**Fakultät für Technik**
**Bereich Informationstechnik**

# Labor Rechnergestützte Mathematik

# Versuch 3

# Differentialgleichungen

# Laboranleitung

Prof. Dr.-Ing. Stefan Hillenbrand
Yvonne Beck, M.Sc.
Version 2021.1

**Inhaltsverzeichnis**

# 1 Versuchsdurchführung

## 1.1 VOR dem Labor

- Arbeiten Sie diese Laboranleitung komplett gründlich durch.
- Ziehen Sie bei Bedarf Ihre Vorlesungsmitschriften oder weitere Literatur zu Rate.
- **Bearbeiten Sie die gelb markierte Aufgaben 1, 2, 3, 4, 7, 8 und 9. Bringen Sie Ihre Ergebnisse mit ins Labor:**
    - **Saubere handschriftliche Rechnungen / Skizzen für Aufgaben 1, 2,4, 7, und 9**
    - **Skripte und Funktionen für die Programmieraufgaben 3 und 8.**
- **Stellen Sie sicher, dass Sie die Inhalte aus den Versuchen 1 und 2 beherrschen.**
- **Zur Vorbereitung gehört auch, dass Sie die in der Anleitung erwähnten mathematischen Grundlagen wiederholen, falls Sie diese nicht mehr präsent haben!**
- Notieren Sie alle Fragen, die während der Vorbereitung oder bei der Bearbeitung der Aufgaben aufgekommen sind, damit diese dann im Labor auch alle angesprochen und geklärt werden können.

**Die Vorbereitung wird zu Beginn des Versuches kontrolliert.**
**Wenn Sie nicht vorbereitet sind, können Sie den Versuch nicht bestehen!**

## 1.1 WÄHREND des Labors

- Starten Sie den Rechner, erstellen Sie einen Arbeitsordner auf der Festplatte, laden Sie die ZIP-Datei zum Labor von der Laborseite herunter und entpacken Sie darin enthalten Daten.
- Beteiligen Sie sich an der Diskussion. Es gibt fast immer mehrere richtige Lösungen!
- Speichern Sie regelmäßig Ihre Ergebnisse. Verwenden Sie für verschiedene Aufgaben oder Lösungswege eigene Dateinamen.
- Machen Sie sich Notizen!

## 1.2 NACH dem Labor

- Sichern Sie Ihre Arbeitsergebnisse auf Ihrem persönlichen Bereich des Netzlaufwerks oder auf einem USB-Stick. Die Festplatte des Laborrechners ist dafür nicht geeignet.
- Stellen Sie sicher, dass Sie den in im Labor gelernten Stoff beherrschen. Hierfür kann es notwendig sein, dass Sie einen Teil der Versuche nochmals nachzuvollziehen müssen. Bedenken Sie, dass die numerische Lösung von Differentialgleichungen auch Inhalt der Vorlesung und damit der Klausur Rechnergestützte Mathematik ist.

## 2 Einleitung

Zum Abschluss des Labors Rechnergestützte Mathematik wird mit dem Pendel ein einfaches technisches System mithilfe von MATLAB / Octave untersucht. Wie in der Ingenieurpraxis üblich, werden wir das Problem

- sowohl von der praktischen Seite durch Auswerten von Messungen
- als auch von der mathematischen Seite durch Simulation der Pendelbewegung

untersuchen.

## 3 Pendel

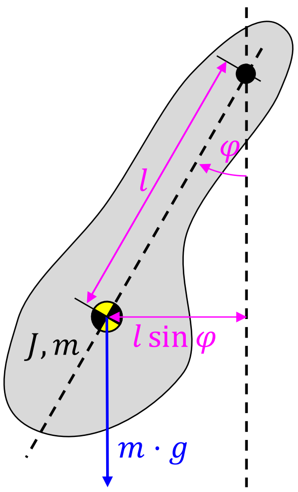
Grundlage sowohl für die Interpretation der Messungen als auch für die Simulation der Pendelbewegung ist ein mathematisches Modell des Pendels. Arbeiten Sie die Herleitung der Differentialgleichung des Pendels sowie die Aufgaben zur Lösung der vereinfachten Differentialgleichung vor dem Labortermin gründlich durch. **Es wird erwartet, dass Sie sich hierfür bei Bedarf die physikalischen Grundlagen der Drehbewegung und des Pendels mit der Literatur (z. B. [4]) selbständig erarbeiten.**

### 3.1 Differentialgleichung des Pendels

#### 3.1.1 Physikalisches Pendel

Die Differentialgleichung des in Abbildung 1 gezeigten physikalischen Pendels kann einfach aus der Bewegungsgleichung hergeleitet werden.

**Physikalisches Pendel**




**Bewegungsgleichung** $J \cdot \ddot{\varphi}(t) = -M_g(t) - M_d(t)$

$J$: Massenträgheitsmoment

- Moment aus Schwerkraft $M_g(t) = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\big(\varphi(t)\big)$

$m$: Masse des Pendels
g: Schwerebeschleunigung
$l$: Abstand Drehpunkt - Schwerpunkt

- Dämpfungsmoment $M_d(t) = d \cdot \dot{\varphi}(t)$

$d$: Dämpfungskonstante

**Abbildung 1: Physikalisches Pendel mit Gleichungen**

Bei einer geradlinigen Bewegung gilt $F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$, das heißt das Produkt aus der Masse $m$ und der Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte. Ganz entsprechend ist bei der Drehbewegung des Pendels das Produkt aus dessen Massenträgheitsmoment $J$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}(t)$ gleich der Summe der an das Pendel angreifenden Momente $M_g(t)$ und $M_d(t)$.

Mit den Gleichungen aus Abbildung 1 ergibt sich damit die Differentialgleichung des Pendels zu

$$J \cdot \ddot{\varphi}(t) + d \cdot \dot{\varphi}(t) + m \cdot g \cdot l \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0$$

Dividiert man durch das Massenträgheitsmoment $J$, erhält man die folgende nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung als Modell für die Pendelbewegung:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + \frac{d}{J} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{m\,g\,l}{J} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0}$$

Während die Masse $m$ des Pendels in praktischen Anwendungen meist einfach zu ermitteln ist, kann die Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines kompliziert geformten Körpers sehr aufwendig sein. Häufig wird daher das Massenträgheitsmoment experimentell in einem Schwingversuch ermittelt – zum Beispiel bei der Bestimmung der Massenträgheitsmomente eines Autos.

### 3.1.2 Mathematisches Pendel

Aus der Vorlesung Physik oder aus der Schule ist Ihnen vielleicht das in Abbildung 2 gezeigte mathematische Pendel oder Fadenpendel bekannt.

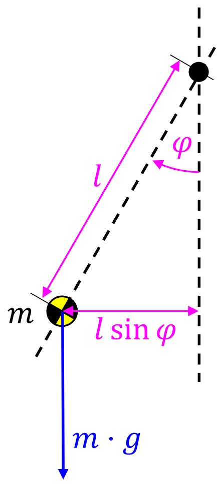



**Abbildung 2: Mathematisches Pendel**

Beim mathematischen Pendel wird vereinfachend angenommen, dass die Masse $m$ in einem Punkt im Abstand $l$ vom Drehpunkt konzentriert und mit einer masselosen Stange mit dem Drehpunkt verbunden ist. Das Massenträgheitsmoment des Massenpunktes um seinen Mittelpunkt ist gleich Null. In der Differentialgleichung wird jedoch das Massenträgheitsmoment um den Drehpunkt des Pendels im Abstand $l$ vom Massenpunkt benötigt. Dieses kann mit dem aus der Physik [4] bekannten Satz von Steiner berechnet werden:

$$J = \underbrace{0}_{\text{Massepunkt}} + \underbrace{m \cdot l^2}_{\text{Satz von Steiner}} = m \cdot l^2$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung des physikalischen Pendels erhält man:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + \frac{d}{m\,l^2} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0}$$

### 3.1.3 Allgemeine Differentialgleichung für die Pendelbewegung

Sowohl das physikalische als auch das mathematische Pendel werden durch eine nichtlineare Differentialgleichung der Form

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + a \cdot \dot{\varphi}(t) + b \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0}$$

beschrieben und unterscheiden sich nur in den Koeffizienten:

- physikalisches Pendel: $a = \frac{d}{J}$ $\quad b = \frac{m\,g\,l}{J}$
- mathematisches Pendel: $a = \frac{d}{m\,l^2}$ $\quad b = \frac{g}{l}$

### 3.1.4 Linearisierung für kleine Auslenkungen

Die nichtlineare Differentialgleichung aus Abschnitt 3.1.3 kann mit den aus der Vorlesung Analysis 2 bekannten mathematischen Werkzeugen wegen des nichtlinearen Ausdrucks $\sin\big(\varphi(t)\big)$ nicht analytisch gelöst werden. In vielen Fällen betrachtet man jedoch nur kleine Auslenkungen $\varphi(t)$. Dann kann mithilfe der aus der Vorlesung Analysis 1 bekannten Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

eine einfachere Näherungsfunktion berechnet werden. Mit $f(x) = \sin(x)$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ folgt:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Für kleine Werte von $x$ kann die Taylorreihe nach dem ersten Glied abgebrochen werden und es ergibt sich die bekannte Näherung

$\sin(x) \approx x$ $\quad$ für kleine Winkel.

Damit erhält man die folgende lineare Differentialgleichung für das Pendel:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + a \cdot \dot{\varphi}(t) + b \cdot \varphi(t) = 0}$$

Je größer der Winkel $\varphi(t)$ ist, desto größer wird die Abweichung zwischen der Näherung und der richtigen Lösung. Als Vorteil steht dem gegenüber, dass diese Differentialgleichung analytisch gelöst werden kann.

Damit ist nun eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung gefunden, die mit den Ihnen aus der Vorlesung Analysis 2 bekannten Methoden und Werkzeugen gelöst werden kann. Da das Pendel sich ausgehend von den Anfangswerten $\varphi(0)$ und $\dot{\varphi}(0)$ selbständig bewegt und nicht z. B. mit einem Elektromotor angetrieben wird, ist die rechte Seite der Differentialgleichung gleich Null. Es gibt somit keine Störfunktion und es handelt sich somit um eine homogene Differentialgleichung.

## 3.2 Lösung der linearisierten Differentialgleichung

### 3.2.1 Ungedämpftes mathematisches Pendel

Zunächst soll der Idealfall eines reibungsfreien und damit ungedämpften mathematischen Pendels untersucht werden. Aus $d = 0$ folgt $a = 0$ und die Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + b \cdot \varphi(t) = 0}$$

**Aufgabe 1: Lösung der Differentialgleichung des ungedämpften mathematischen Pendels**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin!**

Gegeben sind die Differentialgleichung des ungedämpften mathematischen Pendels sowie die Anfangswerte $\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = 0$.

- Berechnen Sie den Verlauf von $\varphi(t)$. Nutzen Sie hierfür keine fertigen Lösungsansätze aus der Literatur, sondern die Lösungsmethoden aus der Vorlesung Analysis 2.
- Rechnen Sie zunächst mit dem allgemeinen Parameter $b$ und setzten Sie erst am Schluss $b = g/l$ ein.
- Geben Sie die Frequenz der Pendelschwingung abhängig von den physikalischen Parametern des Pendels an.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Pendelbewegung.

### 3.2.2 Gedämpftes mathematisches Pendel

**Aufgabe 2: Lösung der Differentialgleichung des gedämpften mathematischen Pendels**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin!**

Gegeben sind die Differentialgleichung des gedämpften mathematischen Pendels

$$\ddot{\varphi}(t) + a \cdot \dot{\varphi}(t) + b \cdot \varphi(t) = 0$$

sowie die Anfangswerte $\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = 0$. Ist die Dämpfung $d$ nicht zu groß, wird sich wieder eine Pendelschwingung einstellen, die jedoch im Laufe der Zeit abklingt. Berechnen Sie für diesen Schwingfall die Lösung der Differentialgleichung und beantworten sie die folgenden Fragen:

- Wie groß darf die Dämpfung $d$ maximal sein, damit das System schwingt?
- Wie groß ist die Frequenz der Schwingung?
- Wie klingt die Amplitude der Schwingung ab?
- Erstellen Sie eine Skizze des prinzipiellen Verlaufs des Winkels $\varphi(t)$.

**Hinweise:** In diesem Fall ist die klassische Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich einfacher als die Lösung mit Laplacetransformation.[1]

Sie können Ihr Ergebnis mit der in Aufgabe 3 angegeben Lösung vergleichen.

[1] Die Laplacetransformation wird in der Vorlesung Analysis 2 behandelt.

### 3.2.3 Zeichnen des Winkelverlaufs

**Aufgabe 3: Zeichnen des berechneten Winkelverlaufs**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin!**

In den letzten beiden Aufgaben haben Sie die Lösung der Differentialgleichung des linearisierten mathematischen Pendels berechnet:

$$\varphi(t) = \varphi_0\, e^{\alpha t}\left(-\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = -\frac{d}{2ml^2}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{d^2}{4m^2l^4}}$$

- Erstellen Sie eine MATLAB–Funktion **`phi = pendel_linear(t, m, l, d)`**, die den Verlauf des Pendelwinkels **`phi`** für den normierten Anfangswert $\varphi_0 = 1$ über dem gegebenen Zeitvektor **`t`** berechnet.
- Schreiben Sie ein MATLAB-Skript **`Plot_pendel.m`**, das den Verlauf des Pendelwinkels für $0 \le t \le 25$ ausgehend von der Anfangsauslenkung $\varphi_0 = 20°$ zeichnet. Wählen Sie zunächst $m = 0{,}3\ \mathrm{kg}$, $l = 0{,}4\ \mathrm{m}$ und $d = 0{,}01\ \mathrm{Nm}/\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.
- Erstellen Sie weitere Plots, indem Sie die Parameter des Pendels variieren. Betrachten Sie dabei auch den Fall $d = 0$.

### 3.3 Messungen am Versuchsaufbau

Grau ist alle Theorie, daher soll im Labor auch die Schwingung eines realen Pendels analysiert und mit den Rechenergebnissen verglichen werden.

#### 3.3.1 Versuchsaufbau zur Winkelmessung an einem Pendel

Um die Pendelbewegung auf einfache Weise erfassen zu können, ist beim in Abbildung 3 gezeigten Versuchsaufbau das Gewicht nicht an einem Faden sondern an einer dünnen Stange befestigt.

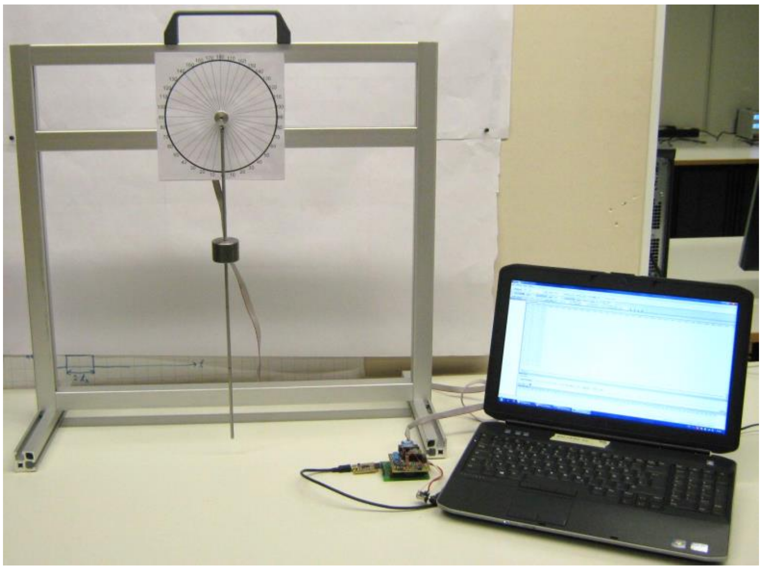


**Abbildung 3: Versuchsaufbau Pendel**

Genau genommen handelt es sich daher um ein physikalisches Pendel und für die Berechnung muss das aus Stange und Gewicht gebildete Massenträgheitsmoment berechnet und in der Differentialgleichung aus Abschnitt 3.1.1 eingesetzt werden. Da die Masse der Stange gegenüber der des Gewichts sehr klein ist, werden wir den Versuchsaufbau jedoch vereinfachend weiterhin als mathematisches Pendel betrachten.

Die Stange ist am oberen Ende an einer Welle befestigt, deren Drehwinkel $\varphi$ mit einem optischen Winkelencoder gemessen werden kann. Die Impulse des Winkelencoders werden von einem Mikrocontroller erfasst, der daraus die Winkelwerte berechnet. Für das Speichern der Winkelverläufe werden die Messergebnisse über die serielle Schnittstelle an ein Terminalprogramm auf dem PC gesendet und dort gespeichert.

### 3.3.2 Datenformat der Messdatei

Das Terminalprogramm speichert die vom Mikrocontroller mit der Abtastzeit $T_A = 0{,}01$ s gesendeten Daten ohne weitere Verarbeitung in einer CSV-Textdatei; Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt aus einer solchen Datei.

```
7,120,0,5,120
7,121,0,5,115
7,122,0,5,110
7,123,0,5,104
7,124,0,5,99
7,125,0,5,92
```

**Abbildung 4: Ausschnitt aus einer Messdatei**

Es ist gut zu erkennen, dass zu jedem Abtastzeitpunkt 5 durch Kommas getrennte Werte übermittelt werden. Die Bedeutung dieser Werte ist in Tabelle 1 zusammengestellt.

**Tabelle 1: Format Messdatei**

| Spalte | Wert | Kommentar |
|---|---|---|
| 1 | High-Byte Messwertnummer | Abtastzeit 10 ms |
| 2 | Low-Byte Messwertnummer | |
| 3 | Drehrichtung | 0: Winkel abnehmend, 1: Winkel zunehmend |
| 4 | High-Byte Encoder | • 1 Umdrehung entspricht 1024<br>• Nulllage (Pendel senkrecht): 1000 |
| 5 | Low-Byte Encoder | |

### 3.3.3 Analyse der Messungen für kleine Winkel

Im Labor werden Messungen am Pendel durchgeführt werden. Für die Auswertung mit MATLAB / Octave wurden bereits im Vorfeld einige Messungen gespeichert, die Sie in einer ZIP-Datei von der Laborseite herunterladen können. Die in Tabelle 2 zusammengestellten Messdateien wurden mit einer kleinen Anfangsauslenkung von $\varphi_0 \approx 20°$ erstellt und sind daher für den Vergleich mit den Berechnungen für kleine Winkel geeignet. Trotz der Dateiendung `.log` handelt es sich um CSV-Textdateien.

**Tabelle 2: Messungen mit $\varphi_0 \approx 20°$**

| Datei | Pendellänge | Masse |
|---|---|---|
| `pendel_20_200mm.log` | $l \approx 200$ mm | $m \approx 280$ g |
| `pendel_20_300mm.log` | $l \approx 300$ mm | |
| `pendel_20_400mm.log` | $l \approx 400$ mm | |

**Aufgabe 4: Umrechnen der Messdaten**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin**

In den ersten zwei Spalten der Messdatei sind die Abtastzeitpunkte codiert. Hierbei befinden sich die Daten des High Byte in der ersten Spalte (`t_high`), die Daten des Low Byte in der zweiten Spalte (`t_low`).

a) Leiten Sie eine Formel her, mit welcher der Zeitpunkt einer Messung in Sekunden bestimmt werden kann.

Als Hilfestellung finden Sie anbei eine Visualisierung von High Byte und Low Byte bei binärer Codierung.

| High Byte | | | | | | | | Low Byte | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2^15 | 2^14 | 2^13 | 2^12 | 2^11 | 2^10 | 2^9 | 2^8 | 2^7 | 2^6 | 2^5 | 2^4 | 2^3 | 2^2 | 2^1 | 2^0 | Stelligkeit |
| | | | | | | | | | | | | | | | | Ziffer (Binär) |

b) Der Auslenkungswinkel ist über High Byte und Low Byte in den Spalten 4 (`w_high`) und Spalte 5 (`w_low`) codiert. Leiten Sie eine Formel her, mit welcher sich aus `w_high` und `w_low` der Auslenkungswinkel im Gradmaß ermitteln lässt. Nutzen Sie einen Dreisatz, um das in Tabelle 1 angegebene Winkelmaß ins Gradmaß umzurechnen.

**Aufgabe 5: Einlesen und Analysieren der Messungen für kleine Winkel**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Erstellen Sie ein Skript `Plot_Messung.m` das eine Messdatei einliest und den Winkelverlauf als Plot darstellt:

- Importieren Sie die Daten in MATLAB. Hierzu können Sie wie in Versuch 1 den Befehl `load` verwenden.
- Berechnen Sie daraus den Zeitvektor so, dass die Messung zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt.
- Erstellen Sie aus der Messung einen Vektor mit der Drehrichtungsinformation
- Berechnen Sie den Winkelverlauf in Grad.
- Erstellen Sie einen Plot des Winkels und des Richtungssignals über der Zeit.

Versuchen Sie anhand der Messung die Parameter des Pendels näherungsweise abzuschätzen:

- Pendellänge $l$; vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem nominellen Wert aus Tabelle 2.
- Dämpfung $d$.

Berechnen Sie mithilfe der Funktion **`phi = pendel_linear(t, m, l, d)`** aus Aufgabe 3 den Winkelverlauf für diese Parameter und vergleichen Sie Rechnung und Simulation miteinander.

**Hinweis:** Es ist nicht notwendig, die beiden Verläufe im selben Plot darzustellen.

### 3.3.4 Große Auslenkungen des Pendels

Die bisherigen Berechnungen und Untersuchungen basieren auf der Annahme, dass der Pendelwinkel $\varphi(t)$ klein bleibt. Dann kann die Differentialgleichung mit $\sin(\varphi) \approx \varphi$ vereinfacht werden, sodass der Verlauf $\varphi(t)$ analytisch berechnet werden kann. Es kann daher nicht davon ausgegangen werden, dass diese Lösung auch für große Auslenkungen „passt“. Dies soll nun anhand von Messungen mit großem Anfangswinkel $\varphi_0$ untersucht werden.

Bei den in Tabelle 3 zusammengestellten Messdateien wurden das Pendel in fast senkrechter Lage losgelassen.

**Tabelle 3: Messungen mit $\varphi_0 \approx 180°$**

| Datei | Pendellänge | Masse |
|---|---|---|
| `pendel_180_200mm.log` | $l \approx 200$ mm | $m \approx 280$ g |
| `pendel_180_300mm.log` | $l \approx 300$ mm | |
| `pendel_180_400mm.log` | $l \approx 400$ mm | |

**Aufgabe 6: Analysieren der Messungen für große Winkel**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Führen Sie das Skript `Plot_Messung.m` mit den Messdateien für große Anfangswinkel aus Tabelle 3 aus und vergleichen Sie die Messung mit der Simulation. Verwenden Sie für die Simulation die in Aufgabe 5 ermittelten Parameter für $d$ und $l$.

## 3.4 Numerische Lösung der Differentialgleichung

Für die linearisierte Differentialgleichung aus Abschnitt 3.1.4 kann zwar mit dem Wissen aus der Vorlesung Analysis 2 eine geschlossene Lösung berechnet werden, allerdings stimmt diese wegen der Linearisierung nur für kleine Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ hinreichend genau mit der Messung überein.

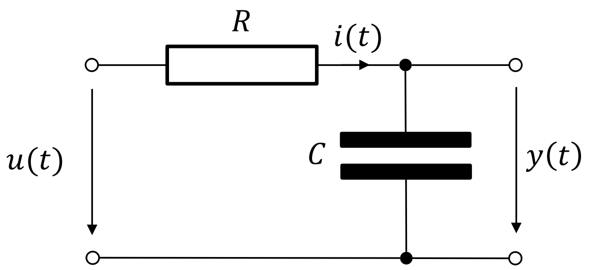
Eine analytische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung des mathematischen Pendels

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + \frac{d}{m\,l^2} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0}$$

ist – zumindest mit den uns zur Verfügung stehenden Werkzeugen – nicht möglich. Daher soll diese Differentialgleichung nun numerisch gelöst werden.

### 3.4.1 Einführung in das Euler-Verfahren am Beispiel RC-Glied

Als einfacher Einstieg in die numerische Lösung von Differentialgleichungen wird das aus der Vorlesung Analysis 2 bekannte Beispiel des RC-Glieds betrachtet:




$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} \cdot y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

In Analysis 2 wurde durch Lösen der Differentialgleichung der Verlauf von $y(t)$ berechnet, wenn die Eingangspannung $u(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sprungartig von 0 auf $U_0$ vergrößert wird:

$$u(t) = U_0 \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ U_0 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Bei der numerischen Lösung der Differentialgleichung des RC-Gliedes muss mit konkreten Zahlenwerten für die Parameter $R$, $C$ und $U_0$ gerechnet werden. Mit

$$R = 1\ \text{M}\Omega,\ \ C = 1\ \mu\text{F} \quad \Rightarrow \quad RC = 1\ \text{s} \qquad \text{und} \qquad U_0 = 1\ \text{V}$$

folgt (ohne Einheiten):

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \qquad u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad y(t) = 1 - e^{-t}$$

Für die numerische Lösung wird die Differentialgleichung nach $\dot{y}(t) = f\big(t, y(t)\big)$ aufgelöst:

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t)$$

Zur numerischen Lösung mit dem Digitalrechner wird die Differentialgleichung mit der Schrittweite $h$ diskretisiert. Mit der diskreten Zeit $t = k \cdot h$ und der Kurzschreibweise $y[k] = y(k \cdot h),\ u[k] = u(k \cdot h)$ folgt:

$$\dot{y}[k] = -y[k] + u[k]$$

Die Ableitung $\dot{y}[k]$ kann zu den diskreten Zeitpunkten $t = k \cdot h$ nur näherungsweise mit dem Differenzenquotienten berechnet werden:

$$\dot{y}[k] \approx \frac{y[k+1] - y[k]}{h}$$

Setzt man diese Näherung in die diskretisierte Differentialgleichung ein und löst nach $y[k+1]$ auf, erhält man die Gleichung zur numerischen Lösung mit dem Euler-Verfahren:

$$\frac{y[k+1] - y[k]}{h} = -y[k] + u[k] \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y[k+1] = y[k] + h \cdot \big(-y[k] + u[k]\big)}$$

**Aufgabe 7: Lösen der Differentialgleichung des RC-Gliedes von Hand**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin!**

Berechnen Sie für $0 \le t \le 0{,}5$ s von Hand die numerische Lösung der Differentialgleichung des RC-Gliedes mit der Schrittweite $h = 0{,}1$ s. Verwenden Sie dieselben Parameter wie in der obigen Herleitung:

- $R = 1\ \mathrm{M\Omega}, C = 1\ \mu\mathrm{F}$
- $u(t) = \sigma(t)$
- Anfangswert $y(0) = 0$

Berechnen Sie zum Vergleich auch die entsprechenden Werte $y(k \cdot h)$ der exakten Lösung.

**Aufgabe 8: Lösen der Differentialgleichung des RC-Gliedes mit MATLAB / Octave**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin!**

Schreiben Sie ein MATLAB / Octave-Skript, das die numerische Lösung der Differentialgleichung des RC-Gliedes aus Aufgabe 7 für $0 \leq t \leq 5$ s berechnet und gemeinsam mit der exakten Lösung plottet:

- Die Schrittweite $h$ soll parametrierbar sein.
- Zum Plotten müssen Sie
    - die berechneten Lösungswerte in einem Array (Vektor) speichern und
    - abhängig von der gewählten Schrittweite $h$ einen passenden Zeitvektor erstellen.
- Für den Plot der exakten Lösung erzeugen Sie einen Zeitvektor mit kleinerer Schrittweite.

Analysieren Sie den Einfluss der Schrittweite $h$, indem Sie die Lösung für verschiedene Werte von $h$ durchführen und die numerische mit der exakten Lösung vergleichen.

**Aufgabe 9: Lösung DGL RC-Glied für anderes Eingangssignal**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Statt der Sprungfunktion soll jetzt das Signal

$$u(t) = \sin(t)$$

an den Eingang des RC-geschaltet werden. Modifizieren Sie Ihr MATLAB / Octave-Skript aus Aufgabe 8, dass für $0 \leq t \leq 20$ s

- die numerische Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung des RC-Gliedes für dieses Eingangssignal berechnet
- und $y(t)$ in einem gemeinsamen Schaubild mit $u(t)$ geplottet wird.

### 3.4.2 Euler-Verfahren

Aufbauend auf die Einführung anhand des RC-Gliedes in Abschnitt 3.4.1 wird nun das Euler-Verfahren für die Lösung der folgenden Differentialgleichung (Anfangswertproblem):

$$\dot{y}(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad y(t_0) = y_0$$

hergeleitet.

Die Funktion $f\big(t, y(t)\big)$ ist dabei die rechte Seite der nach $\dot{y}(t)$ aufgelösten Differentialgleichung. Diese kann – muss aber nicht – explizit von der Zeit $t$ abhängen. Die Zeit $t$ wird insbesondere benötigt, um den zeitabhängigen Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ darstellen zu können. Die Reihenfolge der beiden Argumente $t$ und $y(t)$ wird dabei genauso gewählt wie in den Solvern von MATLAB / Octave.

Zur numerischen Lösung mit dem Digitalrechner wird die Differentialgleichung mit der Schrittweite $h$ diskretisiert. Mit

- der diskreten Zeit $t[k] = k \cdot h$
- der diskretisierten Eingangsgröße $u[k] = u(k \cdot h)$
- und der diskreten Ausgangsgröße $y[k] = y(k \cdot h)$

folgt:

$$\dot{y}[k] = f(t[k], y[k])$$

Beim Euler-Verfahren wird die Ableitung $\dot{y}[k]$ zu den diskreten Zeitpunkten $t = k \cdot h$ näherungsweise mit dem Differenzenquotienten berechnet:

$$\dot{y}[k] \approx \frac{y[k+1] - y[k]}{h}$$

Setzt man diese Näherung in die diskretisierte Differentialgleichung ein

$$\frac{y[k+1] - y[k]}{h} = f(t[k], y[k])$$

und löst nach $y[k+1]$ auf, erhält man die Gleichung zur numerischen Lösung mit dem Euler-Verfahren:

$$\boxed{y[k+1] = y[k] + h \cdot f\big(t[k], y[k]\big)}$$

Das Euler-Verfahren kann auch mithilfe der numerischen Integration hergeleitet werden. Diese Herleitung ist dann die Basis für weitere Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen. Weitere Informationen dazu finden Sie im Skript von Prof. Dietz [3].

**Aufgabe 10: Lösung DGL RC-Glied mit Funktion für die rechte Seite der Differentialgleichung**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

In Aufgabe 8 und Aufgabe 9 haben Sie ausgehend von der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \underbrace{-y(t) + u(t)}_{f(t,y(t))}$$

die iterative Lösungsgleichung

$$y[k+1] = y[k] + h \cdot \underbrace{\left(-y[k] + u[k]\right)}_{f(t,y(t))}$$

direkt programmiert. Schreiben Sie jetzt eine MATLAB-Funktion

```
ypunkt = RC_dgl(t, y)
```

mit der rechten Seite der Differentialgleichung und modifizieren Sie Ihr Skript aus Aufgabe 9 so, dass diese bei der Lösung verwendet wird. Das Eingangssignal $u(t) = \sin(t)$ müssen Sie hierbei in der MATLAB-Funktion berücksichtigen.

### 3.4.3 Lösung mit dem MATLAB-Solver

In MATLAB gibt es eine große Zahl an Funktionen zur Lösung von Differentialgleichungen, davon 8 für den häufigen Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen[2]. Bei dieser großen Auswahl ist es nicht immer einfach, den Überblick zu behalten und den geeigneten Solver auszuwählen. Die gute Nachricht ist, dass **ode45** in den meisten Fällen gut funktioniert (MATLAB-Hilfe: „This should be the first solver you try“ [6]). Man muss daher nur dann auf einen anderen Solver ausweichen, wenn **ode45** keine sinnvolle Lösung liefert oder sehr lange für die Berechnung der Lösung braucht. Alle Solver werden in MATLAB auf die gleiche Weise aufgerufen, so dass einfach verschiedene Solver ausprobiert werden können.

Wir werden im Rahmen des Labors nur den Solver **ode45** verwenden, der die Differentialgleichung mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und variabler Schrittweite löst. Der Aufruf erfolgt mit

```
[t, y] = ode45(fun, [t0 tend], y0, options)
```

**Eingangsgrößen**

**fun** Handle zur Funktion **ypunkt=funktion(t, y)**

- rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f\big(t, y(t)\big)$

---

[2] **ode45, ode15s, ode23, ode113, ode23t, ode23tb, ode23s, ode15i**. Octave enthält im Grundpakt nur den Solver **ode45**, für die anderen muss das Package odepkg geladen werden: **pkg load odepkg**

- bei einem Differentialgleichungssystem sind **`ypunkt`** und **`y`** Vektoren
- Die Zeit **`t`** muss immer im Funktionskopf enthalten sein, auch wenn die rechte Seite nicht explizit von $t$ abhängt.

**`[t0 tend]`** Anfangszeitpunkt (**`t0`**) und Endzeitpunkt (**`tend`**) der Simulation.

**`y0`** Anfangswert, bei Differentialgleichungssystem Vektor mit Anfangswerten

**`options`** Optionaler Parameter. Mit **`odeset`** können Parameter wie Toleranzen für den Gleichungslöser definiert werden.

**Ausgangsgrößen**

**`t`** Zeitvektor

- Zeitpunkte werden durch den Solver bestimmt
- Schrittweite ist in der Regel nicht konstant

**`y`** Lösung der Differentialgleichung

- Vektor bei skalarer Differentialgleichung
- bei Differentialgleichungssystem Matrix mit je einer Spalte pro Größe

**Aufgabe 11: Lösung DGL RC-Glied mit dem MATLAB-Solver**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Erstellen Sie ein MATLAB-Skript **`Loese_RC_Glied_ode45.m`** zur Lösung der Differentialgleichung des RC-Glieds mit dem Solver **`ode45`**. Beachten Sie dabei die folgenden Hinweise:

- Simulieren Sie eine Zeitdauer von 20 Sekunden.
- Verwenden Sie in Ihrem Programm die in Aufgabe 10 programmierte Differentialgleichung **`ypunkt = RC_dgl(t, y)`**.
- Wie wählt der Solver die Zeitpunkte der Simulation? Erstellen Sie einen Plot der Schrittweite $h$ über der Zeit.

### 3.4.4 Numerisches Lösen von Differentialgleichungen höherer Ordnung

Die Bewegung des mathematischen Pendels wird durch eine Differentialgleichung **zweiter Ordnung** beschrieben. Die Algorithmen zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erwarten jedoch die folgende Differentialgleichung **erster Ordnung**:

$$\boxed{\dot{y}(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad y(t_0) = y_0}$$

Hierbei sind

| | |
|---|---|
| $y(t)$ | die gesuchte Lösung der Differentialgleichung |
| $y(t_0) = y_0$ | der bekannte Anfangswert |
| $f\big(t, y(t)\big)$ | die rechte Seite der nach $\dot{y}(t)$ aufgelösten Differentialgleichung |

Auf den ersten Blick scheint es nun so, als ob nur Differentialgleichungen erster Ordnung numerisch gelöst werden könnten. Da sich $y(t)$ jedoch als Vektor aus $n$ Einzelgrößen $y_1(t), \dots, y_n(t)$ zusammensetzen kann,

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

können damit auch die Lösungen von Differentialgleichungen höherer Ordnung berechnet werden. Hierfür muss eine Differentialgleichung $n$-ter Ordnung in ein System von $n$ Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden:

$$\boxed{\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}\big(t, \vec{y}(t)\big), \qquad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0}$$

Für das Euler-Verfahren ergibt sich damit

$$\vec{y}[k+1] = \vec{y}[k] + h \cdot \vec{f}\big(t[k], \vec{y}[k]\big), \qquad \vec{y}[0] = \vec{y}_0$$

**Aufgabe 12: Umformen der Differentialgleichung des Pendels**
**Bearbeiten Sie diese Aufgabe vor dem Labortermin!**

Formen Sie die Differentialgleichung des Pendels

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{d}{m\,l^2} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0 \qquad \varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung um.

- Wählen Sie $y_1(t) = \varphi(t),\ y_2(t) = \dot{\varphi}(t)$
- Formen Sie die Differentialgleichung des Pendels so um, dass Sie von $y_1(t), y_2(t)$ und $\dot{y}_2(t)$ abhängt.
- Berechnen Sie die beiden Differentialgleichungen $\dot{y}_1(t) = \cdots, \quad \dot{y}_2(t) = \cdots$
  ➔ damit haben Sie das gesuchte System zweier Dgl. erster Ordnung gefunden.
- Stellen Sie Ihr Ergebnis in der Vektor-Notation $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}\big(t, \vec{y}(t)\big),\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ dar.

**Aufgabe 13: Programmieren der Differentialgleichung des Pendels**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Programmieren Sie mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 12 die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}\big(t, \vec{y}(t)\big)$$

des nichtlinearen mathematischen Pendels als MATLAB-Funktion

```
ypunkt = pendel_dgl(t, y)
```

Erzeugen Sie zusätzlich noch die MATLAB-Funktion

```
ypunkt = pendel_lin_dgl(t, y)
```

für das linearisierte mathematische Pendel. Geben Sie in der Funktion die Parameter des Pendels fest vor:

$$m = 0{,}3\text{ kg},\ \ l = 0{,}4\text{ m}, \quad d = 0{,}01\text{ Nm}/\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

**Aufgabe 14: Lösung der Differentialgleichung des Pendels mit dem Euler-Verfahren**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Erstellen Sie ein MATLAB-Skript **`Pendel_Euler.m`** zur Lösung der Differentialgleichung des Pendels mit dem Euler-Verfahren. Beachten Sie dabei die folgenden Hinweise:

- Simulieren Sie eine Zeitdauer von 25 Sekunden.
- Verwenden Sie für die Schrittweite $h$ und den Anfangswinkel $\varphi_0$ Variablen, sodass Sie diese einfach variieren können.
- Legen Sie zunächst einen Zeitvektor und ein Array (Matrix) mit 2 Zeilen und genügend Spalten an, um die berechnete Lösung zu speichern.
- Verwenden Sie in Ihrem Programm die in Aufgabe 13 programmierten Differentialgleichungen.
- Beachten Sie, dass Sie zum Plotten des Winkelverlaufs $\varphi(t)$ diesen als erstes Element aus der vektoriellen Lösung extrahieren müssen.
- Untersuchen Sie zunächst, ob die so berechnete Lösung der linearisierten Differentialgleichung **`ypunkt = pendel_lin_dgl(t, y)`** mit der symbolisch berechneten Lösung aus **`phi = pendel_linear(t, m, l, d)`** übereinstimmt, indem Sie die Verläufe beider Lösungen übereinander plotten. Variieren Sie die Schrittweite $h$ und untersuchen Sie deren Einfluss.
- Vergleichen Sie für verschiedene Anfangsauslenkungen $\varphi_0$ die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung **`ypunkt = pendel_dgl(t, y)`** mit der symbolisch berechneten Lösung aus **`phi = pendel_linear(t, m, l, d)`**.

### 3.4.5 Lösung mit dem MATLAB-Solver

**Aufgabe 15: Lösung der Differentialgleichung des Pendels mit `ode45`**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Erstellen Sie ein MATLAB-Skript **`Pendel_ode45.m`** zur Lösung der Differentialgleichung des Pendels mit dem Solver **`ode45`**. Beachten Sie dabei die folgenden Hinweise:

- Simulieren Sie eine Zeitdauer von 25 Sekunden.
- Verwenden Sie in Ihrem Programm die in Aufgabe 13 programmierten Differentialgleichungen.
- Untersuchen Sie zunächst, ob die so berechnete Lösung der linearisierten Differentialgleichung **`ypunkt = pendel_lin_dgl(t, y)`** mit der symbolisch berechneten Lösung aus **`phi = pendel_linear(t, m, l, d)`** übereinstimmt, indem Sie die Verläufe beider Lösungen übereinander plotten.

- Wie wählt der Solver die Zeitpunkte der Simulation? Berechnen Sie die mittlere Schrittweite.
- Wenn Sie die Genauigkeit der Berechnungen verbessern möchten, können Sie z. B. mit **`options = odeset('RelTol', 1e-8)`** eine kleinere Grenze für den relativen Fehler definieren. Vergessen Sie nicht, **`options`** in den Funktionsaufruf von **`ode45`** zu übernehmen.
- Vergleichen Sie für verschiedene Anfangsauslenkungen die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung **`ypunkt = pendel_dgl(t, y)`** mit der symbolisch berechneten Lösung aus **`phi = pendel_linear(t, m, l, d)`**

### 3.4.6 Konstantes Reibmoment

Bei der Modellbildung in Abschnitt 3.1.1 wurde das Dämpfungsmoment als proportional zur Winkelgeschwindigkeit angenommen:

$$M_d(t) = d \cdot \dot{\varphi}(t)$$

Die Lösung der Differentialgleichung des linearisierten gedämpften mathematischen Pendels[3]

$$\varphi(t) = \varphi_0\, e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \frac{d}{2ml^2}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{d^2}{4m^2l^4}}$$

zeigt, dass dies zu einer exponentiellen Abnahme der Schwingungsamplitude des Pendels führt. Die Messungen am realen Pendel zeigen jedoch für nicht allzu große Amplituden eher eine lineare Abnahme der Amplitude.

Offensichtlich war die Modellannahme der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung nicht zutreffend. Unter der Annahme, dass die geschwindigkeitsunabhängige Lagerreibung den größten Anteil der Reibung erzeugt, soll daher nun untersucht werden, ob sich durch ein konstantes Dämpfungsmoment eine der Realität entsprechende annähernd lineare Abnahme der Schwingungsamplitude ergibt. Hierzu wird das folgende Modell für das Dämpfungsmoment aufgestellt:

$$M_d(t) = k \cdot \operatorname{sgn}\big(\dot{\varphi}(t)\big)$$

Die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}\big(\dot{\varphi}(t)\big)$ sorgt dafür, dass das Dämpfungsmoment $M_d(t)$ immer der Pendelbewegung entgegenwirkt. Damit ändern sich die Differentialgleichungen wie folgt:

- Physikalisches Pendel $\qquad \ddot{\varphi}(t) + \frac{k}{J} \cdot \operatorname{sgn}\big(\dot{\varphi}(t)\big) + \frac{m\,g\,l}{J} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0$

[3] In Aufgabe 2 haben Sie diese Lösung berechnet und in Aufgabe 3 geplottet.

- Mathematisches Pendel $\ddot{\varphi}(t) + \frac{k}{m\, l^2} \cdot \mathrm{sgn}\big(\dot{\varphi}(t)\big) + \frac{g}{l} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0$

Die analytische Lösung der Differentialgleichung des mathematischen Pendels mit konstantem Reibmoment ist sehr schwierig: es ergeben sich abhängig vom Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit zwei verschiedene Differentialgleichungen. Die Lösung für das konstante Reibmoment soll daher nur numerisch erfolgen.

**Aufgabe 16: Lösung der Differentialgleichung mit konstantem Reibmoment**
**Diese Aufgabe wird während des Labortermins bearbeitet!**

Programmieren Sie die basierend auf der Funktion **`ypunkt = pendel_dgl(t, y)`** aus Aufgabe 13 die Differentialgleichung des nichtlinearen mathematischen Pendels mit konstantem Reibmoment als MATLAB-Funktion

```
ypunkt = pendel2_dgl(t, y)
```

- Die Vorzeichenfunktion heißt in MATLAB **`sign`**
- Geben Sie in der Funktion die Parameter des Pendels fest vor:

  $m = 0{,}3\ \text{kg},\ \ l = 0{,}4\ \text{m},\quad k = 0{,}0025\ \text{Nm}$

Speichern Sie Ihr Skript **`Pendel_ode45.m`** unter dem neuen Namen **`Pendel2_ode45.m`** und modifizieren Sie es zur Lösung der Differentialgleichung des Pendels mit konstantem Reibmoment. Beachten Sie dabei die folgenden Hinweise:

- Simulieren Sie eine Zeitdauer von 250 Sekunden.
- Die Differentialgleichung ändert sich in jedem Umkehrpunkt. Damit der Solver hier hinreichend kleine Schrittweiten wählt, müssen Sie eine kleine Grenze für den relativen Fehler definieren: **`options = odeset('RelTol', 1e-8)`**
- Plotten Sie nur noch den Verlauf des simulierten Winkels.
- Vergleichen Sie den Verlauf mit der Messung aus Aufgabe 6.
- Variieren Sie das Dämpfungsmoment $k$. Verkürzen Sie hierfür die Simulationsdauer, da die numerische Lösung extrem lange dauert, wenn Winkelamplitude und damit auch die Winkelgeschwindigkeit klein werden.

## 4 Literatur

[1] Frank Thuselt, Felix Paul Gennrich: Praktische Mathematik mit MATLAB, Scilab und Octave für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer Verlag, 2013.
**Als Ebook verfügbar!**

[2] Frank Thuselt: Das Arbeiten mit Numerik Programmen MATLAB, Scilab und Octave in der Anwendung. Beiträge der Hochschule Pforzheim, Nr. 129, 2009.
**Download von der Moodle-Seite zum Labor.**

[3] Rainer Dietz: Skript zur Vorlesung Rechnergestützte Mathematik, 2016.
**Download von der Vorlesungsseite.**

[4] Frank Thuselt: Physik, Vogel Business Media, 1. Auflage 2010.
**In großer Anzahl in der Bibliothek.**

[5] Stefan Hillenbrand: MATLAB / Octave Kurzreferenz.
**Download von der Laborseite.**

[6] MATLAB Online-Hilfe.
**Verfügbar auf de.mathworks.com – Support – Documentation**

[7] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Springer Verlag, 2014.
**Als Ebook verfügbar!**

[8] Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2, Springer Verlag, 2015.
**Als Ebook verfügbar!**

**Hinweis zu den Ebooks**

Die Hochschule hat zahlreiche Lehrbücher insbesondere vom Springer-Verlag abonniert, die Sie kostenlos herunterladen können. Weitere Informationen zu den Ebooks finden Sie auf den Webseiten der Bibliothek:
https://www.hs-pforzheim.de/hochschule/organisation/bibliothek/

Die hier genannten Ebooks können Sie auch direkt bei Springer herunterladen:

1. Verbinden Sie sich mit dem Hochschulnetz:
    - Rechner der Hochschule oder
    - Eigener Rechner über VPN
2. Rufen Sie http://link.springer.com auf.
3. Suchen Sie nach dem Buch.
4. Abonnierte Bücher können Sie kapitelweise oder vollständig als PDF mit Wasserzeichen herunterladen.