Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ» ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Выполнили
студенты группы 3630102/70401

Зуев В. А.
Курова А. Н.
Мельникова А. Н.
Стоян А. С.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2020

1 Постановка задачи

Поставлена задача линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 30 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_4 \geq -6 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$8x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 2x_4 \longrightarrow min$$

1. Привести задачу к виду, необходимому для применения симплекс-метода.
2. Построить к данной задаче двойственную и также привести к виду, необходимому для применения симплекс-метода.
3. Решить обе задачи симплекс-методом с выбором начального приближения методом искусственного базиса.
4. Решить обе задачи методом перебора крайних точек.
5. Разработать схему восстановления прямой задачи по решению двойственной.

Алгоритмы, требуемые для решения задачи, реализовать в таком виде, чтобы их можно было использовать в качестве подпрограмм в следующих лабораторных работах.

2 Исследование применимости метода

Алгоритм симплекс-метода, приведённый в пособии [1] и описанный ниже, применим к задачам линейного программирования на нахождение минимума. Метод работает с задачами в канонической форме при всяких вещественных значениях компонент $A \in \mathbb{R}_{m \times n}, b \in \mathbb{R}_m, c \in R_n$ с условием: матрица A имеет ранг m (следовательно, существует хотя бы один опорный вектор).
После приведения задачи (1) (или двойственной к ней) к каноническому виду получается система с матрицей 9×4 ранга 4, следовательно, условие выполнено.

3 Описание алгоритмов

3.1 Алгоритм перевода из общей в каноническую форму

Вход: система

1. Проверяем знаки в системе
2. Если «$\leq$», то к левой части добавляем $w[i]$, если «$\geq$», то из левой части вычитаем $w[i]$, $w[i] \geq 0$.
3. Знаки неравенства в системе заменяем на равенство.
4. Производим замену переменных: если $x[i] \leq 0$, то $x'[i] = -x[i] \geq 0$; если $x[i]$ любого знака, то $x[i] = u[i] - v[i], v[i], u[i] \geq 0$.

3.2 Алгоритм построения двойственной задачи

Для простоты алгоритма будем рассматривать задачу минимума:

$$\begin{array}{l} (x[N], c[N]) \longrightarrow \min_{x[N]}, x[N] \in S, x[N] \geq 0 \\ S := \{x[N] | A[M, N] \cdot x[N] \gtreqless b[M]\}, x[N] \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

Если перед нами стоит задача максимума, то домножим вектор коэффициентов матрицы цели на -1.

1. Транспонируем заданную матрицу
2. Новый вектор коэффицентов, стоящий в системе справа, равен вектору коэффициентов функции цели (2).
3. Новый вектор коэффициентов функции цели равен вектору коэффицентов, стоящему в системе (2) справа.
4. Если ограничение на $x[i] \geq 0$, то i-ая строка новой системы имеет знак «$\geq$». Если нет ограничения на знак, то i-ая строка новой системы имеет знак «$=$».
5. Если ограничение i-ой строки в исходной системе «$\geq$» (тк рассматриваем задачу минимума), то ограничение на знак новой переменной $y[i] \geq 0$. Если ограничение i-ой строки в исходной системе «$=$», то $y[i]$ любого знака.
6. Если исходная задача на поиск минимума, то двойственная на поиск максимума.

3.3 Алгоритм симплекс-метода и связанные процедуры

Алгоритм симплекс-метода

1. Вход: $x_0[N]$, $A[M,N]$, $b[M]$, $c[N]$, N_k, $B[N_0,M]$

где A, b, c – параметры задачи $c^T x \to \min$, $x \in S$.
$S := \{x \geq 0 \mid Ax = b\}$
$x_0[N]$ – опорный вектор к множеству S
N_0 – индексы базисных столбцов x_0, $N_0 \subset N$
$B[N_0, M] : B[N_0, M] \cdot A[M, N_0] = E$

2. Введём $N_k^0 := \{i \in N_k \mid x_k[i] = 0\}$ (вначале $k=0$, $x_k = x_0$, $N_k = N_0$)
$N_k^+ := \{i \in N_k \mid x_k[i] > 0\}$

$$bg := \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \\ & & (bg_{i-1,j} + bg_{i,j-1}) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_{m-|N_k^+|}\right\} |N_k^+|$$

– повёрнутый на 45° участок треугольника Паскаля. В каждой ячейке $bg_{ij} = C_i^j$, в левом нижнем углу $C_{|N_k^+|}^{m-|N_k^+|}$

3. В цикле для каждого binomIdx от 0 до $C_{|N_k^+|}^{m-|N_k^+|}$:

3а. Ищем индексы $N_k \subset N$, $L_k \subset N$: $N = N_k \cap L_k$; $N_k \supset N_k^+$; $N_k = m$;
N_k отличается от N_{k-1} только одним индексом.
Для этого запускаем процедуру subsetByIndex, положив её параметры
$bg = bg$, $i = binomIdx$, $M = N \setminus N_k^+ = N_k^0$
] Её результат $\tilde{N}_k^0 \Rightarrow N_k := N_k^+ \cup \tilde{N}_k^0$
$L_k := N \setminus N_k$

3б. Если определитель $\det(A[M, N_k]) = 0$, переходим к следующему 'binomIdx', т.к. текущие индексы не могут быть ~~базисными~~ индексами базисных столбцов о. в.

3в. Если binomIdx $= 0$, нам известна $B[N_0, M]$. В ином случае ищем $B[N_k, M]$, опираясь на $U_{k-1}[N_{k-1}]$:

3.в.I. Положим i_k := "№ индекса в N_k, изменённый по сравнению с N_{k-1}"

3.в.II. Строим

$$F[N_k, N_{k-1}] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -u_k[1]/u_k[i_k] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -u_k[j_{k-1}]/u_k[i_k] & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1/u_k[i_k] & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -u_k[j_{k+1}]/u_k[i_k] & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -u_k[m]/u_k[i_k] & 0 & \cdots\, 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.в.III. $B[N_k, M] := F[N_k, N_{k-1}] \cdot B[N_{k-1}, M]$

3.г. Находим векторы $y_k[M] := B^T[N_k, M] \cdot c[N_k]$

$d_k[N] := c[N] - A^T[M, N] \cdot y_k[M]$

3.д. Если $d_k[i] \geq 0 \ \forall i \in L_k$, то x_k - решение (завершаем алгоритм).

3е. « $j_k :=$ " первый индекс из L_k : $d_k[j_k] < 0$

~~u_k~~ $u_k[N_k] := B[N_k, M] \cdot A[M, j_k]$

3ж. Если $u_k[N_k]$ не содержит положительных компонент, останавливаем процесс: целевая функция $c^T[N] \cdot x[N]$ не ограничена снизу

3з. Если $N_k^+ = N_k$ (о.в. невырожденный) или $u_k[N_k \setminus N_k^+] \leq 0$:

3.з.I. $\theta_k := \min\limits_{i \in N_k,\, u_k[i] > 0} \dfrac{x_k[i]}{u_k[i]}$

3.з.II. Дополним $u_k[N_k]$ до $u_k[N]$ так:

$u_k[j_k] := -1$

$u_k[L_k \setminus j_k] := 0$

$x_{k+1}[N] := x_k[N] - \theta_k u_k[N]$

3.з.III. Устанавливаем $k := k+1$ и переходим к шагу (2).

Вспомогательные процедуры

- SubsetByIndex:

1. Вход: таблица биномиальных коэффициентов $bg = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (bg_{ij}) & \\ 1 & & \end{bmatrix}}_{k+1}\right\}{n-k+1}$, $bg_{ij} = bg_{i-1,j} + bg_{i,j-1}$, $n \geq k$

   индекс $idx \in \{0;\ C_n^k - 1\}$ - номер подмножества

   упорядоченное мн-во (массив) эл-тов $M : |M| = n$

2. Обходим матрицу \`bg\`, начиная в левом нижнем углу. Объявим

   $t := idx$

   $i := n-k$

   $j := k$

   $res := \{\varnothing\}$

3. В цикле до тех пор, пока $j > 0$:

   3.a. Если $t < bg[i, j-1]$:

   3.a.1. добавляем $M[i+j-1]$ в \`res\`

   3.a.2. $j := j-1$ (переходим в клетку правее)

   3.б. Иначе:

   3.б.1. $t := t - bg[i, j-1]$

   $t := t-1$

4. Возвращаем \`res\`

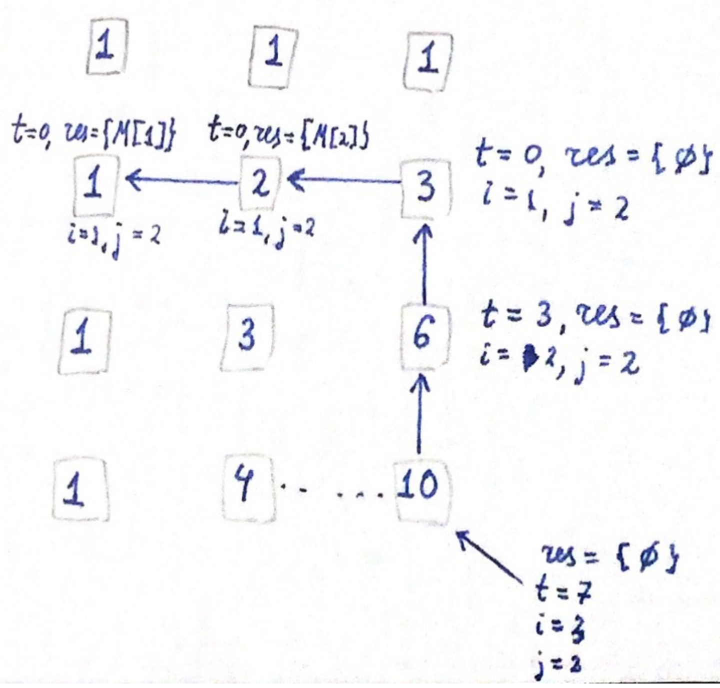
- Пример работы:

  ~~n = 4, k = 3, idx = 7~~

  $n = 5$

  $k = 2$

  $idx = 7$



Алгоритм выбора начального приближения

Вход: $\begin{cases} A[M,N] \\ b[M] \\ c[N] \end{cases}$ — параметры задачи $c^T[N]\cdot x[N] \to \min$,
$x \in S := \{x[N] \geq 0 \mid A[M,N]\cdot x[N] = b[M]\}$

1. Строим $\bar{A} := (A[M,N] \,\vdots\, E[M,M])$, где $E[M,M]$ — идентичная матрица

$\bar{c} := (\underbrace{0 \dots 0}_{n} \; \underbrace{1 \dots 1}_{m})$

2. Если $b[M]$ содержит отрицательные компоненты, умножаем соответствующие строки системы $(\bar{A}\,|\,b)$ на -1.

3. Строим $\bar{x}_0 := \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} n \\ b[M] \end{pmatrix}$ — опорный вектор к $\bar{S} = \{\bar{x} \geq 0 \mid \bar{A}\bar{x} = b\}$

$\bar{B}_0 := E[M,M]$

4.

4а. Решаем задачу $\min\limits_{x \in \bar{S}} \bar{c}^T \bar{x}$ симплекс-методом.

Пусть решение — $\bar{x}_*$, а $\bar{N}_*$ — соответствующее множество индексов базисных столбцов $\bar{A}$.

$x_* := \bar{x}_*[N]$, $N_* := \bar{N}_* \cap N$

4б. Если $N_* = N_+ := \{i \mid x_*[i] > 0\}$, то x_* можно взять в качестве искомого начального приближения.

4в. Если $N_* \supset N_+$ ($x[N]$ — несобственный о.в.):

4.в.I. Выделяем подмножество индексов $L := N \setminus N_+$

4.в.II. Строим биномиальную таблицу bg: в ~~левом~~ правом нижнем углу число $C_{|L|}^{|M|-|N_+|}$ (см. шаг (2) симплекс-метода).

4.в.III. Повторяем шаг (3) алгоритма симплекс-метода, используя эту биномиальную таблицу и индексы L в качестве множества индексов, которыми дополняем A_k.

Затем возвращаемся к (4б).

3.4 Алгоритм перебора опорных векторов

Опорные векторы можно искать прямо по определению, перебирая все возможные базисы и находя соответствующие ненулевые коэффициенты из решения СЛАУ. Множества входящих в базис столбцов будем определять с помощью метода *subsetByIndex*, описанной в предыдущем разделе. Также будем пользоваться процедурой *inv*, описываемой в следующем разделе, для нахождения обратной матрицы при решении СЛАУ.

Algorithm 1: Метод перебора опорных векторов решения задачи линейного программирования в канонической форме

Data: $A[M, N], b[M], c[N]$ – параметры задачи линейного программирования, поставленной в канонической форме;
$m = |M|, n = |N|$
Result: опорный вектор $x_*[N]$, минимизирующий целевую функцию $(x[N], c[N])$
инициализация матрицы $bg[N, M]$ биномиальных коэффициентов;
$V := \emptyset$ – будущий список опорных векторов;
for i *в диапазоне* $\{0; C_m^n\}$ **do**
    $N_k :=$ subsetByIndex(i,bg);
    if $|det(A[M, N_k])| > eps$ **then**
        $x[N_k] :=$ inv($A[M, N_k], b[M]$);
        Дополняем нулями до $x[N]$;
        Добавляем $x[N]$ в V;
    end
end
Выбираем x_* – любой вектор из V;
for $v \in V$ **do**
    if $(v, c) < (x_*, c)$ **then**
        $x_* := v$;
    end
end

3.5 Алгоритм восстановления решения прямой(двойственной) задачи по решению двойственной(прямой)

Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней:

- Прямая (исходная) задача:

$$\begin{array}{l} F = (x[N], c[N]) \longrightarrow \max_{x[N]}, x[N] \in S \\ S = \{x[N] | A[M, N] \cdot x[N] = b[M], x[N] \geq 0\} \end{array} \tag{3}$$

- Двойственная к ней задача:

$$\begin{array}{l} F_{dual} = (y[M], b[M]) \longrightarrow \min_{y[M]}, y[M] \in S_{dual} \\ S_{dual} = \{y[M] | A^T[N, M] \cdot y[M] \leq c[N]\} \end{array} \tag{4}$$

Каждая из задач (3) и (4) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при нахождении оптимального плана одной из задач при помощи симплекс метода или метода искусственного базиса находится решение и другой задачи.
Пусть:

- x^* – найденный оптимальный план задачи (3);
- $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$ – базис, определяющий план;
- $C_{basis} := (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$ – вектор-строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в целевой функции задачи (3);
- P^{-1} - матрица, обратная матрице P, составленной из базисных векторов.

Тогда будем находить решение прямой задачи в соответствии с теоремой [2]:

Теорема 3.1 *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план x^*, то $y^* = C_{basis} \cdot P^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.*

Теперь, помня о том, что задачи (3) и (4) двойственны друг к другу, можем решать любую из них и находить оптимальный план для парной с затратами лишь на обращение матрицы из базисных векторов и на умножение этой матрицы на вектор C_{basis}.

4 Результаты решения задачи

Симплекс метод для задачи (1) дал нам оптимальный план $\widetilde{x_*}^T = (0., -3.5, -0.5, 31.5)$.
Метод перебора крайних точек дал нам решение $\widetilde{\widetilde{x_*}}^T = (0., -3.5, -0.5, 31.5)$.
При этом точное решение задачи $x_*^T = (0., -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{63}{2})$ - его можно получить, например, при решении в дробях системы из строки (6) алгоритма перебора крайних точек (1).
Сравнив результаты, полученные при использовании исследуемых методов, между собой и с точным решением, можем сделать вывод, что абсолютная погрешность при нашей реализации очень хорошая. Такую ситуацию имеем за счет того, что достаточно малые числа компьютер просто не хранит. Неточности, попадающие в область машинного нуля, нивелируются.

5 Оценка достоверности полученного результата

Обоснование достоверности решения:

$$x_*^T[N] = \left(0, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{63}{2}\right)$$

По теореме о необходимых и достаточных условиях решения задачи:

$\exists\, y^*[M]$

$y_*[M_1] \geqslant 0$

$c^T[N_1] - y_*^T[M]\, A[M,N_1] \geqslant 0$

$c^T[N_2] - y_*^T[M]\, A[M,N_2] = 0$

$y_*^T[M_1] \cdot \left(A[M_1,N] \cdot x_*[N_1] - b[M_1]\right) = 0$

$\left(c^T[N_1] - y_*^T[M] \cdot A[M,N_1]\right) \cdot x_*[N_1] = 0$

Для задачи вида:

$\min c^T[N] \cdot x[N], \quad x[N] \in S$

$S = \{ x[N] \mid A[M_1,N]\, x[N] \geqslant b[M_1],\ A[M_2,N] \cdot x[N] = b[M_2],\ x[N_1] \geqslant 0 \}$

Данная задача:

$8x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 2x_4 \longrightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 30 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_4 \geqslant -6 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

тогда в наших обозначениях

$$A[M_1,N] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad b[M_1] = (-6, -6)$$

$$b[M_2] = (24, 30)$$

$$A[M_2,N] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$c^T[N_1] = (8) \qquad x_*[N_1] = (0)$

$c^T[N_2] = (8 -4 -2) \qquad x_*[N_2] = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{63}{2}\right)$

$$A[M,N_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A[M,N_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

теперь будем подставлять:

$y_*^T[M_1]\left(A[M_1,N] \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_*[N_1]} - b[M_1]\right) = -y_*^T[M_1] \cdot b[M_1] = -y_1 \cdot (-6) - y_2(-6) = 6y_1 + 6y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -y_2$, но $y_*^T[M_1] \geqslant 0$

$-\left[(y_1, y_2)\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}\right] = 6y_1 + 6y_2 = 0 \qquad \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$

$C^T[N_2] - y_*^T[M] \cdot A[M, N_2] = 0$

$y_*^T[M]\ A[M, N_2] = C^T[N_2]$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2y_3 + 4y_4 & -2y_3 & -2y_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 8 = 2y_3 + 4y_4 \\ -4 = -2y_3 \\ -2 = -2y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_3 = 2 \\ y_4 = 1 \end{matrix}$$

$(C^T[N_1] - y_*^T[M] \cdot A[M, N_1]) \cdot x_*[N_1] = 0$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (0) = (0)$$

$0 = 0$ – верно

$C^T[N_1] - y_*^T[M]\ A[M, N_1] \geqslant 0$

$$8 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

$8 + 2 + 1 \geqslant 0$

$11 \geqslant 0$ - верно

$\Rightarrow$ все условия соблюдены

$\exists\ y_*(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Список литературы

[1] Петухов Л. В. Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования: учеб. пособие / Л. В. Петухов, Г. А. Серёгин, Е. А. Родионова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 99 с.

[2] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во 'Лань', 2011. – 352с.: ил.