Изучение задачи параметрического программирования

Базанов Дмитрий и Лихобаба Даниил, Б03-903

8 мая 2021 г.

В данном документе мы представляем результаты исследования проблематики численного решения задачи параметрического программирования.

1 Сходящаяся задача

Первое, что мы решили сделать, исследуя решение задачи - попробовать сделать расчет в другой среде, нежели MathCad. Нами был выбран язык программирования Python. В документе, который нам предоставил Умнов А.Е. есть частный вариант задачи с определёнными параметрами, который мы и будем считать. В численном расчете задачи применяется метод Крылова.
Частная задача:

$$\begin{cases} -6 + \xi_1 + 2\xi_2 = \tau \ln \lambda_1 \\ -6 + 2\xi_1 + \xi_2 = \tau \ln \lambda_2 \\ -2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = -\tau \ln \xi_1 \\ -3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = -\tau \ln \xi_2 \end{cases}$$

Для этой системы наш расчет даёт хорошие результаты, правильно сходящиеся с теоретическими и согласующиеся с результатми Умнова А.Е.($\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, \lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}$).

Наши результаты при $\tau = 0.01$ и начальных условиях $\xi_1^0 = \xi_2^*0 = \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 1$:

```
Solution:
 [1.99917129 2.00055811 1.33310196 0.33310265]
Krylov method iteration =  3
```

Рис. 1: Результат работы программы для сходящейся системы.

Итак, мы знаем, что есть класс таких систем, обладающих свойством сходимости при достаточно далёких от истинных начальных значениям, так же наша система сходится всего за 3 итерации. Интересно было бы посмотреть, как ведет себя невязка решений в зависимости от параметра τ при все тех же начальных условиях. Построим график:

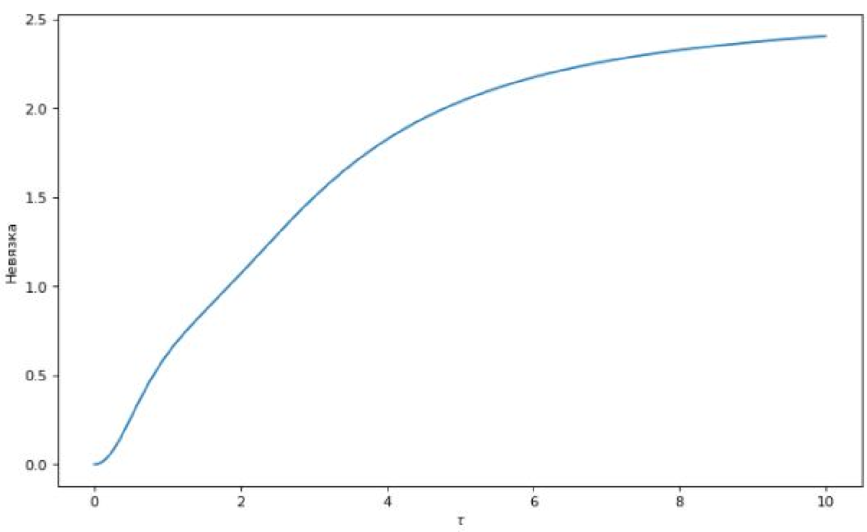

Рис. 2: Зависимость невязки от параметра τ.

Невязкой мы считаем сумму квадратов корней отклонений получившихся значений от истинных. Судя по графику, точность решения напрямую зависит от того, насколько мал параметр τ.

2 Несходящаяся задача

Рассмотрим задачу с изменёнными параметрами, которая так же описана в документе Умнова А.Е.:

$$\begin{cases} \text{- } 6 + \xi_1 + 2\xi_2 = \tau \ln \lambda_1 \\ \text{- } 6 + 2\xi_1 + \xi_2 = \tau \ln \lambda_2 \\ \text{- } 4 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = -\tau \ln \xi_1 \\ \text{- } 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = -\tau \ln \xi_2 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь мы сталкиваемся с аналогичной проблемой. Значение под логарифмом в правой части системы в одном из уравнений становится отрицательным при итерировании. Истинные решения системы должны быть: $(\xi_1^* = 3, \xi_2^* = 0, \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 2)$. Ошибка получена при тех же начальных условиях, что и в первой системе: $\xi_1^0 = \xi_2^0 = \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 1$.

Попробуем подобрать другие начальные значения: $\xi_1^0 = 2.995, \xi_2^0 = 0.01, \lambda_1^0 = 0.01, \lambda_2^0 = 1.995$. В этом случае мы так же получаем ошибку. Предположим, что значения второй и третьей переменных, которые близки к нулю, и в процессе итерирования мы "случайно"уходим в отрицательные октанты. Возьмем $\xi_1^0 = 2.995, \xi_2^0 = 0.1, \lambda_1^0 = 0.1, \lambda_2^0 = 1.995$, то есть 2-ю и 3-ю переменные возьмем в 10 раз больше. В этом случае мы получаем очень далёкие от правды решения, при чём если мы берем $\tau < 0.75$, то снова попадам в отрицательные значения под логарифмом:

```
Solution:
 [2.90999548 0.51779494 0.12816784 1.40184032]
Krylov method iteration =  6
```

Рис. 3: Решение не сходится.

3 Модули

Также в вышеупомянутом документе есть предположение о возможности помещения переменных в системах под знаки модулей. То есть будем исследовать систему вида:

$$\begin{cases} \text{- } 6 + |\xi_1| + 2|\xi_2| = \tau \ln |\lambda_1| \\ \text{- } 6 + 2|\xi_1| + |\xi_2| = \tau \ln |\lambda_2| \\ \text{- } 4 + |\lambda_1| + 2|\lambda_2| = -\tau \ln |\xi_1| \\ \text{- } 1 + 2|\lambda_1| + |\lambda_2| = -\tau \ln |\xi_2| \end{cases} \tag{2}$$

Аналогично "хорошей"системе посмотрим невязку в зависимсоти от параметра τ. Здесь нас и ожидает нечто интересное. Солвер решал модикацию задачи с модулями. Когда мы берем модули от переменных, сходимость может произойти в разных октантах, и тогда вместо того, чтобы компонент в сумме формулы невязки обнулился, происходит увеличение значение в 2 раза. Это было так же идеологически показано в исходном документе. Вот, что мы получаем, если никак не боремся с этой проблемой:

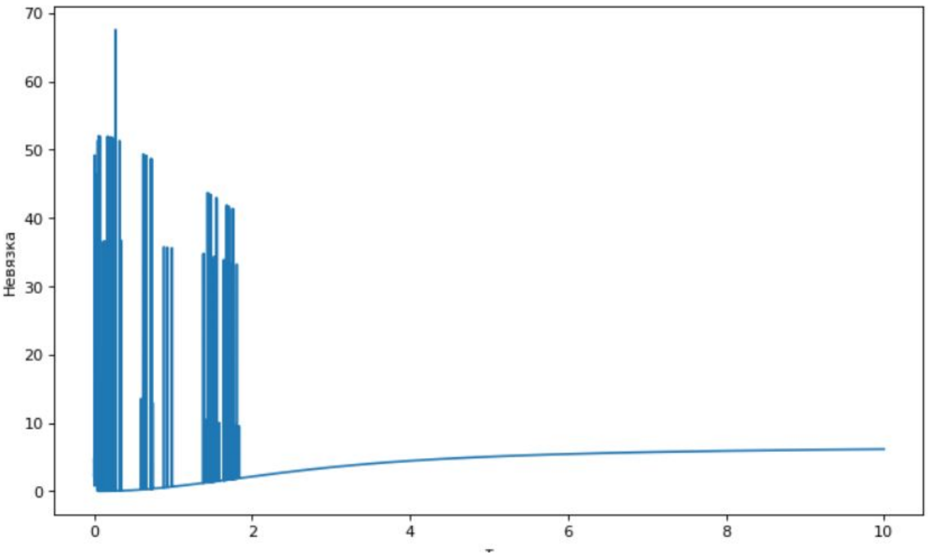

Рис. 4: Резкое увеличение значения невязки в зависимости от τ при схождении задачи в разных октантах

3.1 Устранение проблемы отрицательных координат при сходимости

Устраним эту проблему посредством взятия модуля от посчитанных солвером координат и запустим расчет ещё раз:

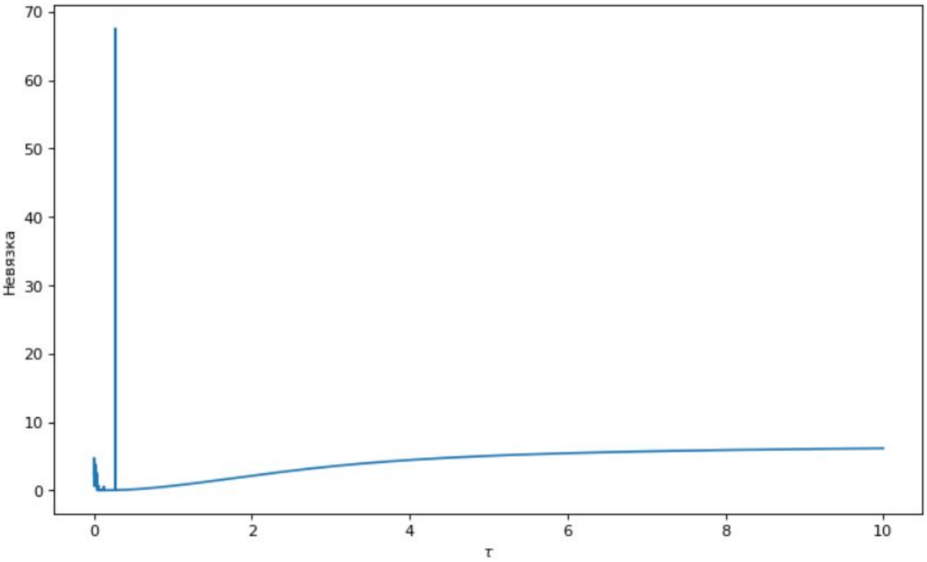

Рис. 5: Устранение проблемы сходимости в разных октантах из-за модулей

Здесь, очевидно, самым интересным моментом является очень резкий "выстрел"значения невязки для определённого τ. Было найдено, что этим значением является $\tau_0 = 0.271$ и невязка в этом случае равна 67.522. Вернёмся к исследованию этих значений позже, а пока рассмотрим график, иключив эту необычную точку:

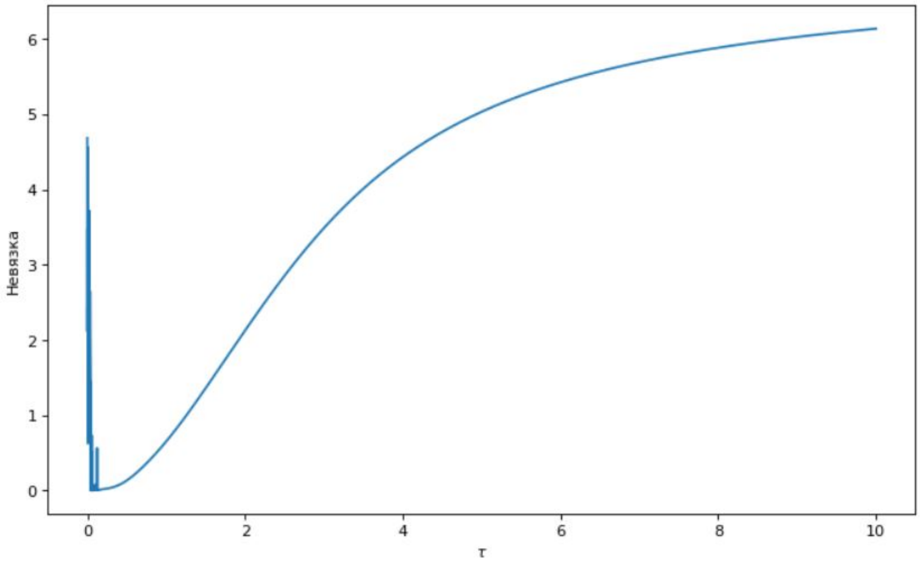

Рис. 6: Без "критической"точки

Как и в случае первой(сходящейся) системы, бессмысленно рассматривать значения $\tau > 1$. Посмотрим ближе график в диапазоне $[0; 1]$:

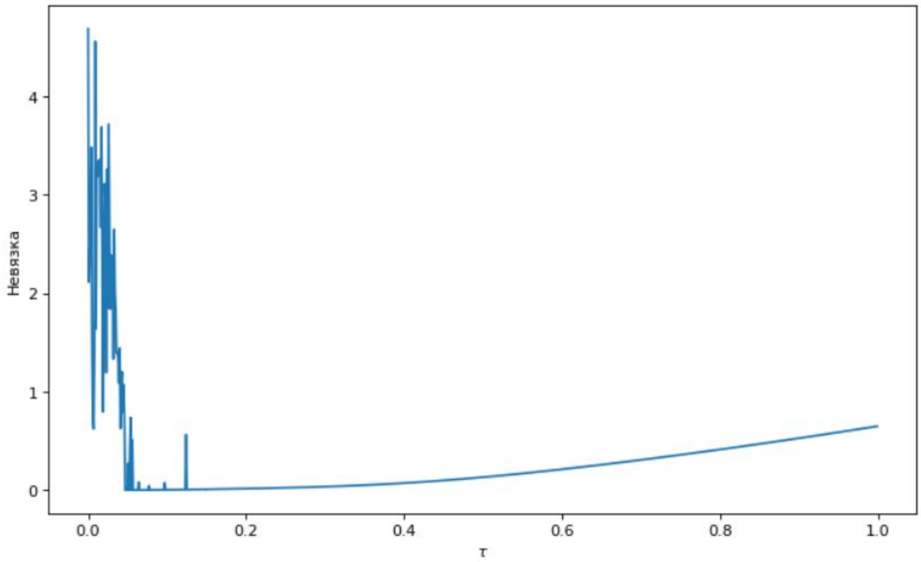

Рис. 7: Нужный участок

Интересно, что до определённого значения τ, невязка принимает большие значения, далее становясь маленькой. Рассмотрим все большие значения очень близко. На этом графике мы использовали в 100 раз меньший шаг, нежели в предыдщих, поэтому картинка несколько другая, но тенденция увеличения невязки при малых значения τ в этом классе систем точно имеет место быть:

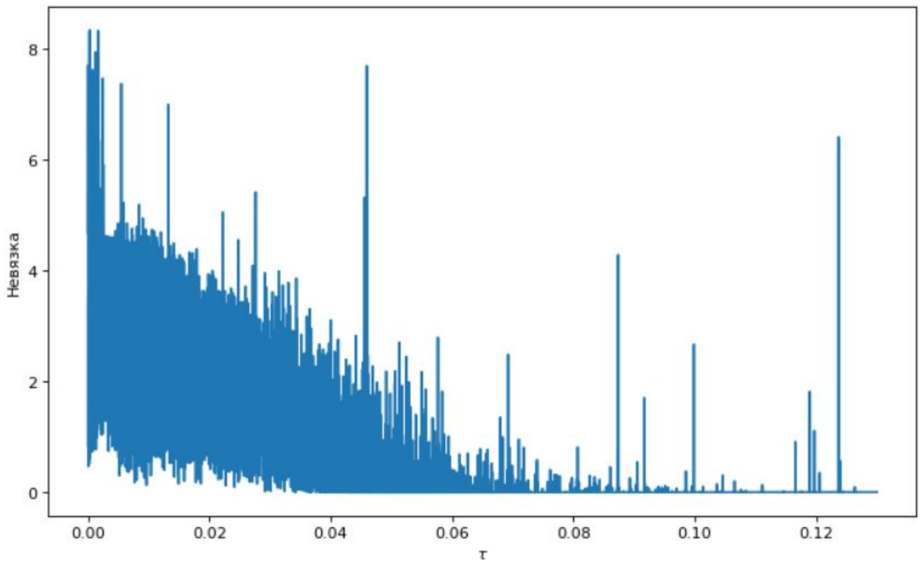

Рис. 8: Нужный участок

3.1.1 Близкие начальные условия

Сильно приблизим начальные точки решателя к искомым и проделаем ту же операцию. Начальные точки в данном случае: $\xi_1^0 = 2.995, \xi_2^0 = 0.01, \lambda_1^0 = 0.01, \lambda_2^0 = 1.995$. В данном случае картина будет выглядеть следующим образом. Ясно видно, что графики в случае далёких начальных точек сильно схожи с случаем приближения начальных точек к искомым.

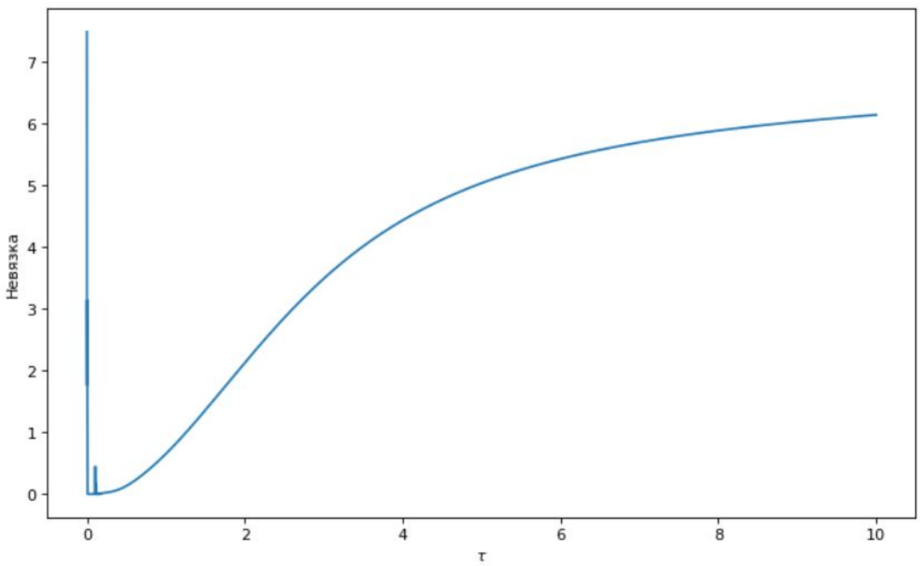

Рис. 9: Тот же график, но начальные значения сильно приближены к искомым

Приблизим искомый участок:

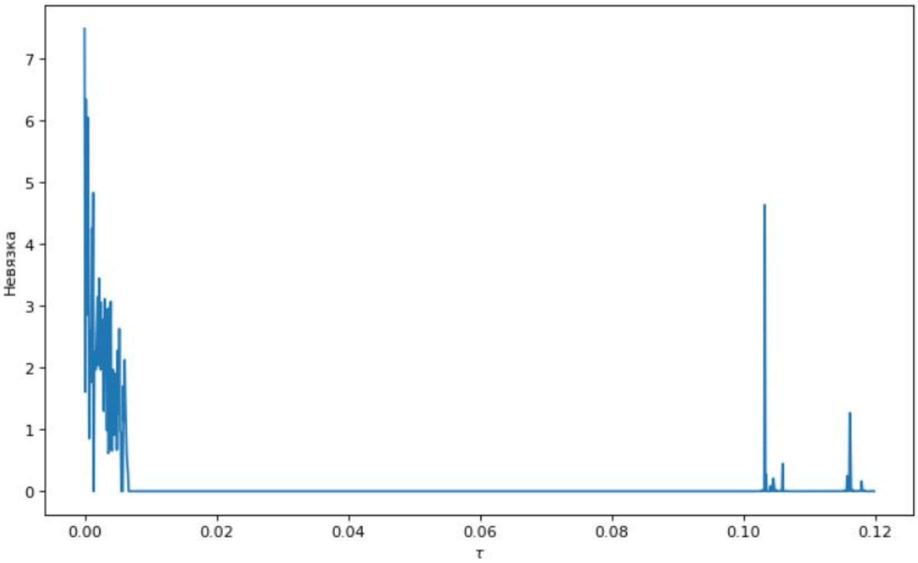

Рис. 10: Близкие к искомым точки, увеличенный масштаб

Сейчас можно сделать вывод, что в целом зависимость невязки от τ - это фактор лишь системы и ее параметров, но не начальных значений решателя.

3.2 Зависимость невязки от τ при различных методах решения

Возможно, зависимость невязки от τ – особенность метода решения системы. Проверим это предположение, используя метод Пауэлла, Андерсона и вышеупомянутый метод Крылова решения систем нелинейных уравнений. Также далее будут использованы, как и ранее, начальные точки $\xi_1^0 = 2.995, \xi_2^0 = 0.01, \lambda_1^0 = 0.01, \lambda_2^0 = 1.995$. Будем смотреть малые значения параметра, как на рис. 9.

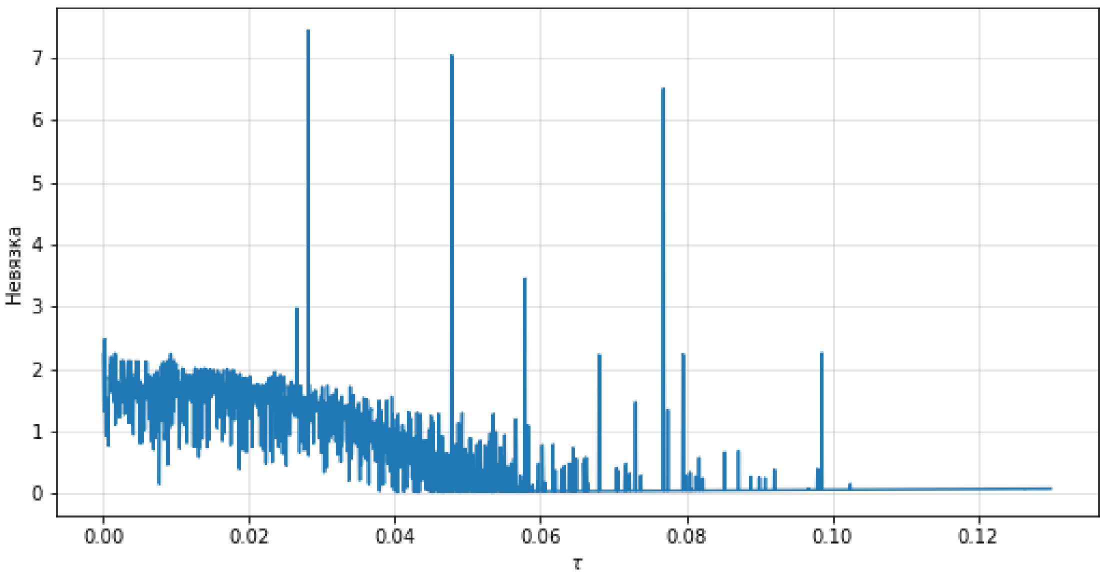

Рис. 11: Невязка от τ, метод Пауэлла

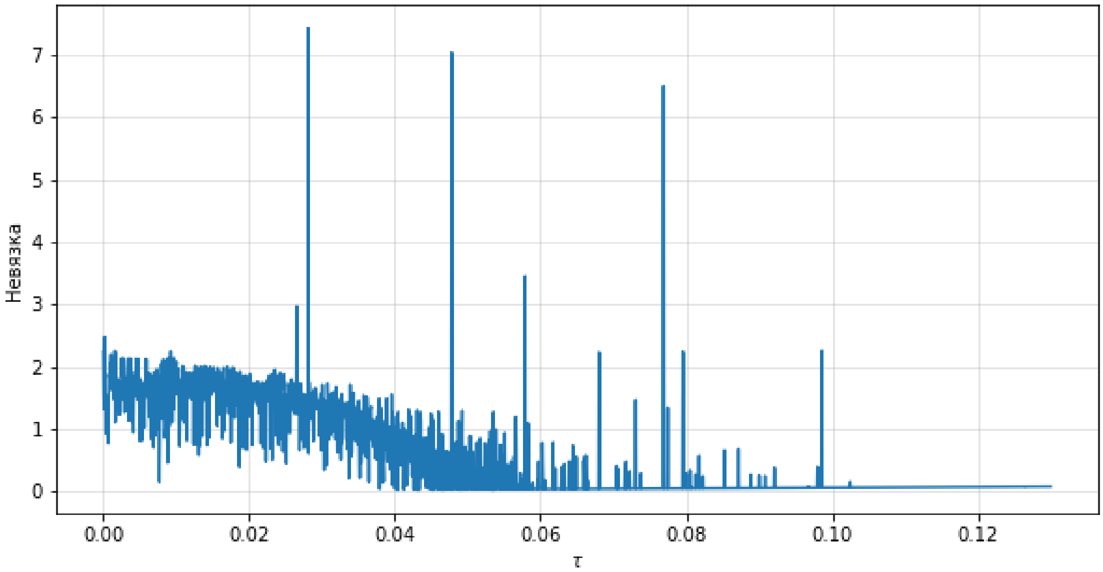

Рис. 12: Невязка от τ, метод Андерсона

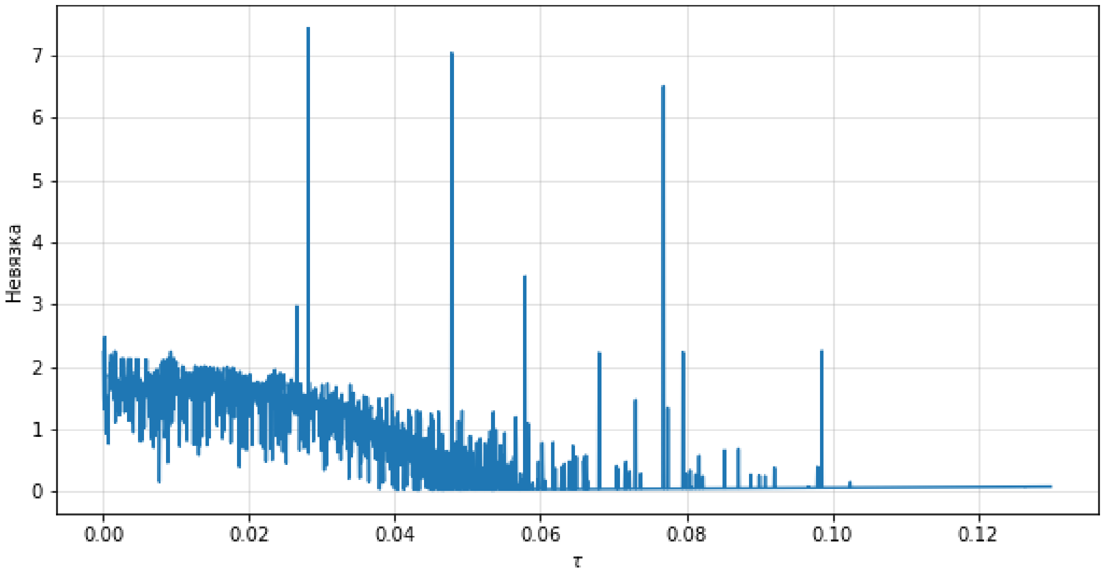

Рис. 13: Невязка от τ, метод Крылова

Получили обсолютно одинаковые зависимости. Выходит, что это особенность самой задачи – системы, начальных параметров, а не алгоритма решения.

4 Вывод

В данной работе мы исследовали численные решения систем параметричского программирования, роль параметра τ, а также начальных условий. Мы пришли к выводу, что успешность решения и сходимость алгоритма скорее зависит от начальных коэффициентов при переменных в системе, нежели от параметра τ и начальных значений искомых переменных. При исследовании зависимости невязки системы от параметра τ было выявлено, что глобально с его ростом невязка увеличивается. Но куда интереснее "выбросы"невязки ближе к $\tau = 0$ у определённых систем, сходимость которых очень сильно зависит от τ.

Также была проверена адекватность идеи использовать модули – в этом случае всё работает корректно, хотя нужно учитывать особенности поведения в разных октантах. Для проверки корректности непосредственно метода численного решения были реализованы алгоритмы вычислений с помощью метода Крылова, метода Андерсона и метода Пауэлла. Все три решателя дали одинаковые результаты. Это опять же говорит о факте зависимости сходимости решения от конфигурации самой системы.

Далее в таком подходе к решению задачи можно каким-либо методом исследовать метрики различиия коэффициентов систем, их поведение в зависимости от параметров, выявления классов систем в зависимости от решений и сходимости, если эти классы действительно существуют, а адекатность решений не хаотически распределена в пространстве коэффициентов систем.