Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ» ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Выполнили
студенты группы 3630102/70401

Зуев В. А.
Курова А. Н.
Мельникова А. Н.
Стоян А. С.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2020

1 Постановка задачи

Поставлена задача линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 1 = 30 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_4 \geq -6 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \in \{1; 3\} \end{cases} \tag{1}$$

$$8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \longrightarrow min$$

1. Привести задачу к виду, необходимому для применения симплекс-метода.
2. Построить к данной задаче двойственную и также привести к виду, необходимому для применения симплекс-метода.
3. Решить обе задачи симплекс-методом с выбором начального приближения методом искусственного базиса.
4. Решить обе задачи методом перебора крайних точек.
5. Разработать схему восстановления прямой задачи по решению двойственной.

Алгоритмы, требуемые для решения задачи, реализовать в таком виде, чтобы их можно было использовать в качестве подпрограмм в следующих лабораторных работах.

2 Исследование применимости метода

Алгоритм симплекс-метода, приведённый в пособии [1] и описанный ниже, применим к задачам линейного программирования на нахождение минимума. Метод работает с задачами в канонической форме при всяких вещественных значениях компонент $A \in \mathbb{R}_{m \times n}, b \in \mathbb{R}_m, c \in R_n$ с условием: матрица A имеет ранг m (следовательно, существует хотя бы один опорный вектор).
После приведения задачи (1) (или двойственной к ней) к каноническому виду получается система с матрицей 9×4 ранга 4, следовательно, условие выполнено.

3 Описание алгоритмов

3.1 Алгоритм перевода из общей в каноническую форму

Вход: система

1. Проверяем знаки в системе
2. Если «$\leq$», то к левой части добавляем $w[i]$, если «$\geq$», то из левой части вычитаем $w[i]$, $w[i] \geq 0$.
3. Знаки неравенства в системе заменяем на равенство.
4. Производим замену переменных: если $x[i] \leq 0$, то $x'[i] = -x[i] \geq 0$; если $x[i]$ любого знака, то $x[i] = u[i] - v[i]$, $v[i], u[i] \geq 0$.

3.2 Алгоритм построения двойственной задачи

Для простоты алгоритма будем рассматривать задачу максимума:

$$\begin{array}{l}(x[N], c[N]) \longrightarrow \max_{x[N]}, x[N] \in S, x[N] \geq 0 \\ S := \{x[N] | A[M, N] \cdot x[N] \gtreqless b[M]\}, x[N] \geq 0\end{array} \tag{2}$$

Если перед нами стоит задача минимума, то домножим вектор коэффициентов матрицы цели на -1.

1. Транспонируем заданную матрицу
2. Новый вектор коэффицентов, стоящий в системе справа, равен вектору коэффициентов функции цели (2).
3. Новый вектор коэффициентов функции цели равен вектору коэффицентов, стоящему в системе (2) справа.
4. Если ограничение на $x[i] \geq 0$, то i-ая строка новой системы имеет знак ”$\geq$”. Если нет ограничения на знак, то i-ая строка новой системы имеет знак «$=$».
5. Если ограничение i-ой строки в исходной системе «$\leq$» (тк рассматриваем задачу максимума), то ограничение на знак новой переменной $y[i] \geq 0$. Если ограничение i-ой строки в исходной системе ”$=$ то $y[i]$ любого знака.
6. Если исходная задача на поиск максимума, то двойственная на поиск минимума.

3.3 Алгоритм симплекс-метода и связанные процедуры

Алгоритм симплекс-метода

1. Вход: $x_0[N]$, $A[M,N]$, $b[M]$, $c[N]$, N_k, $B[N_0,M]$

где A, b, c - параметры задачи $c^T x \to \min$, $x \in S$,

$S := \{x \geq 0 \mid Ax = b\}$

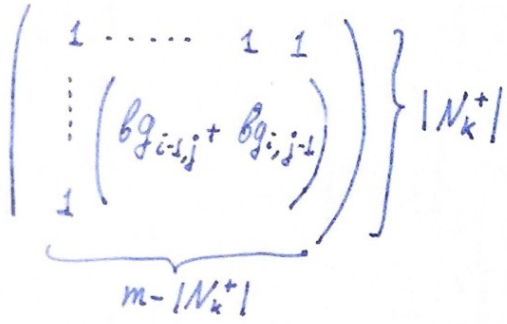
$x_0[N]$ - опорный вектор к множеству S

N_0 - индексы базисных столбцов x_0, $N_0 \subset N$

$B[N_0, M] : B[N_0, M] \cdot A[M, N_0] = E$

2. Введём $N_k^0 := \{ i \in N_k \mid x_k[i] = 0 \}$ (вначале $k=0$, $x_k = x_0$, $N_k = N_0$)

$N_k^+ := \{ i \in N_k \mid x_k[i] > 0 \}$

$bg :=$ 

- повёрнутый на 45° участок треугольника Паскаля. В каждой ячейке $bg_{i,j} = C_i^j$, в левом нижнем углу $C_{|N_k^+|}^{m-|N_k^+|}$

3. В цикле для каждого binom Idx от 0 до $C_{|N_k^+|}^{m-|N_k^+|}$:

3а. Ищем индексы $N_k \subset N$, $L_k \subset N$: $N = N_k \cap L_k$; $N_k \supset N_k^+$; $N_k = m$;

N_k отличается от N_{k-1} только одним индексом.

Для этого запускаем процедуру subsetByIndex, положив её параметры

$bg = bg$, $i = $ binom Idx, $M = N \setminus N_k^+ = N_k^0$

Её результат $\tilde{N}_k^0 \Rightarrow N_k := N_k^+ \cup \tilde{N}_k^0$

$L_k := N \setminus N_k$

3б. Если определитель $\det(A[M, N_k]) = 0$, переходим к следующему 'binom Idx', т.к. текущие индексы не могут быть ~~базисными~~ индексами базисных столбцов о.в.

3в. Если binom Idx = 0, нам известна $B[N_0, M]$. В иначе случае ищем $B[N_k, M]$, опираясь на $U_{k-1}[N_{k-1}]$:

3.в.I. Положим $i_k :=$ "№ индекса в N_k, изменённый по сравнению с N_{k-1}"

3.в.II. Строим

$$F[N_k, N_{k-1}] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -u_k[1]/u_k[i_k] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -u_k[j_{k-1}]/u_k[i_k] & 0 & & \\ & & & 1 & -u_k[j_{k-1}]/u_k[i_k] & 0 & & \\ & & & 0 & 1/u_k[i_k] & 0 & & \\ & & & 0 & -u_k[j_{k+1}]/u_k[i_k] & 1 & \ddots & \\ & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -u_k[m]/u_k[i_k] & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.в.III. $B[N_k, N] := F[N_k, N_{k-1}] \cdot B[N_{k-1}, M]$

3.2. Находим векторы $y_k[M] := B^T[N_k, M] \cdot c[N_k]$

$d_k[N] := c[N] - A^T[M, N] \cdot y_k[M]$

3.g. Если $d_k[i] \geq 0 \quad \forall i \in L_k$, то x_k - решение (завершаем алгоритм).

3.е. $\triangleleft j_k := $ " первый индекс из $L_k : d_k[j_k] < 0$

$u_k[N_k] := B[N_k, M] \cdot A[M, j_k]$

3.ж. Если $u_k[N_k]$ не содержит положительных компонент, останавливаем процесс: целевая функция $c^T[N] \cdot x[N]$ не ограничена снизу

3.з. Если $N_k^+ = N_k$ (о.в. невырожденный) или $u_k[N_k \setminus N_k^+] \leq 0$:

3.з.I. $\theta_k := \min\limits_{i \in N_k, u_k[i] > 0} \dfrac{x_k[i]}{u_k[i]}$

3.з.II. Дополним $u_k[N_k]$ до $u_k[N]$ так:

$u_k[j_k] = -1$

$u_k[L_k \setminus j_k] := 0$

$x_{k+1}[N] := x_k[N] - \theta_k u_k[N]$

3.з.III. Устанавливаем $k := k+1$ и переходим к шагу (2).

Вспомогательные процедуры

- *SubsetByIndex:*

1. Вход: таблица биномиальных коэффициентов $bg = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (bg_{ij}) & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ ($n-k+1$ строк, $k+1$ столбцов), $bg_{ij} = bg_{i+1,j} + bg_{i,j-1}$, $n \geq k$

индекс $idx \in [0;\ C_n^k - 1]$ - номер подмножества

упорядоченное мн-во (массив) эл-тов $M : |M| = n$

2. Обходим матрицу `bg`, начиная в левом нижнем углу. Объявим

$t := idx$

$i := n-k$

$j := k$

$res := \{\emptyset\}$

3. В цикле до тех пор, пока $j > 0$:

3.а. Если $t < bg[i, j-1]$:

3.а.1. добавляем $M[i+j-1]$ в `res`

3.а.2. $j := j-1$ (переходим в клетку правее)

3.б. Иначе:

3.б.1. $t := t - bg[i, j-1]$

$t := t-1$

4. Возвращаем `res`

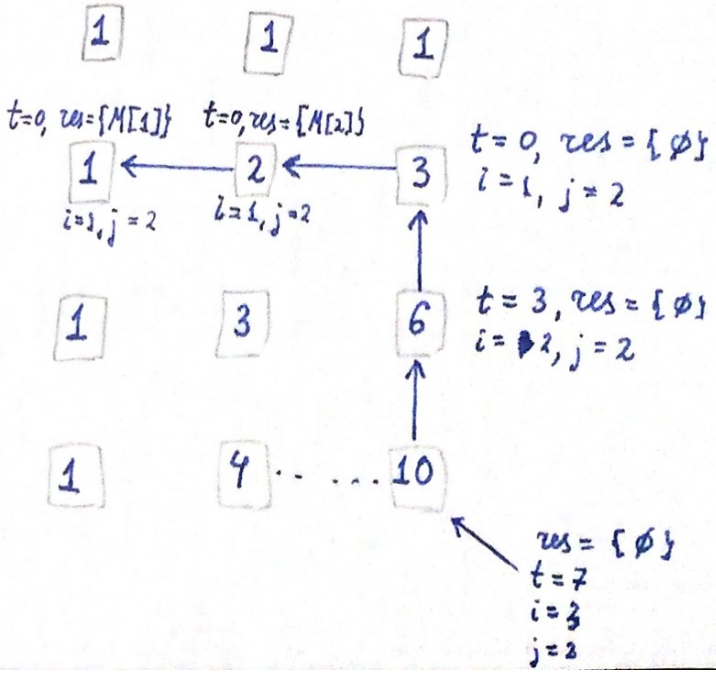
- *Пример работы:*

~~$n = 5,\ k = 3,\ idx = 7$~~

$n = 5$

$k = 2$

$idx = 7$



Алгоритм выбора начального приближения

Вход: $\begin{cases} A[M,N] \\ b[M] \\ c[N] \end{cases}$ - параметры задачи $\quad c^T[N]\cdot x[N] \to \min$,

$x \in S := \{x[N] \geq 0 \mid *A[M,N]\cdot x[N] = b[M]\}$

1. Строим $\bar{A} := (A[M,N] \vdots E[M,M])$, где $E[M,M]$ - идентичная матрица

   $\bar{c} := (\underbrace{0 \dots 0}_{n}\ \underbrace{1 \dots 1}_{m})$

2. Если $b[M]$ содержит отрицательные компоненты, умножаем соответствующие строки системы $(\bar{A}|b)$ на -1.

3. Строим $\bar{x}_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b[M] \end{pmatrix} \}n$ - опорный вектор к $\bar{S} = \{\bar{x} \geq 0 \mid \bar{A}\bar{x} = b\}$

   $\bar{B}_0 := E[M,M]$

4.

4а. Решаем задачу $\min\limits_{x \in \bar{S}} \bar{c}^T \cdot \bar{x}$ * симплекс-методом.

Пусть решение - $\bar{x}_*$, а $\bar{N}_*$ - соответствующее множество индексов базисных столбцов $\bar{A}$.

$\leftarrow x_* := \bar{x}_*[N]$, $N_* := \bar{N}_* \cap N$

4б. Если $N_* = N_+ := \{i \mid x_*[i] > 0\}$, то x_* можно взять в качестве искомого начального приближения.

4в. Если $N_* \supset N_+$ ($x[N]$ - несобственный о.в.):

4.в.I. Выделяем подмножество индексов $L := N \setminus N_+$

4.в.II. Строим биномиальную таблицу B_3 : в ~~левом~~ правом нижнем углу число $C_{|L|}^{|M|-|N_+|}$ (см. шаг (2) симплекс-метода).

4.в.III. Повторяем шаг (3) алгоритма симплекс-метода, используя эту биномиальную таблицу и индексы L в качестве множества индексов, которыми дополняем A_*.

Затем возвращаемся к (4б).

3.4 Алгоритм перебора опорных векторов

Опорные векторы можно искать прямо по определению, перебирая все возможные базисы и находя соответствующие ненулевые коэффициенты из решения СЛАУ. Множества входящих в базис столбцов будем определять с помощью метода *subsetByIndex*, описанной в предыдущем разделе. Также будем пользоваться процедурой *inv*, описываемой в следующем разделе, для нахождения обратной матрицы при решении СЛАУ.

Algorithm 1: Метод перебора опорных векторов решения задачи линейного программирования в канонической форме

Data: $A[M, N], b[M], c[N]$ – параметры задачи линейного программирования, поставленной в канонической форме;
$m = |M|, n = |N|$
Result: опорный вектор $x_*[N]$, минимизирующий целевую функцию $(x[N], c[N])$

```
инициализация матрицы bg[N, M] биномиальных коэффициентов;
V := ∅ – будущий список опорных векторов;
for i в диапазоне {0; C_m^n} do
    N_k := subsetByIndex(i,bg);
    if det(A[M, N_k]) ≠ 0 then
        x[N_k] := inv(A[M, N_k], b[M]);
        Дополняем нулями до x[N];
        Добавляем x[N] в V;
    end
end
Выбираем x_* – любой вектор из V;
for v ∈ V do
    if (v, c) < (x_*, c) then
        x_* := v;
    end
end
```

3.5 Алгоритм нахождения обратной матрицы

4 Результаты решения задачи

5 Оценка достоверности полученного результата

Список литературы

[1] Петухов Л. В. Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования: учеб. пособие / Л. В. Петухов, Г. А. Серёгин, Е. А. Родионова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 99 с.