# 离散数学

## （Discrete Mathematics）

离散数学研究离散结构及其相互关系，是信息技术类相关专业的核心基础课。离散数学充分描述了计算机科学离散性的特点，是数据结构、编译系统、数据库原理、数字图像处理、算法分析与设计、人工智能、信息安全、计算机网络等计算机专业课程的数学基础。学习离散数学不仅能够帮助学生更好地理解与掌握专业课程的教学内容，同时也可以为学生在将来的计算机科学技术的研究和工程应用中打下坚实的理论基础。

# 离散数学主要涵盖六部分：

数理逻辑

集合论

图论

近世代数（抽象代数，代数系统）

数论

组合分析（组合论，组合数学）

# 第一篇　数理逻辑

逻辑学：研究思维形式及思维规律的科学。

逻辑学分为二类:

- 辩证逻辑：是研究事物发展的客观规律。
- 形式逻辑：对思维的形式结构和规律进行研究。

数理逻辑：是用数学的方法研究概念、判断和推理的科学，属于形式逻辑。

# 第一篇　数理逻辑

在数理逻辑中，用数学的方法是指引进一套符号体系的方法来研究概念、判断和推理。即对符号进行判断和推理。数理逻辑分为四大分支：证明论、模型论、递归论和公理集合论。我们这里介绍的是属于四大分支的共同基础—古典数理逻辑(命题逻辑和谓词逻辑)。

# 第一章　命题逻辑

§1.1 命题

§1.2 命题联结词

§1.3 命题公式

§1.4 真值表与等价公式

§1.5 蕴含式

§1.6 其他命题联结词

§1.7 范 式

§1.8 推论理论

# 第一章 命题逻辑（命题代数）

**教学目的及要求：**

深刻理解和掌握命题逻辑中基本概念和基本方法。

**教学内容：**

命题及表示、联结词、命题公式与翻译、真值表与等价公式、重言式与蕴涵式、对偶与范式、推理理论。

**教学重点：**

命题逻辑中的基本概念和基本推理方法。

**教学难点：**推理理论。

# §1.1 命题

**定义：** 客观上具有确定真假值的陈述句叫命题。

讨论定义：

（1）命题可以是真的，或者是假的，但不能同时既为真又为假。

（2）命题分类：

i) 原子命题（简单命题、本原命题）：不能分解成为更简单的命题。

例：郎平是一位排球教练。

奥巴马是日本首相。

**3** 是自然数。

**π** 是有理数。

# §1.1 命题

ii) 复合命题（分子命题）： 若干个原子命题使用适当的联结词所组成的新命题

例： **2** 是一个素数并且 **2** 也是一个偶数。

安倍是日本首相或者安倍是菲律宾总统。

如果△**ABC** 是等边三角形，则△**ABC** 的三条边相等。

（3）命题标识符(表示命题所用的符号）： 常用大写２６个英文字母 及加上下标表示命题。

用Ａ、Ｂ、Ｃ $_2$、 $C_7$．．．表示。

（4）命题中所有的“真”用“Ｔ”或者 **1** 表示，

命题中所有的“假”用“Ｆ”或者 **0** 表示。

# §1.1 命题

**例**：判断下列语句是否为命题。

（1）十是自然数。（T）

（2）上海是一个村庄。（F）

（3）今天下雨。

（4）加拿大是一个国家。（T）

（5）2是偶数而3是奇数。（T）

（6）雷锋不是医生。（T）

（7）在十进制中1＋101＝110（F）

（8）今天是星期天。（F）

（9）2020年东京奥运会中国队金牌第一。

# §1.1　命题

命令句，感叹句，疑问句均不是命题。

（1）把门关上！

（2）你到哪里去了?

（3）杭州真漂亮呀！

（4） 严禁随地吐痰！

（5）你好吗?

（6）你是软件工程专业的学生吗?

# §1.2　命题联结词

在命题演算中也有类似的日常生活中的联结词称做命题联结词。

下面先介绍五个常用的命题联结词。

1．否定词：（否定运算、非运算）

（1）符号 ¬ ，读作“非”，“否定”

设命题为 P，则在 P 的前面加否定词¬，变成¬P，¬P 读做“ P 的否定”或“非 P ”

# §1.2　命题联结词

（2）定义

¬ P 的真值表：

| P | ¬P |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

（3）举例：

Q：每一种生物均是动物。 F

¬ Q：有一些生物不是动物。 T

这里¬Q不能讲成“每一种生物都不是动物”。

对量化命题的否定，除对动词进行否定外，同时对量化词也要加以否定。

# §1.2 命题联结词

2．合取词（“合取”、“积”、“与”运算）

(1) 符号 “ ∧”

设Ｐ，Ｑ为两个命题，则Ｐ ∧ Ｑ称Ｐ与Ｑ的合取，读作：“Ｐ与Ｑ”、“Ｐ与Ｑ的合取”、“Ｐ并且Ｑ”等。

(2) 定义（由真值表给出）：

# §1.2　命题联结词

P ∧ Q的真值表：

| P | Q | P∧ Q | Q∧P |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | T | F | F |
| T | F | F | F |
| T | T | T | T |

# §1.2　命题联结词

当且仅当Ｐ和Ｑ的真值均为“Ｔ”，则（Ｐ∧Ｑ）　的真值为“Ｔ”。否则，其真值为“Ｆ”。

注意：Ｐ和Ｑ是互为独立的；地位是平等的，Ｐ和Ｑ的位置可以交换而不会影响Ｐ∧Ｑ的结果。

# §1.2　命题联结词

(3) 举例:

(a) P： 王华的高等数学成绩很好

Q： 王华的英语成绩很好。

则P ∧ Q： 王华的高等数学成绩很好并且英语成绩也很好。

(b)P： 我们去种树

Q： 房间里有一台电脑

则P ∧ Q：我们去种树与房间里有一台电脑。

# §1.2 命题联结词

(c) P： 今天是星期二

Q： 3+3=6

则 P ∧ Q： 今天星期二并且 3+3=6

由例 (b)(c) 可见，在日常生活中，合取词应用在二个有关系的命题之间。而在逻辑学中，合取词可以用在二个毫不相干的命题之间。

# §1.2　命题联结词

(d) P:  王大和王二是亲兄弟。

Q:  张三与李四是初中同学。

该语句不是合取联结词组成的命题。

# §1.2　命题联结词

3．析取词（或运算）

（1）符号“∨”

设Ｐ、Ｑ为二个命题，则（Ｐ∨Ｑ）称作Ｐ与Ｑ的“析取”，读作：“Ｐ或Ｑ”，“Ｐ析取Ｑ”。

（2）定义（由真值表给出）：

# §1.2　命题联结词

P ∨ Q的真值表:

| P | Q | P∨ Q |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

当且仅当P 、Q均为“F ”时，（P ∨ Q）为“F ”。否则，其真值为“T ”.

# §1.2 命题联结词

区分"可兼或"与"不可兼或（异或，排斥或）"

"可兼或"即 P 或 Q 为"T"时（P∨Q）为"T"，是析取。

例如：

灯泡有故障或开关有故障。

今晚写字或看书。

今天下雨或打雷。

以上例句均为"可兼或"。

# §1.2 命题联结词

“ 不可兼或”即 P 和 Q 的真值不同时， P▽Q 为 T 。

（异或用“▽”表示）不是析取。

例如：李四在上离散数学课或者在上体育课。

P▽Q 的真值表：

| P | Q | P▽Q |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

# §1.2　命题联结词

例：

他通过电视看杂技或到剧场看杂技。

他乘火车去北京或乘飞机去北京。

以上两句均为“不可兼或”。

# §1.2　命题联结词

4．单条件联结词：

（1）符号“→”，读作：“如果...则···”

Ｐ、Ｑ为二个命题，（Ｐ→Ｑ）为新的命题，读作：“如果Ｐ则Ｑ”，“Ｐ条件Ｑ”。

（2）定义（由真值表给出）

# §1.2 命题联结词

P→Q的真值表：

| **P** | **Q** | **P→Q** |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

# §1.2 命题联结词

当P为“T”，Q为“F”时，则（P→Q）为“F”，否则（P→Q）均为“T”。

P：称为前件、条件、前提、假设

Q：称为后件、结论。

（3）举例:

(a) P：我拿起一本书

Q：我一口气读完了这本书

# §1.2　命题联结词

P→Q： 如果我拿起一本书，则我一口气读完了这本书。

(b) P： 月亮出来了

Q： 3×3=9

P→Q： 如果月亮出来了，则 3×3=9 。

通常称:

(a) 为形式条件命题——前提和结果有某种形式和内容上的联系。

# §1.2 命题联结词

(b) 为实质条件命题——前提和结果可以有联系，也可以没有联系，只要满足单条件命题的定义。

例： P： 我买到了鱼； Q : 我吃鱼。

$P \to Q$： 如果我买到了鱼，则我吃鱼。

$\neg P \to Q$： 如果我没有买到了鱼，则我吃鱼。

但“如果我没买到鱼，则我吃鱼”，在日常生活中不可能，但在单条件命题的定义中是允许的。

# §1.2 命题联结词

可以证明：

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

原命题　　　　逆反命题

$$Q \to P \Leftrightarrow \neg P \to \neg Q$$

逆命题　　　反命题

# §1.2 命题联结词

列出真值表，由真值表得：

原命题⇔逆反命题；逆命题⇔反命题。

| P | Q | $P\to Q$ | $\neg Q\to\neg P$ | $Q\to P$ | $\neg P\to\neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | F | F |
| T | F | F | F | T | T |
| T | T | T | T | T | T |

- **5**．双条件联结词（等价联结词）：

（1）符号“$\leftrightarrow$”，读作：“当且仅当”

P、Q为二个命题，（P $\leftrightarrow$ Q）为新的命题，读作：“P当且仅当Q”，“P等价Q”。

（2）定义（由真值表给出）

# §1.2　命题联结词

P↔ Q 的真值表：

每当 P 和 Q 的真值相同时，则（P↔Q）的真值为“T”，否则（P↔ Q）的真值为“F”。

| P | Q | P↔ Q |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

# §1.2　命题联结词

（3）举例:

（a）设

P：△ABC是等腰三角形

Q：△ABC有两只角相等

P ↔ Q：△ABC是等腰三角形当且仅当

有两只角相等。

# §1.2　命题联结词

（b）下面均为等价联结词：

春天来了当且仅当燕子飞回来了。

平面上二直线平行，当且仅当二直线不相交。

２＋２＝４当且仅当雪是白色的。

# §1.2 命题联结词

（4） P，Q中，P、Q的地位是平等的，P、Q交换位置不会改变真值表中的值。

（5） P当且仅当Q　　　$P \leftrightarrow Q$

P仅当Q　　　$P \rightarrow Q$

P当且Q　　　$Q \rightarrow P$

# §1.2　命题联结词

6．命题联结词在使用中的优先级

（1）先括号内，后括号外

（2）运算时联结词的优先次序为：　$\neg \wedge$

　　$\vee$　$\rightarrow$　$\leftrightarrow$　（由高到低）

（3）联结词按从左到右的次序进行运算

（4）最外层的括号一律均可省去

　　（$P \rightarrow Q \vee R$）可写成 $P \rightarrow Q \vee R$

# §1.2　命题联结词

例 $\neg P \vee (Q \vee R)$ 可省去括号

因为"∨"运算是可结合的。

而 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 中的括号不能省去，因"→"不满足结合律。

# §1.2　命题联结词

7．命题联结词小结:

（1）五个联结词的含义与日常生活中的联结词

的含义大致相同。

（2）“或”可分为可兼或（∨）和异或（▽）

(不可兼或)

（3）“ ¬” 为一元运算，其余四个均为二元运算。

# §1.2 命题联结词

(4) “→” 分为形式条件和实质条件命题，当前件为“F”时，不论后件怎样，则单条件命题的真值均为“T”。

(5) 命题联结词是命题或命题之间的联结词，而不是名词之间、数字之间和动词之间的联结词。

# §1.2　命题联结词

以上介绍了五种常用的联结词及其相应的复合命题形式。数理逻辑的特点是把逻辑推理变成类似数学演算的完全形式化了的逻辑演算，为此，首先要把推理所涉及到的各命题符号化。

步骤如下：

① 找出各简单命题，分别符号化。

② 找出各联结词，把简单命题逐个联结起来。

# §1.2　命题联结词

例．将下列命题符号化：

（1）李明是计算机系的学生，他住在 312 室或 313 室。

（2）张三和李四是朋友。

（3）虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达了车站。

（4）只有一个角是直角的三角形才是直角三角形。

（5）老王或小李中有一个去上海出差。

# §1.2　命题联结词

解：

（1）首先用字母表示简单命题。

P：李明是计算机系的学生。

Q：李明住在312室。

R：李明住在313室。

该命题符号化为：P^（Q▽R）

（2）张三和李四是朋友。是一个简单句

该命题符号化为：P

# §1.2 命题联结词

（3）首先用字母表示简单命题。

P：交通堵塞。

Q：老王准时到达了车站。

该命题符号化为：$P \wedge Q$

（4）首先用字母表示简单命题。

P：三角形的一个角是直角。

Q：三角形是直角三角形。

该命题符号化为：$\neg P \rightarrow \neg Q$

# §1.2 命题联结词

（5）首先用字母表示简单命题。

P：老王去上海出差。

Q：小李去上海出差。

该命题符号化为：$P \bigtriangledown Q$

也可符号化为：$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 或者

$(P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q)$

# §1.3　命题公式

约定：

（1）我们只注意命题的真假值，而不再去注意命题的汉语意义。

（2）对命题联结词，我们只注意真值表的定义，而不注意它日常生活中的含义。

# §1.3　命题公式

1．命题公式

命题常元：表示确定的命题｛ T， F ｝。

命题变元：以真假为其变域之变元，或没有指定真值的命题。常用大写英文字母A…Z表示。

命题公式：由命题变元、常元、联结词、括号，以规定的格式联结起来的字符串。

# §1.3 命题公式

**[** 定义 **]** 命题公式 **(wff)** 可按下述法则来生成:

1）单个的命题变元是一个命题公式。

2）若A是命题公式，$\neg$A也为命题公式。

3）若A、B是命题公式，则（A$\wedge$B）、（A$\vee$B）、（A$\rightarrow$B）、（A$\leftrightarrow$B）均为命题公式。

4）当且仅当有限次使用（1）（2）（3）所得到的包含有命题变元和命题常元，联结词，括号的符号串才是命题公式。

# §1.3　命题公式

例如：

$(\neg(P\vee Q))$，$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$，$((P\wedge Q)\vee\neg R)$，$P$ 都是命题公式。而 $(P\rightarrow)$，$(P\vee\neg)$ 都不是命题公式

# §1.4 真值表与等价公式

命题公式的真值表 ：

命题变元用特定的命题来取代，这一过程称为对该命题变元进行真值指派。

命题公式可以看成是一个以真假值为定义域和真假值为值域的一个函数。写成 $y = f(x)$

# §1.4 真值表与等价公式

例如：公式 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 定义三元函数

$$Y(P,\ Q,\ R)=P\rightarrow(Q\rightarrow R)$$

**[** 定义 **]** 命题公式 A 在其所有可能的赋值下取得的值列成的表称为 A 的真值表。

# §1.4 真值表与等价公式

构造真值表的步骤如下：

1) 找出给定命题公式中所有的命题变元，列出所有可能的赋值。

2) 按照从低到高顺序写出命题公式的各层次。

3) 对应每个赋值，计算命题公式各层次的值，直到最后计算出整个命题公式的值。

# §1.4 真值表与等价公式

例１．构造命题公式¬（（P∨Q）∧P）的真值表:

| P | Q | P∨Q | （P∨Q）∧P | ¬（（P∨Q）∧P） |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T |
| F | T | T | F | T |
| T | F | T | T | F |
| T | T | T | T | F |

# §1.4 真值表与等价公式

例 2． 写出命题公式

P∨（Q∧R） 的真值表

| P | Q | R | P∨（Q∧R） |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | F | T | F |
| F | T | F | F |
| F | T | T | T |
| T | F | F | T |
| T | F | T | T |
| T | T | F | T |
| T | T | T | T |

# §1.4　真值表与等价公式

由上二例可见， 2 个命题变元有 4 组真值指派； 3 个命题变元有 $2^3$ ＝ 8 组真值指派， n 个则有个 $2^n$ 个真值指派。

# §1.4　真值表与等价公式

1．等价式

**[**定义**]**如果对两个公式Ａ，Ｂ不论作何种指派，它们真值均相同，则称Ａ，Ｂ是逻辑等价的，亦说Ａ（Ｂ）等价于Ｂ（Ａ），

并记作：Ａ$\Leftrightarrow$Ｂ

# §1.4 真值表与等价公式

例： $P \vee \neg P \Leftrightarrow Q \vee \neg Q$

| P | Q | $P \vee \neg P$ | $Q \vee \neg Q$ |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | T | T |
| T | F | T | T |
| T | T | T | T |

# §1.4 真值表与等价公式

例：判断公式 A： $(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ 与

B： $(P \vee \neg R) \wedge (P \vee R)$ 是否等价。

解：列该公式的真值表：

# §1.4　真值表与等价公式

| P | Q | R | $\neg Q$ | $P\vee\neg Q$ | $P\vee Q$ | $\neg R$ | $P\vee\neg R$ | $P\vee R$ | A | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | T | F | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | T | T | T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | T | F | F | T | F | F | T | F | F |
| F | T | F | F | F | T | T | T | F | F | F |
| F | F | T | T | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | F | T | T | F | F | F |

# 例：试证明：$P\nabla Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$

证明：作真值表

| P | Q | $P\nabla Q$ | $\neg(P\leftrightarrow Q)$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | F |
| F | T | T | T |
| T | F | T | T |
| T | T | F | F |

由真值表可知：$P\nabla Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$

# 特殊的命题公式 --- 永真式和永假式

- 永真式 **(** 重言式 **)**： 如果命题公式 A 不论作何种赋值， 公式 A 都取得真值 T， 则称命题公式 A 为永真式 ( 重言式 ) 。

例如： $P \vee \neg P$, $\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$, $P \rightarrow P$ 都是永真式

- 永假式 **(** 矛盾式 **)**： 如果命题公式 A 不论作何种赋值， 公式 A 都取得真值 F， 则称命题公式 A 为永假式 ( 矛盾式 ) 。

例如： $P \wedge \neg P$, $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q)$, $\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$ 都是永真式

# §1.4 真值表与等价公式

**[ 定理 ]**

命题公式A$\Leftrightarrow$B的充要条件是A$\leftrightarrow$B为永真式。

说明:

"$\Leftrightarrow$"为等价关系符, A$\Leftrightarrow$B表示A和B有等价关系。

A$\Leftrightarrow$B不为命题公式

"$\leftrightarrow$"为等价联结词（运算符）, A、B为命题公式, 则（A$\leftrightarrow$ B）也为一命题公式。

# §1.4 真值表与等价公式

证明：

（1）充分性：$A \leftrightarrow B$为永真式，即A、B有相同的真值，所以$A \Leftrightarrow B$。

（2）必要性：$A \Leftrightarrow B$，即A、B有相同的真值表，所以$A \leftrightarrow B$为永真式。

例：证明$\neg\neg P \Leftrightarrow P$；

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

# §1.4 真值表与等价公式

| P | Q | $\neg\neg P \leftrightarrow P$ | $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F　　T　F | T　　　T　T |
| F | T | F　　T　F | T　　　T　T |
| T | F | T　　T　T | F　　　T　F |
| T | T | T　　T　T | T　　　T　T |

由定理可知：　$A \Leftrightarrow A$

若 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$

若 $A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$

# §1.4 真值表与等价公式

下面列出 15 组等价公式

（1）双重否定律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

（2）同等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$； $P \wedge P \Leftrightarrow P$

（3）交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$；

$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$； $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$

（4）结合律

$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$；

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$；

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

## §1.4 真值表与等价公式

（5）分配律

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$；

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

（6）摩根律

$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$；

$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

（7）吸收律

$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$；

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

# §1.4 真值表与等价公式

（8）蕴含律 $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

（9）等价律

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)$$

（10）零　律 $P\vee T\Leftrightarrow T$； $P\wedge F\Leftrightarrow F$

（11）同一律 $P\vee F\Leftrightarrow P$； $P\wedge T\Leftrightarrow P$

（12）互补律 $P\vee \neg P\Leftrightarrow T$； $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

（13）输出律

$$P\wedge Q\rightarrow R\Leftrightarrow P\rightarrow (Q\rightarrow R)$$

# §1.4 真值表与等价公式

（14）归缪律

$$(P \to Q) \land (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$$

（15）逆反律 $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

说明：

（1）证明上述15组等价公式的方法可用真值表法，把⇔改为↔所得的命题公式为永真式，则⇔成立。

# §1.4 真值表与等价公式

（2） $\wedge$ 、$\vee$ 、 $\leftrightarrow$均满足结合律，

则在单一用 $\wedge$ 、$\vee$ 、 $\leftrightarrow$联结词组成的命题公式中，括号可以省去。

（3）每个等价模式实际给出了无穷多个同类型的具体的命题公式。

例如：$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$，

$\neg((P \wedge Q) \vee (R \wedge S)) \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(R \vee S))$，

$\neg((P \rightarrow Q) \vee \neg R) \Leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \wedge \neg\neg R)$

# §1.4 真值表与等价公式

## 子命题公式(子公式)

[定义]给定一命题公式A， A’是A的任何部分，若A’也是一命题公式，则称A’是A的子命题公式。

例：A：（P∨Q）→（Q∨（R∧¬S））

A的子命题公式有：P、Q、R、¬S、（P∨Q）、

（R∧¬S）、（Q∨（R∧¬S））、

（P∨Q）→（Q∨（R∧¬S））等。

# §1.4 真值表与等价公式

[定理] 给定一命题公式A， A'是A的子公式。设B'是一命题公式，若A'⇔ B'，并用B'取代A中的A'，从而生成一新的命题公式B，则A⇔B。

从定理可见：一个命题公式A，经多次取代，所得到的新公式与原公式等价。

例：证明： $P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow P\rightarrow(\neg Q\vee R)$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee R$$

$$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee R$$

$$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$$

# §1.4 真值表与等价公式

例：证明：

$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$为一永真式

# §1.4 真值表与等价公式

证明：原式：$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg(P\vee Q)\vee\neg(P\vee R)$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\Leftrightarrow T$

∵它是$P\vee\neg P$（永真式）的代换实例，永真式的代换实例仍为永真式！

# §1.4 真值表与等价公式

例：证明：

（1）$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)$

（2）$(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge(\neg P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)$

证明：

（1）左边$\Leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg P\vee Q)\wedge(Q\vee\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)$

# §1.4 真值表与等价公式

（2）左边 $\Leftrightarrow$ $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow$ $(P \wedge \neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow$ $(\neg P \wedge Q)$

# §1.5 重言式与蕴含式

如果一个命题公式的所有完全指派均为成真指派，则该公式称为重言式(永真式)。

如果一个命题公式的所有完全指派均为成假指派，则该公式称为矛盾式(永假式)。

既不是永真式，又不是永假式，则称此命题公式是可满足式。

讨论：

（1）永真式的否定为永假式；永假式的否定为永真式。

（2）若 A 和 B 都是永真式，则 $A \wedge B$ 、 $A \vee B$ 、 $A \rightarrow B$ 、 $A \leftrightarrow B$ 均为永真式。

# §1.5 重言式与蕴含式

[定义]若命题公式A→B是一个永真式，则称命题公式A蕴含命题公式B，记作：A⇒B

说明："A⇒ B"读作"A蕴含B"，"A推出B"

"⇒"是关系符，A⇒ B不为命题公式。

例：证明：P⇒ P∨Q；　　P∧Q⇒ P

（1）列出真值表

证明：P→（P∨Q）和（P∧Q）→P为永真式

# §1.5 重言式与蕴含式

| P | Q | $P \to (P \vee Q)$ | $(P \wedge Q) \to P$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F T F | F T F |
| F | T | F T T | F T F |
| T | F | T T T | F T T |
| T | T | T T T | T T T |

（2）可用等价公式证:

$P \to (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q) \Leftrightarrow T$

$(P \wedge Q) \to P \Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee P$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P \Leftrightarrow T$

# §1.5 重言式与蕴含式

**[定理]** 设A、B是二个命题公式

$A \Leftrightarrow B$的充分必要条件是 $A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$。

证明：　必要性：已知$A \Leftrightarrow B$，则$A \leftrightarrow B$为一永真式，由定律：（$A \leftrightarrow B$）$\Leftrightarrow$（$A \rightarrow B$）$\wedge$（$B \rightarrow A$）

$\therefore$（$A \rightarrow B$）且（$B \rightarrow A$）也为一永真式

即：　$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$成立

充分性：已知$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，$\therefore$（$A \rightarrow B$）且（$B \rightarrow A$）都为永真式，又因为（$A \leftrightarrow B$）$\Leftrightarrow$（$A \rightarrow B$）$\wedge$（$B \rightarrow A$），所以$A \leftrightarrow B$为永真式，故$A \Leftrightarrow B$也成立

此定理把“$\Leftrightarrow$”和“$\Rightarrow$”之间建立了相应的关系。

# §1.5 重言式与蕴含式

下面给出常用的蕴含式

$I_1$ $P \Rightarrow P \vee Q$ （$Q \Rightarrow P \vee Q$）

$I_2$ $P \wedge Q \Rightarrow P$ （$P \wedge Q \Rightarrow Q$）

$I_3$ $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

$I_4$ $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

$I_5$ $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

$I_6$ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$

$I_7$ $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R \rightarrow Q \wedge S)$

$I_8$ $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$

$I_9$ $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

# §1.5 重言式与蕴含式

$I_{10}$ $Q \Rightarrow P \to Q$

$I_{11}$ $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$

$I_{12}$ $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$

$I_{13}$ $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \Rightarrow R$

证明上述蕴含式的方法有三种：

（1）把“⇒ ”关系符改为“→”联结词，证明它为永真式。

(a) 真值表法

(b) 命题演算法

# §1.5 重言式与蕴含式

（2）找出使单条件命题前件为“T”的所有真值指派，试看能否导致后件均为“T”，若为“T”，则蕴含关系成立。

| P | Q | P→Q |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

# §1.5 重言式与蕴含式

例：$P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$

前件为“T”的所有指派为P、$(P \to Q)$均为“T”，

$P \to Q$为“T”，$\because$ P为“T”，$\therefore$ Q也应为“T”，

$\therefore P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$成立

（3）找出使单条件命题的后件均为“F”的所有真值指派，试看前件的所有真值是否为“F”，若是，则蕴含成立。

# §1.5 重言式与蕴含式

例： $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

后件为“F”的所有条件是： P为“T”，

代入前件得

(i ) 若Q为T， 则 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为“F”；

(ii ) 若Q为F， 则 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为“F”；

$\therefore \neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$ 成立

若后件简单则可选用 (3)；若前件简单则可选用 (2) 。

二种方法是互为独立的，只需使用一种证明就行。

# §1.5 重言式与 蕴含式

讨论一下永真式

可得出三个结论:

（1）若一个命题公式 A 等价于一个永真式 B，则公式 A 一定为永真式。

（2）若一个永真的命题公式 A 蕴含一个命题公式 B，则此命题公式 B 一定也为永真式。

（3）若一个永假的命题公式蕴含一个命题公式，则该公式可能是永真式、永假式或可满足的。

# §1.5 重言式与蕴含式

[定理] 给定命题公式A、B、C，

若$A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$。

证明：$\because A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow C$，

$\therefore$ $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C)$ 为永真式，

由$I_6$： $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$，

$\therefore$ $(A \rightarrow C)$ 也为永真式；即，$A \Rightarrow C$ 成立

# §1.5 重言式与蕴含式

[推论] 若A $\Rightarrow B_1$ 、 $B_1 \Rightarrow B_2$ . . . . . . . $B_m \Rightarrow$ B，则A $\Rightarrow$ B 。

[定理] 给定一个命题公式A、B、C，若A $\Rightarrow$ B，A $\Rightarrow$ C，则A $\Rightarrow$（B ∧ C）

证明：∵A $\Rightarrow$ B ∧ A $\Rightarrow$ C，

∴（A→B）和（A→C）都为永真式，

由条件，若A为"T"，则B 、C必均为"T"，

∴ B ∧ C也为"T"，因此，A $\Rightarrow$（B ∧ C） 。

# §1.5 重言式与蕴含式

上述也可用等价公式证明它：

因为此时（A→B）∧（A→C）为永真式，又因为

（A→B）∧（A→C）

⇔（¬A∨B）∧（¬A∨C）

⇔¬A∨（B∧C）

⇔A→（B∧C）

故A→（B∧C）也为永真式

∴ A⇒（B∧C）成立

[定义] 设 $H_1, H_2 \ldots H_m$, Q均为命题公式，若（$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m$）⇒Q，则称 $H_1, H_2 \ldots H_m$ 共同蕴含Q，（也称 $H_1, H_2 \ldots H_m$ 共同推出Q），

并记作： $H_1, H_2 \ldots H_m \Rightarrow Q$。

# §1.5 重言式与蕴含式

[定理]若 $(H_1 \land H_2 \land \ldots H_m)$, $P \Rightarrow Q$，当且仅当 $(H_1 \land H_2 \land \ldots H_m) \Rightarrow (P \to Q)$。

证明：因为 $(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m \land P) \to Q$

$\Leftrightarrow \neg (H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m \land P) \lor Q$

$\Leftrightarrow (\neg H_1 \lor \neg H_2 \lor \ldots \lor \neg H_m) \lor (\neg P \lor Q)$

$\Leftrightarrow \neg (H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m) \lor (P \to Q)$

$\Leftrightarrow H_1 \land H_2 \land \ldots. \land H_m \to (P \to Q)$

$\therefore$ $(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m \land P) \to Q$ 为永真式（此时 $(H_1 \land H_2 \land \ldots H_m)$, $P \Rightarrow Q$）当且仅当 $(H_1 \land H_2 \land \ldots. \land H_m) \to (P \to Q)$ 为永真式(此时 $H_1 \land H_2 \land \ldots. \land H_m) \Rightarrow (P \to Q)$)

注意：这个定理以后也称为CP规则

# §1.6 其他联结词

一．其他命题联结词：

(1) 不可兼或（异或，异）

(a) 符号 :$\nabla$($\oplus$), $P\nabla Q$ , 读作“P 异或 Q”

(b) 定义：（由真值表）

| P | Q | $P\nabla Q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

(c) 异或的性质：

$$P\nabla Q \Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge P)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow Q\nabla P$$

$$(P\nabla Q)\nabla R \Leftrightarrow P\nabla(Q\nabla R)$$

# §1.6 其他联结词

$P \wedge (Q \nabla R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \nabla (P \wedge R)$

（$\wedge$对$\nabla$ 可分配的）

$P \nabla P \Leftrightarrow F$

$P \nabla \neg P \Leftrightarrow T$

$F \nabla P \Leftrightarrow P$

$T \nabla P \Leftrightarrow \neg P$

若$P \nabla Q \Leftrightarrow R$，则有：

$P \nabla R \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \nabla P$

$R \nabla Q \Leftrightarrow P \Leftrightarrow Q \nabla R$

$Q \nabla P \Leftrightarrow R$，$P \nabla Q \nabla R \Leftrightarrow F$

# §1.6 其他联结词

(2)"与非"联结词:

(a) 符号↑，$P \uparrow Q$读作"P与Q的否定"或"P与非Q"

(b) 定义: (由真值表) $(P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

| P | Q | $P \uparrow Q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

# §1.6 其他联结词

(c) 性质：

$(P \uparrow Q) \Leftrightarrow (Q \uparrow P)$

$(P \uparrow P) \Leftrightarrow \neg P$

$(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$

$(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$

$P \uparrow (Q \uparrow R) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$ 不可结合

$(P \uparrow Q) \uparrow R \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg R$ 不可结合

$P \uparrow T \Leftrightarrow \neg P$，$P \uparrow F \Leftrightarrow T$

# §1.6 其他联结词

(3)"或非"联结词:

(a) 符号: "↓"

（P↓Q） 读作: "P或Q的否定"或"P或非Q"

(b) 定义（由真值表给出）:

$$(P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg (P \vee Q)$$

| P | Q | P↓Q |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | F |

# §1.6 其他联结词

(c) 性质：

$P \downarrow Q \Leftrightarrow Q \downarrow P$ （可交换的）

$P \downarrow P \Leftrightarrow \neg P$

$(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$

$(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

$P \downarrow (Q \downarrow R) \Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \vee R)$ 不可结合

$(P \downarrow Q) \downarrow R \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg R$ 不可结合

$P \downarrow F \Leftrightarrow \neg P$； $P \downarrow T \Leftrightarrow F$

(d) 由（2）和（3）中的性质可见，↑和↓是互为对偶的。

# §1.6 其他联结词

(4)“ 蕴含否定”联结词：

(a) 符号“$\xrightarrow{c}$”

(b) 定义 ( 由真值表给出）：

$P \xrightarrow{c} Q \Leftrightarrow \neg(P \to Q)$

| P | Q | $P \xrightarrow{c} Q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | F |
| F | F | F |

# §1.6　其他联结词

下面讨论不同的一元联结词和二元联结词的个数：

按命题公式的生成规则，用联结词可组成无限个命题公式。下面讨论这些命题公式有多少种不同的真值表：

(a) 若命题变元只有一个P，则用联结词组成的命题公式由四种不同的真值表，即为：

| P | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | T |
| T | F | T | F | T |

# §1.6　其他联结词

所有依赖于P的命题公式均等价于这四个中的一个

因此，一元联结词共有4个。

(b) 若有二个命题变元P、Q，则命题公式的不同真值表有：　$2^{2^2}=2^4=16$种。（见课本P27页，表1-6.5）

因此，二元联结词共有16个。

推广到一般：若有n个变元的命题公式，则可构成不同的真值表为$2^{2^n}$（个）。

# §1.6 其他联结词

二． 二元运算中的全部联结词总结：

¬、∧、∨、→、↔ 是五个基本联结词。

到此为止，一个符号系统已定义完毕，它们是：

命题变元：A、B…X、Y、Z。

值：F、T

运算符：¬、∧、∨、→、↔、$\overset{c}{\rightarrow}$、↑、↓、▽

括号：（）

关系符：⇔、⇒

# §1.6　其他联结词

三．全功能联结词集合：

[ 定义 ] 一个联结词集合，用其中联结词构成的式子足以把一切命题公式等价的表达出来，则称此联结词集合为全功能联结词集合（完备联接词组）。

[ 定义 ] 设有一联结词集合 A，若

（1）用 A 中的联结词的等价式能表达任何的一个命题公式；

（2）删除 A 中的任一联结词，从而形成一个新的联结词集合 A’，至少有一个命题公式 B 不能用 A’中的联结词的等价式来表示，则称 **A** 为最小的全功能联结词集合 **(** 最小完备联接词组 **)**。

# §1.6 其他联结词

我们可以证明：{¬，∨}；{¬，∧}；{¬，→}；{↑}；{↓}均为全功能联结词集合，且均是最小的全功能联结词集合。

例：用上述最小全功能联结词集合中的联结词单一表达下述命题公式：

# §1.6 其他联结词

$$(P \to Q) \Leftrightarrow \neg P \lor Q \qquad \{\neg, \lor\}$$

$$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \land \neg Q) \qquad \{\neg, \land\}$$

$$\Leftrightarrow \neg\neg(P \to Q) \qquad \{\neg, \to\}$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \xrightarrow{c} Q) \qquad \{\neg, \xrightarrow{c}\}$$

$$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\{\downarrow\}$$

$$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \lor Q) \Leftrightarrow \neg(P \land \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q) \qquad \{\uparrow\}$$

# §1.7 对偶与范式

对偶公式：

[定义] 给定二个命题公式A，若用∧代换∨，用∨代换∧，用T代换F，用F代换T，得到另一个命题公式A*，则称A*为公式A的对偶式，实际上A和A*是互为对偶的公式。

例如：$P\vee Q$ 的对偶式为 $P\wedge Q$，

$P\wedge Q$ 的对偶式为 $P\vee Q$

注意：一般的：A不等价于A*

例：写出下列命题公式的对偶式：

| | | |
|---|---|---|
| $P\vee(Q\wedge R)$ | | $P\wedge(Q\vee R)$ |
| $P\vee F\Leftrightarrow P$ | 对偶式 A* | $P\wedge T\Leftrightarrow P$ |
| $P\vee T\Leftrightarrow T$ | | $P\wedge F\Leftrightarrow F$ |

命题公式 $P\to Q$，$P\leftrightarrow Q$ 的对偶公式分别是什么？

# §1.7 对偶与范式

讨论定义：

（1）若命题公式中有联结词→，↔，则必须把化成由联结词∧，∨，¬组成的等价的命题公式，然后求它的对偶式；

例：求 (P→Q)^(P→R) 的对偶式

# §1.7 对偶与范式

（2）在写对偶式时，原命题公式中括号不能省去，必须按优先级的次序画上括号，并在求其对偶式时仍将保留括号。

例：（$P \land Q$）$\lor R$对偶式写成

（$P \lor Q$）$\land R$，而不能写成$P \lor Q \land R$

# §1.7　对偶与范式

## 什么叫范式

把命题公式化归为一种标准的形式，称此标准形式为范式。

## 什么叫判定

以有限次步骤来决定命题公式是否为永真式、永假式，还是可满足的，或者判定二个命题公式是否等价等这一类的问题，统称为判定问题。

讨论范式和主范式的目的就是为了进行判定。

# §1.7 对偶与范式

范式就是命题公式形式的规范形式。这里约定在范式中 只含有联结词¬、∨和∧。

## 一 . 析取范式与合取范式

### 1. 合取式与析取式

**合取式**：是用“∧”联结命题变元或变元的否定构成的式子。

如 $P$ 、$\neg P$ 、 $P\wedge\neg Q$ 、 $P\wedge\neg Q\wedge\neg R$

**析取式**：是用“∨” 联结命题变元或变元的否定构成的式子。

如 $P$ 、$\neg P$ 、 $P\vee\neg Q$ 、 $P\vee\neg Q\vee\neg R$

注 $\because P\vee P\Leftrightarrow P \quad P\wedge P\Leftrightarrow P \therefore P$ 是合 ( 析 ) 取式 .

- 2. 析取范式

公式 A 如果写成如下形式：

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ $(n \geq 1)$ 其中每个 $A_i$ $(i=1,2..n)$ 是合取式，称之为 A 的**析取范式**。

- 3. 合取范式

公式 A 如果写成如下形式：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geq 1)$ 其中每个 $A_i$ $(i=1,2..n)$ 是析取式，称之为 A 的**合取范式**。

- 例如， $P \leftrightarrow Q$ 的析取范式与合取范式：

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$---- 析取范式

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$---- 合取范式

## 4. 析取范式与合取范式的写法

(1) 先用相应的公式去掉→和↔。

公式 $E_{16}$ $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

公式 $E_{21}$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

公式 $E_{20}$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

再用 $E_{16}$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

(2) 用公式的否定公式或摩根定律将¬后移到命题变元之前。

$$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

**底** - 摩根定律 $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

(3) 用分配律、幂等律等公式进行整理，使之成为所要求的形式。

# §1.7 对偶与范式

求析取范式的步骤：

（1）利用等价公式：化去“→”、“↔”联结词，把命题公式变为与其等价的用 {¬，∧，∨} 表达的公式。

例：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

（2）将“¬”深入到原子命题变元之前，并使变元之前最多只有一个“¬”词。

例：$\neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg\neg P \wedge \neg\neg Q$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q$$

# §1.7 对偶与范式

（3）利用“∧”对“∨”的分配，将公式化为析取范式。

（4）除去永假项得最简析取范式。

例：求$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的析取范式：

# §1.7 对偶与范式

解: $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q$

$\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee$

$(\neg\neg(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$

----- （1）化去↔词

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

----- （2）将“¬”深入到变元前面，并最多保留一个¬

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg Q))$

----- （3）“∧”对或“∨”的分配，化成为析取范式

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

----- （4）最简析取范式

# §1.7 对偶与范式

求合取范式的步骤:

求一个命题公式的合取范式的方法和求析取范式的方法类同:

第（1）、（2）步相同;

第（3）利用"∨"对"∧"的分配就行;

第（4）去掉永真的析取项。

例求 $(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$ 的析取范式与合取范式

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee R$ ------- 析取范式

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R\Leftrightarrow\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee R$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee R$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$ --- 合取范式

## 二. 主析取范式与主合取范式

一个公式的析取范式与合取范式的形式是不唯一的。下面定义形式唯一的主析取范式与主合取范式。

㈠主析取范式

### 1. 小项

⑴ 定义：在一个有 n 个命题变元的合取式中，每个变元与它的否定必出现且仅出现一次，称这个合取式是个**小项**。

例如，两个变元的小项：

$P \wedge Q$、$P \wedge \neg Q$、$\neg P \wedge Q$、$\neg P \wedge \neg Q$

(2) 小项的性质

| | $m_3$ | $m_2$ | $m_1$ | $m_0$ |
|---|---|---|---|---|
| P Q | P∧Q | P∧¬Q | ¬P∧Q | ¬P∧¬Q |
| 00 F F | F | F | F | T |
| 01 F T | F | F | T | F |
| 10 T F | F | T | F | F |
| 11 T T | T | F | F | F |

a). 有 n 个变元，则有 $2^n$ 个小项。

b). 每一组指派有且只有一个小项为 T 。

为了记忆方便，可将各组指派对应的为 T 的小项分别记作 $m_0,m_1,m_2,\ldots,m_{2^n-1}$ 上例中

$m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$　　$m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

$m_2 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$　　$m_3 \Leftrightarrow P \wedge Q$

## 2．主析取范式定义

析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$，其中每个 $A_i$ (i=1,2..n) 都是小项，称之为**主析取范式**。

## 3．主析取范式的写法

方法**I** ：列真值表

⑴ 列出给定公式的真值表。

⑵ 找出真值表中每个“T”对应的小项。

⑶ 用“∨”联结上述小项，即可。

例如求 $P\rightarrow Q$ 和 $P\leftrightarrow Q$ 的主析取范式

| P | Q | $P\rightarrow Q$ | $P\leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | T | F |
| T | F | F | F |
| T | T | T | T |

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow m_0 \vee m_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

思考题：永真式的主析取范式是什么样？

## 方法Ⅱ：用公式的等价变换

⑴ 先写出给定公式的析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ 。

⑵ 为使每个 $A_i$ 都变成小项，对缺少变元的 $A_i$ 补全变元，比如缺变元 R ，就用∧联结永真式 $(R \vee \neg R)$ 形式补 R 。

⑶ 用分配律等公式加以整理。

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

㈡主合取范式

## 1. 大项

⑴ 定义：在有 n 个命题变元的析取式中，每个变元与它的否定必出现且仅出现一次，称之为**大项**。

例如，有两个变元的大项及其真值表：

| | | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | Q | P∨Q | P∨¬Q | ¬P∨Q | ¬P∨¬Q |
| F | F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | T | T |
| T | F | T | T | F | T |
| T | T | T | T | T | F |

⑵ 大项的性质

a). 有 n 个变元，则有 $2^n$ 个大项。

b). 每一组指派有且只有一个大项为 **F** 。

为了记忆方便，可将各组指派对应的为 **F** 的大项分别记作 $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{2^n-1}$ 。

上例中

$M_0 \Leftrightarrow P \vee Q$　　　$M_1 \Leftrightarrow P \vee \neg Q$

$M_2 \Leftrightarrow \neg P \vee Q$　　　$M_3 \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

- 2. 主合取范式定义

  合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$,，其中每个 $A_i$ (i=1,2..n) 都是大项，称之为**主合取范式**。

- 3. 主合取范式的写法

方法**I** ： 列真值表

⑴ 列出给定公式的真值表。

⑵ 找出真值表中每个“ F”对应的大项。

⑶ 用“∧”联结上述大项，即可。

例如求 $P\rightarrow Q$ 和 $P\leftrightarrow Q$ 的主合取范式

| P | Q | $P\rightarrow Q$ | $P\leftrightarrow Q$ |
| --- | --- | --- | --- |
| F | F | T | T |
| F | T | T | F |
| T | F | F | F |
| T | T | T | T |

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow M_2 \Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow M_1 \land M_2$$

$$\Leftrightarrow (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor Q)$$

## 方法Ⅱ：用公式的等价变换

⑴ 先写出给定公式的合取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m$ 。

⑵ 为使每个 $A_i$ 都变成大项，对缺少变元的 $A_i$ 补全变元，比如缺变元 R ，就用$\vee$ 联结永假式 $(R \wedge \neg R)$ 形式补 R 。

⑶ 用分配律等公式加以整理。

例如，求 **$(P\to Q)\to R$** 的主合取范式

$(P\to Q)\to R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee R)\wedge$

$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

课堂练习:

1. 已知 **A(P,Q,R)** 的真值表如图:

求它的主析取和主合取范式。

| P | Q | R | A(P,Q,R) |
|---|---|---|---|
| F | F | F | T |
| F | F | T | F |
| F | T | F | F |
| F | T | T | T |
| T | F | F | T |
| T | F | T | F |
| T | T | F | T |
| T | T | T | T |

2. 已知 **A(P,Q,R)** 的主析取范式中含有下面小项 $m_1, m_3, m_5, m_7$ 求它的和主合取范式.

# 讨论

（1）与命题公式等价的主合范式中大项的个数等于其真值表中真值为“F”的个数。由真值表找大项的方法为：将表中值为“F”的对应真值指派中，把变元写成否定，把变元的否定写成变元。

（2）只要命题公式不是永真式，则一定可以写出对应与其等价的唯一的主合取范式。

（3）若命题公式为含有 n 个变元的永假式，则主合取范式包含了 $2^n$ 个大项的合取式。

（4）可用主合取范式判定二个命题公式是否等价。

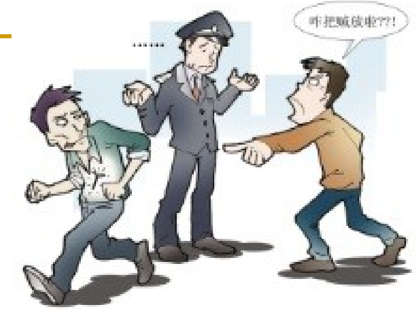
（5）已知一个命题公式的主析取范式，则一定可以直接写出与其等价的主合取范式来。反之也行。

（6）对应于有 n 个变元的命题公式，则一定有：

主析范式小项数＋主合范式大项数＝ $2^n$

问题：如果已知命题公式 **A** 的主析取范式，如何直接写出 **A** 的主合范式？同样，如果已知命题公式 **A** 的主合取范式，如何直接写出 **A** 的主析范式？

# §1.8 推理理论



## 民警断案

一公安民警审查一件盗窃案，根据下列事实：

(1) 张平或王磊盗窃了机房的计算机一台； $Z \vee W$

(2) 若张平盗窃了计算机，则作案时间不可能发生在午夜之前； $Z \rightarrow \neg R$

(3) 若王磊的证词正确，则午夜时机房里的灯未灭； $S \rightarrow \neg M$

(4) 若王磊的证词不正确，则作案时间发生在午夜之前； $\neg S \rightarrow R$

(5) 午夜时机房灯光灭了。 $M$

断定：盗窃计算机的是王磊。 $W$

解：（1） 符号化

设 Z: 张平盗窃了计算机； W: 王磊盗窃了计算机； M: 午夜时灯光灭了；

R: 作案时间发生在午夜前； S: 王磊的证词正确。

# §1.8 推理理论

按公认的推论规则，从前提集合中推导出一个结论来，这样的推导过程称为演绎，或者叫形式证明。

在任何论证中，若认定前提是真的，且从前提集合推导出结论的论证是遵守了逻辑规则的，则我们称此结论是合法的。

根据逻辑规则推导出来的任何结论称为有效结论。

推论规则就是指确定论证的有效性的判据，常是用命题形式表示这些规则，而不涉及实际命题和它的真值。

# §1.8 推理理论

[定义] 给定二个命题公式A和B，当且仅当A→B是一个永真式，才可以说B是从A推导出来的，或称B是前提A的有效结论，也称为由A推出B,

记作：$A \Rightarrow B$

[定义] 设$H_1$，$H_2,\ldots H_m$, C都是命题公式，当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow C$，才可以说C是前提集合$\{H_1, H_2,\ldots H_m\}$的有效结论。

记作：$H_1, H_2,\ldots H_m \Rightarrow C$

# §1.8 推理理论

本节介绍的证明方法，归纳分成三类：

（一）真值表技术；

（二）推论规则；

（三）间接证明法。

真值表技术的主要依据是“→”的真值表定义。

若 A⇒B 当且仅当

（A→B）为永真式。

| P | Q | P→Q |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

# §1.8 推理理论

从给定真值表常用的判断方法有二种：

（1）检查真值表中 $H_1$， $H_2, \ldots H_m$ 全部为"T"的所有行，看结论C是否也均为"T"，若C均为"T"，则结论有效。否则结论无效。

（2）看结论C为"F"的所有行，检查每行前提 $H_1$， $H_2, \ldots H_m$ 中是否至少有一个为F，若有"F"，则结论有效；若有均为"T"的行，则结论无效。

例：试证明下列结论是否有效：

画出真值表：

# §1.8 推理理论

| P | Q | $P\to Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg(P\wedge Q)$ | $P\leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T | T | T |
| F | T | T | T | F | T | F |
| T | F | F | F | T | T | F |
| T | T | T | F | F | F | T |

由真值表可见：

（1） $P,\ P\to Q \Rightarrow Q$ 有效

（2） $P\to Q,\ \neg P \Rightarrow Q$ 无效

（3） $P\to Q,\ \neg(P\wedge Q) \Rightarrow \neg P$ 有效

（4） $\neg P,\ P\leftrightarrow Q \Rightarrow \neg(P\wedge Q)$ 有效

# §1.8 推理理论

（5） $P \to Q, \quad Q \Rightarrow P$ 无效

例：$H_1$：如果大连是一个大城市，则大寨是一个乡村； $P \to Q$

$H_2$：大寨是一个乡村； $Q$

C：大连是一个大城市； $P$

则：$P \to Q, \quad Q \Rightarrow P$

或者称：P不能从前提集合中推导出来。

# §1.8 推理理论

２．推理规则：

从这节开始，我们只讨论命题论证的有效性，而不去讨论命题的真假值；

∴ 在推论规则中不需要有真值表，也不需要对命题进行真值指派。

推理规则的依据是常用的蕴含式和等价公式。

$I_1$ $P \Rightarrow P \vee Q$； $Q \Rightarrow P \vee Q$

$I_2$ $P \wedge Q \Rightarrow P$； $P \wedge Q \Rightarrow Q$

$I_3$ $P$， $P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

# §1.8 推理理论

$I_4$ $(P \to Q)$ , $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$I_5$ $\neg P$ , $(P \vee Q) \Rightarrow Q$

$I_6$ $(P \to Q)$ , $(Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$

$I_7$ $(P \to Q) \Rightarrow ((Q \to R) \to (P \to R))$

$I_8$ $(P \to Q)$ , $(R \to S) \Rightarrow (P \wedge R \to Q \wedge S)$

$I_9$ $(P \leftrightarrow Q)$ , $(Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$

$I_{10}$ $\neg P \Rightarrow P \to Q$

# §1.8 推理理论

下面介绍常用的推理规则：

P 规则（前提引入规则）：在推导的任何步骤上都可以引入前提（条件）

T 规则（结论引入规则）：在推导过程中，如果前面有一个或多个公式蕴含 S，则可以把 S 引入推导过程之中。

**例 1**：证明：$\mathbf{P\rightarrow Q, Q\rightarrow R, P \Rightarrow R}$

推理过程：

# §1.8 推理理论

**例 1**： 证明： **$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \Rightarrow R$**

| 推理步骤 | 推理内容 | 推理注释 |
|---|---|---|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | P |
| (2) | P | P |
| (3) | Q | T(1)(2)I |
| (4) | $Q \rightarrow R$ | P |
| (5) | R | T (3)(4)I |

也可以这样推理：

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | P |
| (2) | $Q \rightarrow R$ | P |
| (3) | $P \rightarrow R$ | T (1)(2)I |
| (4) | P | P |
| (5) | R | T(3)(4) I |

所以， **$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \Rightarrow R$**

# §1.8 推理理论

**例** 2 证明： $(P\vee Q),(P\rightarrow R),(Q\rightarrow S)\Rightarrow S\vee R$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(P\vee Q)$ | P |
| (2) | $\neg P\rightarrow Q$ | T(1)E |
| (3) | $Q\rightarrow S$ | P |
| (4) | $\neg P\rightarrow S$ | T(2)(3)I |
| (5) | $\neg S\rightarrow P$ | T(4)E |
| (6) | $P\rightarrow R$ | P |
| (7) | $\neg S\rightarrow R$ | T(6)I |
| (8) | $S\vee R$ | T(7)E |

所以， $(P\vee Q),(P\rightarrow R),(Q\rightarrow S)\Rightarrow S\vee R$

# §1.8 推理理论

下面引进条件证明规则 **CP**：

**$P \Rightarrow (Q \rightarrow R)$** 当且仅当 **$P$，$Q \Rightarrow R$**

即：如果能从 Q 和给定的前提集合 P 中推导出 R 来，当且仅当 能够从前提集合 P 中推导出（Q → R）来。

进一步：

**$H_1,H_2\ldots H_m \Rightarrow (H \rightarrow C)$** 当且仅当 **$H_1,H_2\ldots H_m ,H \Rightarrow C$**

# §1.8 推理理论

**例 3**： $P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证： (1) $R$ 附加前提

(2) $\neg R\vee P$ P

(3) $R\rightarrow P$ T(2) E

(4) $P$ T(1)(3)I

(5) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$ P

(6) $Q\rightarrow S$ T(4)(5)I

(7) $Q$ P

(8) $S$ T(6)(7)I

(9) $R\rightarrow S$ CP

所以， $P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

# §1.8 推理理论

**例 4**: $P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $P$ | 附加前提 |
| (2) | $P \to Q$ | P |
| (3) | $Q$ | T(1)(2)I |
| (4) | $P \wedge Q$ | T(1)(3)I |
| (5) | $P \to (P \wedge Q)$ | CP |

所以，$P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$

# §1.8 推理理论

**3**．间接证明法：（反证法、归谬法）

$$H_1, H_2 \ldots H_m \Rightarrow C$$

当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C \Leftrightarrow F$

# §1.8 推理理论

**例 4**： 证明 $\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg (P \wedge Q)$

证： (1) $\neg(\neg (P \wedge Q))$ 假设前提

(2) $P \wedge Q$ T(1)E

(3) $P$ T(2)I

(4) $\neg P \wedge \neg Q$ P

(5) $\neg P$ T(4)I

(6) $P \wedge \neg P$ T(3)(5)I

(7) F

所以， $\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg (P \wedge Q)$

# §1.8 推理理论

例 2: 证明 : $R \to \neg Q, R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

| | |
|---|---|
| (1) $\neg(\neg P)$ | 假设前提 |
| (2) $P$ | T(1)E |
| (3) $P \to Q$ | P |
| (4) $Q$ | **T(2)(3)I** |
| (5) $S \to \neg Q$ | P |
| (6) $Q \to \neg S$ | T(5)E |
| (7) $\neg S$ | **T(4)(6)I** |
| (8) $R \vee S$ | P |
| (9) $R$ | **T(7)(8)I** |
| (10) $R \to \neg Q$ | P |
| (11) $\neg Q$ | **T(9)(10)I** |
| (12) $Q \wedge \neg Q$ | **T(4)(11)I** |

所以, $R \to \neg Q, R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

# 三、推理理论的应用

## 符号化下列命题，并证明其结论

一公安人员审查一件盗窃案，已知事实如下：

(1) 张平或王磊盗窃了机房的计算机一台； $Z \vee W$

(2) 若张平盗窃了计算机，则作案时间不可能发生在午夜之前； $Z \rightarrow \neg R$

$S \rightarrow \neg M$

(3) 若王磊的证词正确，则午夜时机房里的灯未灭； $\neg S \rightarrow R$

(4) 若王磊的证词不正确，则作案时间发生在午夜之前； M

(5) 午夜时机房灯光灭了。 Z 或 W

问：盗窃计算机的是张平还是王磊?

解： （1）首先将事实符号化：

设 Z: 张平盗窃了计算机； W: 王磊盗窃了计算机； M: 午夜时灯光灭了。

R: 作案时间发生在午夜前； S: 王磊的证词正确；

# 三、推理理论的应用

## 民警断案

下面证明： $Z \vee W, Z \to \neg R, S \to \neg M, \neg S \to R, M \Rightarrow W$

| | | |
|---|---|---|
| （1） | $M$ | P |
| （2） | $S \to \neg M$ | P |
| （3） | $\neg S$ | T(1)(2)I |
| （4） | $\neg S \to R$ | P |
| （5） | $R$ | T(3)(4)I |
| （6） | $Z \to \neg R$ | P |
| （7） | $\neg Z$ | T(5)(6)I |
| （8） | $Z \vee W$ | P |
| （9） | $W$ | T(7)(8)I |

说明是王磊盗窃了机房的计算机。

# 三、推理理论的应用

## 构造下面推理的证明


某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，面试后，公司表示：

1. 三人中至少录取一人 $A \vee B \vee C$
2. 若录取A，不录取B，则一定录取C $(A \wedge \neg B) \rightarrow C$
3. 如果录取B，则一定录取C。$B \rightarrow C$

求证：公司一定录取C $C$

解：（1）符号化

设A：录取A，B：录取B，C：录取C

（2）证明：

$A \vee B \vee C, (A \wedge \neg B) \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow C$

# 判断是 (√) 非 (×)

**设 A , B , C** 是任意命题公式

（1） 如果 $A \Rightarrow B$ ， 则必有 $A \leftrightarrow B$ 为永真公式。

（2） 如果 $A \leftrightarrow B$ 为永真公式，则必有 $A \Leftrightarrow B$

（3） 如果 $A \Rightarrow B$ 且 A 为重言式，则 B 也为重言式。

（4） 如果 $A \Rightarrow B$ 且 B 为重言式，则 A 也为重言式。

（5） 如果 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$， 则必有 $A \Leftrightarrow B$

（6） 如果 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$， 则必有 $A \Leftrightarrow B$

（7） A， $B \Rightarrow C$ 当且仅当 $A \Rightarrow B \rightarrow C$

（8） 如果 $A \Rightarrow B$ 且 A 为矛盾式，则 B 也为矛盾式。

（9） 如果 $A \Rightarrow B$ 且 B 为矛盾式，则 A 也为矛盾式。

（10） 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$， 则必有 $A \Leftrightarrow B$

# 课堂练习题

用命题逻辑的推理规则证明下列各式

一、证明：$(P \wedge Q) \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S, P \Rightarrow \neg Q$

二、证明：$(P \wedge Q) \rightarrow R, \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \rightarrow R$

三、证明：$P \rightarrow \neg Q, \neg R \vee Q, R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P$

# 第一章小结

学习第一章要注意以下几点:

（1） 弄清命题与陈述句的关系。

（2） 弄清由 6 种基本联结词联结的复合命题的逻辑关系及其真值。特别是要弄清” P→Q“ 真值。

（3） 记住常用的蕴含式和等价式，这是学好命题逻辑的关键问题。

（4） 熟练掌握求出给定公式的主析取范式和主合取范式。

（5） 熟练掌握命题逻辑的推理理论

# 习题选讲

例 1. 符号化下列命题:

（1） 辱骂和恐吓决不是战斗;

（2）除非天气好，否则我是不会去公园的;

（3）如果晚上做完作业且没有其它的事，他就会去看电视或听音乐。

解: （1）设 P： 辱骂不是战斗。

Q： 恐吓不是战斗。

$P \vee Q$

（2）设 P： 今天天气好。

Q： 我去公园。 $Q \rightarrow P$

# 习题选讲

（3）设 P： 他晚上做完了作业。

Q： 他晚上没有其它事情。

R： 他看电视。

S： 他听音乐。

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \nabla S)$$

例 2. 证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

给出本题的各种证明:

（1）列真值表：设 $M \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

$K \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$S \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

# 习题选讲

| P Q R | Q →R | M | P →Q | P →R | K | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T T T | T | T | T | T | T | T |
| T T F | F | F | T | F | F | T |
| T F T | T | T | F | T | T | T |
| T F F | T | T | F | F | T | T |
| F T T | T | T | T | T | T | T |
| F T F | F | T | T | T | T | T |
| F F T | T | T | T | T | T | T |
| F F F | T | T | T | T | T | T |

# 习题选讲

a) 直接证法： P→（Q→R）的真值为T，其对应指派下（P→Q）→（P→R）的真值均为T。

b) 反证法：（P→Q）→（P→R）的真值为F，其对应指派下P→（Q→R）的真值为F。

c) 条件永真式：

（P→（Q→R））→（（P→Q）→（P→R））的真值都为T，及为永真式。

（2）逻辑推证

a) 直接证法：设P→（Q→R）为T，则

① P为T， Q→R为T，有三种情况：

P为T,Q为T,R为T,则（P→Q）→（P→R）为T。

# 习题选讲

P 为 T,Q 为 F,R 为 T, 则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T 。

P 为 T,Q 为 F,R 为 F, 则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T 。

③P 为 F， $Q\rightarrow R$ 为 F， 则:

P 为 F， Q 为 T， R 为 F， 所以 $P\rightarrow Q$ 为 T， $P\rightarrow R$ 为 T， 得（$P\rightarrow Q$）$\rightarrow$（$P\rightarrow R$）为 T 。

③P 为 F， $Q\rightarrow R$ 为 T， 则:

P 为 F,Q 为 T,R 为 T, 则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T 。

P 为 F,Q 为 F,R 为 F, 则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T 。

P 为 F,Q 为 F,R 为 T, 则 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T 。

综上 : 当 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 为 T 时 , 必有 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$ 为 T 。

# 习题选讲

b) 间接证法：

设（P → Q） → （P → R）为 F，则

必有 P → Q 为 T， P → R 为 F，故得 P 为 T， Q 为 T， R 为 F 。所以 P → （Q → R）为 F 。

（3）等价变换

$$S \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee R))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((\neg P \vee R \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \neg (P \wedge Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow T$$

# 习题选讲

例 3. 证明 {↔, ¬} 不是最小联结词组。

证明 : 设变元 P,Q, 用联结词↔ ,¬ 作用于 P,Q 得到:

$P,Q,\neg P,\neg Q,P\leftrightarrow Q,P\leftrightarrow P,Q\leftrightarrow Q,Q\leftrightarrow P$ 。

但 $(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(Q\leftrightarrow P),(P\leftrightarrow P)\Leftrightarrow(Q\leftrightarrow Q)$, 故实际有:

$P,Q,\neg P,\neg Q,P\leftrightarrow Q,P\leftrightarrow P(T)$ (A)

用¬作用于 (A) 类 , 得到扩大的公式类 ( 包括原公式类 ):$P,Q,\neg P,\neg Q,P\leftrightarrow Q,\neg(P\leftrightarrow Q),T,F$ (B)

用↔作用于 (A) 类得到:

$P\leftrightarrow Q$ ， $P\leftrightarrow \neg P(F)$ ， $P\leftrightarrow \neg Q\Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$ ，

$P\leftrightarrow (P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow Q$ ， $P\leftrightarrow (P\leftrightarrow P) \Leftrightarrow P$,

$Q\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q),Q\leftrightarrow\neg Q(F),Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$,

$Q\leftrightarrow T \Leftrightarrow Q$ ，

# 习题选讲

$\neg P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$， $\neg P \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg Q$，

$\neg P \leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg P$， $\neg Q \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P$，

$\neg Q \leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg Q$， $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow P) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$ 。

因此 (A) 类使用↔运算后，仍在 (B) 类中。

同样，对 (B) 类使用↔， ¬运算后，结果仍在 (B) 中。

由上证明：用↔， ¬两个联结词，反复作用在两个变元的公式中，结果只能产生 (B) 类中的公式，总共仅八个不同公式，而两个变元所形成的公式共有 $2^{2^2}=16$ 个彼此不等价的公式，因此｛↔，¬｝不是功能完备的，更不可能是最小联结词组。

# 习题选讲

例 4.  求 $(A \to B \wedge C) \wedge (\neg A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$ 的主析取范式与主合取范式。

解： (1) 列表法：

设 $S \Leftrightarrow (A \to B \wedge C) \wedge (\neg A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$，

$R \Leftrightarrow A \to B \wedge C$，

$M \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$，

根据真值表中 S 真值为 T 的指派，所对应的小项析取即为 S 的主析取范式， S 真值为 F 的指派，所对应的大项合取即为主合取范式。

S 的真值表如下：

# 习题选讲

| A B C | B^C | R | ¬A | ¬B^¬C | M | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T T T | T | T | F | F | T | T |
| T T F | F | F | F | F | T | F |
| T F T | F | F | F | F | T | F |
| T F F | F | F | F | T | F | F |
| F T T | T | T | T | F | F | F |
| F T F | F | T | T | F | F | F |
| F F T | F | T | T | F | F | F |
| F F F | F | T | T | T | T | T |

# 习题选讲

$S \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ —— 主析取范式

$S \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$ ——主合取范式

(2) 公式推导法:

$S \Leftrightarrow (A \rightarrow B \wedge C) \wedge (\neg A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge C)) \wedge (\neg A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C)) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \rightarrow \neg A)$

# 习题选讲

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge C)) \wedge (A \vee (\neg B \wedge \neg C)) \wedge ((B \vee C) \vee \neg A)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)) \wedge (B \vee C \vee \neg A)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{111}$

$\Leftrightarrow \sum_{0,7}$

# 习题选讲

当求出主析取范式的编码表达式后可直接利用编码关系，解出主合取范式。即：

$$S \Leftrightarrow (A\rightarrow B\wedge C)\wedge(\neg A\leftrightarrow(\neg B\wedge\neg C))$$

$$\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\Leftrightarrow m_{000}\vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{0,7}\Leftrightarrow\prod_{1,2,3,4,5,6}\Leftrightarrow M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{100}$$

$$\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}$$

$$\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)\wedge(A\vee$$

$$\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee B\vee\neg C)$$

# 习题选讲

例 5. 用推理规则论证下述问题：

或者是天晴，或者是下雨。如果是天晴，我去看电影。如果我去看电影，我就不看书。所以，如果我在看书，则天在下雨。

解：设 S：今天天晴。 R：今天下雨。

E：我去看电影。 B：我去看书。

本题符号化为：$S\nabla R$，$S\to E$，$E\to\neg B\Rightarrow B\to R$

因为 $S\nabla R\Leftrightarrow\neg(S\leftrightarrow R)$

故本题为$\neg(S\leftrightarrow R)$，$S\to E$，$E\to\neg B\Rightarrow B\to R$

# 习题选讲

① 直接证法:

(1) $\neg(S\leftrightarrow R)$ P

(2) $S\leftrightarrow \neg R$ T(1),E

(3) $(S\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow S)$ T(2),E

(4) $\neg R\rightarrow S$ T(3),I

(5) $S\rightarrow E$ P

(6) $\neg R\rightarrow E$ T(4)(5),I

(7) $E\rightarrow\neg B$ P

(8) $\neg R\rightarrow\neg B$ T(6)(7),I

(9) $B\rightarrow R$ T(8),E

# 习题选讲

② 间接证法:

| | | |
|---|---|---|
| a) | (1) $\neg(S\leftrightarrow R)$ | P |
| | (2) $S\leftrightarrow\neg R$ | T(1) |
| | (3) $(S\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow S)$ | T(2) |
| | (4) $\neg R\rightarrow S$ | T(3) |
| | (5) $\neg(B\rightarrow R)$ | P(附加前提) |
| | (6) $B\wedge\neg R$ | T(5) |
| | (7) $B$ | T(6) |
| | (8) $\neg R$ | T(6) |
| | (9) $S$ | T(4)(8) |

# 习题选讲

(10) $S \to E$ P

(11)$E$ T(4)(10)

(12)$E \to \neg B$ P

(13) $\neg B$ T(11)(12)

(14)$B \wedge \neg B$ 矛盾 (7)(13)

b)

(1)$B$ P(附加前提)

(2)$E \to \neg B$ P

(3)$\neg E$ T(1)(2)

(4) $S \to E$ P

# 习题选讲

| | |
|---|---|
| (5) $\neg S$ | T(3)(4) |
| (6) $\neg(S \leftrightarrow R)$ | P |
| (7) $S \leftrightarrow \neg R$ | T(6) |
| (8) $(S \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow S)$ | T(7) |
| (9) $\neg R \rightarrow S$ | T(8) |
| (10) $\neg S \rightarrow R$ | T(9) |
| (11) $R$ | T(5)(10) |
| (12) $B \rightarrow R$ | CP |