Алгоритм симплекс-метода

1. Вход: $x_0[N]$, $A[M,N]$, $b[M]$, $c[N]$, N_k, $B[N_0,M]$

где A, b, c – параметры задачи $c^T x \to \min,\ x \in S$,
$S := \{x \geq 0 \mid Ax = b\}$
$x_0[N]$ – опорный вектор к множеству S
N_0 – индексы базисных столбцов x_0, $N_0 \subset N$
$B[N_0, M] : B[N_0, M] \cdot A[M, N_0] = E$

2. Введём $N_k^0 := \{ i \in N_k \mid x_k[i] = 0 \}$ (вначале $k=0$, $x_k = x_0$, $N_k = N_0$)
$N_k^+ := \{ i \in N_k \mid x_k[i] > 0 \}$

$$bg := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \multicolumn{3}{c}{\left(bg_{i-1,j} + bg_{i,j-1} \right)} \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_{m-|N_k^+|} \Bigg\} |N_k^+|$$

– повёрнутый на 45° участок треугольника Паскаля. В каждой ячейке $bg_{ij} = C_i^j$, в левом нижнем углу $C_{|N_k^+|}^{m-|N_k^+|}$

3. В цикле для каждого binomIdx от 0 до $C_{|N_k^+|}^{m-|N_k^+|}$:

3а. Ищем индексы $N_k \subset N, L_k \subset N : N = N_k \cap L_k$; $N_k \supset N_k^+$; $N_k = m$;
N_k отличается от N_{k-1} только одним индексом.
Для этого запускаем процедуру subsetByIndex, положив её параметры
$bg = bg$, $i = binomIdx$, $M = N \setminus N_k^+ = N_k^0$
] её результат $\tilde{N}_k^0 \Rightarrow N_k := N_k^+ \cup \tilde{N}_k^0$
$L_k := N \setminus N_k$

3б. Если определитель $\det(A[M, N_k]) = 0$, переходим к следующему 'binomIdx', т.к. текущие индексы не могут быть ~~базисными~~ индексами базисных столбцов о. в.

3в. Если binomIdx $= 0$, нам известна $B[N_0, M]$. В иначе случае ищем $B[N_k, M]$, опираясь на $u_{k-1}[N_{k-1}]$:

3.в.I. Положим i_k := "№ индекса в N_k, изменённый по сравнению с N_{k-1}"

3.в.II. Строим

$$F[N_k, N_{k-1}] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -u_k[1]/u_k[i_k] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -u_k[j_k-1]/u_k[i_k] & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1/u_k[i_k] & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -u_k[j_k+1]/u_k[i_k] & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -u_k[m]/u_k[i_k] & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.в.III. $B[N_k, M] := F[N_k, N_{k-1}] \cdot B[N_{k-1}, M]$

3.г. Находим векторы $y_k[M] := B^T[N_k, M] \cdot c[N_k]$

$d_k[N] := c[N] - A^T[M, N] \cdot y_k[M]$

3.д. Если $d_k[i] \geq 0 \ \forall i \in L_k$, то x_k – решение (завершаем алгоритм).

3е. $< j_k :=$ " первый индекс из L_k : $d_k[j_k] < 0$

~~u_k~~ $u_k[N_k] := B[N_k, M] \cdot A[M, j_k]$

3ж. Если $u_k[N_k]$ не содержит положительных компонент, останавливаем процесс: целевая функция $c^T[N] \cdot x[N]$ не ограничена снизу

3з. Если $N_k^+ = N_k$ (о.в. невырожденный) или $u_k[N_k \setminus N_k^+] \leq 0$:

3.з.I. $\theta_k := \min\limits_{i \in N_k,\ u_k[i] > 0} \dfrac{x_k[i]}{u_k[i]}$

3.з.II. Дополним $u_k[N_k]$ до $u_k[N]$ так:

$u_k[j_k] = -1$

$u_k[L_k \setminus j_k] := 0$

$x_{k+1}[N] := x_k[N] - \theta_k u_k[N]$

3.з.III. Устанавливаем $k := k+1$ и переходим к шагу (2).

Вспомогательные процедуры

- SubsetByIndex:

1. Вход: таблица биномиальных коэффициентов $bg = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (bg_{ij}) & \\ 1 & & \end{bmatrix}}_{k+1} \Big\}^{n-k+1}$, $bg_{ij} = bg_{i-1j} + bg_{ij-1}$, $n \geq k$

   индекс $idx \in \{0;\ C_n^k - 1\}$ – номер подмножества

   упорядоченное мн-во (массив) эл-тов $M : |M| = n$

2. Обходим матрицу `bg`, начиная в левом нижнем углу. Объявим

   $t := idx$
   $i := n - k$
   $j := k$
   $res := \{\varnothing\}$

3. В цикле до тех пор, пока $j > 0$:

   3.а. Если $t < bg[i, j-1]$:

   3.а.1. добавляем $M[i+j-1]$ в `res`

   3.а.2. $j := j - 1$ (переходим в клетку правее)

   3.б. Иначе:

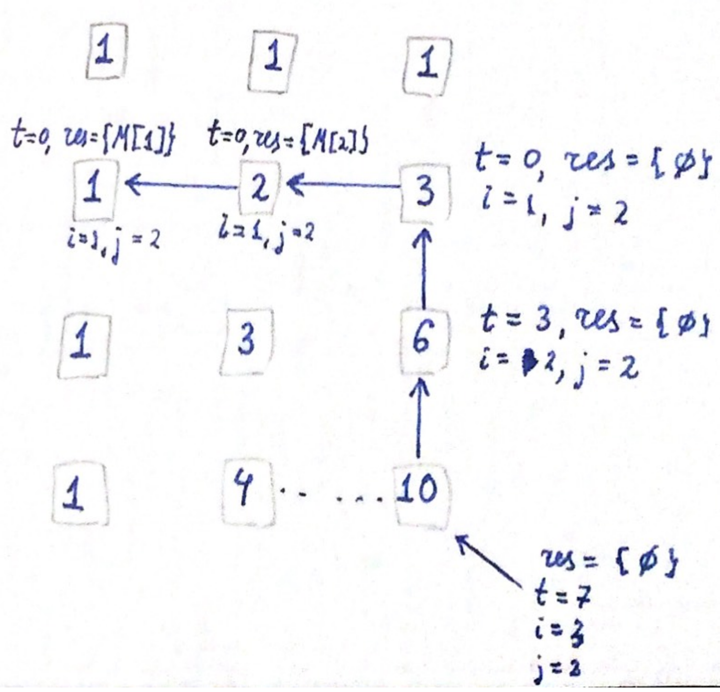
   3.б.1. $t := t - bg[i, j-1]$
   $t := t - 1$

4. Возвращаем `res`

- Пример работы:

  ~~$n = 4$, $k = 3$, $idx = 7$~~

  $n = 5$
  $k = 2$
  $idx = 7$



Алгоритм выбора начального приближения

Вход: $\begin{cases} A[M,N] \\ b[M] \\ c[N] \end{cases}$ – параметры задачи $c^T[N] \cdot x[N] \to \min,$
$x \in S := \{x[N] \geq 0 \mid A[M,N] \cdot x[N] = b[M]\}$

1. Строим $\bar{A} := (A[M,N] \vdots E[M,M])$, где $E[M,M]$ - идентичная матрица

$$\bar{c} := (\underbrace{0 \dots 0}_{n} \; \underbrace{1 \dots 1}_{m})$$

2. Если $b[M]$ содержит отрицательные компоненты, умножаем соответствующие строки системы $(\bar{A} \mid b)$ на -1.

3. Строим $\bar{x}_0 := \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n \\ b[M] \end{pmatrix}$ - опорный вектор к $\bar{S} = \{\bar{x} \geq 0 \mid \bar{A}\bar{x} = b\}$

$$\bar{B}_0 := E[M,M]$$

4.

4а. Решаем задачу $\min\limits_{x \in \bar{S}} \bar{c}^T \bar{x}$ симплекс-методом.

Пусть решение - $\bar{x}_*$, а $\bar{N}_*$ -соответствующее множество индексов базисных столбцов $\bar{A}$.

$<$ $x_* := \bar{x}_*[N]$, $N_* := \bar{N}_* \cap N$

4б. Если $N_* = N_+ := \{i \mid x_*[i] > 0\}$, то x_* можно взять в качестве искомого начального приближения.

4в. Если $N_* \supset N_+$ ($x[N]$ - несобственный о.в.):

4.в.I. Выделяем подмножество индексов $L := N \setminus N_+$

4.в.II. Строим биномиальную таблицу вд: в ~~левом~~ правом нижнем углу число $C_{|L|}^{|M|-|N_+|}$ (см. шаг (2) симплекс-метода).

4.в.III. Повторяем шаг (3) алгоритма симплекс-метода, используя эту биномиальную таблицу и индексы L в качестве множества индексов, которыми дополняем A_k.

Затем возвращаемся к (4б).