Dt}$  a entrambi i membri dell'equazione (2.19) si ha immediatamente l'equazione per l'entalpia

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.20)$$

### 2.9.4 Equazione della temperatura

Dalla definizione di calore specifico a pressione costante (si veda la sezione C.1.5 in appendice)

$$c_p = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{p=\text{cost}} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}},$$

dalla definizione di coefficiente di espansione termica

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}},$$

e dalla relazione di Maxwell per le variabili termodinamiche,

$$\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} = -\beta v = -\frac{\beta}{\rho},$$

segue che, differenziando l'entropia per unità di massa  $s = s(T, p)$ , si ottengono le equivalenze

$$\begin{aligned} ds &= dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} + dp \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \\ &= \frac{dT}{T} \left[ T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} \right] + dp \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \\ &= \frac{dT}{T} c_p - dp \frac{\beta}{\rho} \end{aligned}$$

da cui, passando alla derivata sostanziale,

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{c_p}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{\beta}{\rho} \frac{Dp}{Dt}.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione per l'entropia (2.19) si ha immediatamente l'equazione per la temperatura

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.21)$$

Si osservi che, per un gas perfetto,  $\beta = 1/T$ .

## 2.10 Adimensionalizzazione delle equazioni di governo

Se nel sistema che si sta considerando si possono identificare una lunghezza caratteristica  $L$ , una velocità caratteristica  $U_0$  e delle proprietà di riferimento del fluido  $p_0, \rho_0, T_0, \mu_0, \kappa_0, c_{p0}$  e  $\Delta T = T_w - T_0$ , allora si possono introdurre le variabili adimensionali

$$x'_j = \frac{x_j}{L}, \quad u'_j = \frac{u_j}{U_0}, \quad g'_j = g_j \frac{L}{U_0^2}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$t' = t \frac{U_0}{L}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 U_0^2}, \quad T' = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{\kappa_0}, \quad c'_p = \frac{c_p}{c_{p0}},$$

e la rispettiva derivata sostanziale

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{L}{U_0} \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t'} + u'_j \frac{\partial}{\partial x'_j}.$$

Moltiplicando l'equazione di continuità (2.13) per  $L/(\rho_0 U_0)$ , l'equazione della quantità di moto (2.14) per  $L/(\rho_0 U_0^2)$  e l'equazione della temperatura (2.21) per  $L/(\rho_0 c_{p0} U_0 (T_w - T_0))$ , si ottengono le rispettive equazioni di governo in forma adimensionale convettiva

$$\frac{D\rho'}{Dt'} = -\rho' \frac{\partial u'_j}{\partial x'_j}, \quad (2.22)$$

$$\rho' \frac{Du'_i}{Dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left( \mu' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho' g'_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.23)$$

$$\rho' c_p' \frac{DT'}{Dt'} = \text{Ec} \frac{Dp'}{Dt'} + \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial x_j'} \left( \kappa' \frac{\partial T'}{\partial x_j'} \right) + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u_k'}{\partial x_j'} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_k'} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s'}{\partial x_s'} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k'}{\partial x_j'}, \quad (2.24)$$

dove sono stati introdotti i parametri adimensionali così definiti:

|                    |             |   |  |
|--------------------|-------------|---|--|
| Numero di Reynolds | $\text{Re}$ | $= \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}$                          | $= \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscosse}}$                                   |
| Numero di Eckert   | $\text{Ec}$ | $= \frac{U_0^2}{c_{p0}(T_w - T_0)}$                     | $= \frac{\text{energia cinetica}}{\text{entalpia}}$  |
| Numero di Prandtl  | $\text{Pr}$ | $= \frac{\mu_0 c_{p0}}{\kappa_0}$                       | $= \frac{\text{diffusione viscosa}}{\text{diffusione termica}}$                            |
| Numero di Péclet   | $\text{Pe}$ | $= \text{Pr Re} = \frac{\rho_0 U_0 L c_{p0}}{\kappa_0}$ | $= \frac{\text{calore scambiato per convezione}}{\text{calore scambiato per conduzione}}.$ |





## Capitolo 3

# Casi particolari delle equazioni di governo

### 3.1 Correnti particolari

Si ricordi che per *fluido* si intende un mezzo continuo caratterizzato da proprietà fisiche quali la densità  $\rho$ , la viscosità  $\mu$  e il coefficiente di conduzione termica  $\kappa$ , mentre per *corrente* si intende un particolare regime di moto, che può essere laminare o turbolento, comprimibile o incompressibile, subsonico o supersonico, stazionario, isoterma, isoentropico, barotropico, ecc. Qualche testo, purtroppo, usa la parola *flusso* anziché corrente, rischiando di confondere il lettore. Qui useremo esclusivamente la parola *corrente*.

#### 3.1.1 Dipendenza dal tempo

Se il campo di moto e le grandezze associate alla corrente dipendono dal tempo allora la corrente si dice *non stazionaria*. Viceversa, se le grandezze non dipendono dal tempo, o la loro variazione nel tempo avviene su una scala così lenta rispetto ai tempi caratteristici del fenomeno modellato dalle equazioni di governo da poter essere trascurata, allora le equazioni si dicono *stazionarie* e  $\partial/\partial t = 0$  (si veda la tabella 3.1). Si noti che è la *derivata parziale* rispetto al tempo ad essere nulla, non quella *sostanziale*. Pertanto, nel caso stazionario la derivata sostanziale si riduce alla derivata direzionale nella direzione del vettore velocità locale, ossia  $\frac{Df}{Dt} \equiv \mathbf{u} \cdot \nabla f$ .

#### 3.1.2 Effetto della viscosità

È indubbio che ogni fluido, perlomeno nei limiti della fluidodinamica classica, sia viscoso. Questo implica sia il soddisfacimento della no-slip condition alla parete, sia la dissipazione di energia sotto forma di attrito viscoso all'interno della corrente. Spesso, però, alcuni regimi di moto possono essere trattati trascurando completamente la viscosità del fluido (per esempio in gas dinamica). Diremo che la corrente è *non viscosa* se gli effetti della viscosità sono trascurabili ( $\mu = 0$ ), *viscosa* altrimenti (si veda la tabella 3.1).

#### 3.1.3 Conduzione termica

Ogni fluido è un mezzo materiale nel quale avviene trasporto di calore per conduzione. La costante di conducibilità termica  $\kappa$  varia da fluido a fluido, ma talvolta i fenomeni di conduzione termica si possono trascurare, semplificando in tal modo l'equazione dell'energia. Diremo che

| Tipo di corrente | in formule                                       | significato  |
|------------------|--|--|
| Stazionaria      | $\frac{\partial}{\partial t} = 0$                | indipendenza dal tempo   |
| Non stazionaria  | $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$             | dipendenza dal tempo   |
| Viscosa          | $\mu \neq 0$                                     | effetti viscosi alla parete e nella corrente   |
| Non viscosa      | $\mu = 0$  | effetti viscosi trascurabili ovunque   |
| Conduttrice      | $\kappa \neq 0$                                  | trasmissione di calore per conduzione  |
| Non conduttrice  | $\kappa = 0$                                     | conduzione di calore trascurabile nella corrente   |
| Ideale           | $\mu = \kappa = 0$                               | né viscosa, né conduttrice $\Rightarrow \frac{Ds}{Dt} = 0$   |
| Isoentropica     | $\frac{Ds}{Dt} = 0$                              | entropia costante lungo linee di corrente  |
| Omoentropica     | $s = \text{cost}$                                | entropia costante sia nello spazio che nel tempo   |
| Incomprimibile   | $\frac{d\rho}{dp} = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$ | solenoidale, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$   |
| Solenoidale      | $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$                    | incomprimibile, $\frac{d\rho}{dp} = \rho\tau = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$  |
| Isocora          | $\frac{Dv}{Dt} = 0$                              | incomprimibile, $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  |
| Comprimibile     | $\frac{d\rho}{dp} = \rho\tau \neq 0$             | $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$   |
| Barotropica      | $p = p(\rho) \vee \rho = \rho(p)$                | $\rho = \rho(p) \Rightarrow \exists \mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p')} dp' : \nabla \mathcal{P} = \frac{\nabla p}{\rho}$ |
| Densità costante | $\rho = \rho_0 = \text{costante}$                | $\rho$ non dipende né da $\mathbf{r}$ né da $t$  |
| Irrotazionale    | $\nabla \times \mathbf{u} = 0$                   | su un dominio monoconnesso, $\exists \varphi : \mathbf{u} = \nabla \varphi$  |

Tabella 3.1: Riassunto dei diversi tipi di correnti

la corrente è *non conduttrice* se lo scambio di calore per conduzione è trascurabile ( $\kappa = 0$ ), *conduttrice* altrimenti. Una corrente *non viscosa* e *non conduttrice* si dice *ideale* (si veda la tabella 3.1).

### 3.1.4 Entropia

Si osservi che, per un fluido ideale ( $\mu = \kappa = 0$ ), l'equazione dell'entropia (2.19) si riduce a

$$\frac{Ds}{Dt} = 0,$$

il che significa che l'entropia è costante lungo una linea di corrente (ovvero muovendosi con il fluido). Tuttavia, questo non garantisce che l'entropia sia costante ovunque perché, in generale, il suo valore varia tra una linea di corrente e un'altra. Pertanto, diremo che una corrente è *isoentropica* se  $Ds/Dt = 0$ , mentre diremo che una corrente è *omoentropica* se  $s$  è costante in tutto il dominio (si veda la tabella 3.1).

### 3.1.5 Comprimità

Un concetto fondamentale è quello di corrente comprimibile. Se  $v = 1/\rho$  indica il volume specifico e  $p$  la pressione, si definisce comprimibilità di un fluido la quantità

$$\tau = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp},$$

ovvero la variazione relativa di densità subita da un fluido a seguito di una variazione di pressione. Si pensi all'effetto che si ottiene applicando una pressione sulla superficie esterna di un palloncino chiuso e pieno d'aria, o all'effetto che si ottiene applicando una pressione sullo stantuffo di una siringa piena d'acqua e chiusa all'altra estremità. Diremo che una corrente è *incomprimibile* se gli effetti di comprimibilità della densità sono trascurabili ( $\tau = 0$ ), *comprimibile* altrimenti. Nel caso di corrente incomprimibile ( $\tau = 0$ ), dalla relazione precedente segue

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \tau dp \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \tau \frac{Dp}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

per cui, facendo uso dell'equazione di continuità (2.13) in forma convettiva, si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dal punto di vista matematico, la condizione di corrente incomprimibile si traduce, quindi, nelle forme equivalenti

$$\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Dv}{Dt} = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'uguaglianza

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = 0.$$

La condizione  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , essendo equivalente a  $Dv/Dt = 0$ , assicura che il volume dell'elemento di fluido che si sposta solidale con la corrente rimanga costante. Ugualmente,  $D\rho/Dt = 0$  assicura che ogni valore iniziale  $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}) \neq \text{costante}$  venga trasportato lungo linee di corrente e quindi se al tempo iniziale  $t = 0$  la densità era non uniforme, allora si manterrà non uniforme per ogni  $t > 0$ . Si osservi che la condizione di corrente incomprimibile

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

è un'equazione del trasporto per  $\rho$  a carico del campo di velocità  $\mathbf{u}$ . Questo trasporto di una distribuzione iniziale di densità non uniforme è tipico di correnti stratificate come quelle che si incontrano in oceanografia, caratterizzate sia da incomprimibilità sia da densità non uniforme nello spazio.

Ovviamente tutti i fluidi sono in qualche modo comprimibili ( $\tau \neq 0$ ), quindi la corrente incomprimibile è un'idealizzazione. Tuttavia, per i liquidi  $\tau$  è così piccolo che variazioni di pressione non riescono a provocare variazioni apprezzabili di densità ( $\tau \ll 1$ ) e quindi l'ipotesi di corrente incomprimibile è del tutto corretta. Nei gas, invece, a seguito di variazioni di pressione si osservano notevoli variazioni di densità che possono avvenire sia a temperatura costante sia ad entropia costante. Per questo motivo definiamo

$$\tau_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_{T=\text{cost}} \quad \text{e} \quad \tau_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_{s=\text{cost}}$$

i coefficienti di comprimibilità rispettivamente *isotermo* e *isoentropico*. Si osservi che la velocità del suono in un determinato mezzo è definita come

$$a := \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{s=\text{cost}}},$$

per cui

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\tau_s}}.$$

Questo significa che la velocità del suono è in qualche modo una misura “pratica” della comprimibilità di un fluido o di un mezzo materiale. Infatti  $a$  è molto elevata nei solidi, che sono comunque in qualche modo comprimibili in quanto deformabili, e nei liquidi ( $a$  sarebbe infinita nel caso limite  $\tau_s = 0$ ), mentre è piuttosto bassa nei gas. Per i gas perfetti si ha

$$a = \sqrt{\gamma RT},$$

dove  $\gamma = c_p/c_v$  ( $= 1.4$  per l'aria),  $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$  con  $\mathcal{R} = 8,314472 \text{ J/(K mol)}$  e  $\mathcal{M}$  è il peso molecolare espresso in kilogrammi. Per l'aria  $R = 8.314472/0.02896 = 287.05 \text{ J/(kg K)}$ .

Nonostante un gas sia evidentemente comprimibile, le correnti il cui fluido è allo stato gassoso (per esempio l'aria) in alcuni casi possono essere considerate incomprimibili perché le variazioni relative di densità ( $\Delta\rho/\rho$ ) a seguito di variazioni di pressione sono trascurabili. Per capire come questo sia possibile, consideriamo il caso di una corrente ideale,  $\mu = \kappa = 0$ , che quindi è anche isoentropica, per la quale l'equazione (2.16) diventa semplicemente

$$\frac{D\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{Dt} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_j \rho g_j.$$

Supponendo che non ci siano forze di volume ( $g_j = 0$ ) e che la corrente sia stazionaria ( $\partial/\partial t = 0$ ), si ottiene

$$u_j \frac{\partial \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad u_j \frac{\partial \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p \right)}{\partial x_j} = 0,$$

che riscritta in forma vettoriale diventa

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p \right) = 0.$$

Pertanto, si può concludere che lungo una linea di corrente, sotto le ipotesi di corrente ideale ( $\mu = \kappa = 0$ ), stazionaria ( $\partial/\partial t = 0$ ), e in assenza di forze di volume ( $g_j = 0$ ), vale la relazione

$$\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p = \text{cost.}$$

Se adesso ipotizziamo che le variazioni di pressione avvengano solo a causa di variazioni di velocità, possiamo affermare, perlomeno a livello di ordini di grandezza, che  $\Delta p/\rho \approx \Delta(|\mathbf{u}|^2/2)$ ; se però valutiamo la differenza di pressione rispetto al caso di velocità nulla, risulta

$$\frac{\Delta p}{\rho} \approx \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}.$$

Consideriamo ora variazioni di densità dovute a variazioni di pressione, sempre sotto l'ipotesi di corrente isoentropica. Dalla relazione

$$\Delta p = \Delta \rho \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{s=\text{cost}}$$

e utilizzando  $\Delta p/\rho \approx |\mathbf{u}|^2/2$ , segue che

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} \left[ \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_{s=\text{cost}} \right]^{-1} = \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{a^2} \approx \frac{|\mathbf{u}|^2}{2a^2}.$$

Introducendo il numero di Mach definito come

$$\text{Ma} = \frac{|\mathbf{u}|}{a},$$

si ottiene, per una corrente ideale (isoentropica) e stazionaria

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{1}{2} \text{Ma}^2.$$

Il numero di Mach è quindi un'altra "misura" della comprimibilità o meno di una corrente. In particolare, se assumiamo che affinché una corrente possa essere considerata incomprimibile le variazioni relative di densità debbano essere inferiori al 5%, ossia  $\Delta \rho/\rho < 0.05$ , allora basta che il numero di Mach sia  $\text{Ma} < 0.31$ . Siccome per l'aria, a temperatura ambiente, la velocità del suono è  $a \approx 340$  m/s, per velocità inferiori a 100 m/s (360 km/h) l'aria può essere trattata come una corrente incomprimibile.

Per un riassunto schematico dei vari modi (equivalenti) di esprimere la condizione di incomprimibilità, si veda la tabella 3.1.

### 3.1.6 Correnti barotropiche

Una corrente si dice *barotropica* se la densità è funzione solo della pressione e viceversa. In generale, infatti, una grandezza termodinamica (per esempio la densità o la pressione) è sempre funzione di altre due variabili termodinamiche. Nel caso barotropico, invece, la densità non è funzione della temperatura e quindi la Termodinamica non entra in gioco direttamente. Le correnti barotropiche sono due (si veda la tabella 3.1), quelle:

1. incomprimibili con densità iniziale funzione solo dello spazio, ovvero  $\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \rho_0(\mathbf{r})$
2. isoentropiche comprimibili, in quanto  $p$  è funzione solo di una variabile termodinamica.

In questi casi è possibile definire un potenziale termodinamico

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p')} dp',$$

che è semplicemente  $\mathcal{P} = (p - p_0)/\rho$  nel caso *incomprimibile*, e  $\mathcal{P} = h - h_0$  (entalpia) nel caso *isoentropico*. Dalla definizione segue, per il teorema di derivazione delle funzioni composte,

$$\nabla \mathcal{P} = \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (3.1)$$

che significa che i gradienti del potenziale  $\mathcal{P}$  (da non confondere con la pressione termodinamica  $p$ ) e della densità sono paralleli, e che il potenziale  $\mathcal{P}$  è definito a meno di una costante arbitraria.

### 3.2 Corrente incomprimibile

Sappiamo già che per corrente incomprimibile si intende  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , che non significa necessariamente che la densità sia costante ovunque. La pressione  $\mathcal{P}$ , in questo caso, serve solo da *moltiplicatore di Lagrange* al fine di permettere il soddisfacimento del vincolo di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Le incognite sono la velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e la pressione  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ . Le condizioni iniziali sono quelle generali ed sono richiesti un campo di velocità e densità iniziali

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r})$$

mentre per le condizioni al contorno è necessario richiedere che la velocità su di esso ( $S = \partial V$ ) sia la stessa del contorno a seguito della *no-slip condition* che assicura la perfetta adesione del fluido alla superficie con la quale entra in contatto

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t).$$

Chiaramente, il dato iniziale  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  e quello al contorno  $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$  non possono essere incompatibili e, in particolare, deve essere  $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ .

### 3.3 Corrente ideale, equazioni di Eulero

Sappiamo che per corrente ideale si intende una corrente in cui si assume  $\mu = \kappa = 0$ . Inoltre, si è visto che una corrente ideale è anche isoentropica. La semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes al caso  $\mu = \kappa = 0$  prende il nome di *Equazioni di Eulero*. Esse sono alla base di tutta la gas dinamica, branca della fluidodinamica che si occupa di fenomeni che si verificano in correnti ad alta velocità (onde d'urto, ecc.). L'assenza di termini di tipo laplaciano cambia la natura delle equazioni di Eulero in *iperbolica*. Le condizioni iniziali che devono essere specificate riguardano tutte le variabili in gioco quindi, se si scelgono come variabili termodinamiche la pressione e la temperatura, si devono imporre

$$p(\mathbf{r}, 0) = p_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \quad T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}),$$

mentre la mancanza della viscosità assicura l'abbassamento dell'ordine delle derivate spaziali della velocità per la quale, infatti, l'unica condizione ammissibile dal contorno è la non penetrazione del fluido sulle pareti di eventuali corpi:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t) = 0.$$

Chiaramente, la *no-slip condition*, in assenza di viscosità, non è più richiesta. A grande distanza dal corpo le condizioni al contorno sono molto complicate e il loro tipo dipende dal tipo di corrente considerata, ovverosia dalla stessa soluzione che si sta ricercando. In termini generali, il numero stesso di condizioni al contorno che si possono/devono imporre nei punti del contorno esterno può variare da zero a 4 o 5 per le correnti in due o tre dimensioni, rispettivamente. Questo numero non è lo stesso su tutto il contorno e cambia sulle varie parti in cui risulta che esso deve essere suddiviso in base alla natura locale della soluzione in quella regione. Un'autentica maledizione, che richiede un'arte alquanto raffinata da parte dell'analista numerico e non numerico alle prese con i sistemi iperbolici non lineari, quali le equazioni della gasdinamica. Naturalmente l'analisi delle condizioni al contorno da imporre nei problemi relativi alle correnti comprimibili va molto al di là degli scopi di questo ripasso della dinamica dei fluidi.

### 3.4 Corrente irrotazionale

Il rotore del vettore velocità prende il nome di vorticità e si indica con il simbolo  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Un corrente è detta *irrotazionale* se  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  ovunque, *rotazionale* altrimenti. Definiamo *circolazione* la circuitazione del vettore velocità  $\mathbf{u}$  lungo una linea chiusa e orientata  $C$  e la indichiamo con il simbolo  $\Gamma_C(\mathbf{u})$ . Pertanto, se  $C$  è una linea chiusa che fa da contorno ad una superficie  $S$  per cui  $\partial S = C$ , per il teorema di Stokes (B.2) si ha che la circolazione di  $\mathbf{u}$  lungo  $C$  è

$$\Gamma_C(\mathbf{u}) = \oint_C \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (3.2)$$

dove  $\hat{\mathbf{t}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  sono rispettivamente i versori tangente alla linea chiusa  $C$  e normale alla superficie  $S$ . Pertanto, le correnti irrotazionali sono caratterizzate da circolazione nulla, mentre quelle rotazionali hanno circolazione non nulla e pari al flusso di vorticità attraverso la superficie che ha come contorno la linea chiusa  $C$ .

Se la corrente è irrotazionale ed il dominio *monoconnesso* allora è definito un *potenziale cinetico*  $\varphi$  tale che

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi.$$

### 3.5 Corrente barotropica non viscosa: forma di Crocco

La forma di Crocco per l'equazione della quantità di moto consiste nel riscrivere il termine convettivo in una forma alternativa. Come visto nella sezione 3.1.6, nel caso di corrente barotropica (incomprimibile o comprimibile ma isoentropica), la pressione  $p$  è funzione della sola densità per cui esiste un potenziale di pressione  $\mathcal{P}$  tale che  $\nabla \mathcal{P} = \nabla p / \rho$ . Sotto l'ulteriore ipotesi di corrente non viscosa ( $\mu = 0$ ), l'equazione della quantità di moto (2.14) si scrive, dopo aver sviluppato la derivata sostanziale e diviso per  $\rho$ , come

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + g_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

oppure, in forma vettoriale, come

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{g}, \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$  e, per la notazione di Einstein che sott'intende la sommatoria sugli indici  $j$ , il termine convettivo è

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left( \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

essendo  $\mathbf{e}_i$  il versore nella direzione  $i$ -esima. Sfruttiamo ora l'identità vettoriale (A.3) ottenendo

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)$$

da cui, sostituendo  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ , si ha

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \quad (3.4)$$

Pertanto, dopo aver riscritto il termine convettivo secondo la (3.4) ed aver portato a sinistra il termine di pressione, l'equazione (3.3) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (3.5)$$

nota come *forma di Crocco* dell'equazione della quantità di moto per il caso barotropico non viscoso.

### 3.6 Il teorema di Bernoulli nelle diverse forme

Se ipotizziamo che il campo di forze di volume  $\mathbf{g}$  sia conservativo, allora esiste un potenziale scalare  $\mathcal{F}$  tale che

$$\mathbf{g} = -\nabla \mathcal{F}.$$

Sotto questa ulteriore ipotesi, l'equazione di Crocco, che è valida per correnti barotropiche e non viscosi, diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0. \quad (3.6)$$

#### 3.6.1 Il caso stazionario

Nel caso stazionario è  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ . Inoltre, siccome  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  è perpendicolare sia a  $\boldsymbol{\omega}$  che a  $\mathbf{u}$ , si ha

$$\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0.$$

Pertanto, moltiplicando scalarmente l'equazione (3.6) per  $\mathbf{u}$  si ottiene

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

che significa che *lungo le linee di corrente* è costante la quantità

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_1.$$



Inoltre, se le linee di corrente provengono da condizioni a monte di corrente uniforme, allora la costante è la stessa ovunque. Ugualmente, moltiplicando scalarmente l'equazione (3.6) per  $\boldsymbol{\omega}$  si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

che significa che *lungo le linee vorticosi*, ovvero linee tangenti in ogni loro punto al vettore  $\boldsymbol{\omega}$  (per la trattazione completa sulla vorticità si veda il capitolo 5), è costante la quantità

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_2.$$

Di nuovo, se le linee di vorticosi provengono dalle stesse condizioni asintotiche, allora la costante è la stessa ovunque.

### 3.6.2 Il caso irrotazionale instazionario

Se la corrente è irrotazionale allora  $\boldsymbol{\omega} = 0$  ed esiste, su un dominio semplicemente connesso, un potenziale cinetico funzione del tempo e dello spazio tale che

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{r}, t).$$

L'equazione (3.6) diventa semplicemente

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

che dopo aver scambiato l'ordine di derivazione tra lo spazio e il tempo risulta essere

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \nabla \left( \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_3 = f(t),$$

dove la costante  $\text{cost}_3$  è la stessa *in tutto il campo di moto*, ovvero è indipendente dalla posizione  $\mathbf{r}$ , ma *dipende dal tempo*  $t$ .

### 3.6.3 Il caso irrotazionale e stazionario

Se la corrente oltre ad essere irrotazionale è anche stazionaria, allora l'equazione precedente diventa

$$\frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_4,$$

dove la costante  $\text{cost}_4$  è la stessa *in tutto il campo di moto*.



## Capitolo 4

# Alcune soluzioni esatte

Le equazioni di Navier-Stokes complete non ammettono soluzione in forma chiusa. Tuttavia, in alcuni casi di corrente molto semplice (tipicamente incomprimibile) e in presenza di una geometria semplice, si possono ottenere delle soluzioni esatte, in forma chiusa.

### 4.1 Corrente incomprimibile e parallela

Abbiamo già visto che per corrente incomprimibile si intende  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ . Se, inoltre, le differenze di temperatura sono trascurabili in modo che la Termodinamica possa essere trascurata eliminando la conservazione dell'energia (per cui la pressione non è più quella termodinamica) e in modo che le caratteristiche fisiche del fluido non dipendano dalla temperatura ma sia costanti (sia nello spazio che nel tempo), allora le tre equazioni della quantità di moto diventano

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Un'altra approssimazione può essere introdotta osservando che, in numerose geometrie, il vettore velocità è sempre orientato allo stesso modo (si pensi, ad esempio, alla corrente in un tubo). Chiamiamo *corrente parallela* una corrente per la quale il campo di velocità ha sempre la stessa direzione e lo stesso verso, mentre il modulo può cambiare. Se assumiamo che la corrente parallela sia allineata con la direzione  $x_1$ , allora  $\mathbf{u} = (u_1, 0, 0)$  essendo  $u_2 \equiv 0$  e  $u_3 \equiv 0$ . Dall'equazione di continuità è immediato osservare che segue  $\partial u_1 / \partial x_1 \equiv 0$ , mentre dalle equazioni della quantità di moto nelle direzioni  $x_2$  e  $x_3$  discende  $\partial p / \partial x_2 \equiv 0$  e  $\partial p / \partial x_3 \equiv 0$ , da cui  $p = p(x_1)$ , ovvero la pressione (e il suo gradiente) è funzione solo di  $x_1$ . Riassumendo, per una corrente incomprimibile, parallela in cui il vettore velocità è diretto come  $x_1$  si ha

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{l} u_2 \equiv 0 \\ u_3 \equiv 0 \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv 0 \\ \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{dp}{dx_1} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] \\ \frac{dp}{dx_2} \equiv 0 \\ \frac{dp}{dx_3} \equiv 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{continuità} \\ \text{quantità di moto in direzione } x_1 \\ \text{quantità di moto in direzione } x_2 \\ \text{quantità di moto in direzione } x_3, \end{array} \quad (4.1)$$

con

$$u_1 = u_1(x_2, x_3, t), \quad p = p(x_1).$$

Nel caso particolare di corrente *bidimensionale*, sparisce sia l'equazione della quantità di moto lungo  $x_3$ , sia la dipendenza di  $u$  da  $x_3$ .

## 4.2 Canale piano infinito: corrente di Couette e di Poiseuille

Consideriamo un fluido che si trovi tra un piano fermo (parete inferiore) e un piano che si muove a velocità costante  $U$  parallelamente alla parete inferiore e distante da essa  $h$ , come mostrato in figura 4.1. Per comodità usiamo la notazione  $u$ ,  $x$  e  $y$  (per le equazioni di Navier-Stokes

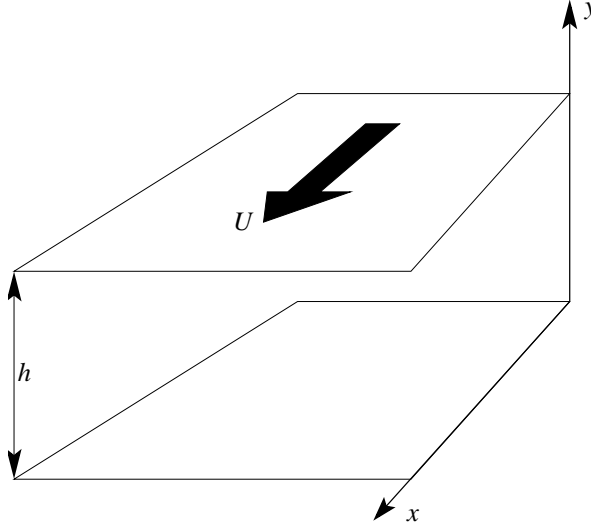


Figura 4.1: Corrente di Couette e di Poiseuille.

in forma cartesiana e scritte per esteso si veda l'appendice D.1). Non essendoci dipendenza dal tempo, la corrente è stazionaria. Inoltre, siccome non ci sono variazioni nella direzione  $z$  (corrente parallela), l'unica equazione di governo è semplicemente

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

con condizioni al contorno

$$u = 0 \quad \text{per} \quad y = 0, \quad u = U \quad \text{per} \quad y = h.$$

Siccome il gradiente di pressione non dipende da  $y$ , integrando due volte rispetto a  $y$  si ha

$$\frac{dp}{dx} y = \mu \frac{du}{dy} + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} = \mu u + c_1 y + c_2,$$

utilizzando la condizione  $u(0) = 0$  si ha immediatamente  $c_2 = 0$ , mentre  $u(h) = U$  implica

$$c_1 = \frac{1}{h} \left[ \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} - \mu U \right]. \quad \text{Pertanto, la soluzione esatta è}$$

$$u(y) = \frac{y}{h} U - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right).$$

Si osservi che si possono ottenere varie situazioni:

- in assenza sia di gradiente di pressione che di parete mobile, la velocità è identicamente nulla in quanto non ci sono forze esterne che mettono in moto il fluido
- in assenza di gradiente di pressione, se la parete superiore si muove con velocità  $U$  e quella inferiore è ferma, si ottiene un profilo di velocità lineare  $u(y) = Uy/h$  nota come *corrente di Couette*
- nel caso in cui entrambe le pareti siano ferme (canale piano infinito) e  $dp/dx \neq 0$ , si ottiene un profilo parabolico che raggiunge il massimo di velocità al centro del canale ( $y = h/2$ ), nota come *corrente di Poiseuille*
- nei casi in cui è presente sia la parete mobile che il gradiente di pressione, si ottengono situazioni intermedie.

### 4.3 Tubo a sezione circolare: corrente di Hagen-Poiseuille

Consideriamo una corrente parallela, incomprimibile e stazionaria in un tubo a sezione circolare di raggio  $R$ , come riportato in figura 4.2. Utilizzando le equazioni di Navier-Stokes in coordinate

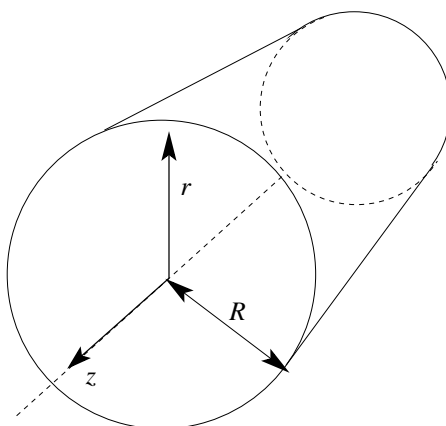


Figura 4.2: Corrente di Hagen-Poiseuille.

cilindriche (si veda l'appendice D.2 per le equazioni scritte per esteso) ed indicando con  $z$  la direzione dell'asse del tubo, con  $r$  la distanza radiale dall'asse e con  $u$  la componente radiale della velocità, l'equazione di bilancio si riduce a

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right),$$

con condizione al contorno

$$u = 0 \quad \text{per} \quad r = R.$$

Dopo aver osservato che

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right),$$

l'equazione da integrare diventa

$$r \frac{dp}{dz} = \mu \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right).$$

Integrando una volta si ha

$$\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} = \mu r \frac{du}{dr} + c_1 \iff \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} = \mu \frac{du}{dr} + \frac{c_1}{r},$$

integrando una seconda volta si ottiene

$$\frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} = \mu u + c_1 \log |r| + c_2.$$

Facendo uso del fatto che la velocità sull'asse del tubo ( $r = 0$ ) non può essere infinita, si ha che  $c_1 = 0$ , mentre la condizione al contorno  $u(R) = 0$  implica  $c_2 = \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz}$ . Pertanto, il profilo di velocità è semplicemente

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2),$$

dove  $dp/dz$  è noto. Questo è un profilo di tipo paraboloide che raggiunge il suo massimo sull'asse dove si ha

$$u_{\max} = u(0) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}.$$

Per ottenere la portata in volume, essendo  $dQ = u(r) dA = u(r) r d\theta dr$  basta svolgere l'integrale

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R dQ = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R u(r) r dr \right] d\theta = - \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) r dr \right] d\theta = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz}.$$

Dalla portata, dividendo per l'area della sezione  $\pi R^2$ , si ottiene la velocità media

$$\bar{u} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{2} u_{\max}.$$

Questa soluzione è stata ottenuta sotto l'ipotesi di corrente stazionaria e parallela. Si osserva sperimentalmente che essa è verificata quando il numero di Reynolds basato sul diametro e sulla velocità media  $Re = \frac{\bar{u}d}{\nu}$  è minore di un valore critico di circa 2300. Se  $Re > 2300$  la corrente non è più stazionaria e presenta un comportamento totalmente differente, imprevedibile, e prende il nome di corrente turbolenta:

$$\begin{aligned} Re = \frac{\bar{u}d}{\nu} < 2300 & \quad \text{corrente laminare} \\ Re = \frac{\bar{u}d}{\nu} > 2300 & \quad \text{corrente turbolenta.} \end{aligned}$$

## 4.4 Corrente lungo un piano inclinato

Consideriamo una corrente originata dall'azione del campo gravitazionale  $g$  su un fluido che giace su un piano inclinato, rispetto all'orizzontale, di un angolo  $\alpha$ , come riportato in figura 4.3. Se indichiamo con  $x$  la direzione parallela al piano inclinato e con  $y$  la direzione normale ad esso, allora le componenti del campo gravitazionale sono rispettivamente

$$g_x = g \sin \alpha, \quad g_y = -g \cos \alpha.$$

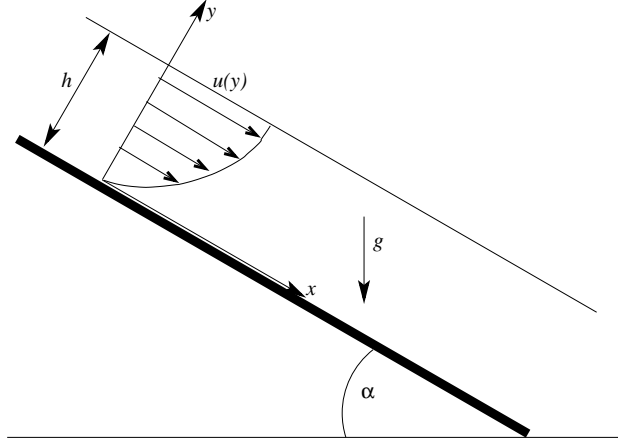


Figura 4.3: Corrente stazionaria con superficie libera lungo un piano inclinato.

Se  $u$  è la componente di velocità lungo  $x$  e  $v$  quella lungo  $y$ , sotto l'ipotesi che il campo di velocità non dipenda dalla coordinata  $x$  ( $u = u(y)$  e  $v = v(y)$ ), l'equazione di continuità comporta che

$$u = u(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(y) = \text{cost},$$

ma siccome per la *no-slip condition* alla parete  $v = 0$ , allora  $v \equiv 0$ . Questo implica che le due equazioni della quantità di moto lungo  $x$  e lungo  $y$  si riducano a

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} + g \sin \alpha \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \alpha. \end{aligned}$$

Si osservi che, a distanza  $h$  dal piano inclinato e perpendicolarmente ad esso, il fluido si trova in contatto con l'aria per cui si tratta di una *superficie libera* dove la pressione del fluido deve essere uguale a quella atmosferica  $p_{\text{atm}}$  e lo sforzo tangenziale è nullo in quanto l'interazione viscosa con l'aria può essere trascurata (assenza della no-slip condition). Per  $y = h$  valgono, quindi, le seguenti condizioni al contorno

$$p(x, h) = p_{\text{atm}} \quad \text{e} \quad \mu \frac{du}{dy}(h) = 0.$$

Integrando l'equazione della quantità di moto lungo  $y$  dalla parete ad una generica  $y$  si ottiene

$$p(x, y) = p(x, 0) - \rho g y \cos \alpha + f(x) = -\rho g y \cos \alpha + g(x),$$

ma siccome  $p(x, h) = p_{\text{atm}}$  si ha

$$p(x, h) = -\rho g h \cos \alpha + g(x) = p_{\text{atm}} \quad \Rightarrow \quad g(x) = p_{\text{atm}} + \rho g h \cos \alpha = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} \equiv 0.$$

Siccome la pressione è funzione solo di  $y$ , la prima equazione della quantità di moto e le relative condizioni al contorno diventano

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} = -g \sin \alpha \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dy}(h) = 0.$$

Integrando due volte si ottiene

$$u(y) = -\frac{g \sin \alpha}{2\nu} y^2 + c_1 y + c_2,$$

mentre dal soddisfacimento delle condizioni al contorno si ha

$$u(0) \Rightarrow c_2 = 0, \quad \frac{du}{dy}(h) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{g \sin \alpha}{\nu}.$$

Concludendo, la soluzione è

$$u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2h - y).$$

Si osservi che si tratta di un profilo parabolico che raggiunge la velocità massima sulla superficie libera ( $y = h$ )

$$u_{\max} = \frac{gh^2}{2\nu} \sin \alpha.$$

La portata in volume (per unità di apertura del piano inclinato) è

$$Q = \int_0^h u(y) dy = \frac{gh^3}{3\nu} \sin \alpha,$$

da cui la velocità media

$$\bar{u} = \frac{Q}{h} = \frac{gh^2}{3\nu} \sin \alpha = \frac{2}{3} u_{\max}$$

e lo spessore dello strato di fluido in funzione della portata e dell'inclinazione

$$h = \sqrt[3]{\frac{3Q\nu}{g \sin \alpha}}.$$

## 4.5 Corrente tra due cilindri coassiali contro-rotanti

Consideriamo due cilindri coassiali contro-rotanti di lunghezza  $L$ , quello interno di raggio  $R_1$  e velocità angolare  $\Omega_1$ , quello esterno di raggio  $R_2$  e velocità angolare  $\Omega_2$ , come mostrato in figura 4.4. Utilizzando un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ , essendo  $r$  la coordinata

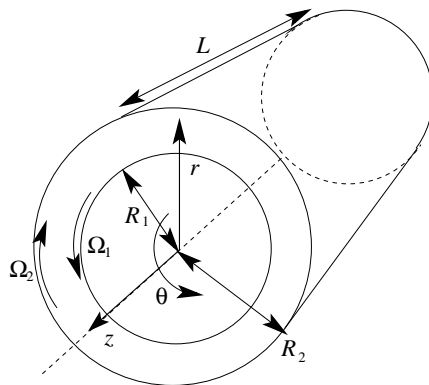


Figura 4.4: Corrente tra due cilindri coassiali contro-rotanti.

radiale  $r$  quella azimutale  $\theta$  e  $z$  quella lungo l'asse comune, e trascurando l'effetto del campo



gravitazionale terrestre, per ragioni di simmetria l'unica componente non nulla di velocità è in direzione tangenziale e la pressione varia solo in direzione radiale:

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = u(r), \quad p = p(r).$$

Sotto queste ipotesi, le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche (si veda la sezione D.2 per le equazioni scritte per esteso) si riducono a

$$\begin{aligned} -\frac{u^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \\ 0 &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right), \end{aligned}$$

dove la prima equazione esprime l'equilibrio tra la forza centrifuga e il gradiente di pressione, mentre la seconda, integrata due volte, porta a

$$u(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}.$$

Le due costanti di integrazioni si determinano utilizzando le condizioni al contorno di adesione alla parete dei cilindri

$$\begin{cases} u(R_1) = R_1 \Omega_1 \\ u(R_2) = R_2 \Omega_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \\ c_2 = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \end{cases}$$

La soluzione è, quindi,

$$u(r) = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Da questa espressione si possono ottenere tre casi particolari.

- $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ : entrambi i cilindri ruotano con la stessa velocità angolare  $\Omega$ . Il moto non è altro che un moto rigido con velocità angolare  $\Omega$ :

$$u(r) = \Omega r.$$

- $\Omega_1 = 0, \Omega_2 \neq 0$ : cilindro interno fermo, cilindro esterno rotante, misura della viscosità di un fluido. Per misurare la viscosità di un fluido si utilizza un apparato sperimentale formato da cilindri rotanti coassiali, dove quello interno è fermo, e dove viene misurato il momento torcente necessario a mantenere in rotazione a velocità angolare costante quello esterno (viscosimetro di Couette-Hatschek). Ponendo  $\Omega_1 = 0$ , la velocità tangenziale diventa

$$u(r) = -\frac{R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \left[ r - \frac{R_1^2}{r} \right],$$

da cui si ricava l'espressione dello sforzo tangenziale valutato sulla superficie del cilindro esterno

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right) \right]_{r=R_2} = -\mu \frac{R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \left[ r \frac{2R_1^2}{r^3} \right]_{r=R_2} = -2\mu \frac{R_1^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Questo sforzo dà origine ad un momento resistente infinitesimo  $d\mathcal{M}_r = R_2 \tau_{r\theta} R_2 d\theta d\ell$  che, integrato sulla lunghezza totale del cilindro  $L$  e per  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , deve bilanciare il momento torcente  $\mathcal{M}_t$  applicato allo stesso cilindro esterno per mantenerlo in rotazione a velocità costante. Il momento resistente totale risulta, pertanto,

$$\mathcal{M}_r = \int_0^L \int_0^{2\pi} R_2^2 \tau_{r\theta} d\theta d\ell = -4\pi\mu L \frac{R_1^2 R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Imponendo che  $\mathcal{M}_r$  e  $\mathcal{M}_t$  siano uguali (in valore assoluto), si ricava la misura della viscosità:

$$|\mathcal{M}_r| = |\mathcal{M}_t| \quad \Rightarrow \quad 4\pi\mu L \frac{R_1^2 R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} = \mathcal{M}_t \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\mathcal{M}_t (R_2^2 - R_1^2)}{4\pi L R_1^2 R_2^2 \Omega_2}.$$

- $\Omega_2 = 0$ ,  $R_2 \rightarrow \infty$ : cilindro rotante immerso in una corrente in quiete. Si assume che il cilindro esterno sia in quiete ( $\Omega_2 = 0$ ) e si assume che il raggio del cilindro esterno sia molto maggiore di quello interno ( $R_2 \rightarrow \infty$ ) ottenendo il campo di moto:

$$u(r) = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[ -\frac{R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \right] = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}.$$

Si osservi che se indichiamo con  $v = \Omega_1 R_1$  la velocità tangenziale di un punto della superficie del cilindro rotante, allora la cicuitazione di  $v$  (nota anche come *circolazione*, si veda l'espressione (3.2)) lungo la circonferenza centrata sull'asse del cilindro e di raggio  $R_1$  è

$$\Gamma = 2\pi R_1 v = 2\pi R_1^2 \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 R_1^2 = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

ossia la velocità indotta da un cilindro rotante è

$$u(r) = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

che equivale al campo di moto generato da un vortice puntiforme di circolazione  $\Gamma$ .

## Capitolo 5

# Dinamica della vorticità

Nella descrizione di una corrente spesso può essere utile separare il campo di moto in regioni nelle quali la vorticità è nulla (o quantomeno così piccola da poter essere trascurabile) e in altre in cui gli effetti della vorticità non sono trascurabili. In questo capitolo ci occupiamo proprio delle regioni in cui la vorticità è non nulla.

### 5.1 Alcune definizioni

- **Vorticità.** Chiamiamo *vorticità*, e la indichiamo con il simbolo  $\boldsymbol{\omega}$ , il rotore del vettore velocità:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_i = \varepsilon_{ilm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l}.$$

Si osservi che, siccome la divergenza di un rotore è identicamente nulla, a seguito della definizione di vorticità si ha

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0,$$

ovvero la vorticità è sempre solenoidale. Una corrente *rotazionale*, a vorticità non nulla, si caratterizza per il fatto che gli elementi di fluido ruotano su se stessi (oltre che traslare rigidamente e deformarsi) mentre in una corrente *irrotazionale* gli elementi di fluido non ruotano e, al più, traslano rigidamente o si deformano. Infatti, la vorticità  $\boldsymbol{\omega}$  è pari al doppio della velocità angolare locale  $\boldsymbol{\Omega}$  di un elemento di fluido,

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}.$$

Per dimostrarlo espandiamo la velocità nell'intorno di un punto  $\mathbf{r}_0$  tramite la formula di Taylor arrestata al prim'ordine come

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Longleftrightarrow u_i(\mathbf{r}) \approx u_i(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{r}_0)(x_j - x_{0j}), \quad i = 1, 2, 3$$

dove il tensore doppio  $\nabla \mathbf{u}$  può essere scomposto in una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = S_{ij} + \xi_{ij} = (\mathbf{S})_{ij} + (\boldsymbol{\xi})_{ij}$$

in modo da poter riscrivere l'espansione della velocità come

$$u_i(\mathbf{r}) \approx u_i(\mathbf{r}_0) + S_{ij}(\mathbf{r}_0)(x_j - x_{0j}) + \xi_{ij}(\mathbf{r}_0)(x_j - x_{0j}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Vediamo quanto vale il prodotto tra il tensore  $\boldsymbol{\xi}$  e il vettore  $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ . Dalla definizione di  $\boldsymbol{\omega}$ , premoltiplicando per  $\varepsilon_{ijk}$  e tenendo conto dell'identità (A.9), si ha

$$\varepsilon_{ijk}\omega_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\frac{\partial u_m}{\partial x_l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 2\xi_{kj},$$

che implica

$$\xi_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_i,$$

per cui il prodotto tensore-vettore  $\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}$  dà il vettore

$$\boldsymbol{\xi}\mathbf{y} = \mathbf{e}_k\xi_{kj}y_j = \frac{1}{2}\mathbf{e}_k\varepsilon_{ijk}\omega_i y_j = \frac{1}{2}\mathbf{e}_k\varepsilon_{kij}\omega_i y_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Questo permette di riscrivere l'approssimazione al prim'ordine della velocità in  $\mathbf{r}$  come

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Per capire il contributo di ciascun termine, si osservi che la velocità in un punto  $\mathbf{r}$  dovuta al moto rigido di roto-traslazione che avviene con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$  rispetto ad un punto  $\mathbf{r}_0$  che trasla alla velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$  è

$$\mathbf{u}^{\text{rig}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

per cui confrontando  $\mathbf{u}^{\text{rig}}(\mathbf{r})$  con l'approssimazione al prim'ordine si ricava che l'atto di moto locale è la somma di una roto-traslazione rigida e di una deformazione. In particolare vale l'equivalenza

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0).$$

- **Circolazione.** Presa una curva chiusa e orientata  $C$ , la *circolazione* è la circuitazione del vettore velocità  $\mathbf{u}$  lungo  $C$ :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell.$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità, il teorema di Stokes (B.2) assicura che

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

dove  $S$  è la superficie che ha per contorno la curva  $C$  ( $C = \partial S$ ), e i vettori  $\hat{\mathbf{t}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  sono rispettivamente i versori tangente alla linea chiusa  $C$  e normale alla superficie  $S$ . Pertanto, la circolazione non è altro che l'integrale di superficie della vorticità

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

- **Linea vorticoso.** Una *linea vorticoso*  $\mathcal{L}$  è una linea tangente in ogni suo punto al vettore vorticità, ovvero

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{t}} d\mathcal{L} = 0, \quad (5.1)$$

essendo  $\hat{\mathbf{t}}$  il versore tangente alla curva  $\mathcal{L}$ . Si osservi che, siccome  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , le linee vorticoso o sono chiuse su se stesse (se vanno all'infinito la richiusura su se stesse avviene all'infinito), oppure terminano su superfici solide o su superfici libere. In altre parole, non ci possono essere sorgenti o pozzi di vorticità all'interno di una corrente, qualsiasi essa sia.

- **Tubo vorticoso.** Immaginiamo un cammino chiuso  $C$  nel campo di moto, essendo  $C$  riducibile ad un punto senza passare al di fuori del campo di moto stesso (dominio semplicemente connesso). Per ogni punto di questa curva passa una linea vorticoso: chiamiamo *tubo vorticoso* il volume (infinito) racchiuso dall'insieme di queste linee vorticoso. Con

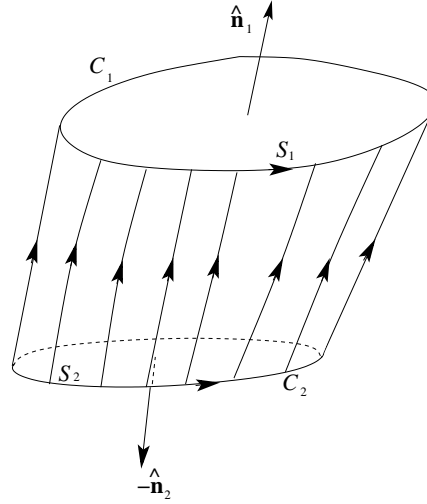


Figura 5.1: Volume finito di tubo vorticoso, le linee orientate indicano le linee vorticoso tangenti al vettore vorticità.

riserimento alla figura 5.1, si osservi che se si prende un volume *finito*  $V$  di un tubo vorticoso che abbia come “superfici di base”  $S_1$  e  $S_2$  (che hanno come normali esterne rispettivamente  $\hat{\mathbf{n}}_1$  e  $-\hat{\mathbf{n}}_2$  e come contorno rispettivamente le curve orientate  $C_1$  e  $C_2$ ) e come “superficie laterale”  $S_\ell$  la superficie del tubo vorticoso stesso, si ha

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 + \int_{S_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell dS_\ell = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2,$$

essendo  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_\ell$  tra loro perpendicolari a seguito della definizione di tubo vorticoso e quindi  $\int_{S_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell dS_\ell \equiv 0$ . Per il teorema della divergenza

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV \equiv 0$$

in quanto  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , per cui

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2,$$

ovvero il *flusso di vorticità attraverso una qualsiasi sezione  $S$  di un tubo vorticoso è costante per qualsiasi curva  $C$  che circonda una sola volta il tubo vorticoso* (primo teorema di Helmholtz, si veda la sezione 5.6.1) e che sia il contorno della stessa superficie aperta  $S$ :

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell = \Gamma \quad (5.2)$$

Questo integrale è proprio la *circolazione* lungo  $C$  e prende il nome di *intensità* o *forza* del tubo vorticoso.

Una piccola modifica al ragionamento appena seguito permette di dimostrare che *un tubo vorticoso di intensità  $\Gamma \neq 0$  non può terminare nel dominio* (secondo teorema di Helmholtz, si veda anche la sezione 5.6.2). Infatti, sempre con riferimento alla figura 5.1, supponiamo *per assurdo* che esso termini appena prima della superficie  $S_1$  racchiusa dalla curva  $C_1$ . Allora il flusso della vorticità attraverso  $S_1$  è nullo e si ha

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 + \int_{S_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell dS_\ell = - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2,$$

essendo  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_\ell$  tra loro perpendicolari a seguito della definizione di tubo vorticoso e quindi  $\int_{S_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell dS_\ell \equiv 0$  e  $\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = 0$  in quanto la superficie  $S_1$  non è attraversata dal tubo vorticoso. Seguendo lo stesso ragionamento fatto in precedenza, per il teorema della divergenza

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV \equiv 0$$

in quanto  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ , e quindi

$$- \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 = 0$$

che equivale a dire

$$\Gamma = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 = 0.$$

Questo è in contraddizione con l'ipotesi iniziale che l'intensità del tubo vorticoso sia  $\Gamma \neq 0$ , pertanto un tubo vorticoso non può terminare o iniziare all'interno del dominio.

- **Filamento vorticoso.** Un *filamento vorticoso* è un tubo vorticoso per il quale l'area della sezione del tubo tende a zero. In altre parole filamento vorticoso e linea vorticoso coincidono. Questa situazione non è affatto rara ed approssima tutti quei casi in cui la vorticità è localizzata nelle vicinanze di una linea nel campo di moto e trascurabile altrove come succede per i tornado o per i vortici d'estremità delle ali degli aerei. Si osservi che, nonostante il limite per la sezione che tende a zero, l'intensità del filamento vorticoso è costante in ogni sezione e pari a  $\Gamma$ .
- **Anello vorticoso.** Un *anello vorticoso* è un tubo vorticoso a sezione circolare costante chiuso su se stesso in modo da formare un anello di raggio costante (in pratica un toro).
- **Superficie vorticoso.** Se si accostano l'uno accanto all'altro tanti filamenti vorticosi si ottiene una *superficie vorticoso* (non necessariamente piana). Si osservi che le superfici vorticoso rappresentano delle discontinuità all'interno della corrente (si pensi a due profili di velocità paralleli, bidimensionali e uniformi, l'uno sopra l'altro, per i quali la vorticità è nulla ovunque tranne che all'interfaccia tra le due correnti che è proprio una superficie vorticoso).

## 5.2 Equazione per la vorticità nel caso generale

Anziché concentrarci su  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  consideriamo la vorticità specifica  $\boldsymbol{\omega}/\rho$  e ricaviamo un'equazione per la sua dinamica valida nel caso generale. Se consideriamo una componente  $\omega_i/\rho$ , la sua derivata sostanziale è

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega_i}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\omega_i}{Dt} - \frac{\omega_i}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{D\omega_i}{Dt} + \frac{\omega_i}{\rho} \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dell'equazione di continuità (2.13). La prima parte del termine di destra è facilmente ottenibile calcolando il rotore dell'equazione (2.14) divisa per  $\rho$ . Riscriviamo l'equazione della quantità di moto per la  $k$ -esima componente

$$\frac{Du_k}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) + g_k, \quad (5.3)$$

ed osserviamo che, ricordando i passaggi fatti per arrivare alla forma di Crocco, il termine di sinistra della (5.3) è, in forma vettoriale,

$$\mathbf{e}_k \frac{Du_k}{Dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u},$$

per cui prendendone il rotore il termine gradiente sparisce:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) &= \nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right] \\ &= \nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right] \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Ricorrendo al simbolo di Levi-Civita (si veda l'appendice A.3) si può scrivere la componente  $i$ -esima di  $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$  in modo estremamente compatto come

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varepsilon_{klm} \omega_l u_m}{\partial x_j} \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial \omega_l u_m}{\partial x_j} \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial \omega_l u_m}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial \omega_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j u_i}{\partial x_j} \\ &= \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \\ &= \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che  $\frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} = 0$  in quanto la divergenza di un rotore è nulla (il campo di vorticità è solenoidale). In conclusione, la componente  $i$ -esima del termine di sinistra del rotore dell'equazione (5.3) è

$$\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \right]_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{D\omega_i}{Dt} + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

mentre la componente  $i$ -esima del termine di destra del rotore dell'equazione (5.3) è, dopo aver osservato nuovamente che il rotore di un gradiente è nullo,

$$\varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

Pertanto, il rotore dell'equazione (5.3) è

$$\frac{D\omega_i}{Dt} + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j},$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} \frac{D\omega_i}{Dt} = & \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \\ & \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

In conclusione, da

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega_i}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\omega_i}{Dt} + \frac{\omega_i}{\rho} \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

dopo aver osservato che nella somma dei due contributi si elide il termine  $\frac{\omega_i}{\rho} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ , si ottiene l'equazione per componenti in forma tensoriale

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega_i}{\rho} \right) = & \frac{\omega_j}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \\ & \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Si osservi che, se con  $D$  indichiamo il tensore degli sforzi viscosi che ha per componenti  $d_{ij}$ , come definito dall'equazione (1.3), allora

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) = \frac{\partial d_{km}}{\partial x_m} = \nabla \cdot D,$$

ed il termine viscoso può essere riscritto in forma vettoriale come

$$\mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) = \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right).$$

Questo consente di scrivere l'equazione generica per la vorticità in forma vettoriale compatta

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \underbrace{\left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}}_{\text{"stretching" e "tilting"}} + \underbrace{\frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p}_{\text{termine barotropico}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right)}_{\text{termine diffusivo}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g}}_{\text{forze di volume}} \quad (5.5)$$

Il primo termine di destra è detto di *stretching e tilting*, il secondo è detto *barotropico*, il terzo è detto *diffusivo*, il quarto è dovuto alle forze di volume ed è presente solo se esse *non sono conservative*. Il significato di questi termini è spiegato più nel dettaglio nella sezione 5.4.



### 5.3 Casi particolari

#### 5.3.1 Corrente a viscosità e densità costanti

Nel caso particolare di corrente caratterizzata da viscosità e densità costanti ( $\mu(\mathbf{r}, t) = \bar{\mu}$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}$ ), l'equazione di continuità assicura

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_s}{\partial x_s} = 0 \quad (\text{corrente incomprimibile}).$$

D'altra parte, densità costante implica  $\nabla \rho = 0$  ed il conseguente annullamento del termine barotropico  $\nabla \rho \times \nabla p$ , mentre  $\mu$  e  $\rho$  (essendo costanti) possono essere portate dentro o fuori dalle derivate, consentendo di riscrivere il termine viscoso della (5.5) come

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) &= \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\mu}{\rho} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \right) \\ &= \nu \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right) \\ &= \nu \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \right) \right) \\ &= \nu \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) \right) \\ &= \nu \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) \\ &= \nu \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{u} \right) \right) = \nu \nabla^2 \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Sotto le ipotesi di viscosità e densità costanti, quindi, la (5.5) si riduce a

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g},$$

che dopo aver moltiplicato per  $\rho$  (che è costante e quindi non risente delle derivate) diventa

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{g}. \quad (5.6)$$

#### 5.3.2 Corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative

Le tre ipotesi di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative assicurano l'annullamento dei seguenti termini.

- Corrente barotropica: il gradiente di densità e di pressione sono paralleli (si veda l'equazione (3.1)) e quindi

$$\frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p = 0.$$

- Corrente non viscosa:  $\mu = 0$  implica che  $D = 0$  e quindi

$$\frac{1}{\rho} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) = 0.$$

- Forze esterne conservative ( $\mathbf{g} = \nabla \mathcal{F}$ ) implica che

$$\frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g} = 0.$$

Pertanto, sotto le ipotesi di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative l'equazione (5.5) si riduce a

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (5.7)$$

Si osservi che la (5.7) vale per una corrente ideale (che è barotropica e non viscosa) se il campo di forze di volume è conservativo.

## 5.4 Dinamica della vorticità: 3D vs 2D

Il termine detto di “stretching” e “tilting” nell'equazione generale per la dinamica della vorticità (5.5), e presente anche nella versione (5.6) per correnti a densità e viscosità costanti, gioca un ruolo solo nel caso *tridimensionale*. Per dimostrarlo, tralasciando la densità, riscriviamo il

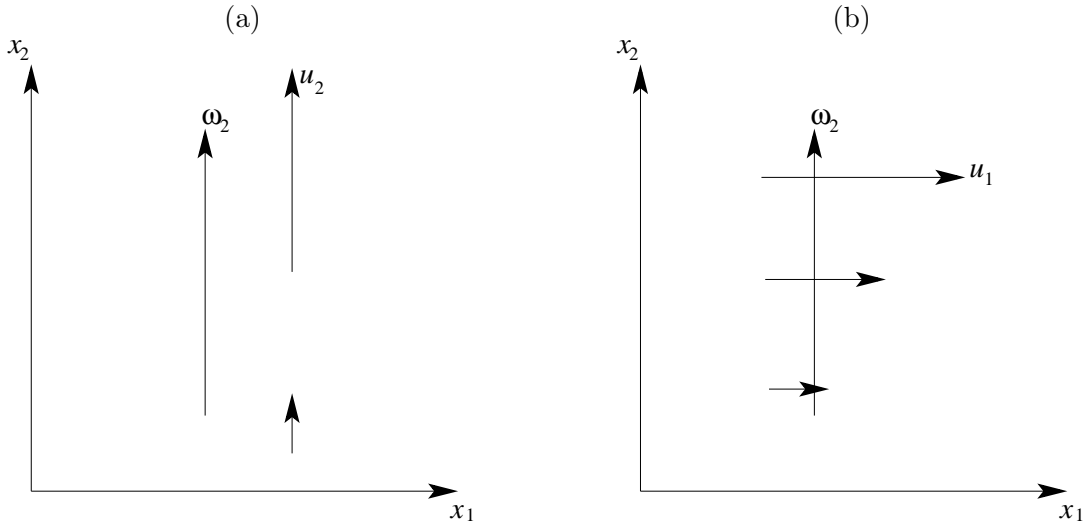


Figura 5.2: Meccanismo di “stretching” e “tilting” dovuto all’effetto dei gradienti di velocità. (a) Stretching: vorticità  $\omega_2$ , gradiente di velocità  $\partial u_2 / \partial x_2$ . (b) Tilting: vorticità  $\omega_2$ , gradiente di velocità  $\partial u_1 / \partial x_2$ .

termine in questione  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  in notazione tensoriale

$$\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Con riferimento alla figura 5.2, si possono distinguere 2 casi:

- (a)  $i = j$ . Prendiamo  $i = j = 2$ : la variazione di velocità  $u_2$  lungo  $x_2$  provoca uno stiramento della componente  $\omega_2$  della vorticità, senza alcun cambiamento della direzione della vorticità. Questo stiramento, a causa della conservazione del momento angolare, provoca un aumento dell'intensità di  $\omega_2$  (o diminuzione di  $\omega_2$  nel caso ci sia compressione anziché stiramento). Il caso  $i = j$  dà quindi origine ad un meccanismo di *autoamplificazione di vorticità lungo una direzione a causa dei gradienti di velocità nella direzione stessa, senza necessità di sorgenti esterne*.
- (b)  $i \neq j$ . Prendiamo  $i = 1$  e  $j = 2$ : a causa di  $\partial u_1 / \partial x_2$ , ovvero della variazione della componente orizzontale di velocità  $u_1$  lungo la direzione verticale  $x_2$ , la componente di vorticità lungo la direzione  $x_2$  ruota causando una ridistribuzione della vorticità anche lungo la direzione  $x_1$ . Questo avviene lungo ogni direzione, per cui il caso  $i \neq j$  è associato ad una *ridistribuzione di vorticità nelle diverse direzioni* causato dai gradienti di velocità.

Nel caso bidimensionale, siccome  $\omega_1 = \omega_2 = u_3 = \partial / \partial x_3 = 0$ , il termine di “stretching” e “tilting” è identicamente nullo ed i due meccanismi sopra descritti sono del tutto assenti.

## 5.5 Il teorema di Kelvin

Sia  $\mathcal{C}_t$  una linea chiusa *materiale*, ossia una linea chiusa che si deforma nel tempo spostandosi alla velocità della corrente  $\mathbf{u}$ . Definiamo circolazione del vettore velocità  $\mathbf{u}$  al tempo  $t$  e la denotiamo con  $\Gamma(t)$ , l'integrale di linea dipendente dal tempo

$$\Gamma(t) = \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell = \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

dove  $\mathcal{S}_t$  è la superficie che ha per contorno la curva  $\mathcal{C}_t$  ( $\mathcal{C}_t = \partial \mathcal{S}_t$ ), e i vettori  $\hat{\mathbf{t}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  sono rispettivamente i versori tangente alla linea chiusa  $\mathcal{C}_t$  e normale alla superficie  $\mathcal{S}_t$ . Dimostriamo che nel caso di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative, si ha

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (5.8)$$

noto come *Teorema di Kelvin*.

**Teorema di Kelvin.** *La circolazione della velocità, nel caso di corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative, non varia quando la si calcola lungo una linea chiusa che si muove con la corrente.*

Per dimostrarlo è necessario calcolare la derivata rispetto al tempo di  $\Gamma(t)$ , ossia di un integrale su una linea chiusa che si muove nel tempo alla velocità  $\mathbf{u}$ . Similmente al caso della derivata rispetto al tempo dell'integrale su un volume che si muoveva alla velocità  $\mathbf{u}$ , esiste un teorema che assicura

$$\frac{d}{dt} \left( \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \right) = \oint_{\mathcal{C}_t} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell + \oint_{\mathcal{C}_t} ((\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell.$$

Nel nostro caso esso diventa

$$\frac{d}{dt} \left( \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \right) = \oint_{\mathcal{C}_t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell + \oint_{\mathcal{C}_t} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell.$$

Ricordando che, grazie alla (3.4), si ha

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right),$$

che la circuitazione di un gradiente lungo una linea chiusa  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$  è nulla essendo  $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$  e quindi

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(\nabla\varphi) = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \nabla\varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0,$$

ed osservando che l'equazione della quantità di moto (3.3) specializzata al caso di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative ( $\exists \mathcal{F} \mid \mathbf{g} = -\nabla\mathcal{F}$ ) si riduce a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla\mathcal{P} - \nabla\mathcal{F},$$

dalla definizione di circolazione si ottiene che la sua derivata temporale è

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell + \oint_{\mathcal{C}_t} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \\ &= \oint_{\mathcal{C}_t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell + \oint_{\mathcal{C}_t} \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \\ &= \oint_{\mathcal{C}_t} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \\ &= - \oint_{\mathcal{C}_t} (\nabla\mathcal{P}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell - \oint_{\mathcal{C}_t} (\nabla\mathcal{F}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \\ &= 0, \end{aligned}$$

da cui il teorema di Kelvin (5.8).

## 5.6 Teoremi di Helmholtz e loro significato geometrico

I tre teoremi di Helmholtz discendono in parte da considerazioni puramente cinematiche, in parte dal teorema di Kelvin (5.8) ricavato per una corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative.

### 5.6.1 Primo teorema di Helmholtz

*L'intensità di un tubo vorticoso è costante lungo la sua lunghezza.*

La dimostrazione, riportata nella sezione 5.1 e riassunta nell'equazione (5.2), si basa sul fatto che la vorticità  $\boldsymbol{\omega}$  è solenoidale e, quindi, il flusso del vettore vorticità attraverso una superficie chiusa è identicamente nullo. Di conseguenza, il flusso della vorticità attraverso la sezione di un tubo vorticoso è costante e, grazie al teorema di Stokes, la circuitazione del vettore velocità lungo una linea chiusa che è la frontiera della sezione è costante. Geometricamente, il teorema assicura che la vorticità media in ogni sezione del tubo vorticoso sia inversamente proporzionale alla sezione del tubo vorticoso in quanto il loro prodotto, che è l'intensità del tubo vorticoso, deve mantenersi costante. Si osservi che questo equivale alla conservazione del momento angolare in assenza di momenti esterni.

### 5.6.2 Secondo teorema di Helmholtz

*Un tubo vorticoso non può iniziare o terminare all'interno del dominio, di conseguenza può solo chiudersi su se stesso oppure iniziare/terminare su una superficie solida.*

La dimostrazione, riportata nella sezione 5.1 si basa sempre sul fatto che la vorticità  $\omega$  è solenoidale e, quindi, il flusso del vettore vorticità attraverso una superficie chiusa è identicamente nullo: se il tubo terminasse nel dominio, una superficie chiusa che ne racchiude l'estremo darebbe flusso di vorticità nullo e, quindi, anche l'intensità del tubo vorticoso dovrebbe essere nulla.

### 5.6.3 Terzo teorema di Helmholtz

*Per una corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative, se inizialmente la circolazione (e quindi la vorticità) è nulla, allora rimarrà nulla per sempre.*

Questo teorema discende immediatamente dal teorema di Kelvin (5.8) ed equivale a dire che elementi di fluido inizialmente irrotazionali rimangono tali per sempre (sotto le ipotesi del teorema).



## Capitolo 6

# Lo strato limite

Per strato limite si intende una regione, in prossimità di una parete, dove la velocità passa dal valore nullo (alla parete, a causa della condizione di adesione dovuta alla presenza della viscosità) al valore della corrente esterna. In questo sottile strato supponiamo che le forze di origine viscosa (la parte delle equazioni di Navier-Stokes che moltiplica la viscosità) abbiano lo stesso ordine di grandezza delle forze d'inerzia (la parte non lineare delle equazioni di Navier-Stokes).

### 6.1 Teoria dello strato limite di Prandtl

Consideriamo una lamina piana semi-infinita investita da una corrente incomprimibile (a densità e viscosità costanti,  $\rho = \rho_0$  e  $\mu = \mu_0$ ), stazionaria e bidimensionale, parallela alla lamina stessa, come rappresentato in figura 6.1.

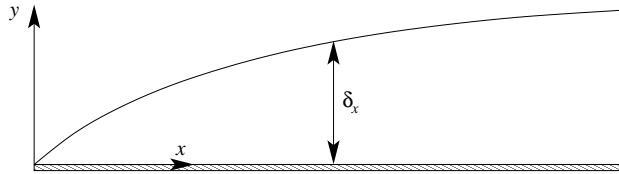


Figura 6.1: Strato limite su una lamina piana *semi-infinita*.

Le equazioni di Navier-Stokes si riducono a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),\end{aligned}$$

mentre per le condizioni al contorno assumiamo che la geometria sia perfettamente simmetrica rispetto alla lamina, che valga la condizione di adesione alla parete  $\mathbf{u}(x_{\text{lamina}}, 0) = 0$ , che la corrente a monte della lamina sia  $\mathbf{u}^{\text{monte}}$  e che abbastanza lontano dalla lamina (in direzione

perpendicolare alla lamina stessa) la corrente sia quella esterna  $\mathbf{u}^{\text{est}}$ . Questo implica

|   |   |             |                     |
|---|---|-------------|---------------------|
| $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$ | $v(x, 0) = 0$                             | $x < 0$     | simmetria           |
| $u(x, 0) = 0$                             | $v(x, 0) = 0$                             | $x > 0$     | no-slip condition   |
| $u(x, \infty) = u^{\text{est}}(x)$        | $v(x, \infty) = v^{\text{est}}(x) = 0$    | $\forall x$ | condizione esterna  |
| $u(-\infty, y) = u^{\text{monte}}(y)$     | $v(-\infty, y) = v^{\text{monte}}(y) = 0$ | $y > 0$     | condizione a monte. |

Cerchiamo di stimare l'ordine di grandezza dei termini presenti nelle equazioni di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di strato limite, ovvero sotto l'ipotesi che l'ordine di grandezza delle forze viscosi sia paragonabile a quello delle forze d'inerzia. Nel sistema di riferimento  $xOy$  orientato come in figura, avente l'asse  $x$  coincidente con la lamina semi-infinita e l'origine nel bordo d'attacco, sia  $\mathcal{U}$  una *velocità caratteristica dello strato limite* in direzione  $x$  (per esempio la velocità della corrente esterna) e  $\mathcal{V}$  una *velocità caratteristica dello strato limite* in direzione  $y$ . Essendo la lamina semi-infinita, non ci sono *lunghezze caratteristiche dello strato limite* lungo la direzione  $x$ , mentre lo spessore dello strato limite  $\delta_x$  è una *lunghezza caratteristica dello strato limite* in direzione  $y$ . Come stima dello spessore dello strato limite a distanza  $x$  dal bordo d'attacco della lamina si potrebbe scegliere la distanza  $y$  dalla parete dove la velocità raggiunge il 99% della velocità esterna, i.e.  $u(x, y) = 0.99 u^{\text{est}}(x)$ . Ipotizziamo che lo strato limite sia una zona piuttosto "sottile" in corrispondenza della parete; questo implica

$$\delta_x \ll x.$$

Chiaramente questa ipotesi non è soddisfatta nell'intorno del bordo d'attacco, dove  $\delta_x$  è paragonabile a  $x$ . Definite queste grandezze caratteristiche dello strato limite, possiamo stimare l'ordine di grandezza dei vari termini che compaiono nelle equazioni di Navier-Stokes. In particolare, per l'equazione di continuità si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\mathcal{U}}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\mathcal{V}}{\delta_x},$$

da cui

$$\frac{\mathcal{U}}{x} + \frac{\mathcal{V}}{\delta_x} \sim 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} \sim \frac{\delta_x}{x} \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} \ll \mathcal{U} \quad \text{essendo} \quad \frac{\delta_x}{x} \ll 1,$$

il che significa che la corrente è *quasi parallela* alla lamina nel senso che la componente lungo  $y$  è molto piccola (anche se non nulla a causa della presenza della lamina stessa). Per l'equazione della quantità di moto in direzione  $x$  i termini delle forze d'inerzia hanno ordine

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mathcal{U} \frac{\mathcal{U}}{x} = \frac{\mathcal{U}^2}{x} \quad \text{e} \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \mathcal{V} \frac{\mathcal{U}}{\delta_x} = \frac{\delta_x}{x} \mathcal{U} \frac{\mathcal{U}}{\delta_x} = \frac{\mathcal{U}^2}{x},$$

pertanto

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\mathcal{U}^2}{x}.$$

Per i termini viscosi si ha

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \sim \nu \left( \frac{\mathcal{U}}{x^2} + \frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2} \right) \sim \nu \frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2}$$

essendo, per ipotesi,  $\delta_x \ll x$ . Siccome lo strato limite è quella regione in cui le forze viscosi sono dello stesso ordine di grandezza delle forze d'inerzia, imponiamo

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$



da cui

$$\frac{\mathcal{U}^2}{x} \sim \nu \frac{\mathcal{U}}{\delta_x^2} \Rightarrow \nu \sim \frac{\mathcal{U} \delta_x^2}{x} \quad \text{e} \quad \delta_x^2 \sim \frac{\nu x}{\mathcal{U}} \iff \delta_x \sim \sqrt{\frac{\nu x}{\mathcal{U}}}.$$

Siccome  $\nu$  e  $\mathcal{U}$  sono *costanti*, allora lo spessore di strato limite  $\delta_x$  ha una dipendenza di tipo  $\sqrt{x}$  dalla distanza dal bordo d'attacco, come inizialmente ipotizzato in figura 6.1. Introducendo il *numero di Reynolds* basato sulla distanza dal bordo d'attacco

$$\text{Re}_x = \frac{\mathcal{U}x}{\nu},$$

si ha

$$\frac{\delta_x}{x} \sim \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\nu x}{\mathcal{U}}} = \sqrt{\frac{\nu}{\mathcal{U}x}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

ovvero

$$\frac{\delta_x}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

che evidenzia il fatto che l'ipotesi  $\delta_x \ll x$  è tanto più vera quanto più il numero di Reynolds è *elevato*.

Analizzando i termini convettivi dell'equazione della quantità di moto lungo  $y$  si ha

$$u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \mathcal{U} \frac{\mathcal{V}}{x} \sim \mathcal{U} \frac{\delta_x}{x} \mathcal{U} \frac{1}{x} = \mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2} \quad \text{e} \quad v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \mathcal{V} \frac{\mathcal{V}}{\delta_x} \sim \frac{\delta_x}{x} \mathcal{U} \frac{\delta_x}{x} \mathcal{U} \frac{1}{\delta_x} = \mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2},$$

da cui

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2},$$

mentre per i termini viscosi, essendo  $\delta_x \ll x$ , si ottiene

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \sim \nu \left( \frac{\mathcal{V}}{x^2} + \frac{\mathcal{V}}{\delta_x^2} \right) \sim \nu \frac{\mathcal{V}}{\delta_x^2} \sim \frac{\mathcal{U} \delta_x^2}{x} \mathcal{U} \frac{\delta_x}{\delta_x^2} \frac{1}{\delta_x^2} = \mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2},$$

che conferma che *anche per l'equazione della quantità di moto lungo  $y$*  i termini viscosi sono dello stesso ordine di grandezza dei termini convettivi. Questa equazione si riduce, quindi, a

$$\mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim 0,$$

da cui si deduce che  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$  o è di ordine  $\mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2}$  o di ordine inferiore (e quindi trascurabile rispetto ad esso). Si osservi che l'ordine di grandezza dell'equazione della quantità di moto lungo  $y$  è  $\delta_x/x$  di quello dell'equazione lungo  $x$ , e quindi più piccolo, essendo

$$\mathcal{U}^2 \frac{\delta_x}{x^2} = \frac{\delta_x}{x} \frac{\mathcal{U}^2}{x} \ll \frac{\mathcal{U}^2}{x}.$$

Pertanto, confrontando le derivate della pressione nelle due equazioni della quantità di moto, si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\delta_x}{x} \frac{\partial p}{\partial x} \ll \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

il che significa che la pressione, all'interno dello strato limite, è una *funzione essenzialmente di  $x$* , ovvero

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(x).$$

Siccome la pressione non varia lungo  $y$ , il suo valore a  $x$  fissato è uguale al valore della *corrente esterna*,

$$p(x) = p^{\text{est}}(x).$$

Tenendo conto di questo fatto e del fatto che, per quanto visto sugli ordini di grandezza,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

l'equazione della quantità di moto lungo  $x$  si riduce a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp^{\text{est}}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ricordando che nella regione esterna la corrente è barotropica e non viscosa, e che quindi si può applicare il teorema di Bernoulli (si veda la sezione 3.6), si ha

$$\frac{1}{2} (u^{\text{est}})^2 + \frac{p}{\rho} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp^{\text{est}}}{dx} = u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx}.$$

In conclusione, le equazioni dello strato limite di Prandtl diventano

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6.2}$$

con condizioni “al contorno” in  $y$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = u^{\text{est}}(x)$$

e condizioni “iniziali” a  $x = 0$

$$u(0, y) = u^{\text{est}}(y), \quad v(0, y) = 0,$$

essendo  $u^{\text{est}}(x)$  la funzione che descrive il valore della velocità esterna allo strato limite al variare di  $x$ .

### 6.1.1 Risoluzione numerica per lo strato limite 2D su lamina piana

Per lo strato limite bidimensionale su una lamina piana si ha che la velocità esterna è costante ( $u^{\text{est}}(x) = U$ , in particolare si può adimensionalizzare la velocità con quella esterna in modo che sia  $U = 1$ ), per cui il termine  $u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx}$  è nullo. Le equazioni si semplificano e diventano

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.3}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6.4}$$

con relative condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = U$$

e condizioni iniziali

$$u(0, y) = U, \quad v(0, y) = 0.$$

Moltiplicando l'equazione di continuità per  $u$  e sommandola all'equazione della quantità di moto, si ottiene il sistema in forma conservativa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

che risulta più agevole da risolvere numericamente in quanto “assorbe” meglio la discontinuità della soluzione al bordo d'attacco  $x = 0$ . Si noti che le equazioni sono paraboliche in  $x$ . Pertanto, partendo dalla condizione iniziale a  $x = x_{\text{in}}$  (posizione iniziale), è possibile marciare in  $x$  tramite uno schema esplicito fino a  $x = x_{\text{f}}$  (posizione finale).

Per quanto riguarda la discretizzazione, siccome i gradienti di velocità sono più forti in prossimità di  $y = 0$  e  $x = 0$ , utilizziamo una griglia cartesiana  $(x_i, y_j)$  non equispaziata con i punti maggiormente addensati in prossimità di tali zone (si veda la figura 6.2). Per semplicità utilizziamo uno schema a differenze finite: Eulero esplicito (a passo variabile) in  $x$  e differenze finite del second'ordine (non equispaziate) in  $y$ . Inoltre, assumiamo che le variabili  $u_{i,j}$  e  $v_{i,j}$  siano note nei nodi della griglia cartesiana, ma ad ogni  $x$  soddisfiamo l'equazione di continuità in  $(x_i, \frac{y_j + y_{j-1}}{2})$  (punti intermedi della griglia in  $y$ , indicati con  $\square$ ), mentre l'equazione della quantità di moto viene soddisfatta in  $(x_i, y_j)$ , indicati con  $\bullet$  in figura 6.2. Pertanto, le equazioni diventano:

$$\frac{\frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} - \frac{u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}}{2}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{u_{i,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{x_i - x_{i-1}} + \frac{u_{i,j+1}v_{i,j+1} - u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \nu \frac{\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}}}{\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2}} = 0 \quad (6.6)$$

Si osservi che le derivate rispetto ad  $x$  sono del prim'ordine esplicite, mentre quelle rispetto ad  $y$  sono del second'ordine esplicite. In realtà le derivate nell'equazione di continuità sono effettivamente differenze finite centrate (in  $y$ ), mentre nell'equazione della quantità di moto le derivate (prime e seconde) rispetto a  $y$  sarebbero corrette se valutate nel punto  $(x_i, \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{2})$ . Tuttavia questo errore non è maggiore di quello (del second'ordine) che si commette utilizzando le differenze finite centrate.

Un griglia come quella in figura 6.2 prende il nome di *staggered grid* (griglia “staggherata”) ed è utilizzata qui perché altrimenti se l'equazione di continuità fosse soddisfatta nei nodi ( $\bullet$ ) allora i valori delle variabili nei nodi dispari (in  $y$ , a  $x$  fissata) risulterebbero disaccoppiati da quelli pari e la soluzione sarebbe oscillante.

Fissato  $x = x_i$ , per risolvere il problema è necessario solamente conoscere la soluzione alla  $x$  precedente,  $x = x_{i-1}$ . Le incognite correnti possono essere ordinate in un unico vettore  $f = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N]^T$  che varia solo con  $y$ , essendo  $y_1 = 0$  e  $y_N = y_{\text{max}} \approx \infty$ . In altre parole,

$$u_1 = u_{i,1}, \quad v_1 = v_{i,1}, \quad u_2 = u_{i,2}, \quad v_2 = v_{i,2}, \quad \dots, \quad u_N = u_{i,N}, \quad v_N = v_{i,N}.$$

Così facendo, ad ogni  $x = x_i$ , si ottiene il sistema non lineare formato dalle equazioni (6.5)-(6.6) che può essere riscritto in modo compatto come

$$\mathbf{b}(\mathbf{f}) = \mathbf{0},$$

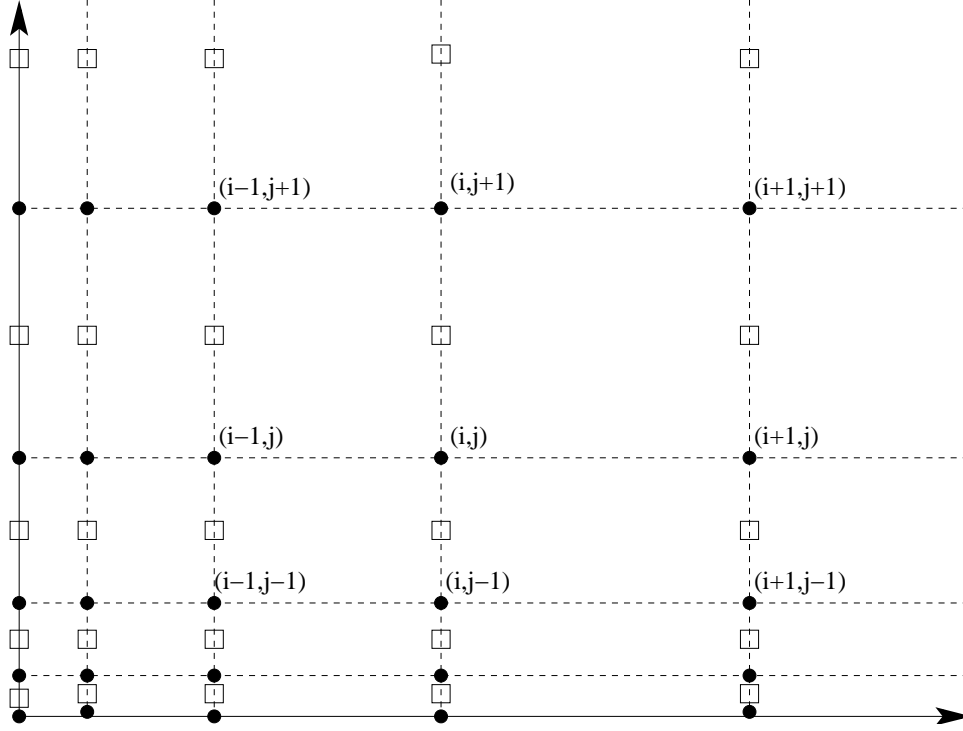


Figura 6.2: Griglia non equispaziata con nodi concentrati vicino alla parete ( $y = 0$ ) e vicino al bordo d'attacco ( $x = 0$ ). Le variabili  $u$  e  $v$  sono riferite ai nodi ( $\bullet$ ); l'equazione di continuità è verificata nei punti  $(x_i, \frac{y_j + y_{j-1}}{2})$ , indicati con  $\square$ , mentre l'equazione della quantità di moto è verificata nei nodi ( $\bullet$ ).

e risolto utilizzando il metodo di Newton:

$$\mathbf{b}(\mathbf{f}) \approx \mathbf{b}(\bar{\mathbf{f}}) + [\mathbf{J}(\bar{\mathbf{f}})](\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} - [\mathbf{J}(\bar{\mathbf{f}})]^{-1} \mathbf{b}(\bar{\mathbf{f}}),$$

dove  $\bar{\mathbf{f}}$  è una soluzione di tentativo e  $[\mathbf{J}(\bar{\mathbf{f}})]$  è lo Jacobiano ivi valutato.

Come detto, questa procedura viene ripetuta da  $x_{\text{in}}$  a  $x = x_{\text{f}}$ . È chiaro che questo approccio alla soluzione numerica delle equazioni dello strato limite su lamina piana è molto dispendioso e, nella pratica, non viene *mai* utilizzato. Qui è stato introdotto a fini didattici per presentare una tecnica (*marching*) per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo parabolico.

## 6.2 Equazione di Blasius (corrente esterna uniforme)

Nel caso particolare di corrente esterna uniforme, ovvero  $u^{\text{est}}(x) = U = \text{costante}$ , le equazioni si semplificano e, come abbiamo già visto (equazioni (6.1) e (6.2)), diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

con condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = U$$

e condizioni iniziali

$$u(0, y) = U, \quad v(0, y) = 0.$$

Esse sono un sistema di *equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari* e risolverle numericamente non è immediato (si veda la sezione 6.1.1) in quanto richiedono uno sforzo di calcolo notevole perché la soluzione “si adatti” da quella discontinua a  $x = 0$  al profilo di velocità finale. Inoltre, per ottenere una soluzione indipendente dalla griglia bisogna utilizzare un numero elevato di punti sia in  $x$  che in  $y$ .

In alternativa si possono manipolare le equazioni di governo dal punto di vista matematico arrivando, sotto opportune ipotesi, ad una sola *equazione differenziale ordinaria non lineare*. L'ipotesi di base si fonda sul fatto che nella direzione  $x$  non esiste una scala del problema (la lamina è semi-infinita) e quindi si può pensare che la velocità  $u(x, y)$  in direzione della corrente all'interno dello strato limite sia, ad ogni  $x > 0$ , una “riscalatura” di una sola funzione  $h$  (chiaramente ci si aspetta che la riscalatura vari al variare di  $x$ ). Questa “riscalatura” è operata sulla variabile  $y > 0$  tramite una *variabile di similarità* che indichiamo con  $\eta$  ( $\eta > 0$ ) e che supponiamo, senza perdere di generalità, che dipenda da  $x$  e  $y$  secondo la forma

$$\eta = \eta(x, y) = \frac{y}{g(x)},$$

dove  $g(x)$  è una funzione *non negativa* da determinare e la cui dipendenza da  $x$  non è al momento nota ma emergerà durante la manipolazione delle equazioni in modo che tutto il processo sia consistente (si osservi che, affinché il profilo di velocità si “dilati” in  $y$  all'aumentare di  $x$  è necessario che  $\eta$  diminuisca al crescere di  $x$ , ossia che  $g(x)$  sia una funzione crescente di  $x$ ). In base all'ipotesi di similarità, si ha

$$u(x, y) = Uh(\eta(x, y)) = Uh\left(\frac{y}{g(x)}\right).$$

Dall'equazione di continuità è possibile determinare il comportamento di  $v$ , infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(Uh(\eta))}{\partial x} = -U \frac{dh}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -Uh'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

dove si è utilizzata la regola di derivazione delle funzioni composte e con la scrittura  $h'(\eta)$  si è messo in evidenza il fatto che  $h$  è una funzione della *sola variabile*  $\eta$ . La derivata parziale di  $\eta$  rispetto a  $x$  è

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{g(x)} \right) = -y \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{y}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)} \eta, \quad (6.7)$$

da cui

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -Uh'(\eta) \left[ -\frac{g'(x)}{g(x)} \eta \right] = \frac{U g'(x)}{g(x)} \eta h'(\eta).$$

Per determinare  $v(x, y)$  basta integrare tra 0 e  $y$ :

$$v(x, y) = \int_0^y \left[ \frac{U g'(x)}{g(x)} \eta(x, \tilde{y}) h'(\eta(x, \tilde{y})) \right] d\tilde{y} + v(x, 0),$$

dove  $\tilde{y}$  è semplicemente una variabile *muta* di integrazione. Dopo aver osservato che, per le condizioni al contorno,  $v(x, 0) = 0$ , operando la sostituzione  $\tilde{y} = g(x)\tilde{\eta}$ , che implica  $d\tilde{y} =$

$g(x) d\tilde{\eta}$ , ed osservando che  $U g'(x)$  è costante rispetto alla variabile di integrazione, si ha

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^y \left[ \frac{U g'(x)}{g(x)} \eta(x, \tilde{y}) h'(\eta(x, \tilde{y})) \right] d\tilde{y} \\ &= \int_0^{\eta(x, y)} \left[ \frac{U g'(x)}{g(x)} \tilde{\eta} h'(\tilde{\eta}) \right] g(x) d\tilde{\eta} \\ &= U g'(x) \int_0^{\eta(x, y)} \tilde{\eta} h'(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}. \end{aligned}$$

Integrando per parti si ha

$$\tilde{\eta} h'(\tilde{\eta}) = [\tilde{\eta} h(\tilde{\eta})]' - h(\tilde{\eta}),$$

da cui

$$\begin{aligned} v(x, y) &= U g'(x) \int_0^{\eta(x, y)} \tilde{\eta} h'(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \\ &= U g'(x) \left[ [\tilde{\eta} h(\tilde{\eta})]_0^{\eta(x, y)} - \int_0^{\eta(x, y)} h(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right] \\ &= U g'(x) \left[ \eta h(\eta) - 0 \cdot h(0) - \int_0^{\eta} h(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right]. \end{aligned}$$

Introducendo la funzione  $f(\eta)$ , primitiva di  $h(\eta)$

$$f(\eta) = \int_0^{\eta} h(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \quad \Rightarrow \quad f'(\eta) = h(\eta),$$

si può riscrivere  $v(x, y)$  come

$$v(x, y) = U g'(x) \left[ \eta h(\eta) - \int_0^{\eta} h(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right] = U g'(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)].$$

Riassumendo, a seguito dell'ipotesi di similarità, e dopo l'utilizzo dell'equazione di continuità, le componenti di velocità sono

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U f'(\eta) \\ v(x, y) &= U g'(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)]. \end{aligned}$$

Per sostituire queste espressioni dell'equazione della quantità di moto

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

è necessario calcolare prima le varie derivate. Si ha quindi

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U f'(\eta)) = U f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = U f''(\eta) \left[ -\frac{g'(x)}{g(x)} \eta \right] = -\frac{U g'(x)}{g(x)} \eta f''(\eta)$$

dove si è fatto uso della (6.7);

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (U f'(\eta)) = U f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U f''(\eta) \frac{1}{g(x)} = \frac{U}{g(x)} f''(\eta);$$

infine

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U}{g(x)} f''(\eta) \right) = \frac{U}{g(x)} f'''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{[g(x)]^2} f'''(\eta).$$

Sostituendo  $u$ ,  $v$ , e le loro derivate nell'equazione della quantità di moto si ottiene

$$U f'(\eta) \left[ -\frac{U g'(x)}{g(x)} \eta f''(\eta) \right] + U g'(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \frac{U}{g(x)} f''(\eta) = \nu \frac{U}{[g(x)]^2} f'''(\eta),$$

ovvero, dopo aver svolto i calcoli,

$$\nu \frac{U}{[g(x)]^2} f'''(\eta) + \frac{U^2 g'(x)}{g(x)} f(\eta) f''(\eta) = 0.$$

Si osservi che  $f$  è una funzione *solo di*  $\eta$ , mentre  $g$  è una funzione *solo di*  $x$ ; inoltre, siccome  $x$  e  $y$  sono variabili *indipendenti*, allora anche  $\eta$  e  $x$  sono variabili *indipendenti*. Separando i termini che dipendono da  $\eta$  da quelli che dipendono da  $x$  si ottiene

$$\frac{U}{\nu} g(x) g'(x) = -\frac{f'''(\eta)}{f(\eta) f''(\eta)}$$

ma siccome, per quanto detto,  $\eta$  e  $x$  sono indipendenti, l'unica possibilità affinché l'equazione sia verificata è che entrambi i membri non siano né funzione di  $x$  né funzione di  $\eta$ , ovvero che siano *entrambi costanti*:

$$\frac{U}{\nu} g(x) g'(x) = -\frac{f'''(\eta)}{f(\eta) f''(\eta)} = \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Si osservi che la costante  $\alpha > 0$  è positiva in quanto, come detto,  $g(x)$  è positiva e crescente ( $U$  e  $\nu$  sono evidentemente costanti positive). Questo vincolo ci permette di determinare la funzione  $g(x)$ ,

$$g(x) g'(x) = \alpha \frac{\nu}{U} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} ([g(x)]^2) = \alpha \frac{\nu}{U} \Rightarrow [g(x)]^2 = 2\alpha \frac{\nu}{U} x + K,$$

ovvero

$$g_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2\alpha\nu x}{U} + K},$$

dove il pedice  $\alpha$  è stato aggiunto per sottolineare il fatto che  $g(x)$  dipende dalla particolare scelta della costante  $\alpha$ . Siccome il problema dello strato limite su lamina piana è *singolare* nel punto corrispondente al bordo d'attacco ( $x = 0, y = 0$ ), scegliamo  $K$  in modo che la trasformazione  $\eta_\alpha = y/g_\alpha(x)$  sia degenere proprio al bordo d'attacco. Affinché questo succeda, deve essere  $g_\alpha(0) = 0$ ; pertanto  $K = 0$ . In conclusione,

$$g_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2\alpha\nu x}{U}} \Rightarrow \eta_\alpha = \frac{y}{g_\alpha(x)} = y \sqrt{\frac{U}{2\alpha\nu x}}.$$

Dalla condizione

$$-\frac{f'''(\eta)}{f(\eta) f''(\eta)} = \alpha$$

si ottiene immediatamente l'equazione per  $f_\alpha(\eta)$ , detta *equazione di Blasius*,

$$f_\alpha'''(\eta) + \alpha f_\alpha(\eta) f_\alpha''(\eta) = 0.$$

Per le condizioni al contorno, si osservi che

$$u(x, 0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U f'_\alpha(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'_\alpha(0) = 0;$$

$$v(x, 0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U g'_\alpha(x) [\eta_{\alpha y=0} f'(\eta_{\alpha y=0}) - f(\eta_{\alpha y=0})] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -U g'_\alpha(x) f(0) = 0.$$

Dopo aver calcolato

$$g'_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2\alpha\nu}{U}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\alpha\nu}{2Ux}},$$

la condizione  $v(x, 0) = 0$  implica

$$-U g'_\alpha(x) f(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -U \sqrt{\frac{\alpha\nu}{2Ux}} f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Per la condizione all'infinito si ha

$$u(x, \infty) = U \quad \Longleftrightarrow \quad U f'_\alpha(\infty) = U \quad \Rightarrow \quad f'_\alpha(\infty) = 1.$$

Riassumendo, le condizioni al contorno per l'equazione di Blasius sono

$$f_\alpha(0) = f'_\alpha(0), \quad f'_\alpha(\infty) = 1.$$

Per quanto riguarda la scelta di  $\alpha$ , tutti i valori positivi sono possibili scelte, tuttavia quelle classiche sono  $\alpha = 1$  oppure  $\alpha = 1/2$ . Qui scegliamo  $\alpha = 1/2$ , che porta alla variabile di similarità

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

e all'equazione di Blasius

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \tag{6.8}$$

con condizioni al contorno

$$f(0) = f'(0) = 0 \tag{6.9}$$

$$f'(\infty) = 1. \tag{6.10}$$

Si osservi che il problema iniziale, formato da equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, è diventato un problema ai limiti non lineare del terz'ordine. Se  $f(\eta)$  è la soluzione (numerica, tabulata, o approssimata in qualsiasi altro modo) del precedente problema e la variabile indipendente è  $\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ , allora i profili di velocità “riscalati” in funzione delle variabili fisiche  $(x, y)$  sono

$$u(x, y) = U f' \left( y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) \tag{6.11}$$

$$v(x, y) = \frac{U}{2} \left[ \frac{y}{x} f' \left( y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) - \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f \left( y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) \right]. \tag{6.12}$$

Dalle funzioni  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$  e  $f''(\eta)$ , si possono ottenere diverse informazioni utili riguardo allo strato limite su lamina piana.



### 6.2.1 Risoluzione numerica dell'equazione di Blasius

L'equazione di Blasius (6.8) e le relative condizioni al contorno (6.9) e (6.10) formano un problema ai limiti non lineare del terz'ordine. Esso può essere ricondotto ad un sistema non lineare di ordine più basso (secondo o primo) tramite l'introduzione di variabili ausiliarie. Qui ci fermiamo al second'ordine:

$$fu' + 2u'' = 0 \quad (6.13)$$

$$f' - u = 0 \quad (6.14)$$

con condizioni al contorno

$$f(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1 \quad (6.15)$$

Evidentemente, ai fini della soluzione numerica, l'equazione che rimpiazza la condizione al contorno per  $f$  all'infinito è  $f'(\infty) = u(\infty) = 1$ .

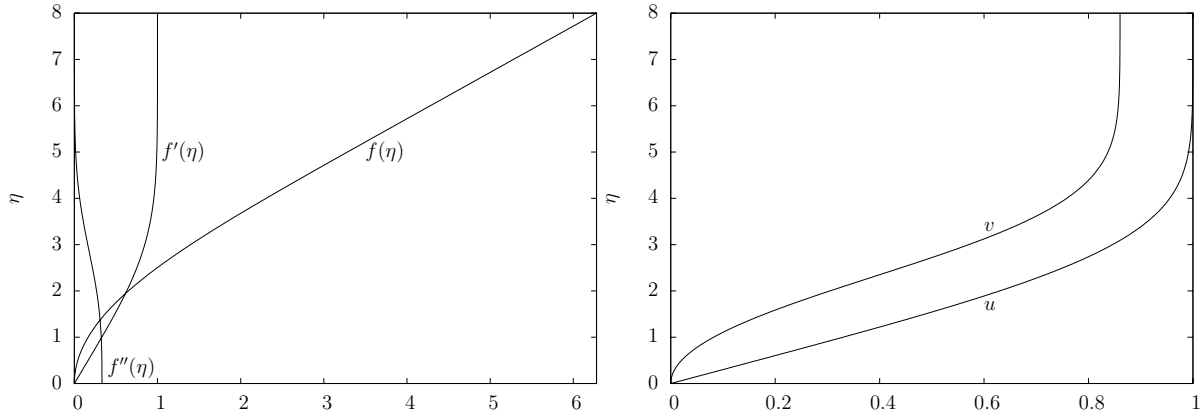


Figura 6.3: Soluzione numerica del problema (6.14)-(6.15): andamento di  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  in funzione di  $\eta$  (sinistra) e andamento di  $u$  e  $v$  in funzione in  $\eta$  (destra)

Siccome le derivate sono maggiori in prossimità della parete ( $y = 0$ ), per risolvere numericamente l'equazione di Blasius addensiamo i punti in corrispondenza di  $y = 0$ . Per le derivate (prima e seconda) sulla griglia equispaziata si utilizzando le stesse idee viste nel caso del sistema di equazioni alle derivate parziali ottenendo il sistema discretizzato

$$f_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}} + 2 \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{y_{i+1} - y_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}}{\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}} - u_i = 0, \quad (6.17)$$

che viene risolto utilizzando il metodo di Newton. La soluzione numerica dell'equazione di Blasius è riportata in figura 6.3.

### 6.2.2 Spessore dello strato limite

Il profilo di  $f'(\eta) = u(\eta)/U$  riportato in figura 6.3 mostra che il 99% della velocità esterna viene raggiunta per  $\eta \approx 5$ . Questo significa che lo spessore di strato limite è circa

$$\delta_{99} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Pertanto, su una lamina piana immersa in una corrente d'aria ( $\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$ ) a velocità di 10 m/s (36 km/h) lo spessore dello strato limite a 1 m dal bordo d'attacco è  $\delta_{99} \approx 6$  mm.

### 6.2.3 Valore asintotico della velocità normale alla parete

Siccome quanto  $\eta \rightarrow \infty$  si ha  $f'(\eta) \rightarrow 1$ , si ottiene

$$v(x, \infty) = \frac{U}{2} \left[ \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f(\eta) \right] = \frac{U}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left[ y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} - f(\eta) \right] = U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left[ \frac{\eta - f(\eta)}{2} \right].$$

Inoltre, essendo  $f(\eta)$  lineare con  $\eta$  per  $\eta \rightarrow \infty$  (si veda la figura 6.3), dai valori numerici si ha che per  $\eta > 4$  la differenza tra  $\eta$  e  $f(\eta)$  è circa  $\eta - f(\eta) \approx 1.7208$ , da cui

$$v_\infty(x) = 0.8604 \cdot U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}.$$

Riprendendo l'esempio precedente, ad un metro dal bordo d'attacco la velocità in direzione perpendicolare alla parete sufficientemente al di fuori dallo strato limite, per una corrente d'aria ( $\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$ ) a velocità di 10 m/s (36 km/h), è  $v_\infty \approx 0.01$  m/s. Pertanto, la presenza della lamina piana, anche se di spessore nullo, causa uno scostamento dalla corrente parallela dell'ordine dello 0.1%.

### 6.2.4 Resistenza di attrito

La resistenza di attrito si calcola facilmente come integrale dello sforzo tangenziale a parete  $\tau_w$ :

$$D = 2 \int_0^L \tau_w(x, 0) b \, dx,$$

dove  $L$  è la distanza dal bordo d'attacco (tipicamente la lunghezza della lamina, se si è interessati alla resistenza totale),  $b$  è la larghezza della lamina piana,  $\tau_w = d_{12}(x, 0)$  è lo sforzo tangenziale a parete, e il fattore 2 è dovuto al fatto che la lamina piana ha due facce. Utilizzando l'espressione (6.11) per la  $u$  ed il fatto che  $f''(0) = 0.332$ , si ha

$$\tau_w(x, 0) = d_{12}(x, 0) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) = 0.332 \cdot \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}},$$

da cui

$$D = 2 \int_0^L \tau_w(x, 0) b \, dx = 0.664 \cdot b \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 1.328 \cdot b U \sqrt{\mu \rho U L} = 1.328 \cdot b \sqrt{U^3 \mu \rho L}.$$

Introducendo il coefficiente di attrito definito come

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A},$$

ed essendo, per la lamina piana,  $A = 2bL$ , si ottiene

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{1.328 \cdot b \sqrt{U^3 \mu \rho L}}{\frac{1}{2} \rho U^2 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}}$$

da cui, indicando con  $Re_L = \frac{UL}{\nu}$  il numero di Reynolds basato sulla lunghezza della lamina,

$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}. \quad (6.18)$$

### 6.3 Grandezze caratteristiche dello strato limite

Siccome la presenza dello strato limite provoca un difetto di velocità rispetto alla corrente esterna imperturbata, in presenza di strato limite si osserva sia una diminuzione della portata in massa sia una diminuzione della quantità di moto.

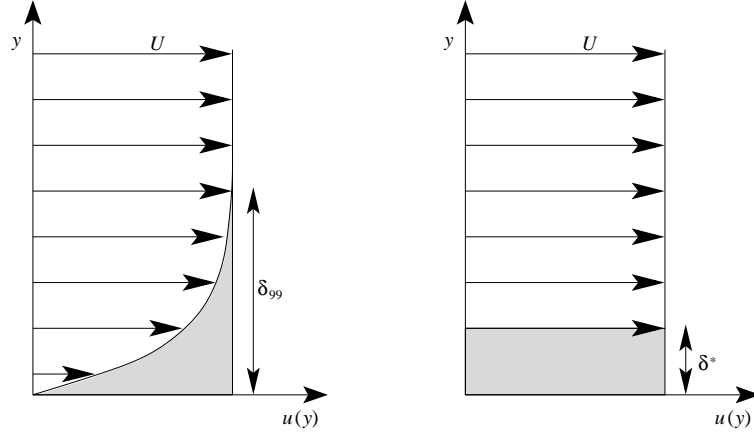


Figura 6.4: Schematizzazione grafica del significato di spessore di spostamento  $\delta^*$ : esso misura di quanto bisognerebbe spostare la parete per in modo che la corrente uniforme  $u(y) \equiv U$  abbia la stessa portata in massa (flusso di massa) della corrente non uniforme  $u(y)$ . In pratica, è lo spessore che rende uguali le aree evidenziate in figura

#### 6.3.1 Lo spessore di spostamento

Ha senso, quindi, chiedersi di quanto dovrebbe essere “spostata” verso l’esterno la parete in modo tale che la portata in massa effettiva rimanga uguale a quella di una corrente uniforme  $u(y) \equiv U$ , essendo  $U$  il valore della corrente esterna, come schematizzato in figura 6.4. Chiamiamo *spessore di spostamento* e lo indichiamo con  $\delta^*$  (o  $\delta_1$ ) proprio questa distanza. A seguito della definizione si ha

$$\rho U \delta^* = \int_0^\infty \rho (U - u) dy \quad \Longleftrightarrow \quad \rho U \delta^* = \rho U \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

da cui la definizione

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

Per lo strato limite su lamina piana si ha

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta = \lim_{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} [\tilde{\eta} - f(\tilde{\eta})].$$

Come visto in precedenza, per  $\eta \rightarrow \infty$  la differenza  $[\eta - f(\eta)]$  è costante e vale 1.7208, per cui si ha

$$\delta^* = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.7208}{\sqrt{Re_x}},$$

con  $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ .

### 6.3.2 Lo spessore di quantità di moto

Sempre a seguito del fatto che lo strato limite causa un difetto di velocità rispetto alla corrente uniforme, ha senso chiedersi di quanto dovrebbe essere “spostata” verso l’esterno la parete in modo tale che la quantità di moto effettiva rimanga uguale a quella della corrente uniforme. Chiamiamo *spessore di quantità di moto* e lo indichiamo con  $\theta$  (o  $\delta_2$ ) proprio questa distanza. A seguito della definizione si ha

$$\rho U^2 \theta = \int_0^\infty \rho u (U - u) \, dy \quad \Longleftrightarrow \quad \rho U^2 \theta = \rho U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy,$$

da cui la definizione

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy.$$

Per lo strato limite su lamina piana si ha

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f'(\eta) [1 - f'(\eta)] \, d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left[ \int_0^\infty f'(\eta) \, d\eta - \int_0^\infty f'(\eta) f'(\eta) \, d\eta \right] \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left\{ [f(\eta)]_0^\infty - [f(\eta) f'(\eta)]_0^\infty + \int_0^\infty f(\eta) f''(\eta) \, d\eta \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left\{ f(\infty) - f(0) - f(\infty) f'(\infty) + f(0) f'(0) + \int_0^\infty f(\eta) f''(\eta) \, d\eta \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left\{ f(\infty) - 0 - f(\infty) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \int_0^\infty f(\eta) f''(\eta) \, d\eta \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f(\eta) f''(\eta) \, d\eta. \end{aligned}$$

Dalla figura 6.3 si osserva che  $f''(\eta)$  è diversa da zero solo per  $\eta < 6$  (all’interno dello strato limite), quindi il prodotto  $f(\eta) f''(\eta)$  è integrabile tra 0 e  $\infty$  e risulta, dall’integrazione numerica,

$$\int_0^\infty f(\eta) f''(\eta) \, d\eta = 0.664.$$

Pertanto,

$$\theta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

ovvero, introducendo  $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ ,

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}},$$

### 6.3.3 Fattore di forma

Un ultimo parametro che distingue uno strato limite da un altro è il fattore di forma  $H$  definito dal rapporto

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}.$$

Si osservi che, siccome  $\delta^* > \theta$ , allora  $H > 1$ . In particolare, per lo strato limite di Blasius esso risulta costante e pari a  $H = 2.5916$ ; mentre per strati limite turbolenti si ha  $1.15 < H < 1.4$ . Pertanto, al diminuire di  $H$  il profilo di velocità diventa più “pieno”, caratteristica tipica dei profili turbolenti.

## 6.4 Equazione integrale di von Kàrmàn

Ripartendo dalle equazioni dello strato limite

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.19)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (6.20)$$

a  $x$  fissata integriamo l'equazione della quantità di moto in direzione normale alla parete tra 0 e un valore  $h$  esterno allo strato limite ottenendo:

$$\int_0^h \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right] dy = \int_0^h \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^h = -\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = -\frac{\tau_w(x, 0)}{\rho} = -\frac{\tau_w(x)}{\rho},$$

dove si è indicato con  $\tau_w$  lo sforzo tangenziale a parete e dove si è usato il fatto che al di fuori dello strato limite  $u(y) = u^{\text{est}}$  e pertanto  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . Sfruttando l'equazione di continuità ed integrando in  $y$ , la velocità  $v$  è

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy' + v(x, 0), \quad v(x, 0) = 0 \quad \text{per la condizione al contorno},$$

che serve per ottenere il secondo termine dell'equazione integrale

$$\int_0^h \left[ v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = - \int_0^h \left[ \left( \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy' \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy.$$

Integrando per parti e considerando  $\frac{\partial u}{\partial y}$  come fattore differenziale e  $\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy'$  come fattore finito, si ha

$$\int_0^h \left[ v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = - \left[ u \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy' \right]_0^h + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy = -u^{\text{est}} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy' + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_0^h \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right] dy &= \int_0^h \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial x} - u^{\text{est}} \frac{\partial u}{\partial x} - u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right] dy \\ &= \int_0^h \left[ \frac{\partial u^2}{\partial x} - \left( \frac{\partial}{\partial x} (u^{\text{est}} u) - u \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right) - u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right] dy \\ &= \int_0^h \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u^2 - u^{\text{est}} u) - (u^{\text{est}} - u) \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right] dy \\ &= - \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (u(u^{\text{est}} - u)) dy - \frac{du^{\text{est}}}{dx} \int_0^h (u^{\text{est}} - u) dy \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{h \rightarrow \infty} u(u^{\text{est}} - u) dy \right) - \frac{du^{\text{est}}}{dx} \int_0^{h \rightarrow \infty} (u^{\text{est}} - u) dy \\ &= - \frac{d}{dx} ((u^{\text{est}})^2 \theta) - \frac{du^{\text{est}}}{dx} u^{\text{est}} \delta^*, \end{aligned}$$

dove si è passati al limite  $h \rightarrow \infty$  perché le funzioni integrande sono nulle fuori dallo strato limite. In conclusione si ottiene

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho} = \frac{d}{dx} ((u^{\text{est}})^2 \theta) + \delta^* u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx},$$

nota come *equazione integrale di von Kàrmàn*. La potenza di questa equazione integrale consiste nel fatto che può essere applicata sia per strati limite laminari che turbolenti. Sviluppando la derivata del primo termine di destra e dividendo tutta l'equazione per  $(u^{\text{est}})^2$ , si ha

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho(u^{\text{est}})^2} = \frac{1}{(u^{\text{est}})^2} \left[ (u^{\text{est}})^2 \frac{d\theta}{dx} + 2\theta u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} + \delta^* u^{\text{est}} \frac{du^{\text{est}}}{dx} \right];$$

introducendo il coefficiente di attrito *locale* (adimensionale)

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho(u^{\text{est}})^2}$$

si ottiene, infine, la forma adimensionale dell'equazione integrale

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u^{\text{est}}} \frac{du^{\text{est}}}{dx}.$$

Nel caso particolare di lamina piana, siccome  $\frac{du^{\text{est}}}{dx} = 0$ , su una singola faccia si ha

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}.$$

Per poter confrontare questo risultato, che è il coefficiente di attrito *locale*, funzione della distanza  $x$  dal bordo d'attacco, con il coefficiente di attrito dell'equazione (6.18), che è un coefficiente di attrito *globale*, occorre calcolare il valore medio di  $C_f$  tra 0 ed  $L$ :

$$c_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = \frac{1}{L} \int_0^L 2 d\theta = 2 \frac{\theta_L}{L}.$$

Questo significa che il coefficiente di attrito di una lamina piana può essere dedotto sperimentalmente misurando il solo spessore di quantità di moto al bordo di uscita della lamina (in realtà lo spessore di quantità di moto viene calcolato dal profilo di velocità misurato sperimentalmente o ottenuto da simulazioni numeriche). Tornando al confronto con il profilo di Blasius, siccome

$$\theta(x) = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

si ha

$$c_f = 2 \frac{\theta_L}{L} = 2 \cdot \frac{0.664 \sqrt{\frac{\nu L}{U}}}{L} = 1.328 \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}},$$

che è proprio l'espressione (6.18).

## Capitolo 7

# Stabilità e transizione

Le soluzioni esatte determinate in forma chiusa nel capitolo 4 per geometrie semplici e la soluzione di Blasius per lo strato limite su lamina piana del capitolo 6 sono state ottenute sotto l'ipotesi di *corrente laminare*. Tuttavia, le correnti laminari non sono molto comuni né nella vita di tutti i giorni né nelle situazioni ingegneristiche di interesse pratico. Il moto laminare è, piuttosto, l'eccezione. Questo perché nelle correnti laminari possono entrare dei disturbi esterni che, crescendo nello spazio e/o nel tempo, danno origine a delle perturbazioni rispetto alle quali la corrente laminare non è più stabile. Si ha quindi la *transizione da corrente laminare a corrente turbolenta*.

### 7.1 Corrente confinata in un tubo – l'esperimento di Reynolds

Storicamente, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta fu studiata da Reynolds nel famoso esperimento con il colorante pubblicato nel 1883 e riportato in figura 7.1. L'esperimento consisteva nell'osservazione di una corrente d'acqua in un tubo a sezione circolare, nota come corrente di Hagen-Poiseuille (per i dettagli su questa corrente parallela si veda la sezione 4.3), caratterizzata da un profilo assialsimmetrico tipo paraboloide. Reynolds notò che al crescere del numero di Reynolds  $Re = \frac{Ud}{\nu}$ , essendo  $U$  la velocità media della corrente ( $U = Q/A$ , dove  $Q$  è la portata in volume e  $A$  l'area della sezione del tubo),  $d$  il diametro del tubo e  $\nu$  la viscosità dell'acqua, il colorante rilasciato al centro della corrente si comportava in modo progressivamente sempre più irregolare, come riportato in figura 7.2. Indicando con  $Re_{cri}$  il numero di Reynolds *critico* al quale si osserva lo scostamento dalla corrente laminare, Reynolds osservò che il comportamento irregolare appariva ad un  $Re_{cri}$  basso se l'imboccatura del tubo presentava un raccordo poco levigato, mentre se l'imboccatura e tutto l'interno del tubo erano molto ben levigati allora  $Re_{cri}$  era più elevato. Il miglior risultato ottenuto fino ad ora facendo molta attenzione a minimizzare i disturbi che, purtroppo, sono necessariamente introdotti in una corrente reale, è di  $Re_{cri} \approx 40000$ . È chiaro che il limite superiore di  $Re_{cri}$  non è noto, mentre è noto il limite inferiore: se il numero di Reynolds è inferiore a circa  $Re_{cri} \approx 2300$ , allora la corrente in un tubo circolare è laminare.

Il processo di progressivo passaggio da un moto ordinato ad uno disordinato può essere visualizzato in modo efficace tramite un sottile filamento di colorante rilasciato nell'acqua. Come visibile in figura 7.2, fintanto che la corrente si mantiene laminare il filamento di colorante è molto ben definito e si mantiene sottile. Aumentando il numero di Reynolds (ovvero la velocità della corrente), ad un certo punto si osserva l'insorgere di "ondulazioni" del filamento colorato che diventano sempre più complicate al crescere del numero di Reynolds. Questo rimescolamento

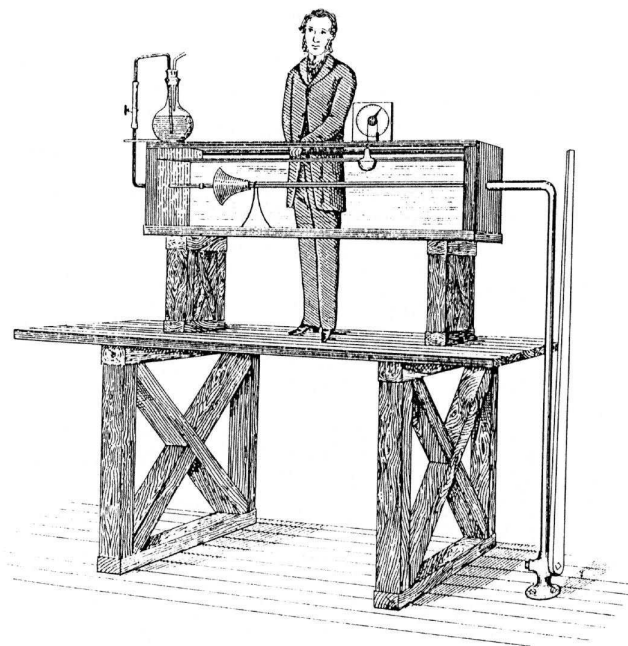


Figura 7.1: Schematizzazione dell'esperimento di Reynolds con il colorante preso dal suo articolo del 1883.

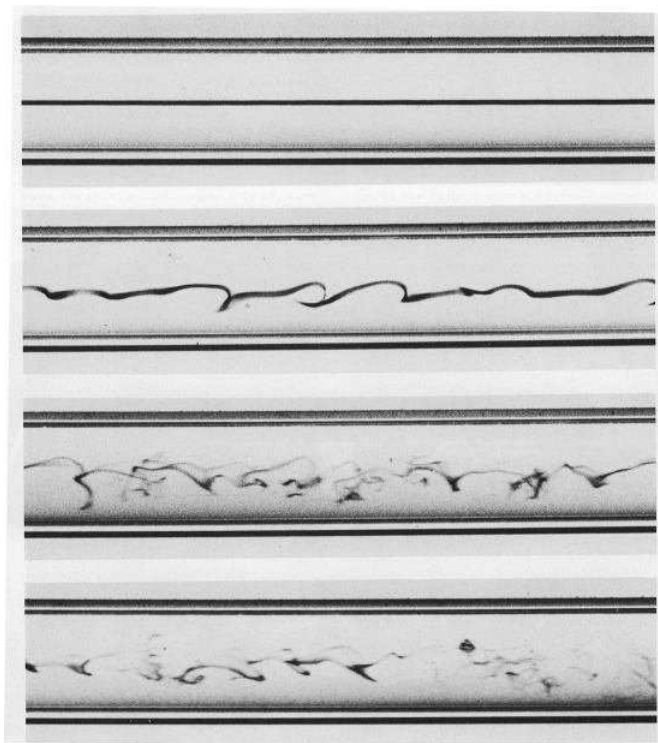


Figura 7.2: Ripetizione dell'esperimento di Reynolds.

causa un aumento dello scambio di quantità di moto tra “elementi di fluido” che a sua volta fa sì che i gradienti di velocità si attenuino. Sperimentalmente si osserva, infatti, che il profilo di velocità di una corrente turbolenta all'interno di un tubo è molto più uniforme del profilo di



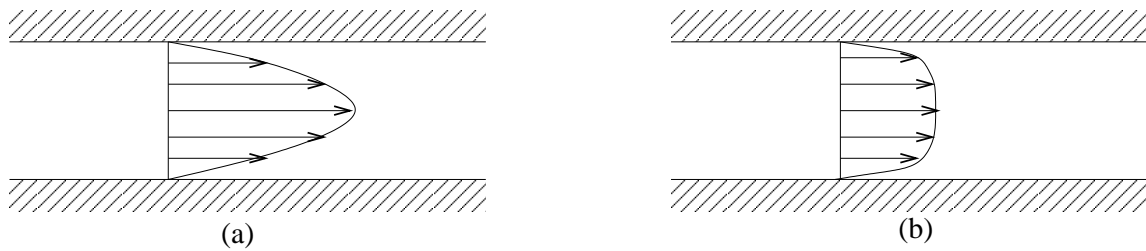


Figura 7.3: Profilo di velocità in un tubo a sezione circolare: (a) corrente laminare; (b) corrente turbolenta.

una corrente laminare, come mostrato in figura 7.3.

In pratica, la *corrente laminare* consiste in un moto molto ordinato del fluido, mentre la *corrente turbolenta*, o *turbolenza*, è la manifestazione macroscopica di un moto degli “elementi di fluido” caratterizzato da disordine, instazionarietà, imprevedibilità, tridimensionalità, forte rimescolamento, e una grande varietà di scale. Come osservato da Reynolds, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta può dipendere da moltissimi fattori tra cui la rugosità di parete, la trasmissione o meno di calore, vibrazioni, rumore acustico, e altri disturbi.

## 7.2 La transizione in correnti aperte – lo strato limite

Nonostante storicamente lo studio della transizione da una corrente laminare a una turbolenta sia iniziato con il flusso in un condotto chiuso a sezione circolare, nei primi del '900 si estese allo strato limite, in particolare su lamina piana essendo questo il caso più facile di strato limite. Dai risultati riportati in figura 7.4 si evince che la transizione nello strato limite su lamina piana

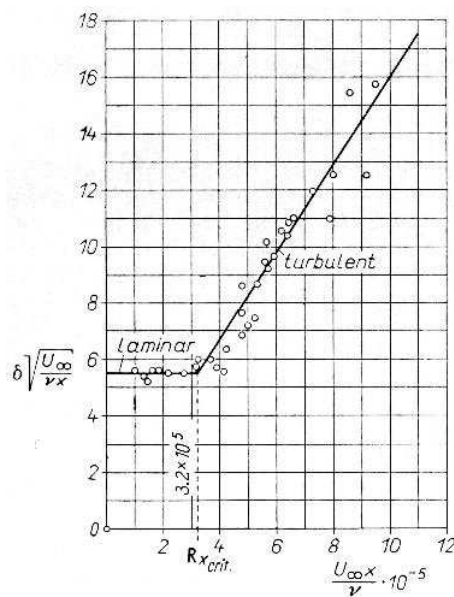


Figura 7.4: Spessore dello strato limite in funzione del numero di Reynolds basato sulla distanza  $x$  dal bordo d'attacco per lo strato limite su una lamina piana (Schlichting).

per una corrente incomprimibile avviene a circa

$$\text{Re}_{x,\text{cri}} = \left( \frac{Ux}{\nu} \right)_{\text{cri}} \approx 3.2 \times 10^5,$$

essendo  $x$  la distanza dal bordo d'attacco,  $U$  la velocità della corrente asintotica e  $\nu$  la viscosità del fluido. Inoltre, il passaggio allo strato limite turbolento provoca un aumento dello spessore dello strato limite accompagnato da un cambiamento anche del profilo di velocità, come confermato sperimentalmente dai risultati riportati in figura 7.5. Si osserva che, come nel caso della transizione alla turbolenza nel tubo, anche per la lamina piana il profilo di velocità turbolento è più “pieno” di quello laminare. Questo fatto causa un decremento del fattore di forma

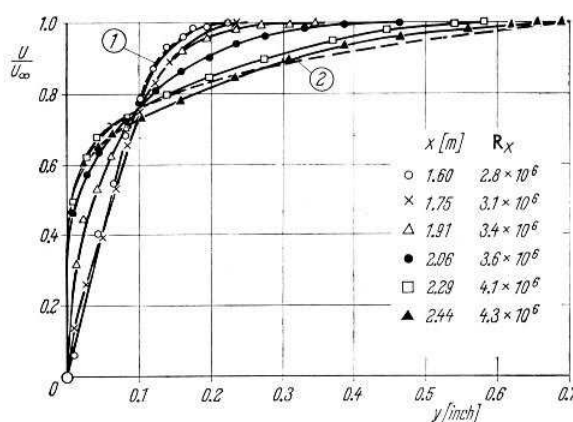


Figura 7.5: Profili di velocità per lo strato limite su lamina piana misurati da Schubauer e Klebanoff (1955). (1) Profilo laminare (di Blasius); (2) Profilo turbolento. (Schlichting).

$H$  (si veda la sezione 6.3.3) che passa da un valore  $H_{\text{laminare}} = 2.59$  nel caso laminare ad un valore  $H_{\text{turbolento}} \approx 1.5$  in regime turbolento. La ripercussione maggiore del fatto che il profilo di velocità cambia e diventa più “pieno” si ha dal punto di vista ingegneristico. Infatti, come noto dalla sezione 6.2.4, il coefficiente di attrito viscoso dipende dalla derivata della velocità alla parete. Siccome nei profili turbolenti questa derivata è maggiore che nel caso laminare (figura 7.5), la resistenza di attrito viscoso per strati limite turbolenti è maggiore che nel caso laminare. Pertanto, si vorrebbe mantenere la corrente laminare il più possibile su aerei (ali e fusoliere), sommergibili, automobili, e su tutte le macchine che si muovono all’interno di un fluido consumando energia.

Un’altra caratteristica interessante della transizione alla turbolenza, che si riscontra non solo nello strato limite ma anche nella corrente in un condotto come l’esperimento di Reynolds, è il fenomeno dell’*intermittenza*. La figura 7.6 mostra, sempre per gli esperimenti di Schubauer e Klebanoff (1955), che nel caso della lamina piana il processo di transizione è *intermittente* nel senso che in certe regioni irregolari non c’è il passaggio totale alla turbolenza ma si osserva principalmente lo strato limite turbolento alternato a quello laminare. Queste regioni, chiamate *spot turbolenti*, hanno forma più o meno irregolare, ma assimilabile ad una “V”, e appaiono ad intervalli irregolari e in zone distribuite in modo del tutto casuale. Ai bordi di queste regioni caratterizzate da moto turbolento si alternano sia il moto laminare che turbolento. In figura 7.7 sono riportate le viste dall’alto, laterale e in sezione di uno spot turbolento osservato sperimentalmente.

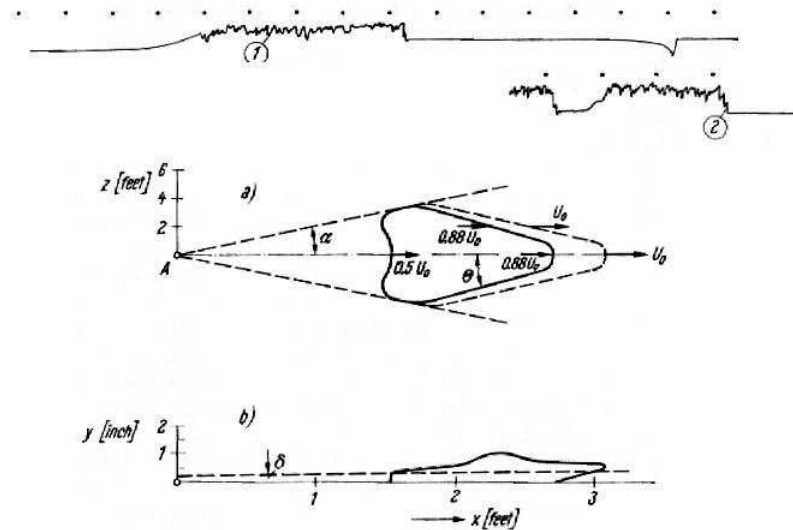


Figura 7.6: Crescita di uno spot turbolento artificiale in uno strato limite su lamina piana ad incidenza nulla, come misurato da Schubauer e Klebanoff (1955). (Schlichting).

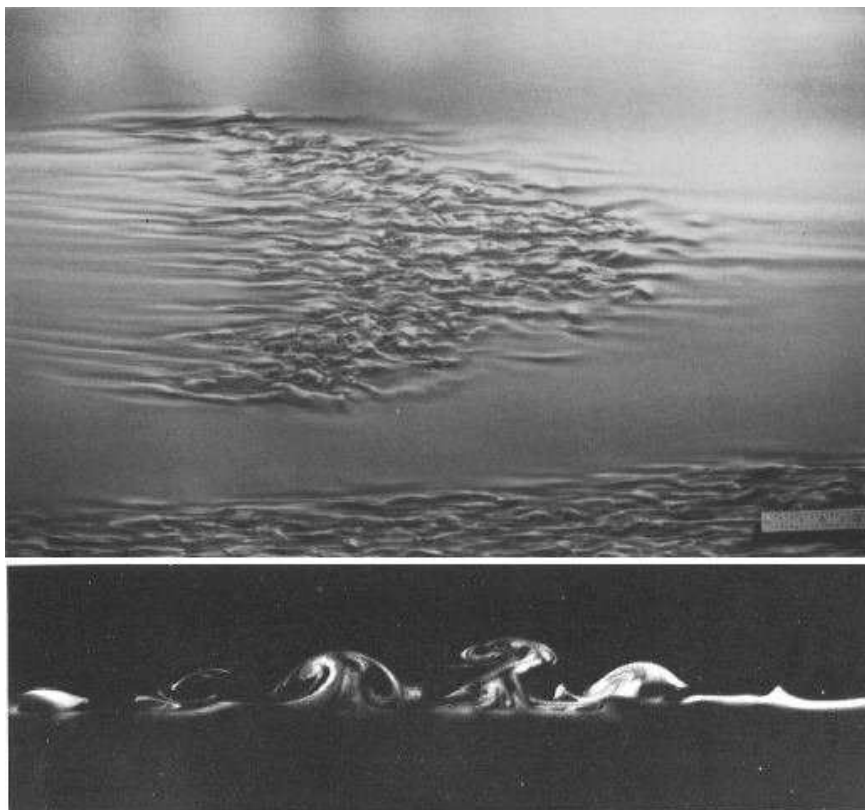


Figura 7.7: Spot turbolento: vista dall'alto, laterale e sezione.

### 7.3 Stabilità lineare per correnti piane e parallele

Lo scopo dell'analisi di stabilità lineare è di trovare una risposta alla domanda: *come è possibile che una corrente inizialmente laminare diventi turbolenta?*

L'approccio classico alla teoria della stabilità lineare dello strato limite laminare si basa sulla *linearizzazione* delle equazioni di Navier–Stokes nell'intorno di un *flusso base* noto. Una volta ricavate le equazioni per i piccoli disturbi, il flusso base viene detto *stabile* se l'ampiezza dei disturbi rimane limitata, *instabile* altrimenti, ossia se l'ampiezza dei disturbi cresce. La stabilità può essere ulteriormente suddivisa in *stabilità asintotica* (nota anche come *stabilità in senso stretto*) se il disturbo tende a zero, oppure in *stabilità marginale* se il disturbo, pur rimanendo limitato, non sparisce del tutto. Per introdurre l'analisi di stabilità, consideriamo il caso semplice di una corrente incomprimibile a densità costante. Si ricordi che, sotto queste ipotesi, la termodinamica (ovvero l'equazione dell'energia) risulta completamente disaccoppiata dal resto delle equazioni (continuità e conservazione del momento della quantità di moto) pertanto la pressione, che è definita a meno di una costante  $p_0$ , può essere espressa tramite il potenziale termodinamico  $\mathcal{P} = (p - p_0)/\rho$  (si veda la sezione 3.1.6 per maggiori dettagli). Se indichiamo con

$$\mathcal{U}(x, y, z, t), \quad \mathcal{V}(x, y, z, t), \quad \mathcal{W}(x, y, z, t), \quad \mathcal{P}(x, y, z, t)$$

rispettivamente le tre componenti della velocità e la pressione (intesa come potenziale termodinamico), allora le equazioni di Navier–Stokes nel caso incomprimibile a densità costante diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Consideriamo un flusso base  $(U, V, W, P)$  costituito da una corrente bidimensionale, parallela e stazionaria. Indichiamo con  $U = U(y)$  la componente di velocità nella direzione della corrente, con  $V \equiv 0$  la componente in direzione perpendicolare alla parete e con  $W \equiv 0$  la componente trasversale alla corrente. Si osservi che  $U = U(y)$ ,  $V \equiv 0$  e  $W \equiv 0$  per l'ipotesi di corrente parallela, mentre  $\partial/\partial z \equiv 0$  per l'ipotesi di corrente bidimensionale. Siccome il flusso base soddisfa il sistema di equazioni(7.1), allora

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \implies \quad P = P(x). \quad (7.2)$$

Sotto queste ipotesi, le variabili  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{P}$  sono la somma del flusso base  $(U, V, W, P)$  e della perturbazione  $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$  (supposta piccola e dipendente sia dalle tre coordinate spaziali sia dal tempo):

$$\mathcal{U}(x, y, z, t) = U(y) + \tilde{u}(x, y, z, t), \quad \mathcal{V}(x, y, z, t) = \tilde{v}(x, y, z, t)$$

$$\mathcal{W}(x, y, z, t) = \tilde{w}(x, y, z, t), \quad \mathcal{P}(x, y, z, t) = P(x) + \tilde{p}(x, y, z, t).$$

Inserendo queste variabili nelle equazioni di Navier–Stokes, trascurando i termini di second'ordine (ovvero i prodotti delle perturbazioni  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$ ) e considerando che il flusso base  $(U, P)$  è già soluzione delle equazioni di Navier–Stokes e quindi valgono le relazioni (7.2), si ottengono

facilmente le equazioni linearizzate

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right) \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right). \quad (7.6)$$

Si osservi che nelle equazioni linearizzate sono presenti pochissimi termini grazie alle ipotesi sul flusso base (stazionario, parallelo, bidimensionale). Siccome le equazioni alle derivate parziali (7.3)-(7.6) hanno i coefficienti dipendenti dalla sola  $y$ , le soluzioni possono essere espresse come onde del tipo

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (u(y), v(y), w(y), p(y)) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$$

dove  $u(y), v(y), w(y), p(y)$  sono funzioni a valori complessi e i parametri  $\alpha, \beta, \omega$  sono, in generale, complessi. Inserendo queste espressioni nelle (7.3)-(7.6) si ottiene il sistema di equazioni

$$i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \quad (7.7)$$

$$-i\omega u + i\alpha U u + U' v = -i\alpha p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u \quad (7.8)$$

$$-i\omega v + i\alpha U v = -p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v \quad (7.9)$$

$$-i\omega w + i\alpha U w = -i\beta p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta w, \quad (7.10)$$

dove il simbolo  $\Delta$  denota l'operatore laplaciano

$$\Delta = \frac{d^2}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2),$$

e dove con  $U'$  si è indicato  $dU/dy$  analogamente a  $v' = dv/dy$  e  $p' = dp/dy$ , essendo tutte funzioni della sola  $y$ . Con l'intento di ridurre il numero di incognite da quattro a due, introduciamo la componente della vorticità nella direzione  $y$  cambiata di segno ( $\eta = -\omega_y / e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} = e^{-i(\alpha x + \beta z - \omega t)} (\partial \tilde{u} / \partial z - \partial \tilde{w} / \partial x)$ )

$$\eta = i\beta u - i\alpha w \quad (7.11)$$

in modo da riscrivere le equazioni (7.7)-(7.10) nelle sole incognite  $(\eta, v)$ . Osserviamo anzitutto che risolvendo per le variabili  $(u, w)$  il sistema formato dalla definizione di  $\eta$  (7.11) e dall'equazione di continuità (7.7), si ottengono immediatamente le espressioni di  $u$  e  $w$

$$u = \frac{i(\alpha v' - \beta \eta)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{e} \quad w = \frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (7.12)$$

Moltiplichiamo ora l'equazione (7.8) per  $i\beta$  e l'equazione (7.10) per  $i\alpha$

$$i(\alpha U - \omega) i\beta u + U' i\beta v = \alpha \beta p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta i\beta u$$

$$i(\alpha U - \omega) i\alpha w = \alpha \beta p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta i\alpha w,$$

e sottraiamo la seconda dalla prima ottenendo

$$i(\alpha U - \omega)[i\beta u - i\alpha w] + U'i\beta v = \frac{1}{\text{Re}}\Delta[i\beta u - i\alpha w].$$

Usando la definizione di  $\eta$  (si veda l'equazione (7.11)), questa equazione diventa semplicemente

$$i(\alpha U - \omega)\eta + U'i\beta v = \frac{1}{\text{Re}}\Delta\eta. \quad (7.13)$$

Concentrandoci sull'equazione (7.10) e sostituiamo in essa l'espressione (7.12) per  $w$

$$i(\alpha U - \omega)\frac{i(\alpha\eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2} = -i\beta p + \frac{i\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\frac{1}{\text{Re}}\Delta\eta + \frac{i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\frac{1}{\text{Re}}\Delta v'.$$

Rimpiazzando in quest'ultima  $\Delta\eta/\text{Re}$  con l'espressione ricavata dall'equazione (7.13), semplificando l'unità immaginaria  $i$  in tutti i termini e moltiplicandoli per  $\alpha^2 + \beta^2$  si ha

$$i(\alpha U - \omega)(\alpha\eta + \beta v') = -\beta(\alpha^2 + \beta^2)p + \alpha[i(\alpha U - \omega)\eta + U'i\beta v] + \beta\frac{1}{\text{Re}}\Delta v',$$

da cui, elidendo il termine  $i(\alpha U - \omega)\alpha\eta$  a destra e sinistra e semplificando i rimanenti termini per  $\beta$ , si ottiene

$$i(\alpha U - \omega)v' = -(\alpha^2 + \beta^2)p + i\alpha U'v + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v'. \quad (7.14)$$

Si osservi che questa equazione contiene le incognite  $p$  e  $v$ , così come l'equazione (7.9), mentre l'idea originaria era di riscrivere il sistema di equazioni (7.7)-(7.10) nelle sole incognite  $(\eta, v)$ . La pressione  $p$  può essere facilmente eliminata sia dalla (7.9) che dalla (7.14) sommando le equazioni ottenute moltiplicando la (7.9) per  $-(\alpha^2 + \beta^2)$  e derivando la (7.14) rispetto a  $y$ . Così facendo si hanno le due equazioni

$$\begin{aligned} -i(\alpha U - \omega)(\alpha^2 + \beta^2)v &= (\alpha^2 + \beta^2)p' - (\alpha^2 + \beta^2)\frac{1}{\text{Re}}\Delta v \\ i\alpha U'v' + i(\alpha U - \omega)v'' &= -(\alpha^2 + \beta^2)p' + i\alpha U''v + i\alpha U'v' + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v'', \end{aligned}$$

che sommate danno, dopo aver eliso  $i\alpha U'v'$  a destra e sinistra della seconda,

$$i(\alpha U - \omega)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] = i\alpha U''v + \frac{1}{\text{Re}}\Delta[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v].$$

Dopo aver osservato che  $v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v = \Delta v$ , questa equazione può essere riscritta in modo compatto come

$$i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v, \quad (7.15)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del quart'ordine e omogenea per la sola incognita  $v$ . Essa fu derivata indipendentemente da Orr (1907) e Sommerfeld (1908) e per questa ragione prende il nome di *equazione di Orr-Sommerfeld*. Le opportune condizioni al contorno ad essa associate richiedono che la perturbazione si annulli agli estremi del dominio:

$$\begin{array}{ll} v(\pm h) = v'(\pm h) = 0 & \text{correnti in condotti} \\ v(0) = v'(0) = 0; \quad v(\infty) = v'(\infty) = 0 & \text{strati limite} \\ v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0 & \text{free shear layers.} \end{array}$$

In conclusione, il sistema di equazioni lineari (7.7)-(7.10) nelle incognite  $(u, v, w, p)$  è stato ricondotto alle sole equazioni (7.13) e (7.15) nelle incognite  $(\eta, v)$ , ovvero i due sistemi

$$\begin{cases} i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \\ i(\alpha U - \omega)u + U'v = -i\alpha p + \text{Re}^{-1}\Delta u \\ i(\alpha U - \omega)v = -p' + \text{Re}^{-1}\Delta v \\ i(\alpha U - \omega)w = -i\beta p + \text{Re}^{-1}\Delta w \end{cases} \quad (7.16)$$

e

$$\begin{cases} i(\alpha U - \omega)\eta + i\beta U'v = \text{Re}^{-1}\Delta\eta \\ i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v \end{cases} \quad (7.17)$$

sono del tutto equivalenti. Si osservi che le condizioni al contorno per  $\eta$  in presenza di pareti solide sono omogenee ( $\eta = 0$ ) a seguito della definizione di  $\eta$ . Una possibile strategia di soluzione del problema (7.17) consiste nel risolvere dapprima la seconda equazione ottenendo  $v$  e poi sostituirla nella prima per ottenere  $\eta$ . Dal momento che sia l'equazione di Orr-Sommerfeld (che è nella sola incognita  $v$ ) sia le condizioni al contorno per  $v$  sono omogenee, risolvere la seconda equazione del problema (7.17) equivale a risolvere un problema agli autovalori dal quale si deriva una relazione di dispersione del tipo

$$D(\alpha, \beta, \omega, \text{Re}) = 0.$$

Se si considera la stabilità temporale, allora  $\alpha, \beta$  e  $\text{Re}$  sono fissati e reali, mentre  $\omega$  è complesso e la sua parte immaginaria fornisce il tasso di crescita temporale; per la stabilità spaziale  $\omega$  e  $\text{Re}$  sono fissati e reali, mentre (a  $\beta$  fissato) la parte immaginaria di  $\alpha$  (o la parte immaginaria di  $\beta$  se  $\alpha$  è fissato) fornisce la crescita spaziale. La soluzione  $v(y)$  è detta autofunzione.

Nel caso di disturbo bidimensionale, si ha  $\beta = 0$  e  $w = 0$ ; pertanto  $\eta \equiv 0$  ed è quindi necessario risolvere la sola equazione di Orr-Sommerfeld (7.15). Anche se storicamente i primi disturbi ad essere studiati furono bidimensionali, la (7.15) governa anche quelli tridimensionali. Infine, sempre nel caso bidimensionale, anziché utilizzare le variabili primitive  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$  si può introdurre la funzione di corrente  $\tilde{\psi} = \psi(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$  tale che

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}_y = \psi' e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad \text{e} \quad \tilde{v} = -\tilde{\psi}_x = -i\alpha\psi e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)},$$

che significa che  $\psi(y)$  soddisfa la stessa equazione di  $v(y)$  (l'equazione di Orr-Sommerfeld (7.15)) essendo  $v(y) = -i\alpha\psi(y)$ . L'analisi di stabilità permette di ricavare le curve di stabilità neutra, ovvero (nel caso di disturbo bidimensionale con  $\beta = w = 0$ ) il luogo dei punti del piano  $\text{Re}-\alpha$  oppure  $\text{Re}-\omega$  per i quali la crescita è nulla, come quelle riportate in figura 7.8.

### 7.3.1 Teorema di Squire

Per semplicità consideriamo la stabilità temporale, ovvero  $\alpha, \beta$  e  $\text{Re}$  sono noti e reali, mentre  $\omega$  non è noto ed è complesso. I modi del problema (7.17) sono di due tipi:

- i modi dell'equazione di Orr-Sommerfeld (la seconda delle (7.17)), per la quale le autofunzioni  $v$  e gli autovalori  $\omega$  possono essere determinati indipendentemente dalla prima equazione e la  $\eta$  di conseguenza, risolvendo la prima equazione
- i modi propri della prima equazione *omogenea*, ovvero

$$i(\alpha U - \omega)\eta - \text{Re}^{-1}\Delta\eta = 0.$$

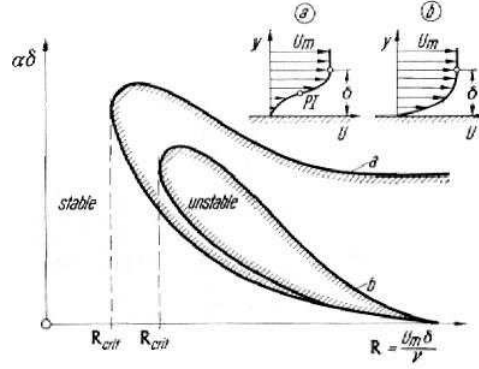


Figura 7.8: Curva di stabilità neutra nel caso di analisi spaziale. (a) flusso base con punto di flesso (instabilità non viscosa); (b) flusso base di strato limite su lamina piana o accelerante (instabilità viscosa). Si notino le diverse regioni di stabilità all'esterno e di instabilità all'interno dipendentemente dal tipo di stabilità (viscosa o non viscosa) considerata (Schlichting).

In realtà, ai fini della stabilità, basta studiare la sola equazione di Orr-Sommerfeld in quanto i modi propri di  $\eta$  sono sempre stabili. Per dimostrarlo riscriviamo l'equazione omogenea per  $\eta$  esplicitando l'operatore laplaciano  $\Delta = (\cdot)_{yy} - (\alpha^2 + \beta^2)$ , moltiplicandola per  $\eta^*$ , il complesso coniugato di  $\eta$ , ed integrandola su tutto l'intervallo di definizione della variabile  $y$  (sia esso finito o infinito). Così facendo si ottiene

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} i\alpha U \eta^* \eta dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} i\omega \eta^* \eta dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Re}^{-1} \eta^* \eta'' dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \eta^* \eta dy = 0.$$

Facendo uso del fatto che, a causa delle condizioni al contorno omogenee per  $\eta$ , anche  $\eta^*$  si annulla agli estremi dell'intervallo  $[y_{\min}; y_{\max}]$ , l'integrazione per parti del termine  $\eta^* \eta''$  si riduce a

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta^* \eta'' dy = [\eta^* \eta']_{y_{\min}}^{y_{\max}} - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta'^* \eta' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta'^* \eta' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy,$$

l'equazione precedente può essere riscritta come

$$i\alpha \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} U |\eta|^2 dy - i\omega \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy + \text{Re}^{-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy + \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy = 0.$$

Siccome  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\text{Re}$  sono reali, prendendo la parte reale di questa equazione di ottiene

$$\text{Im}(\omega) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy + \text{Re}^{-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy + \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy = 0,$$

da cui

$$\text{Im}(\omega) = -\text{Re}^{-1} \left[ \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy} \right] < 0.$$

Siccome la parte immaginaria dell'autovalore  $\omega$  è sempre negativa, i modi propri dell'equazione omogenea per  $\eta$  sono sempre stabili. Pertanto, *l'eventuale instabilità del problema (7.17) può*



essere causata esclusivamente dai modi instabili dell'equazione di Orr-Sommerfeld. Per quanto riguarda i modi di quest'ultima, si osservi che dividendo tutti i termini per  $i\alpha$  si ha

$$(U - c)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] - U''v = \frac{1}{i\alpha \text{Re}}[v'''' - 2(\alpha^2 + \beta^2)v'' + (\alpha^2 + \beta^2)^2v], \quad (7.18)$$

essendo  $c = \omega/\alpha$ . Si osservi che gli unici parametri che compaiono in essa sono il quadrato del numero d'onda  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$  e  $i\alpha \text{Re}$ . Pertanto, se un certo valore di  $\alpha \text{Re} = a$  causa la prima instabilità temporale (ovvero il primo passaggio di  $\text{Im}(\omega)$  da negativa a positiva) e ad esso corrisponde un certo valore di  $\alpha^2 + \beta^2 = b^2$ , allora il numero di Reynolds più piccolo al quale questo succede si ha in corrispondenza del massimo valore di  $\alpha$  ( $\text{Re} = a/\alpha$ ). Tuttavia, se  $\alpha^2 + \beta^2$  è fissato, il massimo valore di  $\alpha$  si ha proprio in corrispondenza di  $\beta = 0$ . Questo dimostra il

**Teorema di Squire:** *parità di altri parametri, la prima instabilità di un flusso base piano e parallelo si verifica ad un numero di Reynolds più basso se il disturbo è bidimensionale ( $\beta = 0$ ). Pertanto, il caso più limitante è quello bidimensionale e d'ora in poi assumeremo  $\beta = 0$ .*

### 7.3.2 Stabilità non viscosa

Nel caso limite  $\nu \rightarrow 0$ , ovvero  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , l'equazione di Orr-Sommerfeld (7.18) si semplifica e prende il nome di equazione di Rayleigh, che è del second'ordine e quindi richiede solo due condizioni al bordo:

$$(U - c)[v'' - \alpha^2 v] - U''v = 0,$$

dove  $c = \omega/\alpha$  è la velocità di fase (si noti che  $\beta = 0$  perché il caso di disturbo bidimensionale è più limitante). Siccome questa equazione è stata ricavata per il caso limite  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , essa fornisce preziose informazioni per *correnti ad alto numero di Reynolds*. Dividendo tutti i termini per  $(U - c)$ , moltiplicando per  $v^*$  (l'autofunzione complessa coniugata di  $v$ ) ed integrando sull'intervallo di definizione della variabile  $y$  (sia esso finito o infinito), si ha

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^* v'' dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \alpha^2 v^* v dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{U - c} v^* v dy = 0.$$

Osservando che  $v^*$  si annulla agli estremi del dominio, integrando per parti il termine  $v^* v''$  si ottiene

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^* v'' dy = [v^* v']_{y_{\min}}^{y_{\max}} - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v'^* v' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v'^* v' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |v'|^2 dy,$$

per cui l'equazione di Rayleigh in forma integrale, dopo aver cambiato di segno, diventa

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |v'|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \alpha^2 |v|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{U - c} |v|^2 dy = 0.$$

Essendo  $\omega$  complesso, lo è anche la velocità di fase  $c = c_r + ic_i$  per cui la predente equazione può essere scritta, dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore dell'ultima funzione integranda per  $(U - c_r) + ic_i$ ,

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{ic_i U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0.$$

Separando la parte reale e quella immaginaria di questa equazione si ha

$$\text{parte reale:} \quad \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0 \quad (7.19)$$

$$\text{parte immaginaria:} \quad c_i \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0. \quad (7.20)$$

Si osservi che nell'integrale della condizione (7.20)  $U''$  è moltiplicato per la quantità  $|v|^2/[(U - c_r)^2 + c_i^2]$  che è sempre positiva tranne nel caso banale  $v \equiv 0$ . Pertanto, se  $U''$  non cambia segno, ovvero se il profilo di velocità del flusso base non presenta flessi, la condizione (7.20) è soddisfatta solo per  $c_i = 0$ , nel qual caso il flusso base è stabile. Viceversa, affinché il flusso base sia instabile è *necessario* che il profilo di velocità abbia un punto di flesso ad una certa distanza dalla parete che chiamiamo  $y_{ip}$ . Fjörtöf nel 1950 osservò che in realtà, affinché vi sia instabilità viscosa, oltre alla condizione necessaria  $U''(y_{ip}) = 0$ , è ulteriormente necessario che lo shear  $|U'|$  abbia un massimo nel punto di flesso  $y_{ip}$ . Fjörtöf trovò anche un'altra condizione, di seguito riportata, ma tutte queste sono praticamente sempre soddisfatte nei casi di interesse quando il profilo di velocità ha un punto di flesso.

Le conclusioni più importanti sono riassunte nei seguenti cinque teoremi:

**Teorema 1** [Rayleigh (1880)] Per l'instabilità non viscosa è *necessario* che il profilo di velocità del flusso base  $U(y)$  abbia un punto di flesso. Chiamiamo  $y_{ip}$  la distanza dalla parete dove questo avviene, ovvero  $U''(y_{ip}) = 0$  (si veda la figura 7.8, caso (a)).

**Teorema 2** [Fjörtöf (1950)] Per l'instabilità di tipo non viscoso è *necessario* che lo shear  $|U'|$  abbia un massimo nel punto di flesso  $y_{ip}$ .

**Teorema 3** [Fjörtöf (1950)] Se esiste un punto di flesso del profilo di velocità del flusso base, allora per l'instabilità non viscosa è ulteriormente *necessario* che  $U''(U - U(y_{ip})) = 0$  da qualche parte nel profilo.

**Teorema 4** [Lin (1945)] Sia  $y_c$  la distanza dalla parete alla quale si ha  $U - c = 0$ . Se  $U(y)$  ha un punto di flesso in  $y = y_c$ , allora ci può essere un disturbo neutro ( $c_i = 0$ ) la cui velocità di fase è  $c_r = U(y_c)$ .

**Teorema 5** [Rayleigh (1880)] La velocità di fase  $c_r$  di un disturbo amplificato deve essere compresa tra i valori minimo e massimo del profilo di velocità  $U(y)$ .

La conseguenza più importante di questi teoremi è che i profili di velocità con punti di flesso sono instabili ad alti numeri di Reynolds (limite  $\nu \rightarrow 0$ ). Pertanto, profili deceleranti possono portare rapidamente alla transizione. Il teorema 1 ha prodotto nel corso degli anni una certa confusione in quanto si credeva che un profilo senza punto di flesso, come quello di Blasius, fosse stabile rispetto ai piccoli disturbi. Nel 1921 Prandtl mostrò che l'effetto della viscosità può essere destabilizzante per certi numeri d'onda  $\alpha$  e numeri di Reynolds finiti. Questo fu verificato nel 1929 grazie ai calcoli di Tollmien per il profilo di Blasius e definitivamente confermato negli anni '40 dai celeberrimi esperimenti di Schubauer e Skramstad per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla in una galleria del vento a basso livello di turbolenza (si veda, in seguito, la figura 7.9).

### 7.3.3 Stabilità viscosa

Se si considera anche la parte viscosa, l'equazione completa di Orr-Sommerfeld è

$$i [(\alpha U - \omega) (v'' - \alpha^2 v) - \alpha U'' v] = \text{Re}^{-1} ((\cdot)_y - \alpha^2)^2 v.$$

Il flusso base può essere uno qualsiasi purché parallelo (Poiseuille, Couette o Blasius); qui consideriamo lo strato limite di Blasius su lamina piana. In questo caso la perturbazione prende il nome di onde di Tollmien-Schlichting; la curva neutra, come prima, si ottiene dall'equazione di Orr-Sommerfeld sostituendo l'opportuno flusso base (quello di Blasius). Il confronto tra la teoria lineare e gli esperimenti per il caso di stabilità spaziale è riportato in figura 7.9.

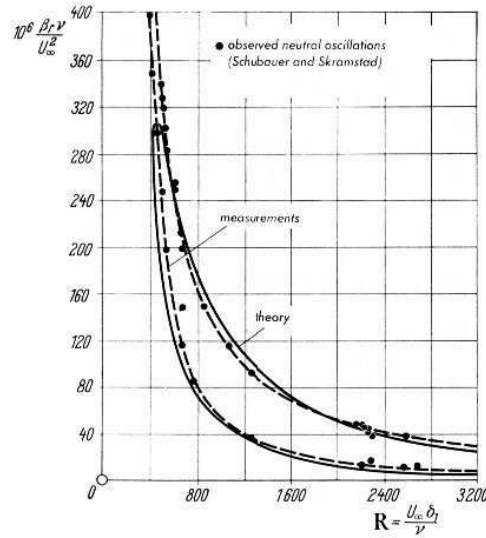


Figura 7.9: Curva di stabilità neutra per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla. Confronto tra: dati sperimentali (●), esperimenti di Schubauer e Skramstad (1947), e curva teorica (linea continua) di Tollmien (1929). (Schlichting).

Alcune caratteristiche delle onde di Tollmien-Schlichting per lo strato limite di Blasius nel caso spaziale sono: il minimo numero di Reynolds critico è  $\text{Re}_{x\text{cr}} = 91000$  oppure  $\text{Re}_{\text{cr}}^* = 520$ , dove  $\text{Re}_x = U_e x / \nu$  e  $\text{Re}^* = U_e \delta^* / \nu = 1.7208 \sqrt{\text{Re}_x}$  ( $\delta^*$  è lo spessore di spostamento). A  $\text{Re}_{\text{cr}}$  (primo punto neutro) le caratteristiche dell'onda sono  $\alpha \delta^* = 0.3012$ ,  $\omega / \alpha_r = 0.3961 U_e$  e  $\omega \nu / U_e^2 = 2.29 \cdot 10^{-4}$ . Il numero d'onda massimo dell'onda instabile è  $\alpha \delta^* = 0.35$ , per cui la lunghezza d'onda minima è  $\lambda_{\min} = 2\pi \delta^* / 0.35 \approx 18 \delta^* \approx 6 \delta$  ( $\delta = \sqrt{x \nu / U_e}$ ). Pertanto le onde di Tollmien-Schlichting sono *onde lunghe* rispetto allo spessore di strato limite. Infine, la velocità di fase massima è  $\omega / \alpha_r \approx 0.4 U_e$ , il che significa che le onde di Tollmien-Schlichting viaggiano piuttosto lentamente e sorgono in vicinanza della parete.

È importante sottolineare il fatto che il numero di Reynolds critico previsto dalla teoria non è il punto di transizione alla turbolenza, in quanto  $\text{Re}_{\text{tr}} \approx 3 \cdot 10^6$ , ovvero la transizione avviene ad un numero di Reynolds che è circa 30 volte quello critico.



## Capitolo 8

# La turbolenza

La turbolenza è probabilmente l'ultimo problema irrisolto della fisica classica. Si racconta che fu chiesto ad Heisenberg, sul letto di morte, che cosa avrebbe chiesto a Dio se ne avesse avuto la possibilità. La sua risposta fu "Quando incontrerò Dio gli farò due domande: perché la relatività e perché la turbolenza. Credo proprio che Egli avrà una risposta per la prima". In realtà, aneddoti di questo tipo sono stati attribuiti a diversi scienziati famosi, tra cui Horace Lamb, per cui sono poco credibili; tuttavia rendono conto del fatto che molti scienziati di grosso calibro si sono dedicati allo studio della turbolenza senza riuscire nel loro sforzo.

### 8.1 Caratteristiche fenomenologiche di una corrente turbolenta

La turbolenza ha da sempre appassionato il genere umano in quanto è costantemente presente nella vita di tutti i giorni. Solo per citare alcuni esempi, l'intrecciarsi di vortici dovuti allo scorrere dell'acqua in un fiume o, meglio ancora, in un torrente, gli zampilli delle fontane, i disegni creati dal fumo di una sigaretta, gli scherzi provocati dal vento, la scia dietro una nave o più semplicemente dietro un pilone di un ponte a seguito del passaggio dell'acqua, il rimescolamento dovuto ad un getto, la nuvola di fumi e polveri a seguito di un'esplosione/eruzione vulcanica, ecc.

Da un punto di vista sperimentale si può chiamare *corrente laminare* il moto di un fluido in cui le caratteristiche macroscopiche quali velocità e proprietà termofisiche del fluido in ogni punto e in ogni istante sono completamente determinate dall'ambiente, ovvero si ripetono uguali ogni volta che si ripete l'esperimento nelle medesime condizioni. Se questo non accade, il moto viene detto turbolento, per cui una *corrente turbolenta* è il moto di un fluido caratterizzato da elementi di casualità nella distribuzione spaziale e temporale delle proprietà macroscopiche (velocità, pressione, temperatura). Chiaramente, se l'esperimento potesse essere *ripetuto esattamente*, per esempio arrivando a fissare la posizione di ciascuna molecola in modo da riprodurre esattamente sia le condizioni al contorno che quelle iniziali, il fenomeno fisico si ripeterebbe identico.

Dal punto di vista matematico, il concetto di turbolenza si identifica con quello di *comportamento caotico* delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes. Si osservi che le correnti turbolente possono essere descritte tramite le equazioni della meccanica dei continui perché l'irregolarità che caratterizza tali correnti non si estende a scale di lunghezza così piccole da mettere in crisi l'ipotesi del continuo.

Come si sarà intuito, una definizione rigorosa di turbolenza non è semplice; tuttavia si pos-

sono identificare facilmente alcune caratteristiche tipiche di una corrente turbolenta di seguito elencate.

- **Instazionarietà.** Velocità, pressione, temperatura, densità e concentrazioni dipendono fortemente dal tempo e queste fluttuazioni di tutte le variabili fisiche si osservano su un'ampia banda di frequenze, anche nel caso di condizioni al contorno stazionarie.
- **Apparente casualità.** La turbolenza è caratterizzata da forte sensibilità alle condizioni iniziali, tanto maggiore quanto più grande è il numero di Reynolds. Questo comportamento, tipico di sistemi caotici, si traduce in un'apparente casualità ed ha come diretta conseguenza il fatto che studiare la turbolenza con metodi esclusivamente deterministici non può avere successo.
- **Vorticità e tridimensionalità.** A seguito di fluttuazioni di velocità, la turbolenza è caratterizzata da fluttuazioni di vorticità, la cui dinamica è descritta, per il caso incomprimibile  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , dall'equazione

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (8.1)$$

Come osservato nello studio della dinamica della vorticità (si veda, in particolare, la sezione 5.4), le fluttuazioni di vorticità non potrebbero autosostenersi se venisse a mancare il termine di “stretching and tilting”  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  in (8.1) (si veda anche l'equazione (5.5) per il caso generale). Siccome esso è nullo nel caso bidimensionale, e per essere diverso da zero la corrente deve come minimo essere tridimensionale, la turbolenza è necessariamente tridimensionale. In applicazioni geofisiche si parla di turbolenza bidimensionale, ma questo non è corretto.

- **Dissipazione.** La viscosità causa un aumento dell'energia interna del fluido a scapito dell'energia cinetica della corrente. Pertanto, la turbolenza richiede un continuo supporto di energia proveniente dal moto medio in modo da rimpiazzare le perdite dovute alla dissipazione viscosa. Se tale supporto di energia non ci fosse, la turbolenza si esaurirebbe velocemente.
- **Rimescolamento.** Densità, velocità, temperatura, quantità di moto, energia, concentrazioni, ecc. sono tutte grandezze fisiche che subiscono un forte rimescolamento nel caso di corrente turbolenta, che risulta decisamente superiore a quello puramente molecolare. Non a caso, per raffreddare una minestra o un tè si soffia in modo da favorire lo scambio di calore. Si osservi che il rimescolamento turbolento permette la diffusione degli inquinanti e dei veleni nell'atmosfera (se rimanessero tutti in prossimità della superficie terrestre probabilmente ci saremmo già estinti).
- **Ampia gamma di scale.** Le correnti turbolente coinvolgono una gamma di scale di lunghezza (e di tempo) che si estende fino alle dimensioni dell'intero sistema. Le grandi scale sono dettate dalla geometria e per esse gli effetti della viscosità sono trascurabili; le piccole scale sono dettate dalla viscosità che gioca in esse un ruolo fondamentale. Pertanto, una corretta modellizzazione della turbolenza richiede da un lato elementi statistici in grado di descrivere le piccole scale universali, dall'altro elementi deterministici con i quali descrivere le scale più grandi, direttamente legate al particolare problema considerato (geometria, condizioni iniziali e al contorno, ecc.).

- **Continuo.** Nonostante la turbolenza siano caratterizzata dalla presenza di molte scale, quelle più piccole sono comunque maggiori del libero cammino medio. Pertanto valgono le ipotesi del continuo e le equazioni di Navier-Stokes possono essere utilizzate per predire, nei limiti della loro forte sensibilità alle condizioni iniziali, l'evoluzione di una corrente turbolenta.
- **Corrente non fluido.** La turbolenza è una proprietà della *corrente* non del fluido nel quale la corrente si esplica.

Ovviamente, instazionarietà, tridimensionalità e vorticità *possono* essere presenti anche in correnti laminari; tuttavia in una corrente turbolenta esse *devono* essere presenti.

Vista la complessità che contraddistingue la turbolenza, una domanda sorge spontanea: perché studiarla? Essenzialmente perché interessa innumerevoli campi della vita di tutti i giorni ma, purtroppo, di essa conosciamo piuttosto poco. Infatti, allo stato attuale della ricerca non si conoscono soluzioni generali per le equazioni di Navier-Stokes. Esistono soluzioni particolari per il caso laminare, come visto nel capitolo 4, ma esse non sono di aiuto per capire il comportamento di correnti turbolente. La forte nonlinearietà associata alle equazioni le rende piuttosto intrattabili dal punto di vista matematico e questa mancanza di strumenti si traduce in senso di frustrazione da una parte e senso di sfida dall'altro. Si ricordi che la turbolenza rimane uno dei principali problemi irrisolti della fisica e che una maggior comprensione di tale fenomeno avrebbe notevoli ricadute tecnologiche ed economiche. Si pensi, ad esempio, al risparmio che si avrebbe se si potesse mantenere laminare la corrente attorno ad un aereo che vola per dodici ore considerato che metà del peso al decollo è dato dal carburante.

Tra gli innumerevoli settori tecnologici in cui compare la turbolenza ricordiamo i processi di combustione, i condotti per il trasporto di gas/petrolio, lo strato limite su ali/fusoliere di aerei, automobili, treni e sottomarini, le scie dietro i mezzi di trasporto (in particolare autocarri), il comportamento del sangue in arterie/vene, lo studio di aneurismi cerebrali, la diffusione di spray e aerosol, applicazioni in geofisica (jet streams, corrente del Golfo, correnti oceaniche), applicazioni in astrofisica (turbolenza nelle stelle, nuvole di gas interstellare e galassie gassose), ecc.

## 8.2 Scale turbolente

### 8.2.1 Cascata di energia

Consideriamo una corrente turbolenta ed identifichiamo in essa una lunghezza caratteristica delle strutture turbolente più grandi, che indichiamo con  $\ell_0$ , ed una velocità tipica delle strutture turbolente più grandi che indichiamo con  $u_0$ . È ragionevole pensare che queste due scale siano dell'ordine della geometria che caratterizza la corrente media: per esempio, per una corrente turbolenta in un tubo,  $\ell_0$  è dell'ordine del diametro e  $u_0$  dell'ordine della velocità media ottenuta dividendo la portata in massa per la sezione del tubo e per la densità del fluido. Allora possiamo definire il numero di Reynolds basato su  $\ell_0$  e  $u_0$

$$\text{Re} = \frac{u_0 \ell_0}{\nu}$$

ed una scala dei tempi

$$\tau_0 = \frac{\ell_0}{u_0}.$$

Un'altra scala dei tempi è quella legata alla diffusione viscosa, che possiamo ricavare dall'equazione di diffusione monodimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che porta a

$$\frac{u_0}{\tau_\nu} \sim \nu \frac{u_0}{\ell_0^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_\nu \sim \frac{\ell_0^2}{\nu} = \tau_0 \text{Re}.$$

In pratica, essendo le correnti turbolente caratterizzate da alti numeri di Reynolds, il tempo di diffusione viscosa è enormemente maggiore di quello tipico della corrente media, per cui sembrerebbe che la diffusione viscosa fosse del tutto irrilevante ai fini dello studio della dinamica della turbolenza. Nel 1922 Richardson, sotto l'ipotesi di turbolenza *localmente isotropa*, congetturò

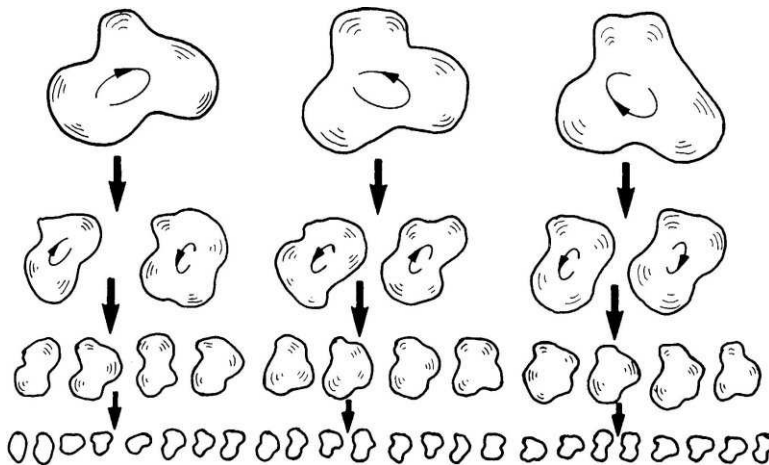


Figura 8.1: Instabilità successive delle strutture turbolente fino ad arrivare alle piccole scale dove la viscosità gioca un ruolo fondamentale.

che le strutture turbolente (i vortici) che si sono formate a seguito del processo di transizione, e che hanno le dimensioni tipiche della geometria  $\ell_0$  del campo di moto e tempi caratteristici dell'ordine di  $\tau_0$ , subiscano esse stesse un'instabilità causata da forti non linearità dando origine a strutture più piccole caratterizzate da numeri di Reynolds più piccoli, come mostrato in figura 8.1. Se le dimensioni delle nuove strutture turbolente sono tali per cui il tempo di diffusione viscosa è ancora trascurabile ( $\tau_\nu \ll \tau_0$ ), il processo di instabilità si ripete in modo ricorsivo fino a quando le strutture che si formano raggiungono scale tali da assicurare il ruolo della *viscosità* nella dinamica della turbolenza. Effettivamente, questo è del tutto coerente con il fatto che la turbolenza ha come caratteristica fondamentale la *diffusione* e quest'ultima è strettamente legata agli effetti della viscosità. Le strutture grandi (quelle di dimensioni dell'ordine di  $\ell_0$ ) prelevano energia cinetica dal moto medio e la trasferiscono a quelle più piccole le quali a loro volta le trasferiscono a quelle più piccole fino a raggiungere le strutture a livello delle quali la viscosità del fluido gioca un ruolo importante. Richardson sintetizzò queste idee nei versi

*“Big whirls have little whirls,  
which feed on their velocity,  
and little whirls have lesser whirls,  
and so on to viscosity”.*



L'energia associata alle strutture più piccole, che sono stabili, non può essere trasferita a scale ancora più piccole (che non esistono), e viene quindi dissipata sotto forma di calore. Le scale che dissipano l'energia turbolenta sotto forma di calore sono dette *scale di Kolmogorov* o *microscale* e la loro lunghezza caratteristica si indica con  $\eta$  (di conseguenza le velocità caratteristiche su questa scala si indicano con  $u_\eta$  e i tempi caratteristici con  $\tau_\eta = \eta/u_\eta$ ). Per contro, le *scale energetiche* o *grandi scale* sono quelle dell'ordine di  $\ell_0$ . Si osservi che a livello delle scale di Kolmogorov, siccome la viscosità gioca un ruolo rilevante,  $\tau_\nu$  è dell'ordine di  $\tau_0$ , ma siccome  $\tau_\nu \sim \tau_0 \text{Re}$ , si ha che il numero di Reynolds basato sulle microscale deve essere dell'ordine di 1:

$$\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim 1. \quad (8.2)$$

### 8.2.2 La teoria di Kolmogorov

Nel 1941 Kolmogorov pubblicò, in un lavoro fondamentale, la sua teoria nell'ipotesi di turbolenza in equilibrio in grado di dar conto delle scale alle quali avviene la dissipazione viscosa. Le ipotesi fondamentali alla base di tale teoria sono tre. Le riportiamo qui di seguito, assieme alle loro conseguenze.

- **Ipotesi di isotropia locale:** per numeri di Reynolds sufficientemente alti, i moti turbolenti di piccola scala sono statisticamente isotropi, ossia non dipendono dalla particolare direzione. Questo discende dall'idea di Richardson delle instabilità successive, schematizzata in figura 8.1, le quali distruggono rapidamente l'informazione relativa alla geometria del campo di moto e del flusso medio, che può anche essere non isotropo.
- **Prima ipotesi di similarità:** in ogni flusso turbolento, a numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti di piccola scala sono universali e determinate unicamente dalla viscosità  $\nu$  e dalla velocità di dissipazione di energia per unità di massa  $\epsilon$  (pertanto  $\epsilon$  ha le dimensioni di una potenza per unità di massa). Sotto questa ipotesi è possibile legare la scala delle lunghezze  $\eta$  in modo univoco a  $\nu$  e  $\epsilon$ . Siccome le dimensioni di  $\nu$  sono quelle di una velocità per una lunghezza (si pensi al numero di Reynolds che è adimensionale), ovvero quelle di una lunghezza al quadrato diviso un tempo ( $[\nu] = L^2 T^{-1}$ ) e quelle della dissipazione energetica sono una potenza per unità di massa ovvero una velocità al quadrato diviso per un tempo ( $[\epsilon] = L^2 T^{-3}$ ), imponendo che  $\eta$  si possa esprimere solo tramite  $\nu$  e  $\epsilon$ , dall'analisi dimensionale si ricava

$$[\eta] = [\nu]^\alpha [\epsilon]^\beta = (L^2 T^{-1})^\alpha (L^2 T^{-3})^\beta = L^{2\alpha} T^{-\alpha} L^{2\beta} T^{-3\beta} = L^{2\alpha+2\beta} T^{-\alpha-3\beta}.$$

Tuttavia, essendo  $\eta$  una lunghezza, deve essere

$$L^{2\alpha+2\beta} T^{-\alpha-3\beta} = L \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4}, \beta = -\frac{1}{4},$$

ovvero

$$\eta \propto \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Analogamente, si ottengono le scale di velocità e dei tempi

$$u_\eta \propto (\epsilon \nu)^{\frac{1}{4}} \quad \tau_\eta \propto \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si osservi che il numero di Reynolds basato su queste scale risulta

$$\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim \frac{(\epsilon \nu)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}}{\nu} = 1,$$

il che conferma quanto scritto nell'equazione (8.2) ottenuta basandosi unicamente sulle congetture di Richardson.

Si osservi che la produzione  $\mathcal{P}$  di energia turbolenta per unità di massa nell'unità di tempo proviene dal moto medio e sarà quindi dell'ordine dell'energia cinetica per unità di massa del moto medio  $u_0^2$  divisa per il tempo caratteristico del moto medio  $\tau_0 = \ell_0/u_0$ . Pertanto,

$$\mathcal{P} \sim \frac{u_0^2}{\tau_0} = \frac{u_0^3}{\ell_0}.$$

Questa potenza per unità di massa deve avere lo stesso ordine di grandezza della dissipazione viscosa  $\epsilon$  che si verifica sulle microscale. Si ha quindi

$$\epsilon \sim \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

per cui la scala  $\eta$  può essere riscritta come

$$\eta \propto \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{\nu^3 \ell_0}{u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \left( \frac{\nu^3 \ell_0}{\ell_0^4 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \left( \frac{\nu^3}{\ell_0^3 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \text{Re}^{-3/4},$$

da cui

$$\frac{\eta}{\ell_0} \propto \text{Re}^{-3/4}. \quad (8.3)$$

Allo stesso modo si ottengono i rapporti tra le scale di velocità e di tempo

$$\frac{u_\eta}{u_0} \propto \text{Re}^{-1/4} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \propto \text{Re}^{-1/2}. \quad (8.4)$$

- **Seconda ipotesi di similarità:** in ogni flusso turbolento a numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti su scala  $\ell$ , tale che  $\eta < \ell < \ell_0$ , sono universali e dipendono unicamente da  $\epsilon$  e  $\ell$ , indipendentemente da  $\nu$ . In pratica, su questa scala intermedia detta *scala inerziale*, l'unico parametro che conta è la dissipazione energetica  $\epsilon$ . Utilizzando, come fatto in precedenza, l'analisi dimensionale per determinare la dipendenza della velocità caratteristica  $u_\ell$  e del tempo caratteristico  $\tau_\ell$ , si ha

$$u_\ell \propto (\epsilon \ell)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad \tau_\ell \propto \left( \frac{\ell^2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Osservando, come fatto nel caso della scala  $\eta$ , che

$$\epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

si ha

$$\frac{u_\ell}{u_0} \propto \left( \frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_\ell}{\tau_0} \propto \left( \frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Se introduciamo il numero d'onda  $k = 2\pi/\ell$  ed indichiamo con  $E(k)$  l'energia cinetica turbolenta per unità di massa ed unità di numero d'onda, ovvero il suo integrale nello spazio dei numeri d'onda dà l'energia cinetica per unità di massa

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = \int_0^\infty E(k) dk,$$

allora attraverso la semplice analisi dimensionale è possibile determinare la dipendenza di  $E(k)$  da  $k$  (che è l'inverso di  $\ell$  a meno di  $2\pi$ ) ed  $\epsilon$  nel range delle scale inerziali. Si ricordi che, per la terza ipotesi di Kolmogorov, nel range inerziale le caratteristiche della turbolenza dipendono esclusivamente da  $\epsilon$  e  $\ell$ . Osservando che  $E(k)$  è un'energia per unità di massa ed unità di numero d'onda, ovvero che ha le dimensioni di una velocità al quadrato moltiplicata per una lunghezza, i.e.  $[E(k)] = L^3 T^{-2}$ , si ha

$$[E(k)] = [\epsilon]^\alpha [\ell]^\beta = (L^2 T^{-3})^\alpha (L)^\beta = L^{2\alpha+\beta} T^{-3\alpha} = L^3 T^{-2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{5}{3}.$$

Siccome le dimensioni del numero d'onda sono  $[k] = L^{-1}$ , si ottiene uno dei risultati più noti, più importanti e *meglio verificati sperimentalmente* della teoria della turbolenza di Kolmogorov nella forma

$$E(k) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}.$$

La costante di proporzionalità si ricava dagli esperimenti e si osserva essere dell'ordine dell'unità. Questa legge, che trova numerosi riscontri negli esperimenti, è stata ricavata

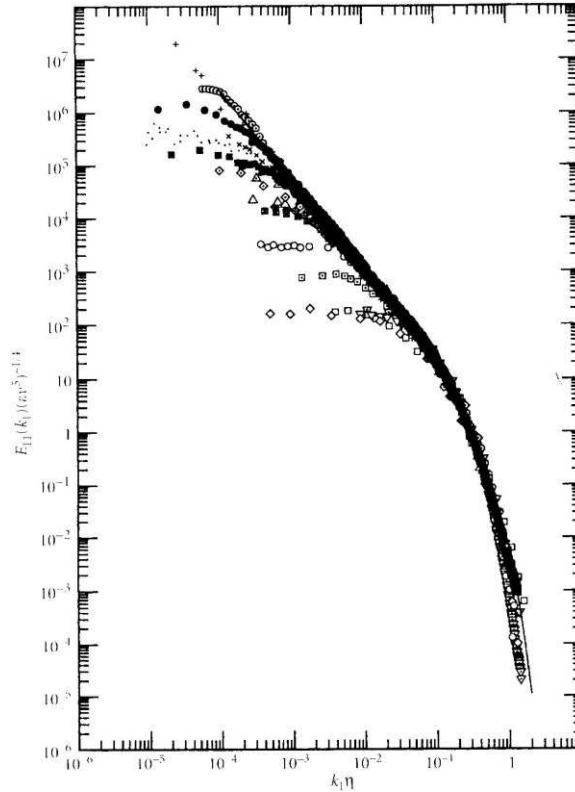


Figura 8.2: Andamento di  $E(k)$  in funzione di  $k$  per diversi esperimenti in correnti turbolente, dati opportunamente adimensionalizzati.

sulla base di considerazioni puramente dimensionali e apparentemente grossolane. Kolmogorov, matematico che si è occupato di teoria della probabilità, topologia, logica, analisi, sistemi dinamici, turbolenza e quasi tutto tranne la teoria dei numeri, scriveva

*“Mathematicians always wish mathematics to be as ‘pure’ as possible, i.e. rigorous, provable. But usually most interesting real problems that are offered to us are inaccessible in this way. And then it is very important for a mathematician to be able to find himself approximate, non-rigorous but effective ways of solving problems”.*

### 8.3 DNS: la simulazione diretta della turbolenza

Dal momento che le correnti turbolente sono ben descritte dalle equazioni di Navier-Stokes, che non perdono di validità in quanto la scala di Kolmogorov  $\eta$  è molto maggiore del libero cammino medio tra le molecole, è possibile ottenere la soluzione numerica di tali equazioni, detta DNS (direct numerical simulation). Dal punto di vista dell’accuratezza, dell’affidabilità dei risultati, e della comprensione fisica del fenomeno della turbolenza, la simulazione diretta è certamente la scelta migliore. Il suo grande limite, tuttavia, è il costo in termini di potenza di calcolo e di mole di dati prodotta. Infatti, anche la più semplice corrente turbolenta comporta tre componenti di velocità che variano sia nello spazio che nel tempo. Per dare un’idea della potenza di calcolo richiesta, basti pensare che la risoluzione spaziale dev’essere dell’ordine della scala di Kolmogorov  $\eta$  per poter rappresentare le fluttuazioni turbolente che avvengono sulle scale piccole, mentre la risoluzione nel tempo deve essere dell’ordine di  $\tau_\eta$ . D’altra parte, sappiamo che le scale più grandi della turbolenza  $\ell_0$  sono dell’ordine della dimensione spaziale del dominio di calcolo e sono caratterizzate da tempi caratteristici dell’ordine di  $\tau_0$ , per cui dalle relazioni (8.3) e (8.4) si ha

$$N_{\Delta x} = \frac{\ell_0}{\eta} \propto \text{Re}^{3/4} \quad \text{e} \quad N_{\Delta t} = \frac{\tau_0}{\tau_\eta} \propto \text{Re}^{1/2},$$

essendo  $N_{\Delta x}$  il numero di punti lungo una direzione spaziale e  $N_{\Delta t}$  il numero di passi temporali necessaria per ottenere la risoluzione spazio-temporale richiesta. Siccome per una corrente incomprimibile le variabili sono tipicamente quattro (le tre componenti di velocità e la pressione) il numero di dati da memorizzare è di circa

$$N = 4(N_{\Delta x})^3(N_{\Delta t}) \approx \text{Re}^{11/4}.$$

Per applicazioni reali il numero di Reynolds è di circa un milione, pertanto la mole di dati risulta dell’ordine di

$$N \approx 4(10^6)^{11/4} = 4 \times 10^{33/2} \approx 10^{17},$$

che è di gran lunga superiore a qualsiasi risorsa di calcolo oggi disponibile (inclusi cluster o supercomputer paralleli).

### 8.4 RANS: le equazioni mediate di Reynolds

Visto che l’approccio della simulazione diretta è assolutamente improponibile per problemi ingegneristici di interesse pratico, anziché cercare di risolvere nel dettaglio quello che succede fino alle piccole scale o su scala inerziale, si può tentare di cercare una soluzione “media”, che caratterizzi la corrente mediata su un certo intervallo di tempo. Questo approccio, detto delle equazioni mediate di Reynolds, RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), si basa sull’assunzione che la

turbolenza sia un fenomeno puramente statistico, su tutte le scale, e cerca di descriverne l'evoluzione attraverso un processo di media temporale. Pur essendo di gran lunga il più usato dal punto di vista ingegneristico, esso è molto limitato dal punto di vista della comprensione del fenomeno fisico della turbolenza. Inoltre, siccome il processo di media causa una perdita di informazioni, è necessario trovare un modo per *chiudere* le equazioni mediate a seguito della comparsa di nuove incognite che, avendo le dimensioni di sforzi, vengono comunemente chiamati *sforzi di Reynolds*.

Introduciamo le medie temporali della velocità e della pressione come

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) dt \quad \bar{P}(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\mathbf{r}, t) dt$$

in modo tale da riscrivere le variabili  $(\mathbf{U}, P)$  come somma di una parte stazionaria e dipendente solo dallo spazio e di una fluttuazione (detta fluttuazione turbolenta) dipendente sia dallo spazio che dal tempo ma avente media nulla:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, t) = \bar{P}(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r}, t).$$

Se si introducono queste variabili nelle equazioni di Navier-Stokes incomprimibili ( $\rho$  e  $\nu$  entrambe costanti) e si mediano le equazioni stesse tramite l'integrazione nel tempo, si ottengono le equazioni

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} \right). \quad (8.6)$$

Grazie alle proprietà di linearità della media temporale precedentemente definita (il che significa che commuta con tutti gli operatori lineari, ovvero derivate ed integrali) e al fatto che la perturbazione è a media nulla, per l'equazione di continuità si ha

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + 0 = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j},$$

per cui la (8.5) diventa

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0.$$

Il primo termine della (8.6) si annulla in quanto  $\bar{U}_j$  non dipende dal tempo e quindi

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} = 0 + 0.$$

Per il secondo termine della (8.6), invece, si ha

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j},$$

essendo

$$\frac{\partial \bar{U}_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0.$$

Il termine di pressione si riduce a

$$\overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i},$$

mentre il termine di laplaciano diventa semplicemente

$$\overline{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} \right)} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) + 0 = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right).$$

In conclusione, le equazioni per una corrente turbolenta sono formalmente simili a quelle laminari e stazionarie per la componente media, con l'aggiunta di un termine non lineare non meglio definito:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}. \quad (8.8)$$

Si osservi che il termine viscoso può essere riscritto sfruttando la (8.7), ovvero il fatto che la divergenza della corrente media è nulla. Infatti,

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

da cui

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right).$$

Utilizzando questa riscrittura del termine viscoso ed osservando che

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j),$$

l'equazione (8.8) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \right). \quad (8.9)$$

I termini aggiuntivi

$$\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$$

sono detti *sforzi di Reynolds* o *sforzi turbolenti* e rappresentano un problema in quanto sono incogniti e quindi ci sono più incognite di equazioni. Questo è noto come *problema della chiusura delle equazioni mediate di Reynolds*. Si potrebbe tentare di scrivere un'equazione di evoluzione per essi, ma si finirebbe per introdurre ulteriori incognite nel problema. Si osservi, tuttavia, che il problema sarebbe risolto se tali sforzi fossero in qualche modo *modellati* legandoli al flusso medio o se fossero rimpiazzati da relazioni *empiriche* ottenute da prove sperimentali. Infatti, essi sono strettamente legati alla correlazione tra  $u_i(\mathbf{r}, t)$  e  $u_j(\mathbf{r}, t)$  essendo

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\overline{u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}, t)}}{\sqrt{[u_i(\mathbf{r}, t)]^2} \sqrt{[u_j(\mathbf{r}, t)]^2}}.$$

## 8.5 Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds

Le equazioni mediate di Reynolds non hanno fatto altro che concentrare le difficoltà in un unico termine, il tensore degli sforzi di Reynolds  $\rho \overline{u_i u_j}$ . Questo non risolve il problema di determinare la corrente media in quanto non è possibile ricavare tale tensore a partire dalla conoscenza di essa. Affinché, dunque, le equazioni mediate siano di qualche utilità occorre trovare un modo per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal moto medio. Lo scopo dei modelli di turbolenza è proprio quello di ricavare gli elementi del tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal campo medio di velocità e pressione in modo da ottenere un sistema di equazioni con pari numero di equazioni e di incognite. Si osservi che questo obiettivo non è banalmente raggiungibile in quanto, nonostante a livello della scala di Kolmogorov si possa considerare la turbolenza in qualche modo “universale”, di sicuro le scale turbolente più grandi non lo sono affatto e dipendono dalla geometria del problema in esame. Pertanto, i modelli di turbolenza dipendono fortemente dal problema che si sta considerando e non sono per nulla generali. Questo è il grande limite di questo approccio.

### 8.5.1 Ipotesi di Boussinesq e viscosità turbolenta

L'equazione (8.9) può essere riscritta in modo molto compatto come

$$\frac{\partial \overline{U_i U_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

essendo  $\tau_{ij}$  il tensore degli sforzi totali (viscosi + quelli di Reynolds) così definito:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}.$$

L'ipotesi che il rimescolamento tipico delle correnti turbolente produca effetti simili a quelli causati dalla diffusione molecolare dovuta alla viscosità del fluido, condusse Boussinesq a postulare una forma degli sforzi di Reynolds simile a quella degli sforzi viscosi, con una analoga dipendenza dalle derivate della corrente media. Il modo più corretto per riscrivere il tensore degli sforzi di Reynolds alla stregua di quelli viscosi è tramite l'introduzione di un tensore  $\nu_{ijhk}$  tale per cui risulti

$$\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \nu_{ijhk} \left( \frac{\partial \overline{U_h}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_h} \right).$$

Chiaramente ora il problema della chiusura è trasferito alla conoscenza di 36 componenti del tensore  $\nu_{ijhk}$  (che è simmetrico, come è simmetrico il tensore degli sforzi  $\tau_{ij}$  che risulta determinato da 6 costanti). Tuttavia, semplificando ulteriormente il modello in modo da considerare non nulli sono gli elementi diagonali di  $\nu_{ijhk}$  e supponendo che il legame sia isotropo, si arriva ad introdurre *un solo parametro*  $\nu_T$ , funzione della posizione ed eventualmente del tempo, ottenendo

$$\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \nu_T \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right), \quad (8.10)$$

che permette di riscrivere il tensore degli sforzi totali semplicemente come

$$\tau_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right).$$

Il coefficiente  $\nu_T$  ha le dimensioni di una viscosità cinematica e prende il nome di *viscosità turbolenta* o *eddy viscosity*. Si osservi che le equazioni così ottenute differiscono da quelle usuali

per il solo fatto che i termini viscosi sono espressi come somma dei consueti termini dipendenti dalla viscosità molecolare del fluido (proprietà fisica ben definita e qui assunta costante ed uniforme) e di termini dipendenti dalla viscosità turbolenta, che è, al contrario, funzione della posizione e dell'atto di moto, e che pertanto deve essere mantenuta all'interno degli operatori di derivata spaziale. Il problema della chiusura è stato notevolmente semplificato anche se non risolto completamente in quanto rimane da assegnare la costante  $\nu_T$ . Per questo motivo modelli che fanno intervenire la viscosità turbolenta sono molto usati in ingegneria anche se hanno almeno due limiti piuttosto evidenti legati a

1. **scale:** nel caso della diffusione molecolare c'è una separazione netta fra le scale su cui avvengono i fenomeni di diffusione, dell'ordine del libero cammino medio delle molecole, e quelle della corrente media. Nel caso della turbolenza, invece, questa separazione di scale non esiste perché il fenomeno della cascata di energia le mette in gioco tutte, a partire da quelle più grandi fino a quelle dissipative, passando per le scale inerziali. Questo fatto causa tempi caratteristici della turbolenza decisamente inferiori a quelli della corrente media, e questo si traduce in un effetto “memoria” causato dagli elevati tempi di adattamento delle strutture turbolente alle condizioni esterne (tali effetti non sono presenti nel caso laminare per il quale i tempi di adattamento a livello molecolare sono estremamente rapidi). Inoltre, siccome la diffusione turbolenta avviene su più scale, essa non è certamente locale e per questo non è descrivibile da equazioni differenziali che contengano come variabile la sola velocità media.
2. **isotropia:** nel caso di un corrente laminare il legame fra gli sforzi e la velocità di deformazione è isotropo. Ammesso che vi sia un legame di questo tipo nel caso degli sforzi turbolenti, non ci sono motivi perché esso sia isotropo, se non in casi molto particolari.

Come detto il problema della chiusura è definitivamente risolto solo quando si fornisce un modo per determinare il coefficiente  $\nu_T$ . Nel seguito sono riportati tre approcci, di vario ordine a seconda del numero di equazioni differenziali alle derivate parziali (di evoluzione) che vengono risolte per la determinazione di  $\nu_T$ .

### 8.5.2 Modello di ordine 0 per $\nu_T$ : *mixing length*

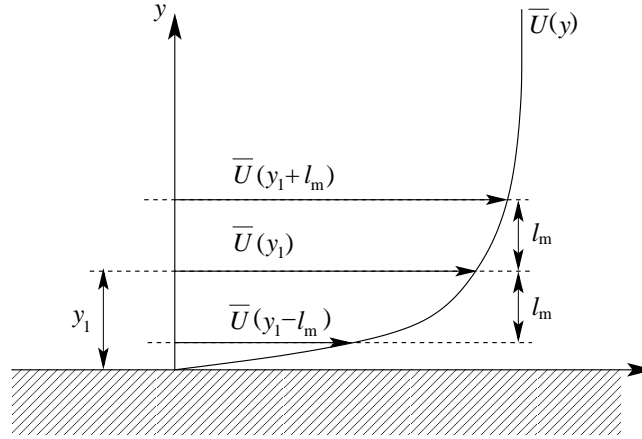
Questo modello non utilizza nessuna equazione differenziale ulteriore, risulta particolarmente semplice da implementare, è uno dei primi ad essere stato utilizzato, e funziona solo in contesti molto particolari. Concentriamoci su uno strato di corrente turbolenta in prossimità di una parete, come riportato in figura 8.3 (per esempio lo strato limite turbolento su una lamina piana). A causa della presenza della parete, il profilo medio della componente di velocità nella direzione della corrente è una sola funzione della sola distanza dalla parete  $y$ ,

$$\bar{U} = \bar{U}(y).$$

Consideriamo un “elemento di fluido” che si trovi ad una distanza  $y_1 + \ell_m$  dalla parete dove la velocità è  $U(y_1 + \ell_m)$ . Se esso si sposta verso il basso arrivando ad una distanza  $y_1$  dalla parete, dove la velocità  $\bar{U}(y_1)$  è minore rispetto a  $\bar{U}(y_1 + \ell_m)$ , porterà con sé maggior quantità di moto provocando, per questo, una fluttuazione di velocità positiva e dell'ordine di

$$\Delta \bar{U}_+(y_1) = \bar{U}(y_1 + \ell_m) - \bar{U}(y_1) \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$



Figura 8.3: Schematizzazione della *mixing length*.

Viceversa, un elemento di fluido che si trovi inizialmente ad una distanza  $y_1 - \ell_m$  dalla parete dove la velocità è  $\bar{U}(y_1 - \ell_m)$ , quando si sposta verso l'alto arrivando ad una distanza  $y_1$  dalla parete, dove la velocità  $\bar{U}(y_1)$  è maggiore rispetto a  $\bar{U}(y_1 - \ell_m)$ , porterà con sé minor quantità di moto provocando, per questo, una fluttuazione di velocità negativa e dell'ordine di

$$\Delta \bar{U}_-(y_1) = \bar{U}(y_1) - \bar{U}(y_1 - \ell_m) \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Pertanto, possiamo stimare che la fluttuazione di velocità nella direzione della corrente, che indichiamo con  $u$ , sia una media delle due e sia dell'ordine di

$$u \approx \frac{\Delta \bar{U}_+(y_1) + \Delta \bar{U}_-(y_1)}{2} = \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Si osservi che  $\ell_m$  è la distanza che, statisticamente, un elementino di fluido continuo percorre prima di interagire con altri elementi di fluido, cui Prandtl diede il nome di *lunghezza di mescolamento* o *mixing length*. Paragonando la diffusione turbolenta a quella molecolare,  $\ell_m$  è più o meno l'equivalente del libero cammino medio (distanza che devono percorrere le molecole per interagire tra di loro). Se assumiamo che anche la fluttuazione turbolenta in direzione normale alla parete, che indichiamo con  $v$ , sia dello stesso ordine di grandezza, possiamo dire che

$$v \approx u \approx \ell_m \frac{d\bar{U}}{dy},$$

da cui

$$\overline{uv} \approx \ell_m^2 \left( \frac{d\bar{U}}{dy} \right)^2.$$

Per risalire al segno del prodotto  $\overline{uv}$  nel caso in cui  $d\bar{U}/dy > 0$  (caso in figura 8.3), si osservi che quando  $v > 0$  (l'elemento di fluido sale da  $y_1 - \ell_m$  a  $y_1$ ) si ha  $u < 0$ , mentre quando  $v < 0$  (l'elemento di fluido scende da  $y_1 + \ell_m$  a  $y_1$ ) si ha  $u > 0$ . Pertanto, se  $d\bar{U}/dy > 0$  le fluttuazioni  $u$  e  $v$  sono mediamente di segno opposto per cui la media del loro prodotto avrà segno negativo; al contrario se  $d\bar{U}/dy < 0$  le fluttuazioni  $u$  e  $v$  sono mediamente dello stesso segno per cui la media del loro prodotto è positiva. Tenuto conto di queste considerazioni, possiamo scrivere

$$\overline{uv} = -\ell_m^2 \left| \frac{d\bar{U}}{dy} \right| \frac{d\bar{U}}{dy},$$

ma essendo

$$\rho \overline{uv} = -\rho \nu_T \frac{d\overline{U}}{dy},$$

si ha

$$\nu_T = \ell_m^2 \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right|.$$

Si osservi che la viscosità turbolenta così ottenuta è positiva, che è consistente con il fatto che debba provocare diffusione, ma è ancora incognita in quanto non è stata definita la lunghezza di mescolamento  $\ell_m$ . In realtà essa varia da geometria a geometria, ma una scelta ragionevole di  $\ell_m$  fu proposta proprio da Prandtl come proporzionale alla distanza dalla parete più vicina:

$$\ell_m = ky, \quad k = 0.41 \quad (\text{costante di von Kármán}).$$

In conclusione,

$$\nu_T = k^2 y^2 \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right|, \quad k = 0.41.$$

Il limite principale di questo modello di turbolenza consiste nel fatto di essere stato costruito esplicitamente per la corrente in prossimità di una parete. Inoltre, non è applicabile a correnti con ricircolazione, non tiene conto dei processi di convezione e diffusione della turbolenza, e non è in grado di trattare problemi di convezione termica turbolenta. Il fatto di non prevedere una diffusione turbolenta si osserva laddove  $\nu_T = 0$  a causa del fatto che la derivata  $d\overline{U}/dy = 0$ . Questo succede, tipicamente per motivi di simmetria, al centro di un getto, di un tubo assialsimmetrico o di un canale piano. Contrariamente a quanto previsto dal modello, i dati sperimentali dimostrano la presenza di diffusione turbolenta non trascurabile sull'asse di simmetria. Per ovviare a queste debolezze, esistono numerose variazioni della teoria originale di Prandtl, ciascuna delle quali porta a definizioni della lunghezza di mescolamento più adatte, di volta in volta.

### 8.5.3 Modello di ordine 1 per $\nu_T$ : $K$

Per superare alcuni dei limiti dei modelli algebrici di viscosità turbolenta, sono stati sviluppati i modelli differenziali che, in generale, prevedono la scrittura e l'integrazione di una o più equazioni differenziali che descrivono direttamente la dinamica del tensore degli sforzi di Reynolds, oppure la dinamica di una o più grandezze scalari correlate con la viscosità cinematica turbolenta introdotta da Boussinesq. Il vantaggio è che le equazioni differenziali di trasporto per queste grandezze consentono, in ogni caso, di valutare la viscosità turbolenta tenendo conto della *effettiva storia della corrente*.

Il *modello K* utilizza un'equazione differenziale per l'evoluzione dell'energia cinetica turbolenta media

$$\overline{K} = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i},$$

ottenuta la quale la viscosità turbolenta è modellata dall'espressione

$$\nu_T = c \ell_m \sqrt{\overline{K}},$$

dove  $\ell_m$  è la lunghezza di mescolamento e  $c = 0.55$  fornisce risultati corretti nella regione logaritmica dello strato limite turbolento. La lunghezza di mescolamento  $\ell_m$  si ottiene da "ricette" che variano da caso a caso e che per correnti in presenza di parete prevedono certamente un legame con la distanza dalla parete stessa. L'equazione di evoluzione dell'energia cinetica

turbolenta media  $\overline{K}$  si ottiene dalle equazioni della quantità di moto. Partendo dalle equazioni della quantità di moto per ciascuna componente nella forma

$$\frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\overline{U}_j + u_j) \frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

ed espandendole come

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

dopo aver osservato che, grazie all'equazione di continuità,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

moltiplichiamo ciascun termine per  $u_i$  e prendiamo la media:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)} + \nu \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}.$$

Analizzando i termini uno ad uno si ha:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right)$$

$$\overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} = 0$$

$$\overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\overline{U}_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right)} = \overline{\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right)}$$

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} = \overline{\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}$$

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right)} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} u_i u_i u_j \right)} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho} \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}} \quad \left( \text{essendo } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \right)$$

$$\overline{\nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)} = 0$$

$$\overline{\nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \overline{\nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \nu \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) \right) - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}.$$

In definitiva, l'equazione iniziale, valida per  $i = 1, 2, 3$ , si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) + \overline{U_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u_i}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) \right) - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Si osservi che nell'equazioni è sottintesa la somma sugli indici ripetuti in modo da esaurire le sommatorie su  $i$ . Spostando tutti i termini dal terzo in poi a secondo membro, e raggruppando le derivate parziali rispetto a  $x_j$ , si ottiene

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j}}_{\text{variazione totale di } \overline{K}} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}}_{\text{produzione di } \overline{K}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_j} + \nu \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right)}_{\text{diffusione di } \overline{K}} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{dissipazione di } \overline{K}}, \quad (8.11)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{D\overline{K}}{Dt} = \mathcal{P} + \mathcal{D} - \epsilon.$$

Evidentemente, tutti i termini di destra devono essere *modellati* in quanto sono medie di prodotti di grandezze fluttuanti. Si osservi che, in base all'ipotesi di Boussinesq (8.10), il termine di produzione diventa semplicemente

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = \nu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) = \nu_T \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)^2 + \nu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}.$$

Il termine di diffusione non legato a  $\overline{K}$  si modella drasticamente come

$$-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_j} = \frac{\nu_T}{\sigma_K} \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j},$$

con  $\sigma_K \approx 1$ , ottenendo come diffusione semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_j} + \nu \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\nu_T}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right),$$

mentre il termine di dissipazione viene modellato altrettanto drasticamente come

$$\epsilon = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m},$$

dove  $\ell_m$  è la lunghezza di mescolamento e  $C_D$  è un parametro che deve essere ulteriormente specificato in quanto dipende dal tipo di corrente in esame. In conclusione, il modello si scrive

$$\frac{D\overline{K}}{Dt} = \nu_T \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)^2 + \nu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\nu_T}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) - C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m}.$$

I limiti più evidenti di questo modello sono lo scarso fondamento teorico e la mancanza di validità generale. Questo si traduce nella necessità di tarare in modo diverso i coefficienti nelle equazioni a seconda del problema affrontato, al fine di ottenere risultati di qualità accettabile. Un altro limite consiste nel fatto che, per correnti in geometrie complesse, non è facile individuare la lunghezza di mescolamento corretta, ammesso che ne esista una. Per questo motivo il modello di turbolenza  $K$  ad una sola equazione trova applicazione esclusivamente per correnti in geometria relativamente semplice, ed è poco utilizzato in campo ingegneristico.

#### 8.5.4 Modello di ordine 2 per $\nu_T$ : $K$ - $\epsilon$

Come visto, uno dei limiti del modello ad una sola equazione differenziale è che la lunghezza di mescolamento è prescritta con una ricetta *ad hoc* che cambia caso per caso. L'obiettivo di un modello a due equazioni differenziali è di prescrivere una seconda equazione di evoluzione per una grandezza tipica del moto legandola all'evoluzione del moto medio. In pratica si tratta di definire una qualsiasi variabile della forma

$$\overline{K}^\alpha \ell_m^\beta$$

e di scriverne l'equazione di trasporto/diffusione partendo dalle equazioni di Navier-Stokes a manipolandole come visto per ricavare l'equazione differenziale per  $\overline{K}$ . Tra le possibili scelte di  $\overline{K}^\alpha \ell_m^\beta$ , le più comuni sono  $\overline{K} \ell_m$ ,  $\sqrt{\overline{K}} \ell_m$  (frequenza turbolenta),  $\overline{K} \ell_m^2$  (vorticità turbolenta),  $\overline{K}^{3/2} / \ell_m$  (velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta specifica). La scelta più comune in assoluto è sicuramente l'ultima, per la quale si pone

$$\bar{\epsilon} = \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m},$$

che, una volta note  $\overline{K}$  e  $\bar{\epsilon}$  dalla risoluzione delle due equazioni differenziali, permette di determinare  $\ell_m = \overline{K}^{3/2} / \bar{\epsilon}$ . Inoltre, una volta note  $\overline{K}$  e  $\bar{\epsilon}$ , si osserva che, in base a considerazioni di tipo dimensionale, la viscosità turbolenta può essere espressa come

$$\nu_T = C_\mu \frac{\overline{K}^2}{\bar{\epsilon}}.$$

Un valore tipicamente usato per la costante è  $C_\mu = 0.09$ . L'equazione per  $\bar{\epsilon}$  alla quale si perviene è

$$\frac{D\bar{\epsilon}}{Dt} = C_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\overline{K}} \nu_T \left[ \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\overline{K}},$$

con valori tipici delle costanti

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92.$$

Questo modello a due equazioni presenta il vantaggio che la viscosità turbolenta è calcolata sulla base di una velocità turbolenta e di una scala di lunghezze le cui distribuzioni spaziali non sono più assegnate a priori, ma sono entrambe calcolate con equazioni di trasporto che tengono conto della storia della corrente. Per questo, esso rimane il più usato a livello industriale nelle sue innumerevoli versioni estese o modificate. Tuttavia, il modello  $K$ - $\epsilon$  soffre delle limitazioni tipiche dei modelli a viscosità turbolenta: mancanza di un vero fondamento teorico, mancanza di universalità e impossibilità di riprodurre turbolenza non isotropa. Per cercare di superare questi limiti si sono sviluppati anche modelli che prevedono l'integrazione di un'equazione di trasporto per ciascuna delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds (ovviamente sempre in termini di variabili medie). Anche questi ultimi, peraltro, continuano a rimanere poco generali. Bisogna inoltre considerare che, all'aumentare del numero delle equazioni differenziali che va ad aggiungersi alle equazioni mediate di Reynolds, il lavoro di calibrazione dei vari parametri diventa sempre più complicato e l'impegno di calcolo rischia di diventare quasi confrontabile con quello richiesto da altri metodi più sofisticati come la Large Eddy Simulation.

## 8.6 LES: simulazione dei grandi vortici

Per quanto visto, la simulazione diretta della turbolenza è impensabile per problemi di interesse pratico, d'altra parte proprio per le geometrie di interesse pratico le equazioni mediate di Reynolds e i vari modelli di turbolenza proposti non sono certamente affidabili in quanto i "coefficienti di taratura" cambiano da problema a problema. Un buon compromesso tra affidabilità del modello e tempo di calcolo può essere raggiunto richiamando quanto visto sulla distribuzione delle scale turbolente. Osserviamo che

- **le strutture turbolente di grande scala** hanno natura convettiva e numeri di Reynolds relativamente elevati (tanto che, per instabilità, sono in grado di produrre vortici di dimensioni più ridotte), hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio, hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente), estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta, hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Reynolds della corrente media, e sono generalmente anisotrope;
- **le strutture turbolente di scala intermedia** sono generate dall'instabilità non lineare delle grandi strutture, sono anch'esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati, hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai vortici piccoli l'energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;
- **le strutture turbolente di piccola scala** nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi, sono stabili in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds bassi (dell'ordine dell'unità), hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosità, l'energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi, hanno vita media molto più breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale, hanno tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio, hanno dimensioni relative rispetto a quelle dei grandi vortici che dipendono quasi esclusivamente dal numero di Reynolds della corrente, hanno una struttura più universale (ovvero indipendente dal tipo di corrente) e relativamente isotropa.

Queste considerazioni portano a due conclusioni che sono le idee alla base dell' *Large Eddy Simulation* (DNS):

1. i vortici grandi e medi devono essere necessariamente (e quindi vengono) risolti esplicitamente, come in una DNS,
2. soltanto i vortici piccoli si prestano ad essere (e quindi vengono) modellati.

In pratica, mentre con l'approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si è costretti ad usare modelli che devono simulare gli effetti della totalità dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente che non possono essere universali perché dipendono dalla geometria, con la LES si può sperare, modellando i soli vortici piccoli (quelli grandi sono risolti direttamente) di puntare a modelli non eccessivamente complicati ma sufficientemente universale, dal momento che i vortici che richiedono la modellazione hanno per loro natura caratteristiche universali. Anche l'isotropia, implicita nel concetto dello scalare viscosità turbolenta, è più ragionevolmente ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala.

Si ricordi che per ricavare le equazioni mediate di Reynolds si era assunto il campo di moto pari alla somma di una parte media ed una fluttuante e si era poi proceduto ad un *filtraggio temporale* ottenendo l'evoluzione delle grandezze medie modellando quelle fluttuanti tramite la grandezze medie stesse. Nella LES, invece, si applica un *filtraggio spaziale* risolvendo direttamente la parte media e modellando il resto sulla base di considerazioni molto generali basate sulle caratteristiche dei vortici di piccola scala. Ragionando in termini di numero d'onda  $k$  ( $k = 2\pi/\lambda$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda) e trasformata di Fourier spaziale, i numeri d'onda minori di una certa soglia  $k_S$  corrispondono a scale spaziali grandi e sono risolti, mentre quelli superiori a  $k_S$ , che corrispondono a scale spaziali molto piccole, sono modellati. Chiaramente,  $k_S$  è legato al passo di discretizzazione spaziale  $\Delta$  in quanto, per il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon, solo le componenti di Fourier con numeri d'onda inferiori a  $\pi/\Delta$  possono essere univocamente rappresentate. Procedendo al filtraggio spaziale (tramite l'operatore di convoluzione), si arriva alle equazioni di continuità

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0$$

e della quantità di moto

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}.$$

Si osservi che, a differenza delle equazioni mediate di Reynolds (RANS), nella large eddy simulation (LES) la componente media non è stazionaria perché la media è nello spazio e non nel tempo. Allo stesso modo delle RANS, però, anche nella LES compare il termine

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}$$

che chiameremo *sforzi filtrati*, o *sforzi sottogriglia specifici*, che rappresentano l'effetto delle componenti di Fourier di piccola scala ( $k > k_S$ ) sulla velocità (media) filtrata. Come per le RANS, anche qui occorre modellare gli sforzi filtrati in termini della velocità filtrata attraverso qualche modello che faccia intervenire le caratteristiche del filtro, in particolare  $k_S$  o  $\Delta$ , e che sia il più universale possibile. Si noti che la presenza di  $\Delta$  elimina il problema di una lunghezza di riferimento che, nel caso dei modelli di chiusura per le RANS, era legata alla distanza dalla parete. I modelli degli sforzi sottogriglia più usati sono di tipo algebrico, ovvero non comportano l'introduzione di equazioni differenziali per descriverne la loro evoluzione, e si riconducono essenzialmente al *modello di Smagorinski*. Siccome l'energia cinetica nel moto turbolento viene trasferita dai vortici più grandi a quelli più piccoli: l'effetto degli sforzi sottogriglia, in termini energetici, deve essere (mediamente) quello di sottrarre alla parte risolta della corrente quell'energia cinetica che i vortici più piccoli, in quanto filtrati, non sono in grado di dissipare. In questo senso, un modello a viscosità turbolenta, che è intrinsecamente dissipativo, garantisce a priori che il flusso medio di energia avvenga nel verso corretto. Se indichiamo il tensore dei gradienti della velocità filtrata con

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

in modo tale che l'ipotesi alla Boussinesq (8.10) permetta di riscrivere il tensore degli sforzi totali (viscosi + filtrati) semplicemente come

$$\tau_{ij} = 2\rho(\nu + \nu_T)\bar{S}_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

in base all'analisi dimensionale si deduce che, affinché la viscosità turbolenta sia esprimibile tramite  $\Delta$  e le derivate spaziali della velocità filtrata  $\bar{S}_{ij}$ , deve essere

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|,$$

essendo  $\bar{S}$  e  $\Delta$  rispettivamente il modulo del tensore  $\bar{S}_{ij}$  e il passo di discretizzazione spaziale medio così definiti

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad \text{e} \quad \Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}.$$

Il coefficiente  $C_S$  può essere calcolato analiticamente sotto l'ipotesi di equilibrio locale ottenendo 0.23. In pratica, però, questo valore non è universale ma dipende dalla discretizzazione (e quindi dalla risoluzione) spaziale del calcolo, dal tipo di filtro utilizzato, ecc. per cui si trova in letteratura una gamma piuttosto ampia di valori consigliati, che spesso sono stati ottenuti calibrando il modello per confronto con soluzioni ottenute con la DNS. Valori ragionevoli sono  $0.1 \leq C_S \leq 0.24$ . Si osservi che, confrontando l'espressione per la viscosità turbolenta appena introdotta con quella riferita alla mixing length, si arriva alla conclusione  $\ell_m = C_S \Delta$ .

Sebbene anche la LES richieda una qualche operazione di calibrazione dei parametri che compaiono nei vari modelli sottogriglia oggi disponibili, i suoi pregi rimangono una minore sensibilità alla scelta del modello rispetto alle RANS e un impegno di calcolo molto inferiore a quello di una DNS, soprattutto per le correnti a numeri di Reynolds relativamente elevati. Per contro, la LES implica di affrontare comunque un problema tridimensionale e dipendente dal tempo, anche nel caso (piuttosto comune) di fenomeni mediamente bidimensionali o stazionari. In questi casi il costo computazionale di una LES è notevolmente superiore a quello richiesto dalle RANS, anche quando quest'ultime sono accoppiate a modelli di turbolenza molto raffinati.



## Capitolo 9

# Leggi di conservazione iperboliche

### 9.1 Leggi di conservazione e carattere iperbolico

Come noto dal capitolo 2, le equazioni di Navier-Stokes (2.8)-(2.10) sono leggi di conservazione del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u})}{\partial x_3} = \mathbf{S}(\mathbf{u}),$$

dove si è indicato con  $\mathbf{u}$  il vettore delle incognite, con  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{u})$  i *flussi* nelle tre direzioni  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (in generale i flussi dipendono dalle incognite) e con  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  il termine di sorgente (in generale esso non dipende solamente dalle incognite ma anche dalle loro derivate spaziali). Per l'equazione di conservazione della massa il termine di sorgente è nullo, mentre non lo è per le altre equazioni.

In questo capitolo ci concentriamo esclusivamente su *leggi di conservazione* monodimensionali (la coordinata spaziale è una sola,  $x$ ), con termine di *sorgente nullo* e scritte nella *forma conservativa*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0. \quad (9.1)$$

Un esempio sono le *equazioni di Eulero monodimensionali* ottenibili dalle equazioni di Navier-Stokes (2.8)-(2.10) imponendo le condizioni di corrente ideale ( $\kappa = \mu = 0$ ), supponendo trascurabili le forze di volume ( $\mathbf{g} \equiv 0$ ) e considerando una sola direzione spaziale ( $x_1 \equiv x, u_1 \equiv u$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_{\text{tot}} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_{\text{tot}} + p) \end{pmatrix} = 0, \quad (9.2) \\ \frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_{\text{tot}} u}{\partial x} &= -\frac{\partial p u}{\partial x} \end{aligned}$$

per le quali il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$  ed il loro flusso  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  sono rispettivamente

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_{\text{tot}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_{\text{tot}} + p) \end{pmatrix}.$$

Il carattere *iperbolico* delle leggi di conservazione deriva da considerazione puramente matematiche. Un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali *lineari e a coefficienti costanti*

del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{b} = 0,$$

dove  $\mathbf{u}$  è il vettore delle incognite e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}$  sono costanti, è detto *iperbolico* se la matrice  $\mathbf{A}$  ha  $m$  autovalori reali. Si dice *strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti. Il sistema conservativo non lineare (9.1) è detto *iperbolico* se la matrice Jacobiana

$$(\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$$

ha  $m$  autovalori reali per ogni  $\mathbf{u}$ , o quantomeno nel range di interesse; si dice *strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti. Si osservi che le equazioni di Navier-Stokes (2.8)-(2.10) *non sono iperboliche* poiché il termine di sorgente dipende dalle derivate seconde delle incognite.

I motivi per cui viene dato ampio spazio allo studio di leggi di conservazione di tipo iperbolico sono molteplici:

- leggi di conservazione del tipo (9.1) sono comuni a diversi ambiti della scienza e dell'ingegneria e, di conseguenza, della matematica applicata;
- la risoluzione di sistemi iperbolici del tipo (9.1) richiede la conoscenza di tecniche particolari dovute a specifiche difficoltà (per esempio la formazione di onde d'urto) che si incontrano *esclusivamente* in questi ambiti: raramente queste tecniche sono discusse altrove;
- metodi numerici *naïf* basati su differenze finite possono funzionare per soluzioni continue, ma producono risultati devastanti per soluzioni discontinue (onde d'urto): solo la conoscenza di metodi numerici *ad hoc* consente di calcolare soluzioni numericamente accettabili per problemi del tipo (9.1).

## 9.2 Equazioni iperboliche

Con lo scopo finale di capire come risolvere le equazioni di Eulero (9.2), iniziamo con lo studio di una sola equazione (caso scalare), dapprima lineare e poi non lineare, per arrivare ai sistemi iperbolici non lineari del tipo (9.1).

### 9.2.1 Il caso scalare lineare a coefficienti costanti (trasporto)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (9.3)$$

costituito da un'equazione iperbolica scalare, lineare, a coefficienti costanti e da una condizione iniziale. Questo problema è detto “del trasporto” in quanto, come si verifica immediatamente, ammette la soluzione

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad t \geq 0,$$

che, al passare del tempo, è una semplice traslazione del dato iniziale verso destra nel piano  $x-t$  se  $a > 0$  o verso sinistra se  $a < 0$ . La figura 9.1 mostra questa traslazione rigida al crescere del tempo. Indipendentemente dal segno di  $a$ , si osserva che la soluzione rimane costante lungo le

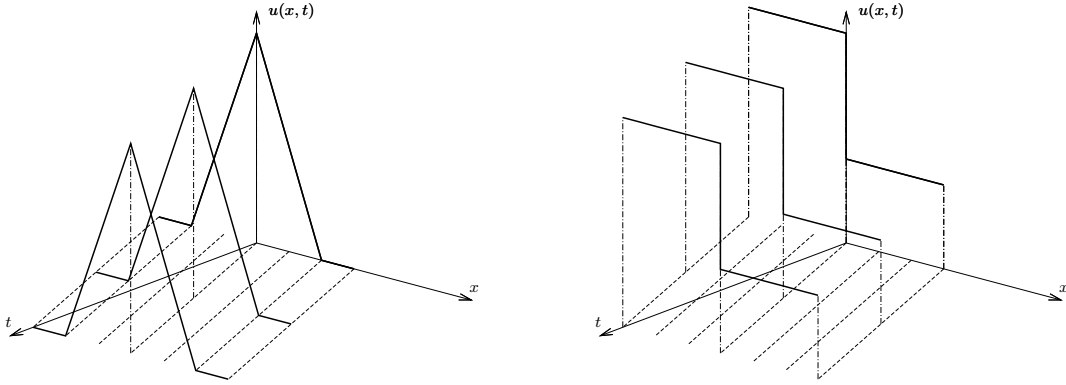


Figura 9.1: Evoluzione della soluzione (linea continua) nel tempo per l'equazione  $u_t + au_x = 0$ , linee caratteristiche tratteggiate: condizione iniziale continua (sinistra) e discontinua (destra).

rette  $x - at = x_0$ , che soddisfano il problema differenziale ordinario

$$\begin{cases} x'(t) = a \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Valutando  $u(x, t)$  sulla linea  $x = x(t)$  soluzione del problema (9.4),  $u(x, t) = u(x(t), t) = u(t)$ , e differenziando rispetto all'unica variabile indipendente  $t$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(x(t), t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(u(x(t), t)) + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u(x(t), t)) \right] x'(t) \\ &= u_t + au_x \\ &= 0, \end{aligned}$$

che conferma che  $u$  è costante lungo la linea che soddisfa il problema (9.4). Queste linee sono dette *caratteristiche* o *linee caratteristiche* e sono definite come quelle linee nel piano  $x-t$  tali per cui su di esse la PDE diventa una ODE.

Siccome la soluzione al tempo  $t$  è semplicemente quella iniziale traslata a destra o sinistra di  $at$ , allora  $u(\bar{x}, \bar{t})$  dipende dal solo punto  $x_0$  che al tempo  $t = 0$  giaceva sulla caratteristica passante per  $(\bar{x}, \bar{t})$ . In altre parole, il *dominio di dipendenza* della soluzione è semplicemente

$$\mathcal{D}_{\text{dip}}(\bar{x}, \bar{t}) = \{x_0\}.$$

Oltre al dominio di dipendenza c'è anche una regione di influenza

$$\mathcal{D}_{\text{inf}}(\bar{x}, \bar{t}) \subset \{x : |x - \bar{x}| \leq a_{\max} \bar{t}\},$$

definita per qualche valore  $a_{\max}$  (cono di influenza).

### Il Problema di Riemann (lineare)

Per problema di Riemann si intende il problema di Cauchy (9.3) con dato iniziale discontinuo:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_\ell & \text{se } x < 0 \\ u_r & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (9.5)$$

La condizione iniziale è un gradino con discontinuità di prima specie nell'origine. Tale singolarità, come mostrato in figura 9.1 (destra), si propaga alla velocità  $a$  e viene mantenuta dalla soluzione al tempo  $t$  che è semplicemente

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_\ell & \text{se } x - at < 0 \\ u_r & \text{se } x - at > 0. \end{cases}$$

### Il caso scalare lineare con velocità e termine forzante non costanti

Si osservi che, in generale, per un problema di trasporto lineare la velocità di trasporto  $a$  può essere funzione di  $x$  e nell'equazione può comparire un termine forzante a destra, ovvero,

$$\begin{cases} u_t + a(x)u_x = f(x) \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (9.6)$$

Anche in questo caso definiamo *linee caratteristiche* quelle linee nel piano  $x-t$  tali per cui su di esse la PDE diventa una ODE. Esse sono soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

e su di esse l'equazione differenziale alle derivate parziali diventa ordinaria in quanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(x(t), t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(u(x(t), t)) + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u(x(t), t)) \right] x'(t) \\ &= u_t(x(t)) + a(x(t))u_x(x(t)) \\ &= f(x(t)). \end{aligned}$$

La soluzione lungo le linee caratteristiche si ottiene integrando il termine forzante

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = u_0(x - at) + \int_0^t f(x - a(t-s), s) ds.$$

Questo significa che la soluzione  $u(\bar{x}, \bar{t})$  dipende solo dalla condizione iniziale  $u_0$  valutata in  $x_0 = x - at$  (ovvero laddove si diparte la linea caratteristica) e dai valori di  $f$  lungo la linea caratteristica  $x(t)$  tra 0 e  $\bar{t}$ . L'insieme  $\{(x(t), t), 0 \leq t \leq \bar{t}\}$  è chiamato *dominio di dipendenza continuo* di  $u(\bar{x}, \bar{t})$ .

### 9.2.2 Il caso scalare non lineare

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (9.7)$$

costituito da un'equazione iperbolica scalare non lineare e da una condizione iniziale. Questo problema può in qualche modo essere ricondotto a quello del trasporto riscrivendo l'equazione nella forma *quasi lineare*

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

con

$$a(u) = \frac{df}{du}(u).$$

Un caso particolare è l'equazione di Burgers,

$$u_t + uu_x = 0, \quad (9.8)$$

per la quale si ha  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  e  $a(u) = df/du = u$ . Ipotizzando un dato iniziale continuo, si osserva che lungo le linee caratteristiche ottenute risolvendo il problema

$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (9.9)$$

la soluzione  $u$  è costante. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(x(t), t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(u(x(t), t)) + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u(x(t), t)) \right] x'(t) \\ &= u_t + uu_x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Inoltre, siccome  $u$  è costante lungo le caratteristiche, anche  $x'(t) = u(x(t), t)$  è costante lungo tali linee che risultano, quindi, delle rette aventi pendenza determinata unicamente dal dato iniziale. A causa di questo fatto, se  $du_0/dx < 0$  per qualche valore di  $x$ , allora prima o poi le linee

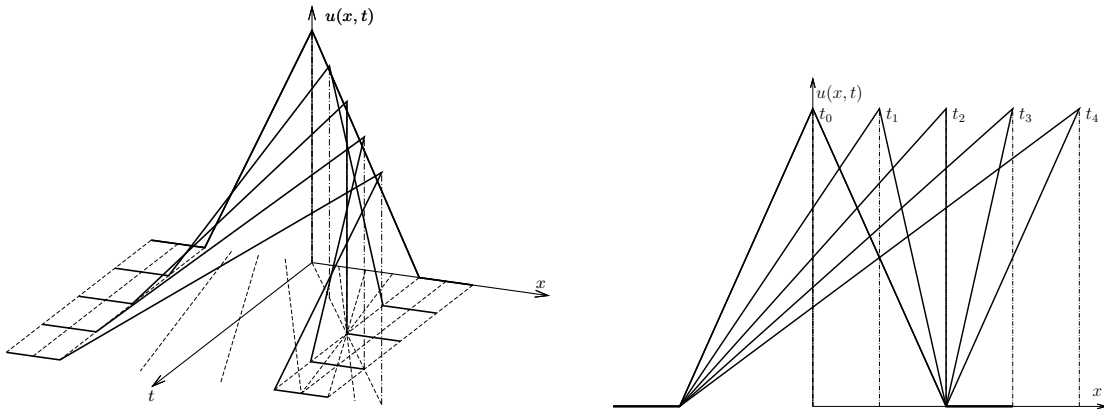


Figura 9.2: Evoluzione della soluzione (linea continua ingrossata) nel tempo per l'equazione  $u_t + uu_x = 0$ , linee caratteristiche tratteggiate.

caratteristiche si intersecano nel piano  $x-t$ . La soluzione, quindi, perde di significato dal punto di vista fisico in quanto il metodo delle caratteristiche porta ad una soluzione a più valori che, fisicamente, è un non-senso dal momento che una qualsiasi grandezza fisica in una certa posizione ed in un certo istante può assumere uno ed un sol valore. Per capire meglio come questo accada, si osservi la figura 9.2 dove quella di destra è la proiezione di quella di sinistra nel piano  $u-x$  ai diversi tempi. La condizione iniziale  $u_0(x) = u(x, 0)$  è definita per  $x \in (-\infty; +\infty)$ , continua, non negativa, ma diversa da zero solo per certi valori di  $x$  nell'intorno dell'origine. Siccome la pendenza delle rette caratteristiche nel piano  $x-t$  è determinata unicamente dal valore di  $u_0$  nel punto da cui si dipartono, tali rette (tratteggiate in figura 9.2) risultano parallele all'asse dei tempi dove  $u_0$  è nulla (pendenza nulla), hanno pendenza via via crescente dove  $u_0$  cresce e pendenza via via decrescente dove  $u_0$  decresce. Siccome il dato iniziale viene trasportato, al passare del tempo, lungo queste rette, per i valori di  $x$  dove  $u_0$  è nulla, anche  $u(x, t)$  rimane nulla, mentre il massimo di  $u(x, t)$  si sposta continuamente verso destra, come evidente dalla

figura 9.2 di destra. Se indichiamo con  $\bar{t}$  il tempo al quale almeno due rette caratteristiche si intersecano, allora per  $t < \bar{t}$  la soluzione  $u(x, t)$  ha significato fisico, mentre per  $t \geq \bar{t}$  la soluzione ottenuta con il metodo delle caratteristiche perde di significato dal punto di vista fisico essendo a più valori. Si può dimostrare che, per l'equazione di Burgers, il tempo al quale la soluzione diventa a più valori è

$$\bar{t} = \frac{-1}{\min \left( \frac{du_0}{dx} \right)}$$

Dalla figura 9.2 si evince che  $\bar{t} = t_2$ .

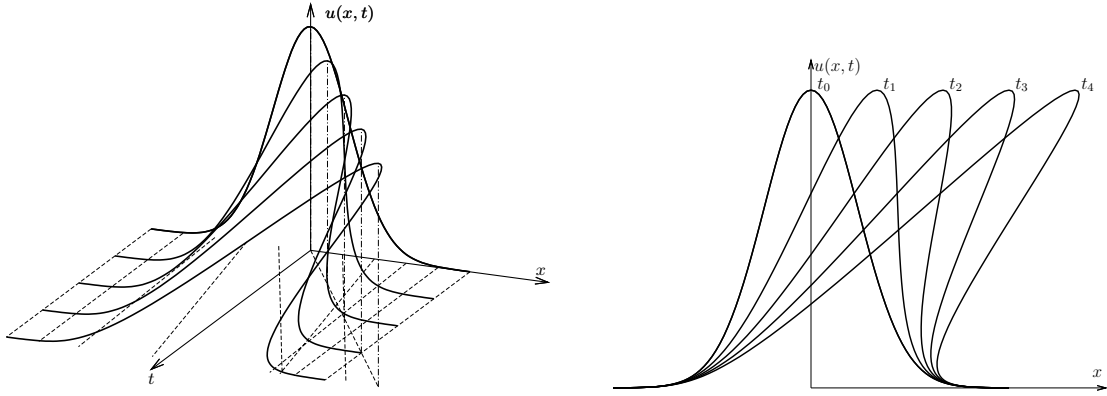


Figura 9.3: Evoluzione della soluzione (linea continua ingrossata) nel tempo per l'equazione  $u_t + uu_x = 0$ , linee caratteristiche tratteggiate.

In figura 9.3 è riportato il caso di condizione iniziale  $u_0$  continua e derivabile: chiaramente il fenomeno della generazione di una soluzione a più valori permane in quanto è intrinseco al metodo delle caratteristiche per la soluzione dell'equazione (9.8) e non alla derivabilità o meno della condizione iniziale.

Si pone il problema di come rendere fisicamente accettabile la soluzione ottenuta con il metodo delle caratteristiche. Esso può essere risolto in due modi:

1. rendendo l'equazione parabolica attraverso l'introduzione di un termine viscoso  $\epsilon u_{xx}$  a destra e facendolo tendere progressivamente a zero;
2. rimpiazzando la porzione di soluzione a più valori ottenuta con il metodo delle caratteristiche con un funzione ad un sol valore, discontinua di prima specie, dove la discontinuità è localizzata in un punto tale per cui l'integrale della soluzione discontinua, ossia l'area sottostante la curva, sia uguale all'integrale della soluzione ottenuta con il metodo delle caratteristiche.

In figura 9.4 è confrontato il primo approccio, quello “viscoso”, con il metodo delle caratteristiche per il caso della figura 9.3. La soluzione numerica (pallini) è stata ottenuta introducendo una viscosità artificiale  $\epsilon$  e risolvendo il seguente problema nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (9.10)$$

La soluzione analitica è:

$$u(x, t) = -2\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ (4\pi\epsilon t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(x-x')^2}{4\epsilon t} - \frac{1}{2\epsilon} \int_0^{x'} u(x'', 0) dx'' \right] dx' \right\}.$$

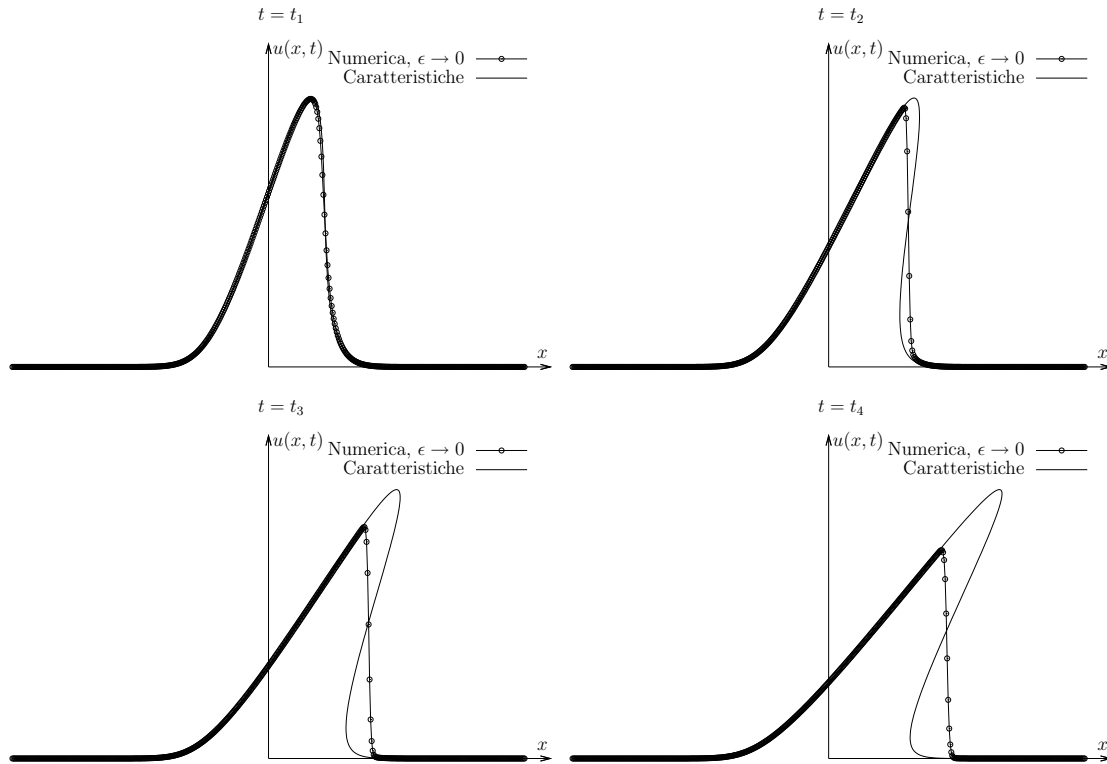


Figura 9.4: Confronto tra soluzione numerica dell'equazione  $u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e la soluzione ottenuta con il metodo delle caratteristiche riferita al caso della figura 9.3. Si osservi la progressiva formazione ed evoluzione di un fronte verticale che rende la soluzione discontinua di prima specie, assicurando la conservazione dell'area sottostante la curva.

Si osservi che la soluzione “viscosa” calcolata nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  (figura 9.4) dà origine ad un fronte che diventa sempre più verticale man mano che passa il tempo. Inoltre, la posizione di questo fronte assicura che l'area compresa tra la soluzione “viscosa” e l'asse  $x$  coincida con l'area compresa tra la soluzione a più valori e l'asse  $x$ . In pratica, la soluzione “viscosa” *conserva l'area* in quanto le aree racchiuse dalla soluzione a più a valori a destra e a sinistra del fronte verticale si compensano.

### 9.2.3 Onda d'urto, soluzione debole e condizione di Rankine-Hugoniot

Il secondo approccio al problema dell'esistenza di una soluzione non fisica prevede di introdurre una discontinuità di prima specie in modo che l'area sotto la curva si conservi. È naturale, quindi, che questa discontinuità sia localizzata proprio nella regione in cui la soluzione “viscosa” calcolata nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  (vedi figura 9.4) dà origine al fronte sempre più verticale al crescere del tempo. Si osservi che la soluzione a sinistra e a destra del fronte è continua.

Dal punto di vista fisico tutto questo significa che esiste una regione molto “sottile” attraverso la quale la soluzione  $u(x, t)$  subisce un forte gradiente, assimilabile ad una discontinuità. Chiamiamo questa regione *onda d'urto*. Come detto, la soluzione a destra e la soluzione a sinistra dell'onda d'urto sono comunque entrambe continue, ed attraverso l'onda d'urto vengono comunque conservate delle grandezze integrali.

Se la soluzione  $u(x, t)$  presenta delle discontinuità (di prima specie) non ha più senso parlare

di *derivata* in ogni punto del piano  $x$ - $t$  per  $t > 0$ , ed il problema differenziale perde di significato. Tuttavia, è possibile introdurre una soluzione cosiddetta *in forma debole* che soddisfa un'equazione ottenuta dall'equazione differenziale originaria nella quale, però, le derivate sono “scaricate” su una funzione ausiliaria. In questo modo non è più richiesto alla soluzione  $u(x, t)$  di essere derivabile ovunque e sono ammesse anche soluzioni discontinue purché a cavallo della discontinuità sia verificata una certa condizione detta di Rankine-Hugoniot.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0 \\ x(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (9.11)$$

Chiamiamo *soluzione classica* (o *soluzione forte*) una funzione  $u(x, t)$  continua e derivabile, sia rispetto alla variabile spaziale  $x$  sia rispetto al tempo  $t$ , che soddisfa il problema (9.11). Come detto, se  $u(x, t)$  è discontinua il problema differenziale perde di significato. Per ovviare a ciò, introduciamo una funzione (ausiliaria)  $v : \mathbb{R} \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a supporto compatto, ossia tale che  $v \equiv 0$  all'esterno di un certo sott'insieme  $S \subset \mathbb{R} \times [0; +\infty)$  detto “supporto di  $v$ ” (si ricordi che un insieme *compatto* è *chiuso e limitato*). Supponiamo, inoltre, che la funzione ausiliaria sia infinitamente derivabile, i.e.  $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0; +\infty))$ , e moltiplichiamo l'equazione differenziale del problema (9.11) per  $v$  e poi integriamo su  $\mathbb{R} \times [0; +\infty)$ :

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \quad \rightarrow \quad vu_t + v[f(u)]_x = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [vu_t + v[f(u)]_x] \, dx \, dt = 0.$$

Integrando per parti, utilizzando la condizione iniziale  $u(x, 0) = u_0(x)$ , e sfruttando il fatto che  $v$  è a supporto compatto e quindi si annulla all'infinito (sia in  $x$  che in  $t$ ), si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} vu_t \, dx \, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} [vu]_0^{+\infty} \, dx - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_t u \, dx \, dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, 0) u_0(x) \, dx - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_t u \, dx \, dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v[f(u)]_x \, dx \, dt &= [[vf(u)]_{-\infty}^{+\infty}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [v_x f(u)] \, dx \, dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [v_x f(u)] \, dx \, dt. \end{aligned}$$

L'equazione risultante, dopo questi passaggi, è quindi

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [uv_t + f(u)v_x] \, dx \, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)v(x, 0) \, dx = 0. \quad (9.12)$$

Chiamiamo *soluzione debole* del problema originario (9.11) una qualsiasi funzione  $u(x, t)$  che soddisfi l'equazione (9.12) per ogni  $v : \mathbb{R} \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a supporto compatto (i.e. chiuso e limitato). Evidentemente, siccome la (9.12) è stata ricavata a partire dalla (9.11), ogni soluzione *forte* (continua e derivabile) del problema originario (9.11) è anche soluzione *debole* del problema (9.12). Le soluzioni deboli hanno il vantaggio di non richiedere particolare regolarità (possono essere discontinue e non derivabili), tuttavia a cavallo di un salto non possono assumere valori arbitrari. Vediamo perché.



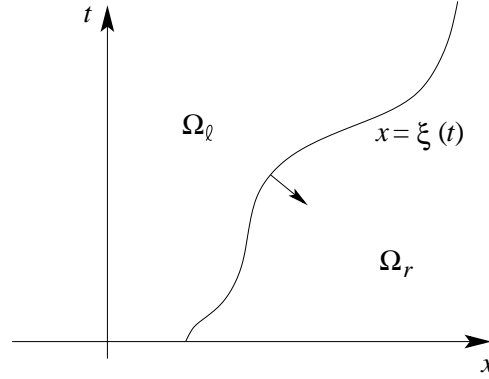


Figura 9.5: Soluzione in forma debole.

Con riferimento alla figura 9.5, indichiamo con  $x = \xi(t)$  la posizione della discontinuità in funzione del tempo. Questa linea divide il piano  $x$ - $t$  (con  $t \geq 0$ ) in due regioni, una a destra e una a sinistra di  $x = \xi(t)$ , così definite:

$$\Omega_\ell = \{(x, t) : t \in (0; +\infty) \wedge x \in (-\infty; \xi(t))\} \quad \text{e} \quad \Omega_r = \{(x, t) : t \in (0; +\infty) \wedge x \in (\xi(t); +\infty)\}.$$

Consideriamo ora l'equazione (9.12) e sia  $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0; +\infty))$  una funzione a supporto compatto tale che  $v(x, 0) = 0$ . Essendo  $v(x, 0) = 0$ , il secondo termine dell'equazione (9.12) è identicamente nullo ed il primo termine può essere riscritto sostituendo l'integrale esteso alla regione  $\mathbb{R} \times [0; +\infty)$  con gli integrali estesi a  $\Omega_\ell \cup \Omega_r$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [uv_t + f(u)v_x] \, dx \, dt &= 0 \iff \\ \int_{\Omega_\ell} [uv_t + f(u)v_x] \, dx \, dt + \int_{\Omega_r} [uv_t + f(u)v_x] \, dx \, dt &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Consideriamo l'integrale su  $\Omega_\ell$  ed integriamo per parti scaricando le derivate nuovamente su  $u$ . Siccome  $u$  nella regione  $\Omega_\ell$  è continua e derivabile (ossia è una soluzione *forte*) allora soddisfa l'equazione differenziale  $u_t + [f(u)]_x = 0$ . Inoltre,  $v$  è a supporto compatto, per cui si annulla all'infinito. Dopo aver integrato per parti, applichiamo il teorema della divergenza considerando il vettore  $\mathbf{v} = (f(u)v, uv)$  e la sua divergenza rispetto alle variabili  $(x, t)$  in modo che  $\nabla \cdot \mathbf{v} = (f(u)v)_x + (uv)_t$ : indicando con  $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_t)$  il versore normale uscente dalla regione  $\Omega_\ell$  delimitata dal contorno  $\partial\Omega_\ell$ , l'integrale esteso a  $\Omega_\ell$  di  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  è uguale al flusso di  $\mathbf{v}$  attraverso il contorno  $\partial\Omega_\ell$ . Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\ell} [uv_t + f(u)v_x] \, dx \, dt &= \int_{\Omega_\ell} [(uv)_t + (f(u)v)_x] \, dx \, dt - \int_{\Omega_\ell} [u_t v + [f(u)]_x v] \, dx \, dt \\ &= \int_{\partial\Omega_\ell} [uvn_t + f(u)vn_x] \, ds - \int_{\Omega_\ell} [u_t + [f(u)]_x] v \, dx \, dt \\ &= \int_{\partial\Omega_\ell} [un_t + f(u)n_x] v \, ds \\ &= \int_{x=\xi(t)} [u_\ell n_t + f(u_\ell)n_x] v \, ds, \end{aligned}$$

dove si è messo in evidenza il fatto che  $u$  e  $f(u)$  sono calcolati come limite per  $(x, t) \rightarrow (\xi(t), t)$  provenendo dalla regione  $\Omega_\ell$ . Ripetendo lo stesso ragionamento per la regione  $\Omega_r$  ed osservando che la normale uscente da essa sul bordo  $x = \xi(t)$  è opposta alla normale uscente da  $\Omega_\ell$ , si ha

$$\int_{\Omega_r} [uv_t + f(u)v_x] \, dx \, dt = - \int_{x=\xi(t)} [u_r n_t + f(u_r)n_x] v \, ds$$

In conclusione, l'equazione (9.13) diventa

$$\int_{x=\xi(t)} [u_\ell n_t + f(u_\ell)n_x] v \, ds - \int_{x=\xi(t)} [u_r n_t + f(u_r)n_x] v \, ds = 0$$

che equivale a

$$\int_{x=\xi(t)} [u_\ell n_t + f(u_\ell)n_x - u_r n_t - f(u_r)n_x] v \, ds = 0.$$

Siccome quest'ultima equazione deve essere vera per ogni  $v$  a supporto compatto e sufficientemente liscia, allora si ha

$$u_\ell n_t + f(u_\ell)n_x = u_r n_t + f(u_r)n_x \iff \frac{f(u_\ell) - f(u_r)}{u_\ell - u_r} = -\frac{n_t}{n_x}.$$

Dopo aver osservato che la derivata prima della curva  $x = \xi(t)$  è proprio il rapporto  $-\frac{n_t}{n_x}$ , ossia  $\xi'(t) = S = -\frac{n_t}{n_x}$ , si ha

$$S = \frac{f(u_\ell) - f(u_r)}{u_\ell - u_r} = \frac{[f(u)]}{[u]}, \quad (9.14)$$

detta *condizione di Rankine-Hugoniot*, dove  $S = \xi'(t)$  è la velocità di propagazione dell'onda d'urto. In conclusione, la condizione di Rankine-Hugoniot permette di calcolare agevolmente la velocità di propagazione di un'onda d'urto come rapporto tra il salto del flusso attraverso di essa ed il salto della soluzione.

#### 9.2.4 Il problema di Riemann (non lineare)

Il problema di Riemann consiste nel risolvere il problema di Cauchy (9.7) non lineare con dato iniziale discontinuo,

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_\ell & \text{se } x < 0 \\ u_r & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si possono verificare due casi,  $u_\ell > u_r$  oppure  $u_\ell < u_r$ .

##### Onda d'urto, $u_\ell > u_r > 0$

Procedendo con il metodo delle caratteristiche si ottiene la soluzione riportata in figura 9.6. Si osserva che se  $u_\ell > u_r > 0$  le linee caratteristiche sono rette con coefficiente angolare positivo che si intersecano per ogni  $t > 0$  e, quindi, la soluzione, che diventa una specie di 'Z', perde di significato fin da subito essendo a più valori. Si verifica, quindi, lo stesso comportamento visto in precedenza. La soluzione riacquista significato dal punto di vista fisico se la si calcola in forma debole oppure numericamente con un metodo conservativo che ne preservi l'area sottostante (si veda la soluzione riportata in figura 9.7) e che porta alla formazione di un'onda d'urto che si muove alla velocità prevista dalla condizione di Rankine-Hugoniot:

$$S = \frac{\Delta f}{\Delta u}.$$

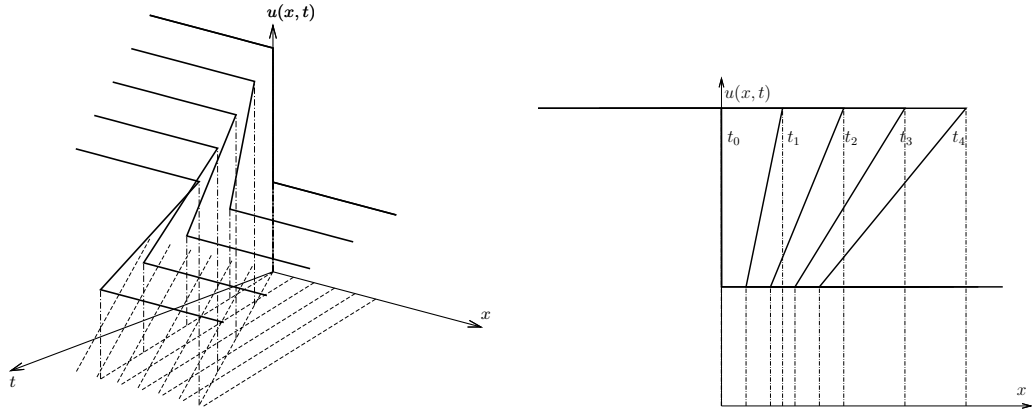


Figura 9.6: Evoluzione della soluzione (linea continua ingrossata) nel tempo per l'equazione  $u_t + uu_x = 0$  con condizione iniziale discontinua tramite il metodo delle caratteristiche, formazione di una soluzione a più valori (linee caratteristiche tratteggiate).

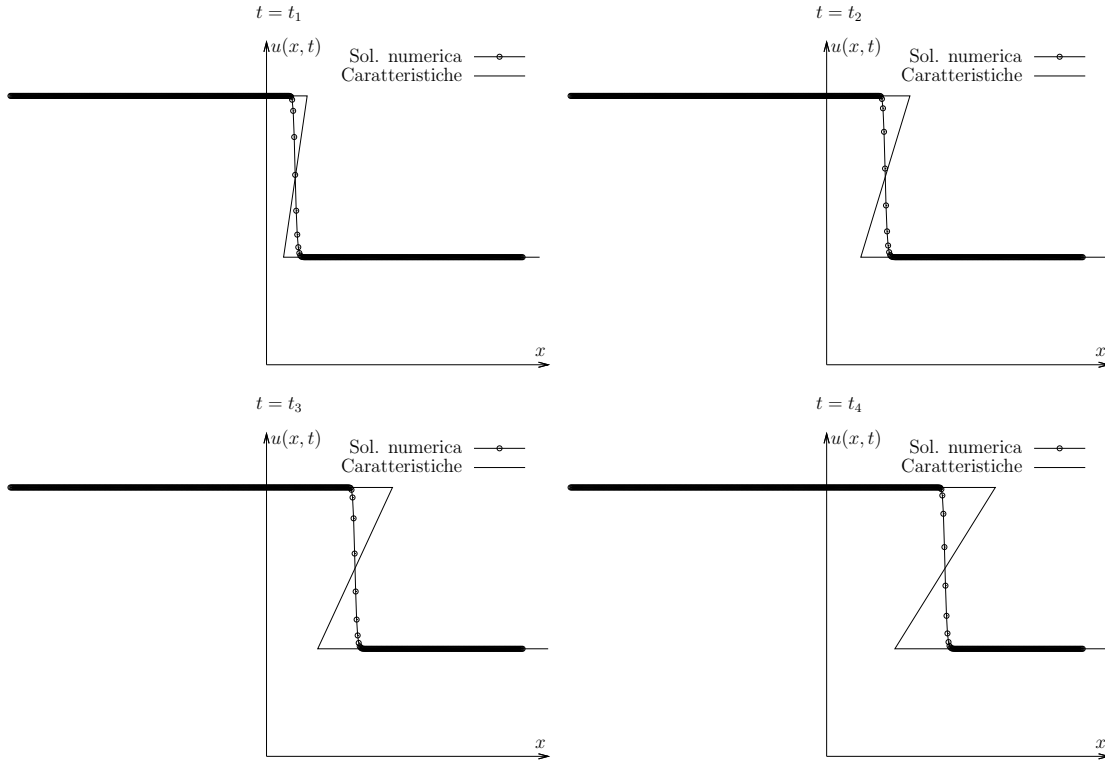


Figura 9.7: Confronto tra soluzione numerica dell'equazione  $u_t + uu_x = 0$  ottenuta con un metodo conservativo (che calcola la soluzione in forma debole) e la soluzione ottenuta con il metodo delle caratteristiche per il problema di Riemann rappresentato in figura 9.6. Si osservi la progressiva formazione ed evoluzione di un fronte verticale (onda d'urto) che rende la soluzione discontinua di prima specie, assicurando la conservazione dell'area sottostante la curva.

Nel caso particolare dell'equazione di Burgers,  $f = \frac{1}{2}u^2$  per cui

$$S = \frac{\frac{1}{2}u_\ell^2 - \frac{1}{2}u_r^2}{u_\ell - u_r} = \frac{1}{2} \frac{(u_\ell - u_r)(u_\ell + u_r)}{u_\ell - u_r} = \frac{1}{2}(u_\ell + u_r),$$

ovvero la velocità di propagazione dell'onda d'urto è la media aritmetica delle due velocità iniziali che definiscono il problema di Riemann e la soluzione è semplicemente

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell & \text{se } x < St \\ u_r & \text{se } x > St. \end{cases} \quad (9.15)$$

In pratica, nel piano  $x-t$  le linee caratteristiche hanno tutte pendenza positiva e convergono sulla retta  $x = St$ .

### Onda di rarefazione, $0 < u_\ell < u_r$

Procedendo con il metodo delle caratteristiche, si osserva che se  $0 < u_\ell < u_r$  le linee caratteristiche sono rette con coefficiente angolare positivo che non si intersecano mai in quanto divergono. Tuttavia, per il problema di Riemann, rimane una regione limitata da due caratteristiche spicca-

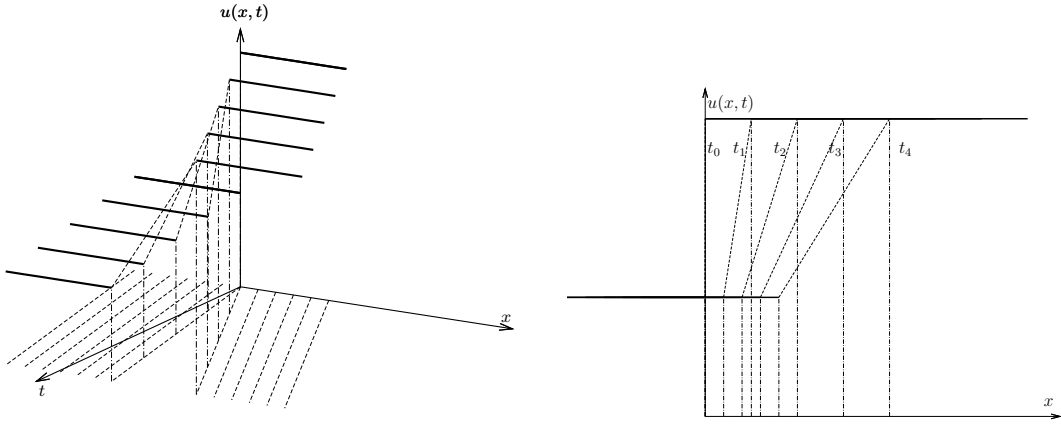


Figura 9.8: Evoluzione della soluzione (linea continua ingrossata) nel tempo per l'equazione  $u_t + uu_x = 0$  con condizione iniziale discontinua tramite il metodo delle caratteristiche, formazione di un'onda di rarefazione (linee caratteristiche tratteggiate).

te dall'origine (testa e coda) che non è mai attraversata da nessuna linea caratteristica. Questo significherebbe che lì la soluzione non si propaga o che si può propagare in infiniti modi diversi. In realtà le soluzioni sono infinite, alcune possono non presentare urti, altre sì (in questo caso devono soddisfare la relazione di Rankine-Hugoniot (9.14)). Ci soffermiamo su due:

1. quella che prevede una linea caratteristica di equazione  $x = St$  spiccata dall'origine, con  $S = \frac{1}{2}(u_\ell + u_r)$ , e tale per cui tutte le caratteristiche della "regione anomala" si originano da essa,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell & \text{se } x < St \\ u_r & \text{se } x > St \end{cases} \quad (9.16)$$

2. quella che prevede un ventaglio di rette caratteristiche tutte spiccate dall'origine e la cui pendenza varia con continuità tra la testa e la coda del ventaglio da  $u_\ell$  a  $u_r$ ,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell & \text{se } x < u_\ell t \\ x/t & \text{se } u_\ell t \leq x \leq u_r t \\ u_r & \text{se } x > u_r t. \end{cases} \quad (9.17)$$

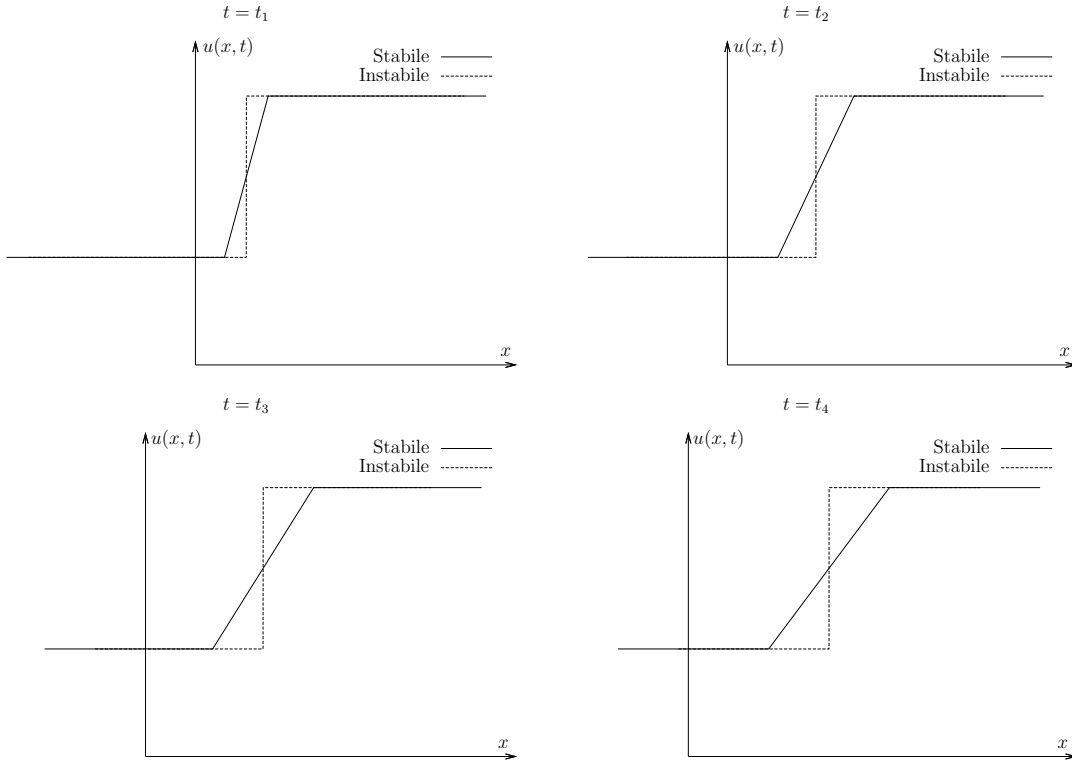


Figura 9.9: Confronto tra due soluzioni (con e senza discontinuità) dell'equazione  $u_t + uu_x = 0$  con condizione iniziale  $0 < u_\ell < u_r$ . La soluzione stabile (linea continua) è l'onda di rarefazione che verifica la (9.17), quella instabile è la propagazione della discontinuità iniziale a velocità  $S = \frac{1}{2}(u_\ell + u_r)$  che soddisfa la (9.16). Si osservi che entrambe preservano le aree.

In figura 9.9 sono riportate entrambe: si osserva che la prima soluzione mantiene la forma della condizione iniziale ma è instabile, ovvero basta una piccolissima variazione dovuta o al metodo numerico o all'aggiunta di una viscosità artificiale per provocare una soluzione radicalmente diversa da quella iniziale. Al contrario, il ventaglio di espansione assicura la stabilità della soluzione. Si osservi che entrambe le soluzioni conservano le aree.

Si può dimostrare che, per il problema (9.11) in cui  $f(u)$  è una funzione convessa con  $f''(u) > 0$ , se una sua soluzione debole *discontinua* oltre a soddisfare la relazione di Rankine-Hugoniot (9.14) soddisfa anche la *condizione di entropia*

$$f'(u_\ell) > S > f'(u_r), \quad (9.18)$$

allora essa è *stabile* (o *ammissibile*). Una soluzione debole che non soddisfi questa condizione è instabile. Si osservi che, geometricamente, questa condizione può essere interpretata nel seguente modo: le soluzioni stabili sono solo quelle che prevedono, nel piano  $x$ - $t$ , linee caratteristiche che “entrano” sia da destra che da sinistra nell'equazione dell'onda d'urto  $x = St$ .

Nel caso del problema di Riemann con  $u_\ell < u_r$ , l'equazione di Burgers ha un flusso convesso  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , da cui  $f'(u) = u$  (e  $f''(u) = 1 > 0$ ). La soluzione debole (9.16) presenta un discontinuità che, per soddisfare la relazione di Rankine-Hugoniot (9.14), viaggia alla velocità  $S = [f(u)]/[u] = (u_\ell + u_r)/2$ , pertanto

$$f'(u_\ell) = u_\ell \not> S = \frac{u_\ell + u_r}{2} \not> u_r = f'(u_r).$$

Siccome la soluzione discontinua (9.16) non soddisfa la condizione di entropia, essa è *instabile*. Al contrario, la soluzione debole (9.17) non presenta alcuna discontinuità per  $t > 0$ , né prima, né dopo e nemmeno all'interno della regione caratterizzata dal ventaglio di espansione, pertanto la (9.17) è una soluzione *classica* e, pertanto, *stabile* (la condizione di entropia è automaticamente soddisfatta in assenza di urti).

### Riassunto grafico del problema di Riemann (non lineare)

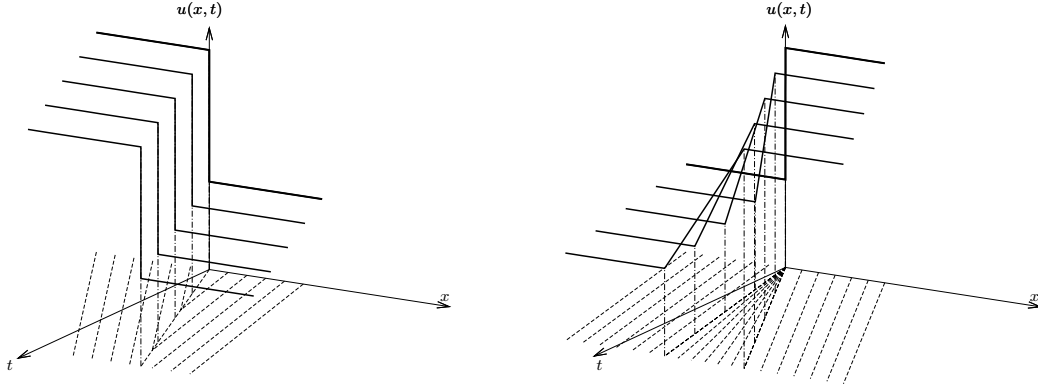


Figura 9.10: Soluzioni fisiche del problema di Riemann non lineare.  $u_\ell > u_r > 0$ : onda d'urto (sinistra);  $0 < u_\ell < u_r$ : ventaglio di rarefazione (destra). Si osservi l'andamento delle linee caratteristiche nel piano  $x$ - $t$ .

In figura 9.10 sono riportate le due situazioni fisiche che si verificano a seguito del problema di Riemann non lineare. A sinistra si osserva il trasporto rigido a velocità  $S$  dell'onda d'urto quando  $u_\ell > u_r > 0$ : questo corrisponde a le linee caratteristiche che convergono sulla linea  $x = St$  ( $S$  è la velocità di propagazione dell'urto ottenuta dalla condizione di Rankine-Hugoniot). A destra si osserva il caso  $0 < u_\ell < u_r$  per il quale la soluzione stabile corrisponde alla formazione di un ventaglio da parte delle le linee caratteristiche (ventaglio di rarefazione).

## 9.3 Alcuni metodi numerici per equazioni iperboliche

### 9.3.1 Il caso lineare

Consideriamo il caso più semplice di *equazione del trasporto* con velocità costante,

$$u_t + au_x = 0,$$

e consideriamo solo *metodi espliciti*, ovvero metodi che *non richiedono* la soluzione di un sistema lineare. Se  $k = \Delta t$  e  $h = \Delta x$ , discretizziamo l'equazione del trasporto supponendo tutto noto al tempo  $t_n = nk$  e utilizziamo Eulero esplicito nel tempo e differenze finite centrate equispaziate nello spazio. Così facendo si ottiene l'equazione alle differenze

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

che riscritta in forma esplicita fornisce la soluzione al passo  $n + 1$  nota quella al passo  $n$ :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} a (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Questo metodo è *esplicito* e soffre di problemi legati alla stabilità della soluzione numerica. Per questo, in pratica, non viene mai utilizzato. Volendo, si può utilizzare la sua versione *implicita*

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + a \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0,$$

che però richiede la soluzione di un sistema lineare. I metodi impliciti sono scarsamente usati per la soluzione di equazioni iperboliche, pertanto nemmeno questo schema viene impiegato.

Ritornando ai metodi *espliciti*, per la discretizzazione spaziali si possono usare, invece delle differenze centrate, differenze finite in avanti o indietro ottenendo (dipendentemente dal segno della velocità di trasporto):

$$a > 0 : \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} a (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

$$a < 0 : \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} a (U_{j+1}^n - U_j^n).$$

Questi metodi sono detti *upwind* in quanto seguono l'andamento delle linee caratteristiche che hanno pendenza diversa dipendentemente dal segno della velocità. Al fine di liberarsi dalla dipendenza dal segno della velocità di trasporto  $a$  (evitando comunque Eulero in avanti nel tempo), si può discretizzare l'equazione utilizzando come derivata rispetto al tempo

$$u_t(x_j, t_n) \approx \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{k}$$

e come derivata spaziale le differenze finite centrate. Si ottiene così il metodo di *Lax-Friedrichs*

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{k}{2h} a (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Anche questo metodo, come il metodo upwind, è del prim'ordine sia nello spazio che nel tempo. Per ottenere ordini più elevati, consideriamo l'espansione di Taylor

$$u(x, t+k) = u(x, t) + k u_t(x, t) + \frac{1}{2} k^2 u_{tt}(x, t) + \dots$$

Dall'equazione del trasporto si ha  $u_t = -a u_x$ , che permette di ricavare

$$u_{tt} = -a u_{xt} = -a u_{tx} = -a(-a u_x)_x = a^2 u_{xx},$$

da cui

$$u(x, t+k) = u(x, t) - k a u_x(x, t) + \frac{1}{2} k^2 a^2 u_{xx}(x, t) + \dots$$

Passando all'equazione alle differenze si ha immediatamente

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} a (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2} a^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

che prende il nome di metodo di *Lax-Wendroff*. Esso è del second'ordine sia nello spazio che nel tempo.

I metodi cui si è accennato sono tutti espliciti e soffrono di alcuni problemi di stabilità legati unicamente al fatto che, come noto dal metodo delle caratteristiche, la soluzione in un

| Nome               | equazione alle differenze  | ordine                          |
|--------------------|--|---------------------------------|
| Upwind ( $a > 0$ ) | $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}a(U_j^n - U_{j-1}^n)$  | $\mathcal{O}(k+h)$              |
| Upwind ( $a < 0$ ) | $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}a(U_{j+1}^n - U_j^n)$  | $\mathcal{O}(k+h)$              |
| Lax-Friedrichs     | $U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{k}{2h}a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$                          | $\mathcal{O}(h^2/k + k + h^2)$  |
| Lax-Wendroff       | $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}a^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$ | $\mathcal{O}(k^2 + h^2 + kh^2)$ |

Tabella 9.1: Alcuni metodi numerici per l'equazione del trasporto  $u_t + au_x$  con  $a$  costante.

certo punto del piano  $x$ - $t$  dipende *solo* dalla soluzione ai tempi precedenti contenuta nel *cono di influenza*. Si può dimostrare che affinché non vi siano instabilità numeriche è *necessario* che

$$|a|\frac{k}{h} \leq 1.$$

Questa è detta *CFL condition* o *condizione di Courant-Friedrichs-Lewy* e stabilisce una *condizione necessaria* (non sufficiente) per la convergenza numerica del metodo.

Nel caso lineare con velocità variabile

$$u_t + a(x)u_x = 0,$$

si può pensare di utilizzare uno dei metodi visti in precedenza a patto di sostituire il valore costante  $a$  o con  $a_j = a(x_j)$  oppure con una combinazione lineare dei valori  $a_{j-1} = a(x_{j-1})$ ,  $a_j = a(x_j)$  e  $a_{j+1} = a(x_{j+1})$ . Per esempio, per Lax-Wendroff si ha

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}a_j(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}a_j^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n).$$

### 9.3.2 Il caso non lineare

Consideriamo ora il caso più generale di equazione iperbolica non lineare

$$u_t + [f(u)]_x = 0.$$

Come noto, questa può essere riscritta nella forma

$$u_t + \frac{df}{du}(u)u_x = 0$$

per cui si potrebbe pensare di applicare uno dei metodi numerici visti in precedenza a patto di sostituire  $a$  (costante) con  $\frac{df}{du}$  in quel punto.

Per esempio, nel caso dell'equazione di Burgers, siccome  $f = \frac{1}{2}u^2$  e  $\frac{df}{du} = u$ , Lax-Wendroff si potrebbe modificare come

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}U_j^n(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}(U_j^n)^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n).$$



Questo modo di procedere può dare risultati soddisfacenti fintanto che si opera con soluzioni prive di discontinuità. Tuttavia, come noto, per le equazioni iperboliche non lineari anche partendo da condizioni iniziali continue e derivabili, *prima o poi* si originano onde d'urto che sono delle discontinuità. Pertanto, per poter risolvere in modo adeguato un'equazione iperbolica non lineare occorrono metodi in grado di propagare soluzioni discontinue. Questi metodi, detti *metodi conservativi*, risolvono direttamente l'equazione non lineare in forma conservativa,

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{h} = 0,$$

ovvero

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F_{j+1/2} - F_{j-1/2}], \quad (9.19)$$

dove  $F_{j+1/2}$  e  $F_{j-1/2}$  sono i flussi a destra e sinistra del punto  $x_j$ . Per esempio, il metodo di Lax-Friedrichs in forma conservativa è

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{k}{2h} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)),$$

per il quale, volendolo riscriverlo nella forma (9.19), si ha

$$F_{j+1/2} = \frac{h}{2k} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \frac{1}{2} (f(U_j^n) - f(U_{j+1}^n)).$$

## 9.4 Sistemi iperbolici lineari

Come noto, un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e a coefficienti costanti del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (9.20)$$

dove  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  è il vettore delle incognite e  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è costante, è detto *iperbolico* se la matrice  $\mathbf{A}$  ha  $m$  autovalori reali (*strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti), ovvero  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile e può essere decomposta come

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1},$$

dove  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  è la matrice diagonale degli autovalori e  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \dots | \mathbf{r}_m]$  è la matrice degli autovettori destri. In altre parole,  $\lambda_p$  e  $\mathbf{r}_p$  soddisfano il problema

$$\mathbf{A} \mathbf{r}_p = \lambda_p \mathbf{r}_p, \quad \text{per } p = 1, 2, \dots, m,$$

ovvero,

$$\mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}.$$

Anziché risolvere il sistema (9.20), operiamo la sostituzione di variabile

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}$$

e moltiplichiamo (9.20) per  $\mathbf{R}^{-1}$  ottenendo, dopo aver osservato che  $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1}$ ,

$$\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

ovvero, siccome  $\mathbf{R}^{-1}$  è costante,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Il motivo di questa sostituzione sta nel fatto che la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  è diagonale, i.e. il problema iniziale si riduce a  $p$  equazioni lineari disaccoppiate del tipo

$$(v_p)_t + \lambda_p (v_p)_x = 0, \quad \text{per } p = 1, 2, \dots, m,$$

che abbiamo imparato a risolvere nella sezione 9.2. La soluzione della  $p$ -esima equazione è

$$v_p(x, t) = v_p(x - \lambda_p t, 0),$$

dove

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}_0(x).$$

La soluzione  $\mathbf{u}(x, t)$  si ottiene facilmente da  $\mathbf{v}(x, t)$  tramite la sostituzione iniziale,

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{R} \mathbf{v}(x, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^m v_p(x, t) \mathbf{r}_p,$$

ovvero

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^m v_p(x - \lambda_p t, 0) \mathbf{r}_p.$$

Si noti che la soluzione finale è costituita dagli autovettori destri  $\mathbf{r}_p$ , costanti, linearmente combinati con un peso  $v_p(x - \lambda_p t, 0)$  che dipende unicamente dal dato iniziale negli  $m$  punti  $x - \lambda_p t$ . Il *dominio di dipendenza* della soluzione è quindi

$$\mathcal{D}_{\text{dip}}(\bar{x}, \bar{t}) = \{x = \bar{x} - \lambda_p \bar{t}, p = 1, 2, \dots, m\}.$$

Come nel caso scalare, le curve  $x = x_0 + \lambda_p t$  che soddisfano l'equazione  $x'(t) = \lambda_p$  sono delle rette chiamate *caratteristiche dalla  $p$ -esima famiglia* e il coefficiente  $v_p(x, t) = v_p(x - \lambda_p t, 0)$  rimane costante sulla  $p$ -esima caratteristica. Si osservi che nel caso di sistema *strettamente iperbolico*, i.e. ad autovalori distinti, la soluzione finale dipende dai valori iniziali “trasportati” lungo  $m$  caratteristiche distinte che passano tutte per il punto  $(x, t)$ .

## 9.5 Sistemi iperbolici non lineari

Nel caso non lineare si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (9.21)$$

dove  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  è il vettore delle incognite e  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  è il flusso del vettore delle incognite e dipende da esso. Il sistema conservativo non lineare (9.21) è riscrivibile nella forma *quasi lineare*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

dove

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = (\mathbf{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}.$$

Il sistema iniziale (9.21) è detto *iperbolico* se la matrice Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{u})$  ha  $m$  autovalori reali per ogni  $\mathbf{u}$ , o quantomeno nel range di interesse; si dice *strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti.

Anche nel caso non lineare, se  $\lambda_p(\mathbf{u}, t)$  è il  $p$ -esimo autovalore della matrice Jacobiana valutata in  $\mathbf{u}$ , si possono definire *curve caratteristiche* le soluzioni di  $p$  problemi del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda_p(\mathbf{u}(x(t)), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad p = 1, 2, \dots, m, \quad (9.22)$$

per qualche  $x_0$ , ma si osservi che ora gli autovalori dipendono dalla soluzione stessa e variano al variare di essa. Pertanto, non è più possibile determinare dapprima le linee caratteristiche e poi risolvere lungo di esse un sistema di ODEs, ma si ottiene un sistema accoppiato più complesso per il quale questo approccio perde di efficacia. Tuttavia, *localmente*, le linee caratteristiche portano dell'informazione che può essere usata nell'intorno di una certa soluzione. Infatti, nell'ipotesi di linearizzare il sistema nell'intorno di una soluzione  $\bar{\mathbf{u}}$ , tutte le osservazioni fatte e le conclusioni ottenute nel caso lineare sono applicabili *localmente* al caso non lineare sostituendo la matrice  $\mathbf{A}$  con la matrice Jacobiana linearizzata  $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{u}})$ . Così facendo il problema (9.22) diventa

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda_p(\bar{\mathbf{u}}(x(t)), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad p = 1, 2, \dots, m,$$

che ha come soluzione le rette

$$x_p(t) = x_0 + \lambda_p(\bar{\mathbf{u}})t, \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

### 9.5.1 Genuina non linearità, degenerazione lineare e discontinuità di contatto

Il  $p$ -esimo campo caratteristico associato all'autovalore  $\lambda_p(\mathbf{u})$  è detto *genuinamente non lineare* se, per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , si ha

$$\nabla^{\mathbf{u}} \lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \neq 0,$$

dove il simbolo ‘ $\cdot$ ’ indica il prodotto scalare tra vettori e  $\nabla^{\mathbf{u}} \lambda_p(\mathbf{u})$  è il gradiente dell'autovalore valutato in  $\mathbf{u}$  inteso come vettore delle derivate rispetto alle variabili da cui dipende,

$$\nabla^{\mathbf{u}} \lambda_p(\mathbf{u}) = \left[ \frac{\partial \lambda_p}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \frac{\partial \lambda_p}{\partial u_2}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial \lambda_p}{\partial u_m}(\mathbf{u}) \right]^T.$$

Si osservi che nel caso scalare si ha  $m = 1$ ,  $\lambda_1(u) = f'(u)$ ,  $\nabla^{\mathbf{u}} \lambda_1(u) = f''(u)$  e  $r_1(u) = 1$  per ogni  $u \in \mathbb{R}$ . Pertanto, la condizione di genuina non linearità richiede che sia  $f''(u) \neq 0$  per ogni  $u$ , ovvero che il flusso  $f$  sia una funzione convessa (i.e. con derivata seconda non nulla). In altre parole, questo assicura che  $f'(u) = \lambda_1(u)$ , che è la velocità delle linee caratteristiche nel piano  $x$ - $t$ , sia sempre crescente o decrescente al variare di  $u$ .

Nel caso generale del sistema (9.21), la condizione di genuina non linearità implica che  $\lambda_p(\mathbf{u})$  sia monotonicamente crescente o decrescente al variare di  $\mathbf{u}$  lungo la curva integrale del campo  $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$ , dove con *curva integrale per  $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$*  si intende una curva tangente in ogni suo punto  $\mathbf{u}$  al vettore  $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$ .

Il  $p$ -esimo campo di caratteristiche associato all'autovalore  $\lambda_p(\mathbf{u})$  è detto *linearmente degenere* se, per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , si ha

$$\nabla^{\mathbf{u}} \lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \equiv 0,$$

ovvero se l'autovalore  $\lambda_p(\mathbf{u})$  è costante lungo le linee integrali per  $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$ . Ovviamente, il valore di  $\lambda_p(\mathbf{u})$  può essere diverso su due linee integrali diverse. Si osservi che nel caso lineare tutti gli autovalori sono costanti per cui ciascun campo caratteristico associato all'autovalore  $\lambda_p$  è certamente linearmente degenerare.

Una discontinuità che si propaghi all'interno di un campo linearmente degenerare prende il nome di *discontinuità di contatto*. Se il  $p$ -esimo campo caratteristico è linearmente degenerare e in esso si propaga una soluzione discontinua del tipo  $\mathbf{u}_\ell$  a sinistra e  $\mathbf{u}_r$  a destra, si può dimostrare che

$$\lambda_p(\mathbf{u}_\ell) = \lambda_p(\mathbf{u}_r) = S_p,$$

dove  $S_p$  è la velocità di propagazione della discontinuità associata all'autovalore linearmente degenerare. Di conseguenza, le linee caratteristiche sono tutte rette parallele tra di loro da entrambi i lati della discontinuità e si propagano proprio a quella velocità, esattamente come nel caso lineare dell'equazione del trasporto.

### 9.5.2 Soluzioni possibili del problema di Riemann nel caso nonlineare

Consideriamo il problema di Riemann per il sistema nonlineare iperbolico

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{u})]_x = 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell & \text{se } x < 0 \\ \mathbf{u}_r & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (9.23)$$

Nel caso lineare  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ , gli autovalori  $\lambda_p$  sono costanti, ciascun campo caratteristico è linearmente degenerare, e ciascuna soluzione elementare è una discontinuità che si propaga alla velocità  $S_p = \lambda_p$ .

Nel caso non lineare (9.23), le soluzioni elementari possono essere di tre tipi: onde d'urto, discontinuità di contatto (note anche come onde di contatto) e onde di rarefazione.

- **Onde d'urto.** Nel caso di onda d'urto il  $p$ -esimo campo caratteristico associato all'autovalore  $\lambda_p(\mathbf{u})$  è *genuinamente non lineare* e i due stati costanti  $\mathbf{u}_\ell$  e  $\mathbf{u}_r$  sono connessi da una discontinuità per la quale valgono la condizione di Rankine-Hugoniot (9.14) e la condizione di entropia (9.18), ossia

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) = S_p(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell)$$

$$\lambda_p(\mathbf{u}_\ell) > S_p > \lambda_p(\mathbf{u}_r).$$

Come nel caso scalare, le linee caratteristiche “entrano” sia da destra che da sinistra nell'onda d'urto.

- **Discontinuità di contatto.** Nel caso di discontinuità di contatto il  $p$ -esimo campo caratteristico associato all'autovalore  $\lambda_p(\mathbf{u})$  è *linearmente degenerare* e i due stati costanti  $\mathbf{u}_\ell$  e  $\mathbf{u}_r$  sono connessi da una discontinuità per la quale valgono le seguenti relazioni

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_\ell) = S_p(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\ell)$$

$$\lambda_p(\mathbf{u}_\ell) = \lambda_p(\mathbf{u}_r) = S_p$$

$$\frac{du_1}{r_p^{(1)}} = \frac{du_2}{r_p^{(2)}} = \frac{du_3}{r_p^{(3)}} = \dots = \frac{du_m}{r_p^{(m)}},$$

dove  $r_p^{(1)}$  è la prima componente dell'autovettore destro associato a  $\lambda_p$ ,  $r_p^{(2)}$  la seconda e così via, ovvero  $\mathbf{r}_p = [r_p^{(1)}, r_p^{(2)}, r_p^{(3)}, \dots, r_p^{(m)}]^T$ . La seconda relazione assicura che nel piano  $x-t$  le linee caratteristiche sono tutte parallele tra loro e parallele alla discontinuità di contatto, sia a destra che a sinistra di essa.

- **Onde di rarefazione.** Nel caso di onde di rarefazione il  $p$ -esimo campo caratteristico associato all'autovalore  $\lambda_p(\mathbf{u})$  è *genuinamente non lineare* e i due stati costanti  $\mathbf{u}_\ell$  e  $\mathbf{u}_r$  sono connessi da una discontinuità per la quale valgono le seguenti relazioni

$$\lambda_p(\mathbf{u}_\ell) < \lambda_p(\mathbf{u}_r)$$

$$\frac{du_1}{r_p^{(1)}} = \frac{du_2}{r_p^{(2)}} = \frac{du_3}{r_p^{(3)}} = \dots = \frac{du_m}{r_p^{(m)}},$$

ovvero si osserva un ventaglio di linee caratteristiche spiccate dall'origine che divergono.

## 9.6 Problema di Riemann per le equazioni di Eulero 1D

Un problema fondamentale della gas dinamica è il cosiddetto *shock-tube problem* e consiste nel mettere due gas separati da un diaframma all'interno di un tubo. A sinistra del diaframma ci sono una certa densità  $\rho_\ell \neq 0$ , una velocità  $u_\ell = 0$  (nulla perché il gas è in quiete) e una certa pressione  $p_\ell \neq 0$ , quindi  $\mathbf{u}_\ell = [\rho_\ell, u_\ell, p_\ell]^T$ . A destra lo stato del sistema è caratterizzato da una certa densità  $\rho_r \neq 0$ , una velocità  $u_r = 0$  (nulla perché il gas è in quiete) e una certa pressione  $p_r \neq 0$ , ovvero  $\mathbf{u}_r = [\rho_r, u_r, p_r]^T$ . Il diaframma viene rotto di schianto (idealmente viene tolto) e i due gas entrano in contatto: cosa succede? Per descrivere la dinamica di questo problema si può pensare che tutte le grandezze fisiche in gioco siano costanti su una sezione del tubo che si trova ad una certa distanza  $x$  dal punto in cui si trovava inizialmente il diaframma e quindi si possono utilizzare le equazioni di Eulero non stazionarie e monodimensionali

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_{\text{tot}} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_{\text{tot}} + p) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_{\text{tot}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_{\text{tot}} + p) \end{pmatrix},$$

dove  $\rho e_{\text{tot}} = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u^2$ , che implica  $u(\rho e_{\text{tot}} + p) = u\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho u^2\right)$ . Si osservi che per le equazioni così scritte lo stato del sistema non è descritto dalle variabili primitive  $\rho$ ,  $u$  e  $p$ . Per riscrivere il sistema in termini di variabili primitive conviene utilizzare la forma quasi lineare (lo studente diligente lo dimostri)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_t + [\mathbf{A}(\mathbf{u})]\mathbf{u}_x = 0,$$

essendo  $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  la velocità del suono. Risolvendo il problema agli autovalori per la matrice linearizzata

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix},$$

si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1(\mathbf{u}) = u - a, \quad \lambda_2(\mathbf{u}) = u, \quad \lambda_3(\mathbf{u}) = u + a,$$

e i corrispondenti autovettori destri

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ a/\rho \\ a^2 \end{bmatrix}.$$

Si osserva immediatamente che il campo di caratteristiche associate al secondo autovalore è linearmente degenere in quanto

$$\nabla^{\mathbf{u}} \lambda_2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla^{\mathbf{u}} \lambda_2(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{u}) = 0,$$

mentre i campi di caratteristiche associati al primo ed al terzo autovalore sono genuinamente non lineari.

Siccome il secondo campo di caratteristiche è linearmente degenere, in esso non ci possono essere né onde d'urto né ventagli di rarefazione. Al contrario, vi saranno delle discontinuità di contatto che si propagano alla velocità  $\lambda_2$  da ciascuno dei lati della discontinuità. Inoltre, siccome  $\lambda_2$  è costante sulla curva integrale per  $\mathbf{r}_2(\mathbf{u})$  che è a sua volta costante, le linee caratteristiche associate al secondo autovalore sono delle rette. Infine, per il campo associato a queste caratteristiche valgono le relazioni di Rankine-Hugoniot tra gli stati  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\mathbf{u}}$ , che è facile scrivere per le equazioni in forma conservativa:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}\tilde{u} - \hat{\rho}\hat{u} &= \lambda_2(\tilde{\rho} - \hat{\rho}) \\ (\tilde{\rho}\tilde{u}^2 + \tilde{p}) - (\hat{\rho}\hat{u}^2 + \hat{p}) &= \lambda_2(\tilde{\rho}\tilde{u} - \hat{\rho}\hat{u}) \\ \tilde{u}(\tilde{\rho}\tilde{e}_{\text{tot}} + \tilde{p}) - \hat{u}(\hat{\rho}\hat{e}_{\text{tot}} + \hat{p}) &= \lambda_2(\tilde{\rho}\tilde{e}_{\text{tot}} - \hat{\rho}\hat{e}_{\text{tot}}). \end{aligned}$$

È immediato osservare che esse sono soddisfatte per  $\tilde{u} = \hat{u}$  e  $\tilde{p} = \hat{p}$ , indipendentemente dai valori di  $\tilde{\rho}$  e  $\hat{\rho}$ , ovvero *la discontinuità di contatto è tale per cui attraverso di essa sia la pressione che la velocità si mantengono costanti, ma la densità è discontinua come lo sono le variabili che dipendono da essa (energia interna, temperatura, velocità del suono, entropia, etc.)* Inoltre, la velocità di propagazione di questa discontinuità della sola densità è la velocità del fluido essendo  $\lambda_2 = u$ , pertanto le particelle di fluido si muovono parallelamente alla discontinuità di contatto e non la attraversano. Questo implica che due gas inizialmente in contatto a pari velocità e pressione rimarranno distinti tra loro non mescolandosi e continueranno a rimanere in contatto esclusivamente lungo la discontinuità di contatto.

### 9.6.1 Soluzione generale del problema di Riemann

Dato il problema di Riemann (9.23) in cui il sistema di equazioni è quello di Eulero, se le condizioni iniziali sono

$$\mathbf{u}_\ell = [\rho_\ell, u_\ell, p_\ell]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_r = [\rho_r, u_r, p_r]^T,$$

nella soluzione generale appariranno altri due stati costanti

$$\mathbf{u}_\ell^* = [\rho_\ell^*, u^*, p^*]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_r^* = [\rho_r^*, u^*, p^*]^T$$

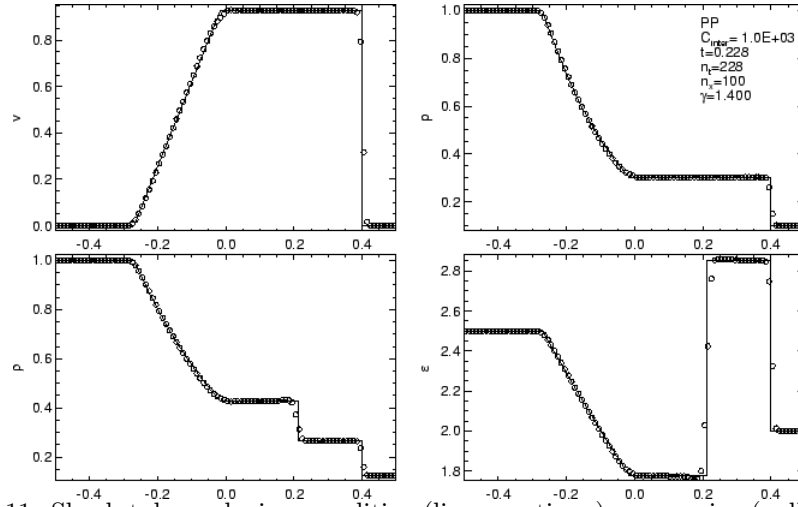


Figura 9.11: Shock tube: soluzione analitica (linea continua) e numerica (pallini vuoti). Velocità  $u$ , pressione  $p$ , densità  $\rho$  ed energia interna  $\rho e_{\text{tot}}$ . Soluzione del Problema di Riemann con  $(\rho, p, v)_\ell = (1, 1, 0)$  e  $(\rho, p, v)_r = (1/8, 1/10, 0)$ . Si notino un'onda di rarefazione che viaggia verso sinistra, una discontinuità di contatto che viaggia a bassa velocità verso destra ed un'onda d'urto che viaggia velocemente verso destra.

a cavallo della discontinuità di contatto associata al secondo autovalore e caratterizzata da una discontinuità della densità ( $\rho_\ell^* \neq \rho_r^*$ ), mentre i valori di velocità e pressione a sinistra e a destra di essa si mantengono costanti e pari rispettivamente a  $u^*$  e  $p^*$ .

Una volta noto il fatto che il secondo autovalore è sempre associato ad una discontinuità di contatto (onda intermedia), la soluzione generale può essere uno solo dei seguenti 4 casi:

1. ventaglio di rarefazione a sinistra, discontinuità di contatto al centro, onda d'urto a destra;
2. onda d'urto a sinistra, discontinuità di contatto al centro, ventaglio di rarefazione a destra;
3. ventaglio di rarefazione a sinistra, discontinuità di contatto al centro, ventaglio di rarefazione a destra;
4. onda d'urto a sinistra, discontinuità di contatto al centro, onda d'urto a destra.

Procedendo analiticamente è possibile determinare la soluzione generale del problema di Riemann per le equazioni di Eulero nelle diverse regioni.





## Appendice A

# Richiami su vettori, tensori, identità ed operatori differenziali

### A.1 Vettori in $\mathbb{R}^3$ e operazioni su di essi

Un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  può essere visualizzato come una freccia spiccata dall'origine  $O(0,0,0)$  di un sistema di assi cartesiani ortogonali verso il punto  $V \in \mathbb{R}^3$  di coordinate  $v_1, v_2, v_3$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3)$ , come schematizzato in figura A.1. La retta passante per i punti  $O$  e  $V$  viene detta

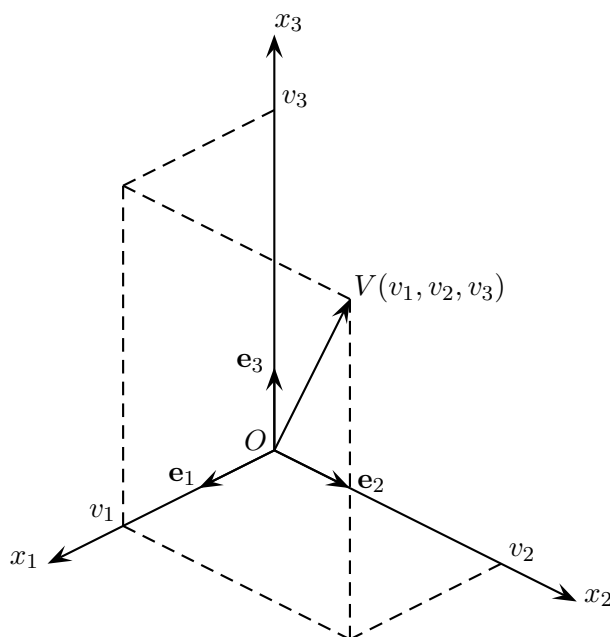


Figura A.1: Rappresentazione del vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  come freccia spiccata dall'origine  $O$  verso il punto  $V(v_1, v_2, v_3)$ .

*direzione* del vettore  $\mathbf{v}$ , risulta definito in modo naturale il *verso* del vettore  $\mathbf{v}$  come il verso di percorrenza della semiretta a partire dall'origine  $O(0,0,0)$  fino al punto  $V$ , e la lunghezza del segmento  $\overline{OV}$  viene detto *modulo* del vettore  $\mathbf{v}$  che, per evitare confusione, indicheremo con  $|\mathbf{v}|$ . Pertanto

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Se indichiamo con

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

i tre *versori* della base canonica (ortonormale) di  $\mathbb{R}^3$ , ossia i tre vettori di modulo unitario orientati, ciascuno, secondo uno degli assi cartesiani ortogonali, come riportato in figura A.1, allora tramite essi è possibile scrivere il vettore  $\mathbf{v}$  come somma delle sue componenti vettoriali lungo gli assi cartesiani  $x_1, x_2$  e  $x_3$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3.$$

Dati due vettori in  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3,$$

definiamo *prodotto scalare*, e lo indichiamo con il simbolo ‘ $\cdot$ ’ tra i due vettori, il *numero*  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Evidentemente, il prodotto scalare è commutativo, ovvero

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

Definiamo *prodotto vettoriale*, e lo indichiamo con il simbolo ‘ $\times$ ’ tra i due vettori, il *vettore*  $\mathbf{c}$  tale che

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} := \mathbf{e}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Come si può facilmente verificare raccogliendo un segno meno nel termine di destra della definizione appena data, il prodotto vettoriale è anticommutativo, ovvero

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Per ricordarsi come si calcola il prodotto vettoriale tra due vettori basta osservare che

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dalla definizione di prodotto scalare si ha che

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

da cui segue che due vettori ortogonali hanno prodotto scalare nullo. Dalla definizione di prodotto vettoriale si ha

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

mentre

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{se } i = j,$$

in quanto due vettori paralleli hanno prodotto vettoriale nullo. Dalla definizione di prodotto scalare segue anche che il modulo di un vettore è

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Inoltre, per il prodotto scalare, si ha

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato dai due vettori. Viceversa, dati due vettori è immediato determinare l'angolo tra essi compreso come

$$\theta = \arccos \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right).$$

Per il prodotto vettoriale si ha invece

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \iff |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta,$$

essendo  $\theta$  l'angolo formato dai due vettori.

### A.1.1 Alcune identità vettoriali

Dimostriamo le identità notevoli

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (\text{A.2})$$

Per la (A.1), dalla definizione di prodotto vettoriale tra due vettori si ha

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} := \mathbf{e}_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \mathbf{e}_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \mathbf{e}_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

pertanto

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (b_3c_1 - b_1c_3) & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{e}_1(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3) + \\ &\quad \mathbf{e}_2(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) + \\ &\quad \mathbf{e}_3(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2), \end{aligned}$$

che riscritto sommando e sottraendo alla prima componente  $a_1b_1c_1$ , alla seconda  $a_2b_2c_2$  e alla terza  $a_3b_3c_3$ , porta a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{e}_1(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1) + \\ &\quad \mathbf{e}_2(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2) + \\ &\quad \mathbf{e}_3(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3) \\ &= \mathbf{e}_1[(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1] \\ &\quad \mathbf{e}_2[(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2] \\ &\quad \mathbf{e}_3[(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3]. \end{aligned}$$

Essendo

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \text{e} \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{e}_1[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1] \\
 &\quad \mathbf{e}_2[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_2] \\
 &\quad \mathbf{e}_3[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_3] \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{e}_1b_1 + \mathbf{e}_2b_2 + \mathbf{e}_3b_3) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{e}_1c_1 + \mathbf{e}_2c_2 + \mathbf{e}_3c_3) \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},
 \end{aligned}$$

da cui la (A.1). Evidentemente, dato che il prodotto scalare tra due vettori è commutativo ed il risultato è uno scalare, la (A.1) può anche essere riscritta nelle forme totalmente equivalenti

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
 &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\
 &= \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \\
 &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}.
 \end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'identità vettoriale (A.2). Dalle definizioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale si hanno le tre uguaglianze

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
 &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1), \\
 \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + b_2(c_3a_1 - c_1a_3) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) \\
 &= b_1c_2a_3 + b_2c_3a_1 + b_3c_1a_2 - (b_1c_3a_2 + b_2c_1a_3 + b_3c_2a_1), \\
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
 &= c_1a_2b_3 + c_2a_3b_1 + c_3a_1b_2 - (c_1a_3b_2 + c_2a_1b_3 + c_3a_2b_1),
 \end{aligned}$$

dalle quali si ottiene immediatamente la (A.2).

## A.2 Gradiente, divergenza, rotore e laplaciano

Se introduciamo il vettore  $\nabla$  definito come

$$\nabla := \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

allora risultano definiti in modo naturale e formalmente corretto

- il *gradiente di uno scalare*  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$  come moltiplicazione tra il vettore  $\nabla$  e lo scalare  $\varphi$ :

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

- la *divergenza di un vettore*  $\mathbf{v} = [v_1(x_1, x_2, x_3, t), v_2(x_1, x_2, x_3, t), v_3(x_1, x_2, x_3, t)]$  come prodotto scalare tra il vettore  $\nabla$  e il vettore  $\mathbf{v}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

- il *rotore di un vettore*  $\mathbf{v} = [v_1(x_1, x_2, x_3, t), v_2(x_1, x_2, x_3, t), v_3(x_1, x_2, x_3, t)]$  come prodotto vettoriale tra il vettore  $\nabla$  e il vettore  $\mathbf{v}$ :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{e}_3 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right),$$

- e il *laplaciano di uno scalare*  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$  come il prodotto tra lo scalare  $\nabla^2 = |\nabla|^2$  e lo scalare  $\varphi$ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

Si osservi che il laplaciano di  $\varphi$  è la divergenza del gradiente di  $\varphi$ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = \nabla \cdot (\nabla \varphi).$$

Talvolta, nello studio della dinamica dei fluidi, per scrivere in modo compatto le equazioni si utilizzano anche

- il *gradiente di un vettore*  $\mathbf{v}$ , noto anche come jacobiano del vettore  $\mathbf{v}$ , definito come la matrice avente per righe i gradienti delle singole componenti di  $\mathbf{v}$ :

$$(\nabla \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

- la *divergenza di una matrice*  $\mathbf{A}$  definita come il vettore avente come componenti le divergenze dei vettori riga della matrice  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \nabla \cdot ([a_{11}, a_{12}, a_{13}]) \\ \nabla \cdot ([a_{21}, a_{22}, a_{23}]) \\ \nabla \cdot ([a_{31}, a_{32}, a_{33}]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{e}_1 \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left( \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} \right) + \\ &\quad \mathbf{e}_3 \left( \frac{\partial a_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

- il *laplaciano di un vettore*  $\mathbf{v}$  definito come la divergenza del gradiente del vettore  $\mathbf{v}$ , ossia il vettore avente come componenti le divergenze dei gradienti delle componenti di  $\mathbf{v}$  o,

equivalentemente, il vettore avente come componenti i laplaciani delle componenti di  $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla v_1) \\ \nabla \cdot (\nabla v_2) \\ \nabla \cdot (\nabla v_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^2 v_1 \\ \nabla^2 v_2 \\ \nabla^2 v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{e}_1 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) + \mathbf{e}_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) + \\ &\quad \mathbf{e}_3 \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right),\end{aligned}$$

- il simbolo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$  che, inteso come prodotto scalare tra i vettori  $\mathbf{u}$  e  $\nabla$ , denota l'operatore scalare

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

- ed il simbolo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  che, inteso come prodotto tra lo scalare  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$  ed il vettore  $\mathbf{v}$ , denota il vettore  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_1 v_1 + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_2 v_2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_3 v_3$ , ossia

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{e}_1(\mathbf{u} \cdot \nabla v_1) + \mathbf{e}_2(\mathbf{u} \cdot \nabla v_2) + \mathbf{e}_3(\mathbf{u} \cdot \nabla v_3).$$

Siccome la derivata è un operatore lineare, anche per gradiente, divergenza rotore e laplaciano valgono le proprietà di linearità.

Un'identità notevole, molto utile nello studio della dinamica dei fluidi per riscrivere le equazioni in modo da far comparire il rotore della velocità (detto vorticità), è

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right). \quad (\text{A.3})$$

Per dimostrarla utilizziamo la definizione di  $\nabla \times \mathbf{v}$  e di prodotto vettoriale e calcoliamo  $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_3 - \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_2 \right] + \\ &\quad \mathbf{e}_2 \left[ \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_1 - \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_3 \right] + \\ &\quad \mathbf{e}_3 \left[ \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_2 - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_1 \right].\end{aligned}$$

Sommando e sottraendo nella prima componente  $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ , nella seconda  $v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ , nella terza  $v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{e}_1 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_3 - \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_2 + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right] + \\
&\quad \mathbf{e}_2 \left[ \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_1 - \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_3 + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right] + \\
&\quad \mathbf{e}_3 \left[ \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_2 - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_1 + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] \\
&= \mathbf{e}_1 \left[ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \left( \frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3^2}{\partial x_1} \right) \right] + \\
&\quad \mathbf{e}_2 \left[ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \left( \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3^2}{\partial x_2} \right) \right] + \\
&\quad \mathbf{e}_3 \left[ v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \left( \frac{\partial v_1^2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2^2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3^2}{\partial x_3} \right) \right],
\end{aligned}$$

da cui, passando alla notazione vettoriale,

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{e}_1 \left[ \mathbf{v} \cdot \nabla v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] + \mathbf{e}_2 \left[ \mathbf{v} \cdot \nabla v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] + \\
&\quad \mathbf{e}_3 \left[ \mathbf{v} \cdot \nabla v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] \\
&= \mathbf{e}_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_1) + \mathbf{e}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_2) + \mathbf{e}_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_3) - \nabla \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right),
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_3^2}{2}.$$

Siccome

$$\mathbf{e}_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_1) + \mathbf{e}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_2) + \mathbf{e}_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_3) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

allora possiamo scrivere direttamente la (A.3):

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right).$$

### A.3 Tensori (cenni) e notazione di Einstein

Per un vettore scritto in componenti cartesiane valgono le seguenti forme alternative

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i,$$

essendo  $\mathbf{e}_i$ , con  $i = 1, 2, 3$  i versori unitari. Se utilizziamo la *convezione di Einstein sugli indici ripetuti* (da qui in avanti la chiameremo semplicemente *notazione di Einstein*), secondo la quale quando in un'espressione compaiono dei termini con due indici uguali allora quel termine deve essere rimpiazzato dalla somma del termine stesso con gli indici che vanno da 1 al massimo ammissibile (3 nel nostro caso, 4 nel caso della relatività speciale di Einstein), allora il vettore  $\mathbf{v}$  si scrive semplicemente

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v_i,$$

mentre il suo modulo si scrive

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_i v_i}.$$

Si osservi che scrivere il modulo di un vettore come  $\sqrt{v_i^2}$  è **completamente sbagliato** perché

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2} = \sqrt{v_i v_i} \neq \sqrt{v_i^2} = |v_i|,$$

in quanto la sommatoria viene eseguita *solo se gli indici all'interno di un termine sono ripetuti* (in  $\sqrt{v_i^2}$  non ci sono indici ripetuti). Questa convenzione è particolarmente utile e conveniente, ma bisogna sempre stare molto attenti agli eventuali indici ripetuti che sott'intendono una sommatoria: nel caso gli indici ripetuti siano più di uno, allora ci sono più sommatorie innestate una dentro l'altra.

| Quantità                  | Accezione comune | Notazione comune                   | Notazione indiciale cartesiana | Notazione matriciale  |
|---------------------------|------------------|------------------------------------|--------------------------------|---|
| Tensore di ordine zero    | scalare          | $v$                                | $v$                            | $[v]$   |
| Tensore di ordine uno     | vettore          | $\mathbf{v}$                       | $v_i$                          | $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$   |
| Tensore di ordine due     | matrice          | $\mathbf{V}$                       | $v_{ij}$                       | $\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix}$ |
| Tensore di ordine tre     | tensore          | $\overline{\mathbf{V}}$            | $v_{ijk}$                      | -   |
| Tensore di ordine quattro | tensore          | $\overline{\overline{\mathbf{V}}}$ | $v_{ijkl}$                     | -   |

Tabella A.1: Riassunto delle diverse notazioni per scalari, vettori e tensori

Se tralasciamo la presenza del versore  $\mathbf{e}_i$ , quando scriviamo  $v_i$  intendiamo, quindi, la componente  $i$ -esima di un *vettore*. Al contrario, se scriviamo solo  $v$  senza alcun indice, allora intendiamo in modo inequivocabile uno *scalare*. Estendendo l'idea degli indici, se scriviamo un



oggetto con più indici, per esempio  $v_{ijk}$ , intendiamo un  *tensore*  di  *rango*  pari al numero di indici che compaiono come pedici. Quindi le matrici sono tensori di rango 2, i vettori tensori di rango 1 e gli scalari tensori di rango 0, come riassunto in tabella A.1. Si pensi ora a campi scalari e campi vettoriali tipici della fluidodinamica: la densità, la pressione, la temperatura sono *campi scalari*, eventualmente dipendenti dal tempo, mentre la velocità e la vorticità sono *campi vettoriali*, anch'essi in generale dipendenti dal tempo. Evidentemente, siccome questi campi sono delle grandezze fisiche e misurabili, essi non cambiano al variare del sistema di riferimento, alla peggio cambiano le componenti di un vettore dipendentemente dal sistema di riferimento, ma il vettore (pensato come una “freccia”) di sicuro non cambia. Quindi la temperatura sarà sempre la stessa indipendentemente dal sistema di riferimento così come la velocità. Allo stesso modo anche i *campi tensoriali* devono essere invarianti rispetto al sistema di riferimento. Siccome utilizzeremo sempre coordinate cartesiane (non curvilinee), evitiamo di introdurre il concetto di componenti covarianti e controvarianti, ed indicheremo i tensori solo con dei pedici. Due tensori molto utili sono:

1. il simbolo di Kronecker  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$
2. il simbolo di Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \\ 0 & \text{altrimenti: almeno due indici sono uguali tra loro.} \end{cases}$

Si osservi che  $\delta_{ij}$  è la matrice identità  $\mathbf{I} = \text{diag}(1, \dots, 1)$  ed è un tensore di rango 2, diagonale e simmetrico. Il simbolo di Levi-Civita, invece, è un tensore di rango 3 che può essere riscritto (nel nostro caso) come

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{(j-i)(k-i)(k-j)}{2},$$

e dalla definizione del quale seguono immediatamente tre proprietà notevoli

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}, \quad \varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jik} = \varepsilon_{ikj}, \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}. \quad (\text{A.4})$$

Si osservi che valgono le seguenti identità che coinvolgono il simbolo di Kronecker:

$$a_i = a_l \delta_{il}, \quad a_{ij} = a_{lm} \delta_{il} \delta_{jm}, \quad a_{ijk} = a_{lmn} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}. \quad (\text{A.5})$$

Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono due vettori colonna, mettendo assieme la notazione di Einstein con quella tensoriale e supponendo che tutti gli indici varino da 1 a 3 (siamo nello spazio euclideo) si ottengono scritture molto compatte di operazioni note. Ne riportiamo alcune.

- Prodotto scalare tra vettori:  $c = a_i b_i \iff c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .
- Prodotto matrice vettore:  $b_i = m_{ij} a_j \iff \mathbf{b} = \mathbf{M} \mathbf{a}$ .
- Prodotto tensoriale tra vettori, anche di dimensioni diverse, con  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$m_{ij} = a_i b_j \iff \mathbf{M} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & a_m b_3 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}.$$

- Determinante di una matrice quadrata ( $3 \times 3$  nel nostro caso):

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} m_{1i} m_{2j} m_{3k}. \quad (\text{A.6})$$

- Prodotto vettoriale tra vettori:  $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \iff \mathbf{c} = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k \iff \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .
- Gradiente di uno scalare:  $\nabla \varphi = \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ .
- Divergenza di un vettore:  $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ .
- Rotore di un vettore:  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \iff \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ .
- Laplaciano di uno scalare:  $\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}$ .
- Divergenza di un tensore:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$ .

### A.3.1 Alcune proprietà del simbolo di Levi-Civita

Il simbolo di Levi-Civita gode di alcune proprietà. Dimostriamo che

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

ovvero, che vale la seguente relazione (dopo aver svolto i calcoli a destra)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} &= \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) + \delta_{im}(\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{kn}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Per la dimostrazione osserviamo che, dalle relazioni (A.5) e (A.6), si ottiene immediatamente

$$\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \delta_{li} \delta_{mj} \delta_{nk} = \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix},$$

e quindi

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}.$$

Ricordando che il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti delle singole matrici, si ha allora

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix},$$

da cui la (A.7). Dall'identità (A.8) si ottiene immediatamente che il prodotto di due simboli di Levi-Civita con lo stesso indice porta all'identità

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \quad (\text{A.9})$$

Infatti, sostituendo nella (A.7)  $l = i$ , utilizzando la definizione di simbolo di Kronecker, ed osservando che  $\delta_{ii} = 3$ , si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{km}\delta_{jn} + \delta_{jn}\delta_{km} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{kn}\delta_{jm} \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \end{aligned}$$

Da questa identità si ottengono immediatamente anche le seguenti identità che coinvolgono il prodotto di due simboli di Levi-Civita con rispettivamente due e tutti gli indici uguali:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

### A.3.2 Rivisitazione di alcune proprietà delle operazioni tra vettori

Il simbolo di Levi-Civita consente di ottenere molto velocemente le identità vettoriali già ricavate attraverso lunghi passaggi. Dimostriamo che

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Se  $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  allora per la  $i$ -esima componente si ha

$$\begin{aligned} d_i &= \varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_lc_m \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_jb_lc_m \\ &= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}a_jb_lc_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m \\ &= b_ia_m c_m - c_ia_lb_l \\ &= b_i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})]_i - [\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]_i. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora le identità vettoriali

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

L'utilizzo del simbolo di Levi-Civita e delle identità (A.4) consente di scrivere

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = b_j\varepsilon_{ijk}a_ic_k = b_j\varepsilon_{jki}c_ka_i = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

e

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = c_k\varepsilon_{ijk}a_ib_j = c_k\varepsilon_{kij}a_ib_j = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$



## Appendice B

# Richiami su alcuni teoremi fondamentali

### B.1 Teorema della divergenza e del rotore

#### B.1.1 Teorema della divergenza

Sia  $V$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^3$  la cui frontiera  $S = \partial V$  è una superficie regolare orientabile di *normale uscente*  $\hat{\mathbf{n}}$  e sia  $\mathbf{v}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  su  $V$ . Allora vale la seguente identità nota come *Teorema della divergenza*

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV, \quad (\text{B.1})$$

essendo  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  la divergenza del vettore  $\mathbf{v}$ . Tale teorema è detto anche *teorema di Green* o *teorema di Gauss* o *teorema di Ostrogradsky*. In forma tensoriale vale l'uguaglianza

$$\int_S v_j n_j \, dS = \int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \, dV$$

e, più in generale,

$$\int_S \sigma_{ij} n_j \, dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dV.$$

#### B.1.2 Teorema del rotore (o di Stokes)

Sia  $S$  una superficie regolare a pezzi orientata con *normale uscente*  $\hat{\mathbf{n}}$  e bordo  $C$  orientato positivamente (ossia  $C$  è la curva orientata in  $\mathbb{R}^3$ , chiusa su se stessa, che fa da bordo alla superficie  $S$  in modo tale che percorrendola in verso positivo la normale alla superficie sia orientata secondo la convezione della *regola della mano destra*). Sia  $\mathbf{v}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  su un aperto che contiene  $S$ . Allora vale l'identità

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (\text{B.2})$$

essendo  $\hat{\mathbf{t}}$  il *versore tangente* alla curva orientata  $C$ .

## B.2 Significato fisico-geometrico di gradiente, divergenza e rotore

### B.2.1 Il gradiente

Dall'Analisi Matematica è noto che la derivata direzionale di una funzione scalare  $f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$  nella direzione  $\mathbf{v}$  e calcolata nel punto  $\mathbf{r}_0$  vale

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{r}_0) = \nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Pertanto, la direzione di massima crescita di  $f$  (ossia la direzione lungo la quale il valore numerico di  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{r})$  è massimo) si ha quando i vettori  $\nabla f(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli in quanto, in questo caso, il loro prodotto scalare si riduce al prodotto dei loro moduli. La direzione del gradiente di  $f$  è, in definitiva, la direzione di massima crescita di  $f$ .

Si osservi che, quando si valuta la funzione  $f$  lungo una curva parametrica in  $\mathbb{R}^3$  dipendente dal parametro  $t$ ,  $f$  diventa una funzione del solo parametro  $t$ :  $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = f(\mathbf{r}(t))$ . La derivata totale rispetto a  $t$  è quindi

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t}(t) + \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t}(t) + \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t}(t) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{r}(t)$  è una *curva di livello* di  $f$ , ossia una curva in  $\mathbb{R}^3$  tale per cui la funzione  $f$  valutata lungo di essa è costante,

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = c,$$

allora lungo la curva così definita si ha

$$\frac{df}{dt}(t) = 0 \iff \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

il che significa che il vettore gradiente è sempre ortogonale al vettore tangente  $\mathbf{r}'(t)$ , ossia il gradiente è sempre ortogonale alle linee di livello della funzione scalare  $f(\mathbf{r}(t))$ .

In definitiva, il vettore gradiente può essere interpretato come la direzione di massima crescita di una funzione scalare e, al tempo stesso, come la direzione perpendicolare alle linee di livello della funzione stessa.

### B.2.2 La divergenza

Se con

$$\Phi_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

intendiamo il *flusso* del vettore  $\mathbf{v}$  attraverso la superficie  $S$  di normale uscente (localmente)  $\hat{\mathbf{n}}$ , allora il teorema della divergenza (B.1.1) esprime il fatto che l'integrale su un volume della

divergenza di un vettore è pari a flusso uscente dello stesso vettore dalla superficie che ha come contorno il volume in questione.

Dalla forma integrale del teorema della divergenza (B.1.1) si può risalire ad una forma locale, che evidenzia il significato fisico/geometrico della divergenza. Consideriamo un intorno del punto  $\mathbf{r}_0$  avente volume  $V$  piccolo a piacere, i.e.  $V \rightarrow 0$ , in modo tale che, al limite, il volume si riduca al punto  $\mathbf{r}_0$ . Sotto queste ipotesi, possiamo supporre che la divergenza del campo  $\mathbf{v}$  sia più o meno costante e pari al valore nel punto  $\mathbf{r}_0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \approx \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ . Applicando il teorema della divergenza (B.1.1) sotto l'ipotesi  $V \rightarrow \{\mathbf{r}_0\}$ , si ha

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV \Rightarrow \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx \int_V \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) dV = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \int_V dV = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) V$$

da cui, passando dal particolare punto  $\mathbf{r}_0$  al generico punto  $\mathbf{r}$ , si ottiene l'espressione della divergenza in  $\mathbf{r}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{\int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{V} \iff \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{\Phi_S(\mathbf{v})}{V}. \quad (\text{B.3})$$

In conclusione, la divergenza di un vettore  $\mathbf{v}$  calcolata nel punto  $\mathbf{r}$  è una misura, per unità di volume, del flusso del vettore  $\mathbf{v}$  attraverso una superficie chiusa e infinitesima che racchiude il punto  $\mathbf{r}$ . Se la divergenza è positiva, allora si è in presenza di una sorgente e, di conseguenza, le linee di campo (linee tangenti in ogni punto al campo  $\mathbf{v}$ ) *divergono*; viceversa, se la divergenza è negativa si è in presenza di un pozzo e le linee di campo *convergono*. Se la divergenza è nulla (campo *solenoidale*), allora non c'è variazione locale del flusso del vettore.

Nel caso particolare in cui il vettore  $\mathbf{v}$  sia un campo di velocità  $\mathbf{u}$  si ha

$$\Phi_S(\mathbf{u}) = \int_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{\partial V}{\partial t},$$

pertanto, sfruttando la seconda delle (B.3), da  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{\Phi_S(\mathbf{v})}{V}$  si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Quindi la divergenza del vettore velocità rappresenta la variazione *relativa* di volume nel tempo (relativa al volume stesso  $V$ ). Se la divergenza è positiva, allora il volume materiale dell'elemento di fluido aumenta con conseguente "dilatazione" dell'elemento di fluido; se la divergenza è negativa allora l'elemento di fluido diminuisce di volume "contraendosi", se la divergenza è nulla il volume dell'elemento di fluido rimane costante, il che significa che se si dilata in una direzione deve contrarsi delle altre e viceversa.

### B.2.3 Il rotore

Se con

$$\Gamma_C(\mathbf{v}) = \oint_C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell$$

denotiamo la *circuitazione* del vettore  $\mathbf{v}$  lungo la linea chiusa e orientata  $C$  di versore tangente (locale)  $\hat{\mathbf{t}}$ , allora possiamo ripetere lo stesso ragionamento proposto per l'interpretazione fisico/geometrica della divergenza utilizzando, questa volta, la forma integrale del Teorema di

Stokes (B.2). Consideriamo un processo di limite che porta l'area  $S$  e la curva  $C$ , che fa da contorno ad essa, a tendere al punto stesso  $\mathbf{r}_0$ . Sotto queste ipotesi, si ha

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad \Rightarrow \quad \oint_C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell \approx \int_S (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)) \cdot \hat{\mathbf{n}} \int_S dS$$

da cui

$$(\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{\oint_C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\ell}{S} \quad \Longleftrightarrow \quad (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{\Gamma_C(\mathbf{v})}{S}. \quad (\text{B.4})$$

Pertanto, il rotore di un vettore  $\mathbf{v}$  calcolato nel punto  $\mathbf{r}$  è una misura, per unità di superficie, della circuitazione del vettore  $\mathbf{v}$  attraverso la linea orientata chiusa e infinitesima  $C$  che fa da contorno ad  $S$  e che racchiude il punto  $\mathbf{r}$ .

Nel caso particolare in cui il vettore  $\mathbf{v}$  sia un campo di velocità  $\mathbf{u}$ , il rotore di  $\mathbf{u}$  prende il nome di *vorticità* (indicata con  $\boldsymbol{\omega}$ ),

$$\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega},$$

e si dimostra (per i dettagli si veda la sezione 5.1) che

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega},$$

dove  $\boldsymbol{\Omega}$  è la velocità angolare dell'elemento di fluido. Inoltre, sempre nel caso particolare in cui il vettore  $\mathbf{v}$  sia un campo di velocità  $\mathbf{u}$ , la circuitazione di  $\mathbf{u}$  prende il nome di *circolazione* (indicata con  $\Gamma_C(\mathbf{v})$ ) per cui, per la (B.4),

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{S \rightarrow \{\mathbf{r}\}} \frac{\Gamma_C(\mathbf{u})}{S}.$$

La parola 'circolazione' rende bene l'idea di un meccanismo fisico che fa circolare del fluido come attorno ad un vortice. In effetti la rotazione di un elemento di fluido su se stesso (misurata da  $\boldsymbol{\Omega}$ ) è originata dalla circolazione del vettore velocità che è direttamente proporzionale alla *vorticità locale*. È, quindi, abbastanza intuitivo legare il rotore della velocità alla presenza di vortici nella corrente. Una corrente con rotore della velocità nulla, i.e. priva di vorticità, prende il nome di corrente *irrotazionale*. Nelle zone in cui il campo di moto è irrotazionale gli elementi di fluido non ruotano ma traslano rigidamente.

### B.3 Teorema di Leibniz

Data una funzione  $f(x, t)$  definita per ogni  $x, t \in \mathbb{R}$  con  $t > 0$ , consideriamo il suo integrale nello spazio su un *dominio variabile nel tempo*  $I_t = [a(t); b(t)]$  e dimostriamo quanto vale la derivata di tale integrale rispetto al tempo, ossia il *teorema di Leibniz*:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \, dx + \left[ f(b(t), t) \frac{db(t)}{dt} - f(a(t), t) \frac{da(t)}{dt} \right].$$

Siccome la variabile di integrazione è spaziale, l'integrale è una funzione *solo del tempo*, pertanto possiamo scrivere

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx.$$



Applicando la definizione di derivata si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right]. \end{aligned}$$

Riscriviamo ora il rapporto incrementale aggiungendo e sottraendo  $\frac{1}{\Delta t} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx$ :

$$\begin{aligned} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right] \\ &= \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx, \end{aligned}$$

ed osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t)} f(x, t) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx + \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t)} f(x, t) dx \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} &= \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , il primo termine di destra diventa

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx,$$

mentre gli altri due termini danno una forma indeterminata del tipo 0/0 e vanno, quindi, ulteriormente elaborati. Ci concentriamo sul primo (il secondo è formalmente identico) e introduciamo la funzione  $F(x, t)$  (una primitiva di  $f(x, t)$  rispetto allo spazio) tale che

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = f(x, t). \quad (\text{B.5})$$

Sotto queste ipotesi si ha

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx = \frac{1}{\Delta t} [F(b(t+\Delta t), t) - F(b(t), t)].$$

Espandendo  $F(b(t+\Delta t), t)$  come un polinomio di Taylor arrestato al prim'ordine (i.e. linearizzando), si ha

$$F(b(t+\Delta t), t) = F(b(t), t) + \frac{\partial F(b(t), t)}{\partial x} [b(t+\Delta t) - b(t)] = F(b(t), t) + f(b(t), t)[b(t+\Delta t) - b(t)],$$

dove si è fatto uso della (B.5), per cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx &= \frac{1}{\Delta t} [F(b(t+\Delta t), t) - F(b(t), t)] \\ &= \frac{1}{\Delta t} [F(b(t), t) + f(b(t), t)[b(t+\Delta t) - b(t)] - F(b(t), t)] \\ &= f(b(t), t) \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Passando al limite si ha quindi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(b(t), t) \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t} = f(b(t), t) \frac{db(t)}{dt}.$$

Analogamente,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x, t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(a(t), t) \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t} = f(a(t), t) \frac{da(t)}{dt}.$$

In conclusione,

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \left[ f(b(t), t) \frac{db(t)}{dt} - f(a(t), t) \frac{da(t)}{dt} \right].$$

Introducendo le velocità di variazione degli estremi di integrazione

$$v_a(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad \text{e} \quad v_b(t) = \frac{db(t)}{dt},$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + [f(b(t), t)v_b(t) - f(a(t), t)v_a(t)]. \quad (\text{B.6})$$

Questa forma mette in evidenza il termine  $f(b(t), t)v_b(t) - f(a(t), t)v_a(t)$  che è semplicemente il flusso netto di  $f$  uscente dal dominio  $I_t = [a(t); b(t)]$ , pertanto il teorema di Leibniz può essere riarrangiato a parole dicendo che *la derivata rispetto al tempo dell'integrale di una funzione su un dominio variabile nel tempo è uguale all'integrale sul dominio al tempo  $t$  della derivata parziale della funzione rispetto al tempo più il flusso netto uscente dal dominio al tempo  $t$ .*

## B.4 Teorema del trasporto di Reynolds

### B.4.1 Il caso di una funzione scalare

Data una funzione scalare  $f(\mathbf{r}, t)$  differenziabile e definita per ogni  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  e  $t \in \mathbb{R}$  con  $t > 0$ , consideriamo il suo integrale nello spazio su un *dominio variabile nel tempo*  $\mathcal{V}_t$  avente come superficie di contorno  $\mathcal{S}_t = \partial\mathcal{V}_t$  e dimostriamo il *teorema di Reynolds*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right] d\mathcal{V},$$

dove  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  è un campo di velocità tale per cui tutti i punti del volume  $\mathcal{V}_t$  e della superficie chiusa  $\mathcal{S}_t$  che fa da frontiera ad esso hanno proprio la velocità  $\mathbf{u}$ .

Per dimostrare il teorema dimostriamo dapprima il seguente teorema, che stabilisce quanto vale la derivata rispetto al tempo di un integrale di volume esteso ad un dominio variabile nel tempo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}_t} f(\mathbf{r}_{|S}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S}) d\mathcal{S},$$

dove il vettore  $\mathbf{r}_{|S}$  indica la posizione sulla superficie di contorno  $\mathcal{S}_t = \partial\mathcal{V}_t$  variabile nel tempo.

È facile intuire che esso è l'estensione tridimensionale del teorema di Leibniz, pertanto la sua dimostrazione segue più o meno gli stessi passi. Si osservi che l'integrale sul volume  $\mathcal{V}_t$  è una funzione *solo del tempo*, ossia

$$G(t) = \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V},$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}_{t+\Delta t}} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \right] \end{aligned}$$

Attraverso un processo di linearizzazione simile all'espansione di Taylor nella dimostrazione del teorema di Leibniz, dividiamo il volume al tempo  $t + \Delta t$  in due parti, il volume al tempo  $t$  più l'incremento di volume  $\Delta\mathcal{V}_t$  che si ottiene quando il tempo varia da  $t$  a  $t + \Delta t$

$$\mathcal{V}_{t+\Delta t} = \mathcal{V}_t + \Delta\mathcal{V}_t,$$

e riscriviamo il rapporto incrementale come

$$\begin{aligned} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}_{t+\Delta t}} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} + \int_{\Delta\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \right]. \end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo  $\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}$  il rapporto incrementale diventa

$$\begin{aligned} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} + \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} d\mathcal{V} + \int_{\Delta \mathcal{V}_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} d\mathcal{V} + \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , i primi due termini di destra diventano rispettivamente

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V}, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} d\mathcal{V} &= \lim_{\Delta \mathcal{V}_t \rightarrow 0} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \end{aligned}$$

in quanto  $\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  è *finita* (per ipotesi  $f(\mathbf{r}, t)$  è differenziabile, pertanto le sue derivate parziali sono sempre finite) e l'integrale esteso ad un volume che tende a zero di una *funzione limitata* tende a zero. Vediamo ora come interpretare il limite dell'ultimo termine,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}.$$

Con riferimento alla figura B.1, se chiamiamo  $d\mathcal{S}_t$  un elemento infinitesimo della superficie di contorno del volume al tempo  $t$ , che indichiamo con  $\mathcal{S}_t$ , e se  $\mathbf{v}_s$  è la velocità di spostamento di  $d\mathcal{S}_t$ , allora l'elemento infinitesimo di superficie subisce, nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , uno spostamento  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{v}_s \Delta t$ . Il volumetto infinitesimo spazzato da  $d\mathcal{S}_t$  in tale intervallo di tempo è il parallelepipedo che ha per base  $d\mathcal{S}_t$  e per altezza la proiezione dello spostamento  $\Delta \mathbf{s}$  lungo il versore normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ . Pertanto,

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{S} \cdot (\mathbf{v}_s \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_t} \frac{1}{\Delta t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{S} \cdot (\mathbf{v}_s \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{\mathcal{S}_t} f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{S}.$$

Se la superficie  $\mathcal{S}_t$  si muove solidale alla corrente, ovvero se  $\mathbf{v}_s = \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|s}, t)$ , allora l'integrale diventa

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{S}_t} f(\mathbf{r}_{|s}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|s}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|s}) d\mathcal{S},$$

e la derivata rispetto al tempo dell'integrale di volume esteso ad un volume variabile nel tempo diventa quanto volevamo dimostrare:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}_t} f(\mathbf{r}_{|s}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|s}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|s}) d\mathcal{S}.$$

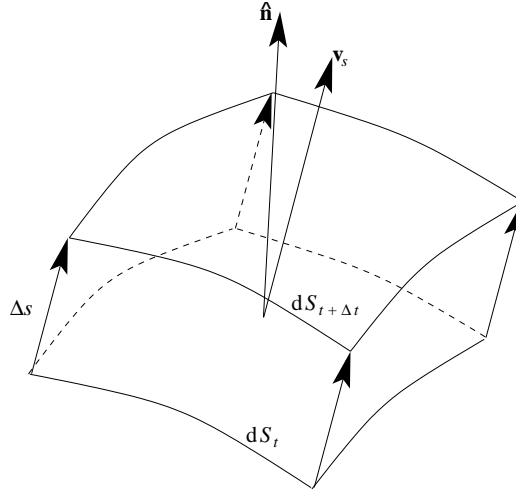


Figura B.1: Evoluzione da  $t$  a  $t + \Delta t$  dell'elemento infinitesimo della superficie di contorno quando il volume passa da  $\mathcal{V}_t$  a  $\mathcal{V}_{t+\Delta t}$ : l'incremento infinitesimo di volume è dato dal volume del solido che ha per base  $dS_t$  e per altezza la proiezione del vettore spostamento  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{v}_s \Delta t$  lungo il versore normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ , essendo  $\mathbf{v}_s$  la velocità di spostamento della superficie.

Utilizzando il teorema della divergenza si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{S_t} f(\mathbf{r}|_S, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}|_S, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}|_S) dS \\
 &= \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_t} \nabla \cdot (f(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) d\mathcal{V} \\
 &= \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \right] d\mathcal{V}.
 \end{aligned}$$

Alleggerendo la notazione, la conclusione è

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V},$$

noto anche come *teorema del trasporto di Reynolds*.

#### B.4.2 Il caso di un campo vettoriale

Quanto visto in precedenza si estende senza troppe difficoltà al caso di un campo vettoriale  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ . Infatti, se  $\mathbf{e}_i$  sono i versori lungo gli assi  $x_i, i = 1 \dots 3$  e  $f_i$  sono le tre componenti del

campo vettoriale  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \mathbf{e}_1 f_1(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \mathbf{e}_2 f_2(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \mathbf{e}_3 f_3(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \\ &= \mathbf{e}_1 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f_1(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \mathbf{e}_2 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f_2(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \mathbf{e}_3 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f_3(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f_i(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Concentriamoci su una singola componente  $f_i$ . Siccome per essa vale in teorema del trasporto di Reynolds si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f_i(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \nabla \cdot (f_i \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V}, \quad (\text{B.7})$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della notazione di Einstein

$$\frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_i u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot (f_i \mathbf{u}).$$

Utilizzando l'uguaglianza (B.7) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f_i(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) \right] d\mathcal{V},$$

dove il simbolo  $\otimes$  denota il prodotto tensoriale tra  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{u}$  e la divergenza di questo prodotto,  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u})$ , va letta in notazione di Einstein come

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) = \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j}, \quad i = 1 \dots 3.$$

## Appendice C

# Richiami di termodinamica classica e trasmissione del calore

### C.1 Termodinamica classica

La termodinamica classica studia, dal punto di vista *macrosocopico*, sistemi in equilibrio, ossia sistemi in cui tutte le proprietà meccaniche, fisiche e termiche sono (idealmente) indipendenti dallo spazio e dal tempo. Essa può essere applicata direttamente ai fluidi in quiete nei quali le proprietà fisiche siano uniformi, mentre non può essere applicata direttamente ai fluidi in moto che sono, evidentemente, sistemi non in equilibrio. Fortunatamente, però, si osserva che, per quanto i fluidi in moto possano sembrare molto lontani dall'equilibrio, in realtà ad essi sono applicabili tutte le considerazioni sulla termodinamica classica in quanto gli effetti dovuti al non equilibrio sono, praticamente, trascurabili.

#### C.1.1 Sistema termodinamico in equilibrio

Per *sistema termodinamico* intendiamo una parte di Universo. Sottraendo all'Universo il sistema termodinamico si ottiene l'*ambiente esterno*. Il sistema e l'ambiente esterno sono separati da una superficie di controllo che può essere reale o immaginaria, rigida o deformabile. Un sistema si dice:

- **aperto** se consente lo scambio, con l'ambiente esterno, sia di massa che di energia (quest'ultima può essere sotto forma di calore o lavoro);
- **chiuso** se consente lo scambio di energia con l'ambiente esterno ma non di massa;
- **isolato** se non consente lo scambio né di massa né di energia con l'ambiente esterno.

Lo stato di un sistema termodinamico è univocamente determinato da *variabili termodinamiche* (o di stato) come pressione, temperatura, volume, composizione chimica, o altre. Esse possono essere *estensive* se dipendono dalle dimensioni del sistema (tipicamente massa, volume, capacità termica) o *intensive* se non dipendono dalle dimensioni del sistema (pressione e temperatura). Spesso tra le variabili di stato può sussistere una relazione detta *equazione di stato*, che costituisce un vincolo tra le variabili e, pertanto, riduce i gradi di libertà necessari a descrivere compiutamente il sistema. Ad esempio per descrivere un sistema termodinamico semplice (costituito da una sola sostanza che non subisce né reazioni chimiche né cambiamenti di stato) sono sufficienti tre variabili di stato, tipicamente pressione, volume e temperatura. Una relazione

$f(p, v, T) = 0$  che lega queste variabili riduce il numero di gradi di libertà a due, in quanto permette di determinare la terza variabile note le altre due (come esempio di equazione di stato si veda la legge dei gas perfetti (C.8)).

Per poter definire le variabili di stato come caratterizzanti il sistema, quest'ultimo deve necessariamente essere in equilibrio termodinamico. Si dice che un sistema è in *equilibrio termodinamico* se le sue variabili termodinamiche sono ben definite e non variano nel tempo. Nei sistemi non in equilibrio le variabili termodinamiche non sono in genere definibili: per esempio ad un gas in equilibrio in un recipiente possiamo assegnare come volume quello del recipiente che lo contiene, ma non ha senso parlare del volume del gas che sta uscendo da una bombola. Affinché un sistema sia in equilibrio termodinamico devono essere verificate contemporaneamente queste quattro condizioni:

- equilibrio meccanico: c'è equilibrio tra tutte le forze applicate (la somma vettoriale delle forze applicate al sistema è nulla) e tutti i momenti applicati (la loro somma è nulla);
- equilibrio termico: non ci sono flussi di calore, la temperatura è costante nel tempo ed è la stessa in ogni punto del sistema;
- equilibrio chimico: non avvengono reazioni chimiche o fenomeni di diffusione, la composizione chimica è costante nel tempo ed è la stessa in ogni punto del sistema;
- equilibrio nucleare: non avvengono fissioni, cioè reazioni nucleari in cui atomi sono divisi in frammenti in un processo che libera energia, o fusioni nucleari, dove vi è l'unione di due nuclei leggeri per formare un nucleo più pesante.

Evidentemente, un fluido in moto e nel quale avvengono scambi di calore non può essere in equilibrio termodinamico *globale* in quanto le variabili termodinamiche cambiano sia nello spazio, sia nel tempo. Definiamo un sistema in *equilibrio termodinamico globale* se le variabili termodinamiche non cambiano né nel tempo né nello spazio (sono costanti). Tuttavia, per un fluido in moto si può pensare che nell'intorno di un punto le variabili termodinamiche varino di poco, sia nel tempo che nello spazio. In pratica, su piccola scala, si può assumere che il fluido sia in *equilibrio termodinamico locale*. Questo significa che le variabili termodinamiche possono variare nel tempo e nello spazio, ma lo fanno molto lentamente.

### C.1.2 Funzioni di stato

Una *funzione di stato* è una grandezza termodinamica che dipende *unicamente* dallo stato del sistema, ossia che non risente della storia del sistema o da come si è arrivati a quella particolare configurazione. Il lavoro ed il calore *non sono funzioni di stato* in quanto, generalmente, essi dipendono dalla storia che ha portato da uno stato all'altro (si pensi al lavoro contro la forza di attrito, che dipende evidentemente dal particolare percorso seguito). Per questo motivo indichiamo le variazioni infinitesime di lavoro e calore rispettivamente con  $\delta W$  e  $\delta Q$ . Al contrario, la variazione infinitesima di una funzione di stato  $f$  è indicata come differenziale esatto,  $df$ . Le funzioni di stato sufficienti per lo studio della dinamica dei fluidi sono l'energia interna  $E$ , l'entalpia  $H$  e l'entropia  $S$ .

- **Energia interna.** L'energia interna  $E$  include tutte le forme di energia contenute, a livello *microscopico*, all'interno del sistema termodinamico e dovute al moto casuale delle molecole o alla struttura interna delle stesse. In pratica, l'energia interna è riconducibile ad energia *cinetica* delle molecole del sistema (traslazione, rotazione e vibrazione) ed energia *potenziale* associata ad energia di tipo "statico" dovuta alle forze che tengono assieme la



sostanza (forze elettrostatiche tra gli atomi, tra le molecole o tra i cristalli e forze nucleari). L'energia interna di un sistema può essere cambiata scambiando con esso calore o lavoro, come previsto dal primo principio della termodinamica (pagina 160). L'energia interna si misura in joule (simbolo J). Spesso si utilizza l'energia interna specifica (per unità di massa) definita come

$$e = \frac{E}{m}, \quad (\text{C.1})$$

le cui unità di misura sono J/kg.

- **Entalpia.** Si definisce *entalpia* la quantità

$$H = E + pV, \quad (\text{C.2})$$

dove  $E$  è l'energia interna del sistema,  $p$  la pressione termodinamica e  $V$  il volume occupato dal sistema. L'unità di misura è, come per l'energia interna, il joule (simbolo J). Anziché l'entalpia, in termodinamica si utilizza molto spesso l'entalpia specifica (per unità di massa) definita come

$$h = \frac{H}{m} = e + pv, \quad (\text{C.3})$$

dove  $e$  è stata definita in (C.1) e  $v = V/m = 1/\rho$  è il *volume specifico*, ossia l'inverso della densità  $\rho$ , e si misura in m<sup>3</sup>/kg. Le unità di misura dell'entalpia specifica  $h$  sono J/kg.

- **Entropia.** Si definisce *entropia* la quantità

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}, \quad (\text{C.4})$$

dove  $\delta Q_{\text{rev}}$  è il calore scambiato durante un *processo reversibile* e  $T$  la temperatura alla quale viene scambiato. Un processo si dice *reversibile* se, dopo aver avuto luogo, può essere invertito riportando sia il sistema sia l'ambiente esterno alle condizioni iniziali (tipicamente questo accade in processi che avvengono lentamente, attraverso una infinita serie di trasformazioni, dette quasistatiche, dove il sistema passa attraverso infiniti stati di equilibrio senza perdita di energia). Nel caso il processo non sia reversibile, una definizione di entropia più generale è

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_{\text{irr}} \quad \text{con} \quad dS_{\text{irr}} \geq 0, \quad (\text{C.5})$$

dove  $\delta Q$  è il calore infinitesimo scambiato (sia esso reversibile o irreversibile, non importa) e  $dS_{\text{irr}}$  è il contributo alla variazione di entropia dovuto fenomeni irreversibili *interni al sistema*, che accadono sempre nel mondo *reale* e che sono dovuti alla viscosità, alla conducibilità termica, alla diffusione di massa, ecc. Evidentemente per fenomeni *reversibili* si ha  $dS_{\text{irr}} \equiv 0$ . Integrando tra lo stato iniziale 'i' e lo stato finale 'f', si ottiene

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_{S_i}^{S_f} dS = \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} + \Delta S_{\text{irr}}.$$

È interessante notare, nella definizione (C.4), che mentre l'entropia  $dS$  è un *differenziale esatto*, il calore scambiato durante una trasformazione reversibile  $\delta Q$  *non* è un *differenziale esatto*. Pertanto è la divisione per la temperatura a rendere  $\delta Q/T$  un *differenziale esatto*.

L'unità di misura dell'entropia è il joule (simbolo J), tuttavia si preferisce utilizzare l'entropia specifica (per unità di massa) definita come

$$s = \frac{S}{m},$$

le cui unità di misura sono J/kg.

Dal primo principio della termodinamica (pagina 160), per *processi reversibili* si ha  $\delta Q = \delta Q_{\text{rev}} = dE + \delta W$ , pertanto

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \Rightarrow T dS = \delta Q_{\text{rev}} = dE + \delta W_{\text{rev}} = dE + p dV,$$

dove si è utilizzato il fatto che il lavoro reversibile  $\delta W_{\text{rev}}$  fatto dal sistema è  $\delta W_{\text{rev}} = \mathbf{F}_{\text{rev}} \cdot d\mathbf{x} = p\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = p dV$ , essendo  $\mathbf{A}$  la superficie (orientata) sulla quale agisce la pressione  $p$  e  $dV$  la variazione infinitesima di volume causata dalla pressione stessa. Passando alle grandezze specifiche per unità di massa si ha

$$T ds = de + p dv, \quad (\text{C.6})$$

da cui, utilizzando la relazione (C.3),

$$T ds = dh - v dp. \quad (\text{C.7})$$

Una trasformazione che avviene senza variazione di entropia si dice *isoentropica*. Evidentemente, dalla relazione (C.5) si conclude che una trasformazione isoentropica è necessariamente *adiabatica* ( $\delta Q_{\text{rev}} \equiv 0$ ) e *reversibile* ( $dS_{\text{irr}} \equiv 0$ ).

### C.1.3 I princìpi della termodinamica

#### Principio zero

*Se il corpo A è in equilibrio termodinamico con il corpo B ed il corpo B è in equilibrio termodinamico con il corpo C, allora A e C sono in equilibrio termodinamico tra loro.* In pratica, questo principio assicura che corpi in equilibrio termodinamico raggiungono la stessa temperatura (se si lascia loro il tempo sufficiente per raggiungere l'equilibrio).

#### Primo principio

*Il calore dato dall'ambiente ad un sistema termodinamico si trasforma in parte in lavoro fatto dal sistema sull'ambiente esterno ed in parte in aumento di energia interna al sistema.* In pratica, questo principio assicura la conservazione dell'energia. Si osservi la convenzione dei segni: il calore è *positivo* se è fornito al sistema, *negativo* se è sottratto al sistema; il lavoro è *positivo* se è compiuto dal sistema, *negativo* se è subito dal sistema. Una trasformazione che avviene senza scambio di calore si dice *adiabatica*.

#### Secondo principio

Esistono varie formulazioni equivalenti:

- *È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da un corpo più freddo ad uno più caldo senza l'apporto di lavoro esterno* (formulazione di Clausius).

- È impossibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di tutto il calore assorbito da un'unica sorgente a temperatura costante (formulazione di Kelvin-Planck).
- È impossibile realizzare una macchina termica il cui rendimento sia pari al 100% (formulazione di Kelvin-Planck).

In pratica, questo principio sancisce la possibilità o meno che avvengano certi processi in modo *naturale*.

### Terzo principio

Non è possibile raggiungere lo zero assoluto tramite un numero finito di trasformazioni termodinamiche. In pratica, questo principio impedisce il raggiungimento dello zero assoluto ( $-273.15^\circ\text{C}$ ).

#### C.1.4 I gas perfetti

Un *gas perfetto* (o gas ideale) è un modello che prevede l'assenza di forze di interazione a distanza tra le molecole del gas (molecole non interagenti). In pratica questo accade se sono in buona approssimazione verificate le seguenti ipotesi:

- le molecole del gas sono identiche tra loro e indistinguibili;
- le molecole possono essere considerate puntiformi;
- la distanza tra le molecole è molto maggiore del diametro medio delle molecole;
- le molecole interagiscono tra loro e con le pareti del recipiente *esclusivamente* mediante urti perfettamente elastici, ossia senza perdita di energia durante gli urti.

Si osservi che, a conseguenza di queste ipotesi, un gas perfetto non può essere liquefatto per sola compressione.

Per un gas perfetto vale l'equazione di stato nota come *legge dei gas perfetti*

$$pV = nRT, \quad (\text{C.8})$$

dove  $p$  è la pressione termodinamica del gas,  $V$  il volume occupato dal gas,  $n$  il numero di moli del gas<sup>1</sup>,  $R = 8.314 \text{ J}/(\text{K mol})$  la costante universale dei gas e  $T$  la temperatura nella scala assoluta (Kelvin). Si osservi che, ricavando dall'equazione (C.8) la pressione  $p$ , si ottiene

$$p = \frac{nR}{V}T = \frac{\frac{m}{\mathcal{M}}R}{V}T = \frac{m}{V} \frac{R}{\mathcal{M}}T = \rho \mathcal{R}T,$$

da cui l'equazione di stato

$$p = \rho \mathcal{R}T, \quad (\text{C.9})$$

---

<sup>1</sup>Si ricordi che la *mole* è una quantità in grammi pari al peso molecolare o atomico della sostanza. Per esempio, 3.2 kg di  $\text{O}_2$  contengono  $n = \frac{3200}{32} = 100$  moli di ossigeno molecolare. Si ricordi anche che una mole di sostanza contiene un numero di Avogadro  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  molecole (o atomi, nel caso la molecola sia monoatomica) di quella sostanza

dove  $\rho = m/V$  è la densità del gas (rapporto tra la massa ed il volume occupato) e  $\mathcal{R} = R/\mathcal{M}$  è la costante dei gas divisa per il peso molecolare del gas. Evidentemente,  $\mathcal{R}$  non è costante ma varia da gas a gas. Per l'aria, essendo  $\mathcal{M}_{\text{aria}} = 29$  g/mol,

$$\mathcal{R}_{\text{aria}} = \frac{R}{\mathcal{M}_{\text{aria}}} = \frac{8.314 \text{ J/(K mol)}}{29 \text{ g/mol}} = \frac{8314}{29} \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 287 \text{ J/(kg K)}.$$

### C.1.5 Calori specifici, relazioni di Maxwell e altri coefficienti termodinamici

#### Calori specifici a pressione e volume costante

Definiamo *calore specifico a pressione costante* il calore necessario per far aumentare di un grado (Celsius o Kelvin) la massa di un kilogrammo di una sostanza quando la pressione è mantenuta costante. Analogamente, definiamo *calore specifico a volume costante* il calore necessario per far aumentare di un grado (Celsius o Kelvin) la massa di un kilogrammo di una sostanza quando il volume è mantenuto costante. In formule,

$$c_p = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{p=\text{cost}} \quad \text{e} \quad c_v = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{v=\text{cost}},$$

dove  $q = Q/m$  è il calore per unità di massa e si misura in J/kg. Consideriamo il calore specifico a pressione costante: dalla definizione di entropia ricaviamo  $dq = T ds$ , mentre per il calcolo del differenziale esatto  $ds$ , ricordiamo che le variabili di stato *indipendenti* sufficienti a descrivere un sistema sono solo due per cui possiamo scegliere  $s = s(p, T)$ . Differenziando si ha

$$ds(p, T) = dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} + dp \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} + 0$$

da cui

$$dq = T ds = T dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} \Rightarrow c_p = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{p=\text{cost}} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}}.$$

Analogamente, per il  $c_v$  consideriamo l'entropia funzione del volume specifico  $v$  e della temperatura,  $s = s(v, T)$ , e differenziamo:

$$ds(v, T) = dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v=\text{cost}} + dv \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_{T=\text{cost}} = dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v=\text{cost}} + 0$$

da cui

$$dq = T ds = T dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v=\text{cost}} \Rightarrow c_v = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{v=\text{cost}} = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v=\text{cost}}.$$

In conclusione,

$$c_p = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} \quad \text{e} \quad c_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{v=\text{cost}}. \quad (\text{C.10})$$

Si osservi che, sfruttando le relazioni (C.6) e (C.7), si ottiene

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} \quad \text{e} \quad c_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_{v=\text{cost}}. \quad (\text{C.11})$$

In generale  $c_p$  e  $c_v$  sono funzioni della temperatura. Un gas si dice *caloricamente perfetto* se i calori specifici  $c_p$  e  $c_v$  non dipendono dalla temperatura. In questo caso, se indichiamo con  $\gamma$  il loro rapporto

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (\text{C.12})$$

si può dimostrare la relazione

$$c_p - c_v = \mathcal{R}.$$

Utilizzando le ultime due relazioni, si ottiene

$$c_p = \frac{\gamma \mathcal{R}}{\gamma - 1} \quad \text{e} \quad c_v = \frac{\mathcal{R}}{\gamma - 1} \quad (\text{C.13})$$

Per un gas perfetto, i calori specifici ed il rapporto  $\gamma$  sono costanti (quindi è anche caloricamente perfetto) e valgono

|                            | gas monoatomico          | gas biatomico            |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $c_p$                      | $\frac{5}{2}\mathcal{R}$ | $\frac{7}{2}\mathcal{R}$ |
| $c_v$                      | $\frac{3}{2}\mathcal{R}$ | $\frac{5}{2}\mathcal{R}$ |
| $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ | $\frac{5}{3} = 1.667$    | $\frac{7}{5} = 1.4$      |

(C.14)

### Relazioni di Maxwell

Ricordiamo (senza ricavarle) quattro utili relazioni termodinamiche note come *relazioni di Maxwell*:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v &= -\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s, & \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p &= \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T, & \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v &= \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

### Alcuni coefficienti

Definiamo *coefficiente di espansione termica* a pressione costante

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p=\text{cost}} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{cost}} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p=\text{cost}}. \quad (\text{C.16})$$

Si osservi che, sfruttando le relazioni di Maxwell (C.15) ed il fatto che  $1/v = \rho$ , si ha

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{cost}} = -\rho \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T=\text{cost}} \Rightarrow \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T=\text{cost}} = -\frac{\beta}{\rho}.$$

Utilizzando quest'ultima conclusione e l'espressione (C.10) per il  $c_p$ , differenziando l'entropia per unità di massa  $s = s(T, p)$ , si ottengono le equivalenze

$$\begin{aligned} ds &= dT \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} + dp \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \\ &= \frac{dT}{T} \left[ T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} \right] + dp \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \\ &= \frac{dT}{T} c_p - dp \frac{\beta}{\rho}. \end{aligned}$$

L'importanza della relazione

$$ds = \frac{dT}{T} c_p - dp \frac{\beta}{\rho} \quad (\text{C.17})$$

appena trovata risiede nel fatto che tutti i termini di destra sono *misurabili* direttamente.

Definiamo *coefficiente di comprimibilità isoterma*

$$\tau_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \quad (\text{C.18})$$

e *coefficiente di comprimibilità isoentropica* (o *adiabatica*)

$$\tau_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{s=\text{cost}} = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{s=\text{cost}} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{s=\text{cost}}. \quad (\text{C.19})$$

Si osservi che dei cinque coefficienti termodinamici introdotti,  $c_p$ ,  $c_v$ ,  $\beta$ ,  $\tau_T$  e  $\tau_s$ , ne bastano solo tre per descrivere la sostanza in questione mentre gli altri possono essere ricavati. Ad esempio, se scegliamo di esprimere tutto in funzione di  $c_p$ ,  $\beta$  e  $\tau_T$ , che si trovano tabulati in funzione della temperatura e della pressione per molte sostanze,  $c_v$  e  $\tau_s$  sono

$$c_v = c_p - \frac{T\beta^2}{\rho\tau_T} \quad \text{e} \quad \tau_s = \tau_T - \frac{T\beta^2}{\rho c_p},$$

dove la densità  $\rho$  si ricava dall'equazione di stato  $\rho = \rho(T, p)$ .

Definiamo *velocità del suono* in un determinato mezzo l'espressione

$$a = \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{s=\text{cost}}},$$

per cui

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\tau_s}}.$$

Questo significa che la velocità del suono è in qualche modo una misura “pratica” della comprimibilità di un fluido o di un mezzo materiale. Infatti  $a$  è molto elevata nei solidi, che sono comunque in qualche modo comprimibili in quanto deformabili, e nei liquidi ( $a$  sarebbe infinita nel caso limite  $\tau_s = 0$ ), mentre è piuttosto bassa nei gas. Per i gas perfetti si ha

$$a = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T},$$

dove  $\gamma = c_p/c_v$  (per l'aria  $\gamma = 1.4$ ),  $\mathcal{R} = R/\mathcal{M}$  con  $R = 8.314 \text{ J/(K mol)}$  e  $\mathcal{M}$  è il peso molecolare espresso in kilogrammi. Per l'aria  $\mathcal{R} = 287 \text{ J/(kg K)}$ .

## C.2 Trasmissione del calore

Il primo principio della termodinamica introduce il concetto di *calore*. Esso viene spesso definito come una *forma di energia in transito*, pertanto si misura in joule ed esiste solo nel momento in cui è *trasferito*: mentre l'energia può essere posseduta da un sistema termodinamico (o da un corpo, se si parla di meccanica), il calore *non è mai posseduto* da un sistema. Piuttosto, il calore è *scambiato* tra un sistema termodinamico e l'ambiente esterno. Questo *scambio di calore* può avvenire *solo se esiste una differenza di temperatura* tra il sistema e l'ambiente. I meccanismi che lo permettono sono riconducibili a fenomeni meccanici di tipo *microscopico* e vengono comunemente classificati come *trasmissione del calore*: conduzione, convezione ed irraggiamento.

### C.2.1 Conduzione

La conduzione richiede un *contatto* tra i corpi che scambiano calore tra di loro. Si può quindi intuire che la trasmissione di calore per conduzione avvenga grazie ad interazioni di tipo molecolare, a livello *microscopico*, il cui effetto macroscopico è il passaggio di calore da temperature più alte a temperature più basse attraverso *la materia* (solida o fluida).

A titolo di esempio si può pensare alla conduzione di calore attraverso una parete di spessore  $d$  e superficie  $S$  le cui facce si trovino una ad alta temperatura  $T_A$  e una a bassa temperatura  $T_B$ . È plausibile che il calore che attraversa la parete nell'unità di tempo sia direttamente proporzionale alla superficie della parete (se la superficie raddoppia, anche il calore che ci passa attraverso dovrebbe raddoppiare) e alla differenza di temperatura (se questa raddoppia, anche il calore che ci passa attraverso dovrebbe raddoppiare), e che sia inversamente proporzionale allo spessore della parete (un po' come succede per la seconda legge di Ohm), in formule

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa \frac{S \Delta T}{d},$$

dove  $\kappa$  è la costante di proporzionalità a cui viene dato il nome di *conducibilità termica* e le cui dimensioni sono  $W/(m \cdot K)$ . Come detto, il calore passa dalla temperatura più alta a quella più bassa, pertanto il *flusso di calore*  $\dot{Q} = dQ/dt$  è un vettore (e non uno scalare, come risulta dalla precedente equazione) la cui direzione è la stessa del gradiente di temperatura  $\nabla T$  ed il verso opposto. Introducendo il *flusso di calore per unità di massa e di superficie*  $\dot{\mathbf{q}}$ , le cui unità di misura sono  $W/m^2$ , si può scrivere

$$\dot{\mathbf{q}} = -\kappa \nabla T, \quad (C.20)$$

nota anche come *legge di Fourier*, dove  $\kappa$  è la conducibilità termica (che dipende dal materiale) ed il segno ‘ $-$ ’ mette in risalto il fatto che il calore si muove in direzione opposta al gradiente di temperatura. Se le proprietà di conducibilità termica della materia non fossero *isotrope*, ossia non fossero indipendenti dalla direzione, allora la legge sarebbe (in notazione tensoriale)

$$\dot{q}_i = -\kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

dove  $\kappa_{ij}$  è un tensore doppio.

In genere i materiali che sono buoni conduttori di calore sono anche buoni conduttori di corrente elettrica. La tabella C.1 riporta la conducibilità termica per alcune sostanze comuni (si ricordi che, in generale, essa dipende dalla temperatura).

| Sostanza  | $\kappa$ [W/(m K)] | Sostanza                      | $\kappa$ [W/(m K)] |
|-----------|--------------------|-------------------------------|--------------------|
| diamante  | 1600               | vetro                         | 1                  |
| argento   | 460                | laterizi                      | 0,8                |
| rame      | 350                | acqua distillata              | 0,6                |
| oro       | 320                | idrogeno                      | 0,172              |
| alluminio | 260                | olio minerale                 | 0,15               |
| ottone    | 111                | lana                          | 0,05               |
| platino   | 70                 | polistirolo espanso           | 0,045              |
| quarzo    | 8                  | aria secca (a 300 K, 100 kPa) | 0,026              |

Tabella C.1: conducibilità termica di alcune sostanze comuni.

### C.2.2 Convezione

La convezione è un meccanismo di trasmissione del calore piuttosto complesso in quanto comporta il trasporto di calore per mezzo di un fluido in moto. Per una descrizione completa della convezione è quindi necessario risolvere le equazioni di Navier-Stokes nel caso di *corrente comprimibile*. Senza entrare troppo nel dettaglio, si intuisce che alla base della convezione ci sia la *diffusione* (su scala microscopica) dovuta al moto disordinato delle molecole di fluido e il *trasporto* (su scala macroscopica) dovuto al moto della corrente nel fluido. Dipendentemente dalla causa all'origine del moto del fluido, la convezione può essere *naturale* o *forzata*.

La convezione naturale è associata al moto di masse di fluido dovuto essenzialmente al galleggiamento (spinta di Archimede) come conseguenza di variazioni di densità provocate da variazioni di temperatura. Pertanto, masse di fluido caldo tendono a salire e masse di fluido più freddo a scendere, con il conseguente trasporto di calore da un punto ad un altro dello spazio. Alcuni esempi sono la circolazione di aria in una stanza provocata da termosifoni accesi oppure le correnti ben visibili quando si scalda dell'acqua in una pentola. I moti di masse di fluido dovuti alla convezione naturale vengono detti *moti convettivi*.

La convezione forzata è associata al trasporto di calore indotto dal moto di un fluido su un corpo. In pratica, la corrente esterna sottrae calore al corpo o lo riscalda, dipendentemente dalle temperature del corpo e del fluido. Chiaramente, se la corrente è *laminare* la diffusione e il rimescolamento sono molto limitati per cui anche la trasmissione di calore risulta limitata. Al contrario, se la corrente è *turbolenta* il rimescolamento è molto accentuato e gli scambi di calore sono favoriti. Alcuni esempi di convezione forzata sono la sensazione di refrigerio indotta da un ventilatore o il tentativo di raffreddare una bevanda molto calda soffiandoci sopra.

### C.2.3 Irraggiamento

Per irraggiamento si intende il trasferimento di calore tra due corpi a temperature diverse per mezzo di onde elettromagnetiche. Ogni corpo, per il fatto che si trova ad una certa temperatura superiore allo zero assoluto ( $T > 0$  K), emette potenza termica secondo la *legge di Stefan-Boltzmann*

$$P = S\varepsilon\sigma T^4, \quad (\text{C.21})$$

dove:

- $P$  è la potenza termica (in W), ossia il calore scambiato nell'unità di tempo;
- $S$  è l'estensione della superficie del corpo (in  $\text{m}^2$ );



- $\varepsilon$  è una costante positiva, adimensionale, minore o uguale ad uno, detta *emissività* del corpo, che dipende essenzialmente dalla finitura della superficie del corpo, debolmente dalla temperatura, dall'angolo e dalla lunghezza d'onda;  $\varepsilon = 1$  per i *corpi neri*, ossia quei corpi che, a parità di temperatura, assorbono o emettono la *massima* radiazione termica possibile (un corpo nero assorbe *tutta* la radiazione che incide su di esso e la ri-irradia *completamente* senza che ne vada persa);
- $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$  è la costante di Stefan-Boltzmann;
- $T$  è la temperatura del corpo nella scala Kelvin.

Siccome l'irraggiamento sfrutta il trasporto di energia tramite onde elettromagnetiche, che come noto si propagano anche nel vuoto, esso non dipende dalla presenza di materia e non necessita di un *contatto* tra corpi o masse a temperature diverse, come avviene invece per conduzione e convezione. Chiaramente, lo scambio di calore avviene sempre tra corpi a temperature diverse.



## Appendice D

# Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche

### D.1 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui il vettore posizione è  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  ed il vettore velocità  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . Le equazioni complete di Navier-Stokes sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -\mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ \tau_{yy} &= -\mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ \tau_{zz} &= -\mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

Nel caso particolare di corrente incomprimibile, le equazioni si riducono a:

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z\end{aligned}$$

## D.2 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche

Si consideri un sistema di coordinate cilindriche ortogonali in cui il vettore posizione è  $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$  ed il vettore velocità  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ . Le equazioni complete di Navier-Stokes sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \\ \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \\ \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= -\mu \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= -\mu \left( 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ \tau_{zz} &= -\mu \left( 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= -\mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} &= -\mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= -\mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Nel caso particolare di corrente incomprimibile, le equazioni si riducono a:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\
& \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\
& \quad + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \\
& \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
& \quad + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \\
& \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\
& \quad + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z
\end{aligned}$$

### D.3 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche

Si consideri un sistema di coordinate sferiche ortogonali in cui il vettore posizione è  $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$  ed il vettore velocità  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)$ . Le equazioni complete di Navier-Stokes sono:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho u_\phi) = 0 \\
& \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\
& \quad - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r \\
& \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
& \quad - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right) + \rho g_\theta \\
& \rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\
& \quad - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r} \right) + \rho g_\phi
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= -\mu \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\
\tau_{\theta\theta} &= -\mu \left( 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\
\tau_{\phi\phi} &= -\mu \left( 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \\
\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= -\mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} &= -\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right) \\
\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} &= -\mu \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

Nel caso particolare di corrente incomprimibile, le equazioni si riducono a:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0 \\
\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\
&+ \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} \right) + \rho g_r \\
\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
&+ \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta \\
\rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\
&+ \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi
\end{aligned}$$

# Indice analitico

- Levi-Civita, simbolo di, [143](#)
- Anello vorticoso, [52](#)
- Approccio
  - Euleriano, [5](#), [13](#), [23](#)
  - Lagrangiano, [5](#), [13](#), [23](#)
- Calore, [165](#)
  - conduzione, [165](#)
    - legge di Fourier, [165](#)
  - specifico, [162](#)
    - a pressione costante, [162](#)
    - a volume costante, [162](#)
  - trasmissione, [165](#)
- Circolazione, [37](#), [50](#), [150](#)
- Circuitazione, [149](#)
- Coefficiente
  - di comprimibilità, [164](#)
    - adiabatica, [164](#)
    - isoentropica, [164](#)
    - isoterma, [164](#)
  - di espansione termica, [163](#)
- Coefficiente di attrito, [72](#)
- Condizione
  - di entropia, [123](#)
  - di Rankine-Hugoniot, [120](#)
- Conducibilità
  - termica, [165](#)
- Conservazione
  - della massa, [13](#), [15](#)
- Convezione, [166](#)
  - forzata, [166](#)
  - moti convettivi, [166](#)
  - naturale, [166](#)
- Corpo nero, [167](#)
- Corrente, [5](#)
  - barotropica, [35](#)
  - comprimibile, [33](#), [166](#)
  - conduttrice, [31](#)
  - di Couette, [42](#), [43](#)
  - di Hagen-Poiseuille, [43](#)
  - di Poiseuille, [42](#), [43](#)
  - ideale, [32](#)
  - incomprimibile, [33](#)
  - instabile, [82](#)
  - irrotazionale, [37](#), [49](#), [150](#)
  - isoentropica, [32](#)
  - laminare, [77](#), [79](#), [91](#), [166](#)
  - lungo un piano inclinato, [44](#)
  - non conduttrice, [31](#)
  - non stazionaria, [31](#)
  - non viscosa, [31](#)
  - omoentropica, [32](#)
  - parallela, [41](#), [42](#)
  - rotazionale, [37](#), [49](#), [150](#)
  - solenoidale, [149](#)
  - stabile, [82](#)
  - stazionaria, [31](#)
  - tra due cilindri coassiali contro-rotanti, [46](#)
  - turbolenta, [77](#), [79](#), [91](#), [166](#)
  - viscosa, [31](#)
- Costante
  - dei gas, [161](#)
  - di Stefan-Boltzmann, [167](#)
- Crocco
  - forma di, [38](#)
- Densità, [2](#)
- Derivata
  - lagrangiana, [24](#)
  - materiale, [24](#)
  - sostanziale, [24](#)
- Diffusione, [166](#)
- Divergenza, [148](#)
  - teorema di, [5](#), [147](#)
- Emissività, [167](#)
- Energia
  - cinetica, [17](#), [158](#)
  - interna, [17](#), [158](#)
  - potenziale, [158](#)
  - totale, [17](#)

- Entalpia, 27, 29, 159
  - equazione, 27
- Entropia, 159
- Equazione
  - dell'energia, 21, 25
  - dell'energia cinetica, 26
  - dell'energia interna, 26
  - dell'entalpia, 27
  - dell'entropia, 27
  - della quantità di moto, 21, 25
  - della temperatura, 28
  - di Blasius, 69, 70
  - di continuità, 21, 25
  - di Orr-Sommerfeld, 84–87, 89
  - di stato, 157
  - integrale di von Kàrmàn, 76
- Equazioni di
  - Eulero, 36
  - Navier-Stokes, 21
    - adimensionali, 28
    - con derivata sostanziale, 25
    - in coordinate cartesiane, 169
    - in coordinate cilindriche, 170
    - in coordinate sferiche, 171
    - in forma conservativa, 21
    - in forma convettiva, 25
- Fattore di forma, 72, 74
- Filamento vorticoso, 52
- Fluido, 2, 4
  - definizione, 2
  - isotropo, 11
  - newtoniano, 11
- Flusso, 4, 148
- Flusso base, 82
- Forma debole, 118
- Forze
  - di superficie, 7
  - di volume, 7
- Funzione di stato, 158
- Gas
  - caloricamente perfetto, 163
  - costante universale, 161
  - ideale, 161
  - perfetto, 161
    - caloricamente, 163
- Gauss
  - teorema di, 5, 147
- Gradiente, 148
- Helmholtz
  - primo teorema di, 51, 58
  - secondo teorema di, 52, 59
  - terzo teorema di, 59
- Intermittenza, 80
- Ipotesi di Stokes, 12
- Irraggiamento, 166
- Kelvin, teorema di, 57
- Kolmogorov
  - teoria della turbolenza isotropa, 95
- Kronecker, simbolo di, 143
- Legge
  - dei gas perfetti, 161
  - di Fourier, 165
  - di Stefan-Boltzmann, 166
- Leibniz
  - teorema di, 150, 153
- Linea
  - di corrente, 5
  - di fumo, 5
  - traiettoria, 5
- Linea vorticoso, 50
- Maxwell
  - relazioni, 163
- Mole, 161
- Numero
  - di Avogadro, 161
  - di Eckert, 29
  - di Knudsen, 2, 21
  - di Mach, 35
  - di Péclet, 29
  - di Prandtl, 29
  - di Reynolds, 29
- Onda d'urto, 117
  - velocità di propagazione, 120
- Potenziale cinetico, 37
- Pressione, 2, 10
  - statica, 10
  - termodinamica, 10
- Principio
  - primo principio della termodinamica, 160



- secondo della termodinamica, 160
- terzo della termodinamica, 161
- zero della termodinamica, 160
- Processo
  - adiabatico, 160
  - irreversibile, 159
  - isoentropico, 160
  - reversibile, 159
- Punto di ristagno, 5
- Rankine-Hugoniot, 120
- Relazioni
  - costitutive, 10
  - di Maxwell, 163
- Resistenza di attrito, 72
- Reynolds
  - Equazioni mediate, 98
  - esperimento di, 77
  - sforzi di, 100
- Richardson, 94
- Rotore, 149
- Sforzi
  - di Reynolds, 100
  - turbolenti, 100
- Sforzo, 1
  - di taglio, 10
  - normale, 2, 10
  - pressione, 2
  - tangenziale, 2, 10
  - unità di misura, 1
- Sistema
  - in equilibrio termodinamico, 19, 158
    - globale, 19, 158
    - locale, 19, 158
  - termodinamico, 157
    - aperto, 157
    - chiuso, 157
    - isolato, 157
- Soluzione
  - Classica, 118
  - Debole, 118
  - Forte, 118
- Spessore
  - di quantità di moto, 72, 74
  - di spostamento, 72, 73
  - di strato limite, 71
- Spot turbolenti, 80
- Squire, teorema di, 87
- Stabilità, 82
  - asintotica, 82
  - fluidodinamica, 77
  - in senso stretto, 82
  - marginale, 82
- Stabilità lineare, 80
- Stokes
  - ipotesi di, 12
- Strato limite, 61
  - di Blasius, 66
  - di Prandtl, 61
  - su lamina piana, 66
  - equazione integrale di von Kàrmàn, 75
  - laminare, 77
- Suono
  - velocità, 164
- Superficie vorticoso, 52
- Tensione superficiale, 4
- Tensori, 141
  - simbolo di Kronecker, 143
  - simbolo di Levi-Civita, 143
- Teorema
  - del rotore, 147
    - dimostrazione, 147
  - del tetraedro di Cauchy, 8
  - del trasporto, 153, 155
    - di Reynolds, 153, 155
  - del trasporto di Reynolds, 155
    - caso scalare, 153
    - caso vettoriale, 155
  - della divergenza, 5, 147
    - dimostrazione, 147
  - di Bernoulli, 38
    - irrotazionale, 39
    - irrotazionale e stazionario, 39
    - lungo linea di corrente, 38
    - lungo linea vorticoso, 39
    - stazionario, 38
  - di Gauss, 5, 147
  - di Green, 5, 147
  - di Helmholtz (primo), 51, 58
  - di Helmholtz (secondo), 52, 59
  - di Helmholtz (terzo), 59
  - di Kelvin, 57
  - di Leibniz, 16, 150
    - dimostrazione, 150
  - di Ostrogradsky, 5, 147

- di Reynolds, [153](#), [155](#)
    - del trasporto, [153](#), [155](#)
    - dimostrazione, [153](#)
  - di Squire, [87](#)
  - di Stokes, [147](#)
    - dimostrazione, [147](#)
  - Termodinamica
    - primo principio, [17](#), [160](#)
      - per i fluidi, [17](#)
    - principio zero, [160](#)
    - secondo principio, [160](#)
    - terzo principio, [161](#)
  - Traiettoria, [5](#)
  - Transizione
    - dello strato limite laminare, [79](#)
  - Trasformazione
    - adiabatica, [160](#)
    - irreversibile, [159](#)
    - isoentropica, [160](#)
    - reversibile, [159](#)
  - Trasporto, [166](#)
  - Tubo vorticoso, [51](#)
  - Turbolenza, [77](#), [91](#)
    - cascata di energia, [93](#)
    - chiusura
      - ipotesi di Boussinesq, [101](#)
      - mixing length, [102](#)
      - modello  $K$ , [104](#)
      - modello  $K$ - $\epsilon$ , [106](#)
      - viscosità turbolenta, [101](#)
    - chiusura delle RANS, [100](#)
  - DNS, [98](#)
  - Equazioni mediate di Reynolds, [98](#)
  - filtraggio
    - spaziale, [109](#)
    - temporale, [109](#)
  - isotropia, [94](#), [95](#)
  - LES, [107](#)
    - modello di Smagorinski, [109](#)
    - sforzi sottogriglia, [109](#)
  - modelli
    - ordine 0, [102](#)
    - ordine 1, [104](#)
    - ordine 2, [106](#)
  - modelli di –, [100–102](#), [104](#), [106](#)
  - problema della chiusura, [100](#)
  - RANS, [98](#)
  - scale, [93](#), [95](#)
    - scale di Kolmogorov, [95](#)
    - scale energetiche, [95](#)
  - Simulazione dei grandi vortici, [107](#)
  - Simulazione diretta, [98](#)
  - teoria di Kolmogorov, [95](#)
  - viscosità turbolenta, [101](#)
- Velocità
    - del suono, [164](#)
  - Vettori
    - versore normale alla superficie, [2](#)
  - Viscosità, [3](#)
    - artificiale, [116](#)
    - cinematica, [3](#)
    - di volume, [12](#)
    - dinamica, [3](#)
    - secondo coefficiente, [12](#)
  - Volume
    - fisso, [13](#)
    - in moto con il fluido, [13](#), [15](#)
  - Vorticità, [37](#), [49](#), [150](#)