

Note di Fluidodinamica

Simone Zuccher

15 luglio 2010

Indice

1	Le equazioni di governo	1
1.1	Volume di controllo fisso o in moto con il fluido	1
1.2	Conservazione della massa in un volume fisso	1
1.3	Conservazione della massa in un volume in moto con il fluido	2
1.4	Il teorema del trasporto di Reynolds nel caso di campo vettoriale	4
1.5	Equazioni di Navier-Stokes complete	5
1.6	La derivata sostanziale	7
1.7	Forma conservativa e forma convettiva	8
1.8	Forme alternative per l'equazione dell'energia	9
1.8.1	Equazione dell'energia interna	9
1.8.2	Equazione dell'entropia	10
1.8.3	Equazione dell'entalpia	11
1.8.4	Equazione della temperatura	11
1.9	Adimensionalizzazione delle equazioni di governo	12
1.10	Condizioni iniziali e al contorno	12
2	Casi particolari delle equazioni di governo	15
2.1	Correnti particolari	15
2.1.1	Dipendenza dal tempo	15
2.1.2	Effetto della viscosità	15
2.1.3	Conduzione termica	15
2.1.4	Entropia	17
2.1.5	Comprimibilità	17
2.1.6	Correnti barotropiche	19
2.2	Corrente incomprimibile	20
2.3	Corrente ideale, equazioni di Eulero	20
2.4	Corrente irrotazionale	21
2.5	Corrente barotropica non viscosa: forma di Crocco	21
2.6	Il teorema di Bernoulli nelle diverse forme	22
2.6.1	Il caso stazionario	22
2.6.2	Il caso irrotazionale instazionario	23
2.6.3	Il caso irrotazionale e stazionario	23
3	Dinamica della vorticità	25
3.1	Definizioni preliminari	25
3.2	Equazione per la vorticità nel caso generale	25
3.3	Casi particolari	27
3.3.1	Corrente a viscosità e densità costanti	27

3.3.2	Corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative . . .	28
3.4	Il teorema di Kelvin	29
3.5	Teoremi di Helmholtz e loro significato geometrico	30
3.5.1	Primo teorema di Helmholtz	30
3.5.2	Secondo teorema di Helmholtz	30
3.5.3	Terzo teorema di Helmholtz	31
4	Alcune soluzioni esatte	33
4.1	Corrente incomprimibile e parallela	33
4.2	Canale piano infinito: corrente di Couette e di Poiseuille	34
4.3	Tubo a sezione circolare: corrente di Hagen-Poiseuille	34
5	Lo strato limite	37
5.1	Teoria dello strato limite di Prandtl	37
5.2	Profilo di Blasius (corrente esterna uniforme)	37
5.2.1	Spessore dello strato limite	38
5.2.2	Valore asintotico della velocità normale alla parete	38
5.2.3	Resistenza di attrito	39
5.3	Grandezze caratteristiche dello strato limite	39
5.3.1	Lo spessore di spostamento	39
5.3.2	Lo spessore di quantità di moto	40
5.3.3	Fattore di forma	40
5.4	Equazione integrale di von Kàrmàn	40
6	Stabilità e transizione	43
6.1	Corrente confinata in un tubo – l’esperimento di Reynolds	43
6.2	La transizione in correnti aperte – lo strato limite	45
6.3	Stabilità lineare per correnti piane e parallele	47
6.3.1	Teorema di Squire	51
6.3.2	Stabilità non viscosa	53
6.3.3	Stabilità viscosa	54
6.3.4	Curve di stabilità neutra	55
6.4	Stabilità lineare per correnti piane non parallele	55
7	La turbolenza	57
7.1	Caratteristiche fenomenologiche di una corrente turbolenta	57
7.2	Scale turbolente	59
7.2.1	Cascata di energia	59
7.2.2	La teoria di Kolmogorov	61
7.3	DNS: la simulazione diretta della turbolenza	64
7.4	RANS: le equazioni mediate di Reynolds	64
7.5	Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds	67
7.5.1	Ipotesi di Boussinesq e viscosità turbolenta	67
7.5.2	Modello di ordine 0 per ν_T : <i>mixing length</i>	68
7.5.3	Modello di ordine 1 per ν_T : K	70
7.5.4	Modello di ordine 2 per ν_T : $K-\epsilon$	73
7.6	LES: simulazione dei grandi vortici	74
7.7	Turbolenza in condotti	76
7.8	Turbolenza di parete	76

8	Vortici, vorticità e turbolenza	77
8.1	Cos'è un vortice?	77
8.2	Alcune definizioni	77
8.3	Dinamica della vorticità: 3D vs 2D	80
8.4	La legge di Biot-Savart	81
8.5	Velocità indotta da una linea vorticoso	82
8.6	Vortice di Rankine	83
8.7	Interazioni tra vortici	84
8.7.1	Il caso 2D non viscoso	85
8.7.2	Il caso 3D non viscoso	86
8.8	Splat e spin	89
A	Richiami utili	91
A.1	Vettori in \mathbb{R}^3 e identità vettoriali	91
A.2	Identità contententi gradiente, divergenza, rotore e laplaciano	93
A.3	Cenni sui tensori	97

Capitolo 1

Le equazioni di governo

1.1 Volume di controllo fisso o in moto con il fluido

Tralasciamo la derivazione dettagliata e diamo solo un'idea di come si arriva alle equazioni complete. Nel farlo ricordiamo che le equazioni di Navier-Stokes sono la riscrittura di principi

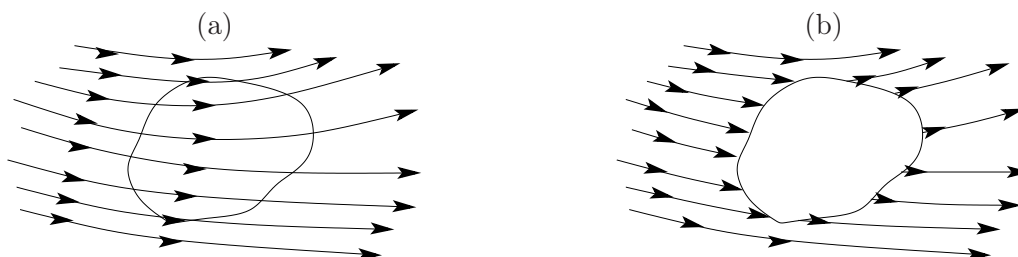


Figura 1.1: *Volume di controllo fisso* (sinistra), *volume materiale* in movimento assieme al fluido (destra)

di conservazione di cui si richiede il soddisfacimento all'interno di un certo volume, che può essere analizzato secondo due approcci diversi (si veda la figura 1.1):

- (a) *Euleriano*: il volume in esame prende il nome di *volume di controllo* perché è fisso nello spazio e quindi le molecole di fluido al suo interno cambiano nel tempo; il sistema costituito dal solo volume di controllo è *aperto* in quanto consente lo scambio sia di massa che di energia con il resto del fluido
- (b) *Lagrangiano*: il volume in esame prende il nome di *volume materiale* perché si muove con il fluido e quindi le molecole di fluido al suo interno sono sempre le stesse; il sistema costituito dal solo volume materiale è *chiuso* in quanto non scambia massa ma solo energia con il resto del fluido.

In ogni caso, supponiamo che nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 siano definiti, in ogni punto $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ed ad ogni istante di tempo t , un campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ed una densità di massa per unità di volume $\rho(\mathbf{r}, t)$.

1.2 Conservazione della massa in un volume fisso

Concentriamoci su un *volume fisso* V , non dipendente dal tempo, come in figura 1.1 (sinistra). Se $M_V(t)$ è la massa di fluido contenuta nel volume V al tempo t e $\Phi_S(\rho\mathbf{u}, t)$ è il flusso di massa

uscente dal volume V attraverso la superficie S , frontiera di V ($S = \partial V$), allora a seguito della conservazione della massa prescritta dalla fisica si ha che l'aumento di massa M_V nel volume V in un certo intervallo di tempo deve essere uguale al flusso di massa *entrante* nel volume V durante lo stesso intervallo di tempo, che è l'opposto di quello uscente. In formule:

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = -\Phi_S(\rho \mathbf{u}, t). \quad (1.1)$$

La massa di fluido è

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV,$$

pertanto la *variazione di massa contenuta nel volume V* nell'unità di tempo (rapidità con la quale la massa contenuta in V varia) è

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV. \quad (1.2)$$

Si osservi il passaggio dalla derivata totale alla derivata parziale in quanto $M_V = M_V(t)$, mentre $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$.

D'altra parte, il *flusso di massa uscente* dal volume V attraverso la sua superficie di frontiera $S = \partial V$ è, a seguito del teorema della divergenza,

$$\Phi_S(\rho \mathbf{u}, t) = \int_S \rho(\mathbf{r}_{|S}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S}) dS = \int_V \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) dV, \quad (1.3)$$

dove $\mathbf{r}_{|S}$ è la posizione \mathbf{r} ristretta alla superficie di frontiera $S = \partial V$, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S})$ è il versore normale *uscente* dalla superficie nel punto $\mathbf{r}_{|S}$, e $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ è la velocità nel generico punto \mathbf{r} al tempo t .

Utilizzando le uguaglianze (1.2) e (1.3), la legge di conservazione (1.1) diventa

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) dV$$

ovvero, alleggerendo la notazione e portando tutto sotto un unico integrale,

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Siccome questa equazione deve essere vera per *qualsiasi* V (piccolo a piacere), si conclude che per ogni punto dello spazio \mathbb{R}^3 dove sono definiti il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ e la densità $\rho(\mathbf{r}, t)$ deve essere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

nota come equazione di continuità o di conservazione della massa.

1.3 Conservazione della massa in un volume in moto con il fluido

Si può arrivare all'equazione di continuità anche considerando un volume materiale V_t , variabile nel tempo, che possa cambiare sia di forma che di volume e racchiuso da una *superficie chiusa* $S_t = \partial V_t$, anch'essa variabile nel tempo, tale che sia la superficie sia i punti interni al volume *si muovano assieme al fluido*, come in figura 1.1 (destra). Siccome ogni punto della superficie ha la stessa velocità del campo di moto esterno, la velocità relativa tra la superficie e il fluido

è nulla e quindi non c'è flusso del vettore velocità attraverso S_t . Pertanto la massa contenuta all'interno del volume variabile nel tempo deve conservarsi:

$$\frac{dM_{V_t}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0.$$

A causa della dipendenza di V_t dal tempo, anche l'integrale di volume su V_t dipende dal tempo e quindi bisogna fare molta attenzione nel calcolare la derivata dM_{V_t}/dt .

Nel caso semplice di funzioni reali di variabile reale, la derivata rispetto al tempo dell'integrale con estremi variabili si riduce, per il *teorema di Leibniz* (che fa uso del teorema fondamentale del calcolo integrale unitamente al teorema di derivazione delle funzioni composte), all'espressione

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = -f(a(t), t) \frac{da(t)}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t) \frac{db(t)}{dt}.$$

Introducendo le velocità di variazione degli estremi di integrazione

$$v_a(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad \text{e} \quad v_b(t) = \frac{db(t)}{dt},$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t)v_b(t) - f(a(t), t)v_a(t).$$

Si osservi che il termine $f(b(t), t)v_b(t) - f(a(t), t)v_a(t)$ è semplicemente il flusso netto di f uscente dal dominio $I_t = [a(t); b(t)]$. Il teorema di Leibniz può essere generalizzato a integrali di volumi variabili nel tempo per grandezze scalari:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_{S_t} f(\mathbf{r}_{|S}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S}) dS,$$

dove $\mathbf{r}_{|S}$ è la posizione ristretta alla superficie di frontiera $S_t = \partial V_t$ e $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S}, t)$ è la velocità con la quale si muove la frontiera S_t . Come detto inizialmente, assumiamo che ogni punto della superficie che racchiude V_t si muova alla velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S}, t)$ pari alla velocità del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t)$ in $\mathbf{r}_{|S}$ al tempo t , i.e.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_{|S}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t).$$

Il teorema di Leibniz si riscrive allora come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\mathbf{r}, t) dV &= \int_{V_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_{S_t} f(\mathbf{r}_{|S}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}_{|S}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{|S}) dS \\ &= \int_{V_t} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_{V_t} \nabla \cdot (f(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) dV \\ &= \int_{V_t} \left[\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \right] dV. \end{aligned}$$

Alleggerendo la notazione, la conclusione è

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right] dV,$$

noto anche come *teorema del trasporto di Reynolds*.

Dalla conservazione della massa in un volume variabile nel tempo

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0$$

segue, quindi,

$$\int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0,$$

ma siccome quest'ultima equazione deve essere vera per *qualsiasi* V_t (piccolo a piacere), allora deve essere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

ormai nota come equazione di continuità (o di conservazione della massa).

1.4 Il teorema del trasporto di Reynolds nel caso di campo vettoriale

Quanto visto in precedenza si estende senza troppe difficoltà al caso di un campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Infatti, se $\hat{\mathbf{x}}_i$ sono i versori lungo gli assi $x_i, i = 1 \dots 3$ e f_i sono le tre componenti del campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_t} \hat{\mathbf{x}}_1 f_1(\mathbf{r}, t) dV + \frac{d}{dt} \int_{V_t} \hat{\mathbf{x}}_2 f_2(\mathbf{r}, t) dV + \frac{d}{dt} \int_{V_t} \hat{\mathbf{x}}_3 f_3(\mathbf{r}, t) dV \\ &= \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{d}{dt} \int_{V_t} f_1(\mathbf{r}, t) dV + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{d}{dt} \int_{V_t} f_2(\mathbf{r}, t) dV + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{d}{dt} \int_{V_t} f_3(\mathbf{r}, t) dV \\ &= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{d}{dt} \int_{V_t} f_i(\mathbf{r}, t) dV. \end{aligned}$$

Concentriamoci su una singola componente f_i . Siccome per essa vale in teorema di Reynolds si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f_i(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \nabla \cdot (f_i \mathbf{u}) \right] dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} \right] dV, \quad (1.4)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della notazione di Einstein

$$\frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_i u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot (f_i \mathbf{u}).$$

Utilizzando l'uguaglianza (1.4) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV &= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{d}{dt} \int_{V_t} f_i(\mathbf{r}, t) dV \\ &= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \int_{V_t} \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j} \right] dV \\ &= \int_{V_t} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) \right] dV. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) \right] dV,$$

dove il simbolo \otimes denota il prodotto tensoriale tra \mathbf{f} e \mathbf{u} e la divergenza di questo prodotto, $\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u})$, va letta in notazione di Einstein come

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) = \frac{\partial f_i u_j}{\partial x_j}, \quad i = 1 \dots 3.$$

1.5 Equazioni di Navier-Stokes complete

Consideriamo un volume materiale V_t variabile nel tempo e racchiuso da una superficie $S_t = \partial V_t$ tale che ogni punto di essa ed ogni punto interno ad essa si muova alla stessa velocità del campo di moto esterno. Come visto nel caso dell'equazione di continuità, il flusso attraverso la superficie S_t è nullo in quanto la velocità relativa tra il campo di moto esterno e la superficie stessa è nulla in ogni punto di S_t . Pertanto il volume V_t è un sistema *chiuso*, nel senso che la massa al suo interno non varia, però ci possono essere delle forze esterne che agiscono sul sistema e ci può essere passaggio di energia (calore e/o lavoro delle forze esterne) attraverso la superficie S_t . Le tre leggi fondamentali che devono essere verificate sono:

1. conservazione della massa: $\frac{dm}{dt} = 0$,
2. seconda legge di Newton: $\frac{d\mathbf{m}\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$,
3. primo principio della termodinamica: $\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$,

dove m è la massa totale del sistema espressa in kilogrammi [kg], t è il tempo espresso in secondi [s], \mathbf{v} è la velocità espressa in metri al secondo [m/s], \mathbf{F} è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema misurata in Newton [N], U è l'energia interna espressa in Joule [J], Q è il calore *fornito* al sistema espresso in Joule [J] e W è il lavoro *compiuto* dal sistema, anch'esso espresso in Joule [J]. Se indichiamo con ρ la densità del fluido, con \mathbf{u} la sua velocità, con e la sua densità (per unità di massa) di energia interna e con e_{tot} la sua densità di energia totale per unità di massa, somma delle densità (per unità di massa) di energia interna e ed energia cinetica,

$$e_{\text{tot}} = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2},$$

allora richiedere che i suddetti tre principi siano verificati per il fluido in esame porta a scrivere

1. $\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0$,
2. $\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{u}) \right] dV = \mathbf{F}$,
3. $\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho e_{\text{tot}} dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_{\text{tot}} \mathbf{u}) \right] dV = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$.

Dopo aver espresso in modo opportuno i termini di destra come integrali sul volume variabile V_t , se si richiede che queste tre uguaglianze siano verificate *in ogni* volume V_t di un fluido che soddisfi le seguenti ipotesi:

- il fluido è un continuo (non singole molecole, $\text{Kn} = \lambda/L \ll 1$ [numero di Knudsen], $\lambda \approx 10^{-7}$ m per l'aria)
- il fluido è localmente in equilibrio termodinamico
- il fluido è Newtoniano (dipendenza lineare del tensore degli sforzi dal tensore dei gradienti di velocità attraverso la *viscosità di taglio* μ , in generale $\mu = \mu(T, p)$)
- per il fluido vale l'ipotesi di Stokes (la *viscosità di dilatazione* λ vale $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, in generale $\lambda = \lambda(T, p)$),
- il fluido è isotropo (le sue proprietà fisiche non dipendono dalla particolare direzione spaziale)
- la trasmissione del calore nel fluido avviene per conduzione secondo la legge di Fourier, in generale $k = k(T, p)$
- la trasmissione di calore nel fluido per effetto dell'irraggiamento è trascurato

allora si ottengono le equazioni di Navier-Stokes che, per come sono state qui introdotte, non sono altro che una (quasi) banale riscrittura di tre principi fondamentali della fisica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_{\text{tot}} u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + u_j \rho g_j, \quad (1.7)$$

dove g_j è la forza di volume per unità di massa (quindi un'accelerazione) nella direzione x_j . Il sistema è composto da cinque equazioni:

- una equazione di conservazione della massa (1.5),
- tre equazioni, una per ogni direzione, che esprimono la seconda legge di Newton (1.6),
- una equazione che esprime il primo principio della termodinamica (1.7),

ma le incognite sono, apparentemente, sette:

- ρ , la densità del fluido,
- u, v, w , le tre componenti della velocità del fluido nelle direzioni x_1, x_2, x_3 ,
- p , la pressione del fluido,
- e , l'energia interna per unità di massa del fluido,
- T , la temperatura del fluido.

Il sistema non è malposto in quanto vanno aggiunte sia l'equazione di stato $F(\rho, p, T) = 0$, che lega le tre variabili di stato densità, pressione e temperatura, sia la dipendenza dell'energia interna e dallo stato termodinamico del sistema. Pertanto, se si esprime lo stato termodinamico del sistema tramite pressione e temperatura (due variabili termodinamiche) si ha, in generale,

$$\rho = \rho(T, p) \quad \text{e} \quad e = e(T, p), \quad (1.8)$$

che riducono le variabili termodinamiche ρ, p, T, e da quattro a due. Le equazioni (1.5), (1.6) e (1.7), completate dalle opportune relazioni termodinamiche (1.8), costituiscono quindi un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari avente lo stesso numero di equazioni ed incognite. Si ricordi che $\mu = \mu(T, p)$ e $k = k(T, p)$ sono funzioni note della temperatura e della pressione (in realtà non dipendono quasi per nulla dalla pressione).

1.6 La derivata sostanziale

Consideriamo un campo scalare $f(\mathbf{r}, t)$, funzione dello spazio e del tempo (per esempio la temperatura). Se si vuole seguire la variazione di f nel tempo a \mathbf{r} fissato, ossia dal punto di vista *Euleriano*, basta la derivata *parziale*

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Se invece si vuole seguire la variazione di f muovendosi lungo la traiettoria descritta da una ipotetica particella che cambia la propria posizione nel tempo secondo la legge oraria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ossia dal punto di vista *Lagrangiano*, allora è necessario considerare la derivata *totale*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t), t) &= \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

essendo $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ la velocità con la quale la particella si muove. Se la particella si muove assieme al fluido, e la velocità di quest'ultimo è \mathbf{u} , allora anche la particella si muove con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ e la derivata totale dal punto di vista Lagrangiano diventa

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

L'operatore $\frac{D}{Dt}$ prende il nome di *derivata sostanziale* (oppure *materiale*, o anche *Lagrangiana*) di f rispetto al tempo t . Essa non è altro che la variazione della grandezza scalare f ottenuta seguendo una particella di fluido che si muove alla velocità \mathbf{u} .

Si osservi che, se due campi di densità $\rho(\mathbf{r}, t)$ e di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ soddisfano l'equazione di continuità, moltiplicando quest'ultima per un campo scalare $f(\mathbf{r}, t)$ si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \frac{\partial \rho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

ma

$$\begin{aligned} f \frac{\partial \rho}{\partial t} + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \frac{\partial f \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla f \\ &= \frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) - \rho \frac{Df}{Dt} = 0 \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) = \frac{\partial f \rho}{\partial t} + \frac{\partial f \rho u_j}{\partial x_j} = \rho \frac{Df}{Dt}. \quad (1.9)$$

Questa uguaglianza, assieme al teorema del trasporto di Reynolds applicato allo scalare $f\rho$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \rho dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial f \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (f \rho \mathbf{u}) \right] dV,$$

porta all'uguaglianza

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \rho dV = \int_{V_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV.$$

1.7 Forma conservativa e forma convettiva

Le equazioni (1.5), (1.6) e (1.7) sono scritte in *forma conservativa* in quanto stabiliscono che la somma tra l'aumento nel tempo di una grandezza e la sua divergenza (calata al flusso uscente della grandezza stessa) deve o essere nulla o essere uguale ad un certo termine di destra. Tuttavia, le equazioni di governo possono essere riscritte in *forma convettiva*, dove si utilizza la derivata sostanziale da cui il particolare significato di “variazione di una grandezza seguendo il fluido”. Sviluppando le derivate nell'equazione di continuità (1.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

e sfruttando la definizione di derivata sostanziale appena introdotta, l'equazione di continuità si riscrive in *forma convettiva* come

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (1.10)$$

Per l'equazione della quantità di moto (1.6) basta sfruttare l'uguaglianza (1.9) e sostituire in quest'ultima $f\rho = \rho u_i$ ottenendo l'equazione di quantità di moto in *forma convettiva*:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho g_i. \quad (1.11)$$

Infine, l'equazione dell'energia (1.7), sfruttando ancora l'uguaglianza (1.9) e sostituendo $f\rho = \rho e_{\text{tot}}$, si ottiene l'equazione dell'energia in *forma convettiva*:

$$\rho \frac{De_{\text{tot}}}{Dt} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{ij} \right) \right) + u_j \rho g_j. \quad (1.12)$$

1.8 Forme alternative per l'equazione dell'energia

1.8.1 Equazione dell'energia interna

L'equazione dell'energia si trova spesso scritta, invece che per la variabile e_{tot} , per la variabile e , ovvero per la densità (per unità di massa) di energia interna. Al fine di ricavare l'equazione per e si osservi che e_{tot} può essere riscritta come

$$e_{\text{tot}} = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = e + \sum_{j=1}^3 \frac{u_j^2}{2},$$

e che, grazie all'equazione di continuità (1.5), vale l'uguaglianza

$$\varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \forall \varphi = \varphi(\mathbf{r}, t).$$

Se indichiamo con d_{kj} il tensore degli sforzi viscosi

$$d_{kj} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right),$$

l'equazione della quantità di moto in forma convettiva (1.11) può essere rielaborata nelle seguenti forme tra loro equivalenti (dove vale la notazione di Einstein per le somme sull'indice j)

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_k}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \rho u_j u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \frac{u_k^2}{2}}{\partial x_j} + \frac{u_k^2}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \rho \frac{u_k^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{u_k^2}{2} u_j}{\partial x_j} &= -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k & k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Sommando le tre equazioni per $k = 1, 2, 3$ e sfruttando la notazione di Einstein, si ottiene un'unica equazione

$$\frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} u_j}{\partial x_j} = -u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_k \rho g_k,$$

dove gli indici sui quali fare le sommatorie sono sia j che k , e quindi può essere riarrangiata come

$$\frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} u_j}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial d_{kj}}{\partial x_j} + u_j \rho g_j. \quad (1.13)$$

Sottraendo quest'ultima equazione all'equazione dell'energia per e_{tot} riscritta come

$$\frac{\partial \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k d_{kj}}{\partial x_j} + u_j \rho g_j,$$

e dopo aver sviluppato le derivate rispetto a x_j , si ottiene l'equazione di bilancio la per sola energia interna e

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + d_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Si noti che, in questa forma, non compare l'effetto delle forze di volume g_j . Riespandendo il termine d_{kj} , l'equazione per esteso risulta essere

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u_j}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

ovvero, in forma convettiva

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (1.15)$$

1.8.2 Equazione dell'entropia

Dalla Termodinamica è noto che

$$T ds = de + p dv,$$

dove s è la densità di entropia per unità di massa ($s = S/m$) e $v = 1/\rho$ è il volume specifico (il volume per unità di massa, l'inverso della densità). Passando alla densità si ottiene

$$T ds = de + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

da cui, passando dai differenziali alle derivate sostanziali,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Moltiplichiamo ora l'equazione di continuità in forma convettiva (1.10) per p/ρ ottenendo l'uguaglianza

$$-p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt},$$

che sfruttiamo per riscrivere il primo addendo del termine di destra dell'equazione (1.15). Portandolo poi a sinistra, l'equazione (1.15) diventa

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Riarrangiando il termine di sinistra di questa equazione come

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \left(\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \rho T \frac{Ds}{Dt},$$

l'equazione per l'energia interna (1.15) si riscrive in termini di entropia come

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (1.16)$$

1.8.3 Equazione dell'entalpia

Dalla Termodinamica è noto che

$$dh = T ds + v dp,$$

dove h è la densità di entalpia per unità di massa ($h = H/m$) e $v = 1/\rho$ è il volume specifico. Passando alla densità si ottiene

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp,$$

da cui

$$\frac{Dh}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt} + \frac{Dp}{Dt}.$$

Sommando $\frac{Dp}{Dt}$ a entrambi i membri dell'equazione (1.16) si ha immediatamente l'equazione per l'entalpia

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (1.17)$$

1.8.4 Equazione della temperatura

Dalla definizione di calore specifico a pressione costante

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{p=\text{cost}} = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}},$$

dalla definizione di coefficiente di espansione termica

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}},$$

e dalla relazione di Maxwell per le variabili termodinamiche,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} = -\beta v = -\frac{\beta}{\rho},$$

segue che, differenziando l'entalpia per unità di massa $s = s(T, p)$, si ottengono le equivalenze

$$\begin{aligned} ds &= dT \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} + dp \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \\ &= \frac{dT}{T} \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p=\text{cost}} \right] + dp \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T=\text{cost}} \\ &= \frac{dT}{T} c_p - dp \frac{\beta}{\rho} \end{aligned}$$

da cui, passando alla derivata sostanziale,

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{c_p}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{\beta}{\rho} \frac{Dp}{Dt}.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione per l'entalpia (1.16) si ha immediatamente l'equazione per la temperatura

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (1.18)$$

Si osservi che, per un gas perfetto, $\beta = 1/T$.

1.9 Adimensionalizzazione delle equazioni di governo

Se nel sistema che si sta considerando si possono identificare una lunghezza caratteristica L , una velocità caratteristica U_0 e delle proprietà di riferimento del fluido $p_0, \rho_0, T_0, \mu_0, \kappa_0, c_{p0}$ e $\Delta T = T_w - T_0$ allora si possono introdurre le variabili adimensionali

$$x'_j = \frac{x_j}{L}, \quad u'_j = \frac{u_j}{U_0}, \quad g'_j = g_j \frac{L}{U_0^2}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$t' = t \frac{U_0}{L}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 U_0^2}, \quad T' = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{\kappa_0}, \quad c'_p = \frac{c_p}{c_{p0}},$$

e la rispettiva derivata sostanziale

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{L}{U_0} \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t'} + u'_j \frac{\partial}{\partial x'_j}.$$

Moltiplicando l'equazione di continuità (1.10) per $L/(\rho_0 U_0)$, l'equazione della quantità di moto (1.11) per $L/(\rho_0 U_0^2)$ e l'equazione della temperatura (1.18) per $L/(\rho_0 c_{p0} U_0 (T_w - T_0))$, si ottengono le rispettive equazioni di governo in forma adimensionale convettiva

$$\frac{D\rho'}{Dt'} = -\rho' \frac{\partial u'_j}{\partial x'_j}, \quad (1.19)$$

$$\rho' \frac{Du'_i}{Dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \delta_{ij} \right) \right) + \rho' g'_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.20)$$

$$\rho' c'_p \frac{DT'}{Dt'} = \text{Ec} \frac{Dp'}{Dt'} + \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\kappa' \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \delta_{kj} \right) \frac{\partial u'_k}{\partial x'_j}, \quad (1.21)$$

dove

Numero di Reynolds	Re	$= \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}$	$= \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscosse}}$
Numero di Eckert	Ec	$= \frac{U_0^2}{c_{p0}(T_w - T_0)}$	$= \frac{\text{energia cinetica}}{\text{entalpia}}$
Numero di Prandtl	Pr	$= \frac{\mu_0 c_{p0}}{\kappa_0}$	$= \frac{\text{diffusione viscosa}}{\text{diffusione termica}}$
Numero di Péclet	Pe	$= \text{Pr Re} = \frac{\rho_0 U_0 L c_{p0}}{\kappa_0}$	$= \frac{\text{calore scambiato per convezione}}{\text{calore scambiato per conduzione}}.$

1.10 Condizioni iniziali e al contorno

Il sistema completo delle equazioni di Navier-Stokes è (molto) non lineare. Una sua caratteristica assai peculiare è quella di costituire un sistema *ibrido* iperbolico/parabolico. Infatti la prima equazione per la conservazione della massa è iperbolica mentre le equazioni del bilancio della quantità di moto e di conservazione dell'energia sono di natura parabolica. Si dice allora che le equazioni di Navier-Stokes comprimibili costituiscono un sistema parabolico incompleto.

Il carattere di *incompletezza* è dovuto all'assenza di un termine di tipo laplaciano nell'equazione di conservazione della massa, ma non significa affatto che le equazioni richiedano di essere modificate o completate per potere condurre a un problema matematicamente ben posto. Questa asimmetria delle equazioni della dinamica dei fluidi è forse l'aspetto più specifico di questo sistema di equazioni. Esso ha delle conseguenze di natura fondamentale sulla teoria matematica delle equazioni di Navier-Stokes comprimibili. Ad esempio, se consideriamo un problema in una regione completamente delimitata da pareti solide, le condizioni al contorno del problema di una corrente comprimibile viscosa in tale caso comprenderanno la specificazione della velocità e, ad esempio, della temperatura su tutto il contorno ma non esisterà alcuna condizione al contorno per la variabile densità.

In generale, per le condizioni iniziali è richiesto un campo dato *almeno* per ogni variabile che evolve nel tempo (tipicamente ρ, \mathbf{u}, e)

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \quad e(\mathbf{r}, 0) = e_0(\mathbf{r}),$$

mentre per le condizioni al contorno è necessario che sia soddisfatta *almeno* la *no-slip condition* che prevede la perfetta adesione del fluido a superfici solide. Se indichiamo con $S = \partial V$ tali superfici, la condizione diventa

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t).$$

Chiaramente, il dato iniziale $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ e quello al contorno $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$ non possono essere incompatibili.

Il problema delle condizioni al contorno per le equazioni di Navier-Stokes è una materia piuttosto complessa e non esiste, se non per situazioni molto schematiche, una dimostrazione matematica di esistenza ed unicità della soluzione. Tuttavia, per domini *chiusi*, si può affermare che in tutti i casi di interesse pratico le condizioni al contorno sono quattro e non cinque, come ci si potrebbe immaginare. Quando il contorno è una parete solida, tre di queste sono la no-slip condition, mentre l'altra è una condizione sulla temperatura o sul flusso di calore alla parete. Per i problemi *esterni* occorre assegnare anche una condizione all'infinito, che nella maggior parte dei casi consiste nel richiedere che velocità, pressione e temperatura assumano un valore costante e noto (quello della corrente all'infinito).

Nel caso particolare di problema non viscoso il sistema si abbassa di ordine. Nel caso subsonico bisogna assegnare una sola condizione su di un intero contorno chiuso, più altre tre (due se non si considera l'equazione dell'energia) sulla sola parte del contorno dove il fluido è entrante.

Capitolo 2

Casi particolari delle equazioni di governo

2.1 Correnti particolari

Si ricordi che per *fluido* si intende un mezzo continuo caratterizzato da proprietà fisiche quali la densità ρ , la viscosità μ e il coefficiente di conduzione termica κ , mentre per *corrente* si intende un particolare regime di moto, che può essere laminare o turbolento, comprimibile o incompressibile, subsonico o supersonico, stazionario, isoterma, isoentropico, barotropico, ecc. Qualche volta, purtroppo, si usa la parola *flusso* anziché corrente, rischiando di confondere il lettore.

2.1.1 Dipendenza dal tempo

Se il campo di moto e le grandezze associate alla corrente dipendono dal tempo allora la corrente si dice *non stazionaria*. Viceversa, se le grandezze non dipendono dal tempo, o la loro variazione nel tempo avviene su una scala così lenta rispetto ai tempi caratteristici del fenomeno modellato dalle equazioni di governo da poter essere trascurata, allora le equazioni si dicono *stazionarie* e $\partial/\partial t = 0$ (si veda la tabella 2.1). Si noti che è la *derivata parziale* rispetto al tempo ad essere nulla, non quella *sostanziale*.

2.1.2 Effetto della viscosità

È indubbio che ogni fluido, perlomeno nei limiti della fluidodinamica classica, sia viscoso. Questo implica sia il soddisfacimento della no-slip condition alla parete, sia la dissipazione di energia sotto forma di attrito viscoso all'interno della corrente. Spesso, però, alcuni regimi di moto possono essere trattati trascurando completamente la viscosità del fluido (per esempio in gas dinamica). Diremo che la corrente è *non viscosa* se gli effetti della viscosità sono trascurabili ($\mu = 0$), *viscosa* altrimenti (si veda la tabella 2.1).

2.1.3 Conduzione termica

Ogni fluido è un mezzo materiale nel quale avviene trasporto di calore per conduzione. La costante di conducibilità termica κ varia da fluido a fluido, ma talvolta i fenomeni di conduzione termica si possono trascurare, semplificando in tal modo l'equazione dell'energia. Diremo che la corrente è *non conduttrice* se lo scambio di calore per conduzione è trascurabile ($\kappa = 0$),

Tipo di corrente	in formule	significato
Stazionaria	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$	indipendenza dal tempo
Non stazionaria	$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$	dipendenza dal tempo
Viscosa	$\mu \neq 0$	effetti viscosi alla parete e nella corrente
Non viscosa	$\mu = 0$	effetti viscosi trascurabili ovunque
Conduttrice	$k \neq 0$	trasmissione di calore per conduzione
Non conduttrice	$k = 0$	conduzione di calore trascurabile nella corrente
Ideale	$\mu = k = 0$	né viscosa, né conduttrice $\Rightarrow \frac{Ds}{Dt} = 0$
Isoentropica	$\frac{Ds}{Dt} = 0$	entropia costante seguendo la corrente
Omoentropica	$s = \text{cost}$	entropia costante sia nello spazio che nel tempo
Incomprimibile	$\frac{d\rho}{dp} = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$	solenoidale, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$
Solenoidale	$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$	incomprimibile, $\frac{d\rho}{dp} = \rho\tau = 0 \iff \frac{D\rho}{Dt} = 0$
Isocora	$\frac{Dv}{Dt} = 0$	incomprimibile, $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
Comprimibile	$\frac{d\rho}{dp} = \rho\tau \neq 0$	$\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$
Barotropica	$p = p(\rho) \vee \rho = \rho(p)$	$\rho = \rho(p) \Rightarrow \exists \mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p')} dp' : \nabla \mathcal{P} = \frac{\nabla p}{\rho}$
Densità costante	$\rho = \rho_0 = \text{costante}$	ρ non dipende né da \mathbf{r} né da t
Irrotazionale	$\nabla \times \mathbf{u} = 0$	su un dominio monoconnesso, $\exists \varphi : \mathbf{u} = \nabla \varphi$

Tabella 2.1: Riassunto dei diversi tipi di correnti

conduttrice altrimenti. Una corrente *non viscosa* e *non conduttrice* si dice *ideale* (si veda la tabella 2.1).

2.1.4 Entropia

Si osservi che, per un fluido ideale ($\mu = \kappa = 0$), l'equazione dell'entropia (1.16) si riduce a

$$\frac{Ds}{Dt} = 0,$$

il che significa che l'entropia è costante lungo una linea di corrente (ovvero muovendosi con il fluido). Tuttavia, questo non garantisce che l'entropia sia costante ovunque perché, in generale, il suo valore varia tra una linea di corrente e un'altra. Pertanto, diremo che una corrente è *isoentropica* se $Ds/Dt = 0$, mentre diremo che una corrente è *omoentropica* se s è costante in tutto il dominio (si veda la tabella 2.1).

2.1.5 Comprimità

Un concetto fondamentale è quello di corrente comprimibile. Se $v = 1/\rho$ indica il volume specifico e p la pressione, si definisce comprimibilità di un fluido la quantità

$$\tau = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp},$$

ovvero la variazione relativa di densità subita da un fluido a seguito di una variazione di pressione. Si pensi all'effetto che si ottiene applicando una pressione sulla superficie esterna di un palloncino chiuso e pieno d'aria, o all'effetto che si ottiene applicando una pressione sullo stantuffo di una siringa piena d'acqua e chiusa all'altra estremità. Diremo che una corrente è *incomprimibile* se gli effetti di comprimibilità della densità sono trascurabili ($\tau = 0$), *comprimibile* altrimenti. Nel caso di corrente incomprimibile ($\tau = 0$), dalla relazione precedente segue

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \tau dp \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \tau \frac{Dp}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

per cui, facendo uso dell'equazione di continuità (1.10) in forma convettiva, si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dal punto di vista matematico, la condizione di corrente incomprimibile si traduce, quindi, nelle forme equivalenti

$$\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Dv}{Dt} = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'uguaglianza

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = 0.$$

La condizione $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, essendo equivalente a $Dv/Dt = 0$, assicura che il volume dell'elemento di fluido che si sposta solidale con la corrente rimanga costante. Ugualmente, $D\rho/Dt = 0$ assicura che ogni valore iniziale $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}) \neq$ costante venga trasportato lungo linee di corrente e quindi se al tempo iniziale $t = 0$ la densità era non uniforme, allora si manterrà non uniforme per ogni $t > 0$. Si osservi che la condizione di corrente incomprimibile

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

è un'equazione del trasporto per ρ a carico del campo di velocità \mathbf{u} . Questo trasporto di una distribuzione iniziale di densità non uniforme è tipico di correnti stratificate come quelle che si incontrano in oceanografia, caratterizzate sia da incomprimibilità sia da densità non uniforme nello spazio.

Ovviamente tutti i fluidi sono in qualche modo comprimibili ($\tau \neq 0$), quindi la corrente incomprimibile è un'idealizzazione. Tuttavia, per i liquidi τ è così piccolo che variazioni di pressione non riescono a provocare variazioni apprezzabili di densità ($\tau \ll 1$) e quindi l'ipotesi di corrente incomprimibile è del tutto corretta. Nei gas, invece, a seguito di variazioni di pressione si osservano notevoli variazioni di densità che possono avvenire sia a temperatura costante sia ad entropia costante. Per questo motivo definiamo

$$\tau_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_{T=\text{cost}} \quad \text{e} \quad \tau_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_{s=\text{cost}}$$

i coefficienti di comprimibilità rispettivamente *isotermo* e *isoentropico*. Si osservi che la velocità del suono in un determinato mezzo è definita come

$$a := \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{s=\text{cost}}},$$

per cui

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\tau_s}}.$$

Questo significa che la velocità del suono è in qualche modo una misura “pratica” della comprimibilità di un fluido o di un mezzo materiale. Infatti a è molto elevata nei solidi, che sono comunque in qualche modo comprimibili in quanto deformabili, e nei liquidi (a sarebbe infinita nel caso limite $\tau_s = 0$), mentre è piuttosto bassa nei gas. Per i gas perfetti si ha

$$a = \sqrt{\gamma RT},$$

dove $\gamma = c_p/c_v$ ($= 1.4$ per l'aria), $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$ con $\mathcal{R} = 8,314472 \text{ J/(K mol)}$ e \mathcal{M} è il peso molecolare espresso in kilogrammi. Per l'aria $R = 8.314472/0.02896 = 287.05 \text{ J/(kg K)}$.

Nonostante un gas sia evidentemente comprimibile, le correnti il cui fluido è allo stato gassoso (per esempio l'aria) in alcuni casi possono essere considerate incomprimibili perché le variazioni relative di densità ($\Delta\rho/\rho$) a seguito di variazioni di pressione sono trascurabili. Per capire come questo sia possibile, consideriamo il caso di una corrente ideale, $\mu = \kappa = 0$, che quindi è anche isoentropica, per la quale l'equazione (1.13) diventa semplicemente

$$\frac{D\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}{Dt} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_j \rho g_j.$$

Supponendo che non ci siano forze di volume ($g_j = 0$) e che la corrente sia stazionaria ($\partial/\partial t = 0$), si ottiene

$$u_j \frac{\partial \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad u_j \frac{\partial \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p \right)}{\partial x_j} = 0,$$

che riscritta in forma vettoriale diventa

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p \right) = 0.$$

Pertanto, si può concludere che lungo una linea di corrente, sotto le ipotesi di corrente ideale ($\mu = \kappa = 0$), stazionaria ($\partial/\partial t = 0$), e in assenza di forze di volume ($g_j = 0$), vale la relazione

$$\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p = \text{cost.}$$

Se adesso ipotizziamo che le variazioni di pressione avvengano solo a causa di variazioni di velocità, possiamo affermare, perlomeno a livello di ordini di grandezza, che $\Delta p/\rho \approx \Delta(|\mathbf{u}|^2/2)$; se però valutiamo la differenza di pressione rispetto al caso di velocità nulla, risulta

$$\frac{\Delta p}{\rho} \approx \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}.$$

Consideriamo ora variazioni di densità dovute a variazioni di pressione, sempre sotto l'ipotesi di corrente isoentropica. Dalla relazione

$$\Delta p = \Delta \rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{s=\text{cost}}$$

e utilizzando $\Delta p/\rho \approx |\mathbf{u}|^2/2$, segue che

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} \left[\left(\frac{d\rho}{dp} \right)_{s=\text{cost}} \right]^{-1} = \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{a^2} \approx \frac{|\mathbf{u}|^2}{2a^2}.$$

Introducendo il numero di Mach definito come

$$\text{Ma} = \frac{|\mathbf{u}|}{a},$$

si ottiene, per una corrente ideale (isoentropica) e stazionaria

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{1}{2} \text{Ma}^2.$$

Il numero di Mach è quindi un'altra "misura" della comprimibilità o meno di una corrente. In particolare, se assumiamo che affinché una corrente possa essere considerata incomprimibile debba essere $\Delta \rho/\rho < 0.05$, allora basta che il numero di Mach sia $\text{Ma} < 0.31$. Siccome per l'aria, a temperatura ambiente, la velocità del suono è $a \approx 340$ m/s, per velocità inferiori a 100 m/s l'aria può essere trattata come una corrente incomprimibile.

Per un riassunto schematico dei vari modi (equivalenti) di esprimere la condizione di incomprimibilità, si veda la tabella 2.1.

2.1.6 Correnti barotropiche

Una corrente si dice *barotropica* se la densità è funzione solo della pressione e viceversa. In generale, infatti, una grandezza termodinamica (per esempio la densità o la pressione) è sempre funzione di altre due variabili termodinamiche. Nel caso barotropico, invece, la densità non è funzione della temperatura e quindi la Termodinamica non entra in gioco direttamente. Le correnti barotropiche sono due (si veda la tabella 2.1), quelle:

1. incomprimibili con densità iniziale funzione solo dello spazio, ovvero $\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \rho_0(\mathbf{r})$
2. isoentropiche comprimibili, in quanto p è funzione solo di una variabile termodinamica.

In questi casi è possibile definire un potenziale termodinamico

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p')} dp',$$

che è semplicemente $\mathcal{P} = (p - p_0)/\rho$ nel caso *incomprimibile*, e $\mathcal{P} = h - h_0$ (entalpia) nel caso *isoentropico*. Dalla definizione segue, per il teorema di derivazione delle funzioni composte,

$$\nabla \mathcal{P} = \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2.1)$$

che significa che i gradienti del potenziale \mathcal{P} (da non confondere con la pressione termodinamica p) e della densità sono paralleli, e che il potenziale \mathcal{P} è definito a meno di una costante arbitraria.

2.2 Corrente incomprimibile

Sappiamo già che per corrente incomprimibile si intende $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, che non significa necessariamente che la densità sia costante ovunque. La pressione \mathcal{P} , in questo caso, serve solo da *moltiplicatore di Lagrange* al fine di permettere il soddisfacimento del vincolo di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Le incognite sono la velocità $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ e la pressione $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$. Le condizioni iniziali sono quelle generali ed sono richiesti un campo di velocità e densità iniziali

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r})$$

mentre per le condizioni al contorno è necessario richiedere che la velocità su di esso ($S = \partial V$) sia la stessa del contorno a seguito della *no-slip condition* che assicura la perfetta adesione del fluido alla superficie con la quale entra in contatto

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|_S = \mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t).$$

Chiaramente, il dato iniziale $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ e quello al contorno $\mathbf{b}(\mathbf{r}_S, t)$ non possono essere incompatibili e, in particolare, deve essere $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$.

2.3 Corrente ideale, equazioni di Eulero

Sappiamo che per corrente ideale si intende una corrente in cui si assume $\mu = \kappa = 0$. Inoltre, si è visto che una corrente ideale è anche isoentropica. La semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes al caso $\mu = \kappa = 0$ prende il nome di *Equazioni di Eulero*. Esse sono alla base di tutta la gas dinamica, branca della fluidodinamica che si occupa di fenomeni che si verificano in correnti ad alta velocità (onde d'urto, ecc.). L'assenza di termini di tipo laplaciano cambia la natura delle equazioni di Eulero in *iperbolica*. Le condizioni iniziali che devono essere specificate riguardano tutte le variabili in gioco quindi, se si scelgono come variabili termodinamiche la pressione e la temperatura, si devono imporre

$$p(\mathbf{r}, 0) = p_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \quad T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}),$$

mentre la mancanza della viscosità assicura l'abbassamento dell'ordine delle derivate spaziali della velocità per la quale, infatti, l'unica condizione ammissibile dal contorno è la non penetrazione del fluido sulle pareti di eventuali corpi:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}|_S, t) = 0.$$

Chiaramente, la *no-slip condition*, in assenza di viscosità, non è più richiesta. A grande distanza dal corpo le condizioni al contorno sono molto complicate e il loro tipo dipende dal tipo di corrente considerata, ovverosia dalla stessa soluzione che si sta ricercando. In termini generali, il numero stesso di condizioni al contorno che si possono/devono imporre nei punti del contorno esterno può variare da zero a 4 o 5 per le correnti in due o tre dimensioni, rispettivamente. Questo numero non è lo stesso su tutto il contorno e cambia sulle varie parti in cui risulta che esso deve essere suddiviso in base alla natura locale della soluzione in quella regione. Un'autentica maledizione, che richiede un'arte alquanto raffinata da parte dell'analista numerico e non numerico alle prese con i sistemi iperbolici non lineari, quali le equazioni della gasdinamica. Naturalmente l'analisi delle condizioni al contorno da imporre nei problemi relativi alle correnti comprimibili va molto al di là degli scopi di questo ripasso della dinamica dei fluidi.

2.4 Corrente irrotazionale

Il rotore del vettore velocità è, per definizione,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Un corrente è detta *irrotazionale* se $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ovunque, *rotazionale* altrimenti. Si osservi che, se \mathcal{L} è una linea chiusa che fa da contorno ad una superficie S per cui $\partial S = \mathcal{L}$, per il teorema di Stokes si ha che la circolazione di \mathbf{u} lungo \mathcal{L} è

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}) = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

dove $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ sono rispettivamente i versori tangente alla linea chiusa \mathcal{L} e normale alla superficie S . Pertanto, le correnti irrotazionali sono caratterizzate da circolazione nulla, mentre quelle rotazionali hanno circolazione non nulla.

Se la corrente è irrotazionale ed il dominio *monoconnesso* allora è definito un *potenziale cinetico* φ tale che

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi.$$

2.5 Corrente barotropica non viscosa: forma di Crocco

La forma di Crocco per l'equazione della quantità di moto consiste nel riscrivere il termine convettivo in una forma alternativa. Come visto nella sezione 2.1.6, nel caso di corrente barotropica (incomprimibile o comprimibile ma isoentropica), la pressione p è funzione della sola densità per cui esiste un potenziale di pressione \mathcal{P} tale che $\nabla \mathcal{P} = \nabla p / \rho$. Sotto l'ulteriore ipotesi di corrente non viscosa ($\mu = 0$), l'equazione della quantità di moto (1.11) si scrive, dopo aver sviluppato la derivata sostanziale e diviso per ρ , come

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + g_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

oppure, in forma vettoriale, come

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{P} + \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

dove $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$ e, per la notazione di Einstein che sott'intende la sommatoria sugli indici j , il termine convettivo è

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

essendo $\hat{\mathbf{x}}_i$ il versore nella direzione i -esima. Sfruttiamo ora l'identità vettoriale (A.3) ottenendo

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)$$

da cui, sostituendo $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, si ha

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Pertanto, dopo aver riscritto il termine convettivo secondo la (2.3) ed aver portato a sinistra il termine di pressione, l'equazione (2.2) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (2.4)$$

nota come *forma di Crocco* dell'equazione della quantità di moto per il caso barotropico non viscoso.

2.6 Il teorema di Bernoulli nelle diverse forme

Se ipotizziamo che il campo di forze di volume \mathbf{g} sia conservativo, allora esiste un potenziale scalare \mathcal{F} tale che

$$\mathbf{g} = -\nabla \mathcal{F}.$$

Sotto questa ulteriore ipotesi, l'equazione di Crocco, che è valida per correnti barotropiche e non viscosi, diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

2.6.1 Il caso stazionario

Nel caso stazionario è $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$. Inoltre, siccome $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ è perpendicolare sia a $\boldsymbol{\omega}$ che a \mathbf{u} , si ha

$$\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0.$$

Pertanto, moltiplicando scalarmente l'equazione (2.5) per \mathbf{u} si ottiene

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

che significa che *lungo le linee di corrente* è costante la quantità

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_1.$$

Inoltre, se le linee di corrente provengono da condizioni a monte di corrente uniforme, allora la costante è la stessa ovunque. Ugualmente, moltiplicando scalarmente l'equazione (2.5) per $\boldsymbol{\omega}$ si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

che significa che *lungo le linee vorticosi*, ovvero linee tangenti in ogni loro punto al vettore $\boldsymbol{\omega}$, è costante la quantità

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_2.$$

Di nuovo, se le linee di vorticosi provengono dalle stesse condizioni asintotiche, allora la costante è la stessa ovunque.

2.6.2 Il caso irrotazionale instazionario

Se la corrente è irrotazionale allora $\boldsymbol{\omega} = 0$ ed esiste, su un dominio semplicemente connesso, un potenziale cinetico funzione del tempo e dello spazio tale che

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{r}, t).$$

L'equazione (2.5) diventa semplicemente

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

che dopo aver scambiato l'ordine di derivazione tra lo spazio e il tempo risulta essere

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} \right) = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_3 = f(t),$$

dove la costante cost_3 è la stessa *in tutto il campo di moto*, ovvero è indipendente da \mathbf{u} , ma *dipende dal tempo t* .

2.6.3 Il caso irrotazionale e stazionario

Se la corrente oltre ad essere irrotazionale è anche stazionaria, allora l'equazione precedente diventa

$$\frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{F} = \text{cost}_4,$$

dove la costante cost_4 è la stessa *in tutto il campo di moto*.

Capitolo 3

Dinamica della vorticità

3.1 Definizioni preliminari

Chiamiamo *vorticità*, e la indichiamo con il simbolo $\boldsymbol{\omega}$, il vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Le linee che sono localmente tangenti al campo vettoriale $\boldsymbol{\omega}$, ovvero le linee \mathcal{C} tali per cui

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{t}} d\mathcal{C} = 0,$$

essendo $\hat{\mathbf{t}}$ il versore tangente alla curva \mathcal{C} , sono dette *linee vorticosi*. Definiamo *superficie vorticiosa* una superficie ottenuta partendo da una linea arbitraria nello spazio e spiccando, da ciascun punto di quest'ultima, linee vorticosi. Se la linea arbitraria è *chiusa*, allora la superficie ottenuta è un cilindro (in senso generico) e l'operazione dà origine ad un *tubo vorticoso*. Quando la sezione del tubo vorticoso tende a zero, si parla di un *filamento vorticoso*.

3.2 Equazione per la vorticità nel caso generale

Anziché concentrarci su $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ consideriamo la vorticità specifica $\boldsymbol{\omega}/\rho$ e ricaviamo un'equazione per la sua dinamica valida nel caso generale. Innanzitutto osserviamo che la derivata sostanziale di una sua componente è

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\omega_i}{Dt} - \frac{\omega_i}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{D\omega_i}{Dt} + \frac{\omega_i}{\rho} \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dell'equazione di continuità (1.10). La prima parte del termine di destra è facilmente ottenibile calcolando il rotore dell'equazione (1.11) divisa per ρ :

$$\frac{Du_k}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) + g_k. \quad (3.1)$$

Ricordando i passaggi fatti per arrivare alla forma di Crocco, si osservi che il termine di sinistra della (3.1) è, in forma vettoriale,

$$\hat{\mathbf{x}}_k \frac{Du_k}{Dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u},$$

per cui prendendone il rotore il termine gradiente sparisce:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) &= \nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right] \\
 &= \nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right] \\
 &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

Ricorrendo al simbolo di Levi-Civita (si veda l'appendice A.3) si può scrivere la componente i -esima di $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ in modo estremamente compatto come

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varepsilon_{klm} \omega_l u_m}{\partial x_j} \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial \omega_l u_m}{\partial x_j} \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial \omega_l u_m}{\partial x_j} \\
 &= \frac{\partial \omega_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j u_i}{\partial x_j} \\
 &= \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \\
 &= \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},
 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} = 0$ in quanto la divergenza di un rotore è nulla (il campo di vorticità è solenoidale). In conclusione, la componente i -esima del termine di sinistra del rotore dell'equazione (3.1) è

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \right]_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{D\omega_i}{Dt} + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

mentre la componente i -esima del termine di destra del rotore dell'equazione (3.1) è, dopo aver osservato nuovamente che il rotore di un gradiente è nullo,

$$\varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

Pertanto, il rotore dell'equazione (3.1) è

$$\begin{aligned}
 \frac{D\omega_i}{Dt} + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\
 \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j},
 \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{D\omega_i}{Dt} &= \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \\
 &\quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.
 \end{aligned}$$

In conclusione, da

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\omega_i}{Dt} + \frac{\omega_i}{\rho} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

si ottiene l'equazione per componenti in forma tensoriale

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) &= \frac{\omega_j}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \\ &\quad \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

che scritta in forma vettoriale dà l'equazione generica per la vorticità

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^3} \boldsymbol{\nabla} \rho \times \boldsymbol{\nabla} p + \\ &\quad \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\hat{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Il primo termine di destra è detto di *stretching e tilting*, il secondo è detto *barotropico*, il terzo è detto *diffusivo*, il quarto è dovuto alle forze di volume (ed è presente solo se esse non sono conservative).

3.3 Casi particolari

3.3.1 Corrente a viscosità e densità costanti

Nel caso particolare di corrente caratterizzata da viscosità e densità costanti ($\mu(\mathbf{r}, t) = \bar{\mu}$, $\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}$), l'equazione di continuità assicura

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_s}{\partial x_s} = 0 \quad (\text{corrente incomprimibile}).$$

D'altra parte, densità costante implica $\boldsymbol{\nabla} \rho = 0$ ed il conseguente annullamento del termine barotropico $\boldsymbol{\nabla} \rho \times \boldsymbol{\nabla} p$, mentre μ e ρ (essendo costanti) possono essere portate dentro o fuori

dalle derivate, consentendo di riscrivere il termine viscoso della (3.3) come

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right) = \\
& \quad \frac{\mu}{\rho} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \right) = \\
& \quad \nu \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right) = \\
& \quad \nu \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \right) \right) = \\
& \quad \nu \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} \right) = \\
& \quad \nu \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \left(\frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \\
& \quad \nu \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{u} \right) = \nu \nabla^2 \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right).
\end{aligned}$$

Sotto le ipotesi di viscosità e densità costanti, quindi, la (3.3) si riduce a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g}. \quad (3.4)$$

3.3.2 Corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative

Sotto le ipotesi di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative l'equazione (3.3) si riduce a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (3.5)$$

Infatti, le tre ipotesi assicurano che

- corrente barotropica: il gradiente di densità e di pressione sono paralleli (si veda l'equazione (2.1)) e quindi

$$\frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p = 0;$$

- corrente non viscosa: $\mu = 0$ implica che

$$\frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{km} \right) \right) \right);$$

- forze esterne conservative ($\mathbf{g} = \nabla \mathcal{F}$) implica che

$$\frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g} = 0.$$

Si osservi che la (3.5) vale per una corrente ideale (che è barotropica e non viscosa) se il campo di forze di volume è conservativo.

3.4 Il teorema di Kelvin

Sia \mathcal{C}_t una linea chiusa che varia nel tempo spostandosi alla velocità \mathbf{u} . Definiamo circolazione del vettore velocità \mathbf{u} al tempo t e la denotiamo con $\Gamma(t)$ l'integrale di linea dipendente dal tempo

$$\Gamma(t) = \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc = \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

dove \mathcal{S}_t è la superficie che ha per contorno la curva \mathcal{C}_t ($\mathcal{C}_t = \partial\mathcal{S}_t$), e i vettori $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ sono rispettivamente i versori tangente alla linea chiusa \mathcal{C}_t e normale alla superficie \mathcal{S}_t . Dimostriamo che nel caso di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative, si ha

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (3.6)$$

noto come *Teorema di Kelvin*, che a parole può essere enunciato come *la circolazione della velocità, nel caso di corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative, non varia quando la si calcola lungo una linea chiusa che si muove con la corrente*. Si osservi che per dimostrarlo è necessario calcolare la derivata rispetto al tempo di un integrale su una linea chiusa che si muove nel tempo alla velocità \mathbf{u} . Similmente al caso della derivata rispetto al tempo dell'integrale su un volume che si muoveva alla velocità \mathbf{u} , esiste un teorema che assicura

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \right) = \oint_{\mathcal{C}_t} \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc + \oint_{\mathcal{C}_t} ((\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc.$$

Nel nostro caso esso diventa

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \right) = \oint_{\mathcal{C}_t} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc + \oint_{\mathcal{C}_t} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc.$$

Ricordando che, grazie alla (2.3), si ha

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right),$$

che la circuitazione di un gradiente lungo una linea chiusa è nulla in quanto $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ implica

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \nabla \varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0,$$

ed osservando che l'equazione della quantità di moto (2.2) specializzata al caso di corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative si riduce a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{P},$$

dalla definizione di circolazione si ottiene che la sua derivata temporale è

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \right) \\
&= \oint_{C_t} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc + \oint_{C_t} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \\
&= \oint_{C_t} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc + \oint_{C_t} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \\
&= \oint_{C_t} \left[\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \\
&= - \oint_{C_t} (\nabla \mathcal{P}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dc \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da cui il teorema di Kelvin (3.6).

3.5 Teoremi di Helmholtz e loro significato geometrico

I tre teoremi di Helmholtz discendono in parte da considerazioni puramente cinematiche, in parte utilizzano il teorema di Kelvin (3.6) ricavato per una corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative.

3.5.1 Primo teorema di Helmholtz

Siccome il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è solenoidale, allora *il flusso del vettore vorticità attraverso la sezione di un tubo vorticoso è costante*. Grazie al teorema di Stokes, questo equivale a dire che la circolazione del vettore velocità lungo una linea chiusa che circonda un tubo vorticoso è costante. Geometricamente, il teorema assicura che la vorticità media in ogni sezione del tubo vorticoso sia inversamente proporzionale alla sezione del tubo vorticoso in quanto il loro prodotto deve mantenersi costante. In altre parole, i filamenti vorticosi non possono iniziare o terminare all'interno di un fluido ma *devono richiudersi su se stessi, oppure terminare all'infinito o su di una superficie solida*.

3.5.2 Secondo teorema di Helmholtz

Per una corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative, un tubo vorticoso si muove con il fluido e la sua intensità (Γ) rimane costante. Questo discende immediatamente dal teorema di Kelvin (3.6) da cui si evince, inoltre, che se ad un certo istante c'è una superficie vorticoso essa rimane tale a tutti i successivi istanti di tempo. Questo accade perché se $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ per ogni elemento dS della superficie vorticoso allora $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$ anche se in generale sia $\boldsymbol{\omega}$ che $\hat{\mathbf{n}} \, dS$ possono variare.

3.5.3 Terzo teorema di Helmholtz

Per una corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative, se inizialmente la circolazione è nulla, allora rimarrà nulla per sempre. Anche questo discende immediatamente dal teorema di Kelvin (3.6).

Capitolo 4

Alcune soluzioni esatte

4.1 Corrente incomprimibile e parallela

Le equazioni di Navier-Stokes complete non ammettono soluzione in forma chiusa. Tuttavia, in alcuni casi di corrente molto semplice (tipicamente incomprimibile) e geometria semplice, si possono ottenere delle soluzioni esatte (in forma chiusa).

Abbiamo già visto che per corrente incomprimibile si intende $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Se, inoltre, le differenze di temperatura sono trascurabili, l'equazione di continuità si riduce a

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

mentre le tre equazioni della quantità di moto diventano

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Per *corrente parallela* si intende una corrente in cui esiste una sola componente della velocità, mentre le altre due sono nulle. Se con x_1 si intende la direzione del flusso, ovvero quella in cui la velocità è non nulla, tipicamente in una corrente parallela si ha $u_2 \equiv 0$ e $u_3 \equiv 0$. Dall'equazione di continuità è immediato osservare che $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv 0$, mentre dalle equazioni della quantità di moto nelle direzioni x_2 e x_3 discende $\frac{\partial p}{\partial x_2} \equiv 0$ e $\frac{\partial p}{\partial x_3} \equiv 0$, da cui $p = p(x_1)$, ovvero la pressione (e il suo gradiente) è funzione solo di x_1 . Riassumendo, per una corrente incomprimibile e parallela si ha

$$\begin{array}{lll} u_2 \equiv 0 & \Rightarrow & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv 0 \quad \text{continuità} \\ u_3 \equiv 0 & & \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{dp}{dx_1} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] \quad \text{quantità di moto in direzione } x_1 \\ & & \frac{dp}{dx_2} \equiv 0 \quad \text{quantità di moto in direzione } x_2 \\ & & \frac{dp}{dx_3} \equiv 0 \quad \text{quantità di moto in direzione } x_3, \end{array} \quad (4.1)$$

con

$$u_1 = u_1(x_2, x_3, t), \quad p = p(x_1).$$

4.2 Canale piano infinito: corrente di Couette e di Poiseuille

Consideriamo un fluido che si trovi tra un piano fermo (parete inferiore) e un piano che si muove a velocità costante U . Per comodità usiamo la notazione u , x e y . Non essendoci dipendenza dal tempo, la corrente è stazionaria. Inoltre, siccome non ci sono variazioni nella direzione z (corrente parallela), l'unica equazione di governo è semplicemente

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

con condizioni al contorno

$$u = 0 \quad \text{per} \quad y = 0, \quad u = U \quad \text{per} \quad y = h.$$

Siccome il gradiente di pressione non dipende da y , integrando due volte rispetto a y si ha

$$\frac{dp}{dx} y = \mu \frac{du}{dy} + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} = \mu u + c_1 y + c_2,$$

utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ha immediatamente $c_2 = 0$, mentre $u(h) = U$ implica $c_1 = \frac{1}{h} \left[\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} - \mu U \right]$. Pertanto, la soluzione esatta è

$$u(y) = \frac{y}{h} U - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right).$$

Si osservi che si possono ottenere varie situazioni:

- in assenza sia di gradiente di pressione che di parete mobile, la velocità è identicamente nulla in quanto non ci sono forze esterne che mettono in moto il fluido
- in assenza di gradiente di pressione, se la parete superiore si muove con velocità U e quella inferiore è ferma, si ottiene un profilo di velocità lineare $u(y) = Uy/h$ nota come *corrente di Couette*
- nel caso in cui entrambe le pareti siano ferme (canale piano infinito), si ottiene un profilo parabolico che raggiunge il massimo di velocità al centro del canale ($y = h/2$), nota come *corrente di Poiseuille*
- nei casi in cui è presente sia la parete mobile che il gradiente di pressione, si ottengono situazioni intermedie.

4.3 Tubo a sezione circolare: corrente di Hagen-Poiseuille

Consideriamo una corrente parallela, incomprimibile e stazionaria in un tubo a sezione circolare. Se indichiamo con x la direzione dell'asse del tubo e con r la distanza radiale dall'asse, l'equazione di bilancio si riduce a

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right),$$

con condizione al contorno

$$u = 0 \quad \text{per} \quad r = R.$$

Dopo aver osservato che

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right),$$

l'equazione da integrare diventa

$$r \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right).$$

Integrando una volta si ha

$$\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dx} = \mu r \frac{du}{dr} + c_1 \iff \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} = \mu \frac{du}{dr} + \frac{c_1}{r},$$

integrando una seconda volta si ottiene

$$\frac{r^2}{4} \frac{dp}{dx} = \mu u + c_1 \log |r| + c_2.$$

Facendo uso del fatto che la velocità sull'asse del tubo ($r = 0$) non può essere infinita, si ha che $c_1 = 0$, mentre la condizione al contorno $u(R) = 0$ implica $c_2 = \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dx}$. Pertanto, il profilo di velocità è semplicemente

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2),$$

dove dp/dx è noto. Questo è un profilo di tipo paraboloide che raggiunge il suo massimo sull'asse dove si ha

$$u(0) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Per ottenere la portata in volume, essendo $dQ = u(r) dA = u(r) r d\theta dr$ basta svolgere l'integrale

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R dQ = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R u(r) r dr \right] d\theta = - \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) r dr \right] d\theta = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Dalla portata, dividendo per l'area della sezione πR^2 , si ottiene la velocità media

$$\bar{u} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{u(0)}{2}.$$

Questa soluzione è stata ottenuta sotto l'ipotesi di corrente stazionaria e parallela. Si osserva sperimentalmente che essa è verificata quando il numero di Reynolds basato sul diametro e sulla velocità media $Re = \frac{\bar{u}d}{\nu}$ è minore di un valore critico di circa 2300. Se $Re > 2300$ la corrente non è più stazionaria e presenta un comportamento totalmente differente, imprevedibile, e prende il nome di corrente turbolenta:

$$\begin{aligned} Re = \frac{\bar{u}d}{\nu} < 2300 & \quad \text{corrente laminare} \\ Re = \frac{\bar{u}d}{\nu} > 2300 & \quad \text{corrente turbolenta.} \end{aligned}$$

Capitolo 5

Lo strato limite

Per strato limite si intende una regione di fluido, in prossimità di una parete, dove la velocità passa dal valore nullo (alla parete, a causa della condizione di adesione dovuta alla presenza della viscosità) al valore della corrente esterna. In questo sottile strato supponiamo che le forze di origine viscosi (la parte delle equazioni di Navier-Stokes che moltiplica la viscosità) abbiano lo stesso ordine di grandezza delle forze d'inerzia (la parte non lineare delle equazioni di Navier-Stokes).

5.1 Teoria dello strato limite di Prandtl

Consideriamo una lamina piana investita da una corrente incomprimibile, stazionaria e bidimensionale, parallela alla lamina stessa. Siccome le variazioni lungo la direzione della corrente (parallelamente alla parete) sono molto più lente delle variazioni in direzione perpendicolare alla parete, attraverso un'analisi basata unicamente sugli ordini di grandezza e sull'ipotesi che le forze viscosi siano dello stesso ordine di grandezza di quelle d'inerzia, si perviene alle equazioni di Prandtl

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2)$$

e le relative condizioni “al contorno” in y

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = U_e(x)$$

e condizioni “iniziali” a $x = 0$

$$u(0, y) = U_e(0), \quad v(0, y) = 0,$$

essendo $U_e(x)$ la funzione che descrive il valore della velocità esterna allo strato limite al variare di x .

5.2 Profilo di Blasius (corrente esterna uniforme)

Nel caso di corrente esterna uniforme, ovvero $U_e(x) = U = \text{costante}$, supponendo che i profili di velocità siano “simili” al variare di x , ovvero che siano una “riscalatura” di una funzione

universale, le equazioni (5.2) e (5.2) si riducono all'equazione differenziale ordinaria

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (5.3)$$

con le relative condizioni al contorno

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (5.4)$$

$$f'(\infty) = 1, \quad (5.5)$$

formando un problema ai limiti non lineare del terz'ordine. Se $f(\eta)$ è la soluzione (numerica, tabulata, o approssimata in qualsiasi altro modo) del precedente problema e la variabile indipendente è $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$, allora i profili di velocità “riscalati” in funzione delle variabili fisiche (x, y) sono

$$u(x, y) = Uf' \left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) \quad (5.6)$$

$$v(x, y) = \frac{U}{2} \left[\frac{y}{x} f' \left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) - \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f \left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) \right]. \quad (5.7)$$

Dalle funzioni $f(\eta)$, $f'(\eta)$ e $f''(\eta)$, si possono ottenere diverse informazioni utili riguardo allo strato limite su lamina piana.

5.2.1 Spessore dello strato limite

Il profilo di $f'(\eta) = u(\eta)/U$ mostra che il 99% della velocità esterna viene raggiunta per $\eta \approx 5$. Questo significa che lo spessore di strato limite è circa

$$\delta_{99} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Pertanto, su una lamina piana immersa in una corrente d'aria ($\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$) a velocità di 10 m/s (36 km/h) lo spessore dello strato limite a 1 m dal bordo d'attacco è $\delta_{99} \approx 6$ mm.

5.2.2 Valore asintotico della velocità normale alla parete

Siccome quanto $\eta \rightarrow \infty$ si ha $f'(\eta) \rightarrow 1$, si ottiene

$$v(x, \infty) = \frac{U}{2} \left[\frac{y}{x} - \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f(\eta) \right] = \frac{U}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left[y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} - f(\eta) \right] = U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left[\frac{\eta - f(\eta)}{2} \right].$$

Essendo $f(\eta)$ lineare con η , dai valori numerici si ha

$$v_{\infty}(x) = 0.8604 \cdot U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}.$$

Riprendendo l'esempio precedente, ad un metro dal bordo d'attacco la velocità in direzione perpendicolare alla parete sufficientemente al di fuori dallo strato limite, per una corrente d'aria ($\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$) a velocità di 10 m/s (36 km/h), è $v_{\infty} \approx 0.01$ m/s. Pertanto, la presenza della lamina piana, anche se di spessore nullo, causa uno scostamento dalla corrente parallela.

5.2.3 Resistenza di attrito

La resistenza di attrito si calcola facilmente come integrale dello sforzo tangenziale a parete:

$$D = 2 \int_0^L \tau(x, 0) b \, dx,$$

dove L è la distanza dal bordo d'attacco (tipicamente la lunghezza della lamina, se si è interessati alla resistenza totale), b è la larghezza della lamina piana, e il fattore 2 è dovuto al fatto che la lamina piana ha due facce. Si ha

$$\tau_0(x) = \tau(x, 0) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) = 0.332 \cdot \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}},$$

da cui

$$D = 2 \int_0^L \tau(x, 0) b \, dx = 0.664 \cdot b \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 1.328 \cdot b U \sqrt{\mu \rho U L} = 1.328 \cdot b \sqrt{U^3 \mu \rho L}.$$

Introducendo il coefficiente di attrito definito come

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A},$$

essendo per la lamina piana $A = 2bL$, si ottiene

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{1.328 \cdot b \sqrt{U^3 \mu \rho L}}{\frac{1}{2} \rho U^2 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}},$$

dove $Re_L = \frac{UL}{\nu}$ denota il numero di Reynolds basato sulla lunghezza della lamina.

5.3 Grandezze caratteristiche dello strato limite

Siccome la presenza dello strato limite provoca un difetto di velocità rispetto alla corrente esterna imperturbata, in presenza di strato limite si osserva sia una diminuzione della portata in massa sia una diminuzione della quantità di moto.

5.3.1 Lo spessore di spostamento

Ha senso, quindi, chiedersi di quanto dovrebbe essere “spostata” verso l'esterno la parete in modo tale che la portata in massa effettiva rimanga uguale a quella di una corrente uniforme. Chiamiamo *spessore di spostamento* e lo indichiamo con δ^* (o δ_1) proprio questa distanza. A seguito della definizione si ha

$$\rho U \delta^* = \int_0^\infty \rho (U - u) \, dy \quad \Longleftrightarrow \quad \rho U \delta^* = \rho U \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy,$$

da cui la definizione

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy.$$

Per lo strato limite su lamina piana si ha

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} [\tilde{\eta} - f(\tilde{\eta})],$$

dove $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$. Siccome $f(\eta)$ è lineare con η e la differenza $[\eta - f(\eta)] = 1.7208$ per $\eta \rightarrow \infty$, si ha

$$\delta^* = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \iff \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.7208}{\sqrt{Re_x}},$$

con $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$.

5.3.2 Lo spessore di quantità di moto

Sempre a seguito del fatto che lo strato limite causa un difetto di velocità rispetto alla corrente uniforme, ha senso chiedersi di quanto dovrebbe essere “spostata” verso l'esterno la parete in modo tale che la quantità di moto effettiva rimanga uguale a quella della corrente uniforme. Chiamiamo *spessore di quantità di moto* e lo indichiamo con θ (o δ_2) proprio questa distanza. A seguito della definizione si ha

$$\rho U^2 \theta = \int_0^\infty \rho u (U - u) dy \iff \rho U^2 \theta = \rho U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

da cui la definizione

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

Per lo strato limite su lamina piana si ha

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

ovvero

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}},$$

5.3.3 Fattore di forma

Un ultimo parametro che distingue uno strato limite da un altro è il fattore di forma H definito dal rapporto

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}.$$

Si osservi che, siccome $\delta^* > \theta$, allora $H > 1$. In particolare, per lo strato limite di Blasius esso risulta costante e pari a $H = 2.5916$; mentre per strati limite turbolenti si ha $1.15 < H < 1.4$. Pertanto, al diminuire di H il profilo di velocità diventa più “pieno”, caratteristica tipica dei profili turbolenti.

5.4 Equazione integrale di von Kàrmàn

Ripartendo dalle equazioni dello strato limite

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.8}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.9}$$

a x fissata integriamo l'equazione della quantità di moto in direzione normale alla parete tra 0 e un valore h esterno allo strato limite ottenendo:

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy = \int_0^h \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^h = - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = - \frac{\tau(x, 0)}{\rho} = - \frac{\tau_w(x)}{\rho},$$

dove si è indicato con τ_w lo sforzo tangenziale a parete e dove si è usato il fatto che al di fuori dello strato limite $u(y) = U_e$ e pertanto $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Sfruttando l'equazione di continuità ed integrando in y , la velocità v è

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy',$$

che serve per ottenere il secondo termine dell'equazione integrale

$$\int_0^h \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = - \int_0^h \left[\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy' \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy.$$

Integrando per parti e considerando $\frac{\partial u}{\partial y}$ come fattore differenziale e $\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy'$ come fattore finito, si ha

$$\int_0^h \left[v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = - \left[u \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy' \right]_0^h + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy = -U_e \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy' + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy &= \int_0^h \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy \\ &= \int_0^h \left[\frac{\partial u^2}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x} (U_e u) - u \frac{dU_e}{dx} \right) - U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy \\ &= \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^2 - U_e u) - (U_e - u) \frac{dU_e}{dx} \right] dy \\ &= - \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (u(U_e - u)) dy - \frac{dU_e}{dx} \int_0^h (U_e - u) dy \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h \rightarrow \infty} u(U_e - u) dy \right) - \frac{dU_e}{dx} \int_0^{h \rightarrow \infty} (U_e - u) dy \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} (U_e^2 \theta) - \frac{dU_e}{dx} U_e \delta^*, \end{aligned}$$

dove si è passati al limite $h \rightarrow \infty$ perché le funzioni integrande sono nulle fuori dallo strato limite. In conclusione,

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho} = \frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx},$$

nota come *equazione integrale di von Kàrmàn*. La potenza di questa equazione integrale consiste nel fatto che può essere applicata sia per strati limite laminari che turbolenti. Introducendo il coefficiente di attrito *locale*

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$$

si ottiene la forma adimensionale dell'equazione integrale

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx}.$$

Nel caso particolare di lamina piana, siccome $\frac{dU_e}{dx} = 0$, su una singola faccia si ha

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}.$$

Integrando in x tra 0 ed L si ottiene il coefficiente di attrito *globale* su una faccia

$$c_f = \int_0^L C_f dx = 2\theta_L,$$

da cui il coefficiente di attrito su entrambe le facce

$$c_f = 4\theta_L.$$

In conclusione, il coefficiente di attrito di una lamina piana può essere dedotto sperimentalmente misurando il solo spessore di quantità di moto al bordo di uscita della lamina.

Capitolo 6

Stabilità e transizione

Le soluzioni esatte determinate in forma chiusa nel capitolo 4 per geometrie semplici e la soluzione di Blasius per lo strato limite su lamina piana del capitolo 5 sono state ottenute sotto l'ipotesi di *corrente laminare*. Tuttavia, le correnti laminari non sono molto comuni né nella vita di tutti i giorni né nelle situazioni ingegneristiche di interesse pratico. Il moto laminare è, piuttosto, l'eccezione. Questo perché nelle correnti laminari possono entrare dei disturbi esterni che, crescendo nello spazio e/o nel tempo, danno origine a delle perturbazioni rispetto alle quali la corrente laminare non è più stabile. Si ha quindi la *transizione da corrente laminare a corrente turbolenta*.

6.1 Corrente confinata in un tubo – l'esperimento di Reynolds

Storicamente, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta fu studiata da Reynolds nel famoso esperimento con il colorante pubblicato nel 1883 e riportato in figura 6.1. L'esperimento consisteva nell'osservazione di una corrente d'acqua in un tubo a sezione circolare, nota come corrente di Hagen-Poiseuille (per i dettagli su questa corrente parallela si veda la sezione 4.3), caratterizzata da un profilo assialsimmetrico tipo paraboloide. Reynolds notò che al crescere del numero di Reynolds $Re = \frac{Ud}{\nu}$, essendo U la velocità media della corrente ($U = Q/A$, dove Q è la portata in volume e A l'area della sezione del tubo), d il diametro del tubo e ν la viscosità dell'acqua, il colorante rilasciato al centro della corrente si comportava in modo progressivamente sempre più irregolare, come riportato in figura 6.2. Indicando con Re_{cri} il numero di Reynolds *critico* al quale si osserva lo scostamento dalla corrente laminare, Reynolds osservò che il comportamento irregolare si presentava ad un Re_{cri} basso se l'imboccatura del tubo presentava un raccordo poco levigato, mentre se l'imboccatura e tutto l'interno del tubo erano molto ben levigati allora Re_{cri} era più elevato. Il miglior risultato ottenuto fino ad ora facendo molta attenzione a minimizzare i disturbi che, purtroppo, sono necessariamente introdotti in una corrente reale, è di $Re_{cri} \approx 40000$. È chiaro che il limite superiore di Re_{cri} non è noto, mentre è noto il limite inferiore: se il numero di Reynolds è inferiore a circa $Re_{cri} \approx 2300$, allora la corrente in un tubo circolare è laminare.

Il processo di progressivo passaggio da un moto ordinato ad uno disordinato può essere visualizzato in modo efficace tramite un sottile filamento di colorante rilasciato nell'acqua. Come visibile in figura 6.2, fintanto che la corrente si mantiene laminare il filamento di colorante è molto ben definito e si mantiene sottile. Aumentando il numero di Reynolds (ovvero la velocità della corrente), ad un certo punto si osserva l'insorgere di "ondulazioni" del filamento colorato che diventano sempre più complicate al crescere del numero di Reynolds. Questo rimescolamento

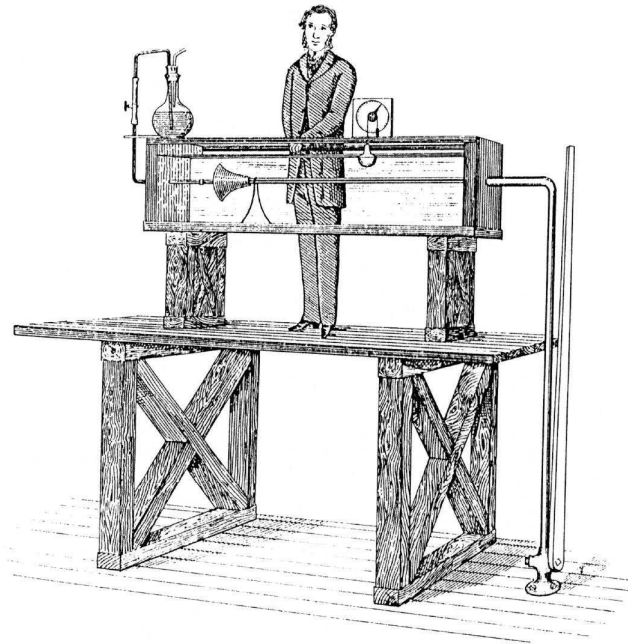


Figura 6.1: Schematizzazione dell'esperimento di Reynolds con il colorante preso dal suo articolo del 1883.

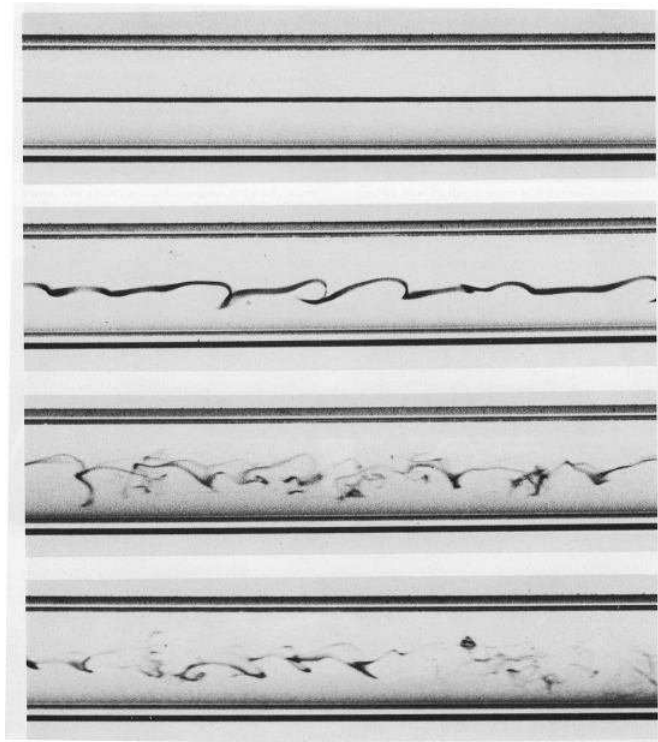


Figura 6.2: Ripetizione dell'esperimento di Reynolds.

causa un aumento dello scambio di quantità di moto tra le molecole che a sua volta fa sì che i gradienti di velocità si attenuino. Sperimentalmente si osserva, infatti, che il profilo di velocità di una corrente turbolenta all'interno di un tubo è molto più uniforme del profilo di una corrente

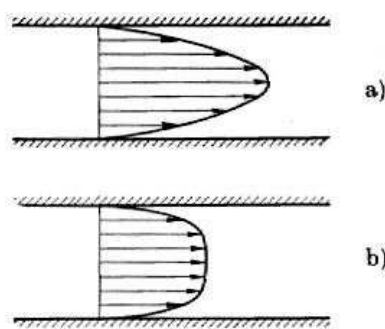


Figura 6.3: Profilo di velocità in un tubo a sezione circolare: a) corrente laminare; b) corrente turbolenta.

laminare, come mostrato in figura 6.3.

In pratica, la *corrente laminare* consiste in un moto molto ordinato delle singole molecole, mentre la *corrente turbolenta*, o *turbolenza*, è la manifestazione macroscopica di un moto delle molecole disordinato, instazionario, imprevedibile, caratterizzato da tridimensionalità e forte rimescolamento, nonché da una grande varietà di scale. Come osservato da Reynolds, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta può dipendere da moltissimi fattori tra cui la rugosità di parete, la trasmissione o meno di calore, vibrazioni, rumore acustico, e altri disturbi.

6.2 La transizione in correnti aperte – lo strato limite

Nonostante storicamente lo studio della transizione da una corrente laminare a una turbolenta sia iniziato con il flusso in un condotto chiuso a sezione circolare, nei primi del '900 si estese allo strato limite, in particolare su lamina piana essendo questo il caso più facile di strato limite. Dai risultati riportati in figura 6.4 si evince che la transizione nello strato limite su lamina piana

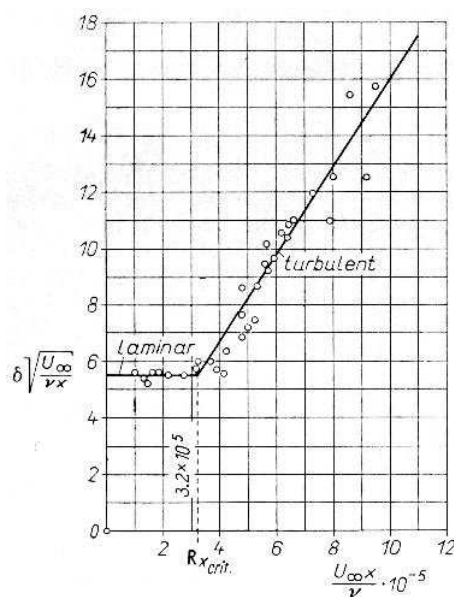


Figura 6.4: Spessore dello strato limite in funzione del numero di Reynolds basato sulla distanza x dal bordo d'attacco per lo strato limite su una lamina piana (Schlichting).

per una corrente incomprimibile avviene a circa

$$\text{Re}_{x,\text{cri}} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)_{\text{cri}} \approx 3.5 \times 10^5,$$

essendo x la distanza dal bordo d'attacco, U la velocità della corrente asintotica e ν la viscosità del fluido. Inoltre, il passaggio allo strato limite turbolento provoca un aumento dello spessore dello strato limite accompagnato da un cambiamento anche del profilo di velocità, come confermato sperimentalmente dai risultati riportati in figura 6.5. Si osserva che, come nel caso della transizione alla turbolenza nel tubo, anche per la lamina piana il profilo di velocità turbolenta è più “pieno” di quello laminare. Questo fatto causa un decremento del fattore di forma

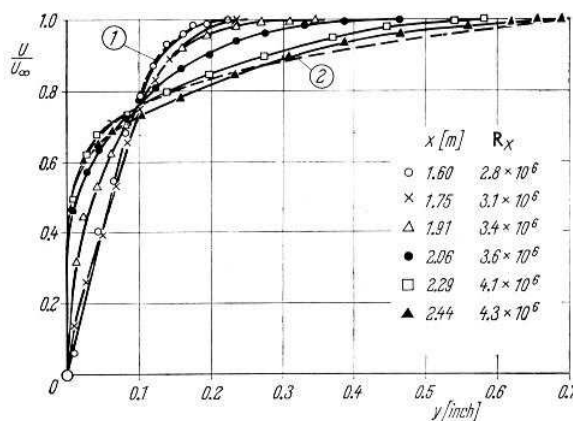


Figura 6.5: Profili di velocità per lo strato limite su lamina piana misurati da Schubauer e Klebanoff (1955). (1) Laminare, profilo di Blasius; (2) Turbolento. (Schlichting).

H (si veda la sezione 5.3.3) che passa da un valore $H_{\text{laminare}} = 2.59$ nel caso laminare ad un valore $H_{\text{turbolento}} \approx 1.5$ in regime turbolento. La ripercussione maggiore del fatto che il profilo di velocità cambia e diventa più “pieno” si ha dal punto di vista ingegneristico. Infatti, come noto dalla sezione 5.2.3, il coefficiente di attrito viscoso dipende dalla derivata della velocità alla parete. Siccome nei profili turbolenti questa derivata è maggiore che nel caso laminare (figura 6.5), la resistenza di attrito viscoso per strati limite turbolenti è maggiore che nel caso laminare. Pertanto, si vorrebbe mantenere la corrente laminare il più possibile su aerei (ali e fusoliere), sommergibili, automobili, e su tutte le macchine che si muovono all’interno di un fluido consumando energia.

Un’altra caratteristica interessante della transizione alla turbolenza, che si riscontra non solo nello strato limite ma anche nella corrente in un condotto come l’esperimento di Reynolds, è il fenomeno dell’*intermittenza*. La figura 6.6 mostra, sempre per gli esperimenti di Schubauer e Klebanoff (1955), che nel caso della lamina piana il processo di transizione è *intermittente* nel senso che in certe regioni irregolari non c’è il passaggio totale alla turbolenza ma si osserva principalmente lo strato limite turbolento alternato a quello laminare. Queste regioni, chiamate *spot turbolenti*, hanno forma più o meno irregolare, ma assimilabile ad una “V”, e appaiono ad intervalli irregolari e in zone distribuite in modo del tutto casuale. Ai bordi di queste regioni caratterizzate da moto turbolento si alternano sia il moto laminare che turbolento.

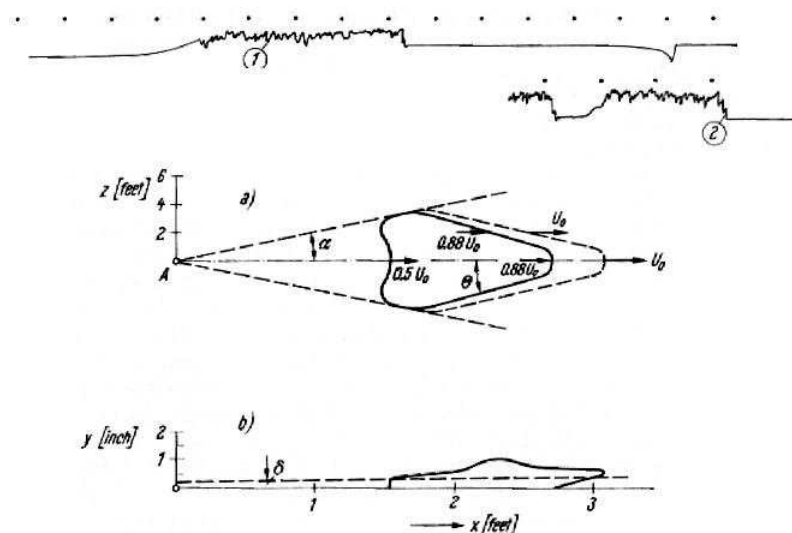


Figura 6.6: Crescita di uno spot turbolento artificiale in uno strato limite su lamina piana ad incidenza nulla, come misurato da Schubauer e Klebanoff (1955). (Schlichting).

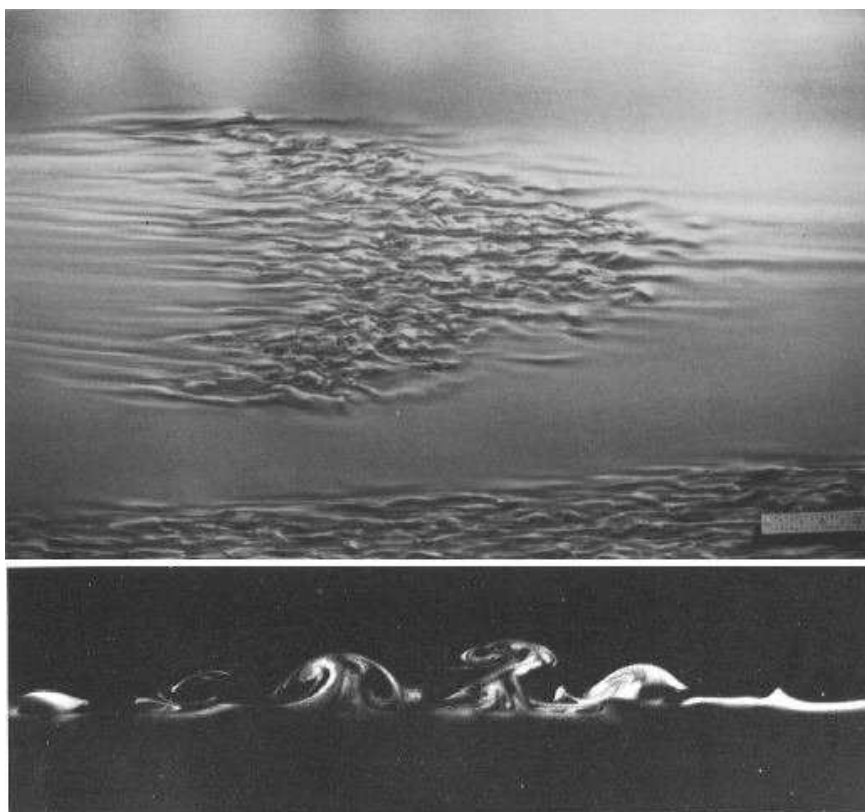


Figura 6.7: Spot turbolento: visione dall'alto, laterale e sezione.

6.3 Stabilità lineare per correnti piane e parallele

Lo scopo dell'analisi di stabilità lineare è di trovare una risposta alla domanda: *come è possibile che una corrente inizialmente laminare diventi turbolenta?*

L'approccio classico alla teoria della stabilità lineare dello strato limite laminare si basa sulla *linearizzazione* delle equazioni di Navier–Stokes nell'intorno di un *flusso base* noto. Una volta ricavate le equazioni per i piccoli disturbi, il flusso base viene detto *stabile* se l'ampiezza dei disturbi rimane limitata, *instabile* altrimenti, ossia se l'ampiezza dei disturbi cresce. La stabilità può essere ulteriormente suddivisa in *stabilità asintotica* (nota anche come *stabilità in senso stretto*) se il disturbo tende a zero, oppure in *stabilità marginale* se il disturbo, pur rimanendo limitato, non sparisce del tutto. Per introdurre l'analisi di stabilità, consideriamo il caso semplice di una corrente incomprimibile a densità costante. Si ricordi che, sotto queste ipotesi, la termodinamica (ovvero l'equazione dell'energia) risulta completamente disaccoppiata dal resto delle equazioni (continuità e conservazione del momento della quantità di moto) pertanto la pressione, che è definita a meno di una costante p_0 , può essere espressa tramite il potenziale termodinamico $\mathcal{P} = (p - p_0)/\rho$. Se indichiamo con

$$\mathcal{U}(x, y, z, t), \quad \mathcal{V}(x, y, z, t), \quad \mathcal{W}(x, y, z, t), \quad \mathcal{P}(x, y, z, t)$$

rispettivamente le tre componenti della velocità e la pressione (intesa come potenziale termodinamico), allora le equazioni di Navier–Stokes nel caso incomprimibile a densità costante diventano

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} \right) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} \right) \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial z^2} \right). \quad (6.4)$$

Consideriamo un flusso base (U, V, W, P) costituito da una corrente bidimensionale, parallela e stazionaria. Indichiamo con $U = U(y)$ la componente di velocità nella direzione della corrente, con $V \equiv 0$ la componente in direzione perpendicolare alla parete e con $W \equiv 0$ la componente trasversale alla corrente. Si osservi che $U = U(y)$ e $V \equiv 0$ per l'ipotesi di corrente parallela, mentre $W \equiv 0$ per l'ipotesi di corrente bidimensionale. Sotto queste ipotesi, le variabili $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{P}$ sono la somma del flusso base (U, V, W, P) e della perturbazione $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ (supposta piccola e dipendente dal tempo):

$$\mathcal{U}(x, y, z, t) = U(y) + \tilde{u}(x, y, z, t), \quad \mathcal{V}(x, y, z, t) = \tilde{v}(x, y, z, t)$$

$$\mathcal{W}(x, y, z, t) = \tilde{w}(x, y, z, t), \quad \mathcal{P}(x, y, z, t) = P(x, y) + \tilde{p}(x, y, z, t).$$

Inserendo queste variabili nelle equazioni di Navier–Stokes, trascurando i termini di second'ordine (ovvero i prodotti delle perturbazioni $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$) e considerando che il flusso base (U, P) è già soluzione delle equazioni di Navier–Stokes, si ottengono facilmente le equazioni linearizzate

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right) \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right). \quad (6.8)$$

Si osservi che nelle equazioni linearizzate sono presenti pochissimi termini grazie alle ipotesi sul flusso base (stazionario, parallelo, bidimensionale). Siccome le equazioni alle derivate parziali (6.5)-(6.8) hanno i coefficienti dipendenti dalla sola y , le soluzioni possono essere espresse come onde del tipo

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (u(y), v(y), w(y), p(y))e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}.$$

Inserendo queste espressioni nelle (6.5)-(6.8) si ottiene il sistema di equazioni

$$i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \quad (6.9)$$

$$-i\omega u + i\alpha U u + U'v = -i\alpha p + \frac{1}{\text{Re}}\Delta u \quad (6.10)$$

$$-i\omega v + i\alpha U v = -p' + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v \quad (6.11)$$

$$-i\omega w + i\alpha U w = -i\beta p + \frac{1}{\text{Re}}\Delta w, \quad (6.12)$$

dove il simbolo Δ denota l'operatore laplaciano

$$\Delta = \frac{d^2}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2),$$

e dove con U' si è indicato dU/dy e analogamente $v' = dv/dy$ e $p' = dp/dy$, essendo tutte funzioni della sola y . Con l'intento di ridurre il numero di incognite da quattro a due, introduciamo la componente della vorticità nella direzione y

$$\eta = i\beta u - i\alpha w \quad (6.13)$$

in modo da riscrivere le equazioni (6.9)-(6.12) nelle sole incognite (η, v) . Osserviamo anzitutto che risolvendo per le variabili (u, w) il sistema formato dalla definizione di η (6.13) e dall'equazione di continuità (6.9), si ottengono immediatamente le espressioni di u e w

$$u = \frac{i(\alpha v' - \beta \eta)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{e} \quad w = \frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (6.14)$$

Moltiplichiamo ora l'equazione (6.10) per $i\beta$ e l'equazione (6.12) per $i\alpha$

$$i(\alpha U - \omega)i\beta u + U'i\beta v = \alpha\beta p + \frac{1}{\text{Re}}\Delta i\beta u$$

$$i(\alpha U - \omega)i\alpha w = \alpha\beta p + \frac{1}{\text{Re}}\Delta i\alpha w,$$

e sottraiamo la seconda dalla prima ottenendo

$$i(\alpha U - \omega)[i\beta u - i\alpha w] + U'i\beta v = \frac{1}{\text{Re}}\Delta[i\beta u - i\alpha w].$$

Usando la definizione di η (si veda l'equazione (6.13)), questa equazione diventa semplicemente

$$i(\alpha U - \omega)\eta + U'i\beta v = \frac{1}{\text{Re}}\Delta\eta. \quad (6.15)$$

Concentrandoci sull'equazione (6.12) e sostituiamo in essa l'espressione (6.14) per w

$$i(\alpha U - \omega)\frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2} = -i\beta p + \frac{i\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\frac{1}{\text{Re}}\Delta\eta + \frac{i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\frac{1}{\text{Re}}\Delta v'.$$

Rimpiazzando in quest'ultima $\Delta\eta/\text{Re}$ con l'espressione ricavata dall'equazione (6.15), semplificando l'unità immaginaria i in tutti i termini e moltiplicandoli per $\alpha^2 + \beta^2$ si ha

$$i(\alpha U - \omega)(\alpha\eta + \beta v') = -\beta(\alpha^2 + \beta^2)p + \alpha[i(\alpha U - \omega)\eta + U'i\beta v] + \beta\frac{1}{\text{Re}}\Delta v',$$

da cui, elidendo il termine $i(\alpha U - \omega)\alpha\eta$ a destra e sinistra e semplificando i rimanenti termini per β , si ottiene

$$i(\alpha U - \omega)v' = -(\alpha^2 + \beta^2)p + i\alpha U'v + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v'. \quad (6.16)$$

Si osservi che questa equazione contiene le incognite p e v , così come l'equazione (6.11), mentre l'idea originaria era di riscrivere il sistema di equazioni (6.9)-(6.12) nelle sole incognite (η, v) . La pressione p può essere facilmente eliminata sia dalla (6.11) che dalla (6.16) sommando le equazioni ottenute moltiplicando la (6.11) per $-(\alpha^2 + \beta^2)$ e derivando la (6.16) rispetto a y . Così facendo si hanno le due equazioni

$$\begin{aligned} -i(\alpha U - \omega)(\alpha^2 + \beta^2)v &= (\alpha^2 + \beta^2)p' - (\alpha^2 + \beta^2)\frac{1}{\text{Re}}\Delta v \\ i\alpha U'v' + i(\alpha U - \omega)v'' &= -(\alpha^2 + \beta^2)p' + i\alpha U''v + i\alpha U'v' + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v'', \end{aligned}$$

che sommate danno, dopo aver eliso $i\alpha U'v'$ a destra e sinistra della seconda,

$$i(\alpha U - \omega)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] = i\alpha U''v + \frac{1}{\text{Re}}\Delta[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v].$$

Dopo aver osservato che $v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v = \Delta v$, questa equazione può essere riscritta in modo compatto come

$$i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v, \quad (6.17)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del quart'ordine e omogenea per la sola incognita v . Essa fu derivata indipendentemente da Orr (1907) e Sommerfeld (1908) e per questa ragione prende il nome di *equazione di Orr-Sommerfeld*. Le opportune condizioni al contorno ad essa associate richiedono che la perturbazione si annulli agli estremi del dominio:

$$\begin{array}{ll} v(\pm h) = v'(\pm h) = 0 & \text{correnti in condotti} \\ v(0) = v'(0) = 0; \quad v(\infty) = v'(\infty) = 0 & \text{strati limite} \\ v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0 & \text{free shear layers.} \end{array}$$

In conclusione, il sistema di equazioni lineari (6.9)-(6.12) nelle incognite (u, v, w, p) è stato ricondotto alle sole equazioni (6.15) e (6.17) nelle incognite (η, v) , ovvero i due sistemi

$$\begin{cases} i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \\ i(\alpha U - \omega)u + U'v = -i\alpha p + \text{Re}^{-1}\Delta u \\ i(\alpha U - \omega)v = -p' + \text{Re}^{-1}\Delta v \\ i(\alpha U - \omega)w = -i\beta p + \text{Re}^{-1}\Delta w \end{cases} \quad (6.18)$$

e

$$\begin{cases} i(\alpha U - \omega)\eta + i\beta U'v = \text{Re}^{-1}\Delta\eta \\ i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v \end{cases} \quad (6.19)$$

sono del tutto equivalenti. Si osservi che le condizioni al contorno per η in presenza di pareti solide sono omogenee ($\eta = 0$) a seguito della definizione di η . Una possibile strategia di soluzione

del problema (6.19) consiste nel risolvere dapprima la seconda equazione ottenendo v e poi sostituirla nella prima per ottenere η . Dal momento che sia l'equazione di Orr-Sommerfeld (che è nella sola incognita v) sia le condizioni al contorno per v sono omogenee, risolvere la seconda equazione del problema (6.19) equivale a risolvere un problema agli autovalori dal quale si deriva una relazione di dispersione del tipo

$$D(\alpha, \beta, \omega, \text{Re}) = 0.$$

Se si considera la stabilità temporale, allora α, β e Re sono fissati e reali, mentre ω è complesso e la sua parte immaginaria fornisce il tasso di crescita temporale; per la stabilità spaziale ω e Re sono fissati e reali, mentre (a β fissato) la parte immaginaria di α (o la parte immaginaria di β se α è fissato) fornisce la crescita spaziale. La soluzione $v(y)$ è detta autofunzione.

Nel caso di disturbo bidimensionale, si ha $\beta = 0$ e $w = 0$; pertanto $\eta \equiv 0$ ed è quindi necessario risolvere la sola equazione di Orr-Sommerfeld (6.17). Anche se storicamente i primi disturbi ad essere studiati furono bidimensionali, la (6.17) governa anche quelli tridimensionali. Infine, sempre nel caso bidimensionale, anziché utilizzare le variabili primitive \tilde{u} e \tilde{v} si può introdurre la funzione di corrente $\tilde{\psi} = \psi(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$ tale che

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}_y = \psi' e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad \text{e} \quad \tilde{v} = -\tilde{\psi}_x = -i\alpha\psi e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)},$$

che significa che $\psi(y)$ soddisfa la stessa equazione di $v(y)$ (l'equazione di Orr-Sommerfeld (6.17)) essendo $v(y) = -i\alpha\psi(y)$. L'analisi di stabilità permette di ricavare le curve di stabilità neutra, ovvero (nel caso di disturbo bidimensionale con $\beta = w = 0$) il luogo dei punti del piano $\text{Re}-\alpha$ oppure $\text{Re}-\omega$ per i quali la crescita è nulla, come quelle riportate in figura 6.8.

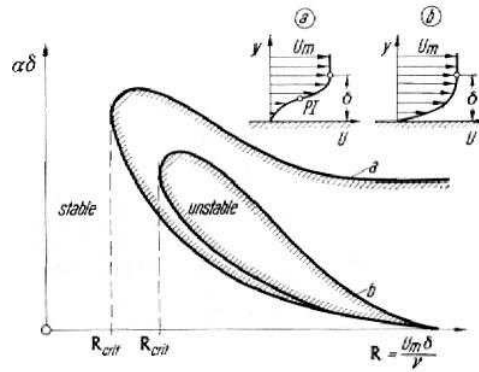


Figura 6.8: Curva di stabilità neutra nel caso di analisi spaziale. (a) flusso base con punto di flesso (instabilità non viscosa); (b) flusso base di strato limite su lamina piana o accelerante (instabilità viscosa). Si notino le diverse regioni di stabilità all'esterno e di instabilità all'interno dipendentemente dal tipo di stabilità (viscosa o non viscosa) considerata (Schlichting).

6.3.1 Teorema di Squire

Per semplicità consideriamo la stabilità temporale, ovvero α, β e Re sono noti e reali, mentre ω non è noto ed è complesso. I modi del problema (6.19) sono di due tipi:

- i modi dell'equazione di Orr-Sommerfeld (la seconda delle (6.19)), per la quale le autofunzioni v e gli autovalori ω possono essere determinati indipendentemente dalla prima equazione e la η di conseguenza, risolvendo la prima equazione

- i modi propri della prima equazione *omogenea*, ovvero

$$i(\alpha U - \omega)\eta - \text{Re}^{-1}\Delta\eta = 0.$$

In realtà, ai fini della stabilità, basta studiare la sola equazione di Orr-Sommerfeld in quanto i modi propri di η sono sempre stabili. Per dimostrarlo riscriviamo l'equazione omogenea per η esplicitando l'operatore laplaciano $\Delta = (\cdot)_{yy} - (\alpha^2 + \beta^2)$, moltiplicandola per η^* , il complesso coniugato di η , ed integrandola su tutto l'intervallo di definizione della variabile y (sia esso finito o infinito). Così facendo si ottiene

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} i\alpha U \eta^* \eta \, dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} i\omega \eta^* \eta \, dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Re}^{-1} \eta^* \eta'' \, dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \eta^* \eta \, dy = 0.$$

Facendo uso del fatto che, a causa delle condizioni al contorno omogenee per η , anche η^* si annulla agli estremi dell'intervallo $[y_{\min}; y_{\max}]$, l'integrazione per parti del termine $\eta^* \eta''$ si riduce a

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta^* \eta'' \, dy = [\eta^* \eta']_{y_{\min}}^{y_{\max}} - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta'^* \eta' \, dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta'^* \eta' \, dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 \, dy,$$

l'equazione precedente può essere riscritta come

$$i\alpha \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} U |\eta|^2 \, dy - i\omega \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 \, dy + \text{Re}^{-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 \, dy + \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 \, dy = 0.$$

Siccome α , β e Re sono reali, prendendo la parte reale di questa equazione si ottiene

$$\text{Im}(\omega) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 \, dy + \text{Re}^{-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 \, dy + \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 \, dy = 0,$$

da cui

$$\text{Im}(\omega) = -\text{Re}^{-1} \left[\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 \, dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 \, dy} \right] < 0.$$

Siccome la parte immaginaria dell'autovalore ω è sempre negativa, i modi propri dell'equazione omogenea per η sono sempre stabili. Pertanto, *l'eventuale instabilità del problema (6.19) può essere causata esclusivamente dai modi instabili dell'equazione di Orr-Sommerfeld*. Per quanto riguarda i modi di quest'ultima, si osservi che dividendo tutti i termini per $i\alpha$ si ha

$$(U - c)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] - U''v = \frac{1}{i\alpha \text{Re}}[v'''' - 2(\alpha^2 + \beta^2)v'' + (\alpha^2 + \beta^2)^2 v], \quad (6.20)$$

essendo $c = \omega/\alpha$. Si osservi che gli unici parametri che compaiono in essa sono il quadrato del numero d'onda $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ e $i\alpha \text{Re}$. Pertanto, se un certo valore di $\alpha \text{Re} = a$ causa la prima instabilità temporale (ovvero il primo passaggio di $\text{Im}(\omega)$ da negativa a positiva) e ad esso corrisponde un certo valore di $\alpha^2 + \beta^2 = b^2$, allora il numero di Reynolds più piccolo al quale questo succede si ha in corrispondenza del massimo valore di α ($\text{Re} = a/\alpha$). Tuttavia, se $\alpha^2 + \beta^2$ è fissato, il massimo valore di α si ha proprio in corrispondenza di $\beta = 0$. Questo significa che, a parità di altri parametri, la prima instabilità di un flusso base piano e parallelo si verifica ad un numero di Reynolds più basso se il disturbo è bidimensionale ($\beta = 0$). Pertanto, il caso più limitante è quello bidimensionale e d'ora in poi assumeremo $\beta = 0$.

6.3.2 Stabilità non viscosa

Nel caso limite $\nu \rightarrow 0$, ovvero $\text{Re} \rightarrow \infty$, l'equazione di Orr-Sommerfeld (6.20) si semplifica e prende il nome di equazione di Rayleigh, che è del second'ordine e quindi richiede solo due condizioni al bordo:

$$(U - c)[v'' - \alpha^2 v] - U''v = 0,$$

dove $c = \omega/\alpha$ è la velocità di fase (si noti che $\beta = 0$ perché il caso di disturbo bidimensionale è più limitante). Siccome questa equazione è stata ricavata per il caso limite $\text{Re} \rightarrow \infty$, essa fornisce preziose informazioni per *correnti ad alto numero di Reynolds*. Dividendo tutti i termini per $(U - c)$, moltiplicando per v^* (l'autofunzione complessa coniugata di v) ed integrando sull'intervallo di definizione della variabile y (sia esso finito o infinito), si ha

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^* v'' dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \alpha^2 v^* v dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{U - c} v^* v dy = 0.$$

Osservando che v^* si annulla agli estremi del dominio, integrando per parti il termine $v^* v''$ si ottiene

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^* v'' dy = [v^* v']_{y_{\min}}^{y_{\max}} - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v'^* v' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v'^* v' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |v'|^2 dy,$$

per cui l'equazione di Rayleigh in forma integrale, dopo aver cambiato di segno, diventa

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |v'|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \alpha^2 |v|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{U - c} |v|^2 dy = 0.$$

Essendo ω complesso, lo è anche la velocità di fase $c = c_r + ic_i$ per cui la predente equazione può essere scritta, dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore dell'ultima funzione integranda per $(U - c_r) + ic_i$,

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{ic_i U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0.$$

Separando la parte reale e quella immaginaria di questa equazione si ha

$$\text{parte reale:} \quad \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0 \quad (6.21)$$

$$\text{parte immaginaria:} \quad c_i \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0. \quad (6.22)$$

Si osservi che nell'integrale della condizione (6.22) U'' è moltiplicato per la quantità $|v|^2/[(U - c_r)^2 + c_i^2]$ che è sempre positiva tranne nel caso banale $v \equiv 0$. Pertanto, se U'' non cambia segno, ovvero se il profilo di velocità del flusso base non presenta flessi, la condizione (6.22) è soddisfatta solo per $c_i = 0$, nel qual caso il flusso base è stabile. Viceversa, affinché il flusso base sia instabile è *necessario* che il profilo di velocità abbia un punto di flesso ad una certa distanza dalla parete che chiamiamo y_{ip} . Fjortof nel 1950 osservò che in realtà, affinché vi sia instabilità viscosa, oltre alla condizione necessaria $U''(y_{ip}) = 0$, è ulteriormente necessario che lo shear $|U'|$ abbia un massimo nel punto di flesso y_{ip} . Fjortof trovò anche un'altra condizione, di seguito riportata, ma tutte queste sono praticamente sempre soddisfatte nei casi di interesse quando il profilo di velocità ha un punto di flesso.

Le conclusioni più importanti sono riassunte nei seguenti cinque teoremi:

Teorema 1 [Rayleigh (1880)] Per l'instabilità non viscosa è *necessario* che il profilo di velocità del flusso base $U(y)$ abbia un punto di flesso. Chiamiamo y_{ip} la distanza dalla parete dove questo avviene, ovvero $U''(y_{ip}) = 0$ (si veda la figura 6.8, caso (a)).

Teorema 2 [Fjørtoft (1950)] Per l'instabilità di tipo non viscoso è *necessario* che lo shear $|U'|$ abbia un massimo nel punto di flesso y_{ip} .

Teorema 3 [Fjørtoft (1950)] Se esiste un punto di flesso del profilo di velocità del flusso base, allora per l'instabilità non viscosa è ulteriormente *necessario* che $U''(U - U(y_{ip})) = 0$ da qualche parte nel profilo.

Teorema 4 [Lin (1945)] Sia y_c la distanza dalla parete alla quale si ha $U - c = 0$. Se $U(y)$ ha un punto di flesso in $y = y_c$, allora ci può essere un disturbo neutro ($c_i = 0$) la cui velocità di fase è $c_r = U(y_c)$.

Teorema 5 [Rayleigh (1880)] La velocità di fase c_r di un disturbo amplificato deve essere compresa tra i valori minimo e massimo del profilo di velocità $U(y)$.

La conseguenza più importante di questi teoremi è che i profili di velocità con punti di flesso sono instabili ad alti numeri di Reynolds (limite $\nu \rightarrow 0$). Pertanto, profili deceleranti possono portare rapidamente alla transizione. Il teorema 1 ha prodotto nel corso degli anni una certa confusione in quanto si credeva che un profilo senza punto di flesso, come quello di Blasius, fosse stabile rispetto ai piccoli disturbi. Nel 1921 Prandtl mostrò che l'effetto della viscosità può essere destabilizzante per certi numeri d'onda α e numeri di Reynolds finiti. Questo fu verificato nel 1929 grazie ai calcoli di Tollmien per il profilo di Blasius e definitivamente confermato negli anni '40 dai celeberrimi esperimenti di Schubauer e Skramstad per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla in una galleria del vento a basso livello di turbolenza (si veda, in seguito, la figura 6.9).

6.3.3 Stabilità viscosa

Se si considera anche la parte viscosa, l'equazione completa di Orr-Sommerfeld è

$$i [(\alpha U - \omega)(v'' - \alpha^2 v) - \alpha U''v] = \text{Re}^{-1} ((\cdot)_y - \alpha^2)^2 v.$$

Il flusso base può essere uno qualsiasi purché parallelo (Poiseuille, Couette o Blasius); qui consideriamo lo strato limite di Blasius su lamina piana. In questo caso la perturbazione prende il nome di onde di Tollmien-Schlichting; la curva neutra, come prima, si ottiene dall'equazione di Orr-Sommerfeld sostituendo l'opportuno flusso base (quello di Blasius). Il confronto tra la teoria lineare e gli esperimenti per il caso di stabilità spaziale è riportato in figura 6.9.

Alcune caratteristiche delle onde di Tollmien-Schlichting per lo strato limite di Blasius nel caso spaziale sono: il minimo numero di Reynolds critico è $\text{Re}_{cr} = 520$ oppure $\text{Re}_x = 91000$ dove $\text{Re}_x = U_e x / \nu$ e $R = \sqrt{\text{Re}_x}$. A Re_{cr} (primo punto neutro) le caratteristiche dell'onda sono $\alpha \delta^* = 0.3012$ (δ^* è lo spessore di spostamento), $\omega / \alpha_r = 0.3961 U_e$ e $\omega \nu / U_e^2 = 2.29 \cdot 10^{-4}$. Il numero d'onda massimo dell'onda instabile è $\alpha \delta^* = 0.35$, per cui la lunghezza d'onda minima è $\lambda_{min} = 2\pi \delta^* / 0.35 \approx 18 \delta^* \approx 6 \delta$ ($\delta = \sqrt{x \nu / U_e}$). Pertanto le onde di Tollmien-Schlichting sono onde lunghe rispetto allo spessore di strato limite. Infine, la velocità di fase massima è $\omega / \alpha_r \approx 0.4 U_e$, il che significa che le onde di Tollmien-Schlichting viaggiano piuttosto lentamente e sorgono in vicinanza della parete.

È importante sottolineare il fatto che il numero di Reynolds critico previsto dalla teoria non è il punto di transizione alla turbolenza, in quanto $\text{Re}_{tr} \approx 3 \cdot 10^6$, ovvero la transizione avviene ad un numero di Reynolds che è circa 30 volte quello critico.

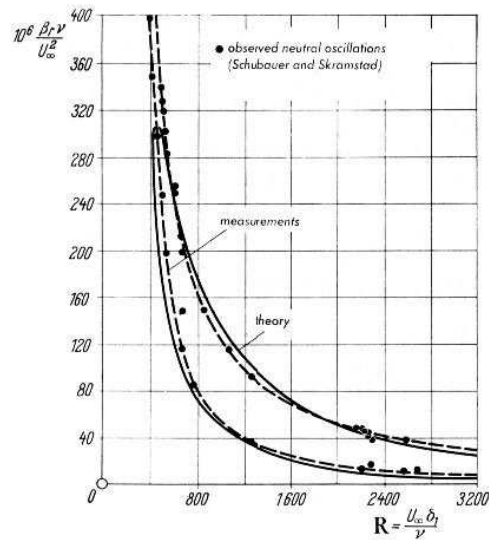


Figura 6.9: Curva di stabilità neutra per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla. Confronto tra: dati sperimentali (●), esperimenti di Schubauer e Skramstad (1947), e curva teorica (linea continua) di Tollmien (1929). (Schlichting).

6.3.4 Curve di stabilità neutra

6.4 Stabilità lineare per correnti piane non parallele

Capitolo 7

La turbolenza

La turbolenza è probabilmente l'ultimo problema irrisolto della fisica classica. Si racconta che fu chiesto ad Heisenberg, sul letto di morte, che cosa avrebbe chiesto a Dio se ne avesse avuto la possibilità. La sua risposta fu “Quando incontrerò Dio gli farò due domande: perché la relatività e perché la turbolenza. Credo proprio che Egli avrà una risposta per la prima”. In realtà, aneddoti di questo tipo sono stati attribuiti a diversi scienziati famosi, tra cui Horace Lamb, per cui sono poco credibili; tuttavia rendono conto del fatto che molti scienziati di grosso calibro si sono dedicati allo studio della turbolenza senza riuscire nel loro sforzo.

7.1 Caratteristiche fenomenologiche di una corrente turbolenta

La turbolenza ha da sempre appassionato il genere umano in quanto è costantemente presente nella vita di tutti i giorni. Solo per citare alcuni esempi, l'intrecciarsi di vortici dovuti allo scorrere dell'acqua in un fiume o, meglio ancora, in un torrente, gli zampilli delle fontane, i disegni creati dal fumo di una sigaretta, gli scherzi provocati dal vento, la scia dietro una nave o più semplicemente dietro un pilone di un ponte a seguito del passaggio dell'acqua, il rimescolamento dovuto ad un getto, la nuvola di fumi e polveri a seguito di un'esplosione/eruzione vulcanica, ecc.

Da un punto di vista sperimentale si può chiamare *corrente laminare* il moto di un fluido in cui le caratteristiche macroscopiche quali velocità e proprietà termofisiche del fluido in ogni punto e in ogni istante sono completamente determinate dall'ambiente, ovvero si ripetono uguali ogni volta che si ripete l'esperimento nelle medesime condizioni. Se questo non accade, il moto viene detto turbolento, per cui una *corrente turbolenta* è il moto di un fluido caratterizzato da elementi di casualità nella distribuzione spaziale e temporale delle proprietà macroscopiche (velocità, pressione, temperatura). Chiaramente, se l'esperimento potesse essere *ripetuto esattamente*, per esempio arrivando a fissare la posizione di ciascuna molecola in modo da riprodurre esattamente sia le condizioni al contorno che quelle iniziali, il fenomeno fisico si ripeterebbe identico.

Dal punto di vista matematico, il concetto di turbolenza si identifica con quello di *comportamento caotico* delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes. Si osservi che le correnti turbolente possono essere descritte tramite le equazioni della meccanica dei continui perché l'irregolarità che caratterizza tali correnti non si estende a scale di lunghezza così piccole da mettere in crisi l'ipotesi del continuo.

Come si sarà intuito, una definizione rigorosa di turbolenza non è semplice; tuttavia si pos-

sono identificare facilmente alcune caratteristiche tipiche di una corrente turbolenta di seguito elencate.

- **Instazionarietà.** Velocità, pressione, temperatura, densità e concentrazioni dipendono fortemente dal tempo e queste fluttuazioni di tutte le variabili fisiche si osservano su un'ampia banda di frequenze, anche nel caso di condizioni al contorno stazionarie.
- **Apparente casualità.** La turbolenza è caratterizzata da forte sensibilità alle condizioni iniziali, tanto maggiore quanto più grande è il numero di Reynolds. Questo comportamento, tipico di sistemi caotici, si traduce in un'apparente casualità ed ha come diretta conseguenza il fatto che studiare la turbolenza con metodi esclusivamente deterministici non può avere successo.
- **Vorticità e tridimensionalità.** A seguito di fluttuazioni di velocità, la turbolenza è caratterizzata da fluttuazioni di vorticità, la cui dinamica è descritta, per il caso incomprimibile $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dall'equazione

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (7.1)$$

Si osservi che le fluttuazioni di vorticità non potrebbero autosostenersi se venisse a mancare il termine di “stretching and tilting” $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ in (7.1) (si veda anche l'equazione (3.3) per il caso generale incomprimibile). Siccome esso è nullo nel caso bidimensionale e per essere diverso da zero la corrente deve come minimo essere tridimensionale, la turbolenza è necessariamente tridimensionale. In applicazioni geofisiche si parla di turbolenza bidimensionale, ma questo non è corretto.

- **Dissipazione.** La viscosità causa un aumento dell'energia interna del fluido a scapito dell'energia cinetica della corrente. Pertanto, la turbolenza richiede un continuo supporto di energia proveniente dal moto medio in modo da rimpiazzare le perdite dovute alla dissipazione viscosa. Se tale supporto di energia non ci fosse, la turbolenza si esaurirebbe velocemente.
- **Rimescolamento.** Densità, velocità, temperatura, quantità di moto, energia, concentrazioni, ecc. sono tutte grandezze fisiche che subiscono un forte rimescolamento nel caso di corrente turbolenta, che risulta decisamente superiore a quello puramente molecolare. Non a caso, per raffreddare una minestra o un thè si soffia in modo da favorire lo scambio di calore. Si osservi che il rimescolamento turbolento permette la diffusione degli inquinanti e dei veleni nell'atmosfera (se rimanessero tutti in superficie, probabilmente ci saremmo già estinti).
- **Ampia gamma di scale.** Le correnti turbolente coinvolgono una gamma di scale di lunghezza (e di tempo) che si estende fino alle dimensioni dell'intero sistema. Le grandi scale sono dettate dalla geometria e per esse gli effetti della viscosità sono trascurabili; le piccole scale sono dettate dalla viscosità che gioca in esse un ruolo fondamentale. Pertanto, una corretta modellizzazione della turbolenza richiede da un lato elementi statistici in grado di descrivere le piccole scale universali, dall'altro elementi deterministici con i quali descrivere le scale più grandi, direttamente legate al particolare problema considerato (geometria, condizioni iniziali e al contorno, ecc.).
- **Continuo.** Nonostante la turbolenza sia caratterizzata dalla presenza di molte scale, quelle più piccole sono comunque maggiori del libero cammino medio. Pertanto valgono le

ipotesi del continuo e le equazioni di Navier-Stokes possono essere utilizzate per predire, nei limiti della loro forte sensibilità alle condizioni iniziali, l'evoluzione di una corrente turbolenta.

- **Corrente non fluido.** La turbolenza è una proprietà della *corrente* non del fluido nel quale la corrente si esplica.

Ovviamente, instazionarietà, tridimensionalità e vorticità *possono* essere presenti anche in correnti laminari; tuttavia in una corrente turbolenta esse *devono* essere presenti.

Vista la complessità che contraddistingue la turbolenza, una domanda sorge spontanea: perché studiarla? La risposta è piuttosto laconica: non si conoscono, allo stato attuale della ricerca, soluzioni generali per le equazioni di Navier-Stokes. Esistono soluzioni particolari per il caso laminare, come visto nel capitolo 4, ma esse non sono di aiuto per capire il comportamento di correnti turbolente. La forte nonlinearietà associata alle equazioni le rende piuttosto intrattabili dal punto di vista matematico e questa mancanza di strumenti si traduce in senso di frustrazione da una parte e senso di sfida dall'altro. Si ricordi che la turbolenza rimane uno dei principali problemi irrisolti della fisica e che una maggior comprensione di tale fenomeno avrebbe notevoli ricadute tecnologiche ed economiche. Si pensi, ad esempio, al risparmio che si avrebbe se si potesse mantenere laminare la corrente attorno ad un aereo che vola per dodici ore considerato che metà del peso al decollo è dato dal carburante.

Tra gli innumerevoli settori tecnologici in cui compare la turbolenza ricordiamo i processi di combustione, i condotti per il trasporto di gas/petrolio, lo strato limite su ali/fusoliere di aerei, automobili, treni e sottomarini, le scie dietro i mezzi di trasporto (in particolare autocarri), il comportamento del sangue in arterie/vene, lo studio di aneurismi cerebrali, la diffusione di spray e aerosol, applicazioni in geofisica (jet streams, corrente del Golfo, correnti oceaniche), applicazioni in astrofisica (turbolenza nelle stelle, nuvole di gas interstellare e galassie gassose), ecc.

7.2 Scale turbolente

7.2.1 Cascata di energia

Consideriamo una corrente turbolenta ed identifichiamo in essa una lunghezza caratteristica delle strutture turbolente più grandi, che indichiamo con ℓ_0 , ed una velocità tipica delle strutture turbolente più grandi che indichiamo con u_0 . È ragionevole pensare che queste due scale siano dell'ordine della geometria che caratterizza la corrente media: per esempio, per una corrente turbolenta in un tubo, ℓ_0 è dell'ordine del diametro e u_0 dell'ordine della velocità media ottenuta dividendo la portata in massa per la sezione del tubo e per la densità del fluido. Allora possiamo definire il numero di Reynolds basato su ℓ_0 e u_0

$$\text{Re} = \frac{u_0 \ell_0}{\nu}$$

ed una scala dei tempi

$$\tau_0 = \frac{\ell_0}{u_0}.$$

Un'altra scala dei tempi è quella legata alla diffusione viscosa, che possiamo ricavare dall'equazione di diffusione monodimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che porta a

$$\frac{u_0}{\tau_\nu} \sim \nu \frac{u_0}{\ell_0^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_\nu \sim \frac{\ell_0^2}{\nu} = \tau_0 \text{Re}.$$

In pratica, essendo le correnti turbolente caratterizzate da alti numeri di Reynolds, il tempo di diffusione viscosa è enormemente maggiore di quello tipico della corrente media, per cui sembrerebbe che la diffusione viscosa fosse del tutto irrilevante ai fini dello studio della dinamica della turbolenza. Nel 1922 Richardson, sotto l'ipotesi di turbolenza *localmente isotropa*, congetturò

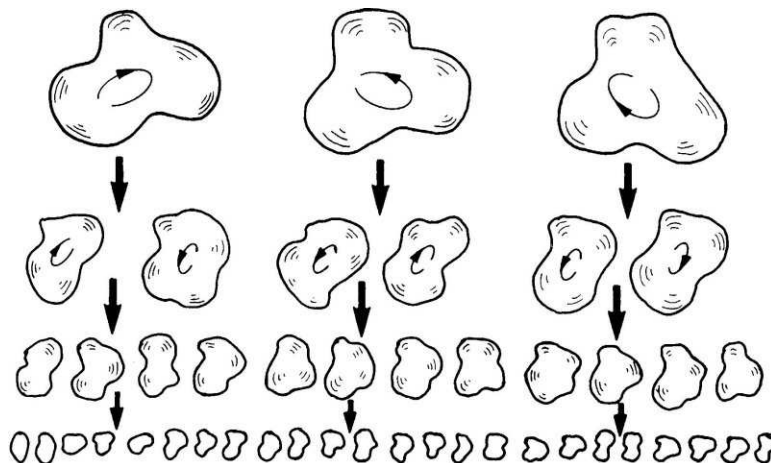


Figura 7.1: Instabilità successive delle strutture turbolente fino ad arrivare alle piccole scale dove la viscosità gioca un ruolo fondamentale.

che le strutture turbolente (i vortici) che si sono formate a seguito del processo di transizione, e che hanno le dimensioni tipiche della geometria ℓ_0 del campo di moto e tempi caratteristici dell'ordine di τ_0 , subiscano esse stesse un'instabilità causata da forti non linearità dando origine a strutture più piccole caratterizzate da numeri di Reynolds più piccoli, come mostrato in figura 7.1. Se le dimensioni delle nuove strutture turbolente sono tali per cui il tempo di diffusione viscosa è ancora trascurabile ($\tau_\nu \ll \tau_0$), il processo di instabilità si ripete in modo ricorsivo fino a quando le strutture che si formano raggiungono scale tali da assicurare il ruolo della *viscosità* nella dinamica della turbolenza. Effettivamente, questo è del tutto coerente con il fatto che la turbolenza ha come caratteristica fondamentale la *diffusione* e quest'ultima è strettamente legata agli effetti della viscosità. Le strutture grandi (quelle di dimensioni dell'ordine di ℓ_0) prelevano energia cinetica dal moto medio e la trasferiscono a quelle più piccole le quali a loro volta le trasferiscono a quelle più piccole fino a raggiungere le strutture a livello delle quali la viscosità del fluido gioca un ruolo importante. Richardson sintetizzò queste idee nei versi

*“Big whirls have little whirls,
which feed on their velocity,
and little whirls have lesser whirls,
and so on to viscosity”.*

L'energia associata alle strutture più piccole, che sono stabili, non può essere trasferita a scale ancora più piccole (che non esistono), e viene quindi dissipata sotto forma di calore. Le scale che dissipano l'energia turbolenta sotto forma di calore sono dette *scale di Kolmogorov* o *microscale* e la loro lunghezza caratteristica si indica con η (di conseguenza le velocità caratteristiche su questa scala si indicano con u_η e i tempi caratteristici con $\tau_\eta = \eta/u_\eta$). Per contro, le *scale*

energetiche o *grandi scale* sono quelle dell'ordine di ℓ_0 . Si osservi che a livello delle scale di Kolmogorov, siccome la viscosità gioca un ruolo rilevante, τ_ν è dell'ordine di τ_0 , ma siccome $\tau_\nu \sim \tau_0 \text{Re}$, si ha che il numero di Reynolds basato sulle microscale deve essere dell'ordine di 1:

$$\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim 1. \quad (7.2)$$

7.2.2 La teoria di Kolmogorov

Nel 1941 Kolmogorov pubblicò, in un lavoro fondamentale, la sua teoria nell'ipotesi di turbolenza in equilibrio in grado di dar conto delle scale alle quali avviene la dissipazione viscosa. Tre sono le ipotesi fondamentali alla base di tale teoria:

- **Ipotesi di isotropia locale:** per numeri di Reynolds sufficientemente alti, i moti turbolenti di piccola scala sono statisticamente isotropi, ossia non dipendono dalla particolare direzione. Questo discende dall'idea di Richardson delle instabilità successive, schematizzata in figura 7.1, le quali distruggono rapidamente l'informazione relativa alla geometria del campo di moto e del flusso medio, che può anche essere non isotropo.
- **Prima ipotesi di similarità:** in ogni flusso turbolento, a numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti di piccola scala sono universali e determinate unicamente dalla viscosità ν e dalla velocità di dissipazione per unità di massa ϵ (pertanto ϵ ha le dimensioni di una potenza per unità di massa). Sotto questa ipotesi è possibile legare la scala delle lunghezze η in modo univoco a ν e ϵ . Siccome le dimensioni di ν sono quelle di una velocità per una lunghezza (si pensi al numero di Reynolds che è adimensionale), ovvero quelle di una lunghezza al quadrato diviso un tempo ($[\nu] = L^2 T^{-1}$) e quelle della dissipazione energetica sono una potenza per unità di massa ovvero una velocità al quadrato diviso per un tempo ($[\epsilon] = L^2 T^{-3}$), imponendo che η si possa esprimere solo tramite ν e ϵ , dall'analisi dimensionale si ricava

$$[\eta] = [\nu]^\alpha [\epsilon]^\beta = (L^2 T^{-1})^\alpha (L^2 T^{-3})^\beta = L^{2\alpha} T^{-\alpha} L^{2\beta} T^{-3\beta} = L^{2\alpha+2\beta} T^{-\alpha-3\beta}.$$

Tuttavia, essendo η una lunghezza, deve essere

$$L^{2\alpha+2\beta} T^{-\alpha-3\beta} = L \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4}, \beta = -\frac{1}{4},$$

ovvero

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Analogamente, si ottengono le scale di velocità e dei tempi

$$u_\eta \propto (\epsilon \nu)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_\eta \propto \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si osservi che il numero di Reynolds basato su queste scale risulta

$$\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim \frac{(\epsilon \nu)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}}{\nu} = 1,$$

il che conferma quanto scritto nell'equazione (7.2) ottenuta basandosi unicamente sulle congetture di Richardson.

Si osservi che la produzione \mathcal{P} di energia turbolenta per unità di massa nell'unità di tempo proviene dal moto medio e sarà quindi dell'ordine dell'energia cinetica per unità di massa del moto medio u_0^2 divisa per il tempo caratteristico del moto medio $\tau_0 = \ell_0/u_0$. Pertanto,

$$\mathcal{P} \sim \frac{u_0^2}{\tau_0} = \frac{u_0^3}{\ell_0}.$$

Questa potenza per unità di massa deve avere lo stesso ordine di grandezza della dissipazione viscosa ϵ che si verifica sulle microscale. Si ha quindi

$$\epsilon \sim \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

per cui la scala η può essere riscritta come

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu^3 \ell_0}{u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \left(\frac{\nu^3 \ell_0}{\ell_0^4 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \left(\frac{\nu^3}{\ell_0^3 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \text{Re}^{-3/4},$$

da cui

$$\frac{\eta}{\ell_0} \propto \text{Re}^{-3/4}. \quad (7.3)$$

Allo stesso modo si ottiene

$$\frac{u_\eta}{u_0} \propto \text{Re}^{-1/4} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \propto \text{Re}^{-1/2}. \quad (7.4)$$

- **Seconda ipotesi di similarità:** in ogni flusso turbolento a numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti su scala ℓ , tale che $\eta < \ell < \ell_0$, sono universali e dipendono unicamente da ϵ e ℓ , indipendentemente da ν . In pratica, su questa scala intermedia detta *scala inerziale*, l'unico parametro che conta è la dissipazione energetica ϵ . Utilizzando, come fatto in precedenza, l'analisi dimensionale per determinare la dipendenza della velocità caratteristica u_ℓ e del tempo caratteristico τ_ℓ , si ha

$$u_\ell \propto (\epsilon \ell)^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau_\ell \propto \left(\frac{\ell^2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Osservando, come fatto nel caso della scala η , che

$$\epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

si ha

$$\frac{u_\ell}{u_0} \propto \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_\ell}{\tau_0} \propto \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Se introduciamo il numero d'onda $k = 2\pi/\ell$ ed indichiamo con $E(k)$ l'energia cinetica turbolenta per unità di massa ed unità di numero d'onda, ovvero il suo integrale nello spazio dei numeri d'onda dà l'energia cinetica per unità di massa

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 = \int_0^\infty E(k) dk,$$

allora attraverso la semplice analisi dimensionale è possibile determinare la dipendenza di $E(k)$ da k (che è l'inverso di ℓ a meno di 2π) ed ϵ nel range delle scale inerziali. Si ricordi che, per la terza ipotesi di Kolmogorov, nel range inerziale le caratteristiche della turbolenza dipendono esclusivamente da ϵ e ℓ . Osservando che $E(k)$ è un'energia per unità di massa ed unità di numero d'onda, ovvero che ha le dimensioni di una velocità al quadrato diviso una lunghezza, i.e. $[E(k)] = L^3 T^{-2}$, si ha

$$[E(k)] = [\epsilon]^\alpha [\ell]^\beta = (L^2 T^{-3})^\alpha (L)^\beta = L^{2\alpha+\beta} T^{-3\alpha} = L^3 T^{-2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{5}{3}.$$

Siccome le dimensioni del numero d'onda sono $[k] = L^{-1}$, si ottiene uno dei risultati più noti, più importanti e *meglio verificati sperimentalmente* della teoria della turbolenza di Kolmogorov nella forma

$$E(k) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}.$$

La costante di proporzionalità si ricava dagli esperimenti e si osserva essere dell'ordine dell'unità. Questa legge, che trova numerosi riscontri negli esperimenti, è stata ricavata

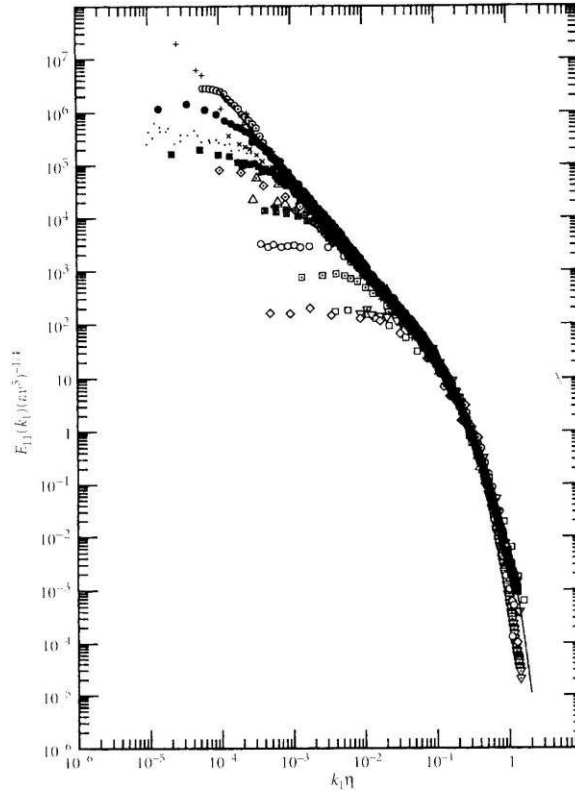


Figura 7.2: Andamento di $E(k)$ in funzione di k per diversi esperimenti in correnti turbolente, dati opportunamente adimensionalizzati.

sulla base di considerazioni puramente dimensionali e apparentemente grossolane. Kolmogorov, matematico che si è occupato di teoria della probabilità, topologia, logica, analisi, sistemi dinamici, turbolenza e quasi tutto tranne la teoria dei numeri, scriveva *“Mathematicians always wish mathematics to be as ‘pure’ as possible, i.e. rigorous, provable. But usually most interesting real problems that are offered to us are inaccessible in this way. And then it is very important for a mathematician to be able to find himself approximate, non-rigorous but effective ways of solving problems”*.

7.3 DNS: la simulazione diretta della turbolenza

Dal momento che le correnti turbolente sono ben descritte dalle equazioni di Navier-Stokes, che non perdono di validità in quanto la scala di Kolmogorov η è molto maggiore del libero cammino medio tra le molecole, è possibile ottenere la soluzione numerica di tali equazioni, detta DNS (direct numerical simulation). Dal punto di vista dell'accuratezza, dell'affidabilità dei risultati, e della compresione fisica del fenomeno della turbolenza, la simulazione diretta è certamente la scelta migliore. Il suo grande limite, tuttavia, è il costo in termini di potenza di calcolo e di mole di dati prodotta. Infatti, anche la più semplice corrente turbolenta comporta tre componenti di velocità che variano sia nello spazio che nel tempo, per cui non si può sfruttare nessuna simmetria per ridurre il numero di dimensioni a meno di quattro. Per dare un'idea della potenza di calcolo richiesta, basti pensare che la risoluzione spaziale dev'essere dell'ordine della scala di Kolmogorov η per poter rappresentare le fluttuazioni turbolente che avvengono sulle scale piccole, mentre la risoluzione nel tempo deve essere dell'ordine di τ_η . D'altra parte, sappiamo che le scale più grandi della turbolenza ℓ_0 sono dell'ordine della dimensione spaziale del dominio di calcolo e sono caratterizzate da tempi caratteristici dell'ordine di τ_0 , per cui dalle relazioni (7.3) e (7.4) si ha

$$N_{\Delta x} = \frac{\ell_0}{\eta} \propto \text{Re}^{3/4} \quad \text{e} \quad N_{\Delta t} = \frac{\tau_0}{\tau_\eta} \propto \text{Re}^{1/2},$$

essendo $N_{\Delta x}$ il numero di punti lungo una direzione spaziale e $N_{\Delta t}$ il numero di passi temporali necessaria per ottenere la risoluzione spazio-temporale richiesta. Siccome per una corrente incompressibile le variabili sono tipicamente quattro (le tre componenti di velocità e la pressione) il numero di dati da memorizzare è di circa

$$N = 4(N_{\Delta x})^3(N_{\Delta t}) \approx \text{Re}^{11/4}.$$

Per applicazioni reali il numero di Reynolds è di circa un milione, pertanto la mole di dati risulta dell'ordine di

$$N \approx 4(10^6)^{11/4} = 4 \times 10^{33/2} \approx 10^{17},$$

che è di gran lunga superiore a qualsiasi risorsa di calcolo oggi disponibile (inclusi cluster o supercomputer paralleli).

7.4 RANS: le equazioni mediate di Reynolds

Visto che l'approccio della simulazione diretta è assolutamente improponibile per problemi ingegneristici di interesse pratico, anziché cercare di risolvere nel dettaglio quello che succede fino alle piccole scale o su scala inerziale, si può tentare di cercare una soluzione "media", che caratterizzi la corrente mediata su un certo intervallo di tempo. Questo approccio, detto delle equazioni mediate di Reynolds, RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), si basa sull'assunzione che la turbolenza sia un fenomeno puramente statistico, su tutte le scale, e cerca di descriverne l'evoluzione attraverso un processo di media temporale. Pur essendo di gran lunga il più usato dal punto di vista ingegneristico, esso è molto limitato dal punto di vista della comprensione del fenomeno fisico della turbolenza. Inoltre, siccome il processo di media causa una perdita di informazioni, è necessario trovare un modo per *chiudere* le equazioni mediate a seguito della comparsa di nuove incognite che, avendo le dimensioni di sforzi, vengono comunemente chiamati *sforzi di Reynolds*.

Introduciamo le medie temporali della velocità e della pressione come

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dt \quad \bar{P}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\mathbf{x}, t) dt$$

in modo tale da riscrivere le variabili (\mathbf{U}, P) come somma di una parte stazionaria e dipendente solo dallo spazio e di una fluttuazione (detta fluttuazione turbolenta) dipendente sia dallo spazio che dal tempo ma avente media nulla:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, t) = \bar{P}(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t).$$

Se si introducono queste variabili nelle equazioni di Navier-Stokes incomprimibili (ρ e ν entrambe costanti) e si mediano le equazioni stesse tramite l'integrazione nel tempo, si ottengono le equazioni

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}. \quad (7.6)$$

Grazie alle proprietà di linearità della media temporale precedentemente definita (il che significa che commuta con tutti gli operatori lineari, ovvero derivate ed integrali) e al fatto che la perturbazione è a media nulla, per l'equazione di continuità si ha

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + 0 = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j},$$

per cui la (7.5) diventa

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0.$$

Il primo termine della (7.6) si annulla in quanto

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + 0 = 0 + 0.$$

Per il secondo termine della (7.6), invece, si ha

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j},$$

essendo

$$\frac{\partial \bar{U}_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0.$$

Il termine di pressione si riduce a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i},$$

mentre il termine di laplaciano diventa semplicemente

$$\overline{\nu \frac{\partial^2 (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + 0 = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2}.$$

In conclusione, le equazioni per una corrente turbolenta sono formalmente simili a quelle laminari e stazionarie per la componente media, con l'aggiunta di un termine non lineare non meglio definito:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}. \quad (7.8)$$

Si osservi che il termine viscoso può essere riscritto sfruttando la (7.7), ovvero il fatto che la divergenza della corrente media è nulla. Infatti,

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

da cui

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right).$$

Utilizzando questa riscrittura del termine viscoso ed osservando che

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j),$$

l'equazione (7.8) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \right). \quad (7.9)$$

I termini aggiuntivi

$$\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$$

sono detti *sforzi di Reynolds* o *sforzi turbolenti* e rappresentano un problema in quanto sono incogniti e quindi ci sono più incognite di equazioni. Questo è noto come *problema della chiusura delle equazioni mediate di Reynolds*. Si potrebbe tentare di scrivere un'equazione di evoluzione per essi, ma si finirebbe per introdurre ulteriori incognite nel problema. Si osservi, tuttavia, che il problema sarebbe risolto se tali sforzi fossero in qualche modo *modellati* legandoli al flusso medio o se fossero rimpiazzati da relazioni *empiriche* ottenute da prove sperimentali. Infatti, essi sono strettamente legati alla correlazione tra $u_i(\mathbf{x}, t)$ e $u_j(\mathbf{x}, t)$ essendo

$$C_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{[u_i(\mathbf{x}, t)]^2} \sqrt{[u_j(\mathbf{x}, t)]^2}}.$$

7.5 Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds

Le equazioni mediate di Reynolds non hanno fatto altro che concentrare le difficoltà in un unico termine, il tensore degli sforzi di Reynolds $\rho \overline{u_i u_j}$. Questo non risolve il problema di determinare la corrente media in quanto non è possibile ricavare tale tensore a partire dalla conoscenza di essa. Affinché, dunque, le equazioni mediate siano di qualche utilità occorre trovare un modo per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal moto medio. Lo scopo dei modelli di turbolenza è proprio quello di ricavare gli elementi del tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal campo medio di velocità e pressione in modo da ottenere un sistema di equazioni con pari numero di equazioni e di incognite. Si osservi che questo obiettivo non è banalmente raggiungibile in quanto, nonostante a livello della scala di Kolmogorov si possa considerare la turbolenza in qualche modo “universale”, di sicuro le scale turbolenti più grandi non lo sono affatto e dipendono dalla geometria del problema in esame. Pertanto, i modelli di turbolenza dipendono fortemente dal problema che si sta considerando e non sono per nulla generali. Questo è il grande limite di questo approccio.

7.5.1 Ipotesi di Boussinesq e viscosità turbolenta

L'equazione (7.9) può essere riscritta in modo molto compatto come

$$\frac{\partial \overline{U_i U_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

essendo τ_{ij} il tensore degli sforzi totali (viscosi + quelli di Reynolds) così definito:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}.$$

L'ipotesi che il rimescolamento tipico delle correnti turbolente produca effetti simili a quelli causati dalla diffusione molecolare dovuta alla viscosità del fluido, condusse Boussinesq a postulare una forma degli sforzi di Reynolds simile a quella degli sforzi viscosi, con una analoga dipendenza dalle derivate della corrente media. Il modo più corretto per riscrivere il tensore degli sforzi di Reynolds alla stregua di quelli viscosi è tramite l'introduzione di un tensore ν_{ijhk} tale per cui risulti

$$\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \nu_{ijhk} \left(\frac{\partial \overline{U_h}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_h} \right).$$

Chiaramente ora il problema della chiusura è trasferito alla conoscenza di 36 componenti del tensore ν_{ijhk} (che è simmetrico, come è simmetrico il tensore degli sforzi τ_{ij} che risulta determinato da 6 costanti). Tuttavia, semplificando ulteriormente il modello in modo da considerare non nulli sono gli elementi diagonali di ν_{ijhk} e supponendo che il legame sia isotropo, si arriva ad introdurre *un solo parametro* ν_T , funzione della posizione ed eventualmente del tempo, ottenendo

$$\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right), \quad (7.10)$$

che permette di riscrivere il tensore degli sforzi totali semplicemente come

$$\tau_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right).$$

Il coefficiente ν_T ha le dimensioni di una viscosità cinematica e prende il nome di *viscosità turbolenta* o *eddy viscosity*. Si osservi che le equazioni così ottenute differiscono da quelle usuali

per il solo fatto che i termini viscosi sono espressi come somma dei consueti termini dipendenti dalla viscosità molecolare del fluido (proprietà fisica ben definita e qui assunta costante ed uniforme) e di termini dipendenti dalla viscosità turbolenta, che è, al contrario, funzione della posizione e dell'atto di moto, e che pertanto deve essere mantenuta all'interno degli operatori di derivata spaziale. Il problema della chiusura è stato notevolmente semplificato anche se non risolto completamente in quanto rimane da assegnare la costante ν_T . Per questo motivo modelli che fanno intervenire la viscosità turbolenta sono molto usati in ingegneria anche se hanno almeno due limiti piuttosto evidenti legati a

1. **scale:** nel caso della diffusione molecolare c'è una separazione netta fra le scale su cui avvengono i fenomeni di diffusione, dell'ordine del libero cammino medio delle molecole, e quelle della corrente media. Nel caso della turbolenza, invece, questa separazione di scale non esiste perché il fenomeno della cascata di energia le mette in gioco tutte, a partire da quelle più grandi fino a quelle dissipative, passando per le scale inerziali. Questo fatto causa tempi caratteristici della turbolenza decisamente inferiori a quelli della corrente media, e questo si traduce in un effetto “memoria” causato dagli elevati tempi di adattamento delle strutture turbolente alle condizioni esterne (tali effetti non sono presenti nel caso laminare per il quale i tempi di adattamento a livello molecolare sono estremamente rapidi). Inoltre, siccome la diffusione turbolenta avviene su più scale, essa non è certamente locale e per questo non è descrivibile da equazioni differenziali che contengano come variabile la sola velocità media.
2. **isotropia:** nel caso di un corrente laminare il legame fra gli sforzi e la velocità di deformazione è isotropo. Ammesso che vi sia un legame di questo tipo nel caso degli sforzi turbolenti, non ci sono motivi perché esso sia isotropo, se non in casi molto particolari.

Come detto il problema della chiusura è definitivamente risolto solo quando si fornisce un modo per determinare il coefficiente ν_T . Nel seguito sono riportati tre approcci, di vario ordine a seconda del numero di equazioni differenziali alle derivate parziali (di evoluzione) che vengono risolte per la determinazione di ν_T .

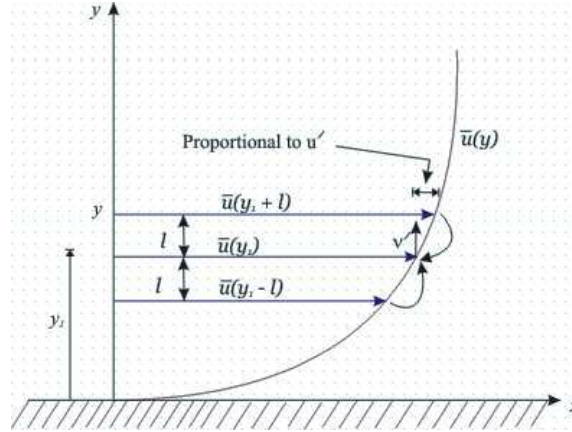
7.5.2 Modello di ordine 0 per ν_T : *mixing length*

Questo modello non utilizza nessuna equazione differenziale ulteriore, risulta particolarmente semplice da implementare, è uno dei primi ad essere stato utilizzato, e funziona solo in contesti molto particolari. Concentriamoci su uno strato di corrente turbolenta in prossimità di una parete, come riportato in figura 7.3 (per esempio lo strato limite turbolento su una lamina piana). A causa della presenza della parete, il profilo medio della componente di velocità nella direzione della corrente è una sola funzione della sola distanza dalla parete y ,

$$\bar{U} = \bar{U}(y).$$

Consideriamo un “elemento di fluido” che si trovi ad una distanza $y_1 + \ell_m$ dalla parete dove la velocità è $U(y_1 + \ell_m)$. Se esso si sposta verso il basso arrivando ad una distanza y_1 dalla parete, dove la velocità $\bar{U}(y_1)$ è minore rispetto a $\bar{U}(y_1 + \ell_m)$, porterà con sé maggior quantità di moto provocando, per questo, una fluttuazione di velocità positiva e dell'ordine di

$$\Delta \bar{U}_+(y_1) = \bar{U}(y_1 + \ell_m) - \bar{U}(y_1) \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Figura 7.3: Schematizzazione della *mixing length*.

Viceversa, un elemento di fluido che si trovi inizialmente ad una distanza $y_1 - \ell_m$ dalla parete dove la velocità è $\bar{U}(y_1 - \ell_m)$, quando si sposta verso l'alto arrivando ad una distanza y_1 dalla parete, dove la velocità $\bar{U}(y_1)$ è maggiore rispetto a $\bar{U}(y_1 - \ell_m)$, porterà con sé minor quantità di moto provocando, per questo, una fluttuazione di velocità negativa e dell'ordine di

$$\Delta \bar{U}_-(y_1) = \bar{U}(y_1) - \bar{U}(y_1 - \ell_m) \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Pertanto, possiamo stimare che la fluttuazione di velocità nella direzione della corrente sia una media delle due e sia dell'ordine di

$$\bar{u} \approx \frac{\Delta \bar{U}_+(y_1) + \Delta \bar{U}_-(y_1)}{2} = \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Si osservi che ℓ_m è la distanza che, statisticamente, un elementino di fluido continuo percorre prima di interagire con altri elementi di fluido, cui Prandtl diede il nome di *lunghezza di mescolamento* o *mixing length*. Paragonando la diffusione turbolenta a quella molecolare, ℓ_m è più o meno l'equivalente del libero cammino medio (distanza che devono percorrere le molecole per interagire tra di loro). Se assumiamo che anche la fluttuazione turbolenta in direzione normale alla parete sia dello stesso ordine di grandezza, possiamo dire che

$$\bar{v} \approx \bar{u} \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1},$$

da cui

$$\overline{uv} \approx \ell_m^2 \left(\left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1} \right)^2.$$

Per risalire al segno del prodotto \overline{uv} nel caso in cui $d\bar{U}/dy > 0$ (caso in figura 7.3), si osservi che quando $v > 0$ (l'elemento di fluido sale da $y_1 - \ell_m$ a y_1) si ha $u < 0$, mentre quando $v < 0$ (l'elemento di fluido scende da $y_1 + \ell_m$ a y_1) si ha $u > 0$. Pertanto, se $d\bar{U}/dy > 0$ le fluttuazioni u e v sono mediamente di segno opposto per cui la media del loro prodotto avrà segno negativo; al contrario se $d\bar{U}/dy < 0$ le fluttuazioni u e v sono mediamente dello stesso segno per cui la media del loro prodotto è positiva. Tenuto conto di queste considerazioni, possiamo scrivere

$$\overline{uv} = -\ell_m^2 \left| \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1} \right| \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1},$$

ma essendo

$$\rho \overline{uv} = -\rho \nu_T \frac{d\overline{U}}{dy},$$

si ha

$$\nu_T = \ell_m^2 \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right|.$$

Si osservi che la viscosità turbolenta così ottenuta è positiva, che è consistente con il fatto che debba provocare diffusione, ma è ancora incognita in quanto non è stata definita la lunghezza di mescolamento ℓ_m . In realtà essa varia da geometria a geometria, ma una scelta ragionevole di ℓ_m fu proposta proprio da Prandtl come proporzionale alla distanza dalla parete più vicina:

$$\ell_m = ky, \quad k = 0.41 \quad (\text{costante di von Kármán}).$$

In conclusione,

$$\nu_T = k^2 y^2 \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right|, \quad k = 0.41.$$

Il limite principale di questo modello di turbolenza consiste nel fatto di essere stato costruito esplicitamente per il flusso in prossimità di una parete. Inoltre, non è applicabile a correnti con ricircolazione, non tiene conto dei processi di convezione e diffusione della turbolenza, e non è in grado di trattare problemi di convezione termica turbolenta. Il fatto di non prevedere una diffusione turbolenta si osserva laddove $\nu_T = 0$ a causa del fatto che la derivata $d\overline{U}/dy = 0$. Questo succede, tipicamente per motivi di simmetria, al centro di un getto, di un tubo assialsimmetrico o di un canale piano. Contrariamente a quanto previsto dal modello, i dati sperimentali dimostrano la presenza di diffusione turbolenta non trascurabile sull'asse di simmetria. Per ovviare a queste debolezze, esistono numerose variazioni della teoria originale di Prandtl, ciascuna delle quali porta a definizioni della lunghezza di mescolamento più adatte, di volta in volta.

7.5.3 Modello di ordine 1 per ν_T : K

Per superare alcuni dei limiti dei modelli algebrici di viscosità turbolenta, sono stati sviluppati i modelli differenziali che, in generale, prevedono la scrittura e l'integrazione di una o più equazioni differenziali che descrivono direttamente la dinamica del tensore degli sforzi di Reynolds, oppure la dinamica di una o più grandezze scalari correlate con la viscosità cinematica turbolenta introdotta da Boussinesq. Il vantaggio è che le equazioni differenziali di trasporto per queste grandezze consentono, in ogni caso, di valutare la viscosità turbolenta tenendo conto della *effettiva storia della corrente*.

Il *modello K* utilizza un'equazione differenziale per l'evoluzione dell'energia cinetica turbolenta media

$$\overline{K} = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}),$$

ottenuta la quale la viscosità turbolenta è modellata dall'espressione

$$\nu_T = c \ell_m \sqrt{\overline{K}},$$

dove ℓ_m è la lunghezza di mescolamento e $c = 0.55$ fornisce risultati corretti nella regione logaritmica dello strato limite turbolento. La lunghezza di mescolamento ℓ_m si ottiene da "ricette" che variano da caso a caso e che per correnti in presenza di parete prevedono certamente un legame con la distanza dalla parete stessa. L'equazione di evoluzione dell'energia cinetica

turbolenta media \overline{K} si ottiene dalle equazioni della quantità di moto. Partendo dalle equazioni della quantità di moto per ciascuna componente nella forma

$$\frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\overline{U}_j + u_j) \frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}$$

ed espandendole come

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2},$$

dopo aver osservato che, grazie all'equazione di continuità,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

moltiplichiamo ciascun termine per u_i e prendiamo la media:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}.$$

Analizzando i termini uno ad uno si ha:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right)$$

$$\overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} = 0$$

$$\overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\overline{U}_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right)} = \overline{\overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right)}$$

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$$

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right)} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 u_j \right)} - \frac{1}{2} \overline{u_i^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho} \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}} \quad \left(\text{essendo } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \right)$$

$$\overline{\nu u_i \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2}} = 0$$

$$\overline{\nu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} = \overline{\nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \nu \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) \right) - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}.$$

In definitiva, l'equazione iniziale, valida per $i = 1, 2, 3$, si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) + \overline{U_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u_i}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) \right) - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Sommando tutte e tre queste equazioni, ovvero esaurendo le sommatorie su gli indici i , spostando tutti i termini dal terzo in poi a secondo membro, e raggruppando le derivate parziali rispetto a x_j , si ottiene

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j}}_{\text{variazione totale di } \overline{K}} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}}_{\text{produzione di } \overline{K}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} + \nu \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right)}_{\text{diffusione di } \overline{K}} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{dissipazione di } \overline{K}}, \quad (7.11)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{D\overline{K}}{Dt} = \mathcal{P} + \mathcal{D} - \epsilon.$$

Evidentemente, tutti i termini di destra devono essere *modellati* in quanto sono medie di prodotti di grandezze fluttuanti. Si osservi che, in base all'ipotesi di Boussinesq (7.10), il termine di produzione diventa semplicemente

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = \nu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)^2 + \nu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}.$$

Il termine di diffusione non legato a \overline{K} si modella drasticamente come

$$-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} = \frac{\nu_T}{\sigma_K} \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j},$$

con $\sigma_K \approx 1$, ottenendo come diffusione semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} + \nu \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right),$$

mentre il termine di dissipazione viene modellato altrettanto drasticamente come

$$\epsilon = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m},$$

dove ℓ_m è la lunghezza di mescolamento e C_D è un parametro che deve essere ulteriormente specificato in quanto dipende dal tipo di corrente in esame. In conclusione, il modello si scrive

$$\frac{D\overline{K}}{Dt} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)^2 + \nu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) - C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m}.$$

I limiti più evidenti di questo modello sono lo scarso fondamento teorico e la mancanza di validità generale. Questo si traduce nella necessità di tarare in modo diverso i coefficienti nelle equazioni a seconda del problema affrontato, al fine di ottenere risultati di qualità accettabile. Un altro limite consiste nel fatto che, per correnti in geometrie complesse, non è facile individuare la lunghezza di mescolamento corretta, ammesso che ne esista una. Per questo motivo il modello di turbolenza K ad una sola equazione trova applicazione esclusivamente per correnti in geometria relativamente semplice, ed è poco utilizzato in campo ingegneristico.

7.5.4 Modello di ordine 2 per ν_T : K - ϵ

Come visto, uno dei limiti del modello ad una sola equazione differenziale è che la lunghezza di mescolamento è prescritta con una ricetta *ad hoc* che cambia caso per caso. L'obiettivo di un modello a due equazioni differenziali è di prescrivere una seconda equazione di evoluzione per una grandezza tipica del moto legandola all'evoluzione del moto medio. In pratica si tratta di definire una qualsiasi variabile della forma

$$\overline{K}^\alpha \ell_m^\beta$$

e di scriverne l'equazione di trasporto/diffusione partendo dalle equazioni di Navier-Stokes a manipolandole come visto per ricavare l'equazione differenziale per \overline{K} . Tra le possibili scelte di $\overline{K}^\alpha \ell_m^\beta$, le più comuni sono $\overline{K} \ell_m$, $\sqrt{\overline{K}} \ell_m$ (frequenza turbolenta), $\overline{K} \ell_m^2$ (vorticità turbolenta), $\overline{K}^{3/2} / \ell_m$ (velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta specifica). La scelta più comune in assoluto è sicuramente l'ultima, per la quale si pone

$$\bar{\epsilon} = \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m},$$

che, una volta note \overline{K} e $\bar{\epsilon}$ dalla risoluzione delle due equazioni differenziali, permette di determinare $\ell_m = \overline{K}^{3/2} / \bar{\epsilon}$. Inoltre, una volta note \overline{K} e $\bar{\epsilon}$, si osserva che, in base a considerazioni di tipo dimensionale, la viscosità turbolenta può essere espressa come

$$\nu_T = C_\mu \frac{\overline{K}^2}{\bar{\epsilon}}.$$

Un valore tipicamente usato per la costante è $C_\mu = 0.09$. L'equazione per $\bar{\epsilon}$ alla quale si perviene è

$$\frac{D\bar{\epsilon}}{Dt} = C_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\overline{K}} \nu_T \left[\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\overline{K}},$$

con valori tipici delle costanti

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92.$$

Questo modello a due equazioni presenta il vantaggio che la viscosità turbolenta è calcolata sulla base di una velocità turbolenta e di una scala di lunghezze le cui distribuzioni spaziali non sono più assegnate a priori, ma sono entrambe calcolate con equazioni di trasporto che tengono conto della storia della corrente. Per questo, esso rimane il più usato a livello industriale nelle sue innumerevoli versioni estese o modificate. Tuttavia, il modello K - ϵ soffre delle limitazioni tipiche dei modelli a viscosità turbolenta: mancanza di un vero fondamento teorico, mancanza di universalità e impossibilità di riprodurre turbolenza non isotropa. Per cercare di superare questi limiti si sono sviluppati anche modelli che prevedono l'integrazione di un'equazione di trasporto per ciascuna delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds (ovviamente sempre in termini di variabili medie). Anche questi ultimi, peraltro, continuano a rimanere poco generali. Bisogna inoltre considerare che, all'aumentare del numero delle equazioni differenziali che va ad aggiungersi alle equazioni mediate di Reynolds, il lavoro di calibrazione dei vari parametri diventa sempre più complicato e l'impegno di calcolo rischia di diventare quasi confrontabile con quello richiesto da altri metodi più sofisticati come la Large Eddy Simulation.

7.6 LES: simulazione dei grandi vortici

Per quanto visto, la simulazione diretta della turbolenza è impensabile per problemi di interesse pratico, d'altra parte proprio per le geometrie di interesse pratico le equazioni mediate di Reynolds e i vari modelli di turbolenza proposti non sono certamente affidabili in quanto i "coefficienti di taratura" cambiano da problema a problema. Un buon compromesso tra affidabilità del modello e tempo di calcolo può essere raggiunto richiamando quanto visto sulla distribuzione delle scale turbolente. Osserviamo che

- **le strutture turbolente di grande scala** hanno natura convettiva e numeri di Reynolds relativamente elevati (tanto che, per instabilità, sono in grado di produrre vortici di dimensioni più ridotte), hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio, hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente), estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta, hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Reynolds della corrente media, e sono generalmente anisotrope;
- **le strutture turbolente di scala intermedia** sono generate dall'instabilità non lineare delle grandi strutture, sono anch'esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati, hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai vortici piccoli l'energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;
- **le strutture turbolente di piccola scala** nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi, sono stabili in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds bassi (dell'ordine dell'unità), hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosità, l'energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi, hanno vita media molto più breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale, hanno tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio, hanno dimensioni relative rispetto a quelle dei grandi vortici che dipendono quasi esclusivamente dal numero di Reynolds della corrente, hanno una struttura più universale (ovvero indipendente dal tipo di corrente) e relativamente isotropa.

Queste considerazioni portano a due conclusioni che sono le idee alla base dell *Large Eddy Simulation* (DNS):

1. i vortici grandi e medi devono essere necessariamente (e quindi vengono) risolti esplicitamente, come in una DNS,
2. soltanto i vortici piccoli si prestano ad essere (e quindi vengono) modellati.

In pratica, mentre con l'approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si è costretti ad usare modelli che devono simulare gli effetti della totalità dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente che non possono essere universali perché dipendono dalla geometria, con la LES si può sperare, modellando i soli vortici piccoli (quelli grandi sono risolti direttamente) di puntare a modelli non eccessivamente complicati ma sufficientemente universale, dal momento che i vortici che richiedono la modellazione hanno per loro natura caratteristiche universali. Anche l'isotropia, implicita nel concetto dello scalare viscosità turbolenta, è più ragionevolmente ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala.

Si ricordi che per ricavare le equazioni mediate di Reynolds si era assunto il campo di moto pari alla somma di una parte media ed una fluttuante e si era poi proceduto ad un *filtraggio temporale* ottenendo l'evoluzione delle grandezze medie modellando quelle fluttuanti tramite la grandezze medie stesse. Nella LES, invece, si applica un *filtraggio spaziale* risolvendo direttamente la parte media e modellando il resto sulla base di considerazioni molto generali basate sulle caratteristiche dei vortici di piccola scala. Ragionando in termini di numero d'onda k ($k = 2\pi/\lambda$, essendo λ la lunghezza d'onda) e trasformata di Fourier spaziale, i numeri d'onda minori di una certa soglia k_S corrispondono a scale spaziali grandi e sono risolti, mentre quelli superiori a k_S , che corrispondono a scale spaziali molto piccole, sono modellati. Chiaramente, k_S è legato al passo di discretizzazione spaziale Δ in quanto, per il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon, solo le componenti di Fourier con numeri d'onda inferiori a π/Δ possono essere univocamente rappresentate. Procedendo al filtraggio spaziale (tramite l'operatore di convoluzione), si arriva alle equazioni di continuità

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0$$

e della quantità di moto

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}.$$

Si osservi che, a differenza delle equazioni mediate di Reynolds (RANS), nella large eddy simulation (LES) la componente media non è stazionaria perché la media è nello spazio e non nel tempo. Allo stesso modo delle RANS, però, anche nella LES compare il termine

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}$$

che chiameremo *sforzi filtrati*, o *sforzi sottogriglia specifici*, che rappresentano l'effetto delle componenti di Fourier di piccola scala ($k > k_S$) sulla velocità (media) filtrata. Come per le RANS, anche qui occorre modellare gli sforzi filtrati in termini della velocità filtrata attraverso qualche modello che faccia intervenire le caratteristiche del filtro, in particolare k_S o Δ , e che sia il più universale possibile. Si noti che la presenza di Δ elimina il problema di una lunghezza di riferimento che, nel caso dei modelli di chiusura per le RANS, era legata alla distanza dalla parete. I modelli degli sforzi sottogriglia più usati sono di tipo algebrico, ovvero non comportano l'introduzione di equazioni differenziali per descriverne la loro evoluzione, e si riconducono essenzialmente al *modello di Smagorinski*. Siccome l'energia cinetica nel moto turbolento viene trasferita dai vortici più grandi a quelli più piccoli: l'effetto degli sforzi sottogriglia, in termini energetici, deve essere (mediamente) quello di sottrarre alla parte risolta della corrente quell'energia cinetica che i vortici più piccoli, in quanto filtrati, non sono in grado di dissipare. In questo senso, un modello a viscosità turbolenta, che è intrinsecamente dissipativo, garantisce a priori che il flusso medio di energia avvenga nel verso corretto. Se indichiamo il tensore dei gradienti della velocità filtrata con

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

in modo tale che l'ipotesi alla Boussinesq (7.10) permetta di riscrivere il tensore degli sforzi totali (viscosi + filtrati) semplicemente come

$$\tau_{ij} = 2\rho(\nu + \nu_T)\bar{S}_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

in base all'analisi dimensionale si deduce che, affinché la viscosità turbolenta sia esprimibile tramite Δ e le derivate spaziali della velocità filtrata \bar{S}_{ij} , deve essere

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|,$$

essendo \bar{S} e Δ rispettivamente il modulo del tensore \bar{S}_{ij} e il passo di discretizzazione spaziale medio così definiti

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad \text{e} \quad \Delta = \sqrt{\Delta_x\Delta_y\Delta_z}.$$

Il coefficiente C_S può essere calcolato analiticamente sotto l'ipotesi di equilibrio locale ottenendo 0.23. In pratica, però, questo valore non è universale ma dipende dalla discretizzazione (e quindi dalla risoluzione) spaziale del calcolo, dal tipo di filtro utilizzato, ecc. per cui si trova in letteratura una gamma piuttosto ampia di valori consigliati, che spesso sono stati ottenuti calibrando il modello per confronto con soluzioni ottenute con la DNS. Valori ragionevoli sono $0.1 \leq C_S \leq 0.24$. Si osservi che, confrontando l'espressione per la viscosità turbolenta appena introdotta con quella riferita alla mixing length, si arriva alla conclusione $\ell_m = C_S \Delta$.

Sebbene anche la LES richieda una qualche operazione di calibrazione dei parametri che compaiono nei vari modelli sottogriglia oggi disponibili, i suoi pregi rimangono una minore sensibilità alla scelta del modello rispetto alle RANS e un impegno di calcolo molto inferiore a quello di una DNS, soprattutto per le correnti a numeri di Reynolds relativamente elevati. Per contro, la LES implica di affrontare comunque un problema tridimensionale e dipendente dal tempo, anche nel caso (piuttosto comune) di fenomeni mediamente bidimensionali o stazionari. In questi casi il costo computazionale di una LES è notevolmente superiore a quello richiesto dalle RANS, anche quando quest'ultime sono accoppiate a modelli di turbolenza molto raffinati.

7.7 Turbolenza in condotti

7.8 Turbolenza di parete

Capitolo 8

Vortici, vorticità e turbolenza

8.1 Cos'è un vortice?

Se si osserva la corrente a valle di un pilone di un ponte, o più in generale la scia dietro ad un corpo tozzo, si possono facilmente scorgere una serie di strutture di varia scala sia spaziale che temporale che si comportano in modo apparentemente disorganizzato e caotico. Questa varietà di scale aumenta all'aumentare del numero di Reynolds. Come visto nel capitolo precedente, pur non avendo dato nessuna definizione di *vortice*, nel descrivere il fenomeno fisico della turbolenza si è intrinsecamente introdotta l'idea di vortice in quanto le strutture vorticosi più grandi, le cui dimensioni sono dell'ordine del dominio ℓ_0 , prelevano energia cinetica dal moto medio e la trasferiscono alle strutture di scala intermedia (inerziale) che a loro volta la passano ai piccoli vortici aventi dimensioni tipiche della scala di Kolmogorov η che la dissipano sotto forma di calore dovuta all'attrito viscoso.

Mentre ad una corrente turbolenta si associano immediatamente vortici di varia scala che si formano, evolvono, interagiscono tra loro e decadono, al concetto di vorticità non è corretto associare il concetto di vortice. Infatti, la semplice corrente di Poiseuille tra due piani infiniti e paralleli con profilo parabolico ha certamente vorticità non nulla; tuttavia in essa non sono presenti vortici di nessun tipo (la corrente è laminare). Pertanto, corrente rotazionale (o a vorticità non nulla) non implica necessariamente che in essa siano presenti dei vortici. Riassumendo schematicamente questi concetti:

- turbolenza \equiv vortici
- vortici $\Rightarrow \omega \neq 0$
- $\omega \neq 0 \not\Rightarrow$ vortici.

Cos'è, in pratica, un vortice? Nonostante non sia facile trovare una definizione condivisa di vortice (alcune caratteristiche imprescindibili si trovano alla fine dell'ultimo paragrafo del capitolo), si può dire che esso sia *una porzione di corrente caratterizzata da una distribuzione di vorticità spazialmente concentrata in regioni di forma più o meno complessa*. In questo senso, un vortice può essere visto come una *struttura coerente*.

8.2 Alcune definizioni

Nella descrizione di una corrente spesso può essere utile separare il campo di moto in regioni nelle quali la vorticità è nulla (o quantomeno così piccola da poter essere trascurabile) e in altre in cui gli effetti della vorticità non sono trascurabili.

- **Vorticità.** Come noto, la *vorticità* è il rotore del vettore velocità:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_i = \varepsilon_{ilm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right).$$

Si osservi che, siccome la divergenza di un rotore è identicamente nulla, a seguito della definizione di vorticità si ha

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0,$$

ovvero la vorticità è sempre solenoidale. Dimostriamo che la vorticità è pari al doppio della velocità angolare locale di un elemento di fluido che ruota rigidamente:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}.$$

Infatti, in generale, la velocità nell'intorno di un punto \mathbf{x}_0 può essere espansa tramite la formula di Taylor arrestata al prim'ordine come

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \Longleftrightarrow \quad u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}), \quad i = 1, 2, 3$$

dove il tensore doppio $\nabla \mathbf{u}$ può essere scomposto in una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = S_{ij} + \xi_{ij} = (S)_{ij} + (\xi)_{ij}$$

in modo da poter riscrivere l'espansione della velocità come

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + S_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \xi_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Vediamo quanto vale il prodotto tra il tensore ξ e il vettore $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Dalla definizione di $\boldsymbol{\omega}$, premoltiplicando per ε_{ijk} , si ha

$$\varepsilon_{ijk}\omega_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 2\xi_{kj},$$

che implica

$$\xi_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_i,$$

per cui il prodotto tensore-vettore $\xi \mathbf{y}$ dà il vettore

$$\xi \mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}_k \xi_{kj} y_j = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_k \varepsilon_{ijk} \omega_i y_j = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_k \varepsilon_{kij} \omega_i y_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Questo permette di riscrivere l'approssimazione al prim'ordine della velocità in \mathbf{x} come

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Per capire il contributo di ciascun termine, si osservi che la velocità in un punto \mathbf{x} dovuta al moto rigido di roto-traslazione che avviene con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto ad un punto \mathbf{x}_0 che trasla alla velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ è

$$\mathbf{u}^{\text{rig}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

per cui confrontando $\mathbf{u}^{\text{rig}}(\mathbf{x})$ con l'approssimazione al prim'ordine si ricava che l'atto di moto locale è la somma di una roto-traslazione rigida e di una deformazione. In particolare vale l'equivalenza

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0).$$

- **Circolazione.** Presa una curva chiusa e orientata \mathcal{C} , la *circolazione* è la circuitazione del vettore velocità \mathbf{u} lungo \mathcal{C} :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\mathbf{c}.$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità, il teorema di Stokes assicura che

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\mathbf{c} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

dove \mathcal{S} è la superficie che ha per contorno la curva \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$), e i vettori $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ sono rispettivamente i versori tangente alla linea chiusa \mathcal{C} e normale alla superficie \mathcal{S} . Pertanto, la circolazione non è altro che l'integrale di superficie della vorticità

$$\Gamma = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

- **Linea vorticoso.** Una *linea vorticoso* è una linea tangente in ogni suo punto al vettore vorticità. Si osservi che, siccome $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$, le linee vorticoso o sono chiuse su se stesse (se vanno all'infinito la richiusura su se stesse avviene all'infinito), oppure terminano su superfici solide o su superfici libere. In altre parole, non ci possono essere sorgenti o pozzi di vorticità all'interno di una corrente, qualsiasi essa sia.
- **Tubo vorticoso.** Immaginiamo un cammino chiuso \mathcal{C} nel campo di moto, essendo \mathcal{C} riducibile ad un punto senza passare al di fuori del campo di moto stesso (dominio semplicemente connesso). Per ogni punto di questa curva passa una linea vorticoso: chiamiamo *tubo vorticoso* il volume (infinito) racchiuso dall'insieme di queste linee vorticoso. Si osservi che se si prende un volume *finito* \mathcal{V} di un tubo vorticoso che abbia come “superfici di base” \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 (che hanno come normali esterne rispettivamente $\hat{\mathbf{n}}_1$ e $\hat{\mathbf{n}}_2$ e come contorno rispettivamente le curve \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2) e come “superficie laterale” \mathcal{S}_ℓ la superficie del tubo vorticoso stesso, si ha

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 - \int_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, dS_2 + \int_{\mathcal{S}_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell \, dS_\ell = \int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 - \int_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, dS_2,$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ e $\hat{\mathbf{n}}_\ell$ tra loro perpendicolari a seguito della definizione di tubo vorticoso e quindi $\int_{\mathcal{S}_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell \, dS_\ell \equiv 0$. Per il teorema della divergenza

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV \equiv 0$$

in quanto $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$, per cui

$$\int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 = \int_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, dS_2,$$

ovvero il flusso di vorticità attraverso una qualsiasi sezione \mathcal{S} di un tubo vorticoso è costante per *qualsiasi curva* \mathcal{C} che circonda una sola volta il tubo vorticoso (teorema di Helmholtz 3.5.1) e che sia il contorno della stessa superficie aperta \mathcal{S} :

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\mathbf{c} = \Gamma$$

Questo integrale è proprio la *circolazione* lungo \mathcal{C} e prende il nome di *intensità* o *forza* del tubo vorticoso.

- **Filamento vorticoso.** Un *filamento vorticoso* è un tubo vorticoso per il quale l'area della sezione del tubo tende a zero. In altre parole filamento vorticoso e linea vorticoso coincidono. Questa situazione non è affatto rara ed approssima tutti quei casi in cui la vorticità è localizzata nelle vicinanze di una linea nel campo di moto e trascurabile altrove come succede per i tornado o per i vortici d'estremità delle ali degli aerei. Si osservi che, nonostante il limite per la sezione che tende a zero, l'intensità del filamento vorticoso è costante in ogni sezione e pari a Γ .
- **Anello vorticoso.** Un *anello vorticoso* è un tubo vorticoso a sezione circolare costante chiuso su se stesso in modo da formare un anello di raggio costante (in pratica un toro).
- **Superficie vorticoso.** Se si accostano l'uno accanto all'altro tanti filamenti vorticosi si ottiene una *superficie vorticoso* (non necessariamente piana). Si osservi che le superfici rappresentano delle discontinuità all'interno della corrente (si pensi a due profili di velocità paralleli, bidimensionali e uniformi, l'uno sopra l'altro, per i quali la vorticità è nulla ovunque tranne che all'interfaccia tra le due correnti che è proprio una superficie vorticoso).

8.3 Dinamica della vorticità: 3D vs 2D

L'equazione per la dinamica della vorticità (3.4), anche nel caso semplificato di corrente a proprietà costanti, contiene in sé vari termini che vale la pena di riesaminare in quanto essi causano dinamiche diverse a seconda che ci si trovi in tre dimensioni o in due:

$$\underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega}_{\text{variazione di } \omega \text{ seguendo la corrente}} = \underbrace{(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{"stretching" e "tilting"}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \omega}_{\text{diffusione molecolare di } \omega} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{g}}_{\text{campo non conservativo}} \quad (8.1)$$

Il termine più interessante è il primo a destra, solitamente denominato di "stretching" e "tilting".

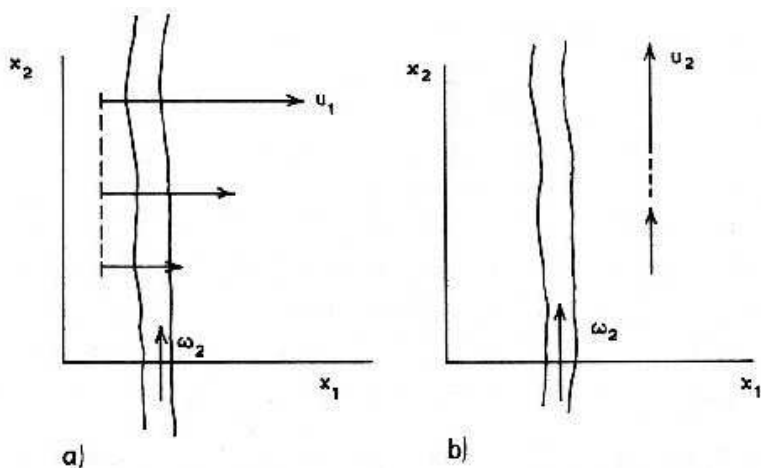


Figura 8.1: Meccanismo di "stretching" e "tilting" dovuto all'effetto dei gradienti di velocità. (a) Tilting: vorticità ω_2 , gradiente di velocità $\partial u_1 / \partial x_2$. (b) Stretching: vorticità ω_2 , gradiente di velocità $\partial u_2 / \partial x_2$.

Riscrivendolo in notazione tensoriale

$$\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

e con riferimento alla figura 8.1, si possono distinguere 2 casi:

- (a) $i \neq j$. Prendiamo $i = 1$ e $j = 2$: a causa di $\partial u_1 / \partial x_2$, ovvero della variazione della componente orizzontale di velocità u_1 lungo la direzione verticale x_2 , la componente di vorticità lungo la direzione x_2 ruota causando una ridistribuzione della vorticità anche lungo la direzione x_1 . Questo avviene lungo ogni direzione, per cui il caso $i \neq j$ è associato ad una *ridistribuzione di vorticità nelle diverse direzioni* causato dai gradienti di velocità.
- (b) $i = j$. Prendiamo $i = j = 2$: la variazione di velocità u_2 lungo x_2 provoca uno stiramento della componente ω_2 della vorticità, senza alcun cambiamento della direzione della vorticità. Questo stiramento, a causa della conservazione del momento angolare, provoca un aumento dell'intensità di ω_2 (o diminuzione di ω_2 nel caso ci sia compressione anziché stiramento). Il caso $i = j$ dà quindi origine ad un meccanismo di *autoamplificazione di vorticità lungo una direzione a causa dei gradienti di velocità nella direzione stessa, senza necessità di sorgenti esterne*.

Nel caso bidimensionale, siccome $\omega_1 = \omega_2 = u_3 = \partial / \partial x_3 = 0$, il termine di “stretching” e “tilting” è identicamente nullo ed i due meccanismi sopra descritti sono del tutto assenti.

8.4 La legge di Biot-Savart

Ottenere il campo di vorticità dal campo di velocità è immediato in quanto basta applicarne la definizione ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$). Al contrario, ottenere il campo di velocità da quello di vorticità è un po' più elaborato e passa attraverso la *legge di Biot-Savart* (formalmente la stessa che lega il campo magnetico alla corrente che percorre un filo). Supponiamo che, in generale, la velocità sia la somma di una parte rotazionale ed una irrotazionale (decomposizione di Helmholtz)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rot}} + \mathbf{u}_{\text{irrot}} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi,$$

dove \mathbf{A} è il potenziale vettore che dà origine alla parte rotazionale e ϕ è il potenziale cinetico che tiene conto della parte irrotazionale ($\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$). Si osservi che, senza perdere di generalità, si può assumere \mathbf{A} solenoidale ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$). Infatti, se $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ si può applicare la stessa scomposizione per \mathbf{A} scrivendo $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \nabla \varphi$ con \mathbf{B} solenoidale ottenendo $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$; quindi tanto vale prendere \mathbf{A} a divergenza nulla. Ricordando che

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) &= \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned}$$

dalla definizione di vorticità e dal fatto che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \times (\nabla \phi) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}.$$

Pertanto, il potenziale vettore \mathbf{A} soddisfa l'equazione di Poisson vettoriale

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega},$$

la cui soluzione è

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

Per ottenere la velocità è necessario calcolare il rotore di \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega_k(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \omega_k(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{x_j - y_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \omega_k(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

da cui

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} + \nabla \phi, \quad (8.2)$$

detta *legge di Biot-Savart*. Si osservi che $\nabla \phi$ tiene conto della componente potenziale di velocità, per esempio indotta dalla presenza di pareti. Richiamando l'equazione per la vorticità (8.1) nel caso di corrente incomprimibile a viscosità costante, si osserva che i moti vorticosi e complessi tipici della turbolenza sono dovuti essenzialmente all'accoppiamento tra le equazioni (8.1) e (8.2): la (8.1) stabilisce l'evoluzione ed il trasporto della vorticità a seguito della presenza di un campo di velocità \mathbf{u} mentre la (8.2) stabilisce il campo di velocità indotto dalla presenza di vorticità nella corrente. Questo meccanismo di accoppiamento è totalmente assente nelle correnti irrotazionali (a potenziale) per le quali $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ e $\mathbf{u} = \nabla \phi$. In particolare, nel caso incomprimibile ed irrotazionale, si ha $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \iff \nabla^2 \phi = 0$. Poiché nell'equazione di Laplace non c'è dipendenza esplicita dal tempo, un'eventuale non stazionarietà della corrente può essere contenuta unicamente nelle condizioni al contorno alle quali il potenziale si adegua istante per istante ed allo stesso modo si comporta la velocità vista la relazione di natura puramente cinematica tra essa e il potenziale. In altre parole, in una corrente a potenziale ogni configurazione istantanea di velocità è indipendente dalle precedenti e dalle successive ed in tali condizioni non possono emergere spontaneamente le configurazioni complesse tipiche delle correnti turbolente. Come visto, la situazione è completamente ribaltata per una corrente *rotazionale* nella quale l'accoppiamento tra le equazioni (8.1) e (8.2) dà origine alla turbolenza.

8.5 Velocità indotta da una linea vorticoso

La linea vorticoso è, geometricamente, una curva \mathbf{r} in \mathbb{R}^3 descritta dall'equazione parametrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi)$, dove ξ è l'ascissa curvilinea e $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))$, e caratterizzata da una intensità

costante Γ indipendente da ξ . Seguendo le solite convenzioni per le curve in \mathbb{R}^3 si ha che i vettori tangente, normale e binormale formano una terna destrorsa che varia al variare di ξ e che si ottiene dalle definizioni

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2}}{\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2}\right|}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

Lo scalare

$$\kappa = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} \right|$$

è detto *curvatura* ed è l'inverso del raggio di curvatura locale ($R = 1/\kappa$). Per determinare il campo di velocità indotto dalla linea vorticoso specializziamo la legge di Biot-Savart (8.2) osservando che se il volumetto $d\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ contiene al suo interno la porzione di curva (orientata) $d\xi = \hat{\mathbf{t}} d\xi$, allora possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \Gamma d\xi.$$

Così facendo la legge di Biot-Savart (8.2) per una linea vorticoso si riduce a (Γ è costante)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{t}}(\xi) \times \mathbf{s}(\xi)}{|\mathbf{s}(\xi)|^3} d\xi, \quad (8.3)$$

dove $\mathbf{s}(\xi) = \mathbf{x} - \mathbf{y}(\xi)$ è il vettore che congiunge il punto sulla linea vorticoso $\mathbf{y}(\xi)$ di ascissa curvilinea ξ con il punto del campo di moto \mathbf{x} dove si vuole calcolare la velocità indotta dalla linea vorticoso. Si osservi che nel caso di una linea vorticoso rettilinea ed infinita, il modulo della velocità da essa indotta in un punto P che distanza R dalla linea stessa si ottiene mettendo come origine di ξ il piede della perpendicolare condotta da P alla linea vorticoso stessa:

$$|\mathbf{u}(P)| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{(\xi^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + R^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\Gamma}{2\pi R},$$

che coincide con la solita espressione della velocità tangenziale indotta da un vortice di intensità Γ nel caso bidimensionale ad una distanza R dal vortice stesso.

8.6 Vortice di Rankine

Il vortice rettilineo precedentemente trovato è caratterizzato da una distribuzione di velocità che prevede la sola componente tangenziale

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\mathbf{x}}_{\theta},$$

e che, siccome è stata ricavata nell'ipotesi di corrente non viscosa, presenta una singolarità sull'asse del vortice

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{u}(r, \theta) = \infty.$$

Le correnti non viscoso non esistono nella realtà, e infatti l'effetto della viscosità è proprio quello di mantenere finita la velocità al centro del vortice evitando soluzioni singolari. In Natura vortici come uragani, cicloni e tornado sono caratterizzati da un cuore centrale dove la

velocità, anziché tendere all'infinito, tende a zero. Tuttavia, muovendosi dal centro del vortice verso l'esterno si osserva dapprima un aumento della velocità tangenziale, seguito poi da una progressiva diminuzione. Una schematizzazione semplice di questo comportamento è il *vortice di Rankine*, che consiste in una rotazione rigida dal centro fino ad una certa distanza radiale a , con velocità angolare Ω , dove è concentrata tutta la vorticità, seguita da una corrente irrotazionale (il vortice classico) al di fuori del cerchio di raggio a :

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \Omega r & \text{per } r \leq a \\ \frac{\Omega a^2}{r} & \text{per } r > a. \end{cases}$$

Noto il campo di velocità, è immediato il calcolo della vorticità

$$\omega(r) = \begin{cases} 2\Omega & \text{per } r \leq a \\ 0 & \text{per } r > a \end{cases}$$

e della circolazione lungo una circonferenza con centro nel centro del vortice come

$$\Gamma(r) = \oint_C u_\theta(r) r d\theta = u_\theta(r) r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi u_\theta(r) r,$$

ovvero

$$\Gamma(r) = \begin{cases} 2\pi\Omega r^2 & \text{per } r \leq a \\ 2\pi\Omega a^2 & \text{per } r > a. \end{cases}$$

Si osservi che nel *core* centrale ($r < a$) è concentrata tutta la vorticità (e quindi la circolazione), mentre al di fuori di esso la vorticità è nulla e la circolazione è costante e pari a quella contenuta nel *core*. Indicando con Γ_0 proprio questa circolazione, i.e. $\Gamma_0 = 2\pi\Omega a^2$, la velocità può essere riscritta mettendo in risalto il fatto che fuori dal *core* l'andamento è lo stesso del vortice rettilineo:

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma_0}{2\pi a^2} r & \text{per } r \leq a \\ \frac{\Gamma_0}{2\pi r} & \text{per } r > a \end{cases}$$

Il vortice di Rankine costituisce un modello semplice (e ideale) di un vortice reale in quanto solitamente il *core* non è esattamente circolare e la vorticità al suo interno non è proprio uniforme.

8.7 Interazioni tra vortici

È ormai chiaro che l'interazione tra vortici è alla base della dinamica della turbolenza, pertanto la comprensione di questi meccanismi risulta cruciale al fine dello studio della turbolenza stessa. In particolare, le *strutture coerenti* presenti in correnti turbolente sono spesso modellate come vortici che interagiscono tra loro e il forte rimescolamento tipico della turbolenza sembra proprio dovuto all'interazione e alla conseguente distorsione di questi vortici. Non a caso, quindi, correnti turbolente sono spesso descritte da un groviglio di linee vorticosi che ricordano degli spaghetti (a meno di fenomeni di *coalescenza* che non si verificano con gli spaghetti): un esempio

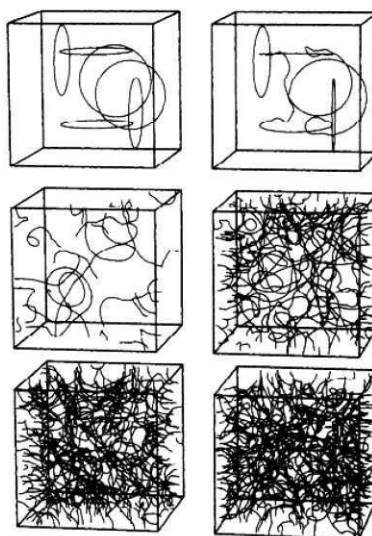


Figura 8.2: Simulazione numerica di turbolenza quantistica a partire da pochi anelli vorticosi (K. W. Schwarz, Phys. Rev. B, **38**, 2398 (1988))

è la *turbolenza quantistica*, a cui di riferisce la figura 8.2. Ai fini della nostra (semplice) analisi, restringiamo il campo a correnti non viscosi per le quali l'equazione della vorticità si riduce a

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{per il caso 3D}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad \text{per il caso 2D}$$

8.7.1 Il caso 2D non viscoso

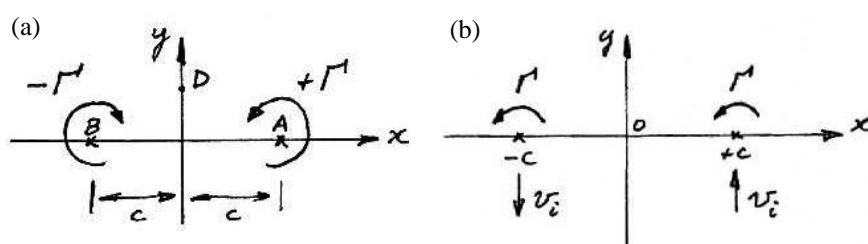


Figura 8.3: Due vortici piani (a) controrotanti e (b) corotanti.

Con riferimento alla figura 8.3 (a), consideriamo due vortici controrotanti con centri in $(\pm c, 0)$ e intensità $\pm \Gamma$ di pari modulo. Ciascuno induce sull'altro una velocità verso il basso avente modulo

$$u_{\text{ind}} = \frac{\Gamma}{4\pi c},$$

mentre la velocità nel centro del sistema di vortici è la somma di quelle indotte da ciascuno, ovvero

$$u_{\text{med}} = 2 \frac{\Gamma}{2\pi c} = \frac{\Gamma}{\pi c} = 4u_{\text{ind}}.$$

Pertanto, il sistema di due vortici controrotanti si muove verso il basso alla velocità u_{ind} e allo stesso tempo dà origine ad una specie di getto che raggiunge il massimo della velocità sulla mezzzeria dove $u_{\text{med}} = 4u_{\text{ind}}$. Si osservi che, per simmetria, la velocità sull'asse y è sempre diretta come l'asse stesso, che quindi costituisce una linea di corrente rettilinea (la velocità normale ad essa risulta sempre nulla). Questo equivale alla condizione di parete per una corrente non viscosa ($\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$), che rimpiazza la *no-slip condition* delle correnti viscosi, per cui per simulare il comportamento di un vortice in prossimità di una parete si può rimpiazzare la parete con un vortice controrotante e simmetrico (*Metodo delle Immagini*).

Con riferimento alla figura 8.3 (b), due vortici corotanti con centri in $(\pm c, 0)$ e pari intensità Γ inducono l'uno sull'altro una velocità di modulo

$$u_{\text{ind}} = \frac{\Gamma}{4\pi c},$$

però sul vortice di destra essa è verso l'alto mentre su quella di sinistra è verso il basso. Pertanto, il sistema di vortici ruota attorno al proprio centro di simmetria senza traslare. Ad una distanza sufficiente grande rispetto a $2c$, il sistema appare come un unico vortice di intensità 2Γ .

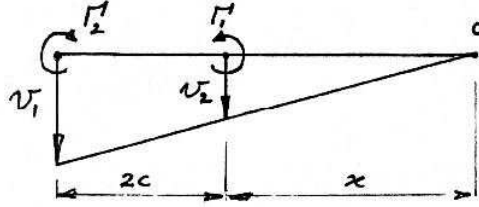


Figura 8.4: Due vortici piani di diverse intensità e segno.

Il caso più generale di due vortici piani posti a distanza $2c$ l'uno dall'altro con differenti intensità Γ_1 e Γ_2 e segno opposto è rappresentato in figura 8.4. Evidentemente,

$$v_1 = \frac{\Gamma_1}{4\pi c}, \quad \text{e} \quad v_2 = -\frac{\Gamma_2}{4\pi c} \quad \text{con} \quad \Gamma_2 < 0.$$

Se x denota la distanza del centro di rotazione dal vortice di destra lungo la retta che congiunge i due centri, in base a considerazioni elementari su triangoli simili si ha

$$\frac{v_2}{x} = \frac{v_1}{x + 2c} \quad \Rightarrow \quad \frac{-\Gamma_2}{x} = \frac{\Gamma_1}{x + 2c} \quad \Rightarrow \quad x = -2c \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

Si osservi che per $\Gamma_2 = \Gamma_1$ (vortici corotanti di pari intensità) si ottiene proprio che il centro di rotazione è il centro geometrico del sistema dei due vortici, mentre per $\Gamma_2 = -\Gamma_1$ (vortici controrotanti di intensità opposta) si ha $x \rightarrow \infty$, ovvero non esiste rotazione del sistema di vortici ma solo traslazione in direzione perpendicolare alla congiungente i due centri.

8.7.2 Il caso 3D non viscoso

Filamenti vorticosi rettilinei non paralleli

Con riferimento alla figura 8.5, consideriamo due filamenti vorticosi rettilinei e non paralleli tra loro, orientanti in modo che un vortice sia allineato come l'asse x e l'altro come l'asse z e tali per cui la distanza minima tra queste due rette (sghembe) sia y . Il vortice lungo x induce in A una velocità verso il basso e in B una velocità verso l'alto di pari modulo.

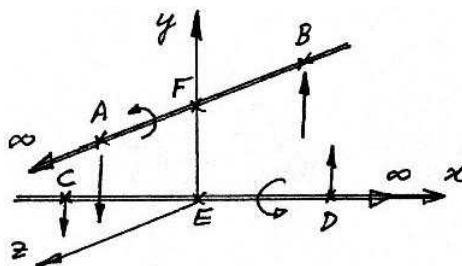


Figura 8.5: Due filamenti vorticosi rettilinei non paralleli tra loro.

Uguualmente, in C e D ci sono due velocità di segno opposto indotte dal vortice allineato con l'asse z . Nel punto E , invece, il vortice allineato con l'asse z induce una velocità diretta come l'asse x che risulta perpendicolare alle velocità indotte nei punti C e D (ugualmente nel punto F). In conclusione, ciascun filamento vorticoso induce sull'altro delle velocità che causano la distorsione dei filamenti con conseguenti interazioni tra gli stessi. È chiaro che questo processo non può prescindere dall'assenza di viscosità (fin qui non considerata) perché quando i vortici si avvicinano l'uno all'altro i gradienti di velocità sono abbastanza grandi da rendere le forze viscosive non trascurabili. A seguito dell'effetto della viscosità possono avere luogo fenomeni di connessione e riconnessione dove “pezzi” di vortice si connettono con “pezzi” di altri vortici dando origine a grovigli come quelli in figura 8.2.

Anelli vorticosi

Consideriamo un anello vorticoso di intensità Γ , raggio a , e avente raggio della sezione del tubo richiuso su se stesso pari a c (figura 8.6). Integrando l'equazione (8.3) si ottiene facilmente la

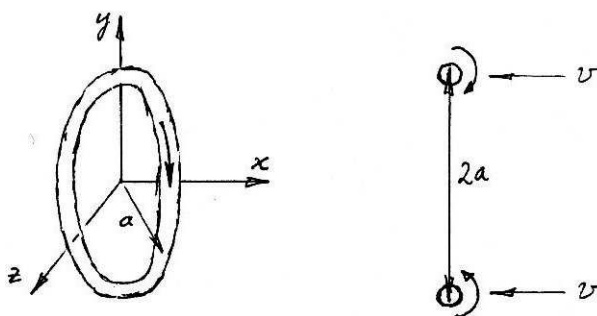


Figura 8.6: Notazione per l'anello vorticoso.

velocità indotta nel centro dell'anello che è anche la velocità di avanzamento dello stesso

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi a} \left(\log \frac{8a}{c} - \frac{1}{4} \right).$$

Da notare il fatto che la velocità di auto-propulsione è inversamente proporzionale al raggio dell'anello.

L'interazione tra due anelli vorticosi di dimensioni diverse che si muovono lungo la stessa direzione porta ad un fenomeno interessante detto *leapfrogging* mostrato in figura 8.7. Con riferimento alla prima immagine, il vortice più piccolo (quello di sinistra) induce su quello più grande una velocità che lo fa ulteriormente allargare, mentre il vortice più grande induce su

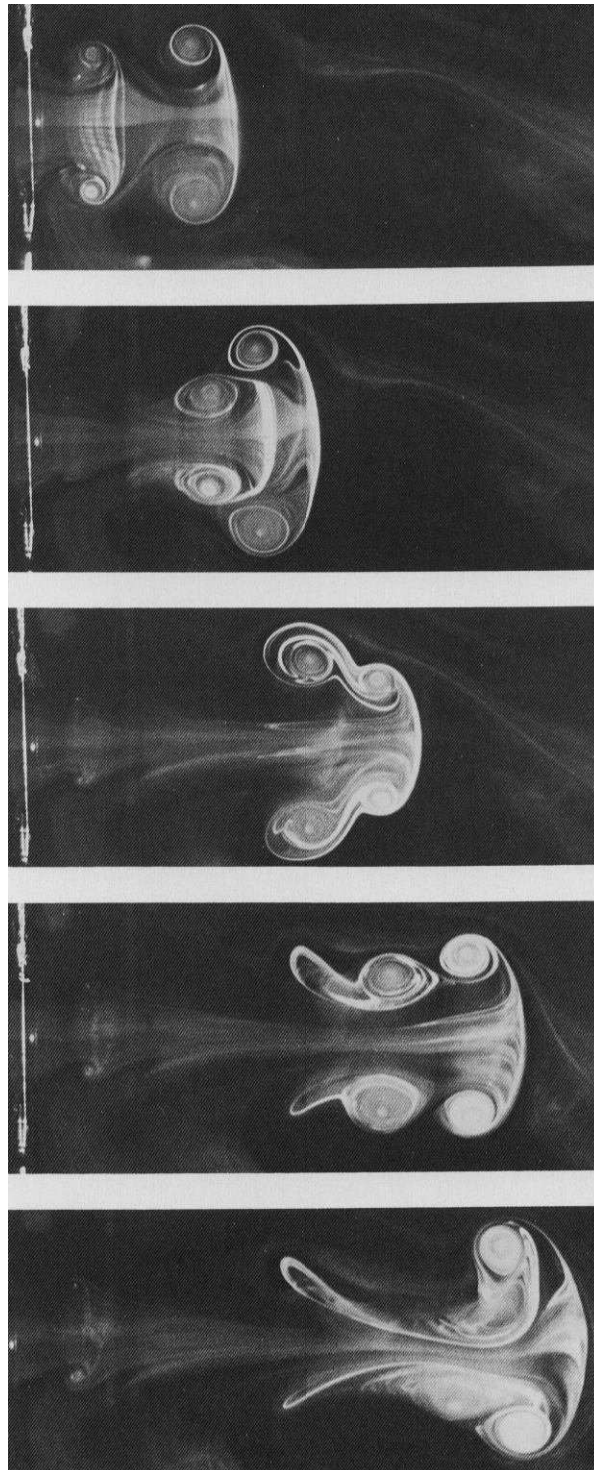


Figura 8.7: “Leapfrogging” di due anelli vorticosi (Yamada & Matsui, 1978).

quello più piccolo una velocità che lo fa ulteriormente rimpicciolire. Questo implica che il vortice più piccolo, diminuendo ulteriormente il suo raggio, aumenterà la sua velocità mentre quello più grande, ingrandendosi ulteriormente, rallenterà, come evidente dalla seconda immagine. Il vortice più piccolo raggiungerà quindi quello più grande e lo supererà passando al suo interno

(si veda la terza immagine). Il meccanismo si ripeterà poi a ruoli invertiti (quarta e quinta immagine).

Se i due anelli, anziché rincorrersi, viaggiano l'uno contro l'altro sullo stesso asse, ciascuno dei due aumenterà progressivamente di dimensioni e rallenterà.

8.8 Splat e spin

Quando due vortici si avvicinano l'uno all'altro le deformazioni degli elementi di fluido causate dalle velocità indotte da ciascuno di essi sono del tipo riportato in figura 8.8. Per come sono

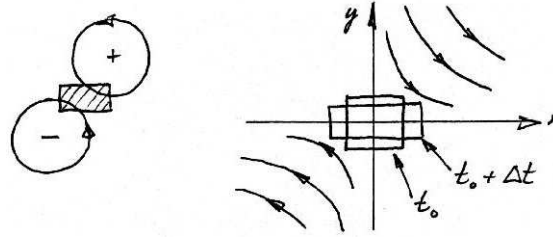


Figura 8.8: Splat e spin a seguito della collisione tra due vortici.

orientate le circolazioni, elementi di fluido nella zona tra i due vortici sono compressi in direzione y e allungati in direzione x (nel caso incomprimibile viene preservato il volume di fluido), mentre la rotazione dell'elemento di fluido è pressoché nulla. Al contrario, in prossimità del centro di ciascun vortice la rotazione (legata alla vorticità) domina rispetto alla deformazione. In base a queste considerazioni, consideriamo una corrente incomprimibile per la quale le equazioni di governo sono

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Prendendo la divergenza delle tre equazioni della quantità di moto si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3$$

ma siccome $\partial u_i / \partial x_i = 0$, si ottiene semplicemente

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Ricordando le definizioni

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

si ha

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} &= (S_{ij} + \xi_{ij})(S_{ij} - \xi_{ij}) \\ &= S_{ij}S_{ij} - \xi_{ij}\xi_{ij} \\ &= S^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2, \end{aligned}$$

essendo ω_i la componente i -esima della vorticità. Il termine S^2 è detto *splat*, mentre il termine $\frac{1}{2}\omega_i^2$ è detto *spin*.

Per quanto detto in precedenza, nella regione di collisione tra due vortici la deformazione ha il sopravvento sulla rotazione, pertanto

$$S^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{massimo di } p,$$

mentre nella parte interna del vortice la rotazione ha il sopravvento e

$$S^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{minimo di } p.$$

Pertanto, è proprio la collisione tra vortici a dare origine alle fluttuazioni di pressione presenti in un campo di moto turbolento.

In ultima analisi, siamo ora in grado di dare una definizione più rigorosa di vortice, in particolare il suo *core* deve avere queste 3 caratteristiche:

1. diametro finito
2. vorticità, e quindi circolazione, non nulla
3. vorticità prevalente sulla velocità di deformazione ($\frac{1}{2}\omega_i^2 > S^2$), che implica che la pressione all'interno di un vortice è minima (si pensi ai tornado o a semplici mulinelli).

Appendice A

Richiami utili

A.1 Vettori in \mathbb{R}^3 e identità vettoriali

Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ può essere visualizzato come una freccia spiccata dall'origine $O = (0, 0, 0)$ di un sistema di assi cartesiani ortogonali verso il punto $V \in \mathbb{R}^3$ di coordinate $V = (v_1, v_2, v_3)$. La retta passante per i punti O e V viene detta *direzione* del vettore \mathbf{v} , risulta definito in modo naturale il *verso* del vettore \mathbf{v} come il verso di percorrenza della semiretta di origine O , e la lunghezza del segmento OV viene detto *modulo* del vettore \mathbf{v} che, per evitare confusione, indicheremo con $|\mathbf{v}|$. Pertanto

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Chiamiamo *versori* i tre vettori

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = (0, 1, 0), \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = (0, 0, 1)$$

di modulo unitario orientati, ciascuno, secondo uno degli assi cartesiani ortogonali. Tramite essi è allora possibile scrivere il vettore \mathbf{v} come somma delle sue componenti vettoriali lungo gli assi

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{x}}_3.$$

Dati due vettori in \mathbb{R}^3

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{x}}_3, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{x}}_3,$$

definiamo *prodotto scalare*, e lo indichiamo con il simbolo \cdot tra i due vettori, il *numero* $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Evidentemente, il prodotto scalare è commutativo, ovvero

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

Definiamo *prodotto vettoriale*, e lo indichiamo con il simbolo \times tra i due vettori, il *vettore* \mathbf{c} tale che

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} := \hat{\mathbf{x}}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\mathbf{x}}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{\mathbf{x}}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Come si può facilmente verificare raccogliendo un segno meno nel termine di destra della definizione appena data, il prodotto vettoriale è anticommutativo, ovvero

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Per ricordarsi come si calcola il prodotto vettoriale tra due vettori basta osservare che

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dalla definizione di prodotto scalare si ha che

$$\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

da cui segue che due vettori ortogonali hanno prodotto scalare nullo. Dalla definizione di prodotto vettoriale si ha

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \times \hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_3, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 \times \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\mathbf{x}}_1, \quad \hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2,$$

mentre

$$\hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j = 0 \quad \text{se } i = j,$$

ovvero due vettori paralleli hanno prodotto vettoriale nullo. Dalla definizione di prodotto scalare segue anche che il modulo di un vettore è

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Inoltre, per il prodotto scalare, si ha

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo formato dai due vettori. Viceversa, dati due vettori è immediato determinare l'angolo tra essi compreso come

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right).$$

Dimostriamo ora l'identità notevole

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (\text{A.1})$$

Dalla definizione di prodotto vettoriale tra due vettori si ha

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} := \hat{\mathbf{x}}_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \hat{\mathbf{x}}_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \hat{\mathbf{x}}_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

pertanto

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (b_3c_1 - b_1c_3) & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = & \hat{\mathbf{x}}_1(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3) + \\ & \hat{\mathbf{x}}_2(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) + \\ & \hat{\mathbf{x}}_3(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2), \end{aligned}$$

che riscritto sommando e sottraendo alla prima componente $a_1 b_1 c_1$, alla seconda $a_2 b_2 c_2$ e alla terza $a_3 b_3 c_3$, porta a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \hat{\mathbf{x}}_1(a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3 + a_1 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_1) + \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_2(a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_2 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_2 c_2 - a_2 b_2 c_2) + \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_3(a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2 + a_3 b_3 c_3 - a_3 b_3 c_3) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_1[(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)c_1] \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_2[(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)b_2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)c_2] \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_3[(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)c_3]. \end{aligned}$$

Essendo

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \text{e} \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \hat{\mathbf{x}}_1[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1] \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_2[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_2] \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_3[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_3] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\hat{\mathbf{x}}_1 b_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 b_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 b_3) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\hat{\mathbf{x}}_1 c_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 c_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 c_3) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \end{aligned}$$

da cui la (A.1). Evidentemente, dato che il prodotto scalare tra due vettori è commutativo ed il risultato è uno scalare, la (A.1) può anche essere riscritta nelle forme totalmente equivalenti

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'identità vettoriale

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (\text{A.2})$$

Dalle definizioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale si hanno le tre uguaglianze

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1), \\ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= b_1(c_2 a_3 - c_3 a_2) + b_2(c_3 a_1 - c_1 a_3) + b_3(c_1 a_2 - c_2 a_1) \\ &= b_1 c_2 a_3 + b_2 c_3 a_1 + b_3 c_1 a_2 - (b_1 c_3 a_2 + b_2 c_1 a_3 + b_3 c_2 a_1), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= c_1 a_2 b_3 + c_2 a_3 b_1 + c_3 a_1 b_2 - (c_1 a_3 b_2 + c_2 a_1 b_3 + c_3 a_2 b_1), \end{aligned}$$

dalle quali si ottiene immediatamente la (A.2).

A.2 Identità contententi gradiente, divergenza, rotore e laplaciano

Se introduciamo il vettore ∇ definito come

$$\nabla := \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

allora risultano definiti in modo naturale e formalmente corretto

- il *gradiente di uno scalare* $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ come moltiplicazione tra il vettore ∇ e lo scalare φ :

$$\nabla\varphi = \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3},$$

- la *divergenza di un vettore* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ come prodotto scalare tra il vettore ∇ e il vettore \mathbf{v} :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

- e il *rotore di un vettore* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ come prodotto vettoriale tra il vettore ∇ e il vettore \mathbf{v} :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \hat{\mathbf{x}}_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Dimostriamo ora che vale la seguente identità.

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right), \quad (\text{A.3})$$

dove con la scrittura $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ si intende il vettore

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_1) + \hat{\mathbf{x}}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_2) + \hat{\mathbf{x}}_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_3).$$

Dalla definizione di $\nabla \times \mathbf{v}$ e prodotto vettoriale si ha

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_3 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_2 \right] + \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_2 \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_1 - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_3 \right] + \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_3 \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_2 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_1 \right]. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo nella prima componente $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$, nella seconda $v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$, nella terza $v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ e sviluppando i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_3 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_2 + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right] + \\
&\quad \hat{\mathbf{x}}_2 \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) v_1 - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_3 + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right] + \\
&\quad \hat{\mathbf{x}}_3 \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) v_2 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) v_1 + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3^2}{\partial x_1} \right) \right] + \\
&\quad \hat{\mathbf{x}}_2 \left[v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial v_1^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3^2}{\partial x_2} \right) \right] + \\
&\quad \hat{\mathbf{x}}_3 \left[v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial v_1^2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2^2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3^2}{\partial x_3} \right) \right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[\mathbf{v} \cdot \nabla v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] + \hat{\mathbf{x}}_2 \left[\mathbf{v} \cdot \nabla v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] + \\
&\quad \hat{\mathbf{x}}_3 \left[\mathbf{v} \cdot \nabla v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_1) + \hat{\mathbf{x}}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_2) + \hat{\mathbf{x}}_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_3) - \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right),
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_3^2}{2}$. Siccome

$$\hat{\mathbf{x}}_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_1) + \hat{\mathbf{x}}_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_2) + \hat{\mathbf{x}}_3 (\mathbf{v} \cdot \nabla v_3) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

allora possiamo scrivere direttamente la (A.3):

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right).$$

Dimostriamo ora l'identità vettoriale

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (\text{A.4})$$

dove il simbolo $(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u}$ denota il vettore così definito

$$(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{u} \right) + \hat{\mathbf{x}}_2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{u} \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{u} \right).$$

Dalla definizione di $\nabla \times \mathbf{v}$ e prodotto vettoriale si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - u_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right] + \\
 &\quad \hat{\mathbf{x}}_2 \left[u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - u_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right] + \\
 &\quad \hat{\mathbf{x}}_3 \left[u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - u_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right].
 \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo alla prima componente $u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$, alla seconda $u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ e alla terza $u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$, si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - u_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right] + \\
 &\quad \hat{\mathbf{x}}_2 \left[u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - u_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right] + \\
 &\quad \hat{\mathbf{x}}_3 \left[u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - u_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_1 \left[\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} - \mathbf{u} \cdot \nabla v_1 \right] + \hat{\mathbf{x}}_2 \left[\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} - \mathbf{u} \cdot \nabla v_2 \right] + \hat{\mathbf{x}}_3 \left[\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} - \mathbf{u} \cdot \nabla v_3 \right] \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{u} \right) + \hat{\mathbf{x}}_2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{u} \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{u} \right) - \\
 &\quad [\hat{\mathbf{x}}_1(\mathbf{u} \cdot \nabla v_1) + \hat{\mathbf{x}}_2(\mathbf{u} \cdot \nabla v_2) + \hat{\mathbf{x}}_3(\mathbf{u} \cdot \nabla v_3)].
 \end{aligned}$$

Siccome

$$\hat{\mathbf{x}}_1(\mathbf{u} \cdot \nabla v_1) + \hat{\mathbf{x}}_2(\mathbf{u} \cdot \nabla v_2) + \hat{\mathbf{x}}_3(\mathbf{u} \cdot \nabla v_3) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

e

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{u} \right) + \hat{\mathbf{x}}_2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{u} \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \cdot \mathbf{u} \right) = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u},$$

allora segue immediatamente l'uguaglianza (A.4):

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Si osservi che, se tutti i vettori sono *vettori colonna*, se con il simbolo $(\nabla \mathbf{v})$ denotiamo la matrice

$$(\nabla \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \nabla v_1 & \nabla v_2 & \nabla v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

e se con il simbolo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ denotiamo la matrice

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = \begin{bmatrix} u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} & u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

allora possiamo scrivere

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

A.3 Cenni sui tensori

Per un vettore scritto in componenti cartesiane valgono le seguenti forme alternative

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{x}}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{\mathbf{x}}_i,$$

essendo $\hat{\mathbf{x}}_i$, con $i = 1, 2, 3$, i versori unitari. Se utilizziamo la *convezione di Einstein sugli indici ripetuti* (da qui in avanti la chiameremo semplicemente *notazione di Einstein*), secondo la quale quando in un'espressione compaiono dei termini con due indici uguali allora quel termine deve essere rimpiazzato dalla somma del termine stesso con gli indici che vanno da 1 al massimo ammissibile (3 nel nostro caso, 4 nel caso della relatività speciale di Einstein), allora il vettore \mathbf{v} si scrive semplicemente

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}_i v_i,$$

mentre il suo modulo si scrive

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_i v_i}.$$

Si osservi che scrivere il modulo di un vettore come $\sqrt{v_i^2}$ è **completamente sbagliato** perché

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2} = \sqrt{v_i v_i} \neq \sqrt{v_i^2} = |v_i|,$$

in quanto la sommatoria viene eseguita *solo se gli indici all'interno di un termine sono ripetuti* (in $\sqrt{v_i^2}$ non ci sono indici ripetuti). Questa convenzione è particolarmente utile e conveniente,

Quantità	Accezione comune	Notazione comune	Notazione indiciale cartesiana	Notazione matriciale
Tensore di ordine zero	scalare	v	v	$[v]$
Tensore di ordine uno	vettore	\mathbf{v}	v_i	$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
Tensore di ordine due	matrice	\mathbf{V}	v_{ij}	$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix}$
Tensore di ordine tre	tensore	$\overline{\mathbf{V}}$	v_{ijk}	-
Tensore di ordine quattro	tensore	$\overline{\overline{\mathbf{V}}}$	v_{ijkl}	-

Tabella A.1: Riassunto delle diverse notazioni per scalari, vettori e tensori

ma bisogna sempre stare molto attenti agli eventuali indici ripetuti che sott'intendono una sommatoria: nel caso gli indici ripetuti siano più di uno, allora ci sono più sommatorie.

Se tralasciamo la presenza del versore $\hat{\mathbf{x}}_i$, quando scriviamo v_i intendiamo, quindi, la componente i -esima di un *vettore*. Al contrario, se scriviamo solo v senza alcun indice, allora intendiamo in modo inequivocabile uno *scalare*. Estendendo l'idea degli indici, se scriviamo un oggetto con più indici, per esempio v_{ijk} , intendiamo un *tensore* di *rango* pari al numero di indici che compaiono come pedici. Quindi le matrici sono tensori di rango 2, i vettori tensori di rango 1 e gli scalari tensori di rango 0, come riassunto in tabella A.1. Si pensi ora a campi scalari e campi vettoriali tipici della fluidodinamica: la densità, la pressione, la temperatura sono *campi scalari*, eventualmente dipendenti dal tempo, mentre la velocità e la vorticità sono *campi vettoriali*, anch'essi in generale dipendenti dal tempo. Evidentemente, siccome questi campi sono delle grandezze fisiche e misurabili, essi non cambiano al variare del sistema di riferimento, alla peggio cambiano le componenti di un vettore dipendentemente dal sistema di riferimento, ma il vettore (pensato come una "freccia") di sicuro non cambia. Quindi la temperatura sarà sempre la stessa indipendentemente dal sistema di riferimento così come la velocità. Allo stesso modo anche i *campi tensoriali* devono essere invarianti rispetto al sistema di riferimento. Siccome utilizzeremo sempre coordinate cartesiane (non curvilinee), evitiamo di introdurre il concetto di componenti covarianti e controvarianti, ed indicheremo i tensori solo con dei pedici. Due tensori molto utili sono:

1. il simbolo di Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$

$$2. \text{ il simbolo di Levi-Civita } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \\ 0 & \text{altrimenti: almeno due indici sono uguali tra loro.} \end{cases}$$

Si osservi che δ_{ij} è la matrice identità $\mathbf{I} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ ed è un tensore di rango 2 diagonale, simmetrico. Il simbolo di Levi-Civita, invece, è un tensore di rango 3 che può essere riscritto (nel nostro caso) come

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{(j-i)(k-i)(k-j)}{2},$$

e dalla definizione del quale segue immediatamente che

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}, \quad \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jik}, \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kji}. \quad (\text{A.5})$$

Inoltre, grazie al simbolo di Kronecker, si possono scrivere le seguenti identità

$$a_i = a_l \delta_{il}, \quad a_{ij} = a_{lm} \delta_{il} \delta_{jm}, \quad a_{ijk} = a_{lmn} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}. \quad (\text{A.6})$$

Se \mathbf{a} e \mathbf{b} sono due vettori colonna, mettendo assieme la notazione di Einstein con quella tensoriale e supponendo che tutti gli indici varino da 1 a 3 (siamo nello spazio euclideo) si ottengono scritture molto compatte di operazioni note. Ne riportiamo alcune.

- prodotto scalare tra vettori: $c = a_i b_i \iff c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- prodotto matrice vettore: $b_i = m_{ij} a_j \iff \mathbf{b} = \mathbf{M} \mathbf{a}$
- prodotto tensoriale tra vettori, anche di dimensioni diverse, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$m_{ij} = a_i b_j \iff \mathbf{M} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & a_m b_3 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

- determinante di una matrice quadrata (3×3 nel nostro caso):

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} m_{1i} m_{2j} m_{3k} \quad (\text{A.7})$$

- prodotto vettoriale tra vettori: $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k \iff \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- gradiente di uno scalare: $\nabla \varphi = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
- divergenza di un vettore: $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$
- rotore di un vettore: $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \iff \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$

Il simbolo di Levi-Civita gode di alcune proprietà; dimostriamo che

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

da cui segue, dopo aver svolto i calcoli,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) + \delta_{im}(\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{kn}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Per farlo osserviamo che, dalle relazioni (A.6) e (A.7), si ottiene immediatamente

$$\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk}\delta_{li}\delta_{mj}\delta_{nk} = \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix},$$

e quindi

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}.$$

Ricordando che il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti delle singole matrici, si ha allora

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix},$$

da cui la (A.8). Dall'identità (A.9) si ottiene immediatamente che il prodotto di due simboli di Levi-Civita con lo stesso indice porta all'identità

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \quad (\text{A.10})$$

Infatti, sostituendo nella (A.8) $l = i$, utilizzando la definizione di simbolo di Kronecker, ed osservando che $\delta_{ii} = 3$, si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{km}\delta_{jn} + \delta_{jn}\delta_{km} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{kn}\delta_{jm} \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \end{aligned}$$

Da questa identità si ottengono immediatamente anche le seguenti identità che coinvolgono il prodotto di due simboli di Levi-Civita con rispettivamente due e tutti gli indici uguali:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Il simbolo di Levi-Civita consente di ottenere molto velocemente le identità vettoriali già ricavate attraverso lunghi passaggi. Dimostriamo che

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Se $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ allora per la i -esima componente si ha

$$\begin{aligned}
 d_i &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
 &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\
 &= b_i a_m c_m - c_i a_l b_l \\
 &= b_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\
 &= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})]_i - [\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]_i.
 \end{aligned}$$

Dimostriamo ora le identità vettoriali

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

La riscrittura tramite il simbolo di Levi-Civita e le identità (A.5) consentono di scrivere

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k \\
 &= b_j \varepsilon_{ijk} a_i c_k \\
 &= b_j \varepsilon_{jki} c_k a_i \\
 &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k \\
 &= c_k \varepsilon_{ijk} a_i b_j \\
 &= c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j \\
 &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).
 \end{aligned}$$

Indice analitico

- Levi-Civita, simbolo di, [99](#)
- Anello vorticoso, [80](#)
- Approccio
 - Euleriano, [1](#)
 - Lagrangiano, [1](#)
- Circolazione, [21](#), [79](#)
- Coefficiente di attrito, [39](#)
- Conservazione
 - della massa, [1](#), [2](#)
- Corrente
 - barotropica, [19](#)
 - compressibile, [17](#)
 - conduttrice, [15](#)
 - di Couette, [34](#)
 - di Hagen-Poiseuille, [34](#)
 - di Poiseuille, [34](#)
 - ideale, [16](#)
 - incompressibile, [17](#)
 - instabile, [48](#)
 - irrotazionale, [21](#)
 - isoentropica, [16](#)
 - laminare, [43](#), [45](#), [57](#)
 - non conduttrice, [15](#)
 - non stazionaria, [15](#)
 - non viscosa, [15](#)
 - omoentropica, [16](#)
 - parallela, [33](#), [34](#)
 - rotazionale, [21](#)
 - stabile, [48](#)
 - stazionaria, [15](#)
 - turbolenta, [43](#), [45](#), [57](#)
 - viscosa, [15](#)
- Crocco
 - forma di, [22](#)
- Equazione
 - dell'energia, [6](#), [8](#)
 - dell'energia interna, [10](#)
 - dell'entalpia, [11](#)
 - dell'entropia, [10](#)
 - della quantità di moto, [6](#), [8](#)
 - della temperatura, [11](#)
 - di continuità, [6](#), [8](#)
 - di Orr-Sommerfeld, [50–54](#)
 - integrale di von Kàrmàn, [41](#)
- Equazioni di
 - Eulero, [20](#)
 - Navier-Stokes, [6](#)
 - adimensionali, [12](#)
 - con derivata sostanziale, [8](#)
 - in forma conservativa, [6](#)
 - in forma convettiva, [8](#)
- Fattore di forma, [39](#), [40](#)
- Filamento vorticoso, [80](#)
- Flusso base, [48](#)
- Helmholtz
 - primo teorema di, [30](#), [79](#)
 - secondo teorema di, [30](#)
 - terzo teorema di, [31](#)
- Intermittenza, [46](#)
- Kelvin, teorema di, [29](#)
- Kolmogorov
 - teoria della turbolenza isotropa, [61](#)
- Kronecker, simbolo di, [98](#)
- Linea vorticoso, [79](#)
- Numero
 - di Eckert, [12](#)
 - di Knudsen, [6](#)
 - di Mach, [19](#)
 - di Péclet, [12](#)
 - di Prandtl, [12](#)
 - di Reynolds, [12](#)
- Potenziale cinetico, [21](#)
- Rankine

- vortice di, 84
- Resistenza di attrito, 39
- Reynolds
 - Equazioni mediate, 64
 - esperimento di, 43
 - sforzi di, 66
- Richardson, 60
- Sforzi
 - di Reynolds, 66
 - turbolenti, 66
- Spessore
 - di quantità di moto, 39, 40
 - di spostamento, 39
 - di strato limite, 38
- Spin, 89
- Splat, 89
- Spot turbolenti, 46
- Stabilità, 48
 - asintotica, 48
 - fluidodinamica, 43
 - in senso stretto, 48
 - marginale, 48
- Stabilità lineare, 46
- Strato limite, 37
 - di Blasius, 37
 - di Prandtl, 37
 - su lamina piana, 37
 - equazione integrale di von Kàrmàn, 40
 - laminare, 43
- Struttura coerente, 77
- Superficie vorticoso, 80
- Tensori, 97
 - simbolo di Kronecker, 98
 - simbolo di Levi-Civita, 99
- Teorema
 - del trasporto di Reynolds, 4
 - di Bernoulli, 22
 - irrotazionale, 23
 - irrotazionale e stazionario, 23
 - lungo linea di corrente, 22
 - lungo linea vorticoso, 23
 - stazionario, 22
 - di Helmholtz (primo), 30, 79
 - di Helmholtz (secondo), 30
 - di Helmholtz (terzo), 31
 - di Kelvin, 29
 - di Leibniz, 3
- Transizione
 - dello strato limite laminare, 45
- Tubo vorticoso, 79
- Turbolenza, 43, 57, 77
 - cascata di energia, 59
 - chiusura
 - ipotesi di Boussinesq, 67
 - mixing length, 68
 - modello K , 70
 - modello $K-\epsilon$, 72
 - viscosità turbolenta, 67
 - chiusura delle RANS, 66
 - di parete, 76
 - DNS, 64
 - Equazioni mediate di Reynolds, 64
 - filtraggio
 - spaziale, 75
 - temporale, 75
 - in condotti, 76
 - isotropo, 60, 61
 - LES, 73
 - modello di Smagorinski, 75
 - sforzi sottogriglia, 75
 - modelli
 - ordine 0, 68
 - ordine 1, 70
 - ordine 2, 72
 - modelli di –, 66–68, 70, 72
 - problema della chiusura, 66
 - RANS, 64
 - scale, 59, 61
 - scale di Kolmogorov, 60
 - scale energetiche, 60
 - Simulazione dei grandi vortici, 73
 - Simulazione diretta, 63
 - teoria di Kolmogorov, 61
 - viscosità turbolenta, 67
- Volume
 - fisso, 1
 - in moto con il fluido, 1, 2
- Vortice, 77
 - di Rankine, 84
- Vorticità, 77, 78