Проверим условия выполнимости теорем, представленных ниже:

Теорема: (1)

Если ф. $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$\llcorner$ сильно выпукла

$$m\|y\|^2 \leq y^T H(x) y \leq M\|y\|^2, \quad 0<m<M$$

то классический вариант метода Ньютона, отвечающий выбору по формуле:

$\llcorner$ шаг равен единице

$$f(x) - f(x_k) \leq \varepsilon \alpha_k \nabla^T f(x_k) d_k$$

$\llcorner$ $x_k + \alpha_k d_k$

сходится к точке минимума x с квадратичной скоростью

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C\|x_k - x_*\|^2, \quad k=0,1,\dots$$

вне зависимости от начального приближения x_0

Более того, если $H(x)$ удовлетворяет еще и усл. Липшица: $\|H(x_1)-H(x_2)\| \leq L\|x_1-x_2\|$, где $x_1,x_2 \in \mathbb{R}^n$

то $C = \frac{L}{m}$

Теорема: (2)

Если $f(x)$ удовлетворяет всем усл. теоремы (1), то метод Ньютона сходится к x_* не зависимо от начального приближения с квадратичной скоростью, опр. следующими соотношениями

$$\|x^{(N+i)} - x_*\| \leq \frac{L}{m}\omega_N, \quad \text{где } \alpha: f(x) - f(x_k) \leq \varepsilon\alpha \nabla^T f(x_k) d_k \qquad (1)$$

$$\omega_N = \frac{L}{m}\|x^{(N)} - x_*\|$$

$$\text{, где } \alpha: f(x_k - \alpha_k (H(x_k))^{-1}\nabla f(x_k)) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha (H(x_k))^{-1}\nabla f(x_k)) \qquad (2)$$

$$\omega_N = \|x_{k+1} - x_*\| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{L}{m}\|x_k - x_*\|^2$$

На практике был реализован классический метод Ньютона: $\alpha = 1$

Проверим:

$$m\|y\|^2 \leq y^T H(x) y \leq M\|y\|^2, \quad 0<m<M \quad \text{(условие сильной выпуклости)}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 2-\cos(x_1+3x_2) & -3\cos(x_1+3x_2) \\ -3\cos(x_1+3x_2) & 2-9\cos(x_1+3x_2) \end{bmatrix}$$

Проведём численный эксперимент, для того, чтобы определить m и M

Будем брать точки из окрестности точки минимума и проверять неравенство

Получим следующий результат:

$m = 1.2926$

$M = 12$

при $x_1 \in [0.2; 0.6]$, $x_2 \in [-1.3; 1.7]$

таким образом, условие теорем выполнено

Алгоритм:

1. Выберем начальное приближение x и точность ε
2. Если $\|\nabla f(x^{(0)})\|^2 < \varepsilon$, завершить процесс
3. Положим $K = 1$
4. Вычислим значения производной функции в точке $x^{(k)}$
5. Вычислим коэффициенты матрицы Гессе в точке $x^{(k)}$
6. Вычислим det матрицы Гессе в точке x
7. $x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{det} \cdot (F_{22} F_1 - F_{21} F_2)$

   $x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{det} \cdot (F_{11} \cdot F_2 - F_{12} F_1)$
8. Если $\|\nabla f(x_k)\|^2 < \varepsilon$, завершить процесс, иначе $K = K+1$ и перейти к пункту 4.

$$H = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \qquad F_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_j}$$

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$