Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ» ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Выполнили
студенты группы 3630102/70401

Зуев В. А.
Курова А. Н.
Мельникова А. Н.
Стоян А. С.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2020

1 Постановка задачи

Найти минимум функции методами одномерной минимизации (метод золотого сечения и метод Фибоначчи)
Необходимо подтвердить унимодальность функции построением графика.
Предусмотреть счётчик числа обращений к функции. Произвести вычисления с точностью: десятая, сотая, тысячная. Вывести формулу связи обращений к функции и заданной функции

2 Исследование применимости метода

Метод Фибоначчи является улучшением метода золотого сечения. Метод отличается от метода золотого сечения тем, что коэффициент сокращения интервала неопределенности меняется от итерации к итерации.
Для того, чтобы оба метода были применимы необходима унимодальность исследуемой функции (подтверждение унимодальности - график(1)). Иначе мы можем прийти в локальный минимум и на этом процесс остановится.

3 Описание алгоритмов методов

3.1 Метод золотого сечения

Algorithm 1: Метод золотого сечения

Data: f, a, b, ϵ – исследуемая на экстремум функция; границы интервала унимодальности функции, где ищется экстремум; точность - величина, которую не должна превышать длина интервала неопределенности.

Result: интервал неопределенности – подынтервал интервала $[a, b]$, содержащий min и такой, что его длина не превосходит ϵ.

$\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ($\alpha = \frac{1}{\phi^2}$, где ϕ – золотое сечение);
if $b - a \leq eps$ **then**
    return $[a, b]$
end
$a_k = a, b_k = b$ - текущий интервал поиска min;
$interval\_length = b_k - a_k$;
$\lambda_k = a_k + \alpha \cdot interval\_length$;
$\mu_k = b_k - \alpha \cdot interval\_length$;
$f_{\lambda_k} = f(\lambda_k)$;
$f_{\mu_k} = f(\mu_k)$;
while $interval\_length > \epsilon$ **do**
    if $f_{\lambda_k} < f_{\mu_k}$ **then**
        $b_k = \mu_k$;
        $\mu_k = \lambda_k$;
        $f_{\mu_k} = f_{\lambda_k}$;
        $interval\_length = b_k - a_k$;
        $\lambda_k = a_k + \alpha * interval\_length$;
        $f_{\lambda_k} = f(\lambda_k)$;
    end
    else
        $a_k = \lambda_k$;
        $\lambda_k = \mu_k$;
        $f_{\lambda_k} = f(\lambda_k)$;
        $interval\_length = b_k - a_k$;
        $\mu_k = b_k - \alpha \cdot interval\_length$;
        $f_{\mu_k} = f(\mu_k)$;
    end
end
if $f_{\lambda_k} < f_{\mu_k}$ **then**
    return $[a_k, \mu_k]$
end
return $[\lambda_k, b_k]$;

Из метода можно так же выходить, используя счетчик, а не текущую оценку длины интервала неопределенности. Оценим количество итераций в цикле while, требуемое для достижения заданной точности: $|[a_{k+1}, b_{k+1}]| = b_{k+1} - a_{k+1} =$ (заметим тут, что длина интервала неопределенности на каждом следующем шаге не зависит от результата сравнения, поэтому, не умаляя общности, пусть $[a_{k+1}, b_{k+1}] \to [a_k, \mu_k]) = \mu_k - a_k = b_k - (b_k - a_k)\alpha - a_k = (b_k - a_k) - \alpha(b_k - a_k) = (b_k - a_k)(1 - \alpha) = (b_{k-1} - a_{k-1})(1 - \alpha)^2 = ...$
Таким образом, на каждом шаге длина интервала поиска минимума уменьшается в
$(1 - \alpha) = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618033$ раз.
Тогда

$$\epsilon(n) = (b - a) \cdots (1 - \alpha)^n = (b - a) \cdots 618033^n$$

Количество итераций может быть найдено, как целое число, большее n:

$$n(\epsilon) = \frac{ln[\epsilon/(b - a)]}{ln[0.618033]}$$

Теоретическое же количество обращений к вычислению функции для достижения заданной величины интервала неопределенности будет на два больше, чем количество итераций в цикле - см. строки 9, 10 алгоритма.
Замечание: Для контроля количества обращений к функции была написана функция-декоратор. Декоратор считает количество вызовов функции и записывает в атрибут ncalls.

3.2 Метод Фибоначчи

1. Выбираем допустимую конечную длину интервала неопределенности l и константу различимости ϵ

2. Выбираем общее число вычислений функции n так, что $F_n > \frac{b-a}{l}$

3. Положим $\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b - a)$ и $\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b - a)$

4. Вычислим значения функции в точках λ_1 и μ_1

5. Положим k = 1

6. Если значение функции в точке λ_k больше, чем в точке μ_k перейдем к пункту 7, иначе к пункту 8

7. Положим $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}$
   Если k = n - 2, то перейдем к пункту 10, иначе вычисляем функцию в точке μ_{k+1} и переходим к пункту 9

8. Положим $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$, $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}$
   Если k = n - 2, то перейдем к пункту 10, иначе вычисляем функцию в точке μ_{k+1} и переходим к пункту 9

9. Заменяем k на k+1 и переходим к пункту 6

10. Положим $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, $\mu_n = \lambda_n + \epsilon$. Если функция в точке λ_n равна функции в точке μ_n, то положим $a_n = \lambda_n$, $b_n = b_{n-1}$, иначе $a_n = a_{n-1}$, $b_n = \mu_n$. Повторяем пока заданный интервал неопределенности не удовлетворяет заданной точности.

4 Результаты решения задачи

Рассмотрим функцию
$f(x) = sin(\pi x) + cos(\pi x)$ на промежутке ее унимодальности $[a, b] = [0, 2]$.

ϵ	число обращений	длина интервала неопределенности
0.1	9	0.04
0.01	14	0.004
0.001	18	0.0006

Таблица 1: Метод Золотого сечения.

Для метода золотого сечения теоретически оценнненное количетво обращений к функции в точности совпало с полученным для данной функции.

ϵ	число обращений	длина интервала неопределенности
0.1	9	0.06
0.01	14	0.005
0.001	19	0.0005

Таблица 2: Метод Фибоначчи.

5 Оценка достоверности полученного результата

Найдем аналитически минимум путем дифференцирования: $f(x) = sin(\pi x) + cos(\pi x)$, $[a, b] = [0, 2] \to x_{min} = 1.25$. Подтвердим результат графически:

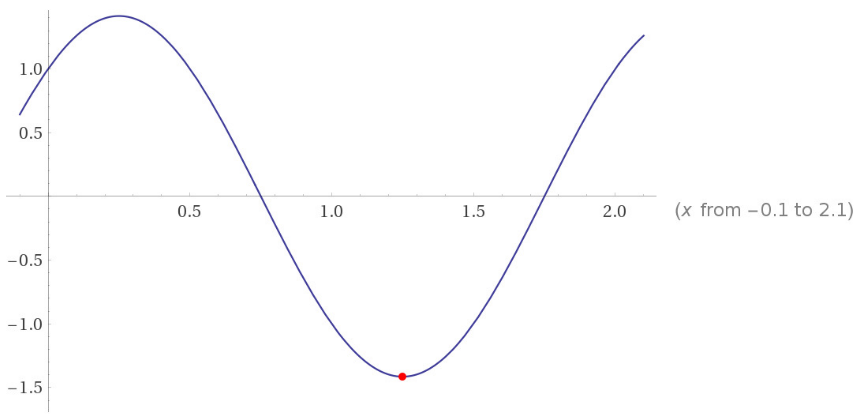

Рис. 1: $f(x) = sin(\pi x) + cos(\pi x)$

Убедимся, что истинный минимум на промежутке действительно принадлежит интервалам неопределенности для всех исследуемых значений ϵ.

ϵ	интервал неопределенности
0.1	[1.24 1.28]
0.01	[1.248 1.252]
0.001	[1.2497 1.2503]

Таблица 3: Метод Золотого сечения, интервалы неопределенности.

ϵ	интервал неопределенности
0.1	[1.23, 1.29]
0.01	[1.252, 1.257]
0.001	[1.2499 1.2504]

Таблица 4: Метод Фибоначчи, интервалы неопределенности.

x_{min} лежит в полученных интервалах неопределенности – методы работают корректно!