



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

# 博士学位论文

通过引力波探测原初黑洞

作者姓名：\_\_\_\_\_ 陈祖成 \_\_\_\_\_

指导教师：\_\_\_\_\_ 黄庆国 研究员 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ 中国科学院理论物理研究所 \_\_\_\_\_

学位类别：\_\_\_\_\_ 理学博士 \_\_\_\_\_

学科专业：\_\_\_\_\_ 理论物理 \_\_\_\_\_

培养单位：\_\_\_\_\_ 中国科学院理论物理研究所 \_\_\_\_\_

2021 年 6 月



# **Probing Primordial Black Holes through Gravitational Waves**

**A dissertation submitted to the  
University of Chinese Academy of Sciences  
in partial fulfillment of the requirement  
for the degree of  
Doctor of Philosophy  
in Theoretical Physics**

**By**

**Chen Zu-Cheng**

**Supervisor: Professor Huang Qing-Guo**

**Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences**

**June, 2021**



## **中国科学院大学 学位论文原创性声明**

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

## **中国科学院大学 学位论文授权使用声明**

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：



## 摘要

原初黑洞是在宇宙早期由于局域不均匀性导致原初密度扰动坍塌而形成的黑洞。因为原初黑洞不仅可以作为冷暗物质的候选者，而且可以解释 LIGO-Virgo 科学组织探测到的双黑洞并合事件，所以原初黑洞受到越来越广泛的关注。本文探索通过引力波的手段来探测原初黑洞。

首先，考虑所有其他原初黑洞以及线性密度扰动产生的力矩对原初双黑洞演化的影响，我们计算了原初黑洞具有一般质量谱情况下的原初双黑洞的并合率分布，并证实了绝大多数的冷暗物质不是由恒星级质量的原初黑洞构成的。利用一维和二维的原初黑洞并合率分布，我们有望重构出原初黑洞的质量分布，进而帮助我们理解 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞的形成与演化机制。

其次，我们计算了双黑洞和双中子星并合产生的随机引力波背景。我们考虑了两种不同的双黑洞形成机制，分别是天体物理双黑洞和原初双黑洞机制。我们发现原初双黑洞会比天体物理双黑洞产生更强的随机引力波背景。另外，双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被未来的空间引力波探测器 LISA 探测到。如果这一引力波背景没能从 LISA 探测器中扣除掉，将会构成 LISA 的额外噪音，从而降低 LISA 的探测能力。

然后，我们探讨了通过下一代地基引力波探测器，比如爱因斯坦望远镜和宇宙勘探者，来区分原初黑洞和天体物理黑洞的可能性。通过定向搜寻亚太阳质量的双黑洞系统，我们估算了原初黑洞占冷暗物质丰度的可探测上限。另外，我们预测了爱因斯坦望远镜和宇宙勘探者能够探测到的双黑洞事件数目随红移的分布，从而来区分原初黑洞和天体物理黑洞。

最后，我们在北美纳赫兹引力波天文台 11 年的数据中搜索伴随原初黑洞形成而产生的标量诱导引力波信号。由于没有发现统计意义上显著的引力波信号，我们对质量在  $[2 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-1}]$  太阳质量区间的原初黑洞占冷暗物质的丰度给出了迄今为止最严格的限制。

**关键词：**原初黑洞，引力波，冷暗物质，并合率，随机引力波背景





## Abstract

Primordial black holes can form through the collapse of the primordial density perturbation due to the local inhomogeneity in the early Universe. Primordial black holes have attracted more and more attention as they can not only serve as a candidate of cold dark matter but also explain the binary black holes observed by LIGO-Virgo scientific collaboration. This work is devoted to the investigation of probing the primordial black holes through gravitational waves.

Firstly, we work out the merger rate distribution of primordial-black-hole binaries with a general mass function by taking into account the torques by all primordial black holes and linear density perturbations. We confirm that cold dark matter is not dominated by the stellar-mass primordial black holes. Utilizing the one-dimensional and two-dimensional merger rate distributions, we expect to reconstruct the mass function of primordial black holes, thus helping us to understand the formation and evolution mechanism of the binary black holes observed by LIGO-Virgo.

Secondly, we calculate the stochastic gravitational-wave background from binary black holes, covering the astrophysical and primordial scenarios separately, together with the one from binary neutron stars. We find primordial-black-hole binaries contribute a stronger stochastic gravitational-wave background than that from astrophysical-black-hole binaries, and the total stochastic gravitational-wave background from both binary black holes and binary neutron stars has a high possibility to be detected by the future space-based detector such as LISA. If not been subtracted, the stochastic gravitational-wave background can contribute an additional source of confusion noise to LISA's total noise curve, thus weakening LISA's detection abilities.

Thirdly, we investigate how the next generation of ground-based gravitational-wave detectors, such as Einstein Telescope and Cosmic Explorer, can be used to distinguish primordial black holes from astrophysical black holes. We estimate the detectable limits of the abundance of primordial black holes in the cold dark matter by the targeted search for sub-solar mass primordial black hole binaries. We forecast the detectable

event rate distributions for the primordial-black-hole binaries and astrophysical-black-hole binaries by Einstein Telescope and Cosmic Explorer, which can serve as a method to distinguish primordial black holes from astrophysical black holes.

Lastly, we perform the direct search for the signals of scalar-induced gravitational waves accompanying the formation of primordial black holes in the North American Nanohertz Observatory for Gravitational waves 11-year data set. No statistically significant detection has been made, and hence we place the most stringent upper limit on the abundance of primordial black holes in the mass range of  $[2 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-1}]M_{\odot}$ .

**Keywords:** Primordial Black Holes, Gravitational Waves, Cold Dark Matter, Merger Rate, Stochastic Gravitational-Wave Background

## 目 录

第 1 章 引言 .....	1
第 2 章 引力波基础 .....	5
2.1 线性爱因斯坦方程 .....	5
2.2 引力波的能动张量 .....	7
2.3 标量诱导引力波 .....	8
2.4 脉冲星计时阵列探测随机引力波背景 .....	10
第 3 章 原初双黑洞并合率 .....	13
3.1 背景介绍 .....	13
3.2 有质量分布情况下的原初双黑洞并合率的计算 .....	14
3.3 与引力波数据的比较 .....	19
3.4 本章小结 .....	24
第 4 章 双黑洞和双中子星并合产生的引力波背景 .....	25
4.1 背景介绍 .....	25
4.2 天体物理双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景 .....	26
4.3 原初双黑洞产生的随机引力波背景 .....	34
4.3.1 幂率质量函数 .....	37
4.3.2 对数正态质量函数 .....	43
4.4 总结和讨论 .....	49
第 5 章 区分原初黑洞和天体物理黑洞 .....	51
5.1 背景介绍 .....	51
5.2 通过亚太阳质量黑洞来区分原初黑洞和天体物理黑洞 .....	52
5.2.1 原初黑洞具有单色质量谱的情况 .....	52
5.2.2 原初黑洞具有一般质量谱的情况 .....	56
5.3 用超太阳质量黑洞来区分原初黑洞和天体物理黑洞 .....	60
5.4 总结和讨论 .....	65
第 6 章 脉冲星计时阵列对原初黑洞丰度的限制 .....	67
6.1 研究背景 .....	67
6.2 原初黑洞的形成机制 .....	68
6.3 标量诱导引力波 .....	69
6.4 脉冲星计时阵列数据分析 .....	72
6.5 结果与讨论 .....	76

第 7 章 总结 .....	79
参考文献 .....	81
致谢 .....	101
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果 .....	103

## 图形列表

- 2.1 脉冲星-地球系统。坐标原点选在地球。 $\hat{p}$  是脉冲星所在的方向。蓝色虚线代表引力波的传播方向。…………… 11
- 3.1 在质量为  $m_1, m_2 \geq 5M_\odot$  且  $m_1 + m_2 \leq 100M_\odot$  的范围内, 今天的原初双黑洞的并合率和  $f_{\text{PBH}}$  的关系图。蓝色点线和红色实线分别对应为幂率质量分布函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ ) 和对数正态质量分布函数 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。…………… 20
- 3.2 一维的并合率分布。其中  $m_H$  是双黑洞系统中较重黑洞的质量。我们把较轻黑洞的质量积分掉, 积分范围为  $5M_\odot$  到  $m_H$ 。蓝色实线对应的是  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  时的幂率形式的质量分布函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ ); 而红色实线对应的是  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$  时的对数正态形式的质量函数分布 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。…………… 21
- 3.3 二维的并合率分布。上图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  时的幂率形式的质量函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ ); 而下图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$  时的对数正态形式的质量函数 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。…………… 22
- 3.4 二维的可探测到的事件数  $\Lambda$  的分布 [见公式(3.40)], 以及 LIGO-Virgo 探测到的 6 个双黑洞并合事件。每个双黑洞并合事件的质量误差由图中的十字叉给出。上图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  时的幂率形式的质量函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ ); 而下图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$  时的对数正态形式的质量函数 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。…………… 23
- 4.1 来自天体物理双黑洞以及双中子星产生的随机引力波背景。绿线是双黑洞对应的随机引力波背景, 而红线是双中子星对应的引力波背景。蓝色则表示总的随机引力波背景 (包括双黑洞和双中子星的贡献); 而灰色区域则表示总的引力波背景的泊松误差。在这里, 我们取天体物理双黑洞的局域并合率为  $R = 103^{+110}_{-63} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ; 而双中子星的局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。图中的黑色实线表示 LIGO 第二个观测阶段的幂率积分曲线; 点虚线表示 LIGO 设计阶段对应的幂率积分曲线; 而虚线则表示 LISA 观测四年对应的幂率积分曲线。从图上可以看出, LIGO 设计阶段和 LISA 对应的幂率积分曲线都能跨过泊松误差区域, 表明天体物理双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。…………… 29

- 4.2 LISA 探测器对探测天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景的信噪比随观测时间的关系。黑色实线表示信噪比的中心值，而灰色区域表示信噪比的误差范围。在这里，我们取天体物理双黑洞的局域并合率为  $R = 103_{-63}^{+110} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ；而双中子星的局域并合率为  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。在大约观测 20 个小时后，LISA 可以探测到中心值大小的总的随机引力波背景；探测的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。 31
- 4.3 由天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景导致 LISA 探测器的有效应变灵敏度  $S_{\text{eff}}$ （黑色实线）以及相应的泊松误差（青色区域）。图中还给出了 LISA 探测器的应变灵敏度  $S_n$ （虚线）以及随机引力波背景对应的应变灵敏度  $S_{\text{GW}}$ （点虚线）和相应的泊松误差（灰色区域）。 32
- 4.4 由天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景对 LISA 探测器对于大质量双黑洞系统最大可探测红移  $z$  的影响。我们用  $M$  表示大质量双黑洞的总质量。我们固定质量比为  $q = 0.2$ 。我们分别考虑  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。上图的虚线表示 LISA 最大可探测红移的等高线，而黑色实线表示考虑了随机引力波背景后 LISA 的最大可探测红移的等高线。灰色区域是黑色实线对应的泊松误差范围。下图给出了考虑随机引力波背景后对 LISA 最大可探测红移所引起的变化及误差范围。 33
- 4.5 当原初黑洞质量函数为幂率形式的情况下，用 LIGO 第一个观测阶段的 3 个双黑洞并合事件拟合得到模型参数  $\{\vec{\theta}, R\} = \{\alpha, R\}$  的后验分布。 38
- 4.6 来自幂率质量分布的原初双黑洞以及双中子星产生的随机引力波背景。绿线是双黑洞对应的随机引力波背景，而红线是双中子星对应的随机引力波背景。蓝色表示总的随机引力波背景；而灰色区域表示总的随机引力波背景的泊松误差。对于双黑洞，我们固定  $\alpha$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\alpha = 1.61$  和  $R = 80_{-56}^{+108} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ，且  $f_{\text{PBH}} = 3.8_{-1.8}^{+2.3} \times 10^{-3}$ 。而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。图中的黑色实线表示 LIGO 第二个观测阶段 (O2) 的幂率积分曲线；点虚线表示 LIGO 设计阶段对应的幂率积分曲线；而虚线则表示 LISA 观测四年对应的幂率积分曲线。从图上可以看出，LIGO 设计阶段和 LISA 对应的幂率积分曲线都能跨过泊松误差区域，表明原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。 39

- 4.7 LISA 探测器对探测原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景的信噪比随观测时间的关系。原初黑洞的质量函数为幂率形式。黑色实线表示信噪比的中心值，而灰色区域表示信噪比的误差范围。对于双黑洞，我们固定  $\alpha$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\alpha = 1.61$  和  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。该情况下对应的原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ ；而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。在大约观测 10 个小时后，LISA 可以探测到中心值大小的总的随机引力波背景；探测的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。 · 40
- 4.8 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景导致 LISA 探测器的有效应变灵敏度  $S_{\text{eff}}$ （黑色实线）以及相应的泊松误差（青色区域）。原初黑洞的质量函数为幂率形式。图中还给出了 LISA 探测器的应变灵敏度  $S_n$ （虚线）以及引力波背景对应的应变灵敏度  $S_{\text{GW}}$ （点虚线）和相应的泊松误差（灰色区域）。····· 41
- 4.9 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景对 LISA 探测器对于大质量双黑洞系统最大可探测红移  $z$  的影响。我们用  $M$  表示大质量双黑洞的总质量。原初黑洞的质量函数为幂率形式。我们固定质量比为  $q = 0.2$ 。我们分别考虑  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。上图的虚线表示 LISA 最大可探测红移的等高线，而黑色实线表示考虑了随机引力波背景后 LISA 的最大可探测红移的等高线。灰色区域是黑色实线对应的泊松误差范围。下图给出了考虑随机引力波背景后对 LISA 最大可探测红移所引起的变化及误差范围。····· 42
- 4.10 当原初黑洞质量函数为对数正态形式的情况下，用 LIGO 第一个观测阶段的 3 个双黑洞并合事件拟合得到模型参数  $\{\vec{\theta}, R\} = \{m_c, \sigma, R\}$  的一维和二维后验分布。左图的等高线分别对应 68% 和 95% 的置信区间。····· 44
- 4.11 来自对数正态质量分布的原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景。绿线是双黑洞对应的随机引力波背景，而红线是双中子星对应的随机引力波背景。蓝色表示总的引力波背景；灰色区域则表示总的随机引力波背景的泊松误差。对于双黑洞，我们固定  $\{m_c, \sigma\}$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_{\odot}, 0.65\}$  和  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。该情况下对应的原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ ；而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。图中的黑色实线表示 LIGO 第二个观测阶段 (O2) 的幂率积分曲线；点虚线表示 LIGO 设计阶段对应的幂率积分曲线；而虚线则表示 LISA 观测四年对应的幂率积分曲线。LIGO 设计阶段和 LISA 对应的幂率积分曲线都能跨过泊松误差区域，表明原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。····· 45

- 4.12 LISA 探测器对探测原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景的信噪比随观测时间的关系。原初黑洞质量函数为对数正态形式。黑色实线表示信噪比的中心值，而灰色区域表示信噪比的误差范围。对于双黑洞，我们固定  $\{m_c, \sigma\}$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_\odot, 0.65\}$  和  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。该情况下对应的原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ ；而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。在大约观测 5 个小时后，LISA 可以探测到中心值大小的总的随机引力波背景；探测的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。 ..... 46
- 4.13 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景导致 LISA 探测器的有效应变灵敏度  $S_{\text{eff}}$ （黑色实线）以及相应的泊松误差（青色区域）。原初黑洞质量函数为对数正态形式。图中还给出了 LISA 探测器的应变灵敏度  $S_n$ （虚线）以及引力波背景对应的应变灵敏度  $S_{\text{GW}}$ （点虚线）和相应的泊松误差（灰色区域）。 ..... 47
- 4.14 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景对 LISA 探测器对于大质量双黑洞系统最大可探测红移  $z$  的影响。我们用  $M$  表示大质量双黑洞的总质量。原初黑洞质量函数为对数正态形式。仿照，我们固定质量比为  $q = 0.2$ 。我们分别考虑  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。上图的虚线表示 LISA 最大可探测红移的等高线，而黑色实线表示考虑了随机引力波背景后 LISA 的最大可探测红移的等高线。灰色区域是黑色实线对应的泊松误差范围。下图给出了考虑随机引力波背景后对 LISA 最大可探测红移所引起的变化及误差范围。 .. 48
- 5.1 LIGO O1 & O2、LIGO 设计、ET 和 CE 给出的等质量双黑洞并合率的 90% 上限  $R_{90}$ 。 ..... 53
- 5.2 由未探测到随机引力波背景和未探测到双黑洞并合对具有单质量分布的原初黑洞丰度  $f_{\text{PBH}}$  的限制。由于目前无法得知 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞中到底有没有原初双黑洞，所以我们在图上  $1M_\odot$  处用灰色竖线表示定向搜索的限制结果只对亚太阳质量的原初黑洞有效。黑色、紫色、洋红色和橙色曲线分别是 LIGO O1/O2、LIGO 设计、ET 和 CE 的定向搜索给出的可探测极限。LIGO 设计、ET 和 CE 的观测时间均假设为 1 年。红色曲线代表由于 LIGO O1 和 O2 未探测到随机引力波背景给、本地星系中存在白矮星（WD）、Subaru HSC 微透镜（HSC）、开普勒毫/微透镜（Kepler）、EROS/MACHO 微透镜（EROS）、OGLE 微透镜（OGLE）、超暗矮星系（UFD）的动态加热以及微波背景辐射对  $f_{\text{PBH}}$  限制的结果。 ..... 54
- 5.3  $\{R, P_1, P_2, P_3\}$  参数的后验分布。 ..... 58



- 5.4 对原初黑洞占冷暗物质丰度  $f_{\text{PBH}}$  的限制。蓝色区域是根据 LIGO 的 O1 和 O2 事件推断出来的对质量范围  $1M_{\odot} \leq m \leq 100M_{\odot}$  的限制。其中，中心虚线为中值，而阴影条代表 90% 的泊松误差。在质量范围  $[0.2, 1]M_{\odot}$  中显示的四条线分别代表了 LIGO O1、LIGO O1 & O2、ET 和 CE 给出的限制。 ..... 59
- 5.5 原初双黑洞和天体物理双黑洞给出的归一化并合率的红移分布  $R(z)/R(0)$ 。对于原初双黑洞和天体物理双黑洞，我们都只考虑双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ 。我们假设原初黑洞具有一般的质量分布（见公式(5.7)），且用最佳拟合值来计算原初双黑洞的并合率。 ..... 61
- 5.6 CE（上图）和 ET（下图）对于双黑洞的可观测事件数密度  $dN_{\text{obs}}/dz$  随红移的分布。对于原初双黑洞和天体物理双黑洞，我们都只考虑双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ 。我们假设原初黑洞具有一般的质量分布（见公式(5.7)）。 ..... 63
- 5.7 CE（上图）和 ET（下图）对双黑洞的可观测总数  $N_{\text{obs}}$  随红移的分布。对于原初双黑洞和天体物理双黑洞，我们都只考虑双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ 。我们假设原初黑洞具有一般的质量分布（见公式(5.7)）。 ..... 64
- 6.1 **上图**：NANOGrav 11 年数据集中，曲率扰动功率谱振幅  $A$  的 95% 上限与峰值频率  $f_*$  的关系。**下图**：相应的贝叶斯因子  $B_{10}$  与峰值频率  $f_*$  的关系。 ..... 77
- 6.2 从 NANOGrav 11 年数据集中得到的原初黑洞占冷暗物质丰度  $f_{\text{PBH}}$  的 95% 上限关于原初黑洞质量  $m_{\text{PBH}}$  的函数。图中还显示了来自 OGLE 微透镜 (OGLE)、EROS/MACHO 微透镜 (EROS) 和随机引力波背景的结果。水平虚线对应的是  $10^{-6}$ 。 ..... 78



## 表格列表

4.1 天体物理双黑洞产生的随机引力波背景、双中子星产生的随机引力波背景以及总的随机引力波背景在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近 (分别为 25 Hz 和 $3 \times 10^{-3}$ Hz) 的大小。我们还给出了 90% 的泊松误差范围。 .....	30
4.2 LIGO-Virgo 第一个观测阶段探测到的 3 个双黑洞并合事件的源的主要性质。 .....	37
4.3 原初双黑洞产生的随机引力波背景、双中子星产生的随机引力波背景以及总的随机引力波背景在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近 (分别为 25 Hz 和 $3 \times 10^{-3}$ Hz) 的大小。原初黑洞的质量函数为幂率形式。我们还给出了 90% 的泊松误差范围。 .....	38
4.4 原初双黑洞产生的随机引力波背景、双中子星产生的随机引力波背景以及总的随机引力波背景在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近 (分别为 25 Hz 和 $3 \times 10^{-3}$ Hz) 的大小。原初黑洞质量函数为对数正态形式。我们还给出了 90% 的泊松误差范围。 .....	44
6.1 数据分析中所使用的 6 颗脉冲星的基本属性: RMS-加权均方根计时残差, $N_{\text{epoch}}$ -观测数, $N_{\text{TOA}}$ -TOA 数, $T_{\text{obs}}$ -观测时间跨度。 .....	73
6.2 在 NANOGrav 11 年数据中搜索标量诱导引力波所使用的参数及其先验分布。我们用 $U$ 表示平的分布, $\log U$ 表示对数平的分布, 及 $\mathcal{N}$ 表示高斯分布。 .....	74



## 第 1 章 引言

引力波是爱因斯坦广义相对论最重要的理论预言之一。自从 2015 年 9 月 14 日首次直接探测到了一对双黑洞并合产生的引力波信号 (GW150914 [1]) 以来, 激光干涉引力波天文台 [2] (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, 简称 LIGO) 和室女座干涉仪 [3] (Virgo interferometer, 简称 Virgo) 为人类探测宇宙打开了一扇新的窗口, 开启了引力波天文学的新时代。双黑洞并合事件的观测使我们得以检验强场区域的引力性质 [4, 5], 并估算双黑洞的并合率以及黑洞的群体特征 (比如质量和自旋的分布) [6, 7]。其后, 在 2017 年 8 月 17 日 LIGO-Virgo 首次探测到了一对双中子星并合产生的引力波信号 (GW170817 [8]), 同时不同电磁波段的望远镜也观测到了该双中子星并合产生的电磁对应体 [9, 10], 标志着多信使引力波天文学新时代的来临。根据最新 LIGO-Virgo 科学组织发布的引力波瞬变目录 2 (Gravitational-Wave Transient Catalog 2, 简称 GWTC-2) [11], 目前一共探测到了 50 个致密双星并合的事例, 其中大多数都是双黑洞并合的事例。

在 LIGO-Virgo 探测到第一个双黑洞并合事件 (GW150914[1]) 后, 人们就试图理解引力波探测到的黑洞是如何形成的, 以及黑洞是如何成对的。事实上, 关于 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞的成因, 目前还存在争议。我们知道, 通过电磁波手段 (即 X 射线) 已探测到的银河系内的双黑洞的质量大概在  $5 \sim 15 M_{\odot}$  [12]。而 GW150914 事件的双黑洞质量分别为  $36^{+5}_{-4} M_{\odot}$  和  $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$  [1], 要远大于 X 射线探测到黑洞的质量。所以, 有猜想认为, 有别于 X 射线探测到的天体物理黑洞, 引力波探测到的黑洞可能形成于其它机制, 例如原初黑洞 [13–16]。原初黑洞是在宇宙早期由于原初密度扰动的引力塌缩而形成的黑洞 [17–20]。原初黑洞不仅可以解释 LIGO-Virgo 探测到的黑洞, 而且是暗物质的候选者之一, 可能构成部分或全部的暗物质。

为了和 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞的事件率做比较, 我们需要知道原初双黑洞的并合率分布, 进而用引力波探测数据来限制原初黑洞的模型参数。利用黑洞质量分布的信息以及理论模型推演出来的并合率, 我们将有可能回答引力波探测到的黑洞的起源以及这些黑洞是如何演化的。在 LIGO-Virgo 已公开的

几十个双黑洞事例中，黑洞的质量并不是一样的，而是有分布的，并且质量处于  $5 \sim 91 M_{\odot}$  之间 [11]。然而，在过去估算原初双黑洞并合率的研究中，人们通常假定所有原初黑洞的质量都是一样的，即假定原初黑洞的质量谱是单色的 [13, 14, 21–23]。最近，文献 [24] 和文献 [25] 都计算了有质量分布的原初黑洞的并合率。但他们的计算都有可以改进的地方。例如，文献 [24] 只考虑了距离原初双黑洞系统最近的第三个黑洞对双黑洞系统的潮汐作用，而忽略了其他黑洞对双黑洞系统的相互作用；而文献 [25] 只考虑了原初黑洞的质量谱是平的分布，而且质量谱的宽度很窄。在考虑所有原初黑洞以及线性物质密度扰动对原初双黑洞系统产生的力矩的情况下，如何计算具有一般质量谱的原初双黑洞的并合率分布，这是本论文要研究的第一个内容。

由于地基引力波探测器探测能力的限制，LIGO-Virgo 引力波探测器目前只能探测到红移  $z < 1$  以内的双黑洞并合产生的引力波事件 [26, 27]。除了被 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞外，宇宙中还有许许多多无法被 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞或其他星体并合的事件。这些致密天体并合的过程中产生的引力波会相互叠加形成随机引力波背景 [28]。随机引力波背景是引力波探测的重要波源之一，目前还未被探测到。假设 LIGO-Virgo 探测到的所有的黑洞都来自天体演化形成的 [26, 29–32]，文献 [33, 34] 计算了来自双黑洞产生的随机引力波背景。这些研究表明在最乐观的估计下，天体物理双黑洞产生的随机引力波背景可能在 LIGO-Virgo 达到其最终设计灵敏度之前就被探测到了。假设 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞是原初双黑洞，如何计算原初双黑洞产生的随机引力波背景以及估算这一背景对未来的空间引力波探测器比如激光干涉空间天线（Laser Interferometer Space Antenna，简称 LISA） [35] 的影响，这是本论文要研究的第二个内容。

除了原初黑洞模型，天体物理黑洞模型也可能解释 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞。天体物理双黑洞的形成和并合是由演化环境主导的。在文献中，天体物理双黑洞模型主要有三种机制。第一种是动态形成机制，即大质量恒星的演化形成黑洞，而黑洞被分离到星团核心，最后配对形成双黑洞系统 [36–38]。第二种是经典孤立的双星演化机制，即双黑洞是通过质量转移或公共包层抛射（common envelope ejection）而形成的 [31, 39–42]。第三种是化学均匀演化机制，即由于氦气在整个包络体中的混合 [43, 44]，使得恒星几乎在化学物质均匀的环境种演化形成黑洞。双黑洞的群体属性，如自旋 [45–52]、红移 [53–55] 和偏心率分布

[56–59] 等性质有可能区分不同机制的天体物理双黑洞模型。在未来，随着引力波探测器的更新换代，我们将探测到越来越多的引力波事件。第三代地基引力波探测器，如爱因斯坦望远镜（Einstein Telescope，简称 ET）[60] 和宇宙勘探者（Cosmic Explorer，简称 CE）[61] 有望每年探测到  $\mathcal{O}(10^5)$ [62, 63] 个双黑洞并合事件。如何通过大量的双黑洞并合事件，并利用探测到的双黑洞数目随红移演化的信息来区分这些黑洞到底是天体物理黑洞还是原初黑洞，这是本论文要研究的第三个内容。

原初黑洞是由宇宙早期的标量扰动的增强而形成的 [17, 18]。原初黑洞形成的过程将不可避免地伴随着由标量诱导的次生引力波 [64–70]。这些标量诱导引力波是由辐射主导时期的标量扰动驱动的，会留下现在依然可检测的信号，所以通过标量诱导引力波也可以间接探测原初黑洞暗物质 [20, 71–79]。由于原初黑洞是由曲率扰动概率密度的尾部形成的，所以形成单个原初黑洞的概率对曲率扰动功率谱的振幅相当敏感 [80]。因此，原初黑洞占冷暗物质的丰度对标量诱导引力波的振幅极为敏感。如果探测到标量诱导引力波将为原初黑洞的存在提供证据；而如果没有探测到标量诱导引力波将对原初黑洞的丰度给出限制。目前地基引力波探测器的可探测频率为  $10 \sim 10^4$  Hz[81]。作为补充工具，稳定的毫秒脉冲星是天然的星系级引力波探测器。脉冲星可探测纳赫兹频段的引力波，为探索宇宙打开了一扇新的窗口。由引力引起的时空扰动会影响脉冲星的射电脉冲达到地球的时间，从而通过监测脉冲到达时间（time of arrival，简称 TOA）的变化可以探测引力波。一颗脉冲星和地球构成的系统相当于一个星系级别的引力波探测器。可以把很多颗脉冲星和地球构成的系统看成一个大的引力波探测器网络，即脉冲星计时阵列（pulsar timing array，简称 PTA）[82–84]，进而提高探测能力。目前世界上有三个大的脉冲星计时阵列合作组织，分别是北美纳赫兹引力波天文台（North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves，简称 NANOGrav）[85]、澳大利亚的帕克斯脉冲星计时阵列（Parkes Pulsar Timing Array，简称 PPTA）[86] 和欧洲脉冲星计时阵列（European Pulsar Timing Array，简称 EPTA）[79]。这些脉冲星计时阵列组织结合形成国际脉冲星计时阵列（International Pulsar Timing Array，简称 IPTA）[87]。目前各个脉冲星计时阵列已经积累了对数十颗脉冲星长达十几年的观测数据。虽然脉冲星计时阵列还没有探测到引力波，但是脉冲星计时阵列的数据可以对各种物理过程（比如宇宙弦 [88–90]、单个超大质量双黑

洞产生的连续引力波 [91–93]、引力波的记忆效应 [94, 95] 以及幂律谱的随机引力波背景 [88, 89, 96]) 进行限制。虽然各个引力波组没有探测到以上提到的各种引力波源, 但是由于标量诱导引力波背景的能量密度谱和其他引力波源的能量密度谱具有显著区别 [97], 所以并不能排除引力波计时阵列数据中存在标量诱导引力波的可能性。在脉冲星计时阵列的数据中搜索标量诱导引力波, 进而间接探测原初黑洞暗物质, 这是本论文要研究的第四个内容。

本文将研究通过引力波来探测原初黑洞, 具体研究上述提到的四个方面的内容。在接下来的第二章里, 我们将回顾引力波的基础知识, 包括引力波的传播方程的推导、引力波的能动张量的定义、标量诱导引力波的计算以及脉冲星计时阵列探测随机引力波背景的原理。

在第三章里, 我们考虑所有其他原初黑洞以及线性密度扰动产生的力矩对原初双黑洞演化的影响, 然后计算了具有一般质量分布情况下的原初双黑洞的并合率分布。利用我们得到的并合率分布以及 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞并合的引力波数据, 我们对原初黑洞占冷暗物质的丰度给出限制。

在第四章里, 我们计算了双黑洞和双中子星并合产生的随机引力波背景。我们考虑了两种不同的双黑洞形成机制, 分别是天体物理双黑洞和原初双黑洞机制。并分析这一引力波背景能否被未来的空间引力波探测器 (比如 LISA) 观测到。如果这一引力波背景没能从 LISA 探测器中扣除掉, 将会构成 LISA 的额外噪音。我们进而分析了由引力波背景构成的噪音对 LISA 的探测能力的影响。

在第五章里, 我们探讨了通过下一代地基引力波探测器, 比如爱因斯坦望远镜和宇宙勘探者, 来区分原初黑洞和天体物理黑洞的可能性。通过定向搜寻亚太阳质量的双黑洞系统, 我们估算了原初黑洞占暗物质丰度的可探测上限。另外, 我们预测了爱因斯坦望远镜和宇宙勘探者能够探测到的双黑洞事件数目随红移的分布, 从而来区分原初黑洞和天体物理黑洞模型。

在第六章里, 我们首次在 NANOGrav 11 年的脉冲星数据中搜索伴随原初黑洞形成而产生的标量诱导引力波信号。并对引力波的振幅和原初黑洞占冷暗物质的丰度给出限制。

在第七章里, 我们对本文的内容做总结。



## 第2章 引力波基础

在本章中，我们将回顾引力波的基础知识，包括引力波的传播方程的推导、引力波的能动张量的定义、标量诱导引力波的计算以及脉冲星计时阵列探测随机引力波背景的原理。

### 2.1 线性爱因斯坦方程

我们知道时空几何与物质的关系由爱因斯坦方程描述

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

其中  $G$  为牛顿引力常数， $T_{\mu\nu}$  是物质场的能动张量在这里。在这里，我们选取光速  $c = 1$ 。时空几何由爱因斯坦张量  $G_{\mu\nu}$  给出，其定义为

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

其中  $R_{\mu\nu}$  为里奇张量。由于引力耦合常数  $G$  很小，所以由于引力辐射而产生的引力波非常微弱。在弱场近似下，度规  $g_{\mu\nu}$  可以分解为闵氏度规  $\eta_{\mu\nu}$  及其微扰  $h_{\mu\nu}$ ，即

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.3)$$

由于  $h_{\mu\nu}$  是个小量，所以逆度规可分解为

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

进而可以算出联络的为

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu} h_{\mu}^{\lambda} - \partial^{\lambda} h_{\mu\nu}). \quad (2.6)$$

由上式可知联络是微扰  $h_{\mu\nu}$  的一阶小量，所以只有联络点一阶导数对里奇张量有贡献，即

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\alpha} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h). \quad (2.8)$$

上式中的  $\square$  为达朗贝尔算符，其定义为

$$\square h_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

同时，里奇标量为

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \quad (2.10)$$

利用(2.2)式，可算出爱因斯坦张量为

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\lambda h^{\alpha\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h). \quad (2.11)$$

下面引入迹相反的扰动  $\bar{h}_{\mu\nu}$ ，其定义为

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

注意  $\bar{h}_{\mu\nu}$  和  $h_{\mu\nu}$  的迹是相反的，即

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h. \quad (2.13)$$

下面我们选取洛伦兹规范，即要求  $\bar{h}^{\mu\nu}$  是横向的，使得

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.14)$$

需要注意的是原始的扰动  $h_{\mu\nu}$  并不是横向的，因为其满足

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h. \quad (2.15)$$

在洛伦兹规范下，爱因斯坦张量为

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

所以在洛伦兹规范下，线性爱因斯坦方程是波动方程，即

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

上式可以用来计算线性理论下的引力波的产生。为了考虑引力波的传播以及引力波对探测器的响应，我们需要考虑波源之外的引力波方程，即  $T_{\mu\nu} = 0$ ，进而有

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

上式表明引力波是以光速传播的。上式还有多余的自由度，在考虑引力波传播的时候，通常选取横向无迹（transverse-traceless，简称 TT）规范，即要求

$$\partial^\mu h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0, \quad h^{\text{TT}} = 0. \quad (2.19)$$

## 2.2 引力波的能动张量

由于引力是非定域的，所以我们无法毫无争议地给出引力场能量的局部定义。在弱场近似下，由于背景是平坦的闵氏时空，所以我们有可能给出引力波能动张量的定义。我们知道引力波的能量是二阶效应，所以需要度规展开到二阶，即

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^{(1)} + h_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad (2.20)$$

其中  $h_{\alpha\beta}^{(1)}$  和  $h_{\alpha\beta}^{(2)}$  分别为度规的一阶和二阶扰动。有了度规扰动，我们可以将爱因斯坦方程展开到二阶。 $h_{\alpha\beta}^{(1)}$  要满足线性阶的扰动方程，即

$$G_{\alpha\beta}[h^{(1)}] = 0. \quad (2.21)$$

将爱因斯坦方程展开到二阶可以得到

$$G_{\alpha\beta}[h^{(2)}] = 8\pi G \Theta_{\alpha\beta} \equiv - \left\langle G_{\alpha\beta} \left[ (h^{(1)})^2 \right] \right\rangle. \quad (2.22)$$

上式中的括号  $\langle \rangle$  表示短波平均 [98, 99]。我们用  $\Theta_{\alpha\beta}$  表示引力波的能动张量。上式表明一阶扰动产生的能动张量可以作为二阶扰动的源。

我们先考虑场方程的一阶扰动。将里奇张量展开到一阶，其表达式为

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ 2\partial_\gamma \partial_{(\alpha} h_{\beta)}^{(1)\gamma} - \partial_\alpha \partial_\beta h^{(1)} - \partial_\gamma \partial^\gamma h_{\alpha\beta}^{(1)} \right]. \quad (2.23)$$

将上式代入爱因斯坦方程(2.21)可得

$$\partial_\gamma \partial_{(\alpha} h_{\beta)}^{(1)\gamma} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta h^{(1)} - \frac{1}{2} \partial_\gamma \partial^\gamma h_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \left( \partial_\gamma \partial^\gamma h^{(1)} - \partial^\gamma \partial^\delta h_{\gamma\delta}^{(1)} \right) = 0. \quad (2.24)$$

在 TT 规范下，上式可化简得到公式(2.18)，即

$$\square h_{\alpha\beta}^{(1)\text{TT}} = 0. \quad (2.25)$$

接下来考虑场方程的二阶扰动。里奇张量的二阶扰动为

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[ 2\partial_\gamma \partial_{(\alpha} h_{\beta)}^{(2)\gamma} - \partial_\alpha \partial_\beta h^{(2)} - \partial_\gamma \partial^\gamma h_{\alpha\beta}^{(2)} \right] + \frac{1}{2} \partial_\beta \left[ h^{(1)\gamma\delta} \left( 2\partial_{(\alpha} h_{\gamma)\delta}^{(1)} - \partial_\delta h_{\alpha\gamma}^{(1)} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_\gamma \left[ h^{(1)\gamma\delta} \left( 2\partial_{(\alpha} h_{\beta)\delta}^{(1)} - \partial_\delta h_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \right] + \frac{1}{4} \partial_\gamma h^{(1)} \left[ 2\partial_{(\alpha} h_{\beta)}^{(1)\gamma} - \partial^\gamma h_{\alpha\beta}^{(1)} \right] \\ & - \frac{1}{4} \left[ \partial_\alpha h^{(1)\gamma\delta} \partial_\beta h_{\gamma\delta}^{(1)} + 2\partial_\gamma h_\alpha^{(1)\delta} \partial_\delta h_\beta^{(1)\gamma} - 2\partial_\gamma h_\alpha^{(1)\delta} \partial^\gamma h_{\beta\delta}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

在 TT 规范下, 上式可化简为

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{(2)} = & -\frac{1}{2}\partial_\gamma\partial^\gamma h_{\alpha\beta}^{(2)\text{TT}} + \frac{1}{4}\partial_\alpha h_{\text{TT}}^{(1)\gamma\delta}\partial_\beta h_{\gamma\delta}^{(1)\text{TT}} + \frac{1}{2}h_{\text{TT}}^{(1)\gamma\delta}\partial_\alpha\partial_\beta h_{\gamma\delta}^{(1)\text{TT}} + \frac{1}{2}h_{\text{TT}}^{(1)\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta h_{\alpha\beta}^{(1)\text{TT}} \\ & - h_{\text{TT}}^{(1)\gamma\delta}\partial_\delta\partial_{(\alpha}h_{\beta)\gamma}^{(1)\text{TT}} + \partial_{[\delta}h_{\gamma]\beta}^{(1)\text{TT}}\partial^\delta h_{\alpha}^{(1)\text{TT}\gamma}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

利用公式(2.22)可得到引力波的能量张量为

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \partial_\alpha h_{\gamma\delta}^{\text{TT}} \partial_\beta h_{\text{TT}}^{\gamma\delta} \right\rangle. \quad (2.28)$$

由此可进一步得到引力波的能量密度

$$\rho_{\text{GW}} \equiv \Theta_{00} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_0 h_{\rho\sigma} \partial_0 h^{\rho\sigma} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} \rangle. \quad (2.29)$$

### 2.3 标量诱导引力波

下面我们考虑原初标量扰动产生的次生引力波。在牛顿规范下, 扰动的 FRW (Friedmann-Robertson-Walker) 度规为 [70]

$$ds^2 = a^2 \left\{ -(1+2\phi)d\eta^2 + \left[ (1-2\phi)\delta_{ij} + \frac{h_{ij}}{2} \right] dx^i dx^j \right\}, \quad (2.30)$$

其中  $\eta$  为共形时间,  $a$  为尺度因子,  $\phi \equiv \phi^{(1)}$  是标量模式的一阶扰动,  $h_{ij} \equiv h_{ij}^{(2)}$  为张量模式的二阶扰动。因为我们关心的是由标量扰动  $\phi$  诱导的引力波  $h_{ij}$ , 所以我们忽略掉矢量扰动。在辐射为主时期, 通过爱因斯坦方程可以给出傅立叶空间的标量扰动  $\phi$  的演化方程为

$$\phi_k''(\eta) + \frac{4}{\eta}\phi_k'(\eta) + \frac{k^2}{3}\phi_k(\eta) = 0. \quad (2.31)$$

这个运动方程的解为 [74],

$$\phi_k(\eta) \equiv \phi_k \frac{9}{(k\eta)^2} \left[ \frac{\sin(k\eta/\sqrt{3})}{k\eta/\sqrt{3}} - \cos(k\eta/\sqrt{3}) \right], \quad (2.32)$$

其中  $\phi_k$  是  $\eta = 0$  时的原初扰动, 其值由暴胀模型给出。由爱因斯坦方程可以给出二阶张量扰动的运动方程为

$$h_{ij}'' + 2\mathcal{H}h_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} = -4\mathcal{T}_{ij}^{\ell m} S_{\ell m}, \quad (2.33)$$

其中一撇表示对共形时间  $\eta$  的导数, 而  $\mathcal{H} = a'/a$  为共形哈勃参数。上式的源项为 [70]

$$S_{ij} = 4\phi\partial_i\partial_j\phi + 2\partial_i\phi\partial_j\phi - \frac{1}{\mathcal{H}^2}\partial_i(\mathcal{H}\phi + \phi')\partial_j(\mathcal{H}\phi + \phi'). \quad (2.34)$$

在方程(2.33)的右边, 我们通过 TT 投影算符  $\mathcal{T}_{ij}^{\ell m}$  将源项投影到 TT 规范下。  $\mathcal{T}_{ij}^{\ell m}$  的定义为

$$\mathcal{T}_{ij}^{\ell m} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[ e_{ij}(\vec{k}) e^{\ell m}(\vec{k}) + \bar{e}_{ij}(\vec{k}) \bar{e}^{\ell m}(\vec{k}) \right], \quad (2.35)$$

其中极化张量定义为

$$\begin{aligned} e_{ij}(\vec{k}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e_i(\vec{k}) e_j(\vec{k}) - \bar{e}_i(\vec{k}) \bar{e}_j(\vec{k}) \right], \\ \bar{e}_{ij}(\vec{k}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e_i(\vec{k}) \bar{e}_j(\vec{k}) + \bar{e}_i(\vec{k}) e_j(\vec{k}) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

上式中的  $e(\vec{k})$  和  $\bar{e}(\vec{k})$  为垂直于传播方向  $\vec{k}$  的两个单位矢量。  $e(\vec{k})$  和  $\bar{e}(\vec{k})$  都是时间依赖的, 并且互相垂直。通过格林函数方法求解傅立叶空间的方程(2.33), 可以得到 [74],

$$h(\vec{k}, \eta) = \frac{1}{ka(\eta)} \int d\tilde{\eta} \sin(k\eta - k\tilde{\eta}) a(\tilde{\eta}) S_{\vec{k}}(\tilde{\eta}), \quad (2.37)$$

其中  $S_{\vec{k}}(\eta) \equiv -4e^{ij}(\vec{k}) \tilde{S}_{ij}(\vec{k}, \eta)$ , 且  $\tilde{S}_{ij}(\vec{k}, \eta)$  为源项在傅立叶空间的表达式。标量诱导引力波的无量纲功率谱  $\mathcal{P}_h(k)$  可以通过两点关联得到

$$\left\langle h(\vec{k}, \eta) h(\vec{k}', \eta) \right\rangle \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(k, \eta) \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (2.38)$$

通过公式(2.29)可以得到随机引力波背景的能量密度  $\rho_{\text{GW}}$  为

$$\rho_{\text{GW}} = \int \rho_{\text{GW}}(f, \eta) d \ln f = \frac{M_p^2}{16a^2} \left\langle \overline{\partial_k h_{ij} \partial^k h^{ij}} \right\rangle, \quad (2.39)$$

其中  $M_p$  是普朗克质量, 而横线代表做时间平均 [100]。下面引入每对数频率无量纲的引力波能量密度参数  $\Omega_{\text{GW}}(\eta, k)$  为

$$\Omega_{\text{GW}}(\eta, f) \equiv \frac{\rho_{\text{GW}}(f, \eta)}{\rho_c}, \quad (2.40)$$

其中  $\rho_c$  为当前宇宙的临界能量密度。在物质-辐射平衡时期, 引力波的能量密度参数为

$$\Omega_{\text{GW}, \text{eq}}(k) = \frac{1}{24} \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \overline{\mathcal{P}_h(k, \eta)}, \quad (2.41)$$

进而可以得到今天的能量密度谱为 [100, 101]

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{GW}}(k) &= \Omega_r \times \Omega_{\text{GW}, \text{eq}}(k) = \Omega_r \times \Omega_{\text{GW}}(\eta \rightarrow \infty, k) \\ &= \Omega_r \int_0^\infty dv \int_{|1-v|}^{1+v} du I(u, v) P_\phi(vk) P_\phi(uk), \end{aligned} \quad (2.42)$$

其中  $\Omega_r$  为今天的辐射能量密度参数，而  $P_\phi(k)$  是标量扰动  $\phi$  的功率谱。这里的  $u$  和  $v$  都是无量纲的变量。通过把源项  $\langle S_{\vec{k}}(\vec{\eta}) S_{\vec{k}'}(\vec{\eta}) \rangle$  对共形时间做卷积可以得到  $I(u, v)$  的表达式。在辐射主导时期， $I(u, v)$  有近似的解析表达式为 [100, 101]

$$I(u, v) = \frac{27}{64} \left( \left( -4uv + (u^2 + v^2 - 3) \log \left| \frac{3 - (u+v)^2}{3 - (u-v)^2} \right| \right)^2 + \pi^2 (u^2 + v^2 - 3)^2 \Theta(u + v - \sqrt{3}) \right) \times \left( \frac{3(u^2 + v^2 - 3)(-4v^2 + (1 - u^2 + v^2)^2)}{16u^4 v^4} \right)^2, \quad (2.43)$$

其中  $\Theta$  为 Heaviside 阶跃函数。

## 2.4 脉冲星计时阵列探测随机引力波背景

下面介绍通过脉冲星计时阵列探测随机引力波背景的基本原理。由于随机引力波背景可以改变脉冲星发出的脉冲达到地球的时间，所以通过观测脉冲到达地球时间变化的关联可以探测随机引力波背景。

引力波引起的脉冲信号的红移不仅取决于脉冲星和地球系统的几何位置关系，还取决于引力波对应的度规扰动 [83]。对于位于单位矢量  $\hat{p}$  方向（即从地球到脉冲的方向）的脉冲星，以及沿  $\hat{\Omega}$  方向传播的引力波（见图2.1），脉冲信号的红移和度规扰动的改变成正比，即 [83]

$$z(t, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}, \quad (2.44)$$

其中

$$\Delta h_{ij} \equiv h_{ij}(t_e, \hat{\Omega}) - h_{ij}(t_p, \hat{\Omega}). \quad (2.45)$$

上式的  $t_p$  和  $t_e$  分别表示脉冲信号发射的时刻和到达地球的时刻。通过对公式(2.44)的角度沿天空所有方向进行积分，可以得到总的红移

$$z(t) = \int_{S^2} d\hat{\Omega} z(t, \hat{\Omega}). \quad (2.46)$$

在脉冲星探测时，我们观测到的并不是红移，而是脉冲信号的计时残差（timing residual），其为红移的积分，即

$$r(t) = \int_0^t dt' z(t'). \quad (2.47)$$

我们将度规扰动用平面波展开为 [102]

$$h_{ij}(t, \vec{x}) = \sum_A \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d\hat{\Omega} e^{i2\pi f(t - \hat{\Omega} \cdot \vec{x})} h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}), \quad (2.48)$$

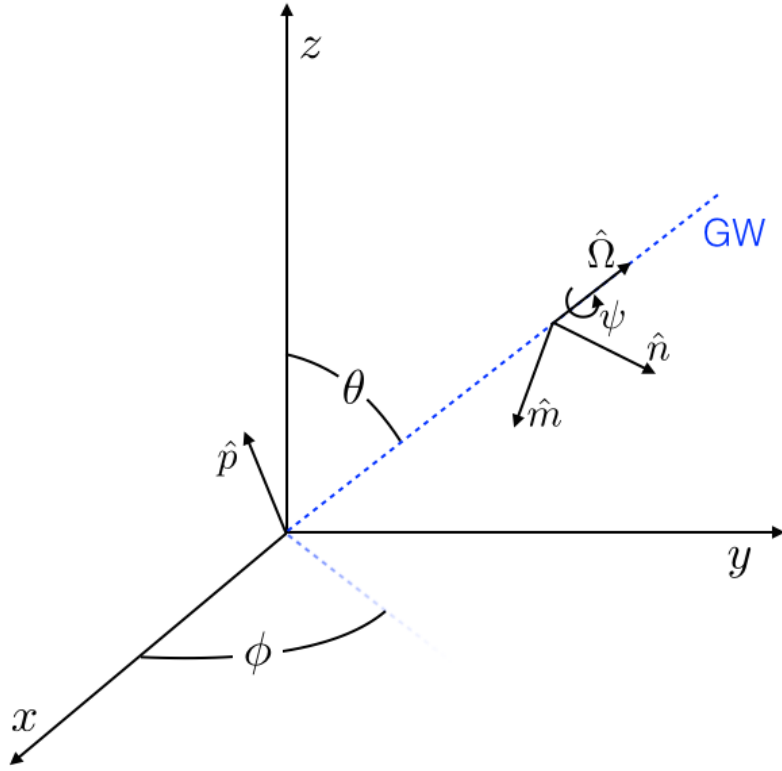


图 2.1 脉冲星-地球系统。坐标原点选在地球。 $\hat{p}$  是脉冲星所在的方向。蓝色虚线代表引力波的传播方向。

Figure 2.1 The pulsar-Earth system, as visualized with the Earth at the origin. The pulsar locates along  $\hat{p}$  direction. The gravitational wave propagates as the blue dashed line.

其中  $f$  是引力波的频率， $A = +, \times$  表示引力波的极化，而  $e_{ij}^A(\hat{\Omega})$  为引力波的极化张量。利用上式的平面波分解，我们可以得到频率空间的计时残差为

$$\tilde{r}(f, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2\pi i f} \left( 1 - e^{-2\pi i f L(1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p})} \right) \sum_A h_A(f, \hat{\Omega}) \left( e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{2(1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p})} \right), \quad (2.49)$$

其中  $L$  为脉冲星和地球的距离。极化张量的表达式为

$$e_{ij}^+(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{m}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad (2.50a)$$

$$e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{m}_j. \quad (2.50b)$$

图2.1的各个方向为

$$\hat{\Omega} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \hat{r}, \quad (2.51a)$$

$$\hat{m} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0) = -\hat{\phi}, \quad (2.51b)$$

$$\hat{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) = \hat{\theta}. \quad (2.51c)$$

假定随机引力波背景是各向同性的、无极化的和稳态的，应变的关联函数为 [83]

$$\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle = \frac{3H_0^2}{32\pi^3} \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \delta_{AA'} \delta(f - f') |f|^{-3} \Omega_{\text{GW}}(|f|). \quad (2.52)$$

所以脉冲星计时残差之间的关联为

$$\langle \tilde{r}_I^*(f) \tilde{r}_J(f') \rangle = \frac{H_0^2}{16\pi^4} \delta(f - f') |f|^{-5} \Omega_{\text{GW}}(|f|) \Gamma_{IJ}, \quad (2.53)$$

其中  $\Gamma_{IJ}$  是脉冲星  $I$  和脉冲星  $J$  之间的关联函数（即 Hellings & Downs 关联系数） [103]

$$\Gamma_{IJ} = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1 - \cos \zeta_{IJ}}{2} \left[ \ln \left( \frac{1 - \cos \zeta_{IJ}}{2} \right) - \frac{1}{6} \right] \right] + \frac{1}{2} \delta_{IJ}. \quad (2.54)$$

上式的  $\zeta_{IJ}$  是脉冲星  $I$  和脉冲星  $J$  之间的角度。脉冲星计时阵列探测随机引力波背景的关键目标就是探测到公式(2.53)所对应的关联。



## 第3章 原初双黑洞并合率

### 3.1 背景介绍

人们普遍认为在宇宙早期, 由于密度涨落的塌缩, 有可能形成原初黑洞 [17, 18, 104]。另外, 理解暗物质的本性到底是什么, 依然是困扰物理学界的一大难题。作为暗物质的候选者之一, 原初黑洞近年来吸引了越来越多的关注。这是因为原初黑洞不仅可能构成部分或全部的暗物质, 而且 LIGO-Virgo 科学组织探测到的引力波事件 [1] 可能就来源于原初双黑洞的并合 [13, 14]。

根据 LIGO-Virgo 科学组织最新发布的引力波瞬变目录 2[11], 目前一共探测到了 50 个致密双星并合事例。其中大多数都是双黑洞并合的事例。引力波的观测表明, 黑洞应当有质量分布, 而不是单一质量的。事实上, 形成原初黑洞的初始条件也表明原初黑洞的质量谱应当有一定的宽度。

在文献中, 主要有两种原初双黑洞的形成机制。在第一种机制中, 原初双黑洞形成于早期宇宙 [14, 21, 22]; 而在另一种机制中, 原初双黑洞形成于晚期宇宙 [13, 22, 23]。研究表明, 原初双黑洞的并合率主要由第一种机制主导。在过去的研究中, 人们通常假定所有原初黑洞的质量都是一样的, 即假定原初黑洞的质量谱是单色的 [13, 14, 21–23]。最近, 文献 [24] 和文献 [25] 计算了有质量分布的原初双黑洞的并合率。但他们的计算都有可以改进的地方。例如, 文献 [24] 只考虑了距离原初双黑洞系统最近的第三个黑洞对双黑洞系统的潮汐作用, 而忽略了其他黑洞对双黑洞系统的相互作用; 文献 [25] 只考虑了平的原初黑洞质量谱, 而且质量谱的宽度很窄。

在这章中, 我们将计算最一般质量谱下的原初双黑洞的并合率。在计算过程中, 我们将考虑所有其他原初黑洞以及线性物质密度扰动对原初双黑洞系统产生的力矩。在未来的几十年内, 我们将探测到越来越多的双黑洞并合事件, 进而获取更多的黑洞质量分布的信息。利用黑洞质量分布的信息以及理论模型推演出来的并合率, 我们将有可能回答引力波探测到的黑洞的起源以及这些黑洞是如何演化的。

### 3.2 有质量分布情况下的原初双黑洞并合率的计算

我们将原初黑洞的质量分布函数记作  $P(m)$ ，其满足归一化条件

$$\int_0^\infty P(m)dm = 1. \quad (3.1)$$

同时，在质量区间  $(m, m + dm)$  内的原初黑洞占冷暗物质的丰度为

$$f_{\text{tol}} P(m)dm, \quad (3.2)$$

其中  $f_{\text{tol}}$  是原初黑洞占非相对论物质的总丰度。为了方便，我们以太阳质量  $M_\odot$  作为原初黑洞质量的单位。原初黑洞占冷暗物质的丰度和  $f_{\text{tol}}$  的关系为  $f_{\text{PBH}} \equiv \Omega_{\text{PBH}}/\Omega_{\text{CDM}} \approx f_{\text{tol}}/0.85$ 。为了方便，我们将质量分布函数做离散化，即

$$\int P(m)dm = 1 \rightarrow \sum_{m_{\min} \leq m_i \leq m_{\max}} P_i \Delta \simeq 1, \quad (3.3)$$

其中  $P(m_i) \rightarrow P_i$  是粗粒化的质量分布函数，而  $dm_i \rightarrow \Delta$  是原初黑洞质量的微小单元。简单来说，质量为  $m_i$  的原初黑洞的丰度即为  $f P_i \Delta \equiv f_i \Delta$ 。在辐射-物质平衡时期，总的能量密度为

$$\rho_{\text{eq}} = \Omega_m \rho_{\text{crit}} (1 + z_{\text{eq}})^3, \quad (3.4)$$

而两个质量为  $m_i$  的原初黑洞之间的平均距离  $\bar{x}_i$  为

$$\bar{x}_i = \left( \frac{3}{4\pi} \frac{m_i}{\rho_{\text{eq}} f_i \Delta} \right)^{1/3}. \quad (3.5)$$

需要注意的是， $\bar{x}_i$  不仅取决于原初黑洞的质量  $m_i$ ，而且取决于该质量的原初黑洞的丰度  $f_i \Delta$ 。需要强调的是，不同质量的原初黑洞的数密度可以极不相同的。所以对所有原初黑洞来说，并没有良好定义的数密度概念。对于两个邻近但质量不同的原初黑洞，假定其质量分别为  $m_i$  和  $m_j$ ，则它们的平均距离为

$$\langle x_{ij} \rangle = \left( \bar{x}_i^{-3} + \bar{x}_j^{-3} \right)^{-1/3} = \mu_{ij}^{1/3} \bar{x}_{ij}, \quad (3.6)$$

其中

$$\mu_{ij} = \frac{2m_i m_j f_b}{m_b (f_j m_i + f_i m_j)}, \quad (3.7)$$

$$\bar{x}_{ij}^3 = \frac{3}{8\pi} \frac{m_b}{\rho_{\text{eq}} f_b \Delta}, \quad (3.8)$$

并且

$$f_b = f_i + f_j, \quad (3.9)$$

$$m_b = m_i + m_j. \quad (3.10)$$

需要注意的是，以上公式只有当两个原初黑洞具有不同质量，即  $m_i \neq m_j$  时才成立。当  $m_i = m_j = m$  时，需要做如下替换  $P(m_i) = P(m_j) = P(m)/2$ 。在本章中，在不会混淆的情况下，我们去掉下标 ‘ $ij$ ’。

下面我们考虑原初双黑洞的形成和演化过程。在宇宙早期，两个邻近的原初黑洞需要从宇宙膨胀的背景中退耦出来才能形成双黑洞束缚系统。假设质量为  $m_i$  和  $m_j$  的两个原初黑洞沿着运动方向的固有距离为  $r$ ，则在在牛顿近似下， $r$  需要满足以下运动方程

$$\ddot{r} - (\dot{H} + H^2)r + \frac{m_b}{r^2} \frac{r}{|r|} = 0, \quad (3.11)$$

其中一点表示对固有时间的导数。在本章中，我们使用几何单位制，即要求牛顿常数  $G$  和光速  $c$  满足  $G = c = 1$ 。

假设两个原初黑洞的共动距离为  $x$ 。为了方便，我们定义  $\chi \equiv r/x$ 。则公式(3.11)可以改写为

$$\chi'' + \frac{sh' + h}{s^2 h} (s\chi' - \chi) + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(sh)^2} \frac{1}{\chi^2} \frac{\chi}{|\chi|} = 0, \quad (3.12)$$

其中一撇代表对尺度因子  $s$  的导数。我们将尺度因子在辐射-物质平衡时期的大小定为 1。公式(3.12)的  $h(s)$  定义为  $h(s) \equiv H(s) / \left( \frac{8\pi}{3} \rho_{\text{eq}} \right)^{1/2} = \sqrt{s^{-3} + s^{-4}}$ 。这里的  $\lambda$  是一个无量纲的参数，其定义为

$$\lambda = \frac{8\pi \rho_{\text{eq}} x^3}{3m_b} = \frac{X}{f_b \Delta}, \quad (3.13)$$

其中

$$X \equiv x^3 / \bar{x}^3, \quad (3.14)$$

其中  $\bar{x}$  由公式(3.8)给出。由公式(3.12)的解可以看出如果  $\lambda < 1$  则退耦会发生在辐射-物质平衡之前 [22]。另外，双黑洞系统的半长轴  $a$  的解为

$$a \approx 0.1 \lambda x = \frac{0.1}{f_b \Delta} \frac{x^4}{\bar{x}^3} = \frac{0.1 \bar{x}}{f_b \Delta} X^{\frac{4}{3}}. \quad (3.15)$$

如果没有其他黑洞或者密度扰动提供潮汐力，双黑洞则会直接迎头碰撞而并合。如果有潮汐力的话，那么潮汐力会为双黑洞系统提供角动量，从而使得双

黑洞形成束缚系统，而不是直接并合。为了方便，我们引入一个无量纲的角动量  $j$ ，其定义为

$$j \equiv \ell / \sqrt{m_b a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.16)$$

其中  $\ell$  为单位约化质量的角动量。另外  $e \in [0, 1]$  为偏心率。下面的关键问题乃是估计初始轨道的参数。我们推广了文献 [22] 中的方法来估算两个具有不同质量的原初黑洞构成的双黑洞系统的初始轨道参数。下面我们给出简要的推导过程。

假设牛顿势为  $\phi$ ，则局域的潮汐场为  $T_{ij} = -\partial_i \partial_j \phi$ 。潮汐场会产生潮汐力。对每单位质量，潮汐力的大小为  $\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}$ 。由于双黑洞系统的初始共动距离要比平均距离小很多，所以潮汐力并不会对双黑洞的轨道有很大的影响。潮汐力会产生力矩，其大小为

$$\boldsymbol{\ell} = \int dt \mathbf{r} \times [\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}]. \quad (3.17)$$

由于在辐射主导时期，其他原初黑洞以及密度涨落产生的潮汐场正比于  $s^{-3}$ ，即  $\mathbf{T} \simeq s^{-3} \mathbf{T}_{\text{eq}}$ ，所以角动量为

$$\mathbf{j} \approx x^3 \hat{\mathbf{x}} \times \left[ \frac{\mathbf{T}_{\text{eq}}}{m_b} \cdot \hat{\mathbf{x}} \right], \quad (3.18)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}$  是沿着  $\mathbf{x}$  方向的单位矢量，而  $\mathbf{T}_{\text{eq}}$  是在辐射-物质平衡时期的局域潮汐场。现在考虑质量为  $m_l$  的第三个原初黑洞。假设这个黑洞与双黑洞的距离  $y$  远远大于双黑洞的距离  $x$ ，即  $y \gg x$ ，则第三个黑洞产生的潮汐场为

$$T_{eq}^{ij} = m_l \frac{3\hat{y}^i \hat{y}^j - \delta^{ij}}{y^3}, \quad (3.19)$$

其中  $\hat{\mathbf{y}}$  是沿着  $\mathbf{y}$  方向的单位矢量。(3.18)式进而可以变为

$$\mathbf{j} \approx 3 \frac{m_l}{m_b} \frac{x^3}{y^3} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}). \quad (3.20)$$

与文献 [22] 类似，下面我们参照 [105] 来计算角动量的概率分布函数。所有其他黑洞产生的角动量  $j$  的二维概率密度函数为

$$\frac{dP}{d^2 j} = \lim_{V \rightarrow \infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}} \prod_l I_l^{N_l}, \quad (3.21)$$

其中  $N_l = n_l V$  是所有质量为  $m_l$  的原初黑洞的数目。另外， $I_l$  为

$$I_l = \int_V \frac{d^3 y}{V} \exp \left[ -3 \frac{m_l}{m_b} i \frac{x^3}{y^5} y_{\parallel} \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}_{\perp} \right], \quad (3.22)$$

其中  $y_{||}$  和  $y_{\perp}$  分别定义为  $y_{||} \equiv \mathbf{y} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ ,  $y_{\perp} \equiv \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{y}$ 。经过繁琐的计算, 我们会得到

$$\lim_{V \rightarrow \infty} I_l^{N_l} = e^{-\frac{4\pi}{3} \frac{m_l}{m_b} n_l x^3 k}. \quad (3.23)$$

由于所有质量为  $m_l$  的原初黑洞的能量密度为  $m_l n_l = \rho_l$ , 并且  $\sum_l \rho_l = \rho_{\text{pbh}} = f \rho_{\text{eq}}$ , 所以我们可以得到

$$\frac{dP}{dj} = j \int k dk J_0(kj) e^{-j_X k}, \quad (3.24)$$

其中

$$j_X = 0.5 \frac{f}{f_b \Delta} X. \quad (3.25)$$

$j_X$  表征了所有其他原初黑洞产生的力矩的总和。对公式(3.24)积分会得到

$$j \frac{dP}{dj} \Big|_X = \mathcal{P}(j/j_X), \quad \mathcal{P}(\gamma) = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma^2)^{3/2}}, \quad (3.26)$$

其中  $\gamma = j/j_X$ 。此外, 密度涨落产生的力矩  $\mathbf{j}$  的方差为

$$\langle j^2 \rangle^{1/2} \approx 0.5 \frac{8\pi}{3} \frac{\sigma_{\text{eq}} \rho_{\text{eq}}}{m_b} x^3 = 0.5 \frac{\sigma_{\text{eq}}}{f_b \Delta} X, \quad (3.27)$$

其中  $\sigma_{\text{eq}} \equiv \langle \delta_{\text{eq}}^2 \rangle^{1/2}$  是其他暗物质在辐射-物质平衡时期在  $O(10^0 \sim 10^3) M_{\odot}$  尺度上的密度涨落的方差。考虑到所有其他原初黑洞以及密度涨落产生的力矩, 那么(3.26)式中的  $j_X$  的特征大小为

$$j_X \approx 0.5 (f^2 + \sigma_{\text{eq}}^2)^{1/2} \frac{X}{f_b \Delta}. \quad (3.28)$$

在形成原初双黑洞系统后, 由于引力波辐射, 双黑洞系统的轨道会收缩, 最后并合。双黑洞的并合时间由系统的质量、轨道距离以及角动量共同决定, 具体为 [106]

$$t = \frac{3}{85} \frac{a^4}{m_i m_j m_b} j^7. \quad (3.29)$$

考虑到公式(3.15), 则无量纲的角动量为

$$j(t; X) = \left( \frac{85}{3} \frac{t m_i m_j m_b (f_b \Delta)^4}{(0.1 \bar{x})^4 X^{16/3}} \right)^{1/7}. \quad (3.30)$$

假设所有原初黑洞在空间上是随机分布的，则两个为  $m_i$  和  $m_j$  的最相邻原初黑洞的距离为  $x$ ，且在体积  $\frac{4\pi}{3}x^3$  内没有其他原初黑洞的概率为

$$\frac{dP}{d\tilde{X}} = e^{-\frac{4\pi}{3}x^3 n_T} = e^{-\tilde{X} \cdot \frac{4\pi}{3} \langle x_{ij} \rangle^3 n_T}, \quad (3.31)$$

其中  $\tilde{X} \equiv x^3 / \langle x_{ij} \rangle^3 = X/\mu$ ，而  $\mu$  由公式(3.7)给出，并且  $n_T \equiv f \rho_{\text{eq}} \int_0^\infty \frac{P(m)}{m} dm$ 。如果  $m_i \approx m_j$ ，则  $\mu \approx 1$ 。但是如果两个原初黑洞的质量比很大的话，那么  $\mu$  可以远远小于 1，那么文献 [22] 中给出的近似表达式  $dP/dX \approx 1$  将不再有效。需要注意的是，我们推广了文献 [22] 计算单一质量原初黑洞的结果，我们发现在有质量分布的情况下，在指数项会有一个  $1/\mu$  因子的修正。在  $m_i = m_j$  的特例下， $\mu = 1$ ，进而我们的结果退回到文献 [22] 的结果。然而，对于极端质量比的双黑洞系统，这个因子可能会产生很大影响，进而导致文献 [22] 使用的近似表达式  $e^{-X/\mu} \approx 1$  不再有效。利用关系式  $j \propto t^{1/7}$ ， $\partial j / \partial t = j/(7t)$  和公式(3.26)，我们得到

$$\frac{d^2 P}{d\tilde{X} dt} = \frac{1}{7t} e^{-\tilde{X} \cdot \frac{4\pi}{3} \langle x_{ij} \rangle^3 n_T} \mathcal{P}(\gamma_X), \quad \gamma_X \equiv \frac{j(t; X)}{j_X}, \quad (3.32)$$

其中  $j_X$  由公式(3.28)给出。对上式的  $\tilde{X}$  进行积分，我们可以得到并合时间的概率分布函数

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\mu^{-1}}{7t} \int dX e^{-\frac{X}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{3} \langle x_{ij} \rangle^3 n_T} \mathcal{P}(\gamma_X), \quad (3.33)$$

进而在时间  $t$  时，原初黑洞的共动并合率为

$$R_{ij}(t) \equiv \frac{dN_{\text{merger}}}{dt dV} = \rho_m^0 \min \left( \frac{f_i \Delta}{m_i}, \frac{f_j \Delta}{m_j} \right) \frac{dP}{dt}, \quad (3.34)$$

其中  $\rho_m^0 \simeq 4 \times 10^{19} M_\odot \text{Gpc}^{-3}$  为今天的物质密度。概率函数  $\mathcal{P}(\gamma_X)$  有一个很尖的峰，其尖峰的位置为

$$X_*(t) \approx 0.032 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{3}{37}} f_b \Delta (f^2 + \sigma_{\text{eq}}^2)^{-\frac{21}{74}} (m_i m_j)^{\frac{3}{37}} m_b^{-\frac{1}{37}}. \quad (3.35)$$

由于  $\frac{X_*}{\mu} \cdot \frac{4\pi}{3} \langle x_{ij} \rangle^3 n_T \ll 1$ ，所以在  $t$  时刻的共动并合率为

$$R_{ij}(t) = R_{ij}(t) \Delta^2, \quad (3.36)$$

其中

$$\begin{aligned} R_{ij}(t) &\approx 3.9 \cdot 10^6 \times \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{34}{37}} f^2 (f^2 + \sigma_{\text{eq}}^2)^{-\frac{21}{74}} \\ &\times \min \left( \frac{P(m_i)}{m_i}, \frac{P(m_j)}{m_j} \right) \left( \frac{P(m_i)}{m_i} + \frac{P(m_j)}{m_j} \right) \\ &\times (m_i m_j)^{\frac{3}{37}} (m_i + m_j)^{\frac{36}{37}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

$R_{ij}(t)$  是以  $\text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$  为单位的共动并合率密度分布。需要注意到是, 本章中原初黑洞的质量是以太阳质量  $M_{\odot}$  为单位的。需要再次强调的是, 在  $m_i = m_j = m$  时,  $P(m_i) = P(m_j) = P(m)/2$ 。文献 [25] 定义了一个量  $\tilde{\alpha} \equiv -(m_i + m_j)^2 \partial^2 \ln R_{ij} / \partial m_i \partial m_j$ , 且认为  $\tilde{\alpha}$  的值应该约等于 36/37。如果  $P(m)/m$  是个常数的话, 那么  $\tilde{\alpha} = 36/37$ , 则和文献 [25] 的结果吻合。但是对于一个一般的质量函数分布,  $\tilde{\alpha}$  可以不同于 36/37。

### 3.3 与引力波数据的比较

下面我们考虑文献中经常用到的两个原初黑洞的质量函数分布。第一个是幂率分布 [104]

$$P(m) \approx \frac{\alpha - 1}{M} \left( \frac{m}{M} \right)^{-\alpha} \quad (3.38)$$

其中  $m \geq M$ , 且  $\alpha > 1$ 。第二个为对数正态分布 [107]

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma m} \exp\left(-\frac{\ln^2(m/m_c)}{2\sigma^2}\right), \quad (3.39)$$

其中  $m_c$  表征质量谱的峰值, 而  $\sigma$  表征质量谱的宽度。在文献 [108] 中, LIGO-Virgo 科学组织限制了质量范围在  $m_1, m_2 \geq 5M_{\odot}$  和  $m_1 + m_2 \leq 100M_{\odot}$  内的双黑洞的并合率大小  $R_T$ , 要求  $12 \lesssim R_T \lesssim 213 \text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ 。与文献 [22] 一样, 我们取  $\sigma_{\text{eq}} \approx 0.005$ 。在图3.1我们列出了这两种质量分布下的并合率随着原初黑洞丰度的关系。其中粉红色区域是 LIGO-Virgo 科学组织给出的并合率的范围。在这个图中, 对于幂率质量分布函数, 我们选取  $M = 5M_{\odot}$  和  $\alpha = 1.6$ ; 而对于对数正态质量分布函数, 我们选取  $m_c = 15M_{\odot}$  和  $\sigma = 0.6$ 。从这个图可以看出, 用原初黑洞模型确实可以解释 LIGO-Virgo 科学组织探测的双黑洞。从 LIGO-Virgo 科学组织给出的并合率限制, 我们可以反推出原初黑洞占暗物质丰度  $f_{\text{PBH}}$  的限制。对于幂率形式的质量分布函数,  $f_{\text{PBH}}$  需要满足  $1.4 \times 10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 6.6 \times 10^{-3}$ ; 而对于对数正态形式的质量分布函数,  $f_{\text{PBH}}$  需要满足  $1.2 \times 10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 5.7 \times 10^{-3}$ 。以上得到的  $f_{\text{PBH}}$  的限制和其他观测 [109–123] 给出来的是一致的。

从图3.1可以看出, 不同的质量分布都能解释目前 LIGO-Virgo 得到的并合率限制。为了打破这种简并, 我们需要更多的信息。假如固定总的并合率为  $R_T = 100 \text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ , 对于幂率形式的质量函数, 我们可以得到  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$ ; 而



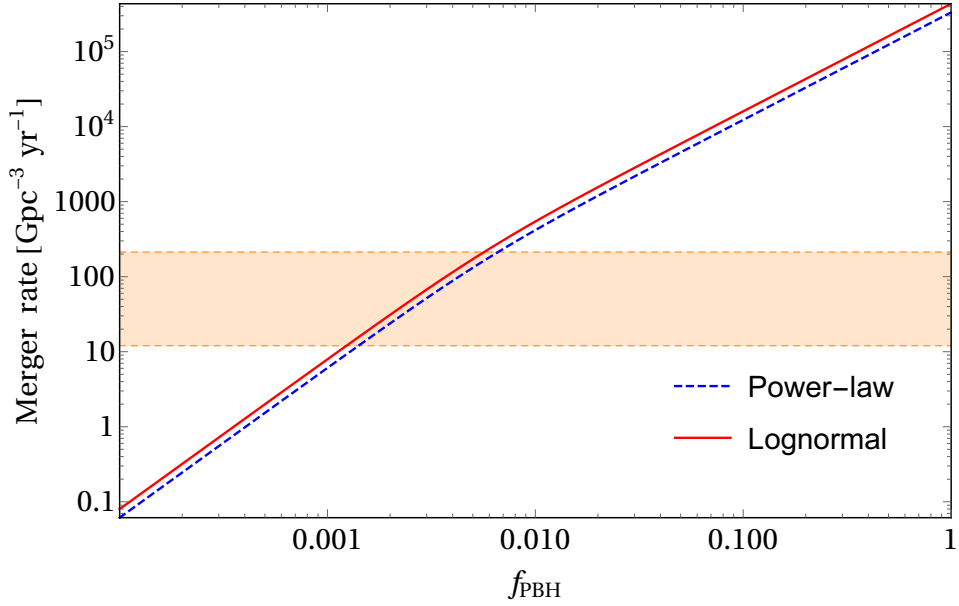


图 3.1 在质量为  $m_1, m_2 \geq 5M_\odot$  且  $m_1 + m_2 \leq 100M_\odot$  的范围内，今天的原初双黑洞的并合率和  $f_{\text{PBH}}$  的关系图。蓝色点线和红色实线分别对应为幂率质量分布函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ ) 和对数正态质量分布函数 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。

**Figure 3.1** The merger rate of PBH binaries at present as a function of  $f_{\text{PBH}}$  with  $m_1, m_2 \geq 5M_\odot$  and  $m_1 + m_2 \leq 100M_\odot$ . The blue dotted and red solid lines correspond to the *power-law* mass distribution ( $M = 5M_\odot$  and  $\alpha = 1.6$ ) and *lognormal* mass distribution ( $m_c = 15M_\odot$  and  $\sigma = 0.6$ ), respectively.

对于对数正态形式的质量分布函数，我们可以得到  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$ 。在图3.2中，通过把较轻的黑洞质量积分掉，我们画出了一维的并合率分布。可以看出，尽管幂率形式的质量分布和对数正态形式的质量函数分布都能给出相同的总并合率  $R_T$ ，然而它们对应的一维并合率分布却大不相同。在图3.3中，我们给出了二维的并合率分布中，由此我们可以得到更多的信息。

为了将计算得到的并合率和 LIGO-Virgo 探测到的引力波事件作比较，我们需要考虑 LIGO-Virgo 引力波探测器的灵敏度。这是因为并不是所有发生并合的双黑洞事件都能被 LIGO-Virgo 探测到，只有那些辐射出来的引力波的频率正好处于 LIGO-Virgo 灵敏的频段才能被 LIGO-Virgo 探测到。由于现阶段 LIGO-Virgo 能够探测到的并合事件的红移  $z$  大概在  $z \in [0, 1]$ ，所以预计能探测到的事件数  $\Lambda$  大致为 [124–127]

$$\Lambda_{ij} = \int_0^1 R_{ij}(z) \frac{d\langle VT \rangle}{dz} dz, \quad (3.40)$$

其中  $\langle VT \rangle$  是 LIGO-Virgo 平均能探测到的时空体积。 $\langle VT \rangle$  不仅取决于探测器本



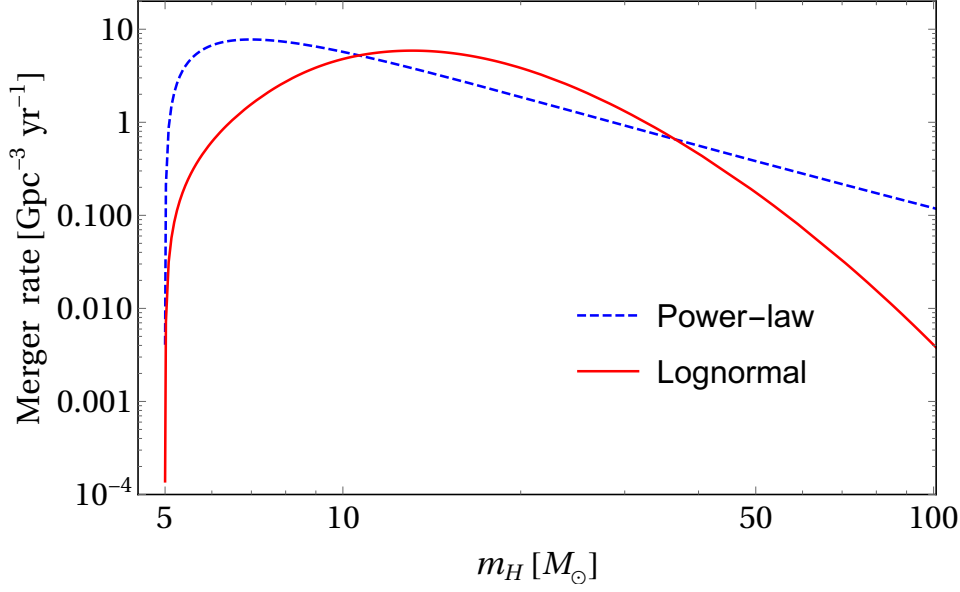


图 3.2 一维的并合率分布。其中  $m_H$  是双黑洞系统中较重黑洞的质量。我们把较轻黑洞的质量积分掉，积分范围为  $5M_\odot$  到  $m_H$ 。蓝色实线对应的是  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  时的幂率形式的质量分布函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ )；而红色实线对应的是  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$  时的对数正态形式的质量函数分布 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。

Figure 3.2 The 1D merger rate distribution, where  $m_H$  is the mass of heavier BH in the binary and the mass of lighter BH is integrated over from  $5M_\odot$  to  $m_H$ . The blue dotted and red solid lines correspond to the power-law PDF ( $M = 5M_\odot$  and  $\alpha = 1.6$ ) with  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  and lognormal PDF ( $m_c = 15M_\odot$  and  $\sigma = 0.6$ ) with  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$ , respectively.

身，而且还取决于双黑洞源的性质，比如双黑洞的质量大小。仿照 [124, 125, 128, 129]，我们采取半解析的方法来计算  $\langle VT \rangle$ 。在这里，我们假设 LIGO 的第一个观测阶段 (O1) 和第二观测阶段 (O2) 具有相同的空间体积。对于第一个探测阶段，其有 48.6 天的有效观测时间 [130]；而对于第二个探测阶段，其有 117 天的有效观测时间 [8]。需要注意的是， $\Lambda$  并不是被探测到的双黑洞并合事件的平均数，而是超过一定阈值的事件数的平均值 [124]。在这里我们取信噪比 ( $\text{SNR} > 8$ ) 作为可探测的阈值。在图 3.4 中，我们给出了二维的可探测事件数  $\Lambda$  的分布，以及 LIGO-Virgo 探测到的 6 个双黑洞并合事件。由于我们只用了有限的 6 个引力波事件，所以并不能最终确定哪个形式的质量分布函数和引力波数据拟合得更好。随着探测到双黑洞并合事件的累积，利用我们计算得到的原初黑洞并合率的分布，我们有可能确定黑洞质量函数的形式，以及黑洞质量到底有没有质量间隙 [131, 132]。

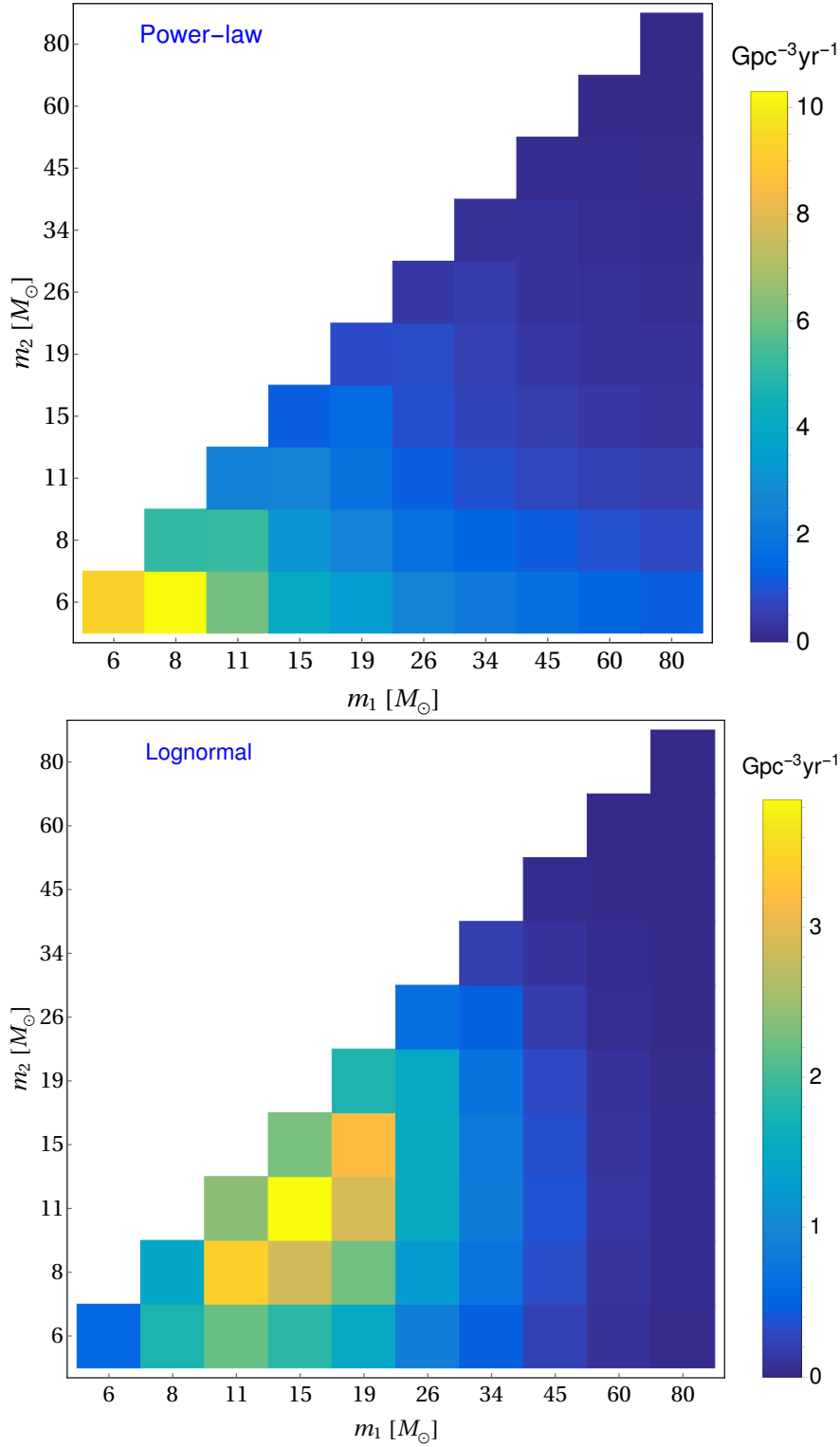


图 3.3 二维的并合率分布。上图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  时的幂率形式的质量函数 ( $M = 5M_\odot$  且  $\alpha = 1.6$ )；而下图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$  时的对数正态形式的质量函数 ( $m_c = 15M_\odot$  且  $\sigma = 0.6$ )。

Figure 3.3 The 2D merger rate distributions. The top and bottom panels correspond to the *power-law* mass function ( $M = 5M_\odot$  and  $\alpha = 1.6$ ) with  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  and *lognormal* mass function ( $m_c = 15M_\odot$  and  $\sigma = 0.6$ ) with  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$ , respectively.

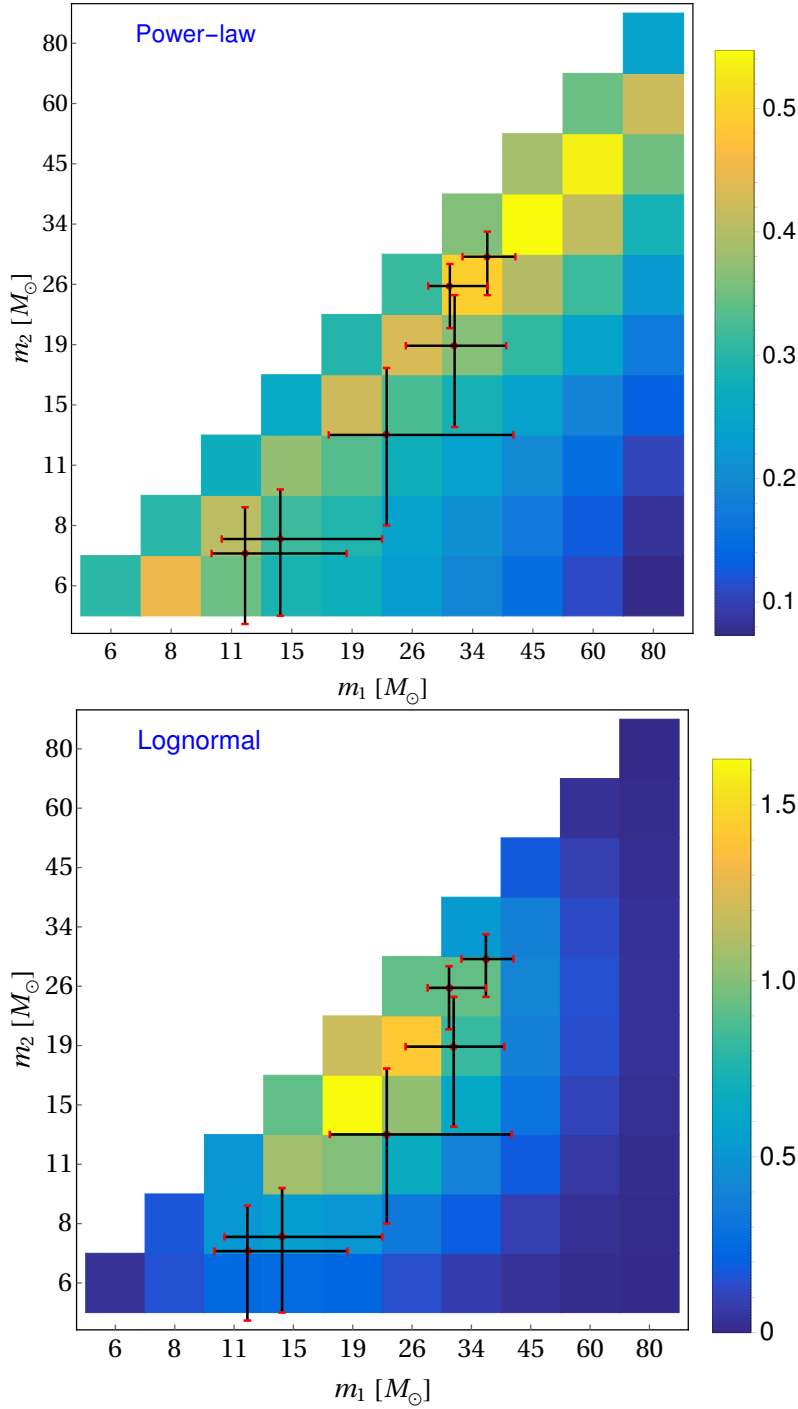


图 3.4 二维的可探测到的事件数  $\Lambda$  的分布 [见公式(3.40)], 以及 LIGO-Virgo 探测到的 6 个双黑洞并合事件。每个双黑洞并合事件的质量误差由图中的十字叉给出。上图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  时的幂率形式的质量函数 ( $M = 5M_{\odot}$  且  $\alpha = 1.6$ ); 而下图对应的是  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$  时的对数正态形式的质量函数 ( $m_c = 15M_{\odot}$  且  $\sigma = 0.6$ )。

**Figure 3.4** The 2D distributions for  $\Lambda$  [see Eq. (3.40)], along with the 6 events detected by LIGO-Virgo. The crosses indicate error bars for each event. The top and bottom panels correspond to the *power-law* mass function ( $M = 5M_{\odot}$  and  $\alpha = 1.6$ ) with  $f_{\text{PBH}} = 4.3 \times 10^{-3}$  and *lognormal* mass function ( $m_c = 15M_{\odot}$  and  $\sigma = 0.6$ ) with  $f_{\text{PBH}} = 3.7 \times 10^{-3}$ , respectively.

### 3.4 本章小结

在本章中，我们计算了具有一般质量分布情况下的原初双黑洞的并合率分布。在计算过程中，我们考虑所有其他原初黑洞以及线性密度扰动产生的力矩对原初双黑洞演化的影响。我们将计算得到的并合率分布与引力波数据做比较。我们分别考虑了幂率形式以及对数正态形式的原初黑洞的质量函数。对于幂率和对数正态形式的原初黑洞的质量函数，其对应的原初黑洞占暗物质的丰度  $f_{\text{PBH}}$  大概的量级为  $10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-2}$ 。我们得到的结果和其他观测 [109–123] 给出的结果是一致的，证实了绝大多数的暗物质不是由恒星级质量的原初黑洞构成的 [14, 22, 24, 25]。

目前有很多模型可以解释 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞并合事件。观测这些双黑洞并合率的分布可能是区分原初黑洞模型和其他模型的一种强有力手段。我们发现原初双黑洞的并合率正比于  $t^{-34/37}$ 。这是原初黑洞模型显著区别于其他模型的地方之一。此外，我们还发现一维和二维的并合率分布对原初黑洞的质量分布非常敏感。随着观测时间的增加以及引力波探测器的升级换代，未来我们可以观测到越来越多的双黑洞并合事件。利用一维和二维的原初黑洞并合率分布，我们有望重构出原初黑洞的质量分布，进而帮助我们理解 LIGO-Virgo 科学组织探测到的黑洞到底是怎么形成的，以及是如何演化的。

## 第4章 双黑洞和双中子星并合产生的引力波背景

### 4.1 背景介绍

LIGO-Virgo 科学组织已经探测到双黑洞和双中子星并合产生的引力波 [1, 8, 108, 130, 133–136], 为我们打开一扇探索宇宙的新窗口, 并且引领人类进入了引力波天文学和多信使引力波天文学的新时代。截至目前, LIGO-Virgo 科学组织已经探测到了几十例双黑洞并合的引力波事件。然而这些双黑洞到底是如何产生和演化的, 目前还有争议。事实上, 在文献中多种不同的形成机制来解释 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞并合事件。假设 LIGO-Virgo 探测到的所有黑洞都是来自天体演化形成的, 那么恒星级质量的双黑洞的并合率被限制为  $12 - 213 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [108]。另外, 利用探测到的双中子星并合事件 GW170817 [8], 可以估算双中子星的并合率为  $1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。

由于地基引力波探测器探测能力的限制, LIGO-Virgo 引力波探测器目前只能探测到红移  $z < 1$  以内的双黑洞并合产生的引力波事件 [26, 27]。所以, 除了被 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞外, 宇宙中还有许许多多无法被 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞或其他星体并合的事件。这些致密天体并合的过程中产生的引力波会相互叠加形成随机引力波背景 [28]。不同的双黑洞形成机制预言的双黑洞的并合率和质量及红移的关系通常也不同, 所以不同的双黑洞形成机制通常会预言不同的随机引力波背景能量谱。

假设 LIGO-Virgo 探测到的所有的黑洞都来自天体演化形成的 [26, 29–32], 文献 [33, 34] 计算了来自双黑洞产生的随机引力波背景。同时文献 [137] 考虑了双中子星产生的随机引力波背景。这些研究表明, 在最乐观的估计下, 这些天体产生的随机引力波背景可能在 LIGO-Virgo 达到其最终设计灵敏度之前就被探测到。除了天体物理成因之外, LIGO-Virgo 探测到的双黑洞还可能来自原初黑洞。原初黑洞可能构成部分或全部的冷暗物质。在宇宙早期, 由于原初密度涨落, 足够致密的区域可以塌缩进而形成原初黑洞 [17, 18]。在文献中, 有两种原初双黑洞的形成机制 (参见综述 [20, 138])。在第一种原初双黑洞的形成机制中, 两个邻近的原初黑洞由于第三个黑洞产生力矩的作用而形成双黑洞束缚系统 [14, 21, 139]。由于这一过程发生在宇宙早期, 所以通常被称为早期形成机制。

文献 [24, 112] 考虑了这种形成机制产生的随机引力波背景，表明这种机制产生的随机引力波背景强度可与天体物理机制产生的随机引力波背景强度比拟，所以可以作为一种新的手段来限制原初黑洞占冷暗物质的丰度。然而，文献 [24] 只考虑了最邻近的第三个原初黑洞对双黑洞系统角动量的贡献，而忽略了其他原初黑洞以及暗物质对角动量的贡献。同时，文献 [112] 只考虑单色的原初黑洞质量谱（即所有原初黑洞都具有相同的质量）。在第二种机制中，原初黑洞处于暗物质晕中，由于原初黑洞之间的引力相互作用而偶发形成双黑洞束缚系统 [13, 123, 140–142]。由于形成双黑洞系统的时间比第一种机制要晚，这种形成机制又被称为晚期形成机制。这种机制产生的随机引力波背景要远远小于天体物理机制产生的随机引力波背景，而且很难被 LIGO-Virgo 探测到 [143]。如果考虑原初黑洞是有质量分布的情况，则产生的随机引力波背景可能会比单色质量谱的情况要强 [142]。

除了地基引力波项目外，还有空间引力波探测器正在筹划中。例如 LISA 计划在 2034 年投入运行 [35]。不同于 LIGO-Virgo 地面探测器，LISA 可以探测到更低的频率范围，即大约为  $10^{-4} \sim 10^{-1}$  Hz。在本章中，我们将要研究双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景。我们将同时考虑 LIGO-Virgo 和 LISA 频段。另外我们还将考虑随机引力波背景对 LISA 探测能力的影响。

## 4.2 天体物理双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景

在宇宙中有许多的源可以辐射引力波。不同源产生的引力波通常频段也不一样。在众多的引力波源中，双黑洞和双中子星是最重要的两种。这两种源可以产生很强的随机引力波背景，从而影响 LISA 的探测能力。在本节，我们将考虑天体物理双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景。

随机引力波背景的能量密度谱通常由一个无量纲的量  $\Omega_{\text{GW}}$  来刻画 [102]

$$\Omega_{\text{GW}}(\nu) = \frac{\nu}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d\nu}, \quad (4.1)$$

其中  $d\rho_{\text{GW}}$  是频率从  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  的能量密度， $\rho_c = 3H_0^2 c^2 / (8\pi G)$  是宇宙的临界密度。另外  $H_0 = 67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  是哈勃参数 [144]。对于双致密天体（例如双黑洞和双中子星）并合产生的随机引力波背景，其强度为 [145–148]

$$\Omega_{\text{GW}}(\nu) = \frac{\nu}{\rho_c H_0} \int_0^{z_{\text{max}}} dz \int dm_1 dm_2 \frac{\mathcal{R}(z, m_1, m_2) \frac{dE_{\text{GW}}}{d\nu_s}(\nu_s, m_1, m_2)}{(1+z)E(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_\Lambda, z)}, \quad (4.2)$$

其中  $\nu_s = (1+z)\nu$  是源参照系的频率。上式分母出现的  $E(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_\Lambda, z)$  是为了考虑共动体积对红移  $z$  的依赖，其定义为

$$E(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_\Lambda, z) \equiv \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (4.3)$$

我们取普朗克卫星的最佳拟合值作为各个参数的值 [144]，即辐射能量密度参数  $\Omega_r = 9.15 \times 10^{-5}$ ，物质能量密度参数  $\Omega_m = 0.3089$  和宇宙学常数能量密度参数  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$ 。对于天体物理双黑洞系统，我们选取截断红移  $z_{\max} = 10$  [33]；而对于原初双黑洞系统，我们选取  $z_{\max} = \nu_3/\nu - 1$  [112]。其中  $\nu_3$  由下面的公式(4.4)给出。对于单个双黑洞来说，其辐射的能量密度谱  $dE_{\text{GW}}/d\nu_s$  可以近似表达为 [147, 149, 150]

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{d\nu_s} = \frac{(\pi G)^{2/3} M^{5/3} \eta}{3} \begin{cases} \nu_s^{-1/3}, & \nu_s < \nu_1, \\ \frac{\nu_s}{\nu_1} \nu_s^{-1/3}, & \nu_1 \leq \nu_s < \nu_2, \\ \frac{\nu_s^2}{\nu_1 \nu_2^{4/3}} \frac{\nu_4^4}{(4(\nu_s - \nu_2)^2 + \nu_4^2)^2}, & \nu_2 \leq \nu_s < \nu_3, \end{cases} \quad (4.4)$$

其中  $\nu_i = (a_i \eta^2 + b_i \eta + c_i) / (\pi G M / c^3)$ ， $M = m_1 + m_2$  是双黑洞系统的总质量，并且  $\eta = m_1 m_2 / M^2$ 。这里的系数  $a_i$ 、 $b_i$  和  $c_i$  由文献 [151] 的表 I 给出。在这里我们并不考虑偏心率的影响，这是因为偏心率只有在  $10^{-4}$  Hz 以下对引力波的波形才有影响 [152]，而 LISA 可探测的频率要大于  $10^{-4}$  Hz。

下面我们将采用被广泛接受的“Vangioni”模型 [152] 来估计天体物理双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景。对于天体物理双黑洞或者双中子星来说，其并合率密度  $\mathcal{R}(z, m_1, m_2)$  (见公式(4.2)) 是天体物理黑洞或中子星生成率 (formation rate)  $R_{\text{birth}}(z, m_1)$  和时间延分布迟  $P_d(t_d)$  的卷积。所谓时间延迟指的是天体物理双黑洞或双中子星形成到并合之间的时间差。并合率的计算具体如下

$$\mathcal{R} = N \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{R_{\text{birth}}(t(z) - t_d, m_1) \times P_d(t_d)}{\min(m_1, m_{\max} - m_1) - m_{\min}} dt_d, \quad (4.5)$$

其中  $N$  是一个归一化常数，而  $t(z)$  为并合时候的宇宙年龄。在这里， $P_d \propto t_d^{-1}$  为时间延迟  $t_d$  在  $t_{\min} < t_d < t_{\max}$  时的分布 [137]。对于天体物理双黑洞系统，其从演化到并合的最小时间延迟为  $t_{\min} = 50$  Myr；而对于双中子星， $t_{\min} = 20$  Myr。另外，最大时间延迟  $t_{\max}$  设为哈勃时间。为了和先前的研究 [108, 137] 做比较，我们要求双黑洞的质量满足  $m_{\min} \leq m_2 \leq m_1$  且  $m_1 + m_2 \leq m_{\max}$ 。其中  $m_{\min} = 5M_\odot$



且  $m_{\max} = 100M_{\odot}$ 。需要注意的是，由于形成机制的不同，原初双黑洞的并合率（见下面的公式(4.15)）和天体物理双黑洞的并合率（见公式(4.5)）大不相同。

在估算并合率公式(5.18)时，最复杂地方乃是计算天体物理黑洞和中子星的生成率。生成率可估算为 [152]

$$R_{\text{birth}}(t, m_{\text{rem}}) = \int \psi[t - \tau(m_*)] \phi(m_*) \delta(m_* - g_{\text{rem}}^{-1}(m_{\text{rem}})) dm_*, \quad (4.6)$$

其中  $m_*$  为前身星的质量， $m_{\text{rem}}$  为最后天体的质量，而  $\tau(m_*)$  前身星的寿命。 $\tau(m_*)$  通常可以忽略 [153]。上式中的  $\phi(m_*)$  为初始质量函数（initial mass function，简称 IMF）。对于中子星，初始质量函数为  $1M_{\odot}$  到  $2M_{\odot}$  之间的平坦分布；而对天体物理黑洞，初始质量函数  $\phi(m_*) \propto m_*^{-2.35}$ 。此外， $\psi(t)$  为恒星形成率（star formation rate，简称 SFR），其为 [154]

$$\psi(z) = k \frac{a \exp[b(z - z_m)]}{a - b + b \exp[a(z - z_m)]}. \quad (4.7)$$

下面的计算中将使用文献 [152] 给出的“*Fiducial+PopIII*”模型的参数来计算上式。“*Fiducial+PopIII*”是 *Fiducial* 模型（其中  $k = 0.178M_{\odot}\text{yr}^{-1}\text{Mpc}^{-3}$ ， $z_m = 2$ ， $a = 2.37$ ， $b = 1.8$ ）和 *PopIII* 模型（其中  $k = 0.002M_{\odot}\text{yr}^{-1}\text{Mpc}^{-3}$ ， $z_m = 11.87$ ， $a = 13.8$ ， $b = 13.36$ ）的综合。对于中子星， $g_{\text{ns}}^{-1}(m_{\text{ns}}) = m_{\text{ns}}$ ，所以生成率的计算相对简单。而对于天体物理黑洞，其前身星的质量和最后残余质量存在特定的函数关系  $m_{\text{bh}} = g_{\text{bh}}(m_*)$ 。而这个函数关系是模型依赖的。在这里我们考虑“*WWp*”模型 [155]。这个模型和广为使用的“*Fryer*”模型 [152] 在低红移时是不可区分的，但足够简单。对于初始质量为  $m_*$  的前身星，其残余的黑洞质量  $m_{\text{bh}}$  为

$$\frac{m_{\text{bh}}}{m_*} = A \left( \frac{m_*}{40M_{\odot}} \right)^{\beta} \frac{1}{\left( \frac{Z(z)}{0.01Z_{\odot}} \right)^{\gamma} + 1}, \quad (4.8)$$

其中  $Z(z)$  为金属丰度，其具体的函数形式由文献 [31] 给出。上式中各个参数的取值为  $A = 0.3$ ， $\beta = 0.8$  和  $\gamma = 0.2$  [152]。通过解以上方程，就能得到  $m_* = g_{\text{bh}}^{-1}(m_{\text{bh}})$ 。

对并合率密度中的质量做积分，即可得到并合率随红移的演化函数

$$\mathcal{R}(z) = \int \mathcal{R}(z, m_1, m_2) dm_1 dm_2. \quad (4.9)$$

对于天体物理双黑洞，引力波对其局域并合率  $R \equiv \mathcal{R}(z = 0)$  的限制为  $R = 103_{-63}^{+110} \text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$  [108]；而对于双中子星，引力波的限制为  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$  [8]。



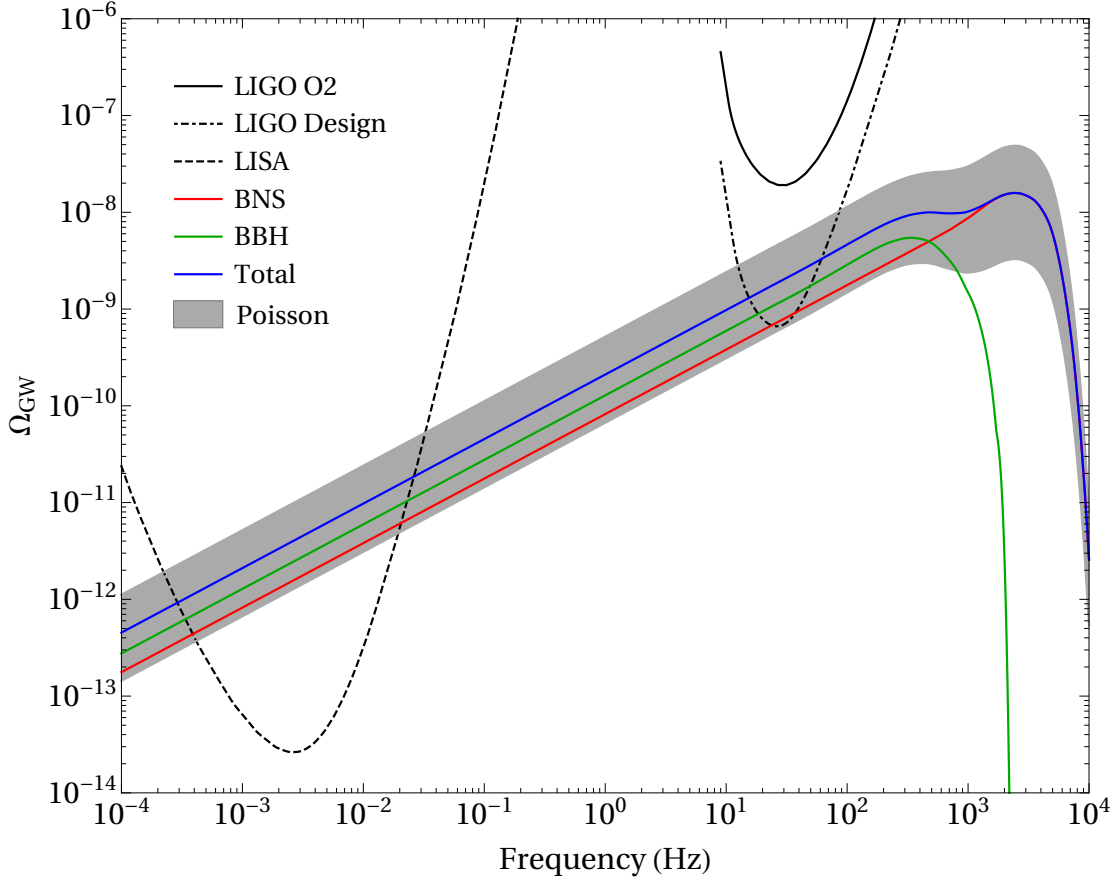


图 4.1 来自天体物理双黑洞以及双中子星产生的随机引力波背景。绿线是双黑洞对应的随机引力波背景，而红线是双中子星对应的引力波背景。蓝色则表示总的随机引力波背景（包括双黑洞和双中子星的贡献）；而灰色区域则表示总的引力波背景的泊松误差。在这里，我们取天体物理双黑洞的局域并合率为  $R = 103_{-63}^{+110} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [108]；而双中子星的局域并合率为  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]。图中的黑色实线表示 LIGO 第二个观测阶段的幂率积分曲线；点虚线表示 LIGO 设计阶段对应的幂率积分曲线；而虚线则表示 LISA 观测四年对应的幂率积分曲线。从图上可以看出，LIGO 设计阶段和 LISA 对应的幂率积分曲线都能跨过泊松误差区域，表明天体物理双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。

Figure 4.1 The predicted stochastic gravitational-wave background from the binary neutron stars and stellar-origin binary black holes. The red and green curves are backgrounds from the binary neutron stars (BNSs) and binary black holes (BBHs), respectively. The total background is shown in the blue curve, while its Poisson error bars are in the grey shaded region. Here, we adopt the local merger rate  $R = 103_{-63}^{+110} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  for stellar-origin binary black holes [108], and  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  for binary neutron stars [8]. We also show the expected PI curves for LISA with 4 years of observation (dashed) and LIGO's observing runs of O2 (black) and design sensitivity (dot-dashed). The PI curves for LISA and LIGO's design sensitivity cross the Poisson error region, indicating the possibility to detect this background.

	$\Omega_{\text{GW}}(25 \text{ Hz})$	$\Omega_{\text{GW}}(3 \times 10^{-3} \text{ Hz})$
BNS	$0.7^{+1.5}_{-0.6} \times 10^{-9}$	$1.7^{+3.5}_{-1.4} \times 10^{-12}$
BBH	$1.1^{+1.2}_{-0.7} \times 10^{-9}$	$2.7^{+2.8}_{-1.6} \times 10^{-12}$
Total	$1.8^{+2.7}_{-1.3} \times 10^{-9}$	$4.4^{+6.3}_{-3.0} \times 10^{-12}$

**表 4.1** 天体物理双黑洞产生的随机引力波背景、双中子星产生的随机引力波背景以及总的随机引力波背景在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近 (分别为 25 Hz 和  $3 \times 10^{-3}$  Hz) 的大小。我们还给出了 90% 的泊松误差范围。

**Table 4.1** Estimates of the background energy density  $\Omega_{\text{GW}}(\nu)$  at the most sensitive frequencies of LIGO (near 25 Hz) and LISA (near  $3 \times 10^{-3}$  Hz) for each of the binary neutron star (BNS), stellar-origin binary black hole (BBH) and total background contributions, along with the 90% Poisson error bounds.

利用公式(4.2)，我们就可以计算来自天体物理双黑洞以及双中子星产生的随机引力波背景。在图4.1中，我们给出了相应的随机引力波背景的能量密度谱。为了和引力波实验观测数据比较，我们还画出了 LIGO 探测器 [8] 的幂率积分 (power-law integrated, 简称 PI) 曲线和 LISA 探测器 [156, 157] 的幂率积分曲线。结果表明，不管是天体物理双黑洞产生的引力波背景还是双中子星产生的引力波背景，在未来都很可能被 LIGO 和 LISA 探测到。另外，在 LIGO 和 LISA 的可探测频段内，天体物理双黑洞和双中子星产生的引力波背景都近似和频率的  $2/3$  次方成正比，即  $\Omega_{\text{GW}} \propto \nu^{2/3}$ 。这是因为在可探测的频段内，随机引力波背景的贡献主要来自于双黑洞或双中子星的旋进阶段，而在旋进阶段，单个双黑洞或双中子星辐射的引力波能量谱大概就和频率的  $2/3$  次方成正比。在表4.1中，我们总结了在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近的随机引力波背景的能量密度的大小  $\Omega_{\text{GW}}(\nu)$ 。对于 LIGO 探测器来说，其最灵敏的频率大概是 25Hz 左右，而 LISA 探测器最灵敏的频率大概是  $3 \times 10^{-3}$ Hz 左右。

对于 LISA 探测器，假如其观测时间为  $T$ ，其所能观测到随机引力波背景的信噪比 (signal-to-noise ratio, 简称 SNR) 为 [158, 159]

$$\text{SNR} = \sqrt{T} \left[ \int d\nu \frac{\Omega_{\text{GW}}(\nu)}{\Omega_n(\nu)} \right]^{1/2}, \quad (4.10)$$

其中  $\Omega_n(\nu)$  定义为

$$\Omega_n(\nu) \equiv 2\pi^2 \nu^3 S_n(\nu) / (3H_0^2), \quad (4.11)$$

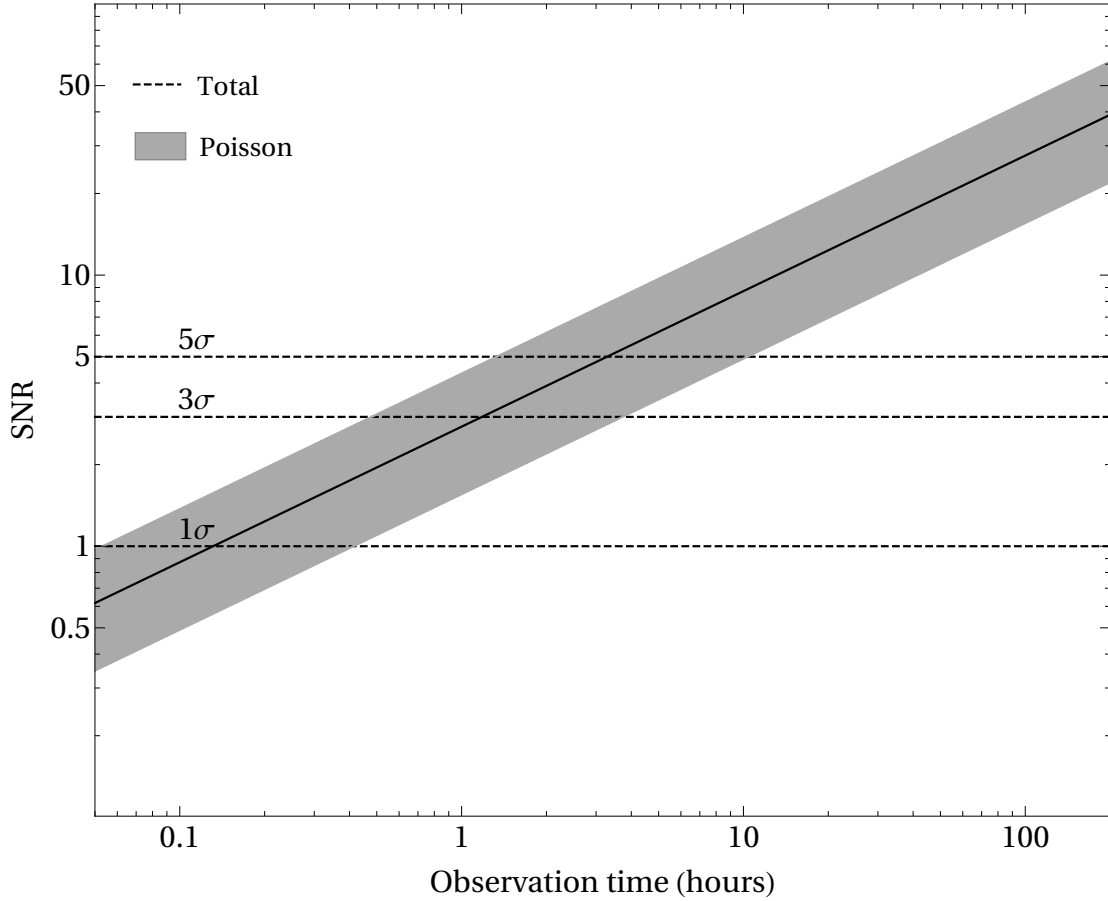


图 4.2 LISA 探测器对探测天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景的信噪比随观测时间的关系。黑色实线表示信噪比的中心值，而灰色区域表示信噪比的误差范围。在这里，我们取天体物理双黑洞的局域并合率为  $R = 103_{-63}^{+110} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [108]；而双中子星的局域并合率为  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]。在大约观测 20 个小时后，LISA 可以探测到中心值大小的总的随机引力波背景；探测的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。

**Figure 4.2** The SNR of LISA as a function of observing time for median total stochastic gravitational-wave background (black curve) and associated uncertainties (grey shaded region), from the stellar-origin binary black holes and binary neutron stars. Here, we adopt the local merger rate  $R = 103_{-63}^{+110} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  for stellar-origin binary black holes [108], and  $R = 1540_{-1220}^{+3200} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  for binary neutron stars [8]. The predicted median total background can be detected with  $\text{SNR} = 5$  after about 20 hours of observation time.

而  $S_n$  为 LISA 的噪音应变灵敏度。图4.2给出了预期累积信噪比关于时间的函数关系。由图可知，在观测 20 小时后，LISA 可以探测到来自天体物理双黑洞和双中子星的中心值大小的随机引力波背景，相应的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。在最乐观的情况下 LISA 观测 5 个小时就能探测到信噪比  $\text{SNR} = 5$  的总的随机引力波背景，而在最悲观的情况下 LISA 观测 8 天能探测到信噪比  $\text{SNR} = 5$  的总的随机引力

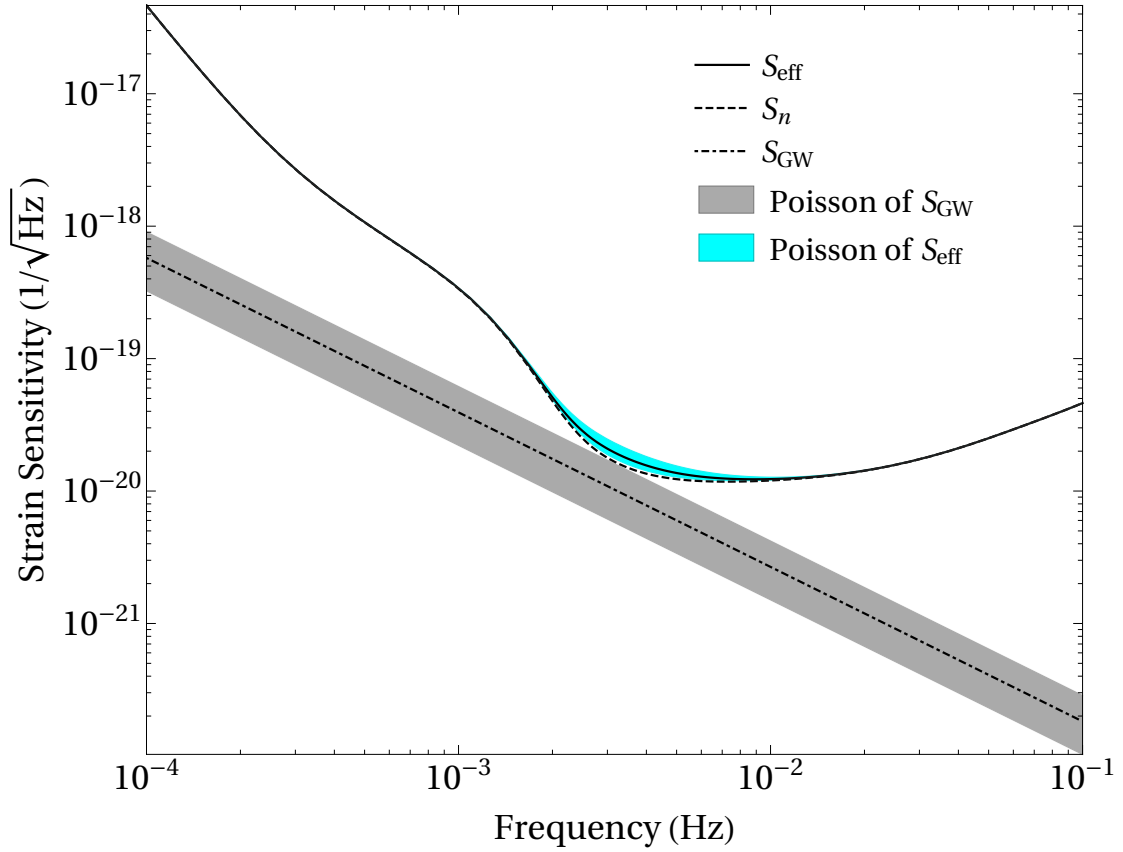


图 4.3 由天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景导致 LISA 探测器的有效应变灵敏度  $S_{\text{eff}}$  (黑色实线) 以及相应的泊松误差 (青色区域)。图中还给出了 LISA 探测器的应变灵敏度  $S_n$  (虚线) 以及随机引力波背景对应的应变灵敏度  $S_{\text{GW}}$  (点虚线) 和相应的泊松误差 (灰色区域)。

**Figure 4.3** The effective strain sensitivity  $S_{\text{eff}}$  (black solid curve) of LISA and its Poisson uncertainties (cyan region), due to the effect of the total stochastic gravitational-wave background from stellar-origin binary black holes and binary neutron stars. We also show LISA's strain sensitivity  $S_n$  (dashed curve), and  $S_{\text{GW}}$  (dot-dashed curve) along with its Poisson uncertainties (grey shaded region).

波背景。

由以上分析可知，如果不在 LISA 的噪音背景中把来自天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景扣除掉，这些引力波背景可能成为 LISA 新的噪音源，从而影响 LISA 的科学探测目标。例如，对于 LISA 来说，探测大质量双黑洞 (massive black hole binary, 简称 MBHB) 的并合是 LISA 的一个关键科学目标 [35]，而如果不把这些引力波背景从噪音中扣除掉的话，会降低 LISA 对于大质量双黑洞的最大可探测红移。

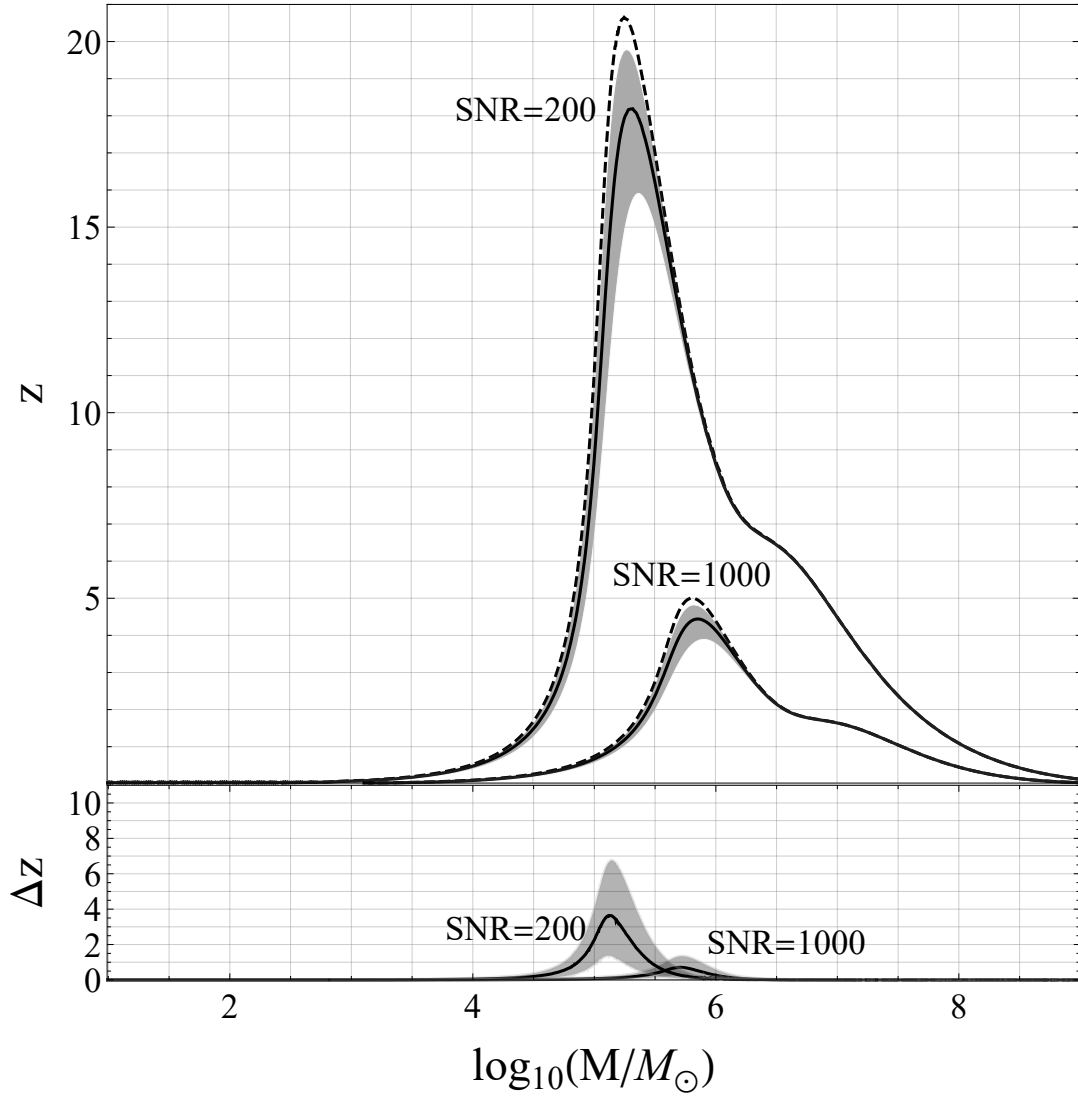


图 4.4 由天体物理双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景对 LISA 探测器对于大质量双黑洞系统最大可探测红移  $z$  的影响。我们用  $M$  表示大质量双黑洞的总质量。仿照 [35]，我们固定质量比为  $q = 0.2$ 。我们分别考虑  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。上图的虚线表示 LISA 最大可探测红移的等高线，而黑色实线表示考虑了随机引力波背景后 LISA 的最大可探测红移的等高线。灰色区域是黑色实线对应的泊松误差范围。下图给出了考虑随机引力波背景后对 LISA 最大可探测红移所引起的变化及误差范围。

Figure 4.4 The impacts of the total stochastic gravitational-wave background from stellar-origin binary black holes and binary neutron stars on the largest detectable redshift  $z$  of MBHB (with total mass  $M$ ) coalescences for LISA. The mass ratio is set to  $q = 0.2$  following [35]. The upper panel shows the contours of  $\text{SNR} = 200$  and  $\text{SNR} = 1000$  for LISA (dashed curves), together with the effect of stochastic gravitational-wave background (black curves) and the Poisson error bars (grey shaded region). The lower panel shows the residuals of corresponding contours.

仿照 [157, 160], 我们定义随机引力波背景产生的等效噪音应变灵敏度为

$$S_{\text{GW}}(\nu) \equiv \frac{3H_0^2}{2\pi^2} \frac{\Omega_{\text{GW}}(\nu)}{\nu^3}. \quad (4.12)$$

将随机引力波背景产生的等效噪音应变灵敏度加到 LISA 的噪音应变灵敏度  $S_n(\nu)$  中, 即可得到有效的总的应变灵敏度  $S_{\text{eff}}(\nu)$ , 即

$$S_{\text{eff}}(\nu) = S_n(\nu) + S_{\text{GW}}(\nu). \quad (4.13)$$

在图4.3中, 我们给出了相应的应变灵敏度曲线。对于探测单个源传播过来的引力波应变信号 (也就是通常说的波形)  $h(t)$ , LISA 对应的信噪比为

$$\text{SNR} = 2 \left[ \int d\nu \frac{|\tilde{h}(\nu)|^2}{S_{\text{eff}}(\nu)} \right]^{1/2}, \quad (4.14)$$

其中  $\tilde{h}(\nu)$  是  $h(t)$  在频率空间的波形。在这里我们使用 [151] 给出的唯象波形来描述大质量双黑洞系统产生的引力波。

对于 LISA 来说, 研究大质量黑洞的增长机制是其重要的科学探索目标之一 [35]。为了实现这一目标, 要求 LISA 对大质量黑洞无量纲自旋的探测的绝对误差要小于 0.1, 并且探测到的自旋方向的误差要小于  $10^\circ$ 。为了达到这些要求, 需要探测的信噪比达到 200 以上。在这里我们考虑了  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。图4.4给出了随机引力波背景对 LISA 探测大质量双黑洞并合的信噪比的影响, 表明最大可探测红移会由于未解析出来的随机引力波背景的影响而减小。这也表明 LISA 可探测的区域被压低了, 从而减少 LISA 可探测到的大质量双黑洞并合的事件数。目前的研究表明, 为了形成大质量黑洞通常需要种子黑洞的质量在  $10^3 M_\odot$  到  $10^5 M_\odot$  的量级, 而且相应的红移在  $10 \lesssim z \lesssim 15$  [161]。从图4.4看出, 由于随机引力波背景导致的等效噪音可以压低 LISA 对  $10^5 M_\odot$  以上的种子黑洞并合的最大可探测红移。因此, 为了提高 LISA 探测器的探测灵敏度, 需要设法将这些随机引力波背景从背景噪音中扣除掉。

### 4.3 原初双黑洞产生的随机引力波背景

在本节中, 我们将计算原初双黑洞产生的随机引力波背景。我们假设 LIGO-Virgo 目前所探测到的所有双黑洞都来自原初黑洞。在这里, 我们使用文献 [15] 给出的原初双黑洞的并合率, 也就是我们在上一章所推导出来的并合率表达式。



在计算并合率时，我们考虑了所有原初黑洞和线性密度扰动对原初双黑洞角动量的贡献。对于一个一般的已经归一化的原初黑洞质量概率分布函数  $P(m|\vec{\theta})$ ，其共动并合率密度分布为 [15]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}(t|\vec{\theta}) \approx & 3.9 \cdot 10^6 \times \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{34}{37}} f^2 (f^2 + \sigma_{\text{eq}}^2)^{-\frac{21}{74}} (m_1 m_2)^{\frac{3}{37}} (m_1 + m_2)^{\frac{36}{37}} \\ & \times \min\left(\frac{P(m_1|\vec{\theta})}{m_1}, \frac{P(m_2|\vec{\theta})}{m_2}\right) \left(\frac{P(m_1|\vec{\theta})}{m_1} + \frac{P(m_2|\vec{\theta})}{m_2}\right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中  $\vec{\theta}$  是质量函数中所带有的参数， $t_0$  为宇宙年龄。需要注意的是，上式的并合率密度的单位为  $\text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ 。此外， $\sigma_{\text{eq}}$  是其余暗物质在辐射-物质平衡时期在  $O(10^0 \sim 10^3) M_\odot$  尺度上的密度扰动的方差。类似于 [15, 22]，我们取  $\sigma_{\text{eq}} \approx 0.005$ 。而且原初黑洞的质量  $m_1$  和  $m_2$  都是以  $M_\odot$  为单位的。在这里  $f$  是总原初黑洞占非相对论物质的丰度，其和原初黑洞占冷暗物质的丰度  $f_{\text{PBH}}$  的关系为  $f_{\text{PBH}} \equiv \Omega_{\text{PBH}}/\Omega_{\text{CDM}} \approx f/0.85$ 。

对并合率密度分布(4.15)的质量做积分，即可得到并合率随时间或红移的演化

$$\mathcal{R}(t|\vec{\theta}) = \int \mathcal{R}_{12}(t|\vec{\theta}) dm_1 dm_2. \quad (4.16)$$

由此可以得到局域的并合率密度分布

$$\mathcal{R}_{12}(t_0|\vec{\theta}) = R p(m_1, m_2|\vec{\theta}), \quad (4.17)$$

其中  $p(m_1, m_2|\vec{\theta})$  为并合双黑洞中黑洞质量的概率分布，而局域并合率  $R \equiv \mathcal{R}(t_0|\vec{\theta})$  是一个归一化系数。由定义可知， $p(m_1, m_2|\vec{\theta})$  满足归一化条件，即

$$\int p(m_1, m_2|\vec{\theta}) dm_1 dm_2 = 1. \quad (4.18)$$

需要注意的是，这里的质量是源参考系的质量，而不是探测器参考系的质量。

下面我们需要将理论得到的原初双黑洞的并合率和引力波实验数据做拟合，从而推断出模型参数  $\{\vec{\theta}, R\}$  的取值。在这里我们不需用到 LIGO-Virgo 最原始的应变数据，而只需要用到 LIGO-Virgo 公布的双黑洞并合事件的后验分布数据，然后用到层次贝叶斯推断（hierarchical Bayesian inference）的方法去做模型的参数估计。层次贝叶斯推断方法的优点是可以节省大量的计算量。这一方法已经被广泛应用于引力波领域 [53, 124, 125, 130, 162–164]。下面简单介绍这一方法。假

定已有  $N$  个双黑洞并合事件的数据  $\vec{d} = (d_1, \dots, d_N)$ , 那么由理论模型得到数据的似然函数 (likelihood function) 为 [53, 162–164]

$$p(\vec{d}|\vec{\theta}, R) \propto R^N e^{-R\beta(\vec{\theta})} \prod_i^N \int d\vec{\lambda} p(d_i|\vec{\lambda}) p(\vec{\lambda}|\vec{\theta}), \quad (4.19)$$

其中  $\vec{\lambda} \equiv \{m_1, m_2\}$ 。在上式中  $p(d_i|\vec{\lambda})$  为单个引力波事件在给定双黑洞参数  $\vec{\lambda}$  时得到数据  $d_i$  的似然函数。由于 LIGO-Virgo 在分析单个引力波事件时, 其用到的黑洞的质量参数的先验分布 (prior distribution) 为平分布, 所以对于单个事件而言, 其似然函数  $p(d_i|\vec{\lambda})$  和后验分布成正比  $p(\vec{\lambda}|d_i)$ , 即  $p(d_i|\vec{\lambda}) \propto p(\vec{\lambda}|d_i)$ 。因此我们可以直接用 LIGO-Virgo 公开的每个双黑洞并合事件的后验分布 [130, 165, 166] 来计算公式(4.19)的积分。同时, 公式(4.19)的  $\beta(\vec{\theta})$  定义为

$$\beta(\vec{\theta}) \equiv \int d\vec{\lambda} VT(\vec{\lambda}) p(\vec{\lambda}|\vec{\theta}), \quad (4.20)$$

其中  $VT(\vec{\lambda})$  为 LIGO-Virgo 可探测的时空体积。我们用半解析的方法 [124, 125] 来计算  $VT$ 。在这里我们忽略了黑洞的自旋效应, 并且使用“早期高灵敏度” (“Early High Sensitivity”) 的噪音功率谱 (power spectral density, 简称 PSD) 来近似 LIGO 的前两个观测阶段的噪音功率谱。我们取单个引力波探测器的信噪比为  $\text{SNR} = 8$  作为探测到引力波事件的阈值。真实的 LIGO 探测器是由两个探测器组成的引力波探测器网络。对于整个探测器网络来说, 相应的信噪比阈值大约是 12。

给定先验分布  $p(\vec{\theta}, R)$  后, 我们就能得到对应的后验分布

$$p(\vec{\theta}, R|\vec{d}) \propto p(\vec{d}|\vec{\theta}, R) p(\vec{\theta}, R). \quad (4.21)$$

对于  $\vec{\theta}$  参数我们选平的分布, 而对于局域并合率  $R$  我们选对数平的分布。换言之, 我们假定的先验分布为

$$p(\vec{\theta}, R) \propto \frac{1}{R}. \quad (4.22)$$

有了先验分布, 再利用似然函数(4.19)式, 我们可以得到对局域并合率  $R$  做边际化后的后验分布, 即

$$p(\vec{\theta}|\vec{d}) \propto [\beta(\vec{\theta})]^{-N} \prod_i^N \int d\vec{\lambda} p(d_i|\vec{\lambda}) p(\vec{\lambda}|\vec{\theta}). \quad (4.23)$$

这个后验分布公式已经被广泛应用于引力波参数推断中 [108, 124, 125, 130, 132]。我们将仿照文献 [108, 124, 125, 130] 的做法, 先用公式(4.23)来限制  $\vec{\theta}$  参数,



然后在公式(4.21)中将  $\vec{\theta}$  固定成最佳拟合值来估计局域并合率  $R$  的值。和4.2小节一样，我们考虑的双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1$  且  $m_1 + m_2 \leq 100M_{\odot}$ 。这里我们只用 LIGO 第一个观测阶段观测到的 3 个双黑洞并合事例来拟合模型参数。LIGO 的第一个观测阶段观测的有效时间为 48.6 天 [130]。在表4.2中，我们列出了这 3 个双黑洞并合事件的源的主要性质。

事件	较重黑洞的质量	较轻黑洞的质量	红移
GW150914	$36.2^{+5.2}_{-3.8} M_{\odot}$	$29.1^{+3.7}_{-4.4} M_{\odot}$	$0.09^{+0.03}_{-0.04}$
LVT151012	$23^{+18}_{-6} M_{\odot}$	$13^{+4}_{-5} M_{\odot}$	$0.20^{+0.09}_{-0.09}$
GW151226	$14.2^{+8.3}_{-3.7} M_{\odot}$	$7.5^{+2.3}_{-2.3} M_{\odot}$	$0.09^{+0.03}_{-0.04}$

表 4.2 LIGO-Virgo 第一个观测阶段探测到的 3 个双黑洞并合事件的源的主要性质 [1, 130, 130, 133, 134]。

Table 4.2 A summary of the masses and source redshifts of the 3 binary black holes detected by LIGO-Virgo collaborations [1, 130, 130, 133, 134].

在以下的两个小节中我们将考虑两种不同的原初黑洞的质量分布函数。我们先用 LIGO 的引力波数据来限制模型参数  $\{\vec{\theta}, R\}$ ，然后由此计算相应的随机引力波背景。

#### 4.3.1 幂率质量函数

这里我们考虑幂率形式的原初黑洞质量分布函数 [104]

$$P(m) \approx \frac{\alpha - 1}{M_{\min}} \left( \frac{m}{M_{\min}} \right)^{-\alpha}, \quad (4.24)$$

其中  $m \geq M_{\min} = 5M_{\odot}$ ，且要求幂指数  $\alpha > 1$ 。在这种情况下，模型有两个自由参数，为  $\{\vec{\theta}, R\} = \{\alpha, R\}$ 。

利用 LIGO 第一个观测阶段探测到的 3 个双黑洞并合事件，并考虑选择效应后，我们得到  $\alpha$  的最佳拟合值为  $\alpha = 1.61$ 。固定  $\alpha$  的大小为其最佳拟合值，我们进而得到局域并合率  $R$  的中心值以及 90% 的置信区间为  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。在图4.5中，我们给出了  $\alpha$  和  $R$  的后验分布。从局域并合率  $R$  的后验分布，我们进一步得到原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ 。我们的结果和之前的估算是一致的，即  $10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-2}$  [14, 15, 22, 24, 25]，从而验证了主要的冷暗物质不是由恒星级质量的原初黑洞构成的。

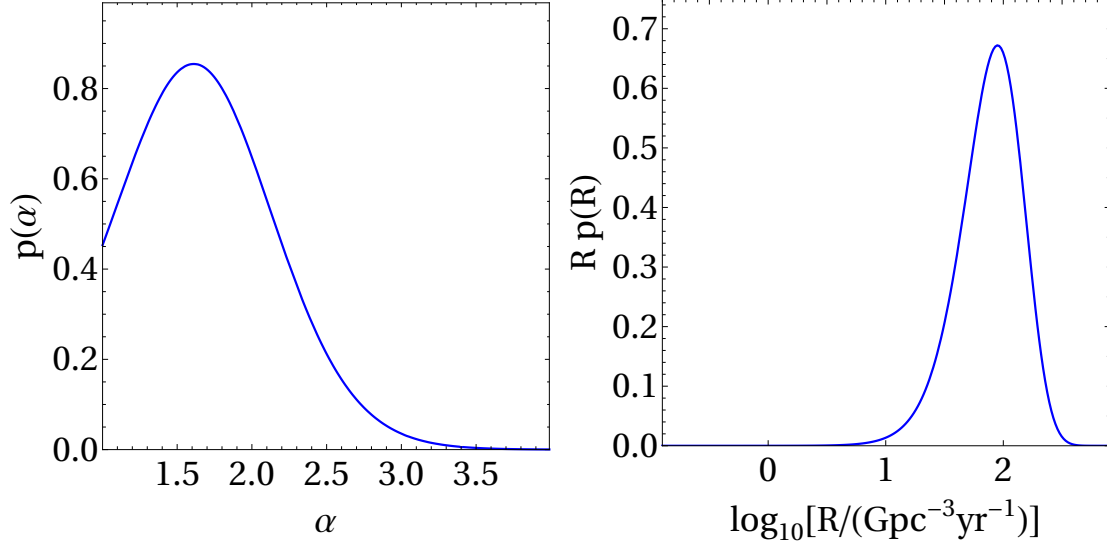


图 4.5 当原初黑洞质量函数为幂率形式的情况下，用 LIGO 第一个观测阶段的 3 个双黑洞并合事件拟合得到模型参数  $\{\vec{\theta}, R\} = \{\alpha, R\}$  的后验分布。

Figure 4.5 The posterior distributions for  $\{\vec{\theta}, R\} = \{\alpha, R\}$  for *power-law* mass function of PBHs, by using 3 events from LIGO's O1 observing run.

	$\Omega_{\text{GW}}(25 \text{ Hz})$	$\Omega_{\text{GW}}(3 \times 10^{-3} \text{ Hz})$
BNS	$0.7^{+1.5}_{-0.6} \times 10^{-9}$	$1.7^{+3.5}_{-1.4} \times 10^{-12}$
BBH	$1.8^{+2.5}_{-1.3} \times 10^{-9}$	$4.3^{+5.9}_{-3.0} \times 10^{-12}$
Total	$2.5^{+4.0}_{-1.9} \times 10^{-9}$	$6.0^{+9.4}_{-4.4} \times 10^{-12}$

表 4.3 原初双黑洞产生的随机引力波背景、双中子星产生的随机引力波背景以及总的随机引力波背景在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近 (分别为 25 Hz 和  $3 \times 10^{-3}$  Hz) 的大小。原初黑洞的质量函数为幂率形式。我们还给出了 90% 的泊松误差范围。

Table 4.3 Estimates of the background energy density  $\Omega_{\text{GW}}(\nu)$  at the most sensitive frequencies of LIGO (near 25 Hz) and LISA (near  $3 \times 10^{-3}$  Hz) for each of the binary neutron star (BNS), primordial-origin binary black hole (BBH, with a *power-law* mass function) and total background contributions, along with the 90% Poisson error bounds.

利用公式(4.2)，我们可以计算相应的随机引力波背景。图4.6给出了随机引力波背景的无量纲能量密度谱。从图上可以看出，随机引力波背景的强度可以超过 LIGO 设计阶段和 LISA 对应的灵敏度曲线，表明原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。

在 LIGO 和 LISA 的可探测频段内，具有幂率质量分布的原初双黑洞和双中

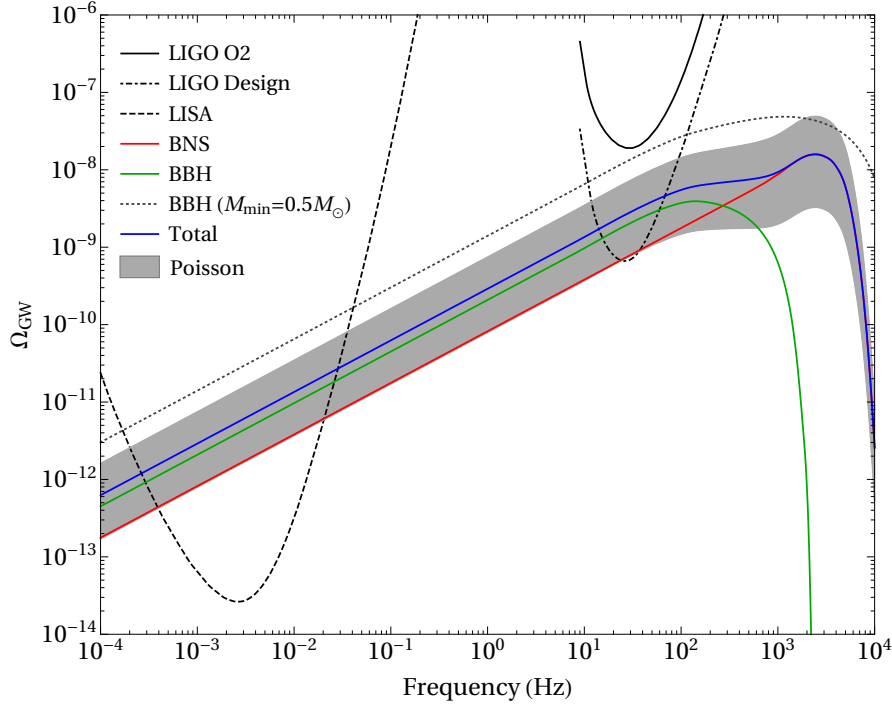


图 4.6 来自幂率质量分布的原初双黑洞以及双中子星产生的随机引力波背景。绿线是双黑洞对应的随机引力波背景，而红线是双中子星对应的随机引力波背景。蓝色表示总的随机引力波背；而灰色区域表示总的随机引力波背景的泊松误差。对于双黑洞，我们固定  $\alpha$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\alpha = 1.61$  和  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。该情况下对应的原初黑洞占暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ 。而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]。图中的黑色实线表示 LIGO 第二个观测阶段 (O2) 的幂率积分曲线；点虚线表示 LIGO 设计阶段对应的幂率积分曲线；而虚线则表示 LISA 观测四年对应的幂率积分曲线。从图上可以看出，LIGO 设计阶段和 LISA 对应的幂率积分曲线都能跨过泊松误差区域，表明原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。

Figure 4.6 The predicted stochastic gravitational-wave background from the binary neutron stars (BNSs) and primordial-origin binary black holes (BBHs) with a *power-law* mass function. The red and green curves are backgrounds from the binary neutron stars and binary black holes, respectively. The total background is shown in the blue curve, while its Poisson error bars are in the grey shaded region. For binary black holes, we adopt the best-fit value for  $\alpha = 1.61$ , and the inferred local merger rate  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ , which corresponds to  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ . And for binary neutron stars, we adopt  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]. The dotted line shows the background from binary black holes with  $M_{\text{min}} = 0.5 M_{\odot}$ , by fixing  $\alpha = 1.61$  and  $R = 80 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ . We also show the expected PI curves for LISA with 4 years of observation (dashed) and LIGO's observing runs of O2 (black) and design sensitivity (dot-dashed). The PI curves for LISA and LIGO's design sensitivity cross the Poisson error region, indicating the possibility to detect this background.

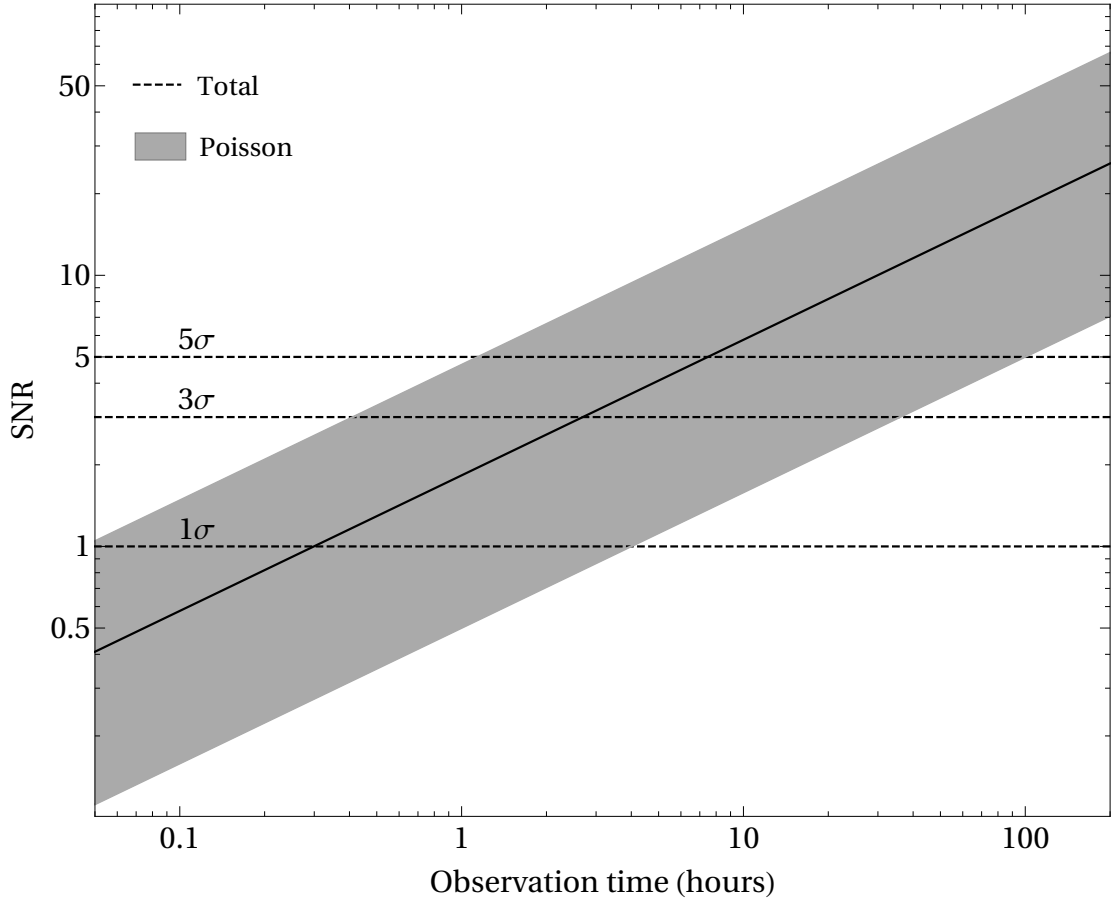


图 4.7 LISA 探测器对探测原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景的信噪比随观测时间的关系。原初黑洞的质量函数为幂率形式。黑色实线表示信噪比的中心值，而灰色区域表示信噪比的误差范围。对于双黑洞，我们固定  $\alpha$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\alpha = 1.61$  和  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。该情况下对应的原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ ；而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]。在大约观测 10 个小时后，LISA 可以探测到中心值大小的总的随机引力波背景；探测的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。

Figure 4.7 The SNR of LISA as a function of observation time for median total stochastic gravitational-wave background (black curve) and associated uncertainties (grey shaded region), from the primordial-origin binary black holes (with a *power-law* mass function) and binary neutron stars. For binary black holes, we adopt the best-fit value for  $\alpha = 1.61$ , and the inferred local merger rate  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ , which corresponds to  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ . And for binary neutron stars, we adopt  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]. The predicted median total background can be detected with  $\text{SNR} = 5$  after about 10 hours of observation time.

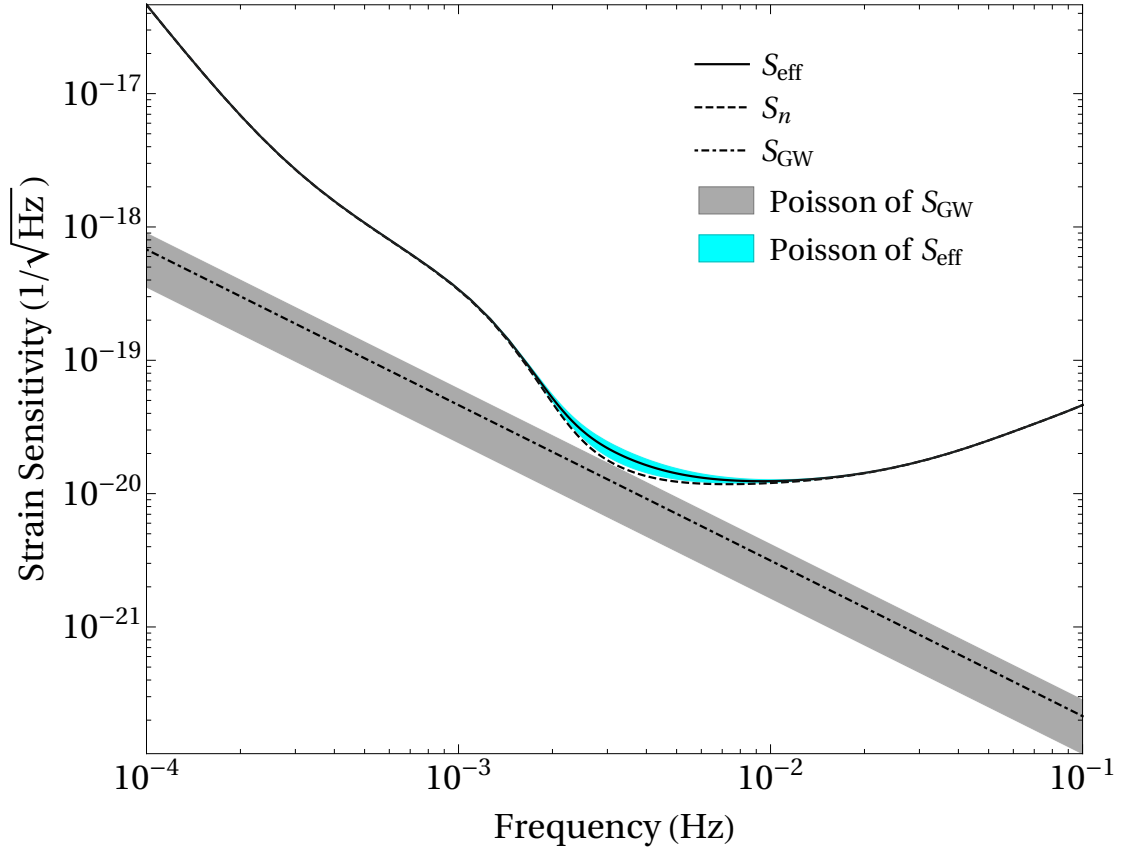


图 4.8 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景导致 LISA 探测器的有效应变灵敏度  $S_{\text{eff}}$  (黑色实线) 以及相应的泊松误差 (青色区域)。原初黑洞的质量函数为幂率形式。图中还给出了 LISA 探测器的应变灵敏度  $S_n$  (虚线) 以及引力波背景对应的应变灵敏度  $S_{\text{GW}}$  (点虚线) 和相应的泊松误差 (灰色区域)。

Figure 4.8 The effective strain sensitivity  $S_{\text{eff}}$  (black solid curve) of LISA and its Poisson uncertainties (cyan region), due to the effect of the total stochastic gravitational-wave background from primordial-origin binary black holes (with a *power-law* mass function) and binary neutron stars. We also show LISA's strain sensitivity  $S_n$  (dashed curve), and  $S_{\text{GW}}$  (dot-dashed curve) along with its Poisson uncertainties (grey shaded region).

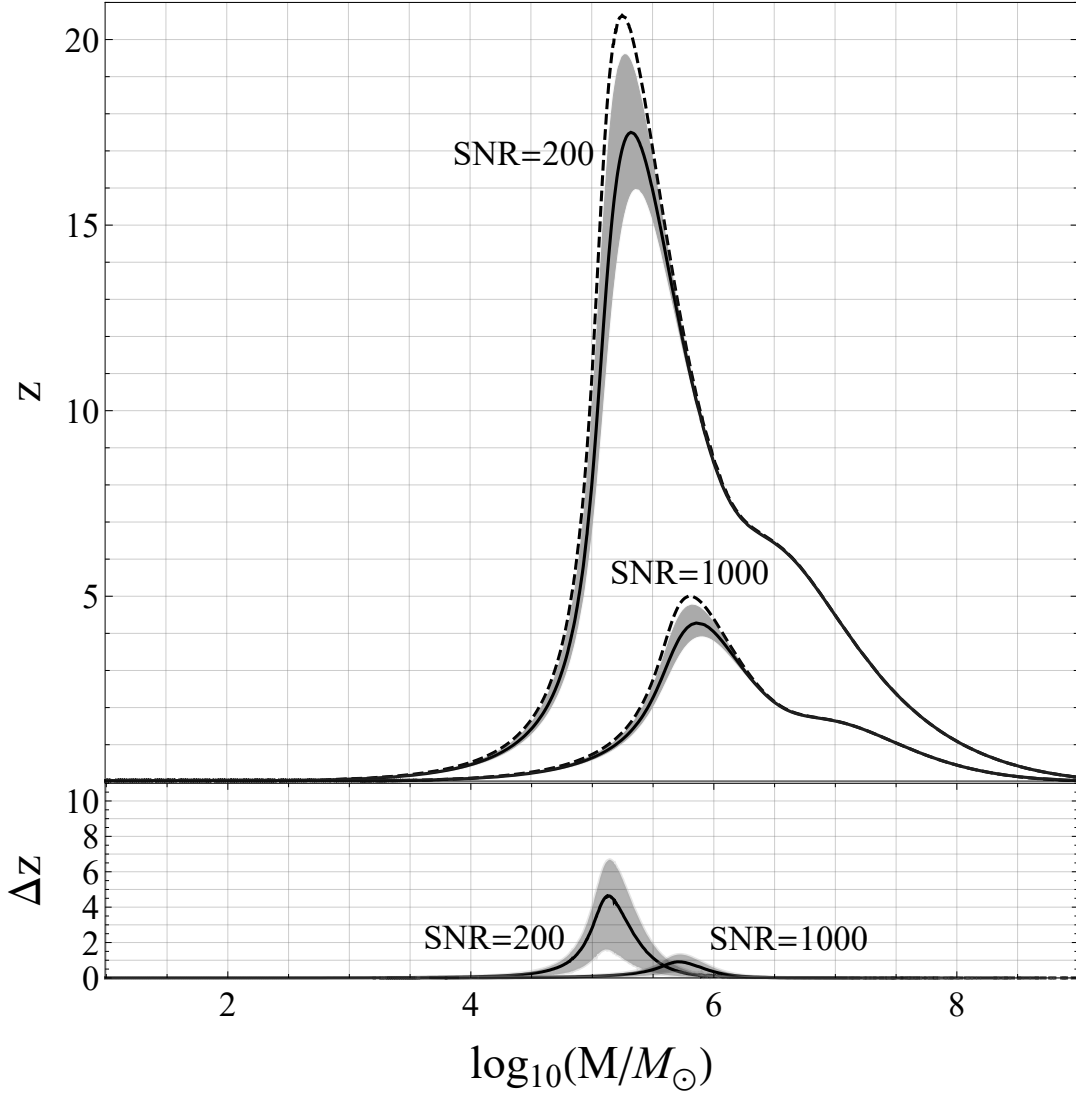


图 4.9 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景对 LISA 探测器对于大质量双黑洞系统最大可探测红移  $z$  的影响。我们用  $M$  表示大质量双黑洞的总质量。原初黑洞的质量函数为幂率形式。仿照 [35]，我们固定质量比为  $q = 0.2$ 。我们分别考虑  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。上图的虚线表示 LISA 最大可探测红移的等高线，而黑色实线表示考虑了随机引力波背景后 LISA 的最大可探测红移的等高线。灰色区域是黑色实线对应的泊松误差范围。下图给出了考虑随机引力波背景后对 LISA 最大可探测红移所引起的变化及误差范围。

Figure 4.9 The impacts of the total stochastic gravitational-wave background from primordial-origin binary black holes (with a *power-law* mass function) and binary neutron stars, on the largest detectable redshift  $z$  of MBHB (with total mass  $M$ ) coalescences for LISA. The mass ratio is set to  $q = 0.2$  following [35]. The upper panel shows the contours of  $\text{SNR} = 200$  and  $\text{SNR} = 1000$  for LISA (dashed curves), together with the effect of stochastic gravitational-wave background (black curves) and the Poisson error bars (grey shaded region). The lower panel shows the residuals of corresponding contours.

子星产生的引力波背景都近似和频率的  $2/3$  次方成正比, 即  $\Omega_{\text{GW}} \propto \nu^{2/3}$ 。这是因为在可探测的频段内, 随机引力波背景的贡献主要来自于双黑洞或双中子星的旋进阶段, 而在旋进阶段, 单个双黑洞或双中子星辐射的引力波能量谱大概就和频率的  $2/3$  次方成正比。在表 4.3 中, 我们总结了在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近的随机引力波背景的能量密度的大小  $\Omega_{\text{GW}}(\nu)$ 。

图 4.7 给出了预期累积信噪比关于时间的函数关系。由图可知, 在观测 2 小时, LISA 可以探测到来自具有幂率质量分布的原初双黑洞和双中子星的中心值大小的随机引力波背景, 相应的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。在最乐观的情况下 LISA 观测 2 个小时就能探测到信噪比  $\text{SNR} = 5$  的总的随机引力波背景, 而在最悲观的情况下 LISA 观测 5 天能探测到信噪比  $\text{SNR} = 5$  的总的随机引力波背景。

图 4.8 给出了应变灵敏度曲线。图 4.9 给出了随机引力波背景对 LISA 探测大质量双黑洞并合的信噪比的影响, 表明最大可探测红移会由于未解析出来的随机引力波背景的影响而减小。这也表明 LISA 可探测的区域被压低了, 从而减少 LISA 可探测到的大质量双黑洞并合的事件数。从图 4.9 看出, 由于随机引力波背景导致的等效噪音可以压低 LISA 对  $10^5 M_{\odot}$  以上的种子黑洞并合的最大可探测红移。

#### 4.3.2 对数正态质量函数

我们现在考虑对数正态的原初黑洞质量分布 [107],

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma m} \exp\left(-\frac{\ln^2(m/m_c)}{2\sigma^2}\right), \quad (4.25)$$

其中  $m_c$  表征质量谱的峰值, 而  $\sigma$  表征质量谱的宽度。在这种情况下, 模型有三个自由参数, 为  $\{\vec{\theta}, R\} = \{m_c, \sigma, R\}$ 。

利用 LIGO 第一个观测阶段探测到的 3 个双黑洞并合事件, 并考虑选择效应后, 我们得到  $m_c$  和  $\sigma$  的最佳拟合值为  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_{\odot}, 0.65\}$ 。固定  $m_c$  和  $\sigma$  的大小为其最佳拟合值, 我们进而得到局域并合率  $R$  的中心值以及 90% 的置信区间为  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。在图 4.10 中, 我们给出了  $m_c$ 、 $\sigma$  和  $R$  的后验分布。从局域并合率  $R$  的后验分布, 我们进一步得到原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ 。我们的结果和之前的估算是一致的, 即  $10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-2}$  [14, 15, 22, 24, 25], 从而验证了主要的冷暗物质不是由恒星级质量的原初黑洞构成的。



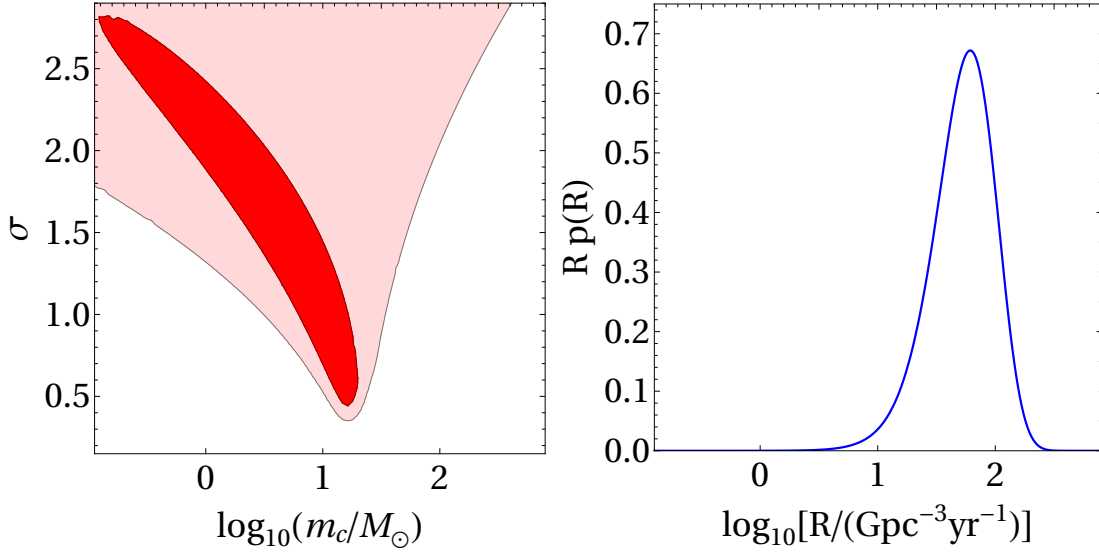


图 4.10 当原初黑洞质量函数为对数正态形式的情况下，用 LIGO 第一个观测阶段的 3 个双黑洞并合事件拟合得到模型参数  $\{\vec{\theta}, R\} = \{m_c, \sigma, R\}$  的一维和二维后验分布。左图的等高线分别对应 68% 和 95% 的置信区间。

Figure 4.10 The posterior distributions for  $\{\vec{\theta}, R\} = \{m_c, \sigma, R\}$  of *lognormal* mass function for primordial black holes, at the 68% and 95% credible level, respectively, by using 3 events from LIGO's O1 observing run.

	$\Omega_{\text{GW}}(25 \text{ Hz})$	$\Omega_{\text{GW}}(3 \times 10^{-3} \text{ Hz})$
BNS	$0.7^{+1.5}_{-0.6} \times 10^{-9}$	$1.7^{+3.5}_{-1.4} \times 10^{-12}$
BBH	$2.0^{+2.7}_{-1.4} \times 10^{-9}$	$6.3^{+8.5}_{-4.2} \times 10^{-12}$
Total	$2.7^{+4.2}_{-2.0} \times 10^{-9}$	$8.0^{+12}_{-5.6} \times 10^{-12}$

表 4.4 原初双黑洞产生的随机引力波背景、双中子星产生的随机引力波背景以及总的随机引力波背景在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近 (分别为 25 Hz 和  $3 \times 10^{-3}$  Hz) 的大小。原初黑洞质量函数为对数正态形式。我们还给出了 90% 的泊松误差范围。

Table 4.4 Estimates of the background energy density  $\Omega_{\text{GW}}(\nu)$  at the most sensitive frequencies of LIGO (near 25 Hz) and LISA (near  $3 \times 10^{-3}$  Hz) for each of the binary neutron star (BNS), primordial-origin binary black hole (BBH, with a *lognormal* mass function) and total background contributions, along with the 90% Poisson error bounds.

利用公式(4.2)，我们可以计算相应的随机引力波背景。图4.11给出了随机引力波背景的无量纲能量密度谱。从图上可以看出，随机引力波背景强度可以超过 LIGO 设计阶段和 LISA 对应的灵敏度曲线，表明原初双黑洞和双中子星产生



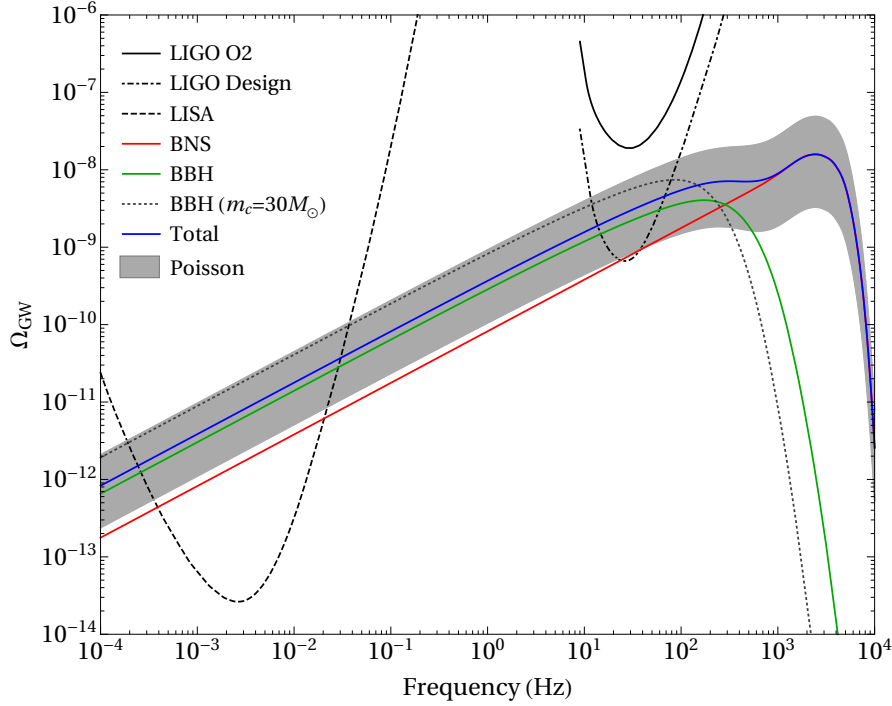


图 4.11 来自对数正态质量分布的原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景。绿线是双黑洞对应的随机引力波背景，而红线是双中子星对应的随机引力波背景。蓝色表示总的引力波背景；灰色区域则表示总的随机引力波背景的泊松误差。对于双黑洞，我们固定  $\{m_c, \sigma\}$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_\odot, 0.65\}$  和  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ，且  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ ；而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]。图中的黑色实线表示 LIGO 第二个观测阶段 (O2) 的幂率积分曲线；点虚线表示 LIGO 设计阶段对应的幂率积分曲线；而虚线则表示 LISA 观测四年对应的幂率积分曲线。LIGO 设计阶段和 LISA 对应的幂率积分曲线都能跨过泊松误差区域，表明原初双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。

Figure 4.11 The predicted stochastic gravitational-wave background from the binary neutron stars and primordial-origin binary black holes with a *lognormal* mass function. The red and green curves are backgrounds from the binary neutron stars (BNSs) and binary black holes (BBHs), respectively. The total background is shown in the blue curve, while its Poisson error bars are in the grey shaded region. For binary black holes, we adopt the best-fit values for  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_\odot, 0.65\}$ , and the inferred local merger rate  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ , which corresponds to  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ . And for binary neutron stars, we adopt  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]. The dotted line shows the background from binary black holes with  $m_c = 30 M_\odot$ , by fixing  $\sigma = 0.65$  and  $R = 55 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ . We also show the expected PI curves for LISA with 4 years of observation (dashed) and LIGO's O2 (black) and design sensitivity (dot-dashed). The PI curves for LISA and LIGO's design sensitivity cross the Poisson error region, indicating the possibility to detect this background.

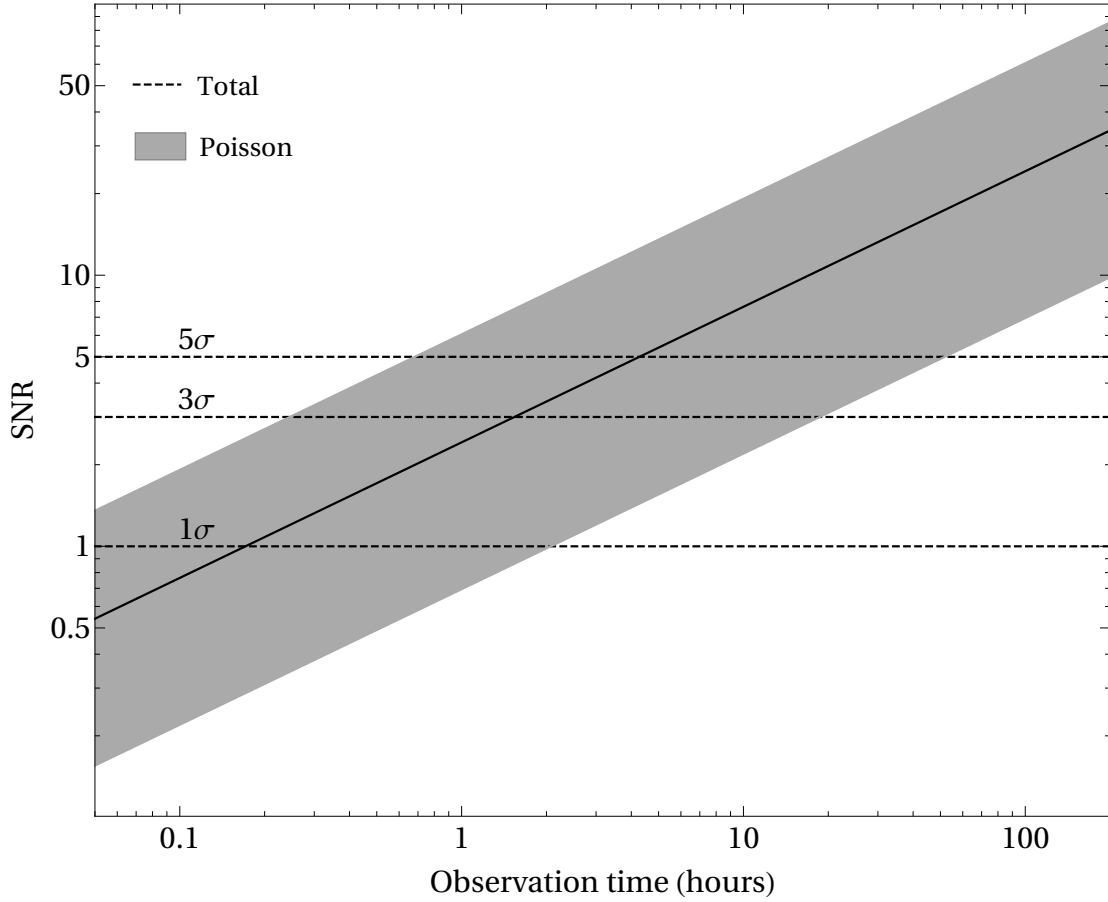


图 4.12 LISA 探测器对探测原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景的信噪比随观测时间的关系。原初黑洞质量函数为对数正态形式。黑色实线表示信噪比的中心值，而灰色区域表示信噪比的误差范围。对于双黑洞，我们固定  $\{m_c, \sigma\}$  和局域并合率  $R$  为其最佳拟合值，即  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_\odot, 0.65\}$  和  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。该情况下对应的原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ ；而对于双中子星，我们取局域并合率为  $R = 1540^{+3200}_{-1220} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$  [8]。在大约观测 5 个小时后，LISA 可以探测到中心值大小的总的随机引力波背景；探测的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。

**Figure 4.12** The SNR of LISA as a function of observation time for median total stochastic gravitational-wave background (black curve) and associated uncertainties (grey shaded region), from primordial-origin binary black holes (with a *lognormal* mass function) and binary neutron stars. Here, we adopt the best-fit values for  $\{m_c, \sigma\} = \{14.8 M_\odot, 0.65\}$ , and the inferred local merger rate  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ , which corresponds to  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ . The predicted median total background can be detected with  $\text{SNR} = 5$  after about 5 hours of observation time.

的随机引力波背景可以被 LIGO 设计阶段和 LISA 探测到。

在 LIGO 和 LISA 的可探测频段内，具有对数正态质量分布的原初双黑洞和双中子星产生的引力波背景都近似和频率的  $2/3$  次方成正比，即  $\Omega_{\text{GW}} \propto \nu^{2/3}$ 。这是因为在可探测的频段内，随机引力波背景的贡献主要来自于双黑洞或双中子星的旋进阶段，而在旋进阶段，单个双黑洞或双中子星辐射的引力波能量谱大概就和频率的  $2/3$  次方成正比。在表 4.4 中，我们总结了在 LIGO 和 LISA 最灵敏的频率附近的随机引力波背景的能量密度的大小  $\Omega_{\text{GW}}(\nu)$ 。

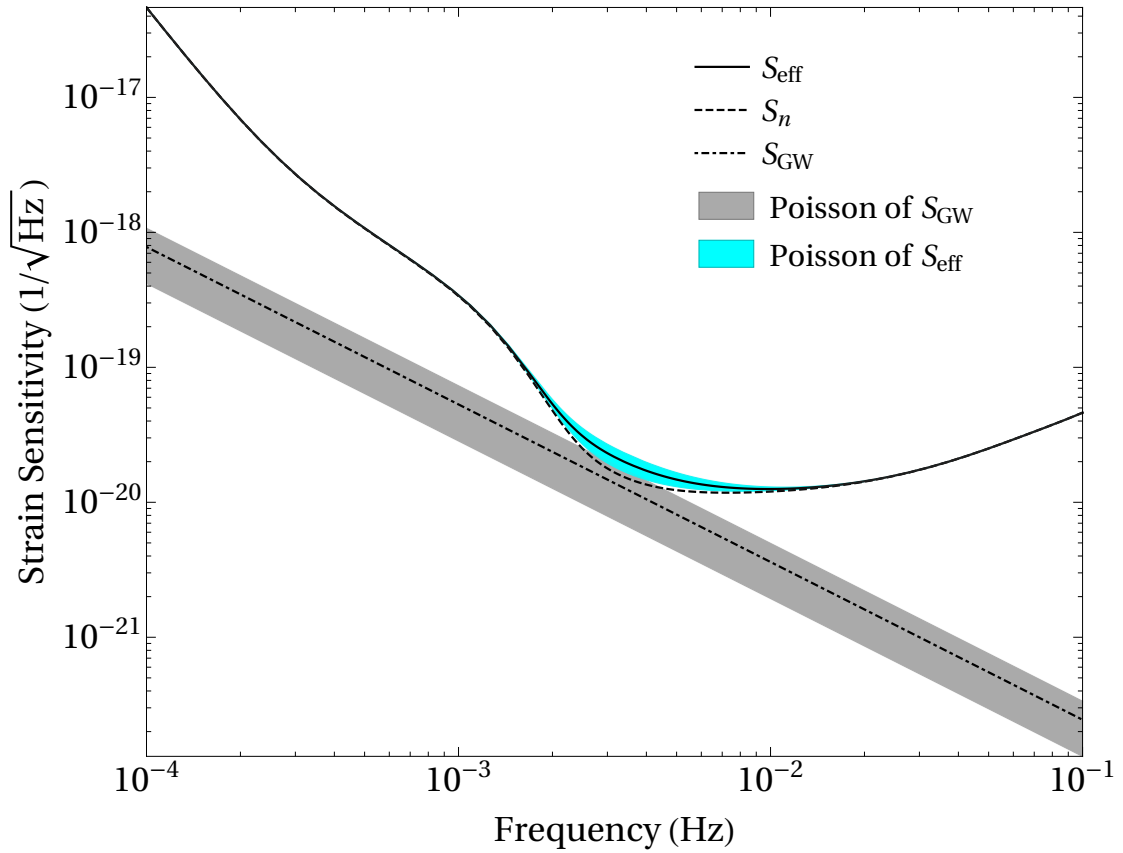


图 4.13 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景导致 LISA 探测器的有效应变灵敏度  $S_{\text{eff}}$ （黑色实线）以及相应的泊松误差（青色区域）。原初黑洞质量函数为对数正态形式。图中还给出了 LISA 探测器的应变灵敏度  $S_n$ （虚线）以及引力波背景对应的应变灵敏度  $S_{\text{GW}}$ （点虚线）和相应的泊松误差（灰色区域）。

**Figure 4.13** The effective strain sensitivity  $S_{\text{eff}}$  (black solid curve) of LISA and its Poisson uncertainties (cyan region), due to the effect of the total stochastic gravitational-wave background from primordial-origin binary black holes (with a *log-normal* mass function) and binary neutron stars. We also show LISA's strain sensitivity  $S_n$  (dashed curve), and  $S_{\text{GW}}$  (dot-dashed curve) along with its Poisson uncertainties (grey shaded region).

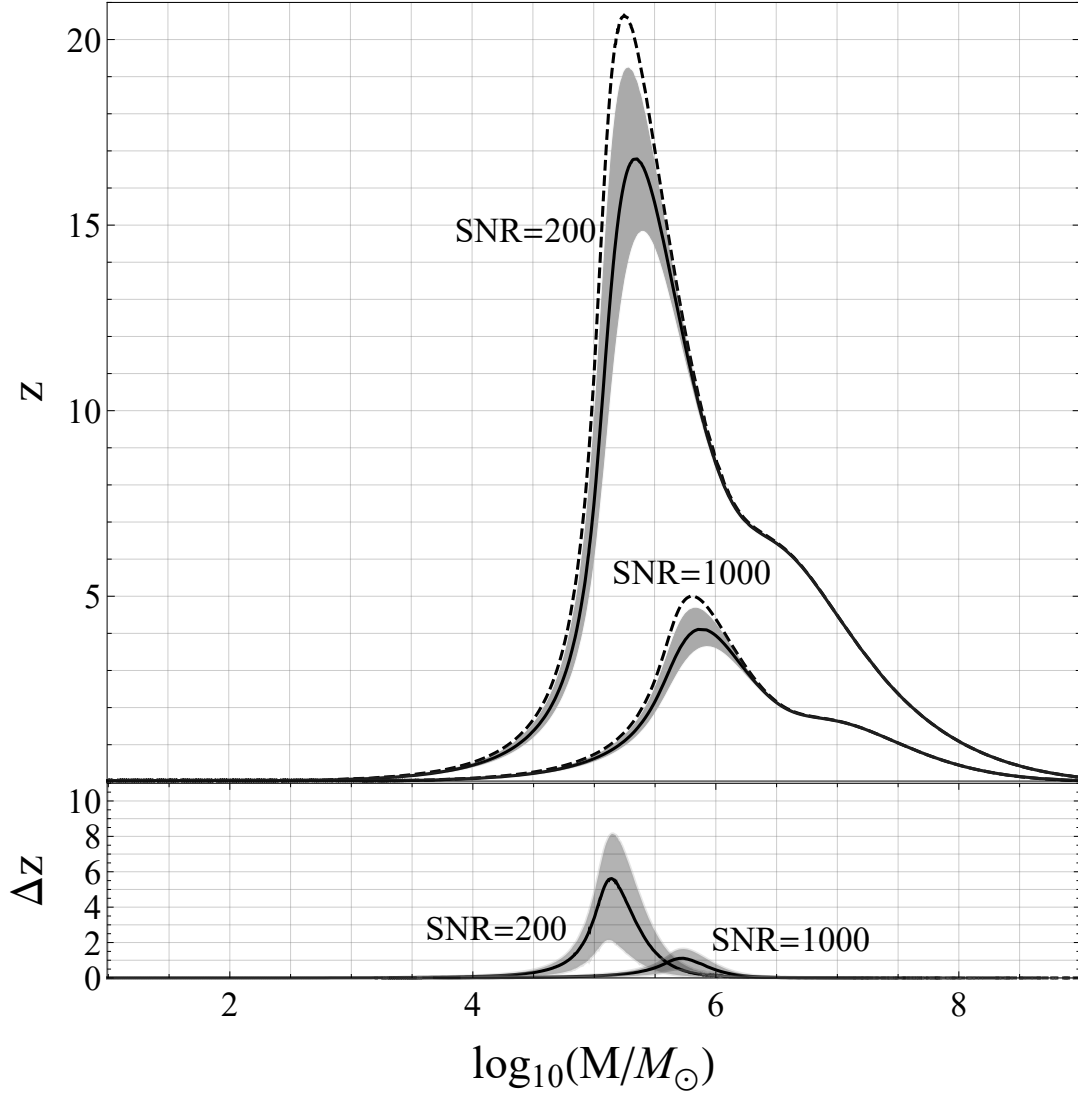


图 4.14 由原初双黑洞和双中子星产生的总的随机引力波背景对 LISA 探测器对于大质量双黑洞系统最大可探测红移  $z$  的影响。我们用  $M$  表示大质量双黑洞的总质量。原初黑洞质量函数为对数正态形式。仿照 [35]，我们固定质量比为  $q = 0.2$ 。我们分别考虑  $\text{SNR} = 200$  和  $\text{SNR} = 1000$  的两种情况。上图的虚线表示 LISA 最大可探测红移的等高线，而黑色实线表示考虑了随机引力波背景后 LISA 的最大可探测红移的等高线。灰色区域是黑色实线对应的泊松误差范围。下图给出了考虑随机引力波背景后对 LISA 最大可探测红移所引起的变化及误差范围。

Figure 4.14 The impacts of the total stochastic gravitational-wave background from primordial-origin binary black holes (with a *lognormal* mass function) and binary neutron stars, on the largest detectable redshift  $z$  of MBHB (with total mass  $M$ ) coalescences for LISA. The mass ratio is set to  $q = 0.2$  following [35]. The upper panel shows the contours of  $\text{SNR} = 200$  and  $\text{SNR} = 1000$  for LISA (dashed curves), together with the effect of stochastic gravitational-wave background (black curves) and the Poisson error bars (grey shaded region). The lower panel shows the residuals of corresponding contours.

图4.12给出了预期累积信噪比关于时间的函数关系。由图可知，在观测 5 小时时，LISA 可以探测到来自具有对数正态质量分布的原初双黑洞和双中子星的中心值大小的随机引力波背景，相应的信噪比为  $\text{SNR} = 5$ 。在最乐观的情况下 LISA 观测 1 个小时就能探测到信噪比  $\text{SNR} = 5$  的总的随机引力波背景，而在最悲观的情况下 LISA 观测 3 天能探测到信噪比  $\text{SNR} = 5$  的总的随机引力波背景。

图4.13给出了应变灵敏度曲线。图4.14给出了随机引力波背景对 LISA 探测大质量双黑洞并合的信噪比的影响，表明最大可探测红移会由于未解析出来的随机引力波背景的影响而减小。这也表明 LISA 可探测的区域被压低了，从而减少 LISA 可探测到的大质量双黑洞并合的事件数。从图4.14看出，由于随机引力波背景导致的等效噪音可以压低 LISA 对  $10^5 M_{\odot}$  以上的种子黑洞并合的最大可探测红移。

#### 4.4 总结和讨论

在本章中，我们计算了来自双黑洞和双中子星并合产生的随机引力波背景。而且探究了这一随机引力波背景对 LISA 空间引力波探测器探测能力的影响。我们考虑了两种不同的双黑洞形成机制，分别是天体物理双黑洞和原初双黑洞机制。

对于天体物理黑洞，我们采用了被广泛接受的“Vangioni”模型 [152]。而对于原初黑洞，我们考虑了两种流行的迥异的原初黑洞质量谱，分别为幂率质量分布和对数正态质量分布。对于幂率质量谱的情况，我们从 LIGO 的引力波数据分析得到局域并合率为  $R = 80^{+108}_{-56} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ，相应的原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 3.8^{+2.3}_{-1.8} \times 10^{-3}$ 。对于对数正态的质量谱，我们得到  $R = 55^{+74}_{-38} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ，对应于  $f_{\text{PBH}} = 2.8^{+1.6}_{-1.3} \times 10^{-3}$ 。由于幂率形式的质量谱会给出更多的轻质量的原初黑洞，所以相较对数正态质量分布而言，为了和 LIGO-Virgo 相自洽，其预言的局域并合率要大一些。之前文献 [15, 22, 24?, 25] 中对原初黑洞占冷暗物质的估计大约为  $10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-2}$ 。对于这两种原初黑洞的质量谱，我们推断得到的原初黑洞的丰度和之前的估计一致的，从而验证了主要的冷暗物质不是由恒星级质量的原初黑洞构成的。

我们发现原初双黑洞产生的随机引力波背景要比天体物理双黑洞产生的随机引力波背景要强（见图4.1、图4.6、图4.11以及表4.1、表4.3、表4.4）。这是由

于原初双黑洞和天体物理双黑洞的并合率随黑洞的质量和红移的关系不同导致的。特别是，原初双黑洞的并合率会随着红移的增长而快速增长；而天体物理双黑洞的并合率则随着红移先增长，接着在红移为  $z \sim 1 - 2$  附近达到峰值，然后急剧减小。我们还发现，在 LIGO-Virgo 和 LISA 灵敏的频段内，不管是天体物理双黑洞还是原初双黑洞形成的随机引力波背景的能量密度谱都和频率成  $2/3$  次方的关系，即  $\Omega_{\text{GW}} \propto \nu^{2/3}$ 。所以用 LIGO-Virgo 和 LISA 通过探测随机引力波背景的方法将很难区分到底是天体物理双黑洞还是原初双黑洞形成的随机引力波背景。

最后，我们发现由双黑洞和双中子星形成的总的随机引力波背景很可能被未来的引力波探测器 LIGO-Virgo 和 LISA 探测到（见图4.1、图4.2、图4.6、图4.7、图4.11、图4.12）。这些随机引力波背景如果不从噪音背景中扣除掉的话，会成为 LISA 的额外噪音源（见图4.3、图4.8、图4.13），从而弱化 LISA 的探测能力。例如，探测大质量双黑洞的并合是 LISA 的一个关键科学目标。由于随机引力波背景的影响，会压低 LISA 对于大质量双黑洞的最大可探测红移（见图4.4、图4.9、图4.14）。所以，为了提高探测器的探测能力，需要将随机引力波背景从 LISA 的噪音中扣除掉。

## 第 5 章 区分原初黑洞和天体物理黑洞

### 5.1 背景介绍

根据 LIGO-Virgo 科学组织最新发布的引力波瞬变目录 2 [11], 目前一共探测到了 50 个致密双星并合事例。其中大多数都是双黑洞并合的事例。探测到了这么多双黑洞并合的引力波事件, 加深了人类对宇宙的认识, 但是还有很多问题需要回答。例如, 这些双黑洞到底是如何形成和演化的, 目前还是一个被广泛探讨的话题 [13–16, 22, 31, 36–44, 123, 127, 167–171]。

在引力波被探测到之前, 由 X 射线观测到的黑洞的质量通常比较小 [172–175]。然而引力波观测到的双黑洞的质量要比 X 射线观测到的黑洞的质量要重很多。这一事实不禁让人们猜想观测到的双黑洞并合事件可能起源于恒星级质量的原初黑洞 [13–16]。原初黑洞是在早期宇宙中由原初密度扰动的引力塌缩而形成的黑洞 [17–20]。其与起源于大质量恒星死亡而形成的天体物理黑洞经历了完全不同的演化历史。原初黑洞可能会构成部分的冷暗物质。而原初黑洞占冷暗物质的丰度, 即  $f_{\text{PBH}}$ , 已经受到了各种实验, 例如星系外伽马射线 [176]、伽马射线暴的 femtolensing [177]、本星系中的白矮星 [178]、Subaru/HSC 微透镜 [179]、开普勒-微透镜 [180]、OGLE 微透镜 [181]、EROS/MACHO 微透镜 [182, 183]、超暗矮星系的动态加热 [184]、X 射线/无线电 [113]、宇宙微波背景 [109, 114–116, 185] 以及引力波 [112, 186–192] 等的限制。

除了原初黑洞模型, 天体物理黑洞模型也可以解释 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞。天体物理双黑洞的形成和并合是由演化环境主导的。在文献中, 天体物理双黑洞模型主要有三种机制。第一种是动态形成机制, 即大质量恒星的演化形成黑洞, 而黑洞被分离到星团核心, 最后配对形成双黑洞系统 [36–38]。第二种是经典孤立的双星演化机制, 即双黑洞是通过质量转移或公共包层抛射 (common envelope ejection) 而形成的 [31, 39–42]。第三种是化学均匀演化机制, 即由于氦气在整个包络体中的混合 [43, 44], 使得恒星几乎在化学物质均匀的环境种演化形成黑洞。双黑洞的属性, 如自旋 [45–52]、红移 [53–55] 和偏心率分布 [56–59] 等性质有可能区分不同机制的天体物理双黑洞模型。

在本节种, 我们将探究通过使用引力波观测, 特别是通过第三代地基引力



波探测器，如爱因斯坦望远镜（Einstein Telescope，简称 ET）[60] 和宇宙勘探者（Cosmic Explorer，简称 CE）[61]，来区分原初黑洞和天体物理黑洞的可能性。ET 和 CE 有望每年探测到  $\mathcal{O}(10^5)$  [62, 63] 个双黑洞并合事件，这个数目要远远大于比目前 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞并合的数目。首先，我们考虑亚太阳质量 ( $\lesssim 1M_\odot$ ) 的双黑洞。因为通常认为天体物理黑洞的质量要大于钱德勒赛卡质量极限 ( $\sim 1.4M_\odot$ ) [193, 194]，所以直接探测到亚太阳质量的黑洞可以成为原初黑洞存在的关键证据。其次，我们考虑超太阳质量 ( $\gtrsim 1M_\odot$ ) 的双黑洞。由于原初双黑洞和天体物理双黑洞的并合率随红移的演化可以有很大的不同，所以可探测双黑洞的事件数随红移的分布不同。我们分别估计 ET 和 CE 可探测到的原初黑洞和天体物理黑洞的事件数分布，这可以作为区分原初黑洞和天体物理黑洞的另一种方法。

## 5.2 通过亚太阳质量黑洞来区分原初黑洞和天体物理黑洞

直接探测到亚太阳质量的黑洞可以作为原初黑洞的直接证据。可探测到的事件数不仅取决于原初双黑洞的并合率，而且还取决于引力波探测器的灵敏度。在下面的两个小节中，我们将分别考虑原初黑洞具有单色质量谱和一般质量谱的情况，来探讨不同的引力波探测器探测亚太阳质量黑洞的能力。

### 5.2.1 原初黑洞具有单色质量谱的情况

在本小节中，我们假设所有的原初黑洞都具有相同的质量，并通过对原初双黑洞的定向搜索（targeted search）来估计  $f_{\text{PBH}}$  的可探测极限。未探测到亚太阳质量双黑洞并合或相应的随机引力波背景，都可以对原初黑洞占冷暗物质的丰度  $f_{\text{PBH}}$  给出下限，即超过这个范围就有可能探测到原初黑洞。

通过考虑所有原初黑洞和背景的线性密度涨落所提供的角动量，单色质量谱情况下的共动局部并合率  $R(z)$  随红移  $z$  的演化由以下公式给出 [15, 22]

$$R(z) = 3.9 \times 10^6 \times \left( \frac{t(z)}{t_0} \right)^{-\frac{34}{37}} m^{-32/37} f^2 (f^2 + \sigma_{\text{eq}}^2)^{-21/74}, \quad (5.1)$$

其中， $mM_\odot$  是在源参考系测量的双黑洞的质量，而  $\sigma_{\text{eq}}$  是在辐射-物质平衡时期，其余暗物质在  $\mathcal{O}(10^0 \sim 10^3)M_\odot$  尺度上的密度扰动的方差。参照文献 [15, 22]，我们选择  $\sigma_{\text{eq}} \approx 0.005$ 。这里  $f_{\text{PBH}} \equiv \Omega_{\text{PBH}}/\Omega_{\text{CDM}}$  是冷暗物质中原初黑洞所占的能量密度的百分比，与非相对论物质中原初黑洞的总丰度  $f$  相关，具体关系为



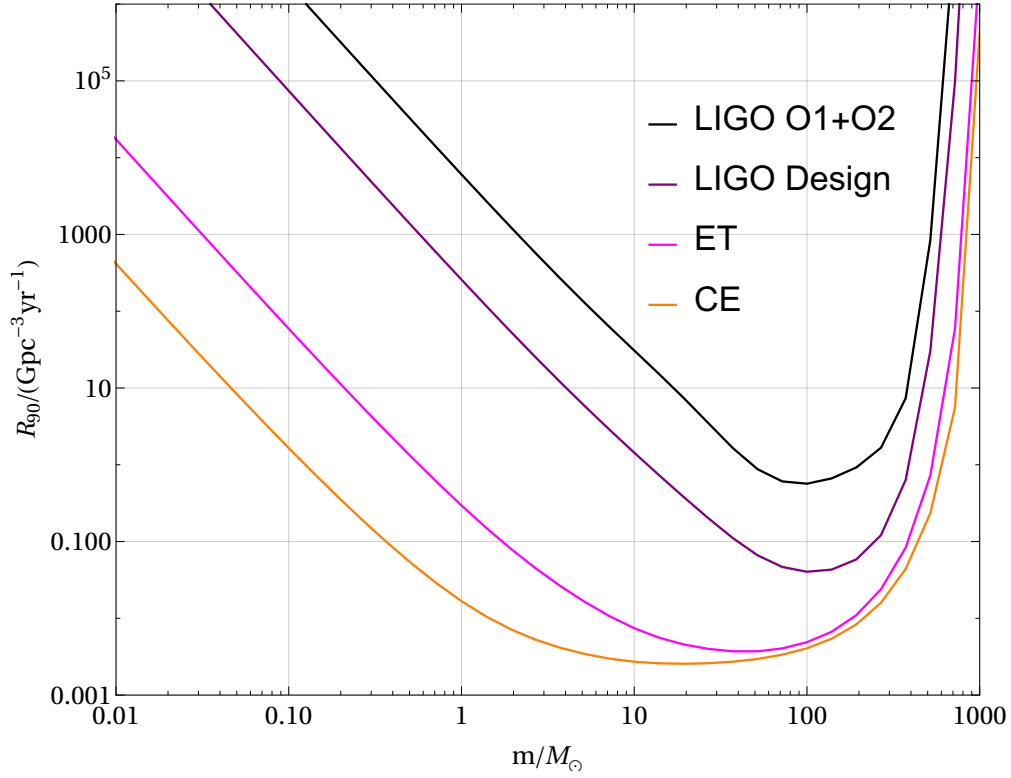


图 5.1 LIGO O1 & O2、LIGO 设计、ET 和 CE 给出的等质量双黑洞并合率的 90% 上限  $R_{90}$ 。

**Figure 5.1 The 90% confidential upper limit on the binary merger rate,  $R_{90}$ , as a function of the masses of the equal-mass binary black holes for LIGO O1 & O2, LIGO Design, ET and CE.**

$f_{\text{PBH}} \approx f/0.85$ 。此外， $t(z)$  是在红移  $z$  时的宇宙时间，而  $t_0 \equiv t(0)$  是我们宇宙的年龄。

对某个引力波探测器，其预期可探测的事件数  $N_{\text{obs}}$  为 [15, 127]

$$N_{\text{obs}} = \int R(z) \frac{dVT}{dz} dz, \quad (5.2)$$

其中  $dVT/dz$  是引力波探测器的可探测时空区域 [124, 125]，表明该探测器对并合事件的选择效应。一般来说， $dVT/dz$  是红移的函数，而且取决于双黑洞的属性  $\xi$  (例如质量和自旋)，其具体表达式为

$$\frac{dVT}{dz} = \frac{dV_c}{dz} \frac{T_{\text{obs}}}{1+z} f(z|\xi), \quad (5.3)$$

其中， $V_c$  是共动体积， $T_{\text{obs}}$  是观测时间，分母  $1+z$  将宇宙时间从源参考系转换到探测器参考系。这里  $0 < f(z|\xi) < 1$  是指在红移  $z$  时，在给定参数  $\xi$  下探测到双黑洞的概率 [195]。然后，可以通过使用最强事件统计范式 (loudest event statistic

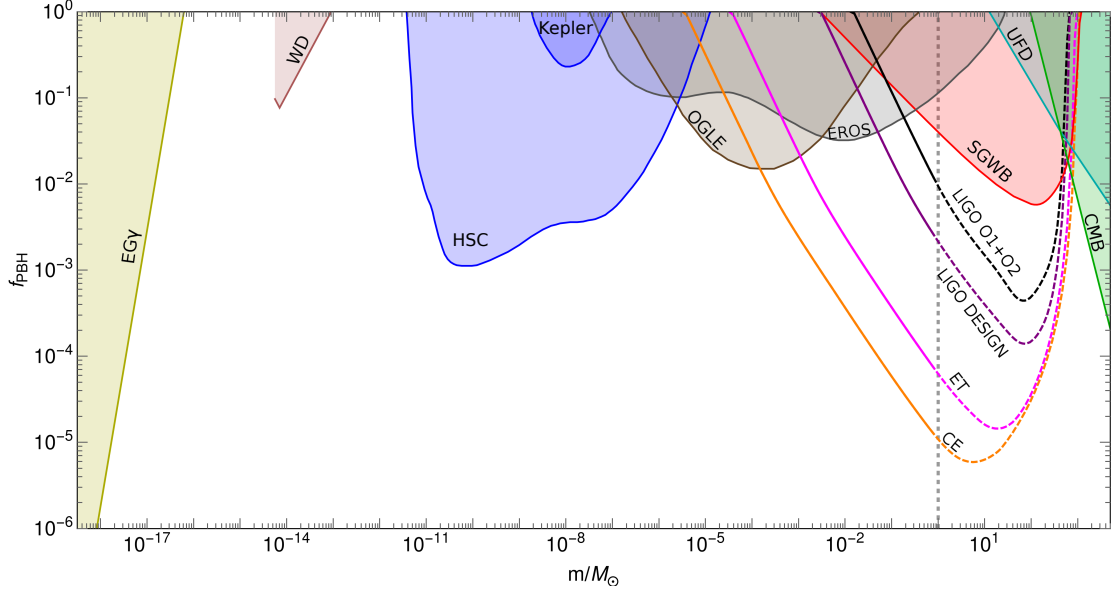


图 5.2 由未探测到随机引力波背景和未探测到双黑洞并合对具有单质量分布的原初黑洞丰度  $f_{\text{PBH}}$  的限制。由于目前无法得知 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞中到底有没有原初双黑洞，所以我们在图上  $1M_{\odot}$  处用灰色竖线表示定向搜索的限制结果只对亚太阳质量的原初黑洞有效。黑色、紫色、洋红色和橙色曲线分别是 LIGO O1/O2、LIGO 设计、ET 和 CE 的定向搜索给出的可探测极限。LIGO 设计、ET 和 CE 的观测时间均假设为 1 年。红色曲线代表由于 LIGO O1 和 O2 未探测到随机引力波背景给出的  $f_{\text{PBH}}$  的上限。这里还给出了其他实验：星系外伽马射线 ( $\text{EG}\gamma$ ) [176]、本地星系中存在白矮星 (WD) [178]、Subaru HSC 微透镜 (HSC) [179]、开普勒毫/微透镜 (Kepler) [180]、EROS/MACHO 微透镜 (EROS) [182]、OGLE 微透镜 (OGLE) [181]、超暗矮星系 (UFD) 的动态加热 [184] 以及微波背景辐射 [109, 114–116, 185] 对  $f_{\text{PBH}}$  限制的结果。

Figure 5.2 Constraints on the abundance of primordial black holes,  $f_{\text{PBH}}$ , with a monochromatic mass distribution both by the non-detection of SGWBs and the null targeted search result of binary black holes. The gray vertical line at  $1M_{\odot}$  indicates that the constraints from the targeted search are only valid for the sub-solar mass primordial black holes, because we yet cannot conclude that none of the ten binary black holes detected by LIGO-Virgo are of primordial-origin binary black holes. The black, purple, magenta and orange curves are the results of targeted search from LIGO O1 & O2, LIGO Design, ET and CE, respectively. The observing times of LIGO Design, ET and CE are all assumed to be 1 year. The red curve is the updated upper bound of  $f_{\text{PBH}}$  constrained by the non-detection of SGWB from both LIGO O1 and O2 searches. The results from other experiments are also shown here: extra-galactic gamma-ray ( $\text{EG}\gamma$ ) [176], existence of white dwarfs in our local galaxy (WD) [178], Subaru HSC microlensing (HSC) [179], Kepler milli/microlensing (Kepler) [180], EROS/MACHO microlensing (EROS) [182], OGLE microlensing (OGLE) [181], dynamical heating of ultra-faint dwarf galaxies (UFD) [184], and accretion constraints by CMB [109, 114–116, 185].

formalism) 来获得双黑洞并合率的 90% 上限 [196]。

$$R_{90} = \frac{2.303}{VT}, \quad (5.4)$$

其中

$$VT = \int \frac{dVT}{dz} dz. \quad (5.5)$$

我们采用了来自文献 [124, 125] 的半解析近似的方法来计算  $VT$ 。我们忽略了黑洞的自旋效应，并使用 IMRPhenomPv2 波形作为双黑洞并合的模板。此外，我们将单探测器的信噪比阈值设为  $\text{SNR} = 8$  作为可探测标准，这大致相当于两个探测器构成的探测网络的阈值为 12。图 5.1 显示了由公式 (5.4) 估计出来的等质量双黑洞并合率的 90% 上限。

图 5.2 显示了 LIGO O1/O2、LIGO 设计、ET 和 CE 通过定向搜索可得到的原初黑洞丰度  $f_{\text{PBH}}$  的可探测极限。我们假设在这些实验中没有探测到原初双黑洞。LIGO O1& O2 的总的有效观测时间为 165.6 天 [8, 130]。同时假定 LIGO 设计、ET 和 CE 的运行时间都是全勤 1 年。文献 [186, 188] 中通过对双黑洞的定向搜索，给出了质量范围为  $[0.2, 1] M_{\odot}$  的亚太阳质量原初黑洞的  $f_{\text{PBH}}$  的上限。我们从几个方面来推广了文献 [186, 188] 的结果。首先，我们采用了在文献 [22] 中提出的并合率，与文献 [186, 188] 使用的来自文献 [14] 给出的并合率相比，我们所使用的并合率更全面地考虑了双黑洞系统的演化。其次，我们还通过提出用第三代引力波探测器（如 CE 和 ET）来估计了  $f_{\text{PBH}}$  的可探测极限。最后，我们并不局限于  $[0.2, 1] M_{\odot}$  的质量范围，而是扩展到探测器的可探测质量范围。在解释图 5.2 的结果时应该小心。由于目前观测到的超太阳质量双黑洞是否属于原初双黑洞还有争议，我们用虚线来表明超太阳质量原初黑洞的可探测极限。此外，当质量小于  $0.2 M_{\odot}$ ，从引力波数据中搜索信号的难度会大幅增加。这是因为对于小质量系统，模板的起始频率也小；而做模板匹配所需的模板数量  $N_{\text{temp}}$  正比于最小质量  $M_{\text{min}}$  和起始频率  $f_{\text{min}}$  [188]

$$N_{\text{temp}} \propto (M_{\text{min}} f_{\text{min}})^{-8/3}. \quad (5.6)$$

计算资源的急剧增加限制了目前的引力波探测能力，使其无法有效地处理质量远低于  $0.2 M_{\odot}$  的双黑洞系统。然而，在未来，这个问题可能会通过改进搜索算法或计算技术来解决。我们给出 CE 和 ET 的结果的主要目的是为了说明未来

探测器的探测能力。还需要注意的是，文献 [22, 127] 通过 LIGO-Virgo O1 数据给出了质量范围为  $[10, 300]M_{\odot}$  的原初黑洞的丰度  $f_{\text{PBH}}$  的上限。我们通过使用 LIGO-Virgo O1 和 O2 数据更新了文献 [22, 127] 的限制结果。所以我们得到的上限比文献 [22, 127] 的结果更加严格。

由于 LIGO-Virgo 没有探测到随机引力波背景，文献 [112] 给出了  $f_{\text{PBH}}$  的上限。我们更新了 [112] 的结果，给出了  $f_{\text{PBH}}$  更严格的限制。通常人们可能会以为由定向搜索给出的原初黑洞丰度的限制要比由随机引力波背景给出的限制更严格。虽然来自轻质量的双黑洞并合产生的引力波信号非常微弱，无法被引力波探测器直接探测到，但是这些微弱的信号可以叠加形成一个可探测的随机引力波背景。所以未探测到随机引力波背景会对轻质量的原初黑洞的丰度给出更严格的限制。请看图 5.2 中  $0.1M_{\odot}$  附近红曲线和黑曲线的交叉。其实，对于其他的探测实验（比如 LIGO 设计、ET 和 CE）也有类似的结果。

### 5.2.2 原初黑洞具有一般质量谱的情况

LIGO-Virgo 在其 O1 和 O2 观测阶段的数据中搜索了两个黑洞都具有亚太阳质量的双黑洞系统，发现数据中并没有该类信号 [186–188]，并给亚太阳质量的原初黑洞的丰度给出了限制。然而，该搜索只考虑成分质量在  $0.2M_{\odot}$  到  $1M_{\odot}$  之间的原初双黑洞系统。在这一小节中，我们提出搜索两个质量分别是亚太阳质量和超太阳质量的黑洞构成的原初双黑洞系统。由于这样的系统可以发出更强的引力波，从而更容易被探测到。

在这里，我们将前一小节的讨论扩展到原初黑洞具有一般质量分布的情况。我们假设迄今为止由 LIGO-Virgo 观察到的所有双黑洞都是原初双黑洞。之前的工作 [24, 25, 192, 197] 通常选择一些特定的质量函数，例如幂律质量谱或对数正态质量谱，来描述原初黑洞质量分布。这些特定的质量谱通常来自特定的原初黑洞形成模型。在这里，我们采取一种与模型无关的方法，即将质量函数  $P(m)$  从  $0.2M_{\odot}$  到  $100M_{\odot}$  进行分段

$$P(m) = \begin{cases} P_0, & 0.2 M_{\odot} \leq m < 1 M_{\odot} \\ P_1, & 1 M_{\odot} \leq m < 30 M_{\odot} \\ P_2, & 30 M_{\odot} \leq m < 60 M_{\odot} \\ P_3, & 60 M_{\odot} \leq m \leq 100 M_{\odot} \end{cases} \quad (5.7)$$

其中  $P_i = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  为四个常数，其满足归一化条件

$$\int P(m) dm = 0.8P_0 + 29P_1 + 30P_2 + 40P_3 = 1. \quad (5.8)$$

这里，四个  $P_i$  中只有三个是独立的，我们选择  $\vec{\theta} = \{P_1, P_2, P_3\}$  作为自由参数。我们将用 LIGO O1 和 O2 探测到的 10 个双黑洞并合事件去拟合  $\vec{\theta}$ 。在本小节中，我们感兴趣的原始黑洞的质量范围为  $[m_{\min}, m_{\max}] = [0.2M_{\odot}, 100M_{\odot}]$ 。这里  $m_{\min} = 0.2M_{\odot}$  对应于 LIGO 搜索亚太阳质量超轻双黑洞的质量下限 [186]。

在文献 [15] 中，我们给出了具有一般质量函数的原始双黑洞的并合率分布。对于一个归一化的质量谱，时间依赖的共动并合率密度  $P(m|\vec{\theta})$  为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}(t|\vec{\theta}) \approx & 3.9 \cdot 10^6 \times \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{34}{37}} f^2(f^2 + \sigma_{\text{eq}}^2)^{-\frac{21}{74}} \times (m_1 m_2)^{\frac{3}{37}} (m_1 + m_2)^{\frac{36}{37}} \\ & \times \min\left(\frac{P(m_1|\vec{\theta})}{m_1}, \frac{P(m_2|\vec{\theta})}{m_2}\right) \left(\frac{P(m_1|\vec{\theta})}{m_1} + \frac{P(m_2|\vec{\theta})}{m_2}\right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

其中双黑洞的分量质量  $m_1$  和  $m_2$  的单位为  $M_{\odot}$ 。通过对分量质量的积分，可以得到与时间（或红移）依赖的并合率为

$$\mathcal{R}(t|\vec{\theta}) = \int \mathcal{R}_{12}(t|\vec{\theta}) dm_1 dm_2. \quad (5.10)$$

进而局域并合率密度为 [192]

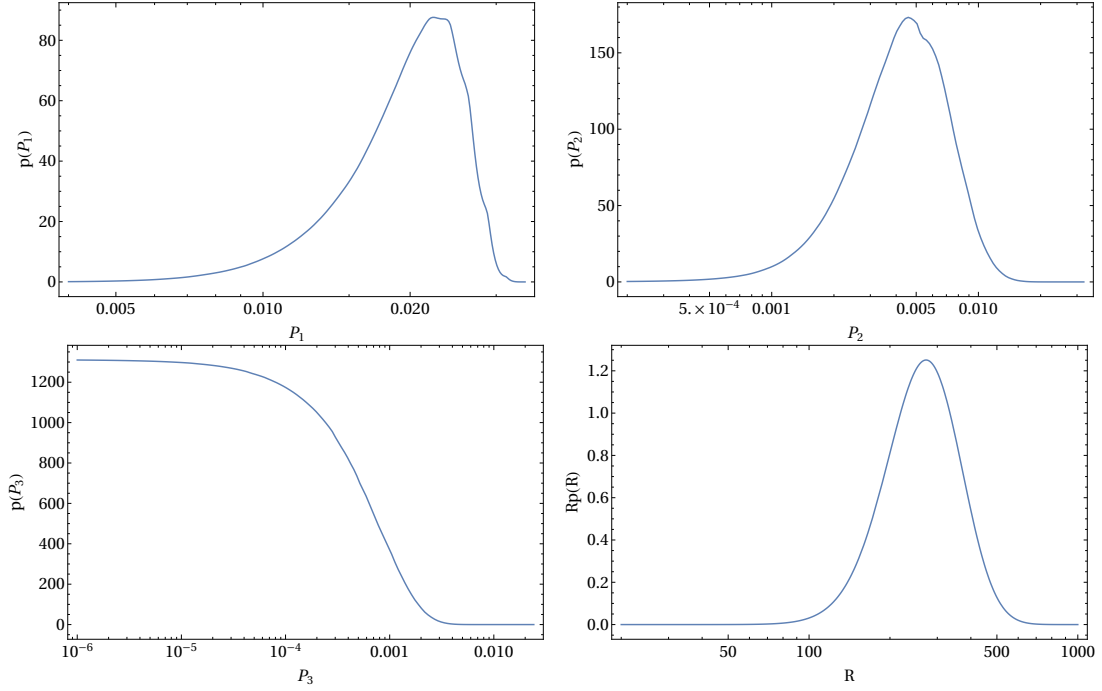
$$\mathcal{R}_{12}(t_0|\vec{\theta}) = R p(m_1, m_2|\vec{\theta}). \quad (5.11)$$

我们选取局域并合率  $R \equiv \mathcal{R}(t_0|\vec{\theta})$  使得双黑洞并合的概率密度  $p(m_1, m_2|\vec{\theta})$  是归一的。

为了从 LIGO-Virgo 观察到的并合事件中获取参数  $\{\vec{\theta}, R\}$  的最佳拟合值，我们有必要从双黑洞质量分布做层次贝叶斯推断 [53, 124, 125, 130, 162–164]。如果有  $N$  个双黑洞并合的数据， $\vec{d} = (d_1, \dots, d_N)$ ，那么似然函数为 [53, 162–164]

$$p(\vec{d}|\vec{\theta}, R) \propto R^N e^{-R\beta(\vec{\theta})} \prod_i^N \int d\vec{\lambda} p(d_i|\vec{\lambda}) p(\vec{\lambda}|\vec{\theta}), \quad (5.12)$$

其中  $\vec{\lambda} \equiv \{m_1, m_2\}$ 。由于在 LIGO-Virgo 做参数估计时，对于每个事件的质量参数选取的是平的分布，所以单个事件  $p(d_i|\vec{\lambda})$  的似然函数与该事件的后验  $p(\vec{\lambda}|d_i)$


 图 5.3  $\{R, P_1, P_2, P_3\}$  参数的后验分布。

The posterior distributions for the free parameters  $\{R, P_1, P_2, P_3\}$ .

成正比。我们将使用 LIGO-Virgo 公开的 10 个双黑洞的后验分布 [130, 198] 来估算公式(5.12)的积分。同时， $\beta(\vec{\theta})$  被定义为

$$\beta(\vec{\theta}) \equiv \int d\vec{\lambda} VT(\vec{\lambda}) p(\vec{\lambda}|\vec{\theta}), \quad (5.13)$$

其中  $VT(\vec{\lambda})$  由公式(5.5)给出。进而，我们可以直接估算后验概率分布  $p(\vec{\theta}, R|\vec{d})$  为

$$p(\vec{\theta}, R|\vec{d}) \propto p(\vec{d}|\vec{\theta}, R) p(\vec{\theta}, R). \quad (5.14)$$

仿照 LIGO-Virgo[108, 124]，我们选取  $\vec{\theta}$  为平的分布，而  $R$  为对数平的分布，即

$$p(\vec{\theta}, R) \propto \frac{1}{R}. \quad (5.15)$$

对公式(5.14)的  $R$  进行积分，我们很容易得到边际化的后验分布

$$p(\vec{\theta}|\vec{d}) \propto [\beta(\vec{\theta})]^{-N} \prod_i^N \int d\vec{\lambda} p(d_i|\vec{\lambda}) p(\vec{\lambda}|\vec{\theta}). \quad (5.16)$$

以上的后验分布已经被广泛运用于引力波参数推断中 [108, 124, 125, 130, 132, 192]。

图5.3给出了自由参数  $R, P_1, P_2, P_3$  的后验分布。利用 LIGO O1 和 O2 探测到的 10 个双黑洞事件，我们得到参数  $\{\vec{\theta}, R\}$  的中值和 90% 的置信区间为

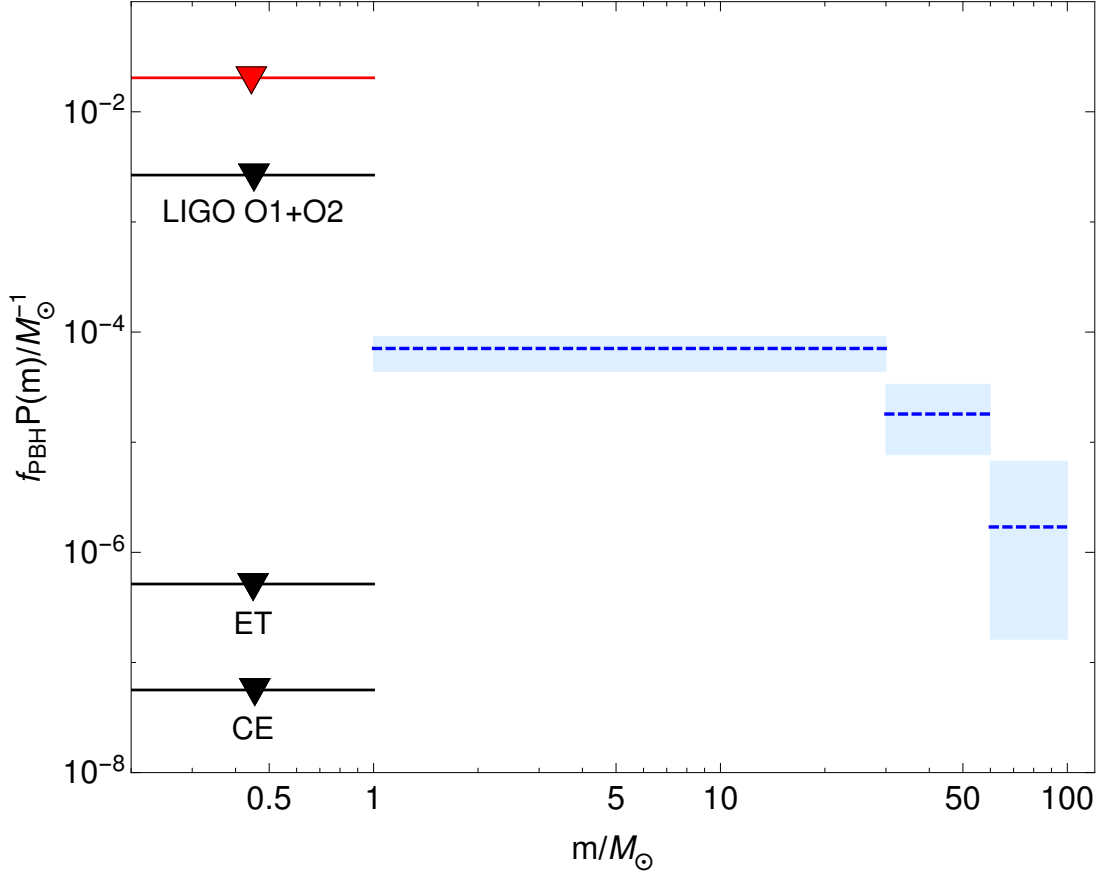


图 5.4 对原初黑洞占冷暗物质丰度  $f_{\text{PBH}}$  的限制。蓝色区域是根据 LIGO 的 O1 和 O2 事件推断出来的对质量范围  $1M_{\odot} \leq m \leq 100M_{\odot}$  的限制。其中，中心虚线为中值，而阴影条代表 90% 的泊松误差。在质量范围  $[0.2, 1]M_{\odot}$  中显示的四条线分别代表了 LIGO O1、LIGO O1 & O2、ET 和 CE 给出的限制。

Figure 5.4 Constraints on the abundance of primordial black holes,  $f_{\text{PBH}}$ , in CDM. The blue regions with  $1M_{\odot} \leq m \leq 100M_{\odot}$  are inferred from LIGO's O1 and O2 events, where the centered dashed lines are the median values and the shaded bars represent the 90% Poisson errors. Four lines shown in the mass range  $[0.2, 1]M_{\odot}$  represent the constraints from null targeted searches of LIGO O1, LIGO O1 & O2, ET and CE, respectively.

$P_1 = 2.1_{-0.8}^{+0.7} \times 10^{-2}$ ,  $P_2 = 5.4_{-3.1}^{+4.7} \times 10^{-3}$ ,  $P_3 = 5.1_{-4.6}^{+15.2} \times 10^{-4}$ , 以及  $R = 308_{-135}^{+193} \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ 。由此我们可以推断出原初黑洞占冷暗物质的丰度为  $f_{\text{PBH}} = 3.3_{-1.8}^{+2.3} \times 10^{-3}$ 。我们得到的原初黑洞的丰度与之前的估计是一致的，即  $10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-2}$ 。我们的结果证实了冷暗物质的主导部分不应该来源于质量范围为  $[0.2, 100]M_{\odot}$  的原初黑洞 [14, 15, 22, 24, 25, 192]。接下来我们将研究探测亚太阳质量双黑洞的可能性。我们将质量范围为  $[0.2, 1]M_{\odot}$  的原初黑洞的丰度记为

$$f_{\text{PBH}0} \equiv f_{\text{PBH}} P_0 \Delta m_0, \quad (5.17)$$



其中  $\Delta m_0 = (1 - 0.2)M_\odot = 0.8M_\odot$ 。从上述得到的结果，我们可以通过 LIGO 的 O1 和 O2 数据直接推断出  $f_{\text{PBH0}}$  的上限为  $f_{\text{PBH0}} \leq 1.8 \times 10^{-3}$ 。未来，如果第三代地基引力波探测器投入运行，探测能力将大大增强。如果真的存在亚太阳质量双黑洞，我们将有更多机会探测到它们。除了寻找有两个亚太阳质量分量的双黑洞外，我们还建议寻找由一个亚太阳质量分量黑洞 (质量在  $[0.2, 1]M_\odot$ ) 和一个超太阳质量黑洞 (质量在  $[1, 100]M_\odot$ ) 构成的双黑洞系统。利用最强事件统计范式 [见公式(5.4)] 和从 LIGO 的 O1 和 O2 数据推断出的  $\vec{\theta}$  的值， $f_{\text{PBH0}}$  可以被限制在一个前所未有的水平。假设没有双黑洞被探测到，ET 可以得到  $f_{\text{PBH0}}$  的可探测极限为  $f_{\text{PBH0}} \leq 4.1 \times 10^{-7}$ ，而 CE 可以得到  $f_{\text{PBH0}}$  的可探测极限为  $f_{\text{PBH0}} \leq 4.5 \times 10^{-8}$ 。图5.4显示了当原初黑洞具有一般的质量分布时，对  $f_{\text{PBH}}$  和  $f_{\text{PBH0}}$  的可探测限制。假设原初黑洞的质量在  $[0.2, 1]M_\odot$  是平的分布，图5.4中的红线显示了未搜到亚太阳质量双黑洞而给出的  $f_{\text{PBH}}$  的上限。可以看出，搜索由亚太阳质量黑洞和超太阳质量黑洞构成的双黑洞得到的  $f_{\text{PBH}}$  的可探测极限，比搜索两个亚太阳质量的黑洞构成的双黑洞得到的  $f_{\text{PBH}}$  相比，将使  $f_{\text{PBH}}$  的可探测极限提高  $\mathcal{O}(10^2 \sim 10^3)$  的数量级。

### 5.3 用超太阳质量黑洞来区分原初黑洞和天体物理黑洞

除了通过搜索亚太阳质量双黑洞外，还有一种方法是通过探索超太阳质量双黑洞的事件率的红移演化来区分原初黑洞和天体物理黑洞。在 [15] 中，我们发现原初双黑洞的并合率随着红移  $z$  的增加而增加，即  $\mathcal{R}(z) \propto t(z)^{-34/37}$ ，这与原初黑洞的丰度和质量函数都无关。然而，天体物理双黑洞预测的并合率首先会随着  $z$  的增加而增加，然后在某个小红移处达到峰值，最后会随着  $z$  的增加而迅速降低。图5.5显示了原初双黑洞和天体物理双黑洞的并合率作为红移  $z$  的演化函数。可见这两个模型的并合率在红移越高时差异越大。目前，LIGO 只能观测到低红移的双黑洞 ( $z < 1$ )，但未来的引力波探测器，如 CE 和 ET，将能够探测到更高的红移 ( $z \geq 10$ ) 的双黑洞并合事件。由于事件率随红移具有不同的分布，第三代地基探测器，如 CE 和 ET，可以很好地区分原初黑洞和天体物理黑洞模型。

为了和之前的研究 [108, 137] 一致，我们将双黑洞的分量质量限制在以下范围内  $m_{\min} \leq m_2 \leq m_1$  且  $m_1 + m_2 \leq m_{\max}$ 。其中  $m_{\min} = 5M_\odot$ ， $m_{\max} = 100M_\odot$ 。为



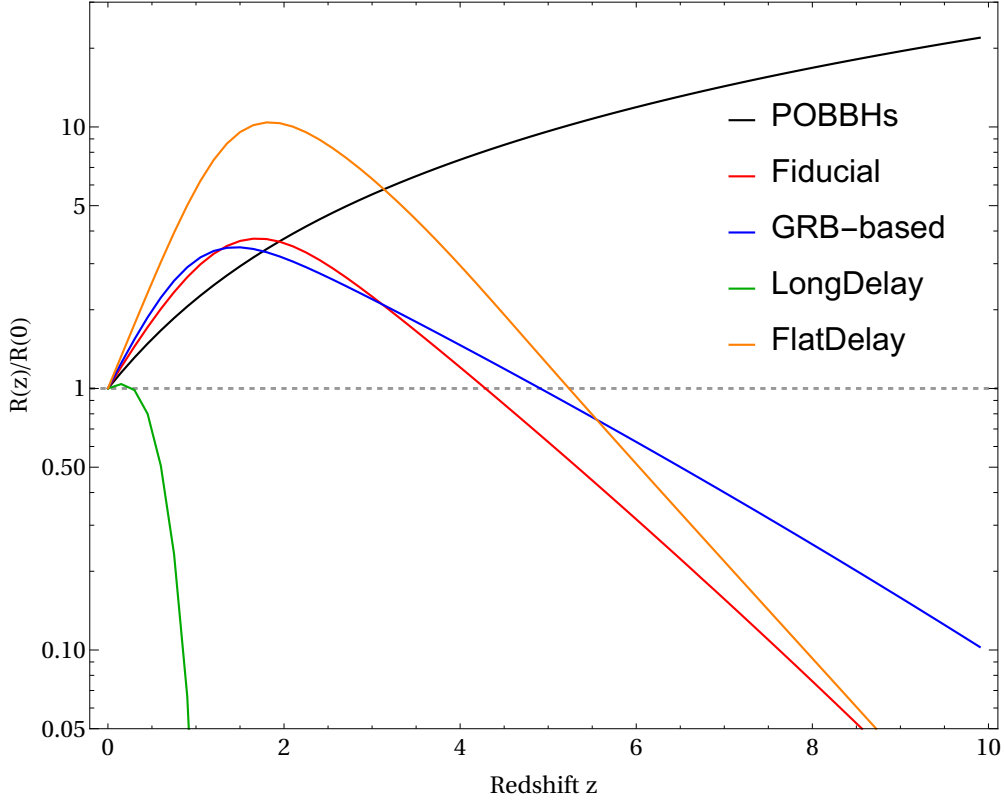


图 5.5 原初双黑洞和天体物理双黑洞给出的归一化并合率的红移分布  $R(z)/R(0)$ 。对于原初双黑洞和天体物理双黑洞，我们都只考虑双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ 。我们假设原初黑洞具有一般的质量分布（见公式(5.7)），且用最佳拟合值来计算原初双黑洞的并合率。

**Figure 5.5** Redshift distribution of the normalized merger rate,  $R(z)/R(0)$ , for the primordial-origin binary black holes (POBBHs) and stellar-origin binary black holes, respectively. For both the primordial-origin binary black holes and stellar-origin binary black holes, we only count the binary black holes with masses in the range of  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ . We assume primordial black holes have a broad mass distribution of Eq. (5.7), and the best-fits values are used to calculate the merger rate of primordial-origin binary black holes.

了计算可观测事件率，我们首先需要知道并合率分布。我们假设原初黑洞具有公式(5.7)的质量分布，并采用来自5.2.2小节得到的最佳拟合值来计算并合率。而对于天体物理黑洞，并合率是天体物理黑洞的生成率  $R_{\text{birth}}(z, m)$  与天体物理双黑洞的时间延迟分布  $P_d(t_d)$  的卷积 [152]

$$\mathcal{R}_{12}(z) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} R_{\text{birth}}(t(z) - t_d, m_1) \times P_d(t_d) dt_d, \quad (5.18)$$

其中  $t_d$  是时间延迟， $t(z)$  双黑洞并合时的宇宙年龄。生成率  $R_{\text{birth}}$  可以通过以下

方式估算出来 [152]

$$R_{\text{birth}}(t, m_{\text{bh}}) = \int \psi[t - \tau(m)] \phi(m) \delta(m - g_{\text{bh}}^{-1}(m_{\text{bh}})) dm, \quad (5.19)$$

其中  $m_{\text{bh}}$  是残余黑洞的质量,  $\tau(m)$  是质量为  $m$  的前身星的寿命,  $\phi(m) \propto m^{-2.35}$  是初始质量函数 (IMF) [199]。我们考虑了“WWp”的黑洞形成模型 [155], 其中  $m$  和  $m_{\text{bh}}$  存在以下关系

$$\frac{m_{\text{bh}}}{m} = A \left( \frac{m}{40M_{\odot}} \right)^{\beta} \frac{1}{\left( \frac{Z(z)}{0.01Z_{\odot}} \right)^{\gamma} + 1}, \quad (5.20)$$

其中  $Z(z)$  是金属丰度 (具体形式见 [31])。公式(5.20)中的参数值为:  $A = 0.3$ ,  $\beta = 0.8$  和  $\gamma = 0.2$  [152]。解公式(5.20)可以得到函数  $m = g_{\text{bh}}^{-1}(m_{\text{bh}})$ 。公式(5.19)中恒星形成率 (SFR)  $\psi(t)$  可由以下公式计算 [154]

$$\psi(z) = k \frac{a \exp[b(z - z_m)]}{a - b + b \exp[a(z - z_m)]}, \quad (5.21)$$

其中  $z$  是红移,  $\{k, a, b, z_m\}$  的参数值取决于具体的天体物理双黑洞的形成模型。在本节中, 我们将考虑四个不同的天体物理双黑洞模型。

第一个为 Fiducial 模型, 其中恒星形成率是对发光星系观测结果的拟合, 拟合参数为  $k = 0.178 M_{\odot} \text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3}$ ,  $z_m = 2.00$ ,  $a = 2.37$ ,  $b = 1.80$  [200], 时间延迟分布的形式为  $P_d \propto t_d^{-1}$ , 并且  $t_{\min} < t_d < t_{\max}$ 。其中最小延迟时间  $t_{\min} = 50 \text{Myr}$  为双黑洞系统从形成直到并合的时间, 最大延迟时间  $t_{\max}$  为哈勃时间 [33]。该模型对应于天体物理双黑洞模型的经典孤立双星演化模型 [152]。

第二个是 GRB-based 模型, 其中恒星形成率是利用高红移下的伽马射线暴 (GRB) 校准而得到的。这个模型中各参数取值为  $k = 0.146 M_{\odot} \text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3}$ ,  $z_m = 1.72$ ,  $a = 2.80$ ,  $b = 2.46$  [200]。

第三个是 LongDelay 模型, 它与 Fiducial 模型基本相同, 但假设最小时间延迟为  $t_{\min} = 5 \text{Gyr}$ , 时间延迟明显变长。该模型可能与非常紧密的双星中快速旋转的大质量恒星的化学同质演化模型相一致 [201]。

最后一个是 FlatDelay 模型, 其假设时间延迟是平的分布, 并且  $t_{\min} = 50 \text{Myr}$  和  $t_{\max} = 1 \text{Gyr}$ 。这个模型对应于动态形成机制, 即大多数的双星系统很可能发生在在宿主环境的极早期 [33]。

图5.5比较了原初双黑洞模型和不同天体物理双黑洞模型的归一化并合率  $R(z)/R(0)$  的红移分布。由图可知, 随着红移的增加, LongDelay 模型的并合率迅

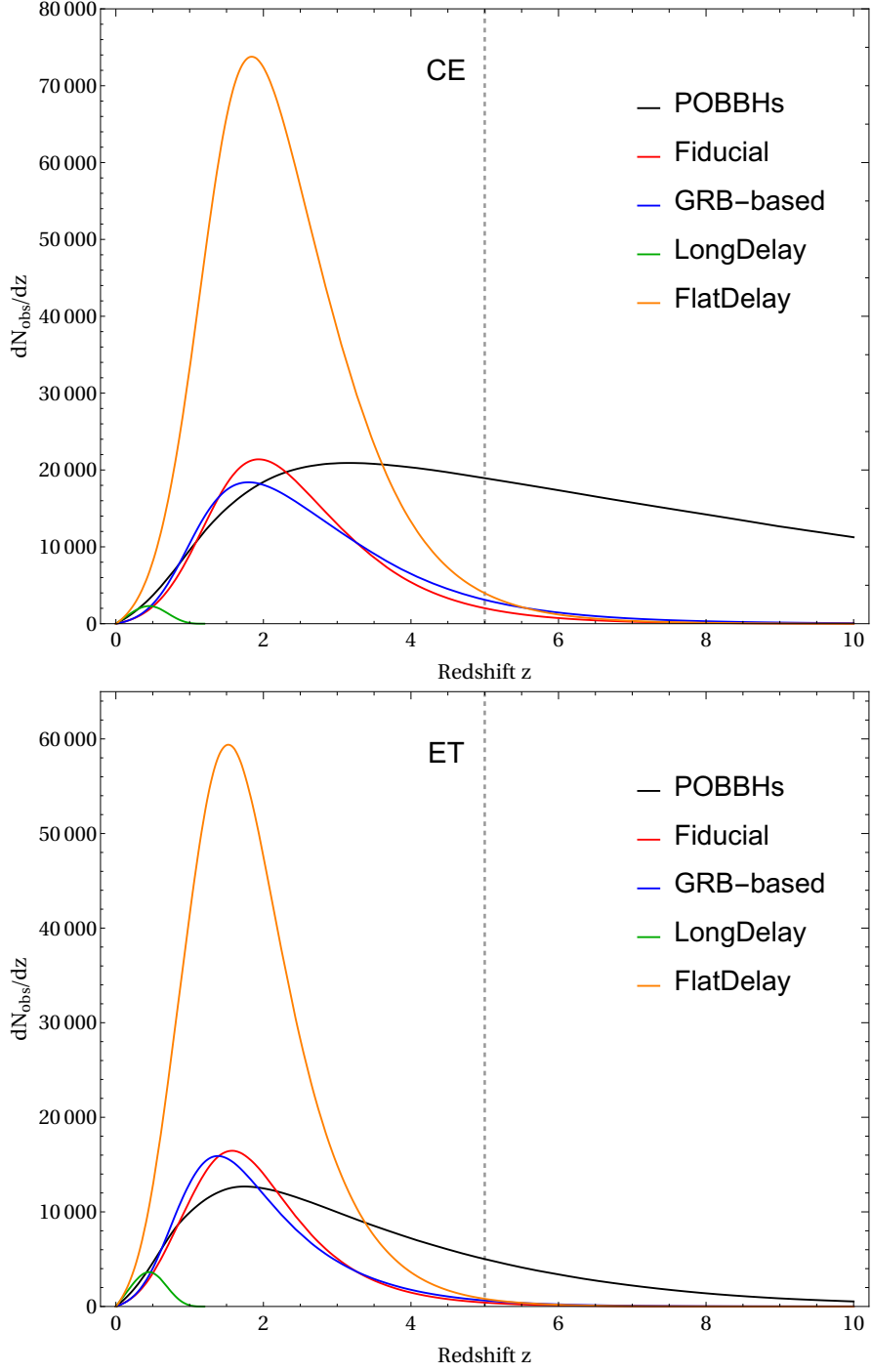


图 5.6 CE (上图) 和 ET (下图) 对于双黑洞的可观测事件数密度  $dN_{\text{obs}}/dz$  随红移的分布。

对于原初双黑洞和天体物理双黑洞，我们都只考虑双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ 。我们假设原初黑洞具有一般的质量分布（见公式(5.7)）。

**Figure 5.6** Redshift distribution of the expected number density of observable binary black holes,  $dN_{\text{obs}}/dz$ , for CE (top panel) and ET (bottom panel), respectively. For both the primordial-origin binary black holes (POBBHs) and stellar-origin binary black holes, we only count the binary black holes with masses in the range of  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ . We assume primordial black holes have a broad mass distribution of Eq. (5.7).

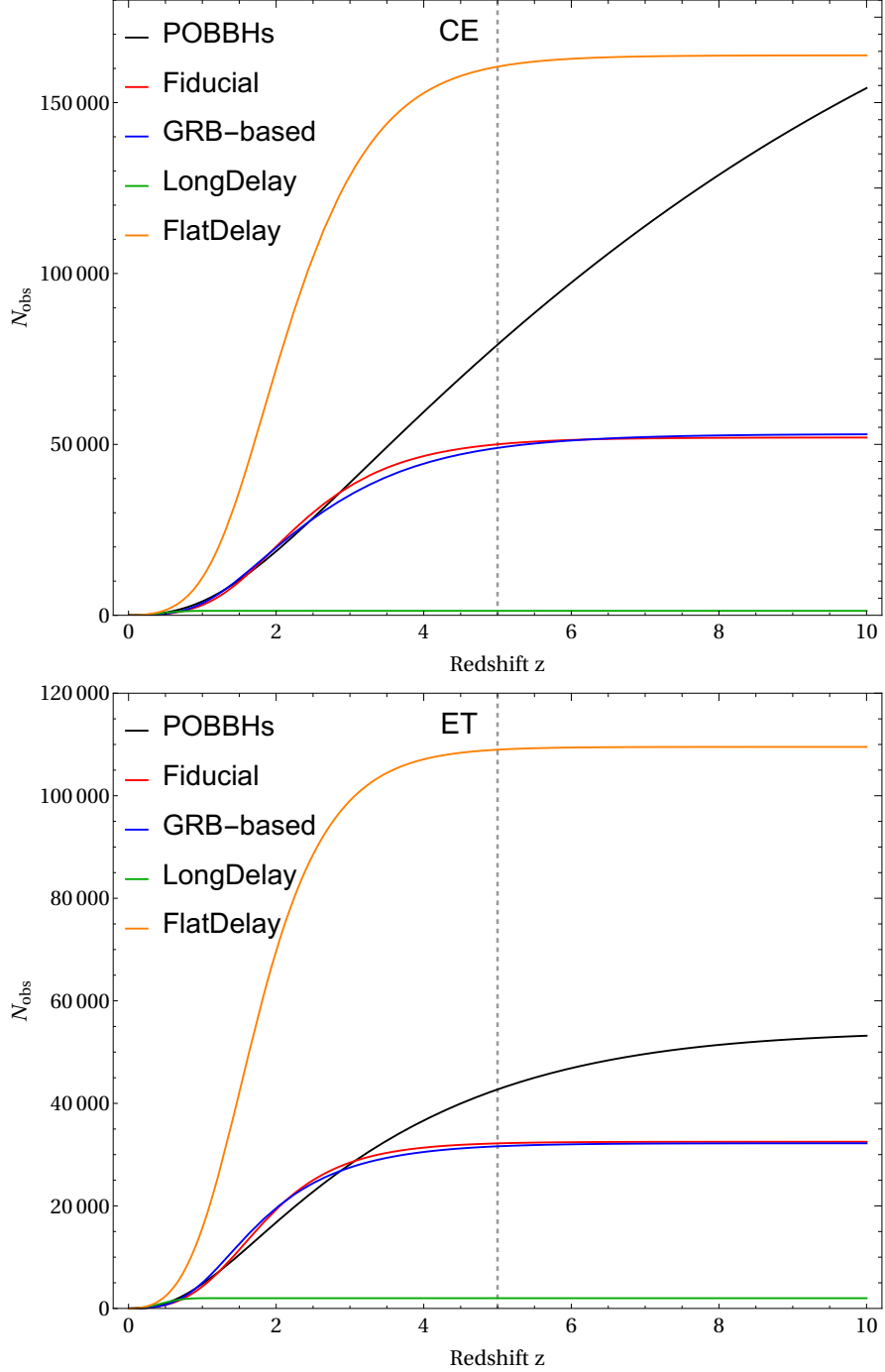


图 5.7 CE (上图) 和 ET (下图) 对双黑洞的可观测总数  $N_{\text{obs}}$  随红移的分布。对于原初双黑洞和天体物理双黑洞，我们都只考虑双黑洞的质量范围为  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ 。我们假设原初黑洞具有一般的质量分布 (见公式(5.7))。

Figure 5.7 Redshift distribution of the total number of observable binary black holes,  $N_{\text{obs}}$ , for CE (top panel) and ET (bottom panel), respectively. For both the primordial-origin binary black holes (POBBHs) and stellar-origin binary black holes, we only count the binary black holes with masses in the range of  $5M_{\odot} \leq m_2 \leq m_1 \leq 95M_{\odot}$ . We assume primordial black holes have a broad mass distribution of Eq. (5.7).

速下降；而与 Fiducial 和 FlatDelay 模型相比，GRB-based 模型在高红移时的并合率相对较高。此外，所有天体物理双黑洞模型的并合率在高红移时都有所下降，而原初双黑洞模型的并合率在高红移时有所上升。对于某个引力波探测器，与红移依赖的可观测事件数密度可以用以下公式计算出来

$$\frac{dN_{\text{obs}}}{dz} = \int dm_1 dm_2 \mathcal{R}_{12}(z) \frac{dVT}{dz}. \quad (5.22)$$

对红移  $z$  进行积分，可得出可观测事件的总数  $N_{\text{obs}}$ ，

$$N_{\text{obs}} = \int dz \frac{dN_{\text{obs}}}{dz}. \quad (5.23)$$

需要注意的是当  $m_1 = m_2 = m$  时，公式(5.2)是公式(5.23)的一个特例。图5.6显示了 CE 和 ET 对双黑洞的可观测数密度随红移的分布  $dN_{\text{obs}}/dz$ 。图5.7 显示了 CE 和 ET 的对双黑洞的可观测总数  $N_{\text{obs}}$  随红移的分布。像 CE 和 ET 这样的第三代引力波探测器预计每年会探测到  $\mathcal{O}(10^5)$  个双黑洞并合事件，并且可探测更高的红移。因为原初双黑洞和天体物理双黑洞的  $dN_{\text{obs}}/dz$  随红移分布有很大的不同，所以可用来区分这两种双黑洞形成模型。特别是，对于我们所讨论的所有 4 种天体物理双黑洞模型来说，高红移 ( $z > 5$ ) 对可观测数密度的贡献可以忽略不计，因此可观测事件的总数  $N_{\text{obs}}$  在  $z > 5$  时接近于一个常数。然而，对于原初双黑洞来说，高红移的贡献不能被忽略，因此当  $z > 5$  时， $N_{\text{obs}}$  仍然会增加。

## 5.4 总结和讨论

LIGO-Virgo 已经探测到几十个双黑洞并合产生的引力波事件，为人类探索宇宙打开了另一扇窗口。理解这些双黑洞是如何形成及演化的，是一个有待解决的科学问题。在本章中，我们探讨了通过下一代地基引力波探测器，比如 ET 和 CE，来区分原初黑洞和天体物理黑洞的可能性。

我们首先研究了直接探测亚太阳质量双黑洞并合的可能性。如果搜索到亚太阳质量的双黑洞并合，那将是原初黑洞存在的强有力证据。对于具有单色质量谱的原初黑洞模型，我们估计和预测 LIGO、ET 和 CE 对原初黑洞占冷暗物质丰度  $f_{\text{PBH}}$  的可探测限制。只有  $f_{\text{PBH}}$  大于某个限制，才有可能被相应的探测器探测到。相应的结果见图5.2。为了得到更好的限制，我们进一步考虑了去搜索由一个亚太阳质量黑洞和另一个超太阳质量黑洞构成的双黑洞系统。由于质量更大，所以这样的双黑洞比两个黑洞的质量都是亚太阳质量的双黑洞更容易被探测到。

我们预测，如果 ET 和 CE 没能探测到这样的双黑洞系统，那么质量为  $[0.2, 1]M_{\odot}$  的原初黑洞占冷暗物质的丰度会被限制到  $\mathcal{O}(10^{-7})$  and  $\mathcal{O}(10^{-8})$  的量级。相应的结果见图5.4。

其次，我们探讨了利用超太阳质量双黑洞并合率的红移演化来区分原初黑洞和天体物理黑洞的可能性。我们分别估计和预测了原初黑洞和天体物理黑洞模型的预期双黑洞可探测数随红移的分布。CE 和 ET 的结果显示在图5.6中。当 CE 和 ET 等第三代地基引力波探测器投入运行后，预计每年将探测到  $\mathcal{O}(10^5)$  个双黑洞并合事件，并达到更深的红移 ( $z \gtrsim 10$ )，可探测到的双黑洞事件的红移分布可以作为区分原初黑洞和天体物理黑洞的另一种手段。

在本章中，我们假设所有的双黑洞都来自同一个形成机制。然而，这个假设可能过于简单，因为 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞可能既有原初双黑洞，又有天体物理双黑洞。在这种情况下，要准确识别每个双黑洞到底是原初双黑洞还是天体物理双黑洞是相当困难的。除了双黑洞的质量和红移分布外，其他信息（例如自旋分布），对于确定双黑洞的起源也是非常重要的信息。例如，在早期宇宙中形成的原初黑洞的自旋非常小 [202–204]，而某些机制形成的天体物理黑洞则倾向于有相对较大的自旋分布 [205]。

## 第6章 脉冲星计时阵列对原初黑洞丰度的限制

### 6.1 研究背景

在过去的几年里, LIGO-Virgo 科学组织不仅探测到来自双黑洞并合 [1, 108, 130, 134–136, 198] 产生的引力波, 而且探测到了双中子星并合 [8] 产生的引力波。LIGO-Virgo 取得的重大科学成就使得人类进入了引力波天文学和多信使天文学的新时代。为了解释 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞是如何形成和演化的, 人们提出了众多模型 [13–15, 22, 31, 36–42, 44, 112, 123, 127, 167–170, 191, 192, 197, 206–209]。作为其中的一种模型, 原初黑洞模型 [13–15] 最近引起了很多关注。在宇宙早期, 原初黑洞是在标量曲率扰动的波长重新进入视界的时候, 由于过密区域发生引力坍缩而产生的 [210–214]。在这种情况下, 原初黑洞的质量与视界质量相当 [104], 从而导致原初黑洞的质量谱比天体物理学黑洞的质量谱宽得多。

原初黑洞模型之所以吸引人, 是因为它不仅可以解释 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞并合事件的事件率, 而且也是暗物质的候选者之一。暗物质问题仍然是困扰人类的一个未解之谜。原初黑洞能否构成所有的暗物质还没有定论。然而原初黑洞占冷暗物质的丰度  $f_{\text{PBH}}$  已经受到各种实验观测, 例如原初黑洞产生的银河系外  $\gamma$  射线 [176]、 $\gamma$  射线暴的 femtolensing [177]、Subaru/HSC 微透镜 [179]、开普勒毫/微透镜 [180]、OGLE 微透镜 [181]、EROS/MACHO 微透镜 [182]、本星系中的白矮星 [178]、超暗矮星系的动态加热 [184]、原初黑洞吸积星际气体产生的 X 射线/无线电辐射 [113]、原初黑洞吸积原初气体产生的宇宙微波背景辐射 [109, 114–116]、亚太阳质量双黑洞并合产生的引力波 [186–188, 208] 和双黑洞并合产生的随机引力波背景 [112, 208]。但是在  $[10^{-16}, 10^{-14}] \cup [10^{-13}, 10^{-12}] M_{\odot}$  的质量窗口内, 原初黑洞仍然可能构成所有的暗物质。请参考文献 [208] 里关于原初黑洞实验限制的最新总结。

我们知道, 在原初黑洞形成的过程中, 由于曲率标量扰动将不可避免地产生标量诱导引力波。所以通过标量诱导引力波也可以探测原初黑洞暗物质。最近, 研究表明标量诱导引力波背景的能量密度谱和其他引力波源的能量密度谱具有显著区别 [97]。由于原初黑洞应该是由曲率扰动概率密度的尾部形成的, 所以形成单个原初黑洞的概率对曲率扰动功率谱的振幅相当敏感 [80]。因此, 原初黑洞



的丰度对相应标量诱导引力波的振幅极为敏感。因此如果探测到标量诱导引力波将为原初黑洞的存在提供证据；而如果没有探测到标量诱导引力波将对原初黑洞的丰度产生严格的限制。

标量诱导引力波的峰值频率 ( $f_*$ ) 由共动曲率扰动的功率谱的峰值决定，且与原初黑洞的质量有如下关系 [71]

$$f_* \sim 3 \text{ Hz} \left( m_{\text{PBH}} / 10^{-18} M_{\odot} \right)^{-1/2}. \quad (6.1)$$

构成暗物质的原初黑洞的质量应重于  $10^{-18} M_{\odot}$ ，否则它们会因霍金辐射而蒸发掉。相应的标量诱导引力波的峰值频率应该低于 3Hz，因此地基引力波探测器很难探测到相应的标量诱导引力波。另一方面，低频引力波探测器特别适合探测原初黑洞暗物质。文献 [191] 预测了 LISA[35] 以及脉冲星计时阵列（如 IPTA[215]、FAST[216] 和 SKA[217]）对原初黑洞丰度所能达到的观测限制。相关的工作请参见 [75, 111, 189, 218–221]。

尽管目前脉冲星计时阵列的数据已经被用来限制随机引力波背景的振幅，但这些结果强烈地依赖于一些特殊的幂律形式的假设，而这种幂律形式与标量诱导引力波完全不同 [191]。在本节中，我们将首次在公开的脉冲星计时阵列的数据集中搜索标量诱导引力波的信号，以检验原初黑洞暗物质假设。我们在 NANOGrav 11 年数据集中未探测到标量诱导引力波，进而给出了质量范围为  $[4 \times 10^{-4}, 1.7] M_{\odot}$  的原初黑洞丰度的限制。

## 6.2 原初黑洞的形成机制

在这里，我们只考虑了原初黑洞具有单色质量谱的情况，其对应于  $\delta$  功率谱的标量曲率扰动，即

$$\mathcal{P}_{\zeta}(k) = A k_* \delta(k - k_*), \quad (6.2)$$

其中  $A$  是功率谱的无量纲振幅。在这种情况下，原初黑洞的质量与峰值频率  $f_*$  的关系为 [17, 18]

$$\frac{m_{\text{PBH}}}{M_{\odot}} \simeq 2.3 \times 10^{18} \left( \frac{H_0}{f_*} \right)^2, \quad (6.3)$$

其中  $f_*$  的单位是 Hz， $H_0$  是哈勃常数。原初黑洞的形成是一个阈值过程，它是由高斯随机场（Gaussian random fields）的三维统计描述的，也称为峰值理论（peak theory）[222]。



在宇宙早期, 由于宇宙的能量密度对原初黑洞的形成起关键作用 [17, 18], 所以在形成时, 原初黑洞的质量  $M$  和视界质量大致有如下关系

$$M \sim \frac{t}{G} \sim 10^{15} \left( \frac{t}{10^{-23} \text{ s}} \right) \text{ g}. \quad (6.4)$$

因此, 原初黑洞的质量可以横跨很多个数量级。例如, 在普朗克时间 ( $10^{-43} \text{ s}$ ) 形成的原初黑洞的质量为普朗克质量 ( $10^{-5} \text{ g}$ ), 而在  $1 \text{ s}$  形成的原初黑洞的质量可以达到  $10^5 M_\odot$ 。早期宇宙的高能量密度是形成原初黑洞的必要条件, 但不是充分条件。如果早期宇宙存在原初不均匀性, 那么高密度区域可能会停止膨胀并塌缩形成原初黑洞。在这种情况下, 公式(6.4)可以被更精确地表达为 [176]

$$M \approx 2.03 \times 10^5 \gamma \left( \frac{t}{1 \text{ s}} \right) M_\odot. \quad (6.5)$$

其中  $\gamma$  是一个取决于塌缩过程的系数。在辐射为主时期,  $\gamma = (1/\sqrt{3})^3 \approx 0.4$  [223]。

我们用  $\beta(M)$  表示质量为  $M$  的原初黑洞在形成时占宇宙质量的百分数, 则有 [176]

$$\beta(M) \equiv \frac{M n_{\text{PBH}}(t_i)}{\rho(t_i)} \approx 7.98 \times 10^{-29} \gamma^{-1/2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{3/2} \left( \frac{n_{\text{PBH}}(t_0)}{1 \text{ Gpc}^{-3}} \right), \quad (6.6)$$

其中  $t_i$  为原初黑洞的形成时间,  $n_{\text{PBH}}$  为原初黑洞的数密度,  $g_{*i}$  为原初黑洞形成时的相对论自由度。在今天未蒸发的原初黑洞的能量密度参数  $\Omega_{\text{PBH}}$  大致为 [104]

$$\Omega_{\text{PBH}} = \frac{M n_{\text{PBH}}(t_0)}{\rho_c} \approx \left( \frac{\beta(M)}{1.03 \times 10^{-8}} \right) \left( \frac{h}{0.68} \right)^{-2} \gamma^{1/2} \left( \frac{g_{*i}}{106.75} \right)^{-1/4} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2}. \quad (6.7)$$

通过峰值理论可以算出原初黑洞数密度, 从而求出原初黑洞在暗物质中的丰度 [224]

$$f_{\text{PBH}} \equiv \Omega_{\text{PBH}}/\Omega_{\text{DM}} \simeq 1.9 \times 10^7 \left( \zeta_c^2/A - 1 \right) e^{-\frac{\zeta_c^2}{2A}} \left( \frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.8)$$

其中  $\zeta_c \simeq 1$  [225–230] 是形成原初黑洞的阈值。

### 6.3 标量诱导引力波

标量诱导引力波可以用扰动理论来计算。以往的文献只考虑标量诱导引力波的二阶修正。在这里, 我们考虑诱导引力波到三阶修正。为此, 我们需要将爱

因斯坦方程展开到四阶。扰动的 FRW 度规为

$$ds^2 = a^2 \left\{ -(1 + 2\phi)d\eta^2 + \left[ (1 - 2\phi)\delta_{ij} + \frac{h_{ij}}{2} \right] dx^i dx^j \right\}, \quad (6.9)$$

其中  $\phi$  为标量扰动,  $h_{ij}$  为张量扰动。傅立叶空间的标量扰动具有如下形式的解 [20, 74, 100]

$$\phi_{\vec{k}}(\eta) \equiv \phi_{\vec{k}} T(k\eta), \quad (6.10)$$

其中  $\phi_{\vec{k}}$  为原初扰动, 且  $T(k\eta)$  为转移函数

$$T(k\eta) = \frac{9}{(k\eta)^2} \left[ \frac{\sin(k\eta/\sqrt{3})}{k\eta/\sqrt{3}} - \cos(k\eta/\sqrt{3}) \right]. \quad (6.11)$$

在辐射主导时期, 转移函数随时间振荡衰减, 即  $T(k\eta) \sim 1/\eta^2$ 。我们用 xPand [231] 软件包来将爱因斯坦方程展开到四阶。经过繁杂的计算, 我们得到如下的运动方程

$$h_{ij}'' + 2\mathcal{H}h_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} = -4\mathcal{T}_{ij}^{\ell m} S_{\ell m}, \quad (6.12)$$

其中一撇代表对共形时间  $\eta$  的导数,  $\mathcal{H} \equiv a'/a$  为共形哈勃参数, 且  $\mathcal{T}_{ij}^{\ell m}$  为 TT 投影算符 [232]。尽管公式(6.12)和二阶的引力波扰动方程具有相同的形式 (例如见 [74, 232]), 然而源项却不一样。我们将源项  $S_{ij} = S_{ij}^{(2)} + S_{ij}^{(3)} + S_{ij}^{(4)}$  计算到四阶, 具体为

$$S_{ij}^{(2)} = 4\phi\partial_i\partial_j\phi + 2\partial_i\phi\partial_j\phi - \partial_i\left(\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}}\right)\partial_j\left(\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}}\right), \quad (6.13)$$

$$S_{ij}^{(3)} = \frac{1}{\mathcal{H}} (12\mathcal{H}\phi - \phi') \partial_i\phi\partial_j\phi - \frac{1}{\mathcal{H}^3} (4\mathcal{H}\phi - \phi') \partial_i\phi'\partial_j\phi' + \frac{1}{3\mathcal{H}^4} (2\partial^2\phi - 9\mathcal{H}\phi') \partial_i(\mathcal{H}\phi + \phi') \partial_j(\mathcal{H}\phi + \phi'), \quad (6.14)$$

$$S_{ij}^{(4)} = 16\phi^3\partial_i\partial_j\phi + \frac{1}{3\mathcal{H}^3} \left[ 2\phi'\partial^2\phi - 9\mathcal{H}\phi'^2 - 8\mathcal{H}\phi\partial^2\phi + 18\mathcal{H}^2\phi\phi' + 96\mathcal{H}^3\phi^2 \right] \partial_i\phi\partial_j\phi + \frac{2}{3\mathcal{H}^5} \left[ -\phi'\partial^2\phi + 3\mathcal{H}\phi'^2 + 4\mathcal{H}\phi\partial^2\phi + 3\mathcal{H}^2\phi\phi' - 12\mathcal{H}^3\phi^2 \right] \partial_i\phi'\partial_j\phi' + \frac{1}{36\mathcal{H}^6} \left[ -16(\partial^2\phi)^2 - 3\partial_k\phi'\partial^k\phi' + 120\mathcal{H}\phi'\partial^2\phi - 6\mathcal{H}\partial_k\phi\partial^k\phi' + 144\mathcal{H}^2\phi\partial^2\phi - 180\mathcal{H}^2\phi'^2 + 33\mathcal{H}^2\partial_k\phi\partial^k\phi - 504\mathcal{H}^3\phi\phi' - 144\mathcal{H}^4\phi^2 \right] \times \partial_i(\mathcal{H}\phi + \phi') \partial_j(\mathcal{H}\phi + \phi'). \quad (6.15)$$

在傅立叶空间用格林函数法解(6.12)可得到 [74]

$$h(\vec{k}, \eta) = \frac{1}{ka(\eta)} \int d\tilde{\eta} \sin(k\eta - k\tilde{\eta}) a(\tilde{\eta}) S_{\vec{k}}(\tilde{\eta}), \quad (6.16)$$

其中  $S_{\vec{k}}(\eta) \equiv -4e^{ij}(\vec{k})\tilde{S}_{ij}(\vec{k}, \eta)$ , 而  $\tilde{S}_{ij}(\vec{k}, \eta)$  为源项在傅立叶空间的表达式。+ 和  $\times$  模式的引力波极化张量  $e_{ij}(\vec{k})$  分别为  $(e_i e_j - \bar{e}_i \bar{e}_j)/\sqrt{2}$  和  $(e_i \bar{e}_j + \bar{e}_i e_j)/\sqrt{2}$ , 其中  $e_i(\vec{k})$  和  $\bar{e}_i(\vec{k})$  为两个垂直于传播方向  $\vec{k}$  的相互独立的单位矢量。在超视界尺度, 由于标量扰动  $\phi$  和共动曲率扰动  $\zeta$  的关系为  $\phi = (2/3)\zeta$ , 所以引力波的能量密度参数  $\Omega_{\text{GW}}(\eta, k)$  可以通过共动曲率扰动的功率谱  $\mathcal{P}_\zeta(k)$  来计算。 $\mathcal{P}_\zeta(k)$  的定义为

$$\langle \zeta_{\vec{k}} \zeta_{\vec{k}'} \rangle \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta(k) \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (6.17)$$

对于公式(6.2)的  $\delta$  谱, 傅立叶空间的源项为

$$S_{\vec{k}}^{(2)}(\eta) \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) f_2(k_* \eta) \zeta_{\mathbf{p}} \zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}, \quad (6.18)$$

$$S_{\vec{k}}^{(3)}(\eta) \equiv \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^3} \mathbf{e}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_3(k_* \eta) \zeta_{\mathbf{p}} \zeta_{\mathbf{q}} \zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}}, \quad (6.19)$$

$$S_{\vec{k}}^{(4)}(\eta) \equiv \int \frac{d^3 p d^3 q d^3 l}{(2\pi)^{9/2}} [\mathbf{e}(\mathbf{l}, \mathbf{l}) + \mathbf{e}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] f_4(k_* \eta) \zeta_{\mathbf{p}} \zeta_{\mathbf{q}} \zeta_{\mathbf{l}} \zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{l}}, \quad (6.20)$$

其中  $\mathbf{e}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv e^{ij}(\vec{k}) p_i q_j$ , 且  $f_i(x)$  ( $i = 2, 3, 4$ ) 具有如下的函数形式

$$f_2(x) = \frac{8}{9} (3T^2 + 2xTT' + x^2T'^2), \quad (6.21)$$

$$f_3(x) = -\frac{64}{81} \left[ (x^2 - 18) T^3 + 2x(3 + x^2) T^2 T' + x^2(15 + x^2) T T'^2 + 3x^3 T'^3 \right], \quad (6.22)$$

$$f_4(x) = \frac{16}{729} \left[ (720 - 29x^2 + 16x^4) T^4 + x^4(108 + 7x^2) T'^4 + 4x^3(198 + 31x^2) T T'^3 + 2x^2(864 + 219x^2 + 8x^4) T^2 T'^2 + 4x(144 + 73x^2 + 8x^4) T^3 T' \right]. \quad (6.23)$$

转移函数  $T = T(x)$  的表达式由公式(6.11)给出。从公式(2.38)和公式(6.16)可以看出只有  $\langle S_{\vec{k}}^{(2)} S_{\vec{k}'}^{(2)} \rangle$  对二阶诱导引力波有贡献。同时,  $\langle S_{\vec{k}}^{(3)} S_{\vec{k}'}^{(3)} \rangle$  和  $\langle S_{\vec{k}}^{(2)} S_{\vec{k}'}^{(4)} \rangle$  都对三阶修正有贡献。参照 [100, 101], 对于公式(6.2)的  $\delta$  谱有

$$\Omega_{\text{GW}}(\eta, k) = \frac{A^2}{384\tilde{k}^2} \left[ \overline{I_2^2} M_1 + A \left( M_2 \overline{I_3^2} + M_1 \overline{I_2 I_4} \right) \right], \quad (6.24)$$

其中  $I_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) 定义为

$$I_i = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x d\tilde{x} f_i\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{k}}\right) \frac{\tilde{x}}{x} \sin(x - \tilde{x}). \quad (6.25)$$

为了方便, 在上式中我们定义了一些新的变量, 即  $\tilde{k} \equiv k/k_*$ ,  $x \equiv k\eta$  以及  $\tilde{x} \equiv k\tilde{\eta}$ 。和 [100] 类似, 公式(6.25)可以通过多次利用三角函数的性质化简而得到解析的表达式。公式(6.24)中的角度积分  $M_1$  和  $M_2$  分别定义为

$$M_1(k) = (4 - \tilde{k}^2)^2 \Theta(2 - \tilde{k}), \quad (6.26)$$

$$M_2(k) = \frac{1}{\pi^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} d\tilde{p} \int_0^{2\pi} d\alpha' \int_0^{2\pi} d\phi M_0 \Theta(\Delta), \quad (6.27)$$

其中  $p_{\min} = |1 - \tilde{k}|$ , 且  $p_{\max} = \min(2, 1 + \tilde{k})$ 。  $M_2$  可以通过数值积分而得到。  $M_0$  和  $\Delta$  的定义为

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\mu^2 + 4(1 - \mu^2)\cos(\alpha - \phi)^2 - \tilde{p}^2, \\ M_0 &= \sum_{i=1}^2 \frac{(1 - v_i^2)}{\left| \mu\sqrt{1 - v_i^2} - v_i\sqrt{1 - \mu^2}\cos(\alpha' - \phi) \right|} \\ &\quad \times \left[ (1 - v_i^2)^{\frac{3}{2}}\cos^2 2\alpha + 2\tilde{p}^3(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}\cos 2\phi\cos(\alpha + \phi) \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{p}(1 - v_i^2)(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}\cos 2\alpha\cos(\alpha + \phi) - \tilde{p}^2(1 - \mu^2)(1 - v_i^2)^{\frac{1}{2}}\cos(\alpha + \phi) \right],\end{aligned}\quad (6.28)$$

其中  $\mu$  和  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ) 定义为

$$\mu = \frac{\tilde{p}^2 + \tilde{k}^2 - 1}{2\tilde{p}\tilde{k}}, \quad (6.30)$$

$$v_{1,2} = \frac{\tilde{p}\mu \pm \sqrt{1 - \mu^2}|\cos(\alpha - \phi)|\sqrt{\Delta}}{2((1 - \mu^2)\cos(\alpha - \phi)^2 + \mu^2)}. \quad (6.31)$$

需要注意的是  $M_1$  来自于  $\langle S_{\vec{k}}^{(2)} S_{\vec{k}'}^{(2)} \rangle$  和  $\langle S_{\vec{k}}^{(2)} S_{\vec{k}'}^{(4)} \rangle$ , 并对应于截断频率  $k = 2k_*$ ; 而  $M_2$  来自于  $\langle S_{\vec{k}}^{(3)} S_{\vec{k}'}^{(3)} \rangle$ , 并对应于截断频率  $k = 3k_*$ 。所以三阶修正不仅增强了引力波的能力密度, 而且将截断频率从  $2k_*$  延展到  $3k_*$ 。

需要注意的是公式(6.24)只有在重进入视界到辐射-物质平衡时期有效。由于引力波的能力密度和辐射的衰减是一样的, 所以今天的能量密度参数可以近似表达为 [233]

$$\Omega_{\text{GW}}(\eta_0, f) \simeq \Omega_r \times \Omega_{\text{GW}}(\eta, f), \quad (6.32)$$

其中  $\Omega_r$  为今天的辐射密度参数。

## 6.4 脉冲星计时阵列数据分析

由于未探测到随机引力波背景, NANOGrav<sup>1</sup>、PPTA<sup>2</sup>和 EPTA<sup>3</sup>等脉冲星计时阵列合作组织给出了随机引力波背景的振幅的上限。例如, NANOGrav 不仅限制了超大质量黑洞产生的随机引力波背景, 而且限制了其他引力波背景谱 (如幂律谱、折幂律谱、自由谱和高斯过程谱 [89])。PPTA 合作组 [234] 和 EPTA 合

<sup>1</sup><http://nanograv.org>

<sup>2</sup><https://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/ppta>

<sup>3</sup><http://www.epta.eu.org>

作组 [235] 也给出了类似的限制。然而，标量诱导引力波的信号和脉冲星计时阵列组织搜索的引力波信号大不相同。因此，有必要研究标量诱导引力波，从而通过当前的观测数据为原初黑洞占暗物质的丰度给定限制。在本章中，我们将从 NANOGrav 11 年数据集中搜索标量诱导引力波的信号。该数据集包含到达时间 (time of arrival, TOA) 数据和脉冲星计时模型 (timing models) [236]。与 [237] 类似，我们选择了 6 颗 TOA 精度相对较好、观测时间较长的脉冲星。表 6.1 列出了这些脉冲星的基本性质。对于这 6 颗脉冲星， $T_{\text{obs}}$  长于 8 年， $N_{\text{TOA}}$  大于  $10^4$ ，RMS 小于  $1.5\mu\text{s}$ 。

脉冲星名称	RMS [ $\mu\text{s}$ ]	$N_{\text{epoch}}$	$N_{\text{TOA}}$	$T_{\text{obs}}$ [yr]
J0613–0200	0.422	324	11,566	10.8
J1012+5307	1.07	493	16,782	11.4
J1600–3053	0.23	275	12,433	8.1
J1713+0747	0.108	789	27,571	10.9
J1744–1134	0.842	322	11,550	11.4
J1909–3744	0.148	451	17,373	11.2

表 6.1 数据分析中所使用的 6 颗脉冲星的基本属性：RMS—加权均方根计时残差， $N_{\text{epoch}}$ —观测数， $N_{\text{TOA}}$ —TOA 数， $T_{\text{obs}}$ —观测时间跨度。详见文献 [236]。

Table 6.1 Basic properties of the 6 pulsars used in our analysis: RMS - the weighted root-mean-square epoch-averaged post-fit timing residuals,  $N_{\text{epoch}}$  - number of observational epochs,  $N_{\text{TOA}}$  - number of TOAs,  $T_{\text{obs}}$  - observational time span. See Ref. [236] in detail.

随机引力背景的存在将表现为脉冲星信号的到达时间中扣除各种噪音后的残差。这一残差是在考虑了脉冲星自旋行为导致的计时模型及脉冲星与地球运动所产生的几何效应之后仍存在的残差 [82, 83]。因此，通过定期监测来自那些自旋稳定的毫秒脉冲星的到达时间，有可能将引力波诱导的残差（这些残差在不同的脉冲星之间有明显的相关性）与其他系统效应（如时钟误差或光在星际介质中传播造成的延迟）分离开来 [84]。对于单个脉冲星，用  $\delta\mathbf{t}$  代表长度为  $N_{\text{TOA}}$  的计时残差向量，则有 [238, 239]

$$\delta\mathbf{t} = \mathbf{M}\epsilon + \delta\mathbf{t}_{\text{RGP}}, \quad (6.33)$$

参数	描述	先验分布	注解
标量诱导引力波信号			
$A$	引力波背景的应变振幅	$U[10^{-5}, 10^0]$ (求上限)	整个 PTA 一个参数
		$\log U[-5, 0]$ (模型比较)	
$f_*$	峰值频率	$\delta$ 函数	
白噪音			
$E_k$	EFAC 白噪音参数	$U[0, 10]$	固定成单颗脉冲星拟合的最佳值
$Q_k[s]$	EQUAD 白噪音参数	$\log U[-8.5, -5]$	固定成单颗脉冲星拟合的最佳值
$J_k[s]$	ECORR 白噪音参数	$\log U[-8.5, -5]$	固定成单颗脉冲星拟合的最佳值
红噪音			
$A_{RN}$	红噪音幂率振幅	$U[10^{-20}, 10^{-11}]$ (求上限)	每颗脉冲星一个参数
		$\log U[-20, -11]$ (模型比较)	
$\gamma_{RN}$	红噪音幂率谱指数	$U[0, 9]$	每颗脉冲星一个参数
BAYESEPHEM 星历表模型			
$z_{\text{drift}} [\text{rad/yr}]$	地球轨道关于黄道面 $z$ 轴的漂移率	$U[-10^{-9}, 10^{-9}]$	整个 PTA 一个参数
$\Delta M_{\text{jupiter}} [M_{\odot}]$	木星质量的微扰	$\mathcal{N}(0, 1.55 \times 10^{-11})$	整个 PTA 一个参数
$\Delta M_{\text{saturn}} [M_{\odot}]$	土星质量的微扰	$\mathcal{N}(0, 8.17 \times 10^{-12})$	整个 PTA 一个参数
$\Delta M_{\text{uranus}} [M_{\odot}]$	天王星质量的微扰	$\mathcal{N}(0, 5.72 \times 10^{-11})$	整个 PTA 一个参数
$\Delta M_{\text{neptune}} [M_{\odot}]$	海王星质量的微扰	$\mathcal{N}(0, 7.96 \times 10^{-11})$	整个 PTA 一个参数
$\text{PCA}_i$	木星轨道分量的微扰	$U[-0.05, 0.05]$	整个 PTA 六个参数

表 6.2 在 NANOGrav 11 年数据中搜索标量诱导引力波所使用的参数及其先验分布。我们用  $U$  表示平的分布， $\log U$  表示对数平的分布，及  $\mathcal{N}$  表示高斯分布。

Table 6.2 Parameters and their prior distributions used in the searching for scalar induced gravitational waves in NANOGrav 11-yr data set. We use  $U$ ,  $\log U$  and  $\mathcal{N}$  to denote uniform, log uniform and Gaussian distributions, respectively.

其中  $\mathbf{M}$  是计时模型的设计矩阵 (design matrix),  $\epsilon$  表示计时模型参数的向量,  $\mathbf{M}\epsilon$  是由于计时模型的不准确而产生的残差。计时模型的设计矩阵是通过 libstempo<sup>4</sup> 程序包获得的。它是 TEMPO2<sup>5</sup> [240, 241] 计时程序的 python 接口。公式(6.33)中的  $\delta \mathbf{t}_{\text{RGP}}$  是对 TOA 的随机贡献，可以用一系列随机高斯过程来描述 [242]

$$\delta \mathbf{t}_{\text{RGP}} = \delta \mathbf{t}_{\text{RN}} + \delta \mathbf{t}_{\text{WN}} + \delta \mathbf{t}_{\text{SSE}} + \delta \mathbf{t}_{\text{SIGW}}. \quad (6.34)$$

公式(6.34)的第一项  $\delta \mathbf{t}_{\text{RN}}$  表示傅里叶空间的红噪声

$$\delta \mathbf{t}_{\text{RN}} = \sum_{j=1}^{N_{\text{mode}}} \left[ a_j \sin \left( \frac{2\pi j t}{T} \right) + b_j \cos \left( \frac{2\pi j t}{T} \right) \right] = \mathbf{F} \mathbf{a}, \quad (6.35)$$

其中,  $N_{\text{mode}}$  是求和中的频率的总模数,  $T$  是总的观测时间跨度,  $\mathbf{F}$  是频率在  $[1/T, N_{\text{mode}}/T]$  范围内的分量为交替正弦和余弦函数的傅里叶设计矩阵, 而  $\mathbf{a}$  是

<sup>4</sup><https://vallis.github.io/libstempo>

<sup>5</sup><https://bitbucket.org/psrsoft/tempo2.git>

傅里叶基底函数幅值的向量。我们选择  $N_{\text{mode}} = 50$ 。在频率模  $i$  和  $j$ ，红噪声系数  $\mathbf{a}$  的协方差阵是对角的，即

$$\langle \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \rangle = P(f_i) \delta_{ij}, \quad (6.36)$$

其中功率谱  $P(f)$  通常可以用幂率模型来描述，即

$$P(f) = \frac{A_{\text{RN}}^2}{12\pi^2} \left( \frac{f}{\text{yr}^{-1}} \right)^{3-\gamma_{\text{RN}}} f^{-3}, \quad (6.37)$$

其中  $A_{\text{RN}}$  和  $\gamma_{\text{RN}}$  分别表示幂律的振幅和幂率的谱指数。在公式(6.36)中，如果  $i$  是奇数，则  $f_i$  定义为  $i/T$ ；如果  $i$  是偶数，则定义为  $(i-1)/T$ 。

第二项  $\delta \mathbf{t}_{\text{WN}}$  考虑了白噪声对计时残差的影响，包括每个后端/接收机系统的到达时间不确定性的尺度参数 (EFAC)、附加方差 (EQUAD) 和每个观测时段的方差 (ECORR)。通常假定白噪声遵循高斯分布，可以用一个协方差矩阵来描述，即

$$\mathbf{C}_{\text{WN}} = \mathbf{C}_{\text{EFAC}} + \mathbf{C}_{\text{EQUAD}} + \mathbf{C}_{\text{ECORR}}, \quad (6.38)$$

其中  $\mathbf{C}_{\text{EFAC}}$ 、 $\mathbf{C}_{\text{EQUAD}}$  和  $\mathbf{C}_{\text{ECORR}}$  分别为 EFAC、EQUAD 和 ECORR 参数的关联函数。这些关联函数的解析表达式可在 [237] 中找到。

第三项  $\delta \mathbf{t}_{\text{SSE}}$  是由于太阳系星历表 (solar system ephemeris, SSE) 的不准确而产生的噪声。我们通过星历表将到达时间从观测参照系转换到太阳系质心的惯性参照系。当搜索随机引力波背景时，太阳系星历表噪声会严重影响引力波强度的上限和贝叶斯因子 [89]。在我们的分析中，我们使用 DE436 [243] 作为基准的太阳系星历表模型。我们采用文献 [89] 中引入的物理模型 BAYESEPHM 来刻画太阳系星历表误差。Enterprise<sup>6</sup> 程序包实现了 BAYESEPHM 模型。BAYESEPHM 模型有 11 个参数，其中 4 个参数对应于外行星质量的扰动，1 个参数描述了关于黄道极的旋转速率，6 个参数表征了由木星轨道扰动产生的对地球轨道的修正 [89]。

最后一项  $\delta \mathbf{t}_{\text{SIGW}}$  是由标量诱导引力波引起的计时残差，由交叉功率谱密度描述 [158]

$$S_{IJ}(f) = \frac{H_0^2}{16\pi^4 f^5} \Gamma_{IJ}(f) \Omega_{\text{GW}}(f), \quad (6.39)$$

<sup>6</sup><https://github.com/nanograv/enterprise>



其中  $\Gamma_{IJ}$  是 Hellings & Downs 关联系数 [103] (见公式(2.54)), 用来描述脉冲星计时阵列中脉冲星  $I$  和脉冲星  $J$  的空间关联。 $\Omega_{\text{GW}}(f)$  的表达式由公式(6.24)给出。标量诱导引力波的自由参数是振幅  $A$  和峰值频率  $f_*$ 。对于固定的  $f_*$ , 原初黑洞的质量由公式(6.3)给出。在这个意义上, 自由参数  $A$  与原初黑洞的丰度  $f_{\text{PBH}}$  直接相关。

我们从 NANOGrav 11 年数据集的公开数据文件 [236] 读取计时模型参数和到达时间。为了从数据中提取信息, 我们按照 [89] 中的方法进行贝叶斯推断。表6.2给出了模型的参数及其先验分布。为了降低计算成本, 通常的做法是将白噪声参数固定到它们从独立的单脉冲星分析 (只考虑白噪声和红噪声) 中得到的最佳拟合值。固定白噪声参数可以大大减少自由参数的数量。

假设  $\delta\mathbf{t}_{\text{RGP}}$  是高斯和静态的, 对于由  $M$  颗脉冲星构成的脉冲星计时阵列, 其似然函数为 [244]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{R}\right), \quad (6.40)$$

其中  $\mathbf{R} \equiv [\delta\mathbf{t}_{\text{RGP}}^1, \delta\mathbf{t}_{\text{RGP}}^2, \dots, \delta\mathbf{t}_{\text{RGP}}^M]^T$  是所有脉冲星的  $\delta\mathbf{t}_{\text{RGP}}$  的集合,  $\boldsymbol{\Sigma} \equiv \langle \mathbf{R}\mathbf{R}^T \rangle$  是协方差矩阵。按照常见的做法, 在计算似然函数时, 我们对计时模型参数  $\epsilon$  进行边际化处理 [242, 245, 246]。我们使用脉冲星定计时程序包 Enterprise 来计算似然函数。为了实现并行, 我们使用 PTMCMCSampler<sup>7</sup> 程序包来对参数空间做马尔科夫链蒙特卡罗撒点。

给定观测数据  $\mathcal{D}$ , 需要区分两个排他性模型: 一个是纯噪声模型  $\mathcal{H}_0$ , 一个是噪声加信号模型  $\mathcal{H}_1$ 。模型的选择用贝叶斯因子来量化

$$B_{10} = \frac{\text{evidence}[\mathcal{H}_1]}{\text{evidence}[\mathcal{H}_0]} = \frac{p(A=0|\mathcal{H}_1)}{p(A=0|\mathcal{D}, \mathcal{H}_1)}, \quad (6.41)$$

其中分子和分母分别是模型  $\mathcal{H}_1$  中  $A=0$  的先验和后验概率密度。我们用 Saverage-Dickey 公式 [247] 来估计公式(6.41)的贝叶斯因子。

## 6.5 结果与讨论

图6.1给出了从 NANOGrav 11 年数据集得到的功率谱振幅  $A$  的 95% 置信上限和贝叶斯因子作为峰值频率  $f_*$  的关系。尽管贝叶斯因子分布中有两个峰值,

<sup>7</sup><https://github.com/jellis18/PTMCMCSampler>



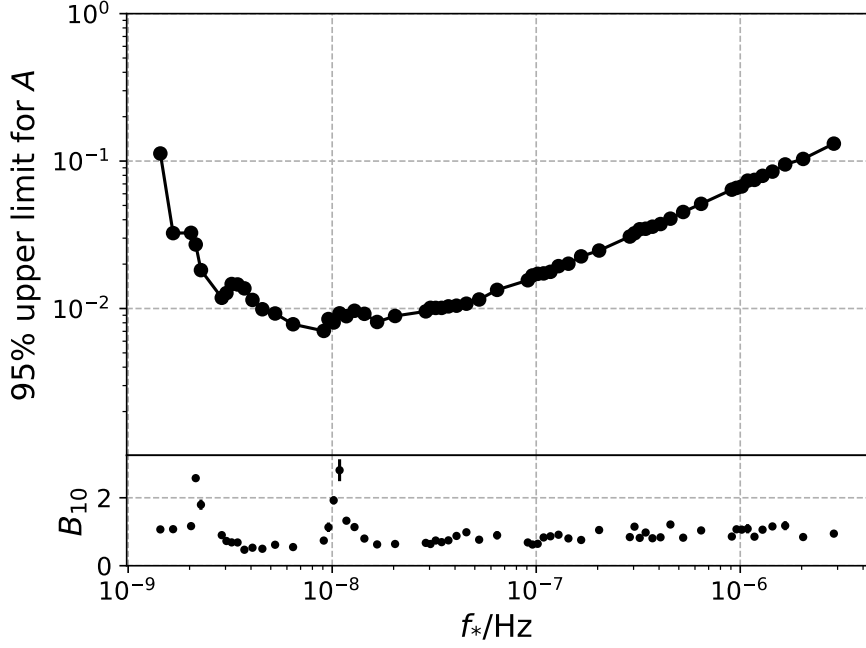


图 6.1 上图：NANOGrav 11 年数据集中，曲率扰动功率谱振幅  $A$  的 95% 上限与峰值频率  $f_*$  的关系。下图：相应的贝叶斯因子  $B_{10}$  与峰值频率  $f_*$  的关系。

Figure 6.1 Top panel: the 95% upper limits on the power spectrum amplitude  $A$  of curvature perturbation as a function of the peak frequency  $f_*$  from the NANOGrav 11-year data set. Bottom panel: the corresponding Bayes factors  $B_{10}$  as a function of the peak frequency  $f_*$ .

但两个峰值值都小于 3，这意味着数据中信号的存在是“不值一提”的 [248]。由于每个峰值频率的贝叶斯系数  $B_{10}$  小于 3，说明数据中与只含有噪声是一致的。图 6.2 给出了原初黑洞在暗物质中的丰度  $f_{\text{PBH}}$  的 95% 的置信度上限作为原初黑洞质量  $m_{\text{PBH}}$  的关系。公式 (6.3) 给出了  $m_{\text{PBH}}$  与  $f_*$  的关系，而公式 (6.8) 给出了  $f_{\text{PBH}}$  与  $A$  的关系。我们的结果意味着当前的 PTA 数据集已经能够通过标量诱导引力波对原初黑洞的丰度进行严格的限制。由图 6.2 可知，在  $[2 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-1}] M_{\odot}$  的质量范围内，原初黑洞的丰度小于  $10^{-6}$ 。

我们首次在 NANOGrav 11 年数据集中搜索伴随着原初黑洞形成而不可避免产生的标量诱导引力波的信号。由于没有发现显著的信号，我们对峰值频率范围  $[1.5 \times 10^{-9}, 3 \times 10^{-6}] \text{Hz}$  和质量范围  $[4 \times 10^{-4}, 1.7] M_{\odot}$  的原初黑洞的丰度给出了 95% 的上限。特别是，原初黑洞在  $[2 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-1}] M_{\odot}$  质量范围内的丰度小于  $10^{-6}$ ，这比已有文献中对这个质量范围的观测限制都要好得多。虽然我们假设原初黑洞的质量函数是单色的，但对于具有扩展质量分布的情况，标量诱导引力波

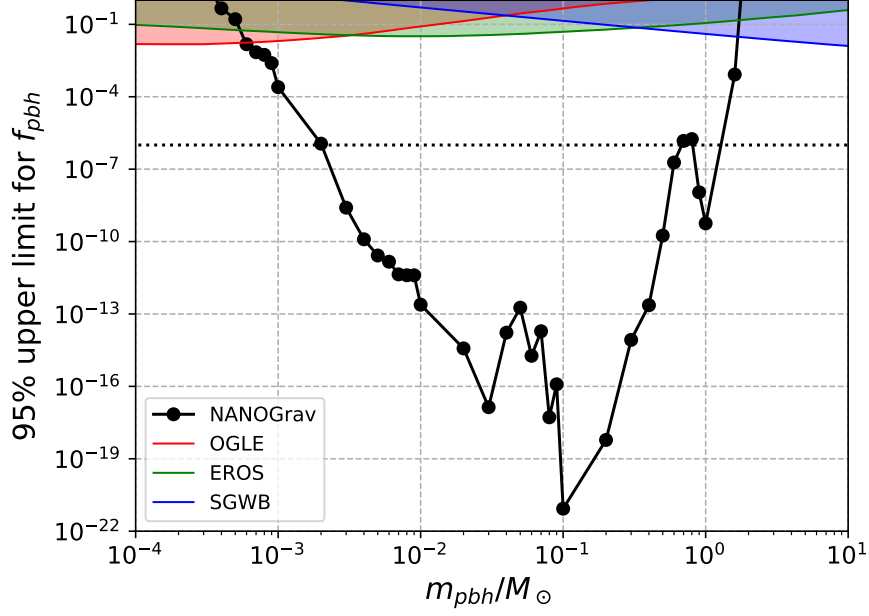


图 6.2 从 NANOGrav 11 年数据集中得到的原初黑洞占冷暗物质丰度  $f_{\text{PBH}}$  的 95% 上限关于原初黑洞质量  $m_{\text{PBH}}$  的函数。图中还显示了来自 OGLE 微透镜 (OGLE) [181]、EROS/MACHO 微透镜 (EROS) [182] 和随机引力波背景 [208] 的结果。水平虚线对应的是  $10^{-6}$ 。

Figure 6.2 The 95% upper limits on the abundance of primordial black holes in cold dark matter  $f_{\text{PBH}}$  as a function of the primordial black hole mass  $m_{\text{PBH}}$  from the NANOGrav 11-year data set. Results from OGLE microlensing (OGLE) [181], EROS/MACHO microlensing (EROS) [182], and SGWB [208] are also shown. The horizontal dotted line corresponds to  $10^{-6}$ .

的振幅也大致由标量功率谱的峰值振幅决定，因此从 NANOGrav 11 年数据中应该可以获得类似的对标量功率谱峰值振幅的约束。因此，也可以预期具有扩展质量分布的原初黑洞的丰度也会受到严格的限制。原则上，对具有扩展质量分布的情况的精确分析是模型依赖的。我们将在未来考虑原初黑洞有质量分布的情况。

## 第7章 总结

本文探索通过引力波来探测原初黑洞。首先，考虑所有其他原初黑洞以及线性密度扰动产生的力矩对原初双黑洞演化的影响，我们计算了具有一般质量分布情况下的原初双黑洞的并合率分布。利用我们得到的并合率分布以及 LIGO-Virgo 探测到的双黑洞并合的引力波数据，我们对原初黑洞占冷暗物质的丰度给出的限制为  $10^{-3} \lesssim f_{\text{PBH}} \lesssim 10^{-2}$ ，证实了绝大多数的冷暗物质不是由恒星级质量的原初黑洞构成的。

其次，我们计算了双黑洞和双中子星并合产生的随机引力波背景。我们考虑了两种不同的双黑洞形成机制，分别是天体物理双黑洞和原初双黑洞机制。并分析这一引力波背景能否被未来的引力波探测器（比如 LISA）观测到。我们发现双黑洞和双中子星产生的随机引力波背景可以被未来的空间引力波探测器 LISA 探测到。如果这一引力波背景没能从 LISA 探测器中扣除掉，将会构成 LISA 的额外噪音，从而降低 LISA 的探测能力。

然后，我们探讨了通过下一代地面引力波探测器，比如 ET 和 CE，来区分原初黑洞和天体物理黑洞的可能性。通过定向搜寻亚太阳质量的双黑洞系统，我们估算了原初黑洞占暗物质丰度的可探测下限。另外，我们预测了 ET 和 CE 能够探测到的双黑洞事件数目随红移的分布，从而来区分原初黑洞和天体物理黑洞模型。

最后，我们首次在 NANOGrav 11 年的脉冲星计时阵列数据集中搜索伴随原初黑洞形成而产生的标量诱导引力波信号。由于没有发现统计意义上显著的引力波信号，我们对质量在  $[2 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-1}]$  太阳质量区间的原初黑洞占冷暗物质的丰度给出了迄今为止最严格的限制。



## 参考文献

- [1] Abbott B P, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(6): 061102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).
- [2] Aasi J, et al. Advanced LIGO [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2015, 32: 074001. DOI: [10.1088/0264-9381/32/7/074001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/7/074001).
- [3] Acernese F, et al. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2015, 32(2): 024001. DOI: [10.1088/0264-9381/32/2/024001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/2/024001).
- [4] Abbott B P, et al. Tests of general relativity with GW150914 [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(22): 221101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.221101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.221101).
- [5] Abbott B P, et al. Tests of General Relativity with the Binary Black Hole Signals from the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1 [J/OL]. Phys. Rev. D, 2019, 100(10): 104036. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.104036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.104036).
- [6] Abbott B P, et al. Binary Black Hole Population Properties Inferred from the First and Second Observing Runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo [J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2019, 882(2): L24. DOI: [10.3847/2041-8213/ab3800](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab3800).
- [7] Abbott R, et al. Population Properties of Compact Objects from the Second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog [J]. 2020.
- [8] Abbott B P, et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 119(16): 161101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101).
- [9] Abbott B P, et al. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A [J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2017, 848(2): L13. DOI: [10.3847/2041-8213/aa920c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c).
- [10] Abbott B P, et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger [J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2017, 848(2): L12. DOI: [10.3847/2041-8213/aa91c9](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9).
- [11] Abbott R, et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run [J]. 2020.
- [12] Remillard R A, McClintock J E. X-ray Properties of Black-Hole Binaries [J/OL]. Ann. Rev. Astron. Astrophys., 2006, 44: 49-92. DOI: [10.1146/annurev.astro.44.051905.092532](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.44.051905.092532).
- [13] Bird S, Cholis I, Muñoz J B, et al. Did LIGO detect dark matter? [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(20): 201301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.201301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.201301).

- [14] Sasaki M, Suyama T, Tanaka T, et al. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 117(6): 061101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.059901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.059901), [10.1103/PhysRevLett.117.061101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.061101).
- [15] Chen Z C, Huang Q G. Merger Rate Distribution of Primordial-Black-Hole Binaries [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 864(1): 61. DOI: [10.3847/1538-4357/aad6e2](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aad6e2).
- [16] Clesse S, García-Bellido J. Seven Hints for Primordial Black Hole Dark Matter [J/OL]. *Phys. Dark Univ.*, 2018, 22: 137-146. DOI: [10.1016/j.dark.2018.08.004](https://doi.org/10.1016/j.dark.2018.08.004).
- [17] Hawking S. Gravitationally collapsed objects of very low mass [J]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1971, 152: 75.
- [18] Carr B J, Hawking S W. Black holes in the early Universe [J]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1974, 168: 399-415.
- [19] Khlopov M Yu. Primordial Black Holes [J/OL]. *Res. Astron. Astrophys.*, 2010, 10: 495-528. DOI: [10.1088/1674-4527/10/6/001](https://doi.org/10.1088/1674-4527/10/6/001).
- [20] Sasaki M, Suyama T, Tanaka T, et al. Primordial black holes—perspectives in gravitational wave astronomy [J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2018, 35(6): 063001. DOI: [10.1088/1361-6382/aaa7b4](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aaa7b4).
- [21] Nakamura T, Sasaki M, Tanaka T, et al. Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries [J/OL]. *Astrophys. J.*, 1997, 487: L139-L142. DOI: [10.1086/310886](https://doi.org/10.1086/310886).
- [22] Ali-Haïmoud Y, Kovetz E D, Kamionkowski M. Merger rate of primordial black-hole binaries [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2017, D96(12): 123523. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.123523](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.123523).
- [23] Nishikawa H, Kovetz E D, Kamionkowski M, et al. Primordial-black-hole mergers in dark-matter spikes [J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 99(4): 043533. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.043533](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.043533).
- [24] Raidal M, Vaskonen V, Veermäe H. Gravitational Waves from Primordial Black Hole Mergers [J/OL]. *JCAP*, 2017, 1709: 037. DOI: [10.1088/1475-7516/2017/09/037](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/09/037).
- [25] Kocsis B, Suyama T, Tanaka T, et al. Hidden universality in the merger rate distribution in the primordial black hole scenario [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 854(1): 41. DOI: [10.3847/1538-4357/aaa7f4](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaa7f4).
- [26] Abbott B P, et al. Astrophysical Implications of the Binary Black-Hole Merger GW150914 [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2016, 818(2): L22. DOI: [10.3847/2041-8205/818/2/L22](https://doi.org/10.3847/2041-8205/818/2/L22).
- [27] Abbott B P, et al. Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA [J/OL]. *Living Rev. Rel.*, 2018, 21(1): 3. DOI: [10.1007/s41114-018-0012-9](https://doi.org/10.1007/s41114-018-0012-9), [10.1007/lrr-2016-1](https://doi.org/10.1007/lrr-2016-1).
- [28] Christensen N. Measuring the stochastic gravitational radiation background with laser inter-

- ferometric antennas [J/OL]. Phys. Rev., 1992, D46: 5250-5266. DOI: [10.1103/PhysRevD.46.5250](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.5250).
- [29] Belczynski K, Dominik M, Bulik T, et al. The effect of metallicity on the detection prospects for gravitational waves [J/OL]. Astrophys. J., 2010, 715: L138. DOI: [10.1088/2041-8205/715/2/L138](https://doi.org/10.1088/2041-8205/715/2/L138).
- [30] Coleman Miller M. Implications of the gravitational wave event GW150914 [J/OL]. Gen. Rel. Grav., 2016, 48(7): 95. DOI: [10.1007/s10714-016-2088-4](https://doi.org/10.1007/s10714-016-2088-4).
- [31] Belczynski K, Holz D E, Bulik T, et al. The first gravitational-wave source from the isolated evolution of two 40-100 Msun stars [J/OL]. Nature, 2016, 534: 512. DOI: [10.1038/nature18322](https://doi.org/10.1038/nature18322).
- [32] Stevenson S, Vigna-Gómez A, Mandel I, et al. Formation of the first three gravitational-wave observations through isolated binary evolution [J/OL]. Nature Commun., 2017, 8: 14906. DOI: [10.1038/ncomms14906](https://doi.org/10.1038/ncomms14906).
- [33] Abbott B P, et al. GW150914: Implications for the stochastic gravitational wave background from binary black holes [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(13): 131102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.131102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131102).
- [34] Abbott B P, et al. Upper Limits on the Stochastic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO' s First Observing Run [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(12): 121101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.121101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.121101), [10.1103/PhysRevLett.119.029901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.029901).
- [35] Audley H, et al. Laser Interferometer Space Antenna [J]. 2017.
- [36] Rodriguez C L, Morscher M, Pattabiraman B, et al. Binary Black Hole Mergers from Globular Clusters: Implications for Advanced LIGO [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2015, 115(5): 051101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.029901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.029901), [10.1103/PhysRevLett.115.051101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.051101).
- [37] Rodriguez C L, Chatterjee S, Rasio F A. Binary Black Hole Mergers from Globular Clusters: Masses, Merger Rates, and the Impact of Stellar Evolution [J/OL]. Phys. Rev., 2016, D93(8): 084029. DOI: [10.1103/PhysRevD.93.084029](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.084029).
- [38] Park D, Kim C, Lee H M, et al. Black Hole Binaries Dynamically Formed in Globular Clusters [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2017, 469(4): 4665-4674. DOI: [10.1093/mnras/stx1015](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1015).
- [39] Belczynski K, Buonanno A, Cantiello M, et al. The Formation and Gravitational-Wave Detection of Massive Stellar Black-Hole Binaries [J/OL]. Astrophys. J., 2014, 789(2): 120. DOI: [10.1088/0004-637X/789/2/120](https://doi.org/10.1088/0004-637X/789/2/120).
- [40] Woosley S E. The Progenitor of Gw150914 [J/OL]. Astrophys. J., 2016, 824(1): L10. DOI: [10.3847/2041-8205/824/1/L10](https://doi.org/10.3847/2041-8205/824/1/L10).

- [41] Rodriguez C L, Loeb A. Redshift Evolution of the Black Hole Merger Rate from Globular Clusters [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 866(1): L5. DOI: [10.3847/2041-8213/aae377](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aae377).
- [42] Choksi N, Volonteri M, Colpi M, et al. The star clusters that make black hole binaries across cosmic time [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2019, 873(1): 100. DOI: [10.3847/1538-4357/aaffde](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaffde).
- [43] de Mink S E, Cantiello M, Langer N, et al. Chemically Homogeneous Evolution in Massive Binaries [C/OL]//Kalogera V, van der Sluys M. *American Institute of Physics Conference Series: volume 1314 American Institute of Physics Conference Series*. 2010: 291-296. DOI: [10.1063/1.3536387](https://doi.org/10.1063/1.3536387).
- [44] de Mink S E, Mandel I. The chemically homogeneous evolutionary channel for binary black hole mergers: rates and properties of gravitational-wave events detectable by advanced LIGO [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2016, 460(4): 3545-3553. DOI: [10.1093/mnras/stw1219](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1219).
- [45] Farr W M, Stevenson S, Coleman Miller M, et al. Distinguishing Spin-Aligned and Isotropic Black Hole Populations With Gravitational Waves [J/OL]. *Nature*, 2017, 548: 426. DOI: [10.1038/nature23453](https://doi.org/10.1038/nature23453).
- [46] Tiwari V, Fairhurst S, Hannam M. Constraining black-hole spins with gravitational wave observations [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 868(2): 140. DOI: [10.3847/1538-4357/aae8df](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aae8df).
- [47] Ng K K Y, Vitale S, Zimmerman A, et al. Gravitational-wave astrophysics with effective-spin measurements: asymmetries and selection biases [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2018, D98(8): 083007. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.083007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.083007).
- [48] Stevenson S, Berry C P L, Mandel I. Hierarchical analysis of gravitational-wave measurements of binary black hole spin-orbit misalignments [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2017, 471(3): 2801-2811. DOI: [10.1093/mnras/stx1764](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1764).
- [49] Bogomazov A I, Lipunov V M, Tutukov A V, et al. Spin of LIGO/VIRGO merging black holes as the result of binary evolution [J]. 2018.
- [50] Lopez M, Batta A, Ramirez-Ruiz E, et al. Tidal Disruptions of Stars by Binary Black Holes: Modifying the Spin Magnitudes and Directions of LIGO Sources in Dense Stellar Environments [J]. 2018.
- [51] Arca Sedda M, Benacquista M. Using final black hole spins and masses to infer the formation history of the observed population of gravitational wave sources [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2019, 482(3): 2991-3010. DOI: [10.1093/mnras/sty2764](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2764).
- [52] Farr B, Holz D E, Farr W M. Using Spin to Understand the Formation of LIGO and Virgo's Black Holes [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 854(1): L9. DOI: [10.3847/2041-8213/aaa64](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aaa64).
- [53] Fishbach M, Holz D E, Farr W M. Does the Black Hole Merger Rate Evolve with Redshift? [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 863(2): L41. DOI: [10.3847/2041-8213/aad800](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aad800).



- [54] Emami R, Loeb A. Formation Redshift of the Massive Black Holes Detected by LIGO [J]. 2018.
- [55] Bai Y, Barger V, Lu S. Measuring the Black Hole Mass Spectrum from Redshifts of aLIGO Binary Merger Events [J]. 2018.
- [56] Samsing J, MacLeod M, Ramirez-Ruiz E. The Formation of Eccentric Compact Binary Inspirals and the Role of Gravitational Wave Emission in Binary-Single Stellar Encounters [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2014, 784: 71. DOI: [10.1088/0004-637X/784/1/71](https://doi.org/10.1088/0004-637X/784/1/71).
- [57] Samsing J. Eccentric Black Hole Mergers Forming in Globular Clusters [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2018, D97(10): 103014. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.103014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.103014).
- [58] Samsing J, MacLeod M, Ramirez-Ruiz E. Dissipative Evolution of Unequal-mass Binary-single Interactions and Its Relevance to Gravitational-wave Detections [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2018, 853(2): 140. DOI: [10.3847/1538-4357/aaa715](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaa715).
- [59] Lower M E, Thrane E, Lasky P D, et al. Measuring eccentricity in binary black hole inspirals with gravitational waves [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2018, D98(8): 083028. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.083028](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.083028).
- [60] Punturo M, et al. The Einstein Telescope: A third-generation gravitational wave observatory [J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2010, 27: 194002. DOI: [10.1088/0264-9381/27/19/194002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194002).
- [61] Abbott B P, et al. Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors [J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2017, 34(4): 044001. DOI: [10.1088/1361-6382/aa51f4](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa51f4).
- [62] Regimbau T, Evans M, Christensen N, et al. Digging deeper: Observing primordial gravitational waves below the binary black hole produced stochastic background [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 118(15): 151105. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.151105](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.151105).
- [63] Vitale S, Farr W M. Measuring the star formation rate with gravitational waves from binary black holes [J]. 2018.
- [64] Matarrese S, Pantano O, Saez D. A General relativistic approach to the nonlinear evolution of collisionless matter [J/OL]. *Phys. Rev.*, 1993, D47: 1311-1323. DOI: [10.1103/PhysRevD.47.1311](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1311).
- [65] Matarrese S, Pantano O, Saez D. General relativistic dynamics of irrotational dust: Cosmological implications [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, 72: 320-323. DOI: [10.1103/PhysRevLett.72.320](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.320).
- [66] Matarrese S, Mollerach S, Bruni M. Second order perturbations of the Einstein-de Sitter universe [J/OL]. *Phys. Rev.*, 1998, D58: 043504. DOI: [10.1103/PhysRevD.58.043504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.043504).
- [67] Noh H, Hwang J c. Second-order perturbations of the Friedmann world model [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2004, D69: 104011. DOI: [10.1103/PhysRevD.69.104011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.104011).
- [68] Carbone C, Matarrese S. A Unified treatment of cosmological perturbations from super-

- p>horizon to small scales [J/OL]. Phys. Rev., 2005, D71: 043508. DOI:
- [10.1103/PhysRevD.71.043508](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.043508)
- .
- [69] Nakamura K. Second-order gauge invariant cosmological perturbation theory: Einstein equations in terms of gauge invariant variables [J/OL]. Prog. Theor. Phys., 2007, 117: 17-74. DOI: [10.1143/PTP.117.17](https://doi.org/10.1143/PTP.117.17).
- [70] Ananda K N, Clarkson C, Wands D. The Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations [J/OL]. Phys. Rev., 2007, D75: 123518. DOI: [10.1103/PhysRevD.75.123518](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.123518).
- [71] Saito R, Yokoyama J. Gravitational wave background as a probe of the primordial black hole abundance [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2009, 102: 161101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.161101), [10.1103/PhysRevLett.107.069901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.069901).
- [72] Bugaev E, Klimai P. Constraints on the induced gravitational wave background from primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev., 2011, D83: 083521. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.083521](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.083521).
- [73] Inomata K, Nakama T. Gravitational waves induced by scalar perturbations as probes of the small-scale primordial spectrum [J/OL]. Phys. Rev., 2019, D99(4): 043511. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.043511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.043511).
- [74] Baumann D, Steinhardt P J, Takahashi K, et al. Gravitational Wave Spectrum Induced by Primordial Scalar Perturbations [J/OL]. Phys. Rev., 2007, D76: 084019. DOI: [10.1103/PhysRevD.76.084019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.084019).
- [75] Clesse S, García-Bellido J, Orani S. Detecting the Stochastic Gravitational Wave Background from Primordial Black Hole Formation [J]. 2018.
- [76] Nakama T, Suyama T. Primordial black holes as a novel probe of primordial gravitational waves. II: Detailed analysis [J/OL]. Phys. Rev., 2016, D94(4): 043507. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.043507](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.043507).
- [77] Saito R, Yokoyama J. Gravitational-Wave Constraints on the Abundance of Primordial Black Holes [J/OL]. Prog. Theor. Phys., 2010, 123: 867-886. DOI: [10.1143/PTP.126.351](https://doi.org/10.1143/PTP.126.351), [10.1143/PTP.123.867](https://doi.org/10.1143/PTP.123.867).
- [78] Bugaev E, Klimai P. Induced gravitational wave background and primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev., 2010, D81: 023517. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.023517](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.023517).
- [79] Assadullahi H, Wands D. Constraints on primordial density perturbations from induced gravitational waves [J/OL]. Phys. Rev., 2010, D81: 023527. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.023527](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.023527).
- [80] Young S, Byrnes C T, Sasaki M. Calculating the mass fraction of primordial black holes [J/OL]. JCAP, 2014, 1407: 045. DOI: [10.1088/1475-7516/2014/07/045](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/07/045).
- [81] Abbott B P, et al. Sensitivity of the Advanced LIGO detectors at the beginning of gravitational

- wave astronomy [J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 93(11): 112004. DOI: [10.1103/PhysRevD.93.112004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.112004).
- [82] Sazhin M V. Opportunities for detecting ultralong gravitational waves [J]. Soviet Astronomy, 1978, 22: 36-38.
- [83] Detweiler S L. Pulsar timing measurements and the search for gravitational waves [J/OL]. Astrophys. J., 1979, 234: 1100-1104. DOI: [10.1086/157593](https://doi.org/10.1086/157593).
- [84] Foster R S, Backer D C. Constructing a pulsar timing array [J/OL]. "Astrophys. J.", 1990, 361: 300-308. DOI: [10.1086/169195](https://doi.org/10.1086/169195).
- [85] McLaughlin M A. The North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2013, 30: 224008. DOI: [10.1088/0264-9381/30/22/224008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/22/224008).
- [86] Manchester R N, et al. The Parkes Pulsar Timing Array Project [J/OL]. Publ. Astron. Soc. Austral., 2013, 30: 17. DOI: [10.1017/pasa.2012.017](https://doi.org/10.1017/pasa.2012.017).
- [87] Hobbs G, Archibald A, Arzoumanian Z, et al. The International Pulsar Timing Array project: using pulsars as a gravitational wave detector [J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2010, 27(8): 084013. DOI: [10.1088/0264-9381/27/8/084013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/8/084013).
- [88] Lentati L, et al. European Pulsar Timing Array Limits On An Isotropic Stochastic Gravitational-Wave Background [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2015, 453(3): 2576-2598. DOI: [10.1093/mnras/stv1538](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1538).
- [89] Arzoumanian Z, et al. The NANOGrav 11-year Data Set: Pulsar-timing Constraints On The Stochastic Gravitational-wave Background [J/OL]. Astrophys. J., 2018, 859(1): 47. DOI: [10.3847/1538-4357/aabd3b](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aabd3b).
- [90] Yonemaru N, et al. Searching for gravitational wave bursts from cosmic string cusps with the Parkes Pulsar Timing Array [J/OL]. 2020. DOI: [10.1093/mnras/staa3721](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3721).
- [91] Zhu X, et al. An all-sky search for continuous gravitational waves in the Parkes Pulsar Timing Array data set [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2014, 444(4): 3709-3720. DOI: [10.1093/mnras/stu1717](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1717).
- [92] Babak S, et al. European Pulsar Timing Array Limits on Continuous Gravitational Waves from Individual Supermassive Black Hole Binaries [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2016, 455(2): 1665-1679. DOI: [10.1093/mnras/stv2092](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2092).
- [93] Aggarwal K, et al. The NANOGrav 11-Year Data Set: Limits on Gravitational Waves from Individual Supermassive Black Hole Binaries [J]. 2018.
- [94] Wang J, et al. Searching for gravitational wave memory bursts with the Parkes Pulsar Timing Array [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2015, 446: 1657-1671. DOI: [10.1093/mnras/stu2137](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2137).

- [95] Aggarwal K, et al. The NANOGrav 11-Year Data Set: Limits on Gravitational Wave Memory [J/OL]. 2019. DOI: [10.3847/1538-4357/ab6083](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab6083).
- [96] Shannon R, et al. Gravitational waves from binary supermassive black holes missing in pulsar observations [J/OL]. Science, 2015, 349(6255): 1522-1525. DOI: [10.1126/science.aab1910](https://doi.org/10.1126/science.aab1910).
- [97] Yuan C, Chen Z C, Huang Q G. Log-dependent slope of scalar induced gravitational waves in the infrared regions [J]. 2019.
- [98] Isaacson R A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics [J/OL]. Phys. Rev., 1968, 166: 1263-1271. DOI: [10.1103/PhysRev.166.1263](https://doi.org/10.1103/PhysRev.166.1263).
- [99] Isaacson R A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor [J/OL]. Phys. Rev., 1968, 166: 1272-1279. DOI: [10.1103/PhysRev.166.1272](https://doi.org/10.1103/PhysRev.166.1272).
- [100] Kohri K, Terada T. Semianalytic calculation of gravitational wave spectrum nonlinearly induced from primordial curvature perturbations [J/OL]. Phys. Rev., 2018, D97(12): 123532. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.123532](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.123532).
- [101] Espinosa J R, Racco D, Riotto A. A Cosmological Signature of the SM Higgs Instability: Gravitational Waves [J/OL]. JCAP, 2018, 1809(09): 012. DOI: [10.1088/1475-7516/2018/09/012](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/09/012).
- [102] Allen B, Romano J D. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities [J/OL]. Phys. Rev. D, 1999, 59: 102001. DOI: [10.1103/PhysRevD.59.102001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.102001).
- [103] Hellings R w, Downs G s. UPPER LIMITS ON THE ISOTROPIC GRAVITATIONAL RADIATION BACKGROUND FROM PULSAR TIMING ANALYSIS [J/OL]. Astrophys. J., 1983, 265: L39-L42. DOI: [10.1086/183954](https://doi.org/10.1086/183954).
- [104] Carr B J. The Primordial black hole mass spectrum [J/OL]. Astrophys. J., 1975, 201: 1-19. DOI: [10.1086/153853](https://doi.org/10.1086/153853).
- [105] Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 1943, 15: 1-89. DOI: [10.1103/RevModPhys.15.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.15.1).
- [106] Peters P C. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses [J/OL]. Phys. Rev., 1964, 136: B1224-B1232. DOI: [10.1103/PhysRev.136.B1224](https://doi.org/10.1103/PhysRev.136.B1224).
- [107] Dolgov A, Silk J. Baryon isocurvature fluctuations at small scales and baryonic dark matter [J/OL]. Phys. Rev., 1993, D47: 4244-4255. DOI: [10.1103/PhysRevD.47.4244](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.4244).
- [108] Abbott B P, et al. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(22): 221101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.221101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.221101), [10.1103/PhysRevLett.121.129901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.129901).

- [109] Chen L, Huang Q G, Wang K. Constraint on the abundance of primordial black holes in dark matter from Planck data [J/OL]. JCAP, 2016, 1612(12): 044. DOI: [10.1088/1475-7516/2016/12/044](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/12/044).
- [110] Green A M. Microlensing and dynamical constraints on primordial black hole dark matter with an extended mass function [J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 94(6): 063530. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.063530](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.063530).
- [111] Schutz K, Liu A. Pulsar timing can constrain primordial black holes in the LIGO mass window [J/OL]. Phys. Rev., 2017, D95(2): 023002. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.023002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.023002).
- [112] Wang S, Wang Y F, Huang Q G, et al. Constraints on the Primordial Black Hole Abundance from the First Advanced LIGO Observation Run Using the Stochastic Gravitational-Wave Background [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 120(19): 191102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.191102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.191102).
- [113] Gaggero D, Bertone G, Calore F, et al. Searching for Primordial Black Holes in the radio and X-ray sky [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(24): 241101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.241101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.241101).
- [114] Ali-Haïmoud Y, Kamionkowski M. Cosmic microwave background limits on accreting primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev., 2017, D95(4): 043534. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.043534](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.043534).
- [115] Aloni D, Blum K, Flauger R. Cosmic microwave background constraints on primordial black hole dark matter [J/OL]. JCAP, 2017, 1705(05): 017. DOI: [10.1088/1475-7516/2017/05/017](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/05/017).
- [116] Horowitz B. Revisiting Primordial Black Holes Constraints from Ionization History [J]. 2016.
- [117] Kühnel F, Freese K. Constraints on Primordial Black Holes with Extended Mass Functions [J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95(8): 083508. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.083508](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.083508).
- [118] Inoue Y, Kusenko A. New X-ray bound on density of primordial black holes [J/OL]. JCAP, 2017, 10: 034. DOI: [10.1088/1475-7516/2017/10/034](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/10/034).
- [119] Carr B, Raidal M, Tenkanen T, et al. Primordial black hole constraints for extended mass functions [J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 96(2): 023514. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.023514](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.023514).
- [120] Green A M. Astrophysical uncertainties on stellar microlensing constraints on multi-Solar mass primordial black hole dark matter [J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 96(4): 043020. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.043020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.043020).
- [121] Guo H K, Shu J, Zhao Y. Using LISA-like Gravitational Wave Detectors to Search for Primordial Black Holes [J/OL]. Phys. Rev. D, 2019, 99(2): 023001. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.023001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.023001).
- [122] Zumalacarregui M, Seljak U. Limits on stellar-mass compact objects as dark matter from

- p>gravitational lensing of type Ia supernovae [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(14): 141101. DOI:
- [10.1103/PhysRevLett.121.141101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.141101)
- .
- [123] Clesse S, García-Bellido J. The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO [J/OL]. Phys. Dark Univ., 2017, 15: 142-147. DOI: [10.1016/j.dark.2016.10.002](https://doi.org/10.1016/j.dark.2016.10.002).
- [124] Abbott B P, et al. The Rate of Binary Black Hole Mergers Inferred from Advanced LIGO Observations Surrounding GW150914 [J/OL]. Astrophys. J., 2016, 833(1): L1. DOI: [10.3847/2041-8205/833/1/L1](https://doi.org/10.3847/2041-8205/833/1/L1).
- [125] Abbott B P, et al. Supplement: The Rate of Binary Black Hole Mergers Inferred from Advanced LIGO Observations Surrounding GW150914 [J/OL]. Astrophys. J. Suppl., 2016, 227 (2): 14. DOI: [10.3847/0067-0049/227/2/14](https://doi.org/10.3847/0067-0049/227/2/14).
- [126] Abbott B P, et al. Search for intermediate mass black hole binaries in the first observing run of Advanced LIGO [J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 96(2): 022001. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.022001).
- [127] Kavanagh B J, Gaggero D, Bertone G. Merger rate of a subdominant population of primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev., 2018, D98(2): 023536. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.023536](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.023536).
- [128] Usman S A, et al. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2016, 33(21): 215004. DOI: [10.1088/0264-9381/33/21/215004](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/21/215004).
- [129] Veitch J, et al. Parameter estimation for compact binaries with ground-based gravitational-wave observations using the LALInference software library [J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 91 (4): 042003. DOI: [10.1103/PhysRevD.91.042003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.042003).
- [130] Abbott B P, et al. Binary Black Hole Mergers in the first Advanced LIGO Observing Run [J/OL]. Phys. Rev., 2016, X6(4): 041015. DOI: [10.1103/PhysRevX.6.041015](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041015), [10.1103/PhysRevX.8.039903](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.039903).
- [131] Kovetz E D, Cholis I, Breysse P C, et al. Black hole mass function from gravitational wave measurements [J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95(10): 103010. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.103010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.103010).
- [132] Fishbach M, Holz D E. Where Are LIGO' s Big Black Holes? [J/OL]. Astrophys. J., 2017, 851(2): L25. DOI: [10.3847/2041-8213/aa9bf6](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa9bf6).
- [133] Abbott B P, et al. GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO [J/OL]. Phys. Rev., 2016, D93(12): 122003. DOI: [10.1103/PhysRevD.93.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.122003).
- [134] Abbott B P, et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(24): 241103. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.241103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.241103).

- [135] Abbott B P, et al. GW170608: Observation of a 19-solar-mass Binary Black Hole Coalescence [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2017, 851(2): L35. DOI: [10.3847/2041-8213/aa9f0c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa9f0c).
- [136] Abbott B P, et al. GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119(14): 141101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.141101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.141101).
- [137] Abbott B P, et al. GW170817: Implications for the Stochastic Gravitational-Wave Background from Compact Binary Coalescences [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 120(9): 091101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.091101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.091101).
- [138] García-Bellido J. Massive Primordial Black Holes as Dark Matter and their detection with Gravitational Waves [J/OL]. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2017, 840(1): 012032. DOI: [10.1088/1742-6596/840/1/012032](https://doi.org/10.1088/1742-6596/840/1/012032).
- [139] Ioka K, Chiba T, Tanaka T, et al. Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation [J/OL]. *Phys. Rev.*, 1998, D58: 063003. DOI: [10.1103/PhysRevD.58.063003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.063003).
- [140] Quinlan G D, Shapiro S L. Dynamical evolution of dense clusters of compact stars [J/OL]. *"Astrophys. J."*, 1989, 343: 725-749. DOI: [10.1086/167745](https://doi.org/10.1086/167745).
- [141] Mouri H, Taniguchi Y. Runaway merging of black holes: analytical constraint on the timescale [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2002, 566: L17-L20. DOI: [10.1086/339472](https://doi.org/10.1086/339472).
- [142] Clesse S, García-Bellido J. Detecting the gravitational wave background from primordial black hole dark matter [J/OL]. *Phys. Dark Univ.*, 2017, 18: 105-114. DOI: [10.1016/j.dark.2017.10.001](https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.10.001).
- [143] Mandic V, Bird S, Cholis I. Stochastic Gravitational-Wave Background due to Primordial Binary Black Hole Mergers [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 117(20): 201102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.201102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.201102).
- [144] Ade P, et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters [J/OL]. *Astron. Astrophys.*, 2016, 594: A13. DOI: [10.1051/0004-6361/201525830](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525830).
- [145] Phinney E S. A Practical theorem on gravitational wave backgrounds [J]. *astro-ph/0108028*, 2001.
- [146] Regimbau T, Mandic V. Astrophysical Sources of Stochastic Gravitational-Wave Background [J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2008, 25: 184018. DOI: [10.1088/0264-9381/25/18/184018](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/18/184018).
- [147] Zhu X J, Howell E, Regimbau T, et al. Stochastic Gravitational Wave Background from Coalescing Binary Black Holes [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2011, 739: 86. DOI: [10.1088/0004-637X/739/2/86](https://doi.org/10.1088/0004-637X/739/2/86).
- [148] Zhu X J, Howell E J, Blair D G, et al. On the gravitational wave background from compact



- p binary coalescences in the band of ground-based interferometers [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2013, 431(1): 882-899. DOI:
- [10.1093/mnras/stt207](https://doi.org/10.1093/mnras/stt207)
- .
- 
- [149] Cutler C, Poisson E, Sussman G J, et al. Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. 2: Numerical results for the nonrotating case [J/OL]. Phys. Rev., 1993, D47: 1511-1518. DOI: [10.1103/PhysRevD.47.1511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1511).  

[150] Chernoff D F, Finn L S. Gravitational radiation, inspiraling binaries, and cosmology [J/OL]. Astrophys. J., 1993, 411: L5-L8. DOI: [10.1086/186898](https://doi.org/10.1086/186898).  

[151] Ajith P, et al. A Template bank for gravitational waveforms from coalescing binary black holes. I. Non-spinning binaries [J/OL]. Phys. Rev., 2008, D77: 104017. DOI: [10.1103/PhysRevD.79.129901](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.129901), [10.1103/PhysRevD.77.104017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.104017).  

[152] Dvorkin I, Vangioni E, Silk J, et al. Metallicity-constrained merger rates of binary black holes and the stochastic gravitational wave background [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2016, 461(4): 3877-3885. DOI: [10.1093/mnras/stw1477](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1477).  

[153] Schaerer D. On the Properties of massive population III stars and metal-free stellar populations [J/OL]. Astron. Astrophys., 2002, 382: 28-42. DOI: [10.1051/0004-6361:20011619](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20011619).  

[154] Nagamine K, Springel V, Hernquist L. Abundance of damped Lyman-alpha absorbers in cosmological SPH simulations [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2004, 348: 421. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.07393.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07393.x).  

[155] Woosley S E, Weaver T A. The Evolution and explosion of massive stars. 2. Explosive hydrodynamics and nucleosynthesis [J/OL]. Astrophys. J. Suppl., 1995, 101: 181-235. DOI: [10.1086/192237](https://doi.org/10.1086/192237).  

[156] Cornish N, Robson T. Galactic binary science with the new LISA design [J/OL]. J. Phys. Conf. Ser., 2017, 840(1): 012024. DOI: [10.1088/1742-6596/840/1/012024](https://doi.org/10.1088/1742-6596/840/1/012024).  

[157] Cornish N, Robson T. The construction and use of LISA sensitivity curves [J]. arXiv:1803.01944 [astro-ph.HE], 2018.  

[158] Thrane E, Romano J D. Sensitivity curves for searches for gravitational-wave backgrounds [J/OL]. Phys. Rev., 2013, D88(12): 124032. DOI: [10.1103/PhysRevD.88.124032](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.124032).  

[159] Caprini C, et al. Science with the space-based interferometer eLISA. II: Gravitational waves from cosmological phase transitions [J/OL]. JCAP, 2016, 1604(04): 001. DOI: [10.1088/1475-7516/2016/04/001](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/04/001).  

[160] Barack L, Cutler C. Confusion noise from LISA capture sources [J/OL]. Phys. Rev., 2004, D70: 122002. DOI: [10.1103/PhysRevD.70.122002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.122002).  

[161] Volonteri M. Formation of Supermassive Black Holes [J/OL]. Astron. Astrophys. Rev., 2010, 18: 279-315. DOI: [10.1007/s00159-010-0029-x](https://doi.org/10.1007/s00159-010-0029-x).



- [162] Wysocki D, Lange J, O. 'shaughnessy R. Reconstructing phenomenological distributions of compact binaries via gravitational wave observations [J]. 2018.
- [163] Mandel I, Farr W M, Gair J R. Extracting distribution parameters from multiple uncertain observations with selection biases [J]. 2018.
- [164] Thrane E, Talbot C. An introduction to Bayesian inference in gravitational-wave astronomy: parameter estimation, model selection, and hierarchical models [J]. 2018.
- [165] Vallisneri M, Kanner J, Williams R, et al. The LIGO Open Science Center [J/OL]. J. Phys. Conf. Ser., 2015, 610(1): 012021. DOI: [10.1088/1742-6596/610/1/012021](https://doi.org/10.1088/1742-6596/610/1/012021).
- [166] Biwer C M, Capano C D, De S, et al. PyCBC Inference: A Python-based parameter estimation toolkit for compact binary coalescence signals [J]. arXiv:1807.10312 [astro-ph.IM], 2018.
- [167] Fishbach M, Holz D E, Farr B. Are LIGO's Black Holes Made From Smaller Black Holes? [J/OL]. Astrophys. J., 2017, 840(2): L24. DOI: [10.3847/2041-8213/aa7045](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa7045).
- [168] Antonini F, Rasio F A. Merging black hole binaries in galactic nuclei: implications for advanced-LIGO detections [J/OL]. Astrophys. J., 2016, 831(2): 187. DOI: [10.3847/0004-637X/831/2/187](https://doi.org/10.3847/0004-637X/831/2/187).
- [169] Inayoshi K, Hirai R, Kinugawa T, et al. Formation pathway of Population III coalescing binary black holes through stable mass transfer [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2017, 468(4): 5020-5032. DOI: [10.1093/mnras/stx757](https://doi.org/10.1093/mnras/stx757).
- [170] Perna R, Wang Y H, Farr W M, et al. Constraining the Black Hole Initial Mass Function with LIGO/VIRGO Observations [J/OL]. Astrophys. J., 2019, 878(1): L1. DOI: [10.3847/2041-8213/ab2336](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab2336).
- [171] Wu Y. The merger history of primordial-black-hole binaries [J]. 2020.
- [172] Wiktorowicz G, Belczynski K, Maccarone T J. Black Hole X-ray Transients: The Formation Puzzle [J]. 2013.
- [173] Casares J, Jonker P G. Mass Measurements of Stellar and Intermediate Mass Black-Holes [J/OL]. Space Sci. Rev., 2014, 183(1-4): 223-252. DOI: [10.1007/s11214-013-0030-6](https://doi.org/10.1007/s11214-013-0030-6).
- [174] Corral-Santana J M, Casares J, Muñoz-Darias T, et al. A Black Hole Nova Obscured by an Inner Disk Torus [J/OL]. Science, 2013, 339: 1048-1051. DOI: [10.1126/science.1228222](https://doi.org/10.1126/science.1228222).
- [175] Corral-Santana J M, Casares J, Munoz-Darias T, et al. BlackCAT: A catalogue of stellar-mass black holes in X-ray transients [J/OL]. Astron. Astrophys., 2016, 587: A61. DOI: [10.1051/0004-6361/201527130](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527130).
- [176] Carr B J, Kohri K, Sendouda Y, et al. New cosmological constraints on primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev., 2010, D81: 104019. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.104019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.104019).
- [177] Barnacka A, Glicenstein J F, Moderski R. New constraints on primordial black holes abun-

- p>
dance from femtolensing of gamma-ray bursts [J/OL].
- Phys. Rev.*
- , 2012, D86: 043001. DOI:
- [10.1103/PhysRevD.86.043001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.043001)
- .
- [178] Graham P W, Rajendran S, Varela J. Dark Matter Triggers of Supernovae [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2015, D92(6): 063007. DOI: [10.1103/PhysRevD.92.063007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.063007).
- [179] Niikura H, et al. Microlensing constraints on primordial black holes with Subaru/HSC Andromeda observations [J/OL]. *Nat. Astron.*, 2019, 3(6): 524-534. DOI: [10.1038/s41550-019-0723-1](https://doi.org/10.1038/s41550-019-0723-1).
- [180] Griest K, Cieplak A M, Lehner M J. New Limits on Primordial Black Hole Dark Matter from an Analysis of Kepler Source Microlensing Data [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, 111(18): 181302. DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.181302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.181302).
- [181] Niikura H, Takada M, Yokoyama S, et al. Constraints on Earth-mass primordial black holes from OGLE 5-year microlensing events [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2019, D99(8): 083503. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.083503](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.083503).
- [182] Tisserand P, et al. Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds [J/OL]. *Astron. Astrophys.*, 2007, 469: 387-404. DOI: [10.1051/0004-6361:20066017](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066017).
- [183] Calcino J, Garcia-Bellido J, Davis T M. Updating the MACHO fraction of the Milky Way dark halowith improved mass models [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2018, 479(3): 2889-2905. DOI: [10.1093/mnras/sty1368](https://doi.org/10.1093/mnras/sty1368).
- [184] Brandt T D. Constraints on MACHO Dark Matter from Compact Stellar Systems in Ultra-Faint Dwarf Galaxies [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2016, 824(2): L31. DOI: [10.3847/2041-8205/824/2/L31](https://doi.org/10.3847/2041-8205/824/2/L31).
- [185] Poulin V, Serpico P D, Calore F, et al. CMB bounds on disk-accreting massive primordial black holes [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2017, D96(8): 083524. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.083524](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.083524).
- [186] Abbott B P, et al. Search for Substellar-Mass Ultracompact Binaries in Advanced LIGO's First Observing Run [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 121(23): 231103. DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.231103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.231103).
- [187] Abbott B P, et al. Search for sub-solar mass ultracompact binaries in Advanced LIGO's second observing run [J]. 2019.
- [188] Magee R, Deutsch A S, McClincy P, et al. Methods for the detection of gravitational waves from subsolar mass ultracompact binaries [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2018, D98(10): 103024. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.103024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.103024).
- [189] Wang S, Terada T, Kohri K. Prospective constraints on the primordial black hole abundance from the stochastic gravitational-wave backgrounds produced by coalescing events and cur-

- vature perturbations [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2019, D99(10): 103531. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.103531](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.103531).
- [190] Chen Z C, Yuan C, Huang Q G. Pulsar Timing Array Constraints on Primordial Black Holes with NANOGrav 11-Year Dataset [J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 124(25): 251101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.124.251101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.251101).
- [191] Yuan C, Chen Z C, Huang Q G. Probing Primordial-Black-Hole Dark Matter with Scalar Induced Gravitational Waves [J]. 2019.
- [192] Chen Z C, Huang F, Huang Q G. Stochastic Gravitational-wave Background from Binary Black Holes and Binary Neutron Stars and Implications for LISA [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2019, 871(1): 97. DOI: [10.3847/1538-4357/aaf581](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaf581).
- [193] Chandrasekhar S, Milne E A. The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1931, 91(5): 456-466. DOI: [10.1093/mnras/91.5.456](https://doi.org/10.1093/mnras/91.5.456).
- [194] Chandrasekhar S. The maximum mass of ideal white dwarfs [J/OL]. *Astrophys. J.*, 1931, 74: 81-82. DOI: [10.1086/143324](https://doi.org/10.1086/143324).
- [195] O'Shaughnessy R, Kalogera V, Belczynski K. Binary Compact Object Coalescence Rates: The Role of Elliptical Galaxies [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2010, 716: 615-633. DOI: [10.1088/0004-637X/716/1/615](https://doi.org/10.1088/0004-637X/716/1/615).
- [196] Biswas R, Brady P R, Creighton J D E, et al. The Loudest event statistic: General formulation, properties and applications [J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2009, 26: 175009. DOI: [10.1088/0264-9381/26/17/175009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/17/175009), [10.1088/0264-9381/30/7/079502](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/7/079502).
- [197] Raidal M, Spethmann C, Vaskonen V, et al. Formation and Evolution of Primordial Black Hole Binaries in the Early Universe [J/OL]. *JCAP*, 2019, 1902: 018. DOI: [10.1088/1475-7516/2019/02/018](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/018).
- [198] Abbott B P, et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs [J]. 2018.
- [199] Salpeter E E. The Luminosity function and stellar evolution [J/OL]. *Astrophys. J.*, 1955, 121: 161-167. DOI: [10.1086/145971](https://doi.org/10.1086/145971).
- [200] Vangioni E, Olive K, Prestegard T, et al. The Impact of Star Formation and Gamma-Ray Burst Rates at High Redshift on Cosmic Chemical Evolution and Reionization [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2015, 447: 2575. DOI: [10.1093/mnras/stu2600](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2600).
- [201] Mandel I, de Mink S E. Merging binary black holes formed through chemically homogeneous evolution in short-period stellar binaries [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2016, 458(3): 2634-2647. DOI: [10.1093/mnras/stw379](https://doi.org/10.1093/mnras/stw379).
- [202] Chiba T, Yokoyama S. Spin Distribution of Primordial Black Holes [J/OL]. *PTEP*, 2017, 2017(8): 083E01. DOI: [10.1093/ptep/ptx087](https://doi.org/10.1093/ptep/ptx087).

- [203] Mirbabayi M, Gruzinov A, Noreña J. Spin of Primordial Black Holes [J]. 2019.
- [204] De Luca V, Desjacques V, Franciolini G, et al. The initial spin probability distribution of primordial black holes [J/OL]. JCAP, 2019, 1905: 018. DOI: [10.1088/1475-7516/2019/05/018](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/05/018).
- [205] Kinugawa T, Nakano H, Nakamura T. Gravitational wave quasinormal mode from Population III massive black hole binaries in various models of population synthesis [J/OL]. PTEP, 2016, 2016(10): 103E01. DOI: [10.1093/ptep/ptw143](https://doi.org/10.1093/ptep/ptw143).
- [206] de Mink S E, Cantiello M, Langer N, et al. Chemically homogeneous evolution in massive binaries [J/OL]. AIP Conf. Proc., 2010, 1314(1): 291-296. DOI: [10.1063/1.3536387](https://doi.org/10.1063/1.3536387).
- [207] Liu L, Guo Z K, Cai R G. Effects of the surrounding primordial black holes on the merger rate of primordial black hole binaries [J/OL]. Phys. Rev., 2019, D99(6): 063523. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.063523](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.063523).
- [208] Chen Z C, Huang Q G. Distinguishing Primordial Black Holes from Astrophysical Black Holes by Einstein Telescope and Cosmic Explorer [J]. 2019.
- [209] Liu L, Guo Z K, Cai R G. Effects of the merger history on the merger rate density of primordial black hole binaries [J]. 2019.
- [210] Ivanov P, Naselsky P, Novikov I. Inflation and primordial black holes as dark matter [J/OL]. Phys. Rev., 1994, D50: 7173-7178. DOI: [10.1103/PhysRevD.50.7173](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.7173).
- [211] Yokoyama J. Formation of MACHO primordial black holes in inflationary cosmology [J]. Astron. Astrophys., 1997, 318: 673.
- [212] Garcia-Bellido J, Linde A D, Wands D. Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation [J/OL]. Phys. Rev., 1996, D54: 6040-6058. DOI: [10.1103/PhysRevD.54.6040](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.6040).
- [213] Ivanov P. Nonlinear metric perturbations and production of primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev., 1998, D57: 7145-7154. DOI: [10.1103/PhysRevD.57.7145](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.7145).
- [214] Kawasaki M, Takayama T, Yamaguchi M, et al. Power Spectrum of the Density Perturbations From Smooth Hybrid New Inflation Model [J/OL]. Phys. Rev., 2006, D74: 043525. DOI: [10.1103/PhysRevD.74.043525](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.043525).
- [215] Hobbs G, et al. The international pulsar timing array project: using pulsars as a gravitational wave detector [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2010, 27: 084013. DOI: [10.1088/0264-9381/27/8/084013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/8/084013).
- [216] Nan R, Li D, Jin C, et al. The Five-Hundred-Meter Aperture Spherical Radio Telescope (FAST) Project [J/OL]. Int. J. Mod. Phys., 2011, D20: 989-1024. DOI: [10.1142/S0218271811019335](https://doi.org/10.1142/S0218271811019335).

- [217] Kramer M, Stappers B. Pulsar Science with the SKA [J/OL]. PoS, 2015, AASKA14: 036. DOI: [10.22323/1.215.0036](https://doi.org/10.22323/1.215.0036).
- [218] Inomata K, Kawasaki M, Mukaida K, et al. Inflationary primordial black holes for the LIGO gravitational wave events and pulsar timing array experiments [J/OL]. Phys. Rev., 2017, D95(12): 123510. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.123510](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.123510).
- [219] Orlofsky N, Pierce A, Wells J D. Inflationary theory and pulsar timing investigations of primordial black holes and gravitational waves [J/OL]. Phys. Rev., 2017, D95(6): 063518. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.063518](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.063518).
- [220] Dror J A, Ramani H, Trickle T, et al. Pulsar Timing Probes of Primordial Black Holes and Subhalos [J/OL]. Phys. Rev., 2019, D100(2): 023003. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.023003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.023003).
- [221] Cai R G, Pi S, Wang S J, et al. Pulsar Timing Array Constraints on the Induced Gravitational Waves [J]. 2019.
- [222] Bardeen J M, Bond J R, Kaiser N, et al. The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields [J/OL]. Astrophys. J., 1986, 304: 15-61. DOI: [10.1086/164143](https://doi.org/10.1086/164143).
- [223] Green A M, Liddle A R, Malik K A, et al. A New calculation of the mass fraction of primordial black holes [J/OL]. Phys. Rev. D, 2004, 70: 041502. DOI: [10.1103/PhysRevD.70.041502](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.041502).
- [224] Carr B, Kuhnel F, Sandstad M. Primordial Black Holes as Dark Matter [J/OL]. Phys. Rev., 2016, D94(8): 083504. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.083504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.083504).
- [225] Musco I, Miller J C, Polnarev A G. Primordial black hole formation in the radiative era: Investigation of the critical nature of the collapse [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2009, 26: 235001. DOI: [10.1088/0264-9381/26/23/235001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/23/235001).
- [226] Musco I, Miller J C, Rezzolla L. Computations of primordial black hole formation [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2005, 22: 1405-1424. DOI: [10.1088/0264-9381/22/7/013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/7/013).
- [227] Musco I, Miller J C. Primordial black hole formation in the early universe: critical behaviour and self-similarity [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2013, 30: 145009. DOI: [10.1088/0264-9381/30/14/145009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/14/145009).
- [228] Harada T, Yoo C M, Kohri K. Threshold of primordial black hole formation [J/OL]. Phys. Rev., 2013, D88(8): 084051. DOI: [10.1103/PhysRevD.88.084051](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.084051), [10.1103/PhysRevD.89.029903](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.029903).
- [229] Escrivà A. Simulation of primordial black hole formation using pseudo-spectral methods [J]. 2019.
- [230] Escrivà A, Germani C, Sheth R K. A universal threshold for primordial black hole formation [J]. 2019.
- [231] Pitrou C, Roy X, Umeh O. xPand: An algorithm for perturbing homogeneous cosmologies [J/OL]. Class. Quant. Grav., 2013, 30: 165002. DOI: [10.1088/0264-9381/30/16/165002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/16/165002).

- [232] Ando K, Inomata K, Kawasaki M, et al. Primordial black holes for the LIGO events in the axionlike curvaton model [J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 97(12): 123512. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.123512](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.123512).
- [233] Espinosa J R, Racco D, Riotto A. Cosmological Signature of the Standard Model Higgs Vacuum Instability: Primordial Black Holes as Dark Matter [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 120(12): 121301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.121301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.121301).
- [234] Shannon R M, et al. Gravitational-wave Limits from Pulsar Timing Constrain Supermassive Black Hole Evolution [J/OL]. Science, 2013, 342(6156): 334-337. DOI: [10.1126/science.1238012](https://doi.org/10.1126/science.1238012).
- [235] van Haasteren R, et al. Placing limits on the stochastic gravitational-wave background using European Pulsar Timing Array data [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2011, 414(4): 3117-3128. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.18613.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18613.x), [10.1111/j.1365-2966.2012.20916.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20916.x).
- [236] Arzoumanian Z, et al. The NANOGrav 11-year Data Set: High-precision timing of 45 Millisecond Pulsars [J/OL]. Astrophys. J. Suppl., 2018, 235(2): 37. DOI: [10.3847/1538-4365/aab5b0](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aab5b0).
- [237] Kato R, Soda J. Search for ultralight scalar dark matter with NANOGrav pulsar timing arrays [J]. 2019.
- [238] Taylor S R, Gair J R, Lentati L. Weighing The Evidence For A Gravitational-Wave Background In The First International Pulsar Timing Array Data Challenge [J/OL]. Phys. Rev., 2013, D87(4): 044035. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.044035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.044035).
- [239] van Haasteren R, Levin Y. Understanding and analysing time-correlated stochastic signals in pulsar timing [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2013, 428: 1147. DOI: [10.1093/mnras/sts097](https://doi.org/10.1093/mnras/sts097).
- [240] Hobbs G, Edwards R, Manchester R. Tempo2, a new pulsar timing package. 1. overview [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2006, 369: 655-672. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10302.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10302.x).
- [241] Edwards R T, Hobbs G B, Manchester R N. Tempo2, a new pulsar timing package. 2. The timing model and precision estimates [J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2006, 372: 1549-1574. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10870.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10870.x).
- [242] van Haasteren R, Vallisneri M. New advances in the Gaussian-process approach to pulsar-timing data analysis [J/OL]. Phys. Rev., 2014, D90(10): 104012. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.104012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.104012).
- [243] Folkner W M, Park R S. JPL planetary and Lunar ephemeris DE436 [J/OL]. Jet Propulsion Laboratory, 2016. <https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/JUNO/kernels/spk/de436s.bsp.lbl>.
- [244] Ellis J A, Siemens X, van Haasteren R. An Efficient Approximation to the Likelihood for

- Gravitational Wave Stochastic Background Detection Using Pulsar Timing Data [J/OL]. *Astrophys. J.*, 2013, 769: 63. DOI: [10.1088/0004-637X/769/1/63](https://doi.org/10.1088/0004-637X/769/1/63).
- [245] Lentati L, Alexander P, Hobson M P, et al. Hyper-efficient model-independent Bayesian method for the analysis of pulsar timing data [J/OL]. *Phys. Rev.*, 2013, D87(10): 104021. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.104021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.104021).
- [246] van Haasteren R, Vallisneri M. Low-rank approximations for large stationary covariance matrices, as used in the Bayesian and generalized-least-squares analysis... [J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2015, 446: 1170-1174. DOI: [10.1093/mnras/stu2157](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2157).
- [247] Dickey J M. The weighted likelihood ratio, linear hypotheses on normal location parameters [J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1971: 204-223.
- [248] Kass R E, Raftery A E. Bayes factors [J/OL]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, 90(430): 773-795. DOI: [10.1080/01621459.1995.10476572](https://doi.org/10.1080/01621459.1995.10476572).





## 致 谢

转瞬之间，我已在理论所学习了四年。临别之际，我想对所有关心和帮助过我的人表示最衷心的感谢！

我要真诚感谢我的导师黄庆国研究员对我的悉心栽培！黄老师在科研和生活方面都给予我极大的帮助。在科研方面，黄老师对物理学的前沿有敏锐的洞察力，从入学的时候就建议我从事引力波和原初黑洞这一新兴领域的研究工作。黄老师具有很强的物理直觉，我时常能从他那里获得关于物理现象的新见解。在我科研工作遇到问题的时候，黄老师总能一针见血地指明问题的关键，使得我们能够专心攻克难点，取得进展。黄老师在科研工作上具有极大的激情，他似乎无时无刻不在思考物理问题，并总能提出很多奇思妙想并乐意与我们分享。在科研遇到困难的时候，我总能随时通过各种通信工具向他求助和探讨。记得有多次为了尽快完成手上的科研工作，黄老师不惜牺牲休息的时间，与我们通过微信或小鱼易连讨论至深夜甚至凌晨。这种激情一直激励着我不断努力工作。在黄老师的指导下做研究是愉快和高效的。在生活方面，黄老师给了我诸多关照。在我博士入学之前的半年，黄老师就提前资助我来理论所访问。读博后，黄老师还多次资助我去国内外参加各种学术交流活动，并经常给我推荐就业信息。在读博期间，我还经常向黄老师请假回家与家人团聚，黄老师每次都通情达理地批准了。我再次向黄老师表示最诚挚的谢意！

我要感谢我的合作者们。他们是黄庆国老师、Vivien Raymond 老师、戚虹老师和林文斌老师，以及袁晨师弟、黄帆师弟、李君师姐、罗华美学妹和吴玉梅师妹。特别是袁晨师弟，他思维活跃、物理图像清晰，我们的合作是卓有成效的，已经完成了 5 篇文章。

我要感谢台湾师范大学的林丰利老师以及广州大学的张靖仪老师，他们曾分别邀请和资助我去访问。此外，我还要感谢理论所提供的平台，让我有机会申请到国科大的资助，从而能够在英国卡迪夫大学进行为期一年的访问学习。为此，我要感谢黄庆国老师、刘润球老师和戚虹老师在我申请访学过程中提供的无私帮助。我要感谢在卡迪夫大学访学时的导师戚虹老师和 Vivien Raymond 老师，他们总能在百忙之中抽空听取我的科研进展并讨论和指导下一步工作。我还要感

谢 Edward Fauchon-Jones、Sebastian Khan 和 Jonathan E. Thompson, 他们在我访学期间为我解答了关于中子星黑洞模板的各种问题。我要感谢 Charlie Hoy、Virginia d'Emilio 和 Cecilio García-Quirós, 他们曾帮我解答关于 Bilby 和 PESummary 软件包的各种问题。

我要感谢组内的同学们。王赛师兄、皮石师兄、程程师姐、张克超师兄、邢宇航师兄、王科师兄、陈璐师姐、李君师姐、桑语师兄、张雪师姐、方芸、黄帆、袁晨、吴玉梅、郭忠凯、孟德双、国荣祯和韩雨轩在平时的学习生活中, 为我提供了不少帮助。特别是组里的秘书陈璐、黄帆和吴玉梅, 感谢他们的辛勤付出。

我要感谢国内的室友戴卫明学长、柳浪和贾乙丁提供了良好的宿舍环境, 使我得以安心学习和科研。我要感谢在英国访学期间的室友杜慕皓、王凯和孙佳时常分享他们的美食, 以及在我心情低落的时候给予我诸般安慰; 怀念在疫情期间一起斗地主的欢乐时光。我要感谢同办公室的曲峰和何淼, 我们经常在去就餐的路上讨论各种学习和生活上的事情。

我要感谢在理论所行政岗位上默默付出的王丽老师、孙亚宁老师、郭舒婷老师和石平老师。特别是石平老师曾多次主动提醒和联系我完成一些行政上的事务。

我要感谢我的硕士导师韦浩教授。韦老师不仅手把手地引导我进入科研领域, 还在我读博期间时常关心我的动态。

我要感谢我的家人们对我的理解、包容和支持。感谢父母几十年来的养育之恩! 感谢岳父母对我妻子和孩子的照顾! 感谢妻子对我的支持!

我要感谢上帝在我人生每个阶段的带领。我要感谢教会的众弟兄姊妹们, 让我不管是身处国内还是异国他乡都能感受到上帝的爱。

谨以此文献给我的儿子陈曦。

2021 年 4 月 27 日

## 作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

### 作者简历：

2008 年 9 月至 2012 年 6 月，在福州大学紫金矿业学院获学士学位。

2012 年 9 月至 2015 年 3 月，在北京理工大学物理学院获硕士学位。

2015 年 9 月至 2016 年 10 月，在湖南文理学院任教师。

2019 年 10 月至 2020 年 10 月，在英国卡迪夫大学物理与天文系访学（加入 LIGO）。

2017 年 9 月至 2021 年 6 月，在中国科学院理论物理研究所攻读博士学位。

### 短作者文章：

1. [Non-tensorial Gravitational Wave Background in NANOGrav 12.5-Year Data Set](#)  
[arXiv:2101.06869 \[astro-ph.CO\]](#)

**Zu-Cheng Chen**, Chen Yuan, Qing-Guo Huang

2. [Scalar induced gravitational waves in different gauges](#)

Physical Review D, 2020, 101(6): 063018, [arXiv:1912.00885 \[astro-ph.CO\]](#)

Chen Yuan, **Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang

3. [Extraction of gravitational wave signals with optimized convolutional neural network](#)

Frontiers of Physics, 2020, 15(1): 14601

Hua-Mei Luo, Wenbin Lin, **Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang

4. [Pulsar Timing Array Constraints on Primordial Black Holes with NANOGrav 11-Year Dataset](#)

Physical Review Letters, 2020, 124(25): 251101, [arXiv:1910.12239 \[astro-ph.CO\]](#)

**Zu-Cheng Chen**, Chen Yuan, Qing-Guo Huang

5. [Log-dependent slope of scalar induced gravitational waves in the infrared regions](#)

Physical Review D, 2020, 101(4): 043019, [arXiv:1910.09099 \[astro-ph.CO\]](#)

Chen Yuan, **Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang

6. [Measuring the tilt of primordial gravitational-wave power spectrum from observations](#)  
Science China (Physics, Mechanics & Astronomy), 2019 (11): 16, [arXiv:1907.09794](#)  
[\[astro-ph.CO\]](#)  
Jun Li, **Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang
7. [Probing primordial-black-hole dark matter with scalar induced gravitational waves](#)  
Physical Review D, 2019, 100(8): 081301, [arXiv:1906.11549](#) [\[astro-ph.CO\]](#)  
Chen Yuan, **Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang
8. [Distinguishing Primordial Black Holes from Astrophysical Black Holes by Einstein Telescope and Cosmic Explorer](#)  
Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2020, 2020(08): 039, [arXiv:1904.02396](#)  
[\[astro-ph.CO\]](#)  
**Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang
9. [Stochastic Gravitational-Wave Background from Binary Black Holes and Binary Neutron Stars and Implications for LISA](#)  
The Astrophysical Journal, 2019, 871(1): 97, [arXiv:1809.10360](#) [\[gr-qc\]](#)  
**Zu-Cheng Chen**, Fan Huang, Qing-Guo Huang
10. [Merger Rate Distribution of Primordial-Black-Hole Binaries](#)  
The Astrophysical Journal, 2018, 864(1): 61, [arXiv:1801.10327](#) [\[astro-ph.CO\]](#)  
**Zu-Cheng Chen**, Qing-Guo Huang

长作者文章：

1. [Search for anisotropic gravitational-wave backgrounds using data from Advanced LIGO's and Advanced Virgo's first three observing runs](#)  
[arXiv:2103.08520](#) [\[gr-qc\]](#)  
LIGO Scientific and Virgo and KAGRA Collaborations
2. [Constraints on cosmic strings using data from the third Advanced LIGO-Virgo observing run](#)

[arXiv:2101.12248 \[gr-qc\]](#)

LIGO Scientific and Virgo and KAGRA Collaborations

3. [Upper Limits on the Isotropic Gravitational-Wave Background from Advanced LIGO's and Advanced Virgo's Third Observing Run](#)

[arXiv:2101.12130 \[gr-qc\]](#)

LIGO Scientific and Virgo and KAGRA Collaborations

4. [Diving below the spin-down limit: Constraints on gravitational waves from the energetic young pulsar PSR J0537-6910](#)

[arXiv:2012.12926 \[astro-ph.HE\]](#)

LIGO Scientific and Virgo and KAGRA Collaborations

5. [All-sky search in early O3 LIGO data for continuous gravitational-wave signals from unknown neutron stars in binary systems](#)

Physical Review D, 2021, 103(6): 064017, [arXiv:2012.12128 \[gr-qc\]](#)

LIGO Scientific and Virgo and KAGRA Collaborations

#### 获奖情况：

- 2020-2021 学年中国科学院大学三好学生标兵
- 2020 年理论物理研究所曙光优秀奖
- 2019 年博士研究生国家奖学金
- 2018-2019 学年中国科学院大学三好学生
- 2018 年理论物理研究所曙光特别奖
- 2012 年硕士研究生国家奖学金

