IEEE 754 Fließkommazahlen

$$\boxed{x = (-1)^s \cdot (1+m) \cdot 2^{c-\text{off}}}$$

	Bezeichnung	single	double
s	Vorzeichen	1 bit	
$1+m$	Mantisse	23 bit	52 bit
c	Charakteristik	8 bit	11 bit
off	Offset	127	1023
e	Exponent	$e = c - \text{off}$	

$\pm$	Charakteristik c	m: Nachkommastellen der Mantisse

Lösung nichtlinearer Gleichungen

Intervallschachtelung	Newtonverfahren	Sekantenverfahren
$p_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

Polynominterpolation

- Gegeben: $n+1$ Datenpunkte $(x_0|y_0), \dots, (x_n|y_n)$
- Gesucht: $n+1$ Parameter des Polynoms $P(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n$

Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde Matrix } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\vec{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

Lösung

$$\boxed{\vec{c} = A^{-1} \cdot \vec{y}}$$

Polynomapproximation

- Gegeben: $n > (m+1)$ Datenpunkte $(x_1|y_1), \dots, (x_n|y_n)$
- Gesucht: $m+1$ Parameter des Polynoms $P(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m$

Matrixschreibweise (überbestimmtes LGS)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^m \\ 1 & x_4 & x_4^2 & \cdots & x_4^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde Matrix } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{\vec{c}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}}_{\vec{e}}$$

Quadratisches Gütemaß

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \vec{e}^T \cdot \vec{e} \to \min$$

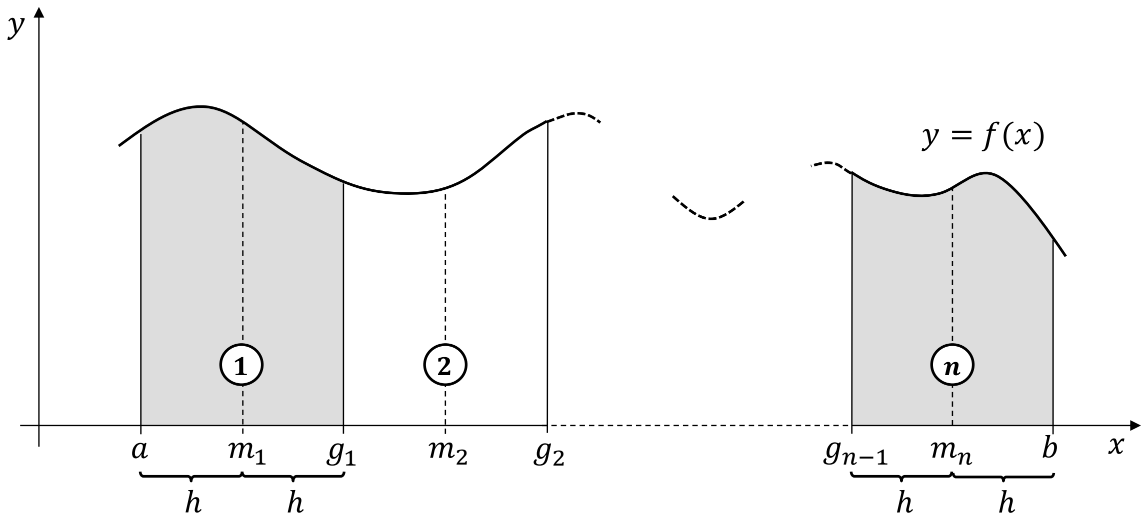
Eindeutig lösbares LGS: $\boxed{A^T A \cdot \vec{c} = A^T \cdot \vec{y}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{c} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}}$

Einfache Quadraturverfahren

Näherung für $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ Intervallmitte: $m = \dfrac{a+b}{2}$

Mittelpunktsregel	Trapezregel	Simpsonsche Regel
$(b-a)\cdot f(m)$	$\dfrac{b-a}{2}\cdot\big(f(a)+f(b)\big)$	$\dfrac{b-a}{6}\cdot\big(f(a)+4\cdot f(m)+f(b)\big)$

Zusammengesetzte Quadraturverfahren



$$I = \int_a^{g_1} f(x)\,dx + \int_{g_1}^{g_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{g_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$$

- Mittelpunktsregel: $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(m_i)$
- Trapezregel: $\dfrac{b-a}{2\,n}\left(f(a)+2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} f(g_i)+f(b)\right)$
- Simpsonsche Regel: $\dfrac{b-a}{6\,n}\left(f(a)+2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} f(g_i)+4\sum_{i=1}^{n} f(m_i)+f(b)\right)$

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Differentialgleichung $\dot{y}(t) = \dfrac{dy}{dt} = f\big(t, y(t)\big)$

Diskretisierung $t[k] = t_0 + k\cdot h, \qquad y[k] = y(t_0 + k\cdot h)$

Euler-Verfahren $y[k+1] = y[k] + h\cdot f(t[k], y[k])$