

Хаотическая динамика и трансверсальные гомоклинические структуры в окрестности резонанса 3:1 в плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел

16 сентября 2025 г.

Содержание

1. Введение	1
1.1. Ограниченная эллиптическая задача трех тел и пояс астероидов	1
1.2. Окрестность резонанса	3
1.3. Практические применения и классический метод исследования	5
2. Быстро-медленные системы, медленное многообразие	7
2.1. Представление плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел в окрестности резонанса 3:1 в виде быстро-медленной системы	7
2.2. Медленное многообразие	7
2.3. Динамика быстрой системы	8
2.4. Динамика медленной системы на медленном многообразии	9
2.5. Неподвижные точки полной системы	12
3. Динамика в окрестности неустойчивого листа	13
3.1. Инвариантные многообразия	13
3.1.1. Основные понятие и теоремы	13
3.2. Метод Мельникова	15
3.3. Применение теории Мельникова к плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел	18
3.4. Расщепление сепаратрис	19
3.5. Результаты для неустойчивого листа	21
4. Динамика в окрестности устойчивого листа	22
4.1. Устойчивое и неустойчивое многообразия положения равновесия	22
4.1.1. Метод разложения по малому параметру	23
4.1.2. Построение сепаратрисы полной системы	36
4.2. Периодические траектории в окрестности положения равновесия	39
4.2.1. Построение периодических траекторий	39
4.2.2. Радиус сходимости рядов	42
4.3. Устойчивое и неустойчивое многообразия периодических траекторий	45
4.3.1. Гетероклиническое пересечение W^s и W^u	50

1. Введение

1.1. Ограниченная эллиптическая задача трех тел и пояс астероидов

В настоящей работе рассматривается плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел в случае резонансного отношения периодов 3:1 малого тела и Юпитера. Данная задача является предельным вариантом общей задачи трех тел, исследованию которой посвящено большое число работ. Начиная с исследований Ньютона, Эйлера, Клеро, Даламбера, Лапласа, Лагранжа, Якоби, Коши, Пуанкаре, задача трех тел дала развитие не только анализу, но и многим другим разделам математики.

Рассмотрим движение трех тел с гравитационным взаимодействием в пространстве. Будем обозначать величины, связанные с различными телами, индексами A, J, S (условно астероид, Юпитер, Солнце). Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} m_S \ddot{\mathbf{r}}_S = \frac{Gm_S m_J}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_S|^3} (\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_S) + \frac{Gm_S m_A}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S), \\ m_J \ddot{\mathbf{r}}_J = \frac{Gm_J m_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_J|^3} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_J) + \frac{Gm_J m_A}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_J|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_J), \\ m_A \ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{Gm_A m_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A|^3} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A) + \frac{Gm_A m_J}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_A|^3} (\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_A), \end{cases}$$

где m_k ($k \in \{A, J, S\}$) - масса k -го тела, \mathbf{r}_k - его радиус-вектор, G - гравитационная постоянная. Поделив уравнения на массы, стоящие в левых частях равенств, можно заметить, что уравнения не теряют смысл и в пределе, когда одна или несколько масс обращаются в нуль.

Данная система является динамической системой с 9 степенями свободы. Однако, если предположить, что движение всех тел происходит в плоскости, то число степеней свободы системы уменьшается до 6, что заметно упрощает дальнейший анализ. При этом задача называется плоской задачей трех тел. Такое предположение является физически обоснованным, поскольку большое число наблюдаемых звездных систем могут считаться плоскими в том смысле, что один из их линейных размеров много меньше двух других. Кроме того, из астрономических наблюдений известно, что, если астероид влетает в солнечную систему под большим углом, то он не задерживается в ней надолго.

Предположим, что массы тел удовлетворяют соотношению:

$$m_A \ll m_J \ll m_S.$$

В таком случае, учитывая малость m_A , слагаемые, содержащие его в правой части, можно отбросить:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_S = \frac{Gm_J}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_S|^3} (\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_S), \\ \ddot{\mathbf{r}}_J = \frac{Gm_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_J|^3} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_J), \\ \ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{Gm_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A|^3} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A) + \frac{Gm_J}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_A|^3} (\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_A). \end{cases}$$

Заметим, что первые два уравнения не зависят от характеристик астероида и, таким образом, описывают задачу Кеплера о движении двух тел под действием гравитационных сил. Как известно [?], задача Кеплера интегрируема. С другой стороны, третье уравнение описывает движение астероида в гравитационном поле двух массивных тел. Такая задача называется ограниченной плоской задачей трех тел.

Перейдем в систему координат Якоби [?], связанную с центром масс тел S и J :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_J - \mathbf{r}_S, \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{m_S}{m_J + m_S} \mathbf{r} - \mathbf{r}_J + \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_J - \frac{m_S}{m_J + m_S} \mathbf{r}.$$

Производя замену переменных и учитывая слагаемые, возникающие при переходе в неинерциальную систему отсчета, получаем:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_c = 0, \\ \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_S+m_J)}{r^3} \mathbf{r}, \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} = [\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}] + 2[\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \boldsymbol{\Omega}] + [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Omega}]] + \frac{1}{m_A} \frac{Gm_A m_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A|^3} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A) + \frac{Gm_A m_J}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_A|^3} (\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_A), \end{cases}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{[\mathbf{r}_c \times \dot{\mathbf{r}}_c]}{r_c^2}.$$

Масштабным преобразованием координат и переобозначением констант можно добиться того, что параметры системы удовлетворяют следующим условиям:

$$G = 1, \quad m_j = \nu, \quad m_s = 1 - \nu, \quad |\boldsymbol{\Omega}| = 1.$$

Тогда уравнения движения, описывающие движение малого тела, имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{\rho}_x = +2\dot{\rho}_y + \rho_x - \frac{\partial U}{\partial \rho_x}, \\ \ddot{\rho}_y = -2\dot{\rho}_x + \rho_y - \frac{\partial U}{\partial \rho_y}, \end{cases}$$

$$U(r, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{1-\nu}{\sqrt{(\rho_x + \nu r)^2 + \rho_y^2}} - \frac{\nu}{\sqrt{(\rho_x - (1-\nu)r)^2 + \rho_y^2}}.$$

Полученная система уравнений является системой Лагранжа с лагранжианом:

$$L = \frac{\dot{\rho}_x^2 + \dot{\rho}_y^2}{2} + \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{2} + \rho_x \dot{\rho}_y - \rho_y \dot{\rho}_x - U(r, \boldsymbol{\rho}).$$

Применяя к лагранжиану преобразование Лежандра и вводя переменные:

$$x = \rho_x, \quad y = \rho_y, \quad p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x,$$

получаем гамильтониан системы:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + p_x y - p_y x + U(r, \boldsymbol{\rho}).$$

Потенциал в гамильтониане содержит параметр $r = |\mathbf{r}|$ (расстояние между Солнцем и Юпитером), который определяется из уравнения:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_S + m_J)}{r^3} \mathbf{r},$$

и в общем случае зависит от времени. Это уравнение является частным случаем задачи Кеплера, для которой известно точное решение.

Известно, что эксцентриситет Юпитера достаточно мал (порядка $e_J \approx 0.05$), и потому его орбита близка к круговой. В пределе $e_J \rightarrow 0$ расстояние r постоянно и мы получаем так называемую круговую плоскую ограниченную задачу трех тел. Данная задача описывается системой с двумя степенями свободы. Следует отметить, что круговая задача интегрируема, т.к. помимо интеграла энергии, она имеет второй интеграл движения - интеграл Якоби:

$$\dot{\rho}_x^2 + \dot{\rho}_y^2 - \rho_x^2 - \rho_y^2 - 2U(\rho_x, \rho_y) = \text{const.}$$

Однако, как показывают исследования [?, ?], учет эксцентриситета Юпитера e_J является необходимым для рассмотрения хаотических процессов в системе. В предположении $e_J > 0$ задача называется плоской эллиптической ограниченной задачей трех тел.

1.2. Окрестность резонанса

Для рассмотрения резонансного случая удобно перейти в систему координат Делоне, в которой гамильтониан имеет вид [?]:

$$H = -\frac{(1-\nu)^2}{2L^2} - \nu R(L, \rho_1, \rho_2, l, \omega_1, \omega_2),$$

где возмущающая функция R равна:

$$R = \sum_{s-j-k+p-m-n=0, s \geq 0} K^{sjkpmn}(L, \rho_1, \rho_2) \cos(sl + pl_J + j\omega_1 + k\omega_2 + m\omega_{1J} + n\omega_{2J}).$$

Здесь $(1-\nu)$ - масса Солнца, $\nu \approx \frac{1}{1000}$ - масса Юпитера, являющаяся малым параметром. Все углы, относящиеся к Юпитеру, обозначены индексом J , а углы, связанные с астероидом, обозначаются без индекса, гравитационная постоянная полагается равной единице. В терминах эллиптических элементов переменные выражаются формулами:

$$L = \sqrt{(1-\nu)a},$$

$$\rho_1 = \sqrt{(1-\nu)a(1-\sqrt{1-e^2})},$$

$$\rho_2 = \sqrt{(1-\nu)a(1-e^2)(1-\cos i)},$$

здесь a - большая полуось, e - эксцентриситет, i - наклон орбиты, l - средняя долгота, ω_1 - долгота перигея, ω_2 - долгота восходящего узла.

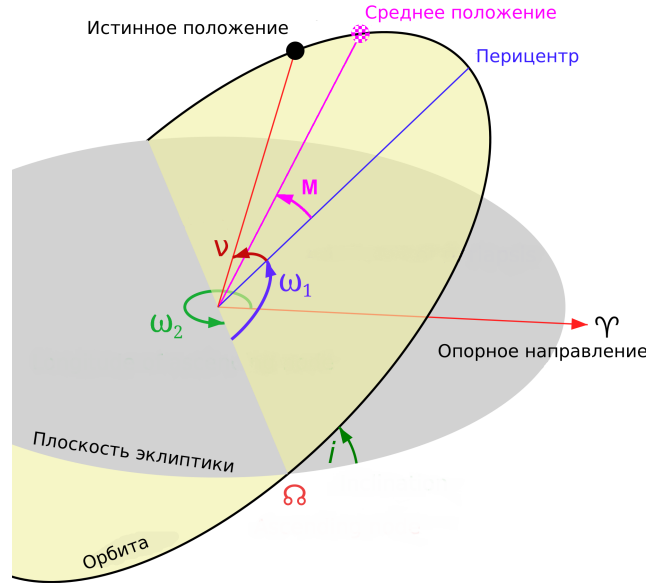


Рис. 1. Средняя долгота $l = \omega_1 + \omega_2 + M$, где M - средняя аномалия

Резонанс возникает когда аргументы косинусов близки к стационарным [?]:

$$sl + pl_J + j\omega_1 + k\omega_2 + m\omega_{1J} + n\omega_{2J} = \text{const.}$$

Учитывая, что средняя долгота l меняется значительно быстрее остальных углов, получаем резонансное условие (точка обозначает производную по времени):

$$s\dot{l} + p\dot{l}_J \approx 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$\dot{i} \approx \frac{-p}{s} i_J \equiv \frac{s+q}{s} i_J.$$

Число q называется порядком резонанса и для исследуемого в данной работе резонанса 3:1 $q = 2$, $s = 1$.

Учтем, что рассматривается плоская задача, следовательно, $i = 0$, $\rho_2 = 0$, $\omega_2 = 0$. Подставляя известные коэффициенты ряда и отбрасывая все члены старше второго порядка по e_J , получаем [?]:

$$H = -\frac{(1-\nu)^2}{2L^2} - \nu R_{sec}(\rho_1, \omega_1) - \nu R_{res}(L, l, \rho_1, \omega_1),$$

где $R_{sec}(\rho_1, \omega_1) = -2\rho_1 F - e_J G \sqrt{2\rho_1} \cos \omega_1$ - секулярная часть возмущающей функции, содержащая медленно меняющиеся со временем члены и в общем случае не периодические,

$R_{res}(L, l, \rho_1, \omega_1) = 2\rho_1 C \cos(l - \omega_1 - 3l_J) + e_J^2 E \cos(l - 3l_J)$ - резонансная часть возмущающей функции, содержащая медленно изменяющиеся периодические члены.

Масштабным преобразованием можно добиться [?]:

$$a_J = 1, \dot{l}_J = 1.$$

Производя замену:

$$\Lambda = L - L_{res},$$

$$\lambda = l - 3l_J,$$

$$x = \sqrt{2\rho_1} \cos \omega_1,$$

$$y = \sqrt{2\rho_1} \sin \omega_1,$$

и раскладывая гамильтониан по степеням Λ , получаем в старшем порядке:

$$H = \alpha \frac{\Lambda^2}{2} + \nu (C(x^2 - y^2) + e_J D x + e_J^2 E) \cos \lambda + \nu (2C x y + e_J D y) \sin \lambda + \nu e_J G x + \nu F(x^2 + y^2), \quad (1)$$

где $L_{res} = \left(\frac{(1-\nu)^2}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$ - центр резонанса, определяемый условием резонансности

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial L} \Big|_{L=L_{res}} = 0,$$

а постоянная α :

$$\alpha = -\frac{3(1-\nu)^2}{L_{res}^4} < 0.$$

Следует отметить, что y и λ являются координатами, а x и L сопряженными к ним импульсами. При этом фазовое пространство рассматриваемой системы четырехмерно и, учитывая периодичность правой части уравнений по λ , можно считать, что:

$$(x, y, \Lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times S^1.$$

Коэффициенты F, G, C, D, E, e_J являются известными константами, значения которых в случае системы Солнце-Юпитер можно найти, например, в [?].

Систему, описываемую гамильтонианом (1), принято называть плоской эллиптической ограниченной задачей трех тел в случае главного резонанса 3:1.

1.3. Практические применения и классический метод исследования

Одним из возможных применений описанной выше задачи является исследование причин возникновения щелей Кирквуда – определенных областей в поясе астероидов между орбитами Юпитера и Марса, в которых траектории астероидов не могут находиться долгое время. Впервые данные промежутки были обнаружены в 1866 году Д. Кирквудом. Согласно наблюдениям, щели соответствуют целочисленным отношениям периодов орбит астероидов к периоду обращения Юпитера вокруг Солнца. Наиболее отчетливо различимы щели с отношениями: 2:1, 3:1, 5:2, 7:3.



Рис. 2. Щели Кирквуда

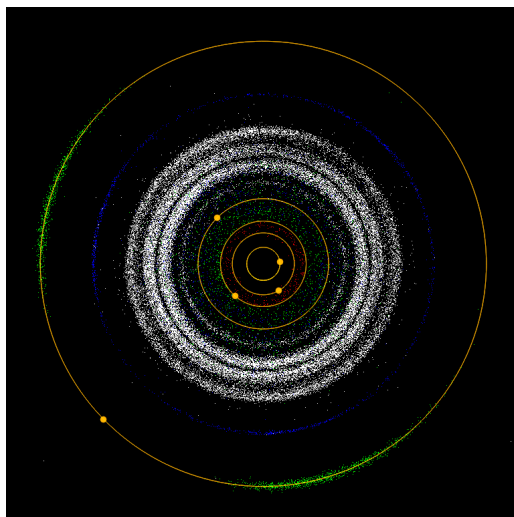


Рис. 3. Астероиды в Солнечной системе

Большой вклад в исследование данного вопроса внес Д. Висдом, предложивший использовать метод усреднения для объяснения данного эффекта. Рассмотрим канонические

уравнения для описанного выше гамильтониана [?]:

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda}{dt} = \nu(U(x, y) \sin \lambda - V(x, y) \cos \lambda), \\ \frac{d\lambda}{dt} = \alpha\Lambda, \\ \frac{dx}{dt} = -\nu \left(2Fy + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \sin \lambda \right), \\ \frac{dy}{dt} = \nu \left(2Fx + e_J G + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \sin \lambda \right), \end{cases} \quad (2)$$

где введены обозначения

$$U(x, y) = C(x^2 - y^2) + e_J Dx + e_J^2 E,$$

$$V(x, y) = 2Cxy + e_J Dy.$$

Так как $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ пропорциональны ν , то характерное время изменения переменных x и y имеет порядок ν^{-1} , что заметно больше времени малоамплитудных колебаний λ (их характерное время порядка $\nu^{-\frac{1}{2}}$). В силу этого, x и y можно разделить в сумму длинно- и короткопериодных частей: $x = \bar{x} + \xi$, $y = \bar{y} + \eta$, причем длиннопериодная часть описывается усредненной системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -\nu \left(2F\bar{y} + \frac{\partial U(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \langle \cos \lambda \rangle + \frac{\partial V(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \langle \sin \lambda \rangle \right), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \nu \left(2F\bar{x} + e_J G + \frac{\partial U(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \langle \cos \lambda \rangle + \frac{\partial V(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \langle \sin \lambda \rangle \right), \end{cases} \quad (3)$$

где усреднение идет по периоду колебаний T :

$$\langle \cos \lambda \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \lambda dt = \begin{cases} \frac{2E(k_L)}{K(k_L)} - 1, & -\sqrt{U^2 + V^2} < H < \sqrt{U^2 + V^2}, \\ \frac{2E(k_C)}{k_C^2 K(k_C)} + 1 - \frac{2}{k_C^2}, & H < -\sqrt{U^2 + V^2}, \end{cases}$$

$$\langle \sin \lambda \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \lambda dt = 0,$$

$$k_L = \sqrt{\frac{\nu\sqrt{U^2 + V^2} - H}{2\nu\sqrt{U^2 + V^2}}}, \quad k_C = \sqrt{\frac{2\nu\sqrt{U^2 + V^2}}{\nu\sqrt{U^2 + V^2} - H}},$$

$K(k)$ - полный эллиптический интеграл 1 рода, $E(k)$ - полный эллиптический интеграл 2 рода.

Метод усреднений позволяет понизить число степеней свободы в полной системе до 1 так, что усредненная система становится интегрируемой в силу наличия интеграла движения - усредненного гамильтониана.

Несмотря на свои преимущества, данный метод применим не для всех областей фазового пространства. В частности он перестает работать в том случае, когда период колебаний λ становится сопоставим с периодами \bar{x} и \bar{y} . Это происходит когда $\frac{d\lambda}{dt} = O(\nu)$ и, соответственно, сопоставимо с $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в силу малости параметра ν . Таким образом, для траектории системы при каждом прохождении в окрестности нулей функции $U(x, y) \sin \lambda - V(x, y) \cos \lambda$ изменяется значение (квази) адиабатического инварианта действия.

2. Быстро-медленные системы, медленное многообразие

2.1. Представление плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел в окрестности резонанса 3:1 в виде быстро-медленной системы

Следует отметить, что уравнения резонансной системы (1) могут быть приведены к виду быстро-медленной системы. Для этого сделаем несимплектическую замену $\Lambda = \sqrt{\nu}\Lambda_{new}$, $t_{new} = \sqrt{\nu}t$, после которой канонические уравнения системы примут вид:

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda_{new}}{dt_{new}} = U \sin \lambda - V \cos \lambda, & \frac{d\lambda}{dt_{new}} = \alpha \Lambda_{new}, \\ \frac{dx}{dt_{new}} = -\sqrt{\nu}(2Fy + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda), & \frac{dy}{dt_{new}} = \sqrt{\nu}(2Fx + e_J G + \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda). \end{cases}$$

В дальнейшем для удобства мы будем опускать индекс *new*. Введем новый малый параметр $\varepsilon = \sqrt{\nu}$. Тогда уравнения принимают итоговый вид (точка обозначает производную по t):

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = U \sin \lambda - V \cos \lambda, & \dot{\lambda} = \alpha \Lambda, \\ \dot{x} = -\varepsilon(2Fy + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda), & \dot{y} = \varepsilon(2Fx + e_J G + \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda). \end{cases} \quad (4)$$

Пару переменных λ и Λ будем называть быстрыми переменными, а пару x и y называть медленными переменными.

2.2. Медленное многообразие

Медленное многообразие для системы (4) представляет собой множество:

$$M_0 = \{(x, y, \lambda, \Lambda) : \Lambda = 0, u(x, y) \sin \lambda = v(x, y) \cos \lambda\}.$$

Условие $U \sin \lambda = V \cos \lambda$ эквивалентно $\lambda = \arctan(V/U) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для устранения разрывов при $U = 0$ вводятся две непрерывные функции $\lambda_{\pm} : \mathbb{R}^2 \setminus \{U = V = 0\} \rightarrow S^1$, отличающиеся на π :

$$\lambda_+(x, y) \equiv \begin{cases} \arctan \frac{V}{U}, & U > 0, V > 0, \\ \arctan \frac{V}{U} + \pi, & U < 0, \\ \arctan \frac{V}{U} + 2\pi, & U > 0, V < 0, \end{cases} \quad \lambda_-(x, y) \equiv \begin{cases} \arctan \frac{V}{U} + \pi, & U > 0, V > 0, \\ \arctan \frac{V}{U} + 2\pi, & U < 0, \\ \arctan \frac{V}{U} + 3\pi, & U > 0, V < 0. \end{cases}$$

В особых точках, где $U = V = 0$, решение дает две окружности:

$$y = 0, \quad x = x_b^{\pm} \equiv \frac{-e_J D \pm e_J \sqrt{D^2 - 4EC}}{2C}, \quad \Lambda = 0, \quad \lambda \in S^1.$$

Локально вблизи этих точек медленное многообразие имеет структуру винтовой поверхности, описываемой уравнением $\tan \lambda = y/(x - x_b^{\pm})$.

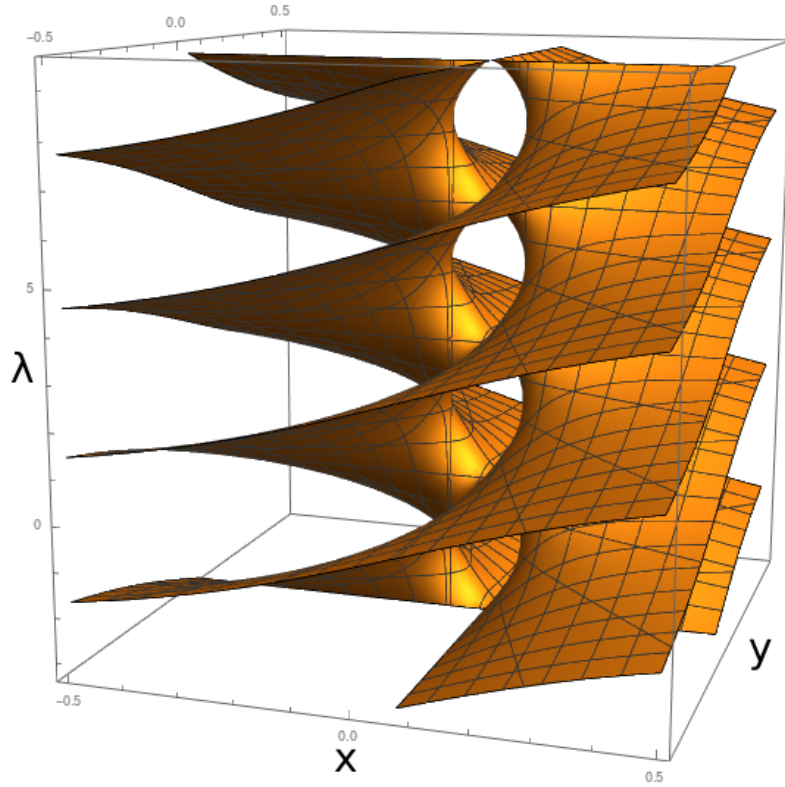


Рис. 4.

Таким образом, медленное многообразие представляет собой два листа $M_{0,\pm}$, соединенных двумя перемычками $M_{0,b}^\pm$:

$$\begin{aligned} M_0 &= M_{0,+} \cup M_{0,-} \cup M_{0,b}^+ \cup M_{0,b}^-, \\ M_{0,\pm} &= \{\lambda = \lambda_\pm(x, y), \Lambda = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{U = V = 0\}\}, \\ M_{0,b}^\pm &= \{y = 0, x = x_b^\pm, \Lambda = 0, \lambda \in S^1\}. \end{aligned}$$

Листы $M_{0,\pm}$ гомеоморфны плоскости с двумя выколотыми точками, а перемычки $M_{0,b}^\pm$ - окружностям.

2.3. Динамика быстрой системы

Устремив в (4) ε к нулю, получаем так называемую "быструю" систему:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = U(x, y) \sin \lambda - V(x, y) \cos \lambda, & \dot{\lambda} = \alpha \Lambda, \\ \dot{x} = 0, & \dot{y} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В силу тривиальной динамики переменных (x, y) зависимость функций U, V от медленных переменных будем опускать. Продифференцировав λ второй раз по t и подставляя выражение для $\dot{\Lambda}$, получаем уравнение:

$$\ddot{\lambda} - \alpha U \sin \lambda + \alpha V \cos \lambda = 0,$$

которое приводится (учитывая $\alpha < 0$) к стандартному уравнению маятника:

$$\ddot{\lambda} - \alpha \beta \sin(\lambda - \lambda_+(x, y)) = 0, \quad \beta(x, y) \equiv \sqrt{U^2 + V^2} > 0.$$

Отметим, что по определению медленное многообразие является множеством неподвижных точек (положений равновесия) "быстрой" системы, а именно $(\lambda, \Lambda) = (\lambda_{\pm}(x, y), 0)$. Для определения типа этих положений равновесия разложим правую часть уравнений (5) по формуле Тейлора в окрестности положений равновесия:

$$\begin{pmatrix} U \sin \lambda - V \cos \lambda \\ \alpha \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \pm \beta(x, y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_{\pm} \\ \Lambda \end{pmatrix} + O((\lambda - \lambda_{\pm})^2, \Lambda^2).$$

Тогда собственные числа линеаризованной системы имеют вид:
для листа $M_{0,+}$:

$$\zeta = \pm i \sqrt{|\alpha| \beta},$$

для листа $M_{0,-}$:

$$\zeta = \pm \sqrt{|\alpha| \beta}.$$

В первом случае собственные значения чисто мнимые, а во втором - вещественные.

Таким образом, лист $M_{0,+}$ состоит из устойчивых положений равновесия быстрой системы, а лист $M_{0,-}$ - из неустойчивых положений равновесия. Неустойчивое положение равновесия обладает двумерной сепаратрисой, заполненной решениями вида:

$$\begin{aligned} \lambda(t, t_0) &= \pm 2 \arctan \sinh(\alpha \beta(t - t_0)) + \lambda_{\pm}(x, y), \\ \Lambda(t, t_0) &= \frac{\pm 2\beta}{\cosh(\alpha \beta(t - t_0))}, \end{aligned}$$

здесь $t_0 \in \mathbb{R}$, а выбор знака определяет направление движения по сепаратрисе.

2.4. Динамика медленной системы на медленном многообразии

Заменив время на медленное $\tau = \varepsilon t$ в уравнениях (4), получим (штрихом обозначается производная по τ):

$$\begin{cases} \varepsilon \lambda' = U \sin \lambda - V \cos \lambda, & \varepsilon \Lambda' = \alpha \Lambda, \\ x' = -(2Fy + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda), & y' = 2Fx + e_J G + \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda. \end{cases} \quad (6)$$

Устремив ε к нулю, получаем "медленную" систему:

$$\begin{cases} 0 = U \sin \lambda - V \cos \lambda, & 0 = \alpha \Lambda, \\ x' = -(2Fy + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda), & y' = 2Fx + e_J G + \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя в (7) введенную ранее параметризацию листов медленного многообразия, получаем:

$$\begin{cases} x' = -(2Fy \pm \frac{\partial \beta}{\partial y}), & y' = 2Fx + e_J G \pm \frac{\partial \beta}{\partial x}. \end{cases} \quad (8)$$

Знаки "+" и "-" соответствуют $M_{0,+}$ и $M_{0,-}$ соответственно.

Данная система является гамильтоновой с гамильтонианом:

$$H_S = F(x^2 + y^2) + e_J Gx \pm \beta(x, y),$$

и имеет одну степень свободы, что приводит к ее интегрируемости.

На каждом из листов медленного многообразия такая система единственное положение равновесия:

$$y_0^\pm = 0, \quad x_0^\pm = \frac{e_J(\pm D - G)}{2(F \mp C)}.$$

Линеаризуя правую часть уравнений в окрестности этой точки, получаем что собственные значения матрицы линеаризации имеют вид:

$$\zeta = \pm \sqrt{-\left(2F \pm 2C \pm \frac{2Cx_0^\pm + e_J D}{|U(x_0^\pm, 0)|}\right)(2F \mp 2C)} \in \mathbb{R},$$

причем, учитывая значения констант, они являются чисто вещественными, что позволяет сказать о неустойчивости данного положения равновесия на обоих листах.

Как и в случае маятника, эти неустойчивые положения равновесия обладают двумерными сепаратрисами, заполненными сепаратрисными решениями, асимптотически приближающимися к положениям равновесия при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Для их нахождения рассмотрим линию критического уровня гамильтониана $H_S(x, y) = H_S(x_0^\pm, y_0^\pm)$, соответствующего неподвижной точке:

$$H_S(x_0^\pm, y_0^\pm) = F(x^2 + y^2) + e_J Gx \pm \beta(x, y).$$

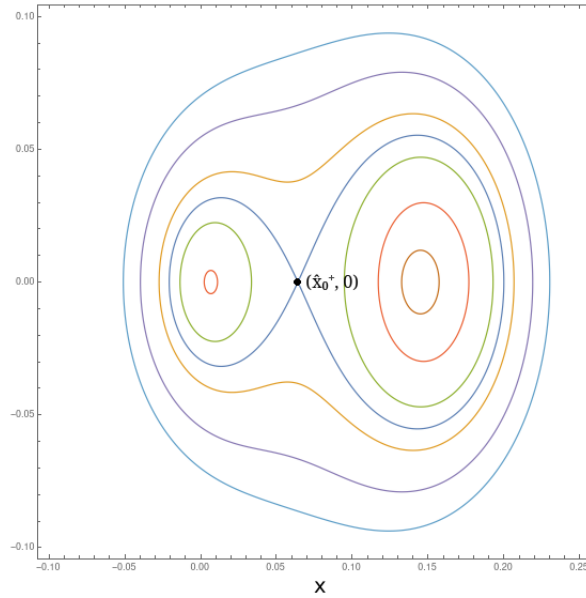


Рис. 5. Линии уровня гамильтониана H_S на $M_{0,+}$. На $M_{0,-}$ линии уровня имеют аналогичный вид

Сделав замену $x = x_0^\pm + h$ и упростив выражение, получаем:

$$(F^2 - C^2)(h^2 + y^2)^2 + 2(h^2 + y^2)(U(x_0^\pm, y_0) + h(2Cx_0^\pm + e_J D))(\pm F - C) + y^2(4U(x_0^\pm, y_0^\pm)C - (2Cx_0^\pm + e_J D)^2) = 0. \quad (9)$$

Сделаем инверсию относительно единичной окружности: $X = \frac{h}{h^2 + y^2}$, $Y = \frac{y}{h^2 + y^2}$. Тогда уравнение (9) принимает вид:

$$(F^2 - C^2) + AX^2 + 2BX + (A + \delta)Y^2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2U(x_0^\pm, y_0^\pm)(\pm F - C), \\ B &= (2Cx_0^\pm + e_J D)(\pm F - C), \\ \delta &= -(2Cx_0^\pm + e_J D)^2. \end{aligned}$$

Если ввести новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= \left(X + \frac{B}{A}\right) \sqrt{\frac{A}{F^2 - C^2 - \frac{B^2}{A}}} \equiv \omega \left(X + \frac{B}{A}\right), \\ \eta &= Y \sqrt{\frac{-(A + \delta)}{F^2 - C^2 - \frac{B^2}{A}}} \equiv \sigma Y, \end{aligned}$$

то уравнение критического уровня может быть переписано следующим образом:

$$\xi^2 - \eta^2 = 1. \quad (10)$$

Таким образом, в переменных (ξ, η) линия уровня гамильтониана $H_S(x, y) = H_S(x_0^\pm, y_0^\pm)$ есть гипербола. В первоначальных переменных (x, y) , т.е. до инверсии относительно единичной окружности, данная кривая имеет форму "восьмерки" (см. рис. 5).

Введем следующую параметризацию полученной кривой с помощью переменной f :

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{ch} f, \\ \eta &= \operatorname{sh} f, \\ \xi^2 - \eta^2 &= \operatorname{ch}^2 f - \operatorname{sh}^2 f = 1. \end{aligned}$$

Теперь для нахождения сепаратрисного решения необходимо определить зависимость f от времени τ . Для этого рассмотрим:

$$x' = \frac{\partial x}{\partial X} X' + \frac{\partial x}{\partial Y} Y' = \frac{Y^2 - X^2}{(X^2 + Y^2)^2} X' + \frac{-2XY}{(X^2 + Y^2)^2} Y' = f' \operatorname{sh} f \frac{Q(\operatorname{ch} f)}{P^2(\operatorname{ch} f)}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} P(\operatorname{ch} f) &\equiv X^2 + Y^2 = \operatorname{ch}^2 f \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{-2B}{\omega A} \operatorname{ch} f + \left(\frac{B^2}{A^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right), \\ Q(\operatorname{ch} f) &\equiv -\frac{\operatorname{ch}^2 f}{\omega} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{2B}{A} \operatorname{ch} f \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\omega^2} \right) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{B^2}{A^2} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, подставляя (9) в первое уравнение системы (24), получаем:

$$\begin{aligned} x' &= - \left(2Fy \pm \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = -2Fy \mp \frac{1}{\beta} \left(U \frac{\partial U}{\partial y} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{y \left(2(C^2 - F^2)(x^2 + y^2) + 2x(2Cx_0 + e_J D)(C \mp F) + (2Cx_0 + e_J D)^2 + 2U(x_0, y_0)(-C \mp F) \right)}{F(x^2 + y^2) \pm U(x_0, y_0) \pm x(2Cx_0 + e_J D)}. \end{aligned}$$

Тогда в терминах переменной f получаем

$$x' = \frac{\operatorname{sh} f}{\sigma P(\operatorname{ch} f)} \frac{R(\operatorname{ch} f)}{S(\operatorname{ch} f)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} R(\operatorname{ch} f) &\equiv P(\operatorname{ch} f) (2U(x_0, y_0)(-C \mp F) + (2Cx_0 + e_J D)^2) + \\ &+ 2 \left(\frac{\operatorname{ch} f}{\omega} - \frac{B}{A} \right) (2Cx_0 + e_J D)(C \mp F) + 2(C^2 - F^2), \\ S(\operatorname{ch} f) &\equiv \pm U(x_0, y_0) P(\operatorname{ch} f) \pm \left(\frac{\operatorname{ch} f}{\omega} - \frac{B}{A} \right) (2Cx_0 + e_J D) + F. \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (11) и (12), получаем дифференциальное уравнение на f :

$$f' = \frac{1}{\sigma} \frac{R(\operatorname{ch} f) P(\operatorname{ch} f)}{S(\operatorname{ch} f) Q(\operatorname{ch} f)}. \quad (13)$$

Заметим, что P, Q, R, S являются полиномами второго порядка переменной $\operatorname{ch} f$. Интегрируя уравнение (13), имеем:

$$\begin{aligned} \tau - \tau_0 &= \sigma \int_{f_0}^f \frac{S(\operatorname{ch} f) Q(\operatorname{ch} f)}{R(\operatorname{ch} f) P(\operatorname{ch} f)} df = \\ &= (f - f_0) \frac{\mp 2U(x_0^\pm, y_0^\pm) \frac{\sigma}{\omega}}{2U(x_0^\pm, y_0^\pm)(-C \mp F) + (2Cx_0^\pm + e_J D)^2} + \sigma \int_{f_0}^f \frac{L(\operatorname{ch} f)}{R(\operatorname{ch} f) P(\operatorname{ch} f)} df, \end{aligned} \quad (14)$$

где L некоторый полином 3 степени.

Утверждение 1. На обоих листах $M_{0,k}, k = +, -$ медленная система (24) имеет неустойчивое положение равновесия $(x, y) = (x_0^\pm, y_0^\pm)$. Это положение равновесия порождает двумерную сепаратрису, заполненную решениями вида:

$$\begin{aligned} x(\tau, \tau_0) &= x_0 + \frac{\frac{\operatorname{ch}(f(\tau - \tau_0))}{\omega} - \frac{B}{A}}{P(\operatorname{ch}(f(\tau - \tau_0)))}, \\ y(\tau, \tau_0) &= \frac{\operatorname{sh}(f(\tau - \tau_0))}{\sigma P(\operatorname{ch}(f(\tau - \tau_0)))}, \end{aligned}$$

где $\tau_0 \in \mathbb{R}$, а функция $f(\tau)$ задается выражением (14).

2.5. Неподвижные точки полной системы

Заметим, что точка $(\hat{x}_0^-, 0, \lambda_-(\hat{x}_0^-, 0), 0)$ является положением равновесия не только быстрой системы (т.к. принадлежит медленному многообразию), но также является неподвижной точкой для полной системы. Линеаризация в окрестности этой точки показывает, что данное положение равновесия имеет тип *седло-седло* (матрица Якоби имеет четыре вещественных собственных значения, два из которых положительны, а два отрицательны).

Неподвижная точка медленной системы $(\hat{x}_0^+, 0, \lambda_+(\hat{x}_0^+, 0), 0) \in M_{0,+}$, аналогично случаю неустойчивого листа, также является положением равновесия полной системы (4). Линеаризация показывает, что эта точка имеет тип *седло-центр* с собственными значениями $(\pm i\omega, \pm\xi)$.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{\sqrt{p} - q}}{\sqrt{2}} = \sqrt{|\alpha U(\hat{x}_0^+, 0)|} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \xi &= \frac{\sqrt{\sqrt{p} + q}}{\sqrt{2}} = \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$p = (4\varepsilon^2(C - F)(C + F) + \alpha U(\hat{x}_0^+, 0))^2 + 8\alpha\varepsilon^2(F - C)V_y(\hat{x}_0^+, 0) > 0$$

$$q = 4\varepsilon^2(C - F)(C + F) - \alpha U(\hat{x}_0^+, 0) < 0.$$

Положение равновесия типа *седло-центр* имеет одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия и двумерное центральное многообразие. В общем случае, если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются, то они совпадают и могут быть параметризованы гомоклинической траекторией. Поскольку эти одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия лежат в трехмерном уровне энергии и гладко зависят от ε , следует ожидать, что система будет иметь изолированные значения малого параметра, при которых устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются.

3. Динамика в окрестности неустойчивого листа

3.1. Инвариантные многообразия

3.1.1. Основные понятие и теоремы

Одним из методов анализа поведения траекторий системы вблизи медленного многообразия является геометрическая теория возмущений Фенича. В этом параграфе мы сформулируем некоторые определения и теоремы теории гиперболических множеств и теории Фенича.

Определение 1. Говорят, что компактное, C^r -гладкое, связное многообразие с краем $M \subset \mathbb{R}^n$ инвариантно назад (вперёд) относительно потока $\theta_t(x)$, порождённого системой $\frac{dx}{dt} = F(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $F(x)$ - C^r -гладкое векторное поле), если для всякого $p \in M$ поток $\theta_t(p) \in M$ при $t \leq 0$ ($t \geq 0$) и для всякого $p \in \partial M$ поле $-F(p)$ направлено внутрь M .

Говорят, что многообразие M инвариантно относительно потока $\theta_t(x)$, если оно одновременно является локально инвариантным вперёд и назад.

Определение 2. Компактное, C^r -гладкое, связное многообразие с краем $M \subset \mathbb{R}^n$ локально инвариантно относительно потока $\theta_t(x)$, если для всякого $p \in M \setminus \partial M$ найдется интервал (t_1, t_2) , $t_1 < 0$, $t_2 > 0$ такой, что для любого $t \in (t_1, t_2)$ верно $\theta_t(p) \in M$.

Определение 3. Инвариантное множество M называется гиперболическим, если для всякого $x_0 \in M$ существуют $\lambda_{1,2} > 0$ такие, что:

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n = T_{x_0}M \oplus E_{x_0}^u \oplus E_{x_0}^s,$$

$$\forall v \in E_{x_0}^s, (T_{x_0}\theta_t)v \in E_{\theta_t(x_0)}^s \Rightarrow \|(T_{x_0}\theta_t)v\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|v\|, \quad t \geq 0,$$

$$\forall v \in E_{x_0}^u, (T_{x_0}\theta_t)v \in E_{\theta_t(x_0)}^u \Rightarrow \|(T_{x_0}\theta_t)v\| \leq e^{\lambda_2 t} \|v\|, \quad t \leq 0.$$

Теорема 1. (Адамар-Перрон):

Если M - инвариантное гиперболическое множество, то существуют единственные инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия, определяемые следующим образом:

$$W^s(M) = \{x : \text{dist}(\theta_t(x), M) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\},$$

$$W^u(M) = \{x : \text{dist}(\theta_t(x), M) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}.$$

Сформулируем теперь понятие гиперболичности для локально инвариантных множеств:

Определение 4. Локально инвариантное множество M называется гиперболическим, если для всякого $x_0 \in M$ существуют $\lambda_{1,2} > 0$ такие, что:

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n = T_{x_0}M \oplus E_{x_0}^u \oplus E_{x_0}^s,$$

$$\forall v \in E_{x_0}^s, (T_{x_0}\theta_t)v \in E_{\theta_t(x_0)}^s \Rightarrow \|(T_{x_0}\theta_t)v\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|v\|, 0 \leq t < t_2,$$

$$\forall v \in E_{x_0}^u, (T_{x_0}\theta_t)v \in E_{\theta_t(x_0)}^u \Rightarrow \|(T_{x_0}\theta_t)v\| \leq e^{\lambda_2 t}\|v\|, t_1 < t \leq 0.$$

В этом случае справедлив аналог теоремы Адамара-Перрона [?]

Теорема 2. Если M - локально инвариантное гиперболическое множество, то существуют локально инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия, определяемые следующим образом:

$$W^s(M) = \{x : \text{dist}(\theta_t(x), M) \leq \text{dist}(x, M), 0 \leq t < t_2\},$$

$$W^u(M) = \{x : \text{dist}(\theta_t(x), M) \leq \text{dist}(x, M), t_1 < t \leq 0\}.$$

Можно заметить, что инвариантные (локально инвариантные) устойчивое и неустойчивое многообразия расслаиваются на траектории (конечные сегменты траекторий). Дадим следующее

Определение 5. Пусть M_1, M_2 - два (локально) инвариантных гиперболических множества, $W^{s,u}(M_{1,2})$ - соответствующие им устойчивое и неустойчивое многообразия. Тогда точка $x_0 \in W^u(M_1) \cap W^s(M_2)$ называется гомоклинической, если $M_1 = M_2$, и гетероклинической если $M_1 \neq M_2$. Соответствующие траектории $\theta_t(x_0) \in W^u(M_1) \cap W^s(M_2)$ называются (локально) двояко-асимптотическими.

Определение 6. Гомоклиническая (гетероклиническая) точка x_0 называется трансверсальной, если:

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n = T_{x_0}W^s(M_1) \oplus T_{x_0}W^u(M_2).$$

Следующая теорема является важным результатом сингулярной теории возмущений:

Теорема 3. (Феничель, [?]):

Пусть M_0 компактное локально инвариантное гиперболическое множество относительно потока $\theta_t^{(0)}$, определяемого векторным полем F_0 . Рассмотрим для $\delta > 0$ локальные устойчивое и неустойчивое многообразия $W_{loc}^{(s,u)}(M_0) = W_{loc}^{(s,u)}(M_0) \cap U_\delta(M_0)$. Тогда существует достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого векторного поля F_ε , удовлетворяющего $|F_\varepsilon - F_0| < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует локально инвариантное множество M_ε , лежащее в ε окрестности M_0 , локально инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия которого $O(\varepsilon)$ близки к $W_{loc}^{s,u}(M_0)$.

Следствием этой теоремы является следующая

Теорема 4. (Феничель, [?]):

Пусть M_0 компактное подмногообразие (возможно с границей) медленного многообразия системы (4), гиперболическое относительно (??).

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует локально инвариантное многообразие M_ε системы (4), лежащее в ε окрестности M_0 .

Заметим, что данные теоремы гарантируют существование лишь локально инвариантных множеств, вопрос существования глобально инвариантных множеств является более сложной задачей.

Для невозмущенной системы двояко-асимптотические траектории лежат в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий $W^s(M_0) \cap W^u(M_0)$. То же верно и для возмущенной системы, однако, если множество M_0 имеет непустую границу, то теория Фенича гарантирует существование лишь локально инвариантных устойчивого и неустойчивого многообразий. Таким образом, их пересечение $W^s(M_\varepsilon) \cap W^u(M_\varepsilon)$ - это множество траекторий, которые ведут себя как гомоклинические только на некотором ограниченном интервале времени.

В дальнейшем будет показано, что существует множество, остающееся глобально инвариантным при возмущении.

3.2. Метод Мельникова

Трансверсальные гомоклинические и гетероклинические траектории являются важными объектами в теории гладких динамических систем. Наличие таких траекторий приводит к сложной хаотической динамике и, как следствие, к неинтегрируемости исследуемой системы.

Для нахождения пересечений устойчивого и неустойчивого многообразий применим метод Мельникова. Рассмотрим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = JD_X H_1(X, I) + \varepsilon g^X(X, I), \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon g^I(X, I), \end{cases} \quad (15)$$

$$X \in \mathbb{R}^2, I \in \mathbb{R}^m,$$

где D_X, D_I - градиенты по соответствующим переменным, J - симплектическая единица:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. (Функция Мельникова [?]):

Пусть $V \subset M_0$ - инвариантное гиперболическое подмножество медленного многообразия M_0 системы (15), за V_ε обозначено локально инвариантное множество лежащее в ε -окрестности V , существование которого гарантирует теорема Фенича.

$$\Gamma = W^s(V) \cap W^u(V) \setminus V$$

Пусть $X_0^I(t - t_0, I)$ - сепаратриса быстрой системы, соответствующей (15).

Тогда расстояние между $W^s(V_\varepsilon)$ и $W^u(V_\varepsilon)$ вблизи любой точки $p \in \Gamma$ задается выражением:

$$d^I(p, t_0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{M^I(p, t_0)}{\|D_X H(X_0^I, I)\|} + O(\varepsilon^2),$$

где M^I - функция Мельникова, равная:

$$M^I(p, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\langle D_X H_1, g^X \rangle + \langle D_X H_1, (D_I J D_X) \int_{t_0}^t g^I dt \rangle \right) (X_0^I(t - t_0, I), I) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\langle D_X H_1, g^X \rangle + \langle D_I H_1, g^I \rangle \right) (X_0^I(t - t_0, I), I) dt - \\ - \langle D_I H_1(v(I), I), \int_{-\infty}^{\infty} g^I(X_0^I(t - t_0, I), I) dt \rangle,$$

здесь $X = v(I)$ - параметризация V , \langle, \rangle - стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^2 .

Доказательство [?]: Зафиксируем точку $p \in \Gamma = W^s(V) \cap W^u(V) \setminus V$ и рассмотрим Π_p гиперплоскость натянутую на вектор $D_X H_1(p)$.

Тогда в силу теоремы Феничеля (Теорема 3) существуют точки $p_\varepsilon^u \equiv (X_\varepsilon^u, I_\varepsilon^u) \in W^u(V_\varepsilon) \cap \Gamma \cap \Pi_p$ и $p_\varepsilon^s \equiv (X_\varepsilon^s, I_\varepsilon^s) \in W^s(V_\varepsilon) \cap \Gamma \cap \Pi_p$, причем $I_\varepsilon^s = I_\varepsilon^u$.

Введем расстояние между $W^s(V_\varepsilon)$ и $W^u(V_\varepsilon)$ как:

$$d(p, t_0, \varepsilon) = \|p_\varepsilon^u - p_\varepsilon^s\| = \|X_\varepsilon^u - X_\varepsilon^s\| = \frac{\langle D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I), X_\varepsilon^u - X_\varepsilon^s \rangle}{\|D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I)\|}.$$

Раскладывая его в ряд по ε в окрестности нуля и учитывая, что $d(p, 0) = 0$ в силу того, что $p \in W^s(V) \cap W^u(V)$, получаем:

$$d(p, t_0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\langle D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I), \frac{\partial X_\varepsilon^u}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial X_\varepsilon^s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \rangle}{\|D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I)\|} + O(\varepsilon^2).$$

Числитель дроби называется функцией Мельникова:

$$M^I(p, t_0) = \langle D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I), \frac{\partial X_\varepsilon^u}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial X_\varepsilon^s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \rangle.$$

Рассмотрим

$$M(t, t_0) = \langle D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I), \frac{\partial X_\varepsilon^u(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial X_\varepsilon^s(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \rangle = \Delta^u(t) - \Delta^s(t),$$

$$\Delta^{u,s}(t) = \langle D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I), \frac{\partial x_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \rangle.$$

Производные по ε в скалярном произведении описываются вариационными уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = J D_X^2 H_1 \frac{\partial X_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + D_I J D_X H_1 \frac{\partial I_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + g^X(X_0^I(t - t_0, I), I),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial I_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = g^I(X_0^I(t - t_0, I), I).$$

Тогда обозначив:

$$x_1^{u,s}(t) = \frac{\partial X_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0},$$

$$I_1^{u,s}(t) = \frac{\partial I_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0},$$

получаем:

$$\frac{d}{dt} \Delta^{u,s}(t) = \langle \frac{d}{dt} (D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I)), x_1^{u,s} \rangle + \langle D_X H_1(X_0^I(t - t_0, I), I), \frac{d}{dt} x_1^{u,s} \rangle =$$

$$= \langle D_X H_1, (JD_X^2 H_1) x_1^{u,s} \rangle + \langle D_X H_1, (D_I J D_X H_1) I_1^{u,s} \rangle + \\ + \langle D_X H_1, g^X \rangle + \langle (D_X^2 H_1)(J D_X H_1), x_1^{u,s} \rangle .$$

Учитывая равенство

$$\langle D_X H_1, (JD_X^2 H_1) x_1^{u,s} \rangle + \langle (D_X^2 H_1)(J D_X H_1), x_1^{u,s} \rangle = 0,$$

получаем:

$$\frac{d}{dt} \Delta^{u,s}(t) = \langle D_X H_1, (D_I J D_X H_1) I_1^{u,s} \rangle + \langle D_X H_1, g^X \rangle .$$

Из уравнения в вариациях следует:

$$I_1^s(t) = I_1^u(t) = \int_{t_0}^t g^I(X_0^I(t-t_0, I), I) dt.$$

Проинтегрируем полученные уравнения по t :

$$\Delta^u(0) - \Delta^u(-T^u) = \int_{-T^u}^0 \left(\langle D_X H_1, g^X \rangle + \langle D_X H_1, (D_I J D_X) \int_{t_0}^t g^I dt \rangle \right) (X_0^I(t-t_0, I), I) dt,$$

$$\Delta^s(T^s) - \Delta^s(0) = \int_0^{T^s} \left(\langle D_X H_1, g^X \rangle + \langle D_X H_1, (D_I J D_X) \int_{t_0}^t g^I dt \rangle \right) (X_0^I(t-t_0, I), I) dt.$$

В силу локальной инвариантности многообразий $W^{s,u}(V)$ невозможно устремить $T^{s,u}$ к бесконечности, однако, их можно сделать сколь угодно большими. А именно, для любого $\delta > 0$ существует ε_0 такое, что для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место оценка $T^{s,u} > \frac{1}{\delta}$.

Заметим, что по построению:

$$M^I(p, t_0) = M^I(t=0, t_0),$$

тогда:

$$M^I(p, t_0) = M^I(t=0, t_0) \approx \\ \approx \int_{-T^u}^{T^s} \left(\langle D_X H_1, g^X \rangle + \langle D_X H_1, (D_I J D_X) \int_{t_0}^t g^I dt \rangle \right) (X_0^I(t-t_0, I), I) dt + \Delta^u(-T^u) - \Delta^s(T^s).$$

Теорема 6. (Нули функции Мельникова, [?]):

Если при некоторых значениях аргумента функции Мельникова верно:

$$M^I = 0,$$

$$\nabla M^I \neq 0.$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $W^s(V_\varepsilon)$ и $W^u(V_\varepsilon)$ пересекаются трансверсально.

В случаях когда и сама функция, и ее градиент обращаются в ноль нужно рассматривать члены при старших степенях ε в разложении d^I для определения трансверсальности пересечения.

3.3. Применение теории Мельникова к плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел

В силу Утверждений 1,2 приходим к

Утверждение 2. Для системы (4) имеют место:

1. множества

$$M_0, M_{0,+}, M_{0,-}, M_{0,b}^{\pm}$$

являются инвариантными.

2. Множество $M_{0,-}$ является также гиперболическим.

3. Пусть $(x(t), y(t), 0, \lambda_-(x(t), y(t)), \Lambda = 0)$ - некоторая траектория медленной системы (7) на $M_{0,-}$, тогда окрестность этой траектории на плоскости xu является инвариантным гиперболическим множеством.

Найдем явный вид функции Мельникова для исследуемой системы. Для этого приведем уравнения (4) к виду (15):

$$X = \begin{pmatrix} \Lambda \\ z \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Переменная z вводится как:

$$z = \lambda - \lambda_-(x, y).$$

При этом многообразие $M_{0,-}$ переходит в $\tilde{M}_{0,-}$:

$$\tilde{M}_{0,-} = \{(\Lambda, z, x, y) : \Lambda = 0, z = 0\},$$

а сепаратриса записывается в виде:

$$z_{sep}(t, t_0) = \pm 2 \arctan \operatorname{sh}(\alpha\beta(t - t_0)), \Lambda_{sep}(t, t_0) = 2\beta / \operatorname{ch}(\alpha\beta(t - t_0)).$$

Тогда в терминах новых переменных имеем:

$$D_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, D_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \alpha \frac{\Lambda^2}{2} + \beta(x, y)(1 - \cos z), \quad \beta(x, y) = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2},$$

$$g^I = \begin{pmatrix} -2Fy + \frac{\partial \beta}{\partial y} \cos z + \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \sin z \\ 2Fx + e_J G - \frac{\partial \beta}{\partial x} \cos z - \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \sin z \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} g^X &= \frac{-1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \end{pmatrix} = \frac{-(u\dot{v} - v\dot{u})}{\varepsilon\beta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-\left(\dot{x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \dot{y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)}{\varepsilon\beta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(2Fy + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \lambda + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \lambda)(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}) - (2Fx + e_J G + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \lambda)(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y})}{\beta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4. Расщепление сепаратрис

Построим функцию Мельникова для множества $V = \tilde{M}_{0,-}$ из Теоремы 5. Для этого сначала отдельно посчитаем подинтегральное выражение:

$$\langle D_I H_1, g^I \rangle = (1 - \cos z) \left(-2Fy \frac{\partial \beta}{\partial x} + (2Fx + e_J G) \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\sin z}{\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \beta}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right),$$

$$\langle D_X H_1, g^X \rangle = \frac{-\beta \sin z}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \left(\arctan \frac{v}{u} \right),$$

$$D_I H_1(v(I), I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} M^I(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos z_{sep}(t)) dt \left(-2Fy \frac{\partial \beta}{\partial x} + (2Fx + e_J G) \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \sin z_{sep}(t) dt \left(\left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial \beta}{\partial x} + 2Fx + e_J G \right) + \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - 2Fy \right) \right). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для z_{sep} , получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos z_{sep}(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\operatorname{ch}^2(\alpha \beta t)} dt = \frac{4}{\alpha \beta},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin z_{sep}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh}(\alpha \beta t)}{\operatorname{ch}^2(\alpha \beta t)} dt = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M^I(x, y) &= \frac{4}{\alpha \beta} \left(-2Fy \frac{\partial \beta}{\partial x} + (2Fx + e_J G) \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{4}{\alpha \beta^2} \left(u \left((2Fx + e_J G) \frac{\partial u}{\partial y} - 2Fy \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left((2Fx + e_J G) \frac{\partial v}{\partial y} - 2Fy \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \\ &= \frac{4Cy}{\alpha \beta^2} \left(-2u((2Fx + e_J G) + F(2x + \tilde{\alpha})) + C(2x + \tilde{\alpha})((2Fx + e_J G)(2x + \tilde{\alpha}) - 4Fy^2) \right). \end{aligned}$$

Множество нулей функции Мельникова определяется уравнением:

$$0 = y \left((2x + \tilde{\alpha})^2 + y^2 - (2x + \tilde{\alpha}) \frac{4FK}{C(e_J G - F\tilde{\alpha})} - \frac{K}{C} \right),$$

и состоит из прямой $y = 0$ и эллипса (см. рис. 6).

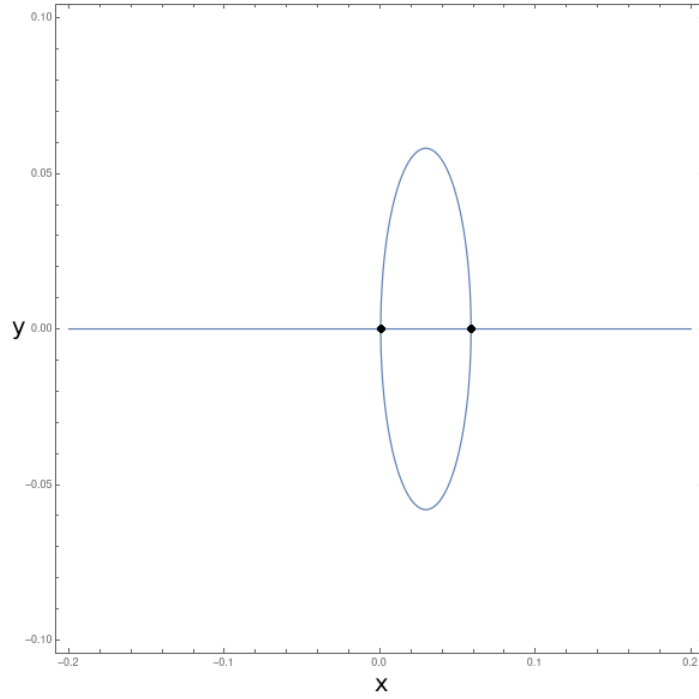


Рис. 6. Множество нулей функции Мельникова. Черным обозначены нули ее градиента

Градиент функции Мельникова $D_I M^I$ обращается в ноль в двух точках на этом множестве:

$$y_M = 0,$$

$$x_M = \frac{-\tilde{\alpha}}{2} + \frac{FK}{C(e_J G - F\tilde{\alpha})} \pm \sqrt{\frac{F^2 K^2}{C^2(e_J G - F\tilde{\alpha})} + \frac{K}{4C}}.$$

Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 3. 1. Пусть $\{(x(\tau), y(\tau), 0, \lambda_-(x(\tau), y(\tau)))\}, \tau \in \mathbb{R}\} \in M_{0,-}$ - орбита медленной системы (7) на листе $M_{0,-}$, а D_0 - δ -окрестность этой орбиты в $M_{0,-}$, не содержащая особых точек (x_b^\pm, y_b) . Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют локально инвариантное гиперболическое множество D_ε системы (4), устойчивое и неустойчивое локально инвариантные многообразия которого пересекаются трансверсально.

2. Для всех $\varepsilon > 0$ точка $(x_0^-, y_0^-, 0, \lambda_-(x_0^-, y_0^-))$ является гиперболическим положением равновесия системы (7). При этом, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия, отвечающие этому положению равновесия, пересекаются трансверсально.

Доказательство:

Множество D_0 является компактным инвариантным гиперболическим подмножеством $M_{0,-}$. Тогда по теореме Феничаля для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует локально инвариантное множество D_ε , лежащее в ε окрестности D_0 . В силу того, что орбита медленной системы имеет непустое пересечение с множеством нулей функции Мельникова, доказываем первое утверждение.

Далее заметим, что точка

$$(x_0^-, y_0^-, 0, \lambda_-(x_0^-, y_0^-))$$

является неподвижной гиперболической точкой и для медленной системы (24), и для полной системы (4). Поэтому при возмущении она остается неподвижной и, следовательно, глобально инвариантным гиперболическим множеством полной системы.

Взяв декартово произведение сепаратрисы быстрой системы и сепаратрисы медленной системы в качестве нулевого приближения для устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий полной системы, а также учитывая то, что сепаратриса медленной системы пересекается с множеством нулей функции Мельникова (см. рис. 7), получаем второе утверждение.

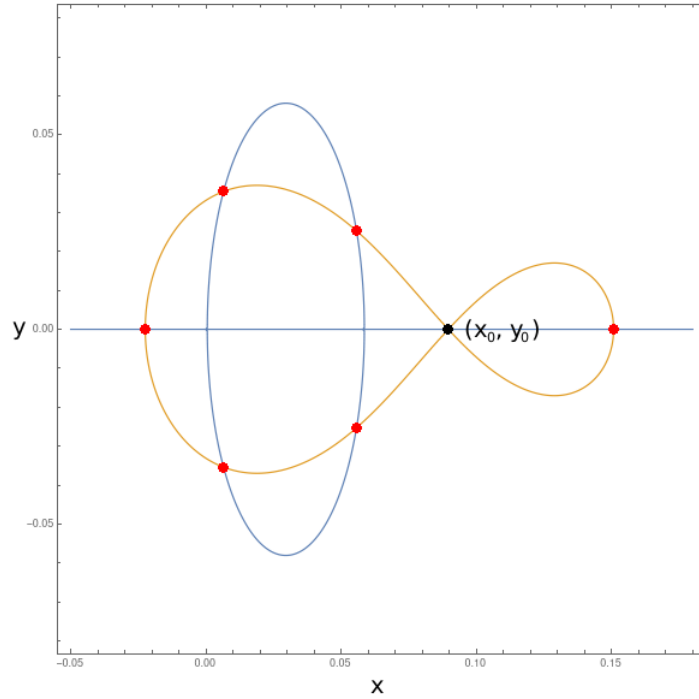


Рис. 7. Пересечение медленной сепаратрисы на неустойчивом листе $M_{0,-}$ и множества нулей функции Мельникова

3.5. Результаты для неустойчивого листа

Используя теорему Фенича доказано, что для всех достаточно малых значений параметра μ существуют локально инвариантные гиперболические множества системы (1), а также исследовано взаиморасположение их устойчивых и неустойчивых многообразий. Применяя модификацию метода Мельникова показано, что указанные устойчивые и неустойчивые многообразия трансверсально пересекаются.

Основным результатом главы является доказательство существования трансверсального пересечения глобально инвариантных устойчивого и неустойчивого многообразий положения равновесия $(x, y, \Lambda, \lambda) = (x_0^-, y_0^-, 0, \lambda_-(x_0^-, y_0^-)) \in M_{0,-}$ и, соответственно, существование гомоклинических траекторий, стремящихся к нему при $t \rightarrow \pm\infty$. Одним из следствий наличия таких трансверсальных гомоклинических траекторий является неинтегрируемость системы (1).

4. Динамика в окрестности устойчивого листа

Целью настоящей работы является исследование динамики возмущенной системы в окрестности устойчивого листа медленного многообразия.

Неподвижная точка медленной системы $(\hat{x}_0^+, 0, \lambda_+(\hat{x}_0^+, 0), 0) \in M_{0,+}$, аналогично случаю неустойчивого листа, также является положением равновесия полной системы (4). Линеаризация показывает, что эта точка имеет тип *седло-центр* с собственными значениями:

$$(\pm i\omega, \pm \xi),$$

$$\omega = \frac{\sqrt{\sqrt{p} - q}}{\sqrt{2}} = \sqrt{|\alpha U(\hat{x}_0^+, 0)|} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\sqrt{p} + q}}{\sqrt{2}} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$p = (4\varepsilon^2(C - F)(C + F) + \alpha U(\hat{x}_0^+, 0))^2 + 8\alpha\varepsilon^2(F - C)V_y(\hat{x}_0^+, 0) > 0$$

$$q = 4\varepsilon^2(C - F)(C + F) - \alpha U(\hat{x}_0^+, 0) < 0.$$

Положение равновесия типа *седло-центр* имеет одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия и двумерное центральное многообразие. В общем случае, если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются, то они совпадают и могут быть параметризованы гомоклинической траекторией. Поскольку эти одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия лежат в трехмерном уровне энергии и гладко зависят от ε , следует ожидать, что система будет иметь изолированные значения малого параметра, при которых устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются.

4.1. Устойчивое и неустойчивое многообразие положения равновесия

В данной главе рассматривается исключительно устойчивый лист медленного многообразия. Поэтому для упрощения обозначений индексы, указывающие на принадлежность к устойчивому или неустойчивому листу, будут опущены: все функции и константы подразумеваются заданными на устойчивом листе, если не оговорено иное.

Также для удобства сместим положение равновесия *седло-центр* системы в точку 0, при этом все обозначения оставим прежними:

$$\Lambda \rightarrow \Lambda,$$

$$\lambda \rightarrow \lambda - \lambda_+(\hat{x}_0, 0) = \lambda - \pi,$$

$$x \rightarrow x - \hat{x}_0,$$

$$y \rightarrow y.$$

В новых переменных уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = -U \sin \lambda + V \cos \lambda \equiv g^\Lambda(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \dot{\lambda} = \alpha \Lambda \equiv g^\lambda(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \dot{x} = -\varepsilon(2Fy - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda) \equiv g^x(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \dot{y} = \varepsilon(2F(x + \hat{x}_0) + e_J G - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda) \equiv g^y(\Lambda, \lambda, x, y), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= U_0 + x(2C\hat{x}_0 + e_J D) + C(x^2 - y^2), \\
V(x, y) &= 2Cxy + y(2C\hat{x}_0 + e_J D).
\end{aligned}$$

Заметим, что система (16) является гамильтоновой относительно симплектической формы

$$\Omega = d\Lambda \wedge d\lambda + \varepsilon^{-1} dx \wedge dy.$$

Гамильтониан системы равен:

$$H = \frac{\alpha\Lambda^2}{2} - U(x, y) \cos \lambda - V(x, y) \sin \lambda + F((x + \hat{x}_0)^2 + y^2) + e_J Gx. \quad (17)$$

4.1.1. Метод разложения по малому параметру

В данном разделе построим формальные решения системы (16), параметризующие устойчивое и неустойчивое многообразия $W^{s,u}(0)$ неподвижной точки. Для этого рассмотрим в дополнение к уравнениям (16) следующие начальные условия:

- Решения принадлежащие $W^s(0)$:

$$\begin{cases} \Lambda^s(+\infty) = 0, \\ \lambda^s(+\infty) = 0, \\ x^s(+\infty) = 0, \\ y^s(+\infty) = 0, \end{cases}$$

- Решения принадлежащие $W^u(0)$:

$$\begin{cases} \Lambda^u(-\infty) = 0, \\ \lambda^u(-\infty) = 0, \\ x^u(-\infty) = 0, \\ y^u(-\infty) = 0. \end{cases}$$

Представим формальные решения системы (16) в виде рядов:

$$\begin{cases} \Lambda^{s,u}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_k^{s,u}(\tau) \\ \lambda^{s,u}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{s,u}(\tau) \\ x^{s,u}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^{s,u}(\tau) \\ y^{s,u}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k^{s,u}(\tau) \end{cases} \quad (18)$$

и подставим их в уравнения, перейдя к медленному времени $\tau = \varepsilon t$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем набор уравнений, причем в силу того, что система содержит 2 временных масштаба, уравнения для $(\lambda_k, \Lambda_k), k \geq 1$ будут алгебраическими:

$$\begin{cases} \Lambda_k(\tau) = \frac{1}{\alpha} \lambda'_{k-1}, \\ \lambda_k(\tau) = \frac{1}{\beta} \left(\alpha^{-1} \lambda''_{k-2} - G_k^\Lambda + x_k((2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 - 2Cy_0 \cos \lambda_0) + \right. \\ \quad \left. + y_k(-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0) \right), \\ \lambda_{-1} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

а для $(x_k, y_k), k \geq 1$ - дифференциальными:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\tau) & b(\tau) \\ c(\tau) & -a(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}_k^x(\tau) \\ \tilde{G}_k^y(\tau) \end{pmatrix} \equiv \mathcal{A}(\tau) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}_k^x(\tau) \\ \tilde{G}_k^y(\tau) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где:

$$\tilde{G}_k^x = G_k^x - \beta^{-1}(\alpha^{-1}\lambda_{k-2}'' - G_k^\Lambda)(-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0),$$

$$\tilde{G}_k^y = G_k^y - \beta^{-1}(\alpha^{-1}\lambda_{k-2}'' - G_k^\Lambda)((2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 + 2Cy_0 \cos \lambda_0).$$

Здесь a, b, c - функции зависящие от $x_0(\tau), y_0(\tau), \lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau)$:

$$a(\tau) = \frac{(e_J^2 D^2 - 4CEe_J^2) \sin \lambda_0 \cos \lambda_0}{\beta(x_0, y_0)},$$

$$b(\tau) = -2F - 2C \cos \lambda_0 - \frac{1}{\beta(x_0, y_0)}((2Cy_0) \sin \lambda_0 + (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0)^2,$$

$$c(\tau) = 2F - 2C \cos \lambda_0 + \frac{1}{\beta(x_0, y_0)}((2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 - (2Cy_0) \cos \lambda_0)^2.$$

Утверждение 4. 1) Функции $G_k^\rho, \rho \in \{\lambda, \Lambda, x, y\}$, отвечающие за неоднородность в уравнениях (20), равны:

$$G_k^\rho = \sum_{j=2}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{j!}, \quad k \geq 2,$$

где g^ρ - компонента правой части, соответствующая $\rho \in \{\lambda, \Lambda, x, y\}$,

$$\mathcal{L}_k^{(j)} = \sum_{k_1 + \dots + k_j = k} \mathfrak{D}_{k_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_{k_j},$$

$$\mathfrak{D}_k = \left(\begin{pmatrix} \lambda_k \\ \Lambda_k \\ x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} |_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \\ \frac{\partial}{\partial \Lambda} |_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} |_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \\ \frac{\partial}{\partial y} |_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \end{pmatrix} \right),$$

(\cdot, \cdot) - стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^4 .

2) Введем классы экспоненциально убывающих и растущих функций:

$$\mathcal{F}_s = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \leq Ce^{-s|x|} \right\}, s > 0$$

$$\mathcal{F}_{-s} = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \geq Ce^{s|x|} \right\}, s > 0$$

Пусть $\lambda_j, \Lambda_j, x_j, y_j \in \mathcal{F}_s \forall 0 \leq j \leq k$, а $g^\rho \in C_b^\infty(\mathbb{R}^4)$ (где $C_b^\infty(\mathbb{R}^4)$ обозначает множество гладких функций таких, что все их производные ограничены).

Тогда $G_{k+1}^\rho \in \mathcal{F}_{2s}$

3)

$$G_k^\Lambda = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Доказательство:

- 1) Рассмотрим произвольную функцию $g^\rho(\lambda, \Lambda, x, y)$ и подставим в нее представление (18). Раскладывая в многомерный ряд Тейлора получаем:

$$g^\rho(\lambda, \Lambda, x, y) = g^\rho(\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}^j g^\rho}{j!},$$

где \mathcal{T} - оператор вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varepsilon^k \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k \varepsilon^k \right) \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \varepsilon^k \right) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} y_k \varepsilon^k \right) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0}. \end{aligned}$$

Вводя оператор

$$\mathfrak{D}_k = \left(\begin{pmatrix} \lambda_k \\ \Lambda_k \\ x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \\ \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \\ \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} \end{pmatrix} \right),$$

получаем:

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \mathfrak{D}_k.$$

Рассмотрим выражение для \mathcal{T}^j в котором, явно взяв степень, получаем:

$$\mathcal{T}^j = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \mathfrak{D}_k \right)^j = \sum_{k=j}^{+\infty} \varepsilon^k \mathcal{L}_k^{(j)},$$

где:

$$\mathcal{L}_k^{(j)} = \sum_{k_1 + \dots + k_j = k} \mathfrak{D}_{k_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_{k_j}.$$

Подставляя этот результат в ряд Тейлора и группируя слагаемые по степеням ε получаем:

$$g^\rho(\lambda, \Lambda, x, y) = g^\rho(\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{j=1}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{j!} \right).$$

Разобьем внутреннюю сумму на 2 части, учитывая $\mathcal{L}_k^{(1)} = \mathfrak{D}_k$:

$$\begin{aligned}
g^\rho(\lambda, \Lambda, x, y) &= g^\rho(\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0) + \varepsilon \mathfrak{D}_1 g^\rho + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\mathcal{L}_k^{(1)} g^\rho + \sum_{j=2}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{j!} \right) = \\
&= g^\rho(\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0) + \varepsilon \mathfrak{D}_1 g^\rho + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\mathfrak{D}_k g^\rho + \underbrace{\sum_{j=2}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{j!}}_{G_k^\rho} \right)
\end{aligned}$$

- $\mathfrak{D}_k g^\rho$ - содержит $(\lambda_k, \Lambda_k, x_k, y_k)$ и уйдет в оператор однородного уравнения;
- G_k^ρ - содержит $(\lambda_j, \Lambda_j, x_j, y_j)$, $j \leq k-1$ и входит в неоднородность в уравнениях (20).

Введенные таким образом G_k^ρ определены только для $k \geq 2$, для $k = 1$ по определению положим $G_1^\rho = 0$. В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
G_k^\rho &= \sum_{j=2}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{j!}, \quad k \geq 2, \\
G_1^\rho &\equiv 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$g^\rho(\lambda, \Lambda, x, y) = g^\rho(\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \mathfrak{D}_k g^\rho + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k G_k^\rho.$$

- 2) Так как $g^\rho, \rho \in \{\lambda, \Lambda, x, y\}$ и все ее производные ограничены, а сумма (21) начинается с $j = 2$, то G_{k+1}^ρ будет содержать слагаемые из 2 и более множителей (порядка $\leq k$) вида $\mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_j g^\rho, i + j \leq k$. Учитывая что каждое решение порядка $\leq k$ принадлежит классу \mathcal{F}_s , то их произведения и, как следствие, G_{k+1}^ρ будут принадлежать классу \mathcal{F}_{2s} .
- 3) Так как $g^\lambda = \alpha \Lambda$ не содержит нелинейные члены, то любые производные второго порядка и старше будут равны 0. В следствие этого $G_k^\lambda = 0 \quad \forall k \geq 1$. ■

Уравнения на нулевой порядок в точности совпадают с уравнениями медленной системы при $\varepsilon = 0$. Так как в данном разделе строим формальные решения, параметризующие $W^{s,u}(0)$, то в качестве нулевого приближения выбираем сепаратрисное решение медленной системы:

$$\begin{cases} \Lambda_0(\tau) = 0, \\ \lambda_0(\tau) = \lambda_-(x_{sep}(\tau), y_{sep}(\tau)), \\ x_0(\tau) = x_{sep}(\tau) - \hat{x}_0, \\ y_0(\tau) = y_{sep}(\tau). \end{cases}$$

Утверждение 5. 1) Уравнения на $(\Lambda_1, \lambda_1, x_1, y_1)$ являются алгебраическими по переменным (Λ_1, λ_1) :

$$\begin{cases} \Lambda_1(\tau) = \lambda'_0, \\ \lambda_1(\tau) = \frac{1}{\beta} \left(x_1 \left((2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 - 2Cy_0 \cos \lambda_0 \right) + \right. \\ \left. + y_1 \left(-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0 \right) \right), \end{cases}$$

и однородными дифференциальным по переменным (x_1, y_1) :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\tau) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}. \quad (22)$$

2) Одним из решений (22) будет:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_1^{s,u}(\tau) = \frac{dx_0}{d\tau}, \\ y_1(\tau) = y_1^{s,u}(\tau) = \frac{dy_0}{d\tau}. \end{cases} \quad (23)$$

Доказательство:

1) Рассмотрим абстрактную 4 мерную быстро-медленную систему:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda}(t) = g^\Lambda(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \dot{\lambda}(t) = g^\lambda(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \dot{x}(t) = \varepsilon g^x(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \dot{y}(t) = \varepsilon g^y(\Lambda, \lambda, x, y), \end{cases}$$

Переходя к медленному времени $\tau = \varepsilon t$ получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon \Lambda'(\tau) = g^\Lambda(\Lambda, \lambda, x, y), \\ \varepsilon \lambda'(\tau) = g^\lambda(\Lambda, \lambda, x, y), \\ x'(\tau) = g^x(\Lambda, \lambda, x, y), \\ y'(\tau) = g^y(\Lambda, \lambda, x, y), \end{cases}$$

Обозначим $\mathbf{X} = (\Lambda, \lambda, x, y)$ и будем искать формальное решение в виде: $\mathbf{X} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{X}_k$. Подставляя это представление в систему и приравнивая члены при одинаковых степенях ε получаем для младших порядков:

$$\begin{cases} 0 = g^\Lambda(\mathbf{X}_0), \\ 0 = g^\lambda(\mathbf{X}_0), \\ x'_0(\tau) = g^x(\mathbf{X}_0), \\ y'_0(\tau) = g^y(\mathbf{X}_0), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \Lambda'_0(\tau) = (\nabla g^\Lambda(\mathbf{X}_0), \mathbf{X}_1), \\ \lambda'_0(\tau) = (\nabla g^\lambda(\mathbf{X}_0), \mathbf{X}_1), \\ x'_1(\tau) = (\nabla g^x(\mathbf{X}_0), \mathbf{X}_1), \\ y'_1(\tau) = (\nabla g^y(\mathbf{X}_0), \mathbf{X}_1), \end{cases} \quad (25)$$

Заметим, что первые два уравнения в (25) являются линейной неоднородной системой алгебраических уравнений по переменным (Λ_1, λ_1) , представимой в виде:

$$\begin{pmatrix} (\nabla g^\Lambda)_\Lambda & (\nabla g^\Lambda)_\lambda \\ (\nabla g^\lambda)_\Lambda & (\nabla g^\lambda)_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda'_0 - (\nabla g^\Lambda)_x x_1 - (\nabla g^\Lambda)_y y_1 \\ \lambda'_0 - (\nabla g^\lambda)_x x_1 - (\nabla g^\lambda)_y y_1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} (\nabla g^\Lambda)_\Lambda & (\nabla g^\Lambda)_\lambda \\ (\nabla g^\lambda)_\Lambda & (\nabla g^\lambda)_\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда решение этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{C},$$

$$M = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -(\nabla g^\lambda)_\lambda (\nabla g^\Lambda)_x + (\nabla g^\Lambda)_\lambda (\nabla g^\lambda)_x & -(\nabla g^\lambda)_\lambda (\nabla g^\Lambda)_y + (\nabla g^\Lambda)_\lambda (\nabla g^\lambda)_y \\ (\nabla g^\lambda)_\Lambda (\nabla g^\Lambda)_x - (\nabla g^\Lambda)_\Lambda (\nabla g^\lambda)_x & (\nabla g^\lambda)_\Lambda (\nabla g^\Lambda)_y - (\nabla g^\Lambda)_\Lambda (\nabla g^\lambda)_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (\nabla g^\lambda)_\lambda \Lambda'_0 - (\nabla g^\Lambda)_\lambda \lambda'_0 \\ -(\nabla g^\lambda)_\Lambda \Lambda'_0 + (\nabla g^\Lambda)_\Lambda \lambda'_0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя решение в последние два уравнения в (25) и группируя слагаемые получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1(\tau) = \left((\nabla g^x)_x + ((\nabla g^x)_\Lambda M_{11} + (\nabla g^x)_\lambda M_{21}) \right) x_1 + \\ \quad + \left((\nabla g^x)_y + ((\nabla g^x)_\Lambda M_{12} + (\nabla g^x)_\lambda M_{22}) \right) y_1 + \\ \quad + \left(\begin{pmatrix} (\nabla g^x)_\Lambda \\ (\nabla g^x)_\lambda \end{pmatrix}, \mathbf{C} \right), \\ y'_1(\tau) = \left((\nabla g^y)_x + ((\nabla g^y)_\Lambda M_{11} + (\nabla g^y)_\lambda M_{21}) \right) x_1 + \\ \quad + \left((\nabla g^y)_y + ((\nabla g^y)_\Lambda M_{12} + (\nabla g^y)_\lambda M_{22}) \right) y_1 + \\ \quad + \left(\begin{pmatrix} (\nabla g^y)_\Lambda \\ (\nabla g^y)_\lambda \end{pmatrix}, \mathbf{C} \right). \end{array} \right. \quad (26)$$

Здесь (\cdot, \cdot) – стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Таким образом, в общем случае, уравнение для первого приближения является неоднородным, однако для рассматриваемой системы (16) неоднородность равна нулю. Действительно, заметим:

$$\Lambda_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda'_0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Также заметим, что компоненты правой части g^x, g^y не зависят от Λ , поэтому векторы, входящие в неоднородность в уравнениях (26) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} (\nabla g^x)_\Lambda \\ (\nabla g^x)_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (\nabla g^y)_\Lambda \\ (\nabla g^y)_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}.$$

Тогда неоднородность в системе (26) вырождается:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} (\nabla g^x)_\Lambda \\ (\nabla g^x)_\lambda \end{pmatrix}, \mathbf{C} \right) = \left(\left(\begin{pmatrix} (\nabla g^y)_\Lambda \\ (\nabla g^y)_\lambda \end{pmatrix}, \mathbf{C} \right) = 0.$$

Таким образом, в системе (16) дифференциальное уравнение на (x_1, y_1) является однородным.

- 2) Рассмотрим уравнения медленной системы (24). Для простоты приведем выкладки только для компоненты x_0 .

Продифференцируем уравнение на x_0 по времени, при этом будем считать, что Λ_0, λ_0 зависят от x_0, y_0 :

$$\begin{aligned} x_0'' &= (\nabla g^x)_x x_0' + (\nabla g^x)_y y_0' + (\nabla g^x)_\Lambda \Lambda_0' + (\nabla g^x)_\lambda \lambda_0' = \\ &= \left((\nabla g^x)_x + (\nabla g^x)_\Lambda \frac{\partial \Lambda_0}{\partial x} + (\nabla g^x)_\lambda \frac{\partial \lambda_0}{\partial x} \right) x_0' + \\ &\quad + \left((\nabla g^x)_y + (\nabla g^x)_\Lambda \frac{\partial \Lambda_0}{\partial y} + (\nabla g^x)_\lambda \frac{\partial \lambda_0}{\partial y} \right) y_0'. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что $\Lambda_0(x_0, y_0), \lambda_0(x_0, y_0)$ задаются неявно через уравнения:

$$\begin{cases} 0 = g^\Lambda(\mathbf{X}_0), \\ 0 = g^\lambda(\mathbf{X}_0). \end{cases} \quad (28)$$

Дифференцируем оба уравнения по x :

$$\begin{cases} (\nabla g^\Lambda)_x + (\nabla g^\Lambda)_y \underbrace{y_x}_0 + (\nabla g^\Lambda)_\Lambda \cdot \Lambda_x + (\nabla g^\Lambda)_\lambda \cdot \lambda_x = 0, \\ (\nabla g^\lambda)_x + (\nabla g^\lambda)_y \underbrace{y_x}_0 + (\nabla g^\lambda)_\Lambda \cdot \Lambda_x + (\nabla g^\lambda)_\lambda \cdot \lambda_x = 0. \end{cases}$$

Полученное выражение можно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} (\nabla g^\Lambda)_\Lambda & (\nabla g^\Lambda)_\lambda \\ (\nabla g^\lambda)_\Lambda & (\nabla g^\lambda)_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_x \\ \lambda_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (\nabla g^\Lambda)_x \\ (\nabla g^\lambda)_x \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение относительно (Λ_x, λ_x) получаем:

$$\begin{aligned} \Lambda_x &= \frac{(\nabla g^\Lambda)_\lambda (\nabla g^\lambda)_x - (\nabla g^\Lambda)_x (\nabla g^\lambda)_\lambda}{(\nabla g^\Lambda)_\Lambda (\nabla g^\lambda)_\lambda - (\nabla g^\Lambda)_\lambda (\nabla g^\lambda)_\Lambda}, \\ \lambda_x &= \frac{(\nabla g^\Lambda)_x (\nabla g^\lambda)_\Lambda - (\nabla g^\Lambda)_\Lambda (\nabla g^\lambda)_x}{(\nabla g^\Lambda)_\Lambda (\nabla g^\lambda)_\lambda - (\nabla g^\Lambda)_\lambda (\nabla g^\lambda)_\Lambda}. \end{aligned}$$

Заметим, что данные частные производные в точности совпадают с коэффициентами матрицы M :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_0}{\partial x} &= M_{11}, \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial x} &= M_{21}, \end{aligned}$$

Аналогично можно показать следующее:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda_0}{\partial y} &= M_{12}, \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial y} &= M_{22}.\end{aligned}$$

Подставляя данный результат в (27) получаем:

$$\begin{aligned}(x'_0)' &= (\nabla g^x)_x x'_0 + (\nabla g^x)_y y'_0 + (\nabla g^x)_\Lambda \Lambda'_0 + (\nabla g^x)_\lambda \lambda'_0 = \\ &= ((\nabla g^x)_x + (\nabla g^x)_\Lambda M_{11} + (\nabla g^x)_\lambda M_{21}) x'_0 + \\ &\quad + ((\nabla g^x)_y + (\nabla g^x)_\Lambda M_{12} + (\nabla g^x)_\lambda M_{22}) y'_0. \quad (29)\end{aligned}$$

Учитывая, что в системе (16) неоднородность в уравнениях (26) вырождается, вид уравнений (29) и (26) полностью совпадает.

Заметим, что асимптотика сепаратрисы медленной системы при $\tau \rightarrow \pm\infty$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_0(\tau) = \frac{\text{const}}{\cosh(f_\pm \cdot \tau)} + \mathcal{O}(e^{-2f_\pm|\tau|}), & \tau \rightarrow \pm\infty, \\ y_0(\tau) = \frac{\text{const} \cdot \sinh(f_\pm \cdot \tau)}{\cosh^2(f_\pm \cdot \tau)} + \mathcal{O}(e^{-2f_\pm|\tau|}), & \tau \rightarrow \pm\infty, \end{cases}$$

где $f_\pm = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{df^\pm(\tau)}{d\tau} = \frac{J^+\chi^+}{\sigma^+} \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{P^+(f^+(\tau))}{S^+(f^+(\tau))}$. Так как P^\pm и S^\pm являются полиномами второй степени от $\cosh f^\pm$, то пределы существуют и равны:

$$f_+ = f_- = \frac{J^+\chi^+}{\sigma^+} \cdot \frac{1}{U_0} > 0$$

Тогда получаем:

$$x_0, y_0 \in \mathcal{F}_{s_0}, \quad s_0 = f_+ = f_- > 0$$

Решение для первого приближения имеет аналогичное поведение на обеих бесконечностях:

$$\begin{cases} x_1(\pm\infty) = 0, \\ y_1(\pm\infty) = 0. \end{cases}$$

$$x_1, y_1 \in \mathcal{F}_{s_0}$$

Отсюда получаем, что (x_1, y_1) удовлетворяет граничным условиям и для $W^s(0)$, и для $W^u(0)$, поэтому индексы s, u будем для него опускать.

■

Обозначим второе решение однородного уравнения (22) (линейно независимое к первому) как $(\tilde{x}_1(\tau), \tilde{y}_1(\tau))$. Т.к. след матрицы \mathcal{A} в однородном уравнении равен 0, то вронскиан, по формуле Лиувилля-Остроградского, является константой и, за счет нормировки второго решения, положим:

$$W(\tau) = x_1(\tau)\tilde{y}_1(\tau) - y_1(\tau)\tilde{x}_1(\tau) = 1$$

Также потребуем ортогональность (x_1, y_1) и $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

Обозначим:

$$\mathbf{u}_1(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ y_1(\tau) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(\tau) \\ \tilde{y}_1(\tau) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим асимптотику матрицы $\mathcal{A}(\tau)$ при больших $|\tau|$:

$$\mathcal{A}(\tau) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2F - 2C + \frac{(2C\hat{x}_0 + e_J D)^2}{U_0} \\ 2F - 2C & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}_0} + \mathcal{O}(e^{-s_0|\tau|}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-s_0|\tau|}) \quad (30)$$

Учитывая значения констант, получаем, что собственные значения $\pm\sqrt{b_0 c_0}$ матрицы \mathcal{A}_0 чисто вещественные. Также, учитывая явный вид b_0, c_0 , заметим, что:

$$\sqrt{b_0 c_0} = s_0.$$

Тогда для положительных τ :

$$\mathbf{u}_1(\tau) = \text{const} \begin{pmatrix} b_0 \sqrt{c_0} \\ c_0 \sqrt{b_0} \end{pmatrix} e^{-s_0 \tau} + \mathcal{O}(e^{-2s_0 \tau}),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) = \text{const} \begin{pmatrix} b_0 \sqrt{c_0} \\ -c_0 \sqrt{b_0} \end{pmatrix} e^{s_0 \tau} + \mathcal{O}(1).$$

Аналогично для отрицательных τ :

$$\mathbf{u}_1(\tau) = \text{const} \begin{pmatrix} b_0 \sqrt{c_0} \\ -c_0 \sqrt{b_0} \end{pmatrix} e^{s_0 \tau} + \mathcal{O}(e^{2s_0 \tau}),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) = \text{const} \begin{pmatrix} b_0 \sqrt{c_0} \\ c_0 \sqrt{b_0} \end{pmatrix} e^{-s_0 \tau} + \mathcal{O}(1).$$

Таким образом:

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \in \mathcal{F}_{-s_0}.$$

Уравнения для приближений старших порядков являются неоднородными дифференциальными уравнениями с той же матрицей \mathcal{A} , что и в однородном уравнении на первое приближение. Тогда, с учетом граничных условий, по известным решениям однородного уравнения можно строить решения неоднородного:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^u = \mathbf{u}_1(\tau) \int_{\tau_k^u}^{\tau} \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) \right) d\tau + \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) \right) d\tau, \\ \mathbf{u}_k^s = \mathbf{u}_1(\tau) \int_{\tau_k^s}^{\tau} \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) \right) d\tau - \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) \right) d\tau. \end{cases} \quad (31)$$

В силу *Утверждения 2*, подынтегральные выражения во всех интегралах в (31) экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, все интегралы в (31) являются ограниченными функциями по τ при любых нижних пределах интегрирования.

Поскольку $\mathbf{u}_1(\tau)$ убывает при $\tau \rightarrow \pm\infty$, то \mathbf{u}_k^u и \mathbf{u}_k^s будут удовлетворять граничным условиям для любых $\tau_k^u, \tau_k^s \in \mathbb{R}$.

Функция $\tilde{\mathbf{u}}_1(\tau)$ растёт при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Поэтому в \mathbf{u}_k^u и \mathbf{u}_k^s во втором слагаемом пределы интегрирования выбираются, как указано в (31), чтобы компенсировать этот рост на соответствующих бесконечностях. Так как $(x_1 \tilde{G}_k^y - y_1 \tilde{G}_k^x) \in \mathcal{F}_{3s_0}$, можно гарантировать, что убывание происходит быстрее, чем рост $\tilde{\mathbf{u}}_1$.

Утверждение 6. Пусть по описанной выше процедуре построено формальное решение:

$$\begin{cases} \Lambda^s(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_k(\tau) \\ \lambda^s(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k(\tau) \\ x^s(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau) \\ y^s(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau) \end{cases} \quad (32)$$

Причем в качестве (x_1, y_1) выбрано следующее решение (20):

$$\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ y_1(\tau) \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \mathbf{u}_1.$$

Константы τ_k^s произвольны.

Тогда будет существовать решение системы (16), принадлежащее $W^s(0)$ и, в силу одномерности устойчивого многообразия, однозначно параметризующее его. Причем асимптотика такого решения будет совпадать с (32).

Аналогично будет существовать решение системы (16), принадлежащее $W^u(0)$, параметризующее его и имеющее аналогичную асимптотику с другими граничными условиями.

Для исследования расщепления сепаратрис рассмотрим разность устойчивого и неустойчивого решений в каждом порядке:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_k^u(\tau) - \mathbf{u}_k^s(\tau)| = & \left| \mathbf{u}_1(\tau) \int_{\tau_k^u}^{\tau_k^s} \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) \right) d\tau + \right. \\ & \left. + \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) \right) d\tau \right| \quad (33) \end{aligned}$$

Существование нулей у такой величины при некоторых τ будет означать существование пересечения сепаратрис в соответствующем порядке. В таком случае в силу теоремы о единственности решения и одномерности $W^s(0)$ и $W^u(0)$ \mathbf{u}_k^s и \mathbf{u}_k^u обязаны совпадать для произвольных τ .

Отметим, что уравнение $|\mathbf{u}_k^u(\tau_1) - \mathbf{u}_k^s(\tau_2)| = 0$ можно рассматривать с различными моментами времени τ_1, τ_2 . Однако, поскольку достаточно найти хотя бы одно решение такого уравнения, мы положим для простоты $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

Утверждение 7. Для G_k^ρ верна рекуррентная формула:

$$G_{k+1}^\rho = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \mathfrak{D}_m \mathfrak{D}_{k+1-m} g^\rho + \sum_{m=1}^k \mathfrak{D}_m \hat{G}_{k+1-m}^\rho,$$

где \hat{G}_{k+1}^ρ отличается от G_{k+1}^ρ нормировкой:

$$G_k^\rho = \sum_{j=2}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{j!},$$

$$\hat{G}_k^\rho = \sum_{j=2}^k \frac{\mathcal{L}_k^{(j)} g^\rho}{(j+1)!},$$

$$\rho \in \lambda, \Lambda, x, y.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k+1}^{(j)} g^\rho &= \sum_{m=1}^{k+2-j} \mathfrak{D}_m \mathcal{L}_{k+1-m}^{(j-1)} g^\rho \\ G_{k+1}^\rho &= \sum_{j=2}^{k+1} \frac{\mathcal{L}_{k+1}^{(j)} g^\rho}{j!} = \sum_{j=2}^{k+1} \sum_{m=1}^{k+2-j} \frac{\mathcal{L}_{k+1-m}^{(j-1)} g^\rho}{j!} = \sum_{m=1}^k \mathfrak{D}_m \sum_{j=2}^{k+2-m} \frac{\mathcal{L}_{k+1-m}^{(j-1)} g^\rho}{j!} = \\ &= \sum_{m=1}^k \mathfrak{D}_m \sum_{l=1}^{k+1-m} \frac{\mathcal{L}_{k+1-m}^{(l)} g^\rho}{(l+1)!} = \sum_{m=1}^k \mathfrak{D}_m \left(\sum_{l=2}^{k+1-m} \frac{\mathcal{L}_{k+1-m}^{(l)} g^\rho}{(l+1)!} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{k+1-m}^{(1)} g^\rho \right) = \\ &= \sum_{m=1}^k \mathfrak{D}_m \left(\hat{G}_{k+1-m}^\rho + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_{k+1-m} g^\rho \right) \blacksquare \end{aligned}$$

Определение 7. Будем говорить, что функция $f(\tau)$ имеет четность, если $f(\tau)$ является либо четной, либо нечетной по τ .

Утверждение 8. 1) Если $\lambda_j, \Lambda_j, x_j, y_j, \quad j \leq k-1$ как функции τ имеют четность, то

$G_k^x(\tau), \tilde{G}_k^x(\tau), G_k^\Lambda(\tau), G_k^y(\tau)$ также имеют четность. При этом $G_k^x(\tau), \tilde{G}_k^x(\tau), G_k^\Lambda(\tau)$ имеют одинаковую четность, а $G_k^y(\tau), \tilde{G}_k^y(\tau)$ имеют противоположную к $G_k^x(\tau)$ четность.

2) В частности $G_2^x(\tau), \tilde{G}_2^x(\tau), G_2^\Lambda$ - нечетные, $G_2^y(\tau), \tilde{G}_2^y(\tau)$ - четные.

Доказательство:

1) Рассмотрим четность правой части и различных ее производных по координатам в подстановке нулевого приближения. Т.к. $x_0(\tau)$ - четная, $y_0(\tau), \lambda_0(\tau)$ - нечетные получаем:

$$g^\Lambda|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} = U(x_0, y_0) \sin \lambda_0 - V(x_0, y_0) \cos \lambda_0 \quad - \text{нечетная},$$

$$g^x|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} = -\varepsilon \left(2F y_0 - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda_0 - \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda_0 \right) \quad - \text{нечетная},$$

$$g^y|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} = \varepsilon \left(2F(x_0 + \hat{x}_0) + e_J G - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda_0 - \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda_0 \right) \quad - \text{четная}.$$

Заметим:

- Каждая производная по чётной переменной (x_0) сохраняет чётность.
- Каждая производная по нечётной переменной (y_0 или λ_0) меняет чётность на противоположную.

Таким образом, обозначая четность как $+1$ для четных функций и -1 - для нечетных функций, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+q+m} g^\Lambda}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} &\Leftrightarrow -(-1)^{q+m}, \\ \frac{\partial^{p+q+m} g^x}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} &\Leftrightarrow -(-1)^{q+m}, \\ \frac{\partial^{p+q+m} g^y}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} &\Leftrightarrow (-1)^{q+m}. \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что $G_k^\Lambda(\tau), G_k^x(\tau), G_k^y(\tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} G_k^\Lambda(\tau) &= \sum_{p_1, q_1, m_1, \dots} \frac{\partial^{p+q+m} g^\Lambda}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} (x_{p_1} y_{q_1} \lambda_{m_1} \dots), \\ G_k^x(\tau) &= \sum_{p_1, q_1, m_1, \dots} \frac{\partial^{p+q+m} g^x}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} (x_{p_1} y_{q_1} \lambda_{m_1} \dots), \\ G_k^y(\tau) &= \sum_{p_1, q_1, m_1, \dots} \frac{\partial^{p+q+m} g^y}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} (x_{p_1} y_{q_1} \lambda_{m_1} \dots), \end{aligned}$$

и отличаются только производными, множители в скобках у них одинаковые.

Следовательно, если определена четность множителя в скобках (т.е. определена четность всех решений порядка $\leq k-1$), то четность $G_k^\Lambda(\tau), G_k^x(\tau), G_k^y(\tau)$ отличается на четность производных. Учитывая, что четность производных одинакового порядка для g^Λ и g^x совпадает, а для g^y отличается, получаем необходимое утверждение.

Четность $\tilde{G}_k^x, \tilde{G}_k^y$ наследуется от $G_k^\Lambda(\tau), G_k^x(\tau), G_k^y(\tau)$.

2) Заметим, что $x_0(\tau), y_1(\tau), \tilde{x}_1, \lambda_1$ - четные, а $y_0(\tau), x_1(\tau), \tilde{y}_1$ - нечетные.

$$G_2^\rho(\tau) = \sum_{p+q+m=2, \quad p, q, m \geq 0, \quad p, q, m \neq 2} \frac{\partial^2 g^\rho}{\partial x^p \partial y^q \partial \lambda^m} \Big|_{\lambda_0(\tau), \Lambda_0(\tau), x_0(\tau), y_0(\tau)} x_1^p y_1^q \lambda_1^m \quad (35)$$

Кроме того, четность $x_1^p y_1^q \lambda_1^m$ равна $(-1)^p$. Тогда, учитывая (34), получаем что четность слагаемых в (35) равна $-(-1)^{p+q+m}$ для $\rho \in \{\Lambda, x\}$ и $(-1)^{p+q+m}$ для $\rho = y$. Но так как во всех слагаемых $p+q+m=2$, получаем: $G_2^x(\tau), G_2^\Lambda$ - нечетные, $G_2^y(\tau)$ - четные.

Четность $\tilde{G}_2^x, \tilde{G}_2^y$ наследуется от $G_2^\Lambda(\tau), G_2^x(\tau), G_2^y(\tau)$. ■

Следствие 1. В силу нечётности подынтегральной функции $x_1(\tau)\tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau)\tilde{G}_2^x(\tau)$ относительно переменной τ выполняется:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(\tau)\tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau)\tilde{G}_2^x(\tau)) d\tau = 0.$$

Поскольку интеграл в *Следствии 1* равен нулю, а подынтегральное выражение нечётное, то следующие функции являются чётными:

$$\int_{-\infty}^{\tau} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) \right) d\tau \quad - \text{ чётная,}$$

$$\int_{\tau}^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) \right) d\tau \quad - \text{ чётная.}$$

Так как в общем случае интегралы

$$\int_{\tau_2^u}^0 \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau \neq 0,$$

$$\int_{\tau_2^s}^0 \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau \neq 0,$$

то функции

$$\int_{\tau_2^u}^{\tau} \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau = \underbrace{\int_{\tau_2^u}^0 \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau}_{\text{const}} + \underbrace{\int_0^{\tau} \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau}_{\substack{\text{чётная} \\ \text{нечётная}}},$$

$$\int_{\tau^s}^{\tau} \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau = \underbrace{\int_{\tau_2^s}^0 \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau}_{\text{const}} + \underbrace{\int_{\tau}^0 \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau}_{\substack{\text{чётная} \\ \text{нечётная}}}.$$

не имеют определенной четности.

Следовательно $\mathbf{u}_2^u(\tau)$ и $\mathbf{u}_2^s(\tau)$ также не имеют определенной четности при произвольных $\tau_2^{s,u}$.

В силу *утверждения 4* любое формальное решение, построенное по формулам (31) будет параметризовать $W^s(s)$ или $W^u(s)$, соответственно. Поэтому для простоты положим $\tau_k^s = \tau_k^u = 0 \quad \forall k \geq 2$.

В таком случае:

$$|\mathbf{u}_2^u(\tau) - \mathbf{u}_2^s(\tau)| = \left| \mathbf{u}_1(\tau) \underbrace{\int_0^0 \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau}_0 + \right.$$

$$\left. + \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) \right) d\tau}_0 \right| = 0$$

$$|\mathbf{u}_k^u(\tau) - \mathbf{u}_k^s(\tau)| = \left| \mathbf{u}_1(\tau) \underbrace{\int_0^0 \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) \right) d\tau}_0 + \right.$$

$$\left. + \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_k^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_k^x(\tau) \right) d\tau \right|, \quad k \geq 3.$$

4.1.2. Построение сепаратрисы полной системы

Построим выделенное формальное решение для полной системы, которое будем называть *каноническим* и обозначать верхним индексом 0.

Система уравнений на первый порядок является однородной, поэтому для рассматриваемого случая выберем тривиальное решение:

$$\mathbf{u}_1^0(\tau) \equiv \begin{pmatrix} x_1^0(\tau) \\ y_1^0(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В силу этого $(\lambda_1^0(\tau), \Lambda_1^0(\tau)) = (0, 0)$. В таком случае:

$$\mathfrak{D}_1 = 0 \cdot \quad - \text{оператор умножения на } 0,$$

$$G_2^\rho = \frac{1}{2} \mathfrak{D}_1^2 g^\rho = \frac{1}{2} (x_1^0)^2 g_{xx}^\rho + \frac{1}{2} x_1^0 y_1^0 g_{xy}^\rho + \dots = 0,$$

$$\tilde{G}_2^x = \frac{1}{\alpha\beta} \lambda_0''(\tau) (-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0) \quad - \text{нечетная},$$

$$\tilde{G}_2^y = \frac{1}{\alpha\beta} \lambda_0''(\tau) (-(2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 + 2Cy_0 \cos \lambda_0) \quad - \text{четная}.$$

При построении $\mathbf{u}_2^u, \mathbf{u}_2^s$ выберем $\tau_2^u = \tau_2^s = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_2^u = \mathbf{u}_1(\tau) \int_0^\tau \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau + \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{-\infty}^\tau \left(x_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) \right) d\tau, \\ \mathbf{u}_2^s = \mathbf{u}_1(\tau) \int_0^\tau \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) \right) d\tau - \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_\tau^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_2^x(\tau) \right) d\tau. \end{cases}$$

Тогда по *Следствию 1* $\mathbf{u}_2^s(\tau) = \mathbf{u}_2^u(\tau) \equiv \mathbf{u}_2^0(\tau)$

Т.к. G_k^ρ и \hat{G}_k^ρ отличаются только нормировкой то вырождаются они одновременно. В таком случае:

$$G_3^\rho = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1) g^\rho + \mathfrak{D}_1 \hat{G}_2^\rho = 0,$$

$$\tilde{G}_3^x = \frac{1}{\alpha\beta} \underbrace{(\lambda_1^0)''(\tau)}_0 (-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0) = 0,$$

$$\tilde{G}_3^y = \frac{1}{\alpha\beta} \underbrace{(\lambda_1^0)''(\tau)}_0 (-(2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 + 2Cy_0 \cos \lambda_0) = 0.$$

То есть в 3 порядке неоднородность вырождается и уравнение становится однородным. Выберем тривиальное решение:

$$\mathbf{u}_3^0(\tau) \equiv \begin{pmatrix} x_3^0(\tau) \\ y_3^0(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\lambda_3^0(\tau), \Lambda_3^0(\tau)) = (0, 0).$$

Продолжая данное построение по индукции получаем следующее

Утверждение 9. Для любого целого $k \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} G_{2k+1}^\rho &= 0, \rho \in \{\Lambda, \lambda, x, y\}, \\ G_{2k+2}^x, y_{2k+2} &- \text{нечетные}, \\ G_{2k+2}^y, x_{2k+2} &- \text{четные}, \\ (\lambda_{2k+1}^0, \Lambda_{2k+1}^0, x_{2k+1}^0, y_{2k+1}^0) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Доказательство:

База индукции описана ранее. Индукционное предположение:

$$\begin{aligned} G_{2k-1}^\rho &= 0, \\ G_{2k}^x, y_{2k} &- \text{нечетные}, \\ G_{2k}^y, x_{2k} &- \text{четные}, \\ (\lambda_{2k-1}^0, \Lambda_{2k-1}^0, x_{2k-1}^0, y_{2k-1}^0) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

По Утверждению 5

$$G_{2k+1}^\rho = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2k} \mathfrak{D}_m \mathfrak{D}_{2k+1-m} g^\rho + \sum_{m=1}^{2k} \mathfrak{D}_m \hat{G}_{2k+1-m}^\rho. \quad (36)$$

В силу индукционного предположения, для всех нечетных $j \leq 2k-1$ операторы \mathfrak{D}_j это операторы умножения на 0.

Первая сумма в (36) состоит из произведений $\mathfrak{D}_m \mathfrak{D}_{2k+1-m} g^\rho$, сумма индексов которых должна быть нечетна и равна $2k+1$. Следовательно, либо \mathfrak{D}_m , либо \mathfrak{D}_{2k+1-m} имеет нечетный индекс. Тогда $\mathfrak{D}_m \mathfrak{D}_{2k+1-m} g^\rho = 0 \quad \forall m \leq 2k$.

Аналогично во второй сумме в (36) нечетный индекс имеет либо \mathfrak{D}_m , либо \hat{G}_{2k+1-m}^ρ . Но поскольку для нечетных $j \leq 2k-1$ функции $\hat{G}_j^\rho \equiv 0$, то все слагаемые во второй сумме также обращаются в 0.

Также в силу индукционного предположения и (36) неоднородность в нечетных уравнениях также будет нулевой:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{2k+1}^x &= \frac{1}{\alpha\beta} \underbrace{(\lambda_{2k-1}^0)''(\tau)}_0 (-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0) = 0, \\ \tilde{G}_{2k+1}^y &= \frac{1}{\alpha\beta} \underbrace{(\lambda_{2k-1}^0)''(\tau)}_0 (-(2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 + 2Cy_0 \cos \lambda_0) = 0. \end{aligned}$$

Тогда можно выбрать:

$$(\lambda_{2k+1}^0, \Lambda_{2k+1}^0, x_{2k+1}^0, y_{2k+1}^0) = (0, 0, 0, 0).$$

Заметим, что оператор \mathfrak{D}_{2k} сохраняет четность:

$$\mathfrak{D}_{2k} g^\rho = \underbrace{x_{2k}^0}_{\text{чет.}} g_x^\rho|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} + \underbrace{y_{2k}^0}_{\text{нечет.}} g_y^\rho|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} + \underbrace{\lambda_{2k}^0}_{\text{нечет.}} g_\lambda^\rho|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0} + \underbrace{\Lambda_{2k}^0}_{(\lambda_{2k-1}^0)'=0} g_\Lambda^\rho|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0}$$

$\frac{\partial}{\partial x}|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0}$ не меняет четность, $\frac{\partial}{\partial y}|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0}, \frac{\partial}{\partial \lambda}|_{\lambda_0, \Lambda_0, x_0, y_0}$ меняют четность.

Тогда, как следствие *Утверждения 5*, G_{2k}^ρ наследует четность G_{2k-2}^ρ . ■

В итоге построенное каноническое решение имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda^0(\tau) = (\lambda_0(\tau) - \pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{2k} \lambda_{2k}^0(\tau), \\ \Lambda^0(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{2k} (\lambda_{2k-1}^0)'(\tau), \\ x^0(\tau) = x_0(\tau) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{2k} x_{2k}^0(\tau), \\ y^0(\tau) = y_0(\tau) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^{2k} y_{2k}^0(\tau), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2k}^0(\tau) = x_1(\tau) \int_0^\tau \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) \right) d\tau + \tilde{x}_1(\tau) \int_{-\infty}^\tau \left(x_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) \right) d\tau, \\ y_{2k}^0(\tau) = y_1(\tau) \int_0^\tau \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) \right) d\tau + \tilde{y}_1(\tau) \int_{-\infty}^\tau \left(x_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) \right) d\tau, \end{cases}$$

$$\tilde{G}_{2k}^x = \frac{1}{\alpha\beta} (\lambda_{2k-2}^0)''(\tau) (-2Cy_0 \sin \lambda_0 - (2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \cos \lambda_0),$$

$$\tilde{G}_{2k}^y = \frac{1}{\alpha\beta} (\lambda_{2k-2}^0)''(\tau) (-(2Cx_0 + 2C\hat{x}_0 + e_J D) \sin \lambda_0 + 2Cy_0 \cos \lambda_0).$$

Теорема 7. *Существуют решения системы (16):*

- $(\Lambda^s(\tau), \lambda^s(\tau), x^s(\tau), y^s(\tau)) \in W^s(0),$
- $(\Lambda^u(\tau), \lambda^u(\tau), x^u(\tau), y^u(\tau)) \in W^u(0),$

асимптотика которых совпадает в любом порядке по ε и равна $(\Lambda^0(\tau), \lambda^0(\tau), x^0(\tau), y^0(\tau))$.

То есть $\exists \quad c > 0$:

$$(\Lambda^s(\tau), \lambda^s(\tau), x^s(\tau), y^s(\tau)) = (\Lambda^0(\tau), \lambda^0(\tau), x^0(\tau), y^0(\tau)) + \mathcal{O}(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}),$$

$$(\Lambda^u(\tau), \lambda^u(\tau), x^u(\tau), y^u(\tau)) = (\Lambda^0(\tau), \lambda^0(\tau), x^0(\tau), y^0(\tau)) + \mathcal{O}(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}).$$

Доказательство:

Функции

$$\int_0^\tau \left(\tilde{y}_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) \right) d\tau,$$

равномерно ограничены $\forall k \in \mathbb{N}$, т.к. подынтегральное выражение принадлежит классу \mathcal{F}_{s_0} .

В силу нечетности подынтегрального выражения (по *Утверждению 7*) следующие интегралы равны 0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) \right) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}$$

Тогда, учитывая что подынтегральное выражение принадлежит классу \mathcal{F}_{3s_0} , функции

$$\int_{-\infty}^\tau \left(x_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^y(\tau) - y_1(\tau) \tilde{G}_{2k}^x(\tau) \right) d\tau$$

будут принадлежать классу \mathcal{F}_{2s_0} . Причем их убывание будет подавлять рост \tilde{u}_1 .

Таким образом, $(\Lambda^0(\tau), \lambda^0(\tau), x^0(\tau), y^0(\tau))$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Заметим, что правая часть $(g^\Lambda, g^\lambda, g^x, g^y)$ системы (16) является вещественно аналитической по (Λ, λ, x, y) и $\varepsilon > 0$. Также отметим, что все производные $(g^\Lambda, g^\lambda, g^x, g^y)$ по

(Λ, λ, x, y) равномерно ограничены. Такие свойства правой части гарантируют вещественную аналитичность решений.

Выберем два решения, принадлежащих $W^s(0)$ и $W^u(0)$ соответственно и имеющих одинаковую асимптотику $(\Lambda^0(\tau), \lambda^0(\tau), x^0(\tau), y^0(\tau))$. Тогда по лемме Ватсона их разность будет экспоненциально мала.

■

Следствие 2. *Расщепление сепаратрис положения равновесия седло-центр в системе (16) не более чем экспоненциально мало.*

4.2. Периодические траектории в окрестности положения равновесия

Как показано в [?], в окрестности положения равновесия типа *седло-центр* для системы с парой чисто мнимых собственных значений существует однопараметрическое семейство периодических решений малой амплитуды. Этот результат восходит к классической теории Ляпунова [?] и её обобщениям для гамильтоновых систем [?, ?]. В данной главе явно конструируем такие решения для рассматриваемой системы.

4.2.1. Построение периодических траекторий

Рассмотрим систему (16) с положением равновесия в точке 0. Обозначим правую часть уравнений как

$$F(\Lambda, \lambda, x, y) = \begin{pmatrix} -U(x, y) \sin \lambda + V(x, y) \cos \lambda \\ \alpha \Lambda \\ -\varepsilon \left(2Fy - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda \right) \\ \varepsilon \left(2F(x + \hat{x}_0) + e_J G - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda \right) \end{pmatrix}.$$

Линейный вклад в правую часть в окрестности положения равновесия задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & -U_0 & 0 & (2C\hat{x}_0 + e_J D) \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(2C\hat{x}_0 + e_J D) & 0 & -\varepsilon(2F + 2C) \\ 0 & 0 & \varepsilon(2F - 2C) & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица диагонализуема и ее диагонализующая матрица равна (здесь $\pm i\omega, \pm \xi$ - собственные числа):

$$R = \begin{pmatrix} \frac{i\omega(\xi^2 + \alpha U_0)}{\alpha(2C\hat{x}_0 + e_J D)} & -\frac{i\omega(\xi^2 + \alpha U_0)}{\alpha(2C\hat{x}_0 + e_J D)} & -\frac{\xi(\omega^2 - \alpha U_0)}{\alpha(2C\hat{x}_0 + e_J D)} & \frac{\xi(\omega^2 - \alpha U_0)}{\alpha(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \\ \frac{\xi^2 + \alpha U_0}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} & \frac{\xi^2 + \alpha U_0}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} & -\frac{\omega^2 - \alpha U_0}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} & -\frac{\omega^2 - \alpha U_0}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \\ -i\omega\varepsilon & i\omega\varepsilon & -\xi\varepsilon & \xi\varepsilon \\ 2\varepsilon^2(C - F) & 2\varepsilon^2(C - F) & 2\varepsilon^2(C - F) & 2\varepsilon^2(C - F) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Введем новые координаты (z, η, a, b) , в которых линейный вклад в правую часть будет иметь диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} z \\ \eta \\ a \\ b \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \lambda \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В новых переменных уравнения примут вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \text{diag}(i\omega, -i\omega, \xi, -\xi) \cdot \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ a \\ b \end{pmatrix} + \mathcal{G}(z, \eta, a, b), \quad (39)$$

$$\mathcal{G} \equiv R^{-1} \mathbf{F} \left(R \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ a \\ b \end{pmatrix} \right) - \text{diag}(i\omega, -i\omega, \xi, -\xi) \cdot \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ a \\ b \end{pmatrix},$$

где \mathcal{G} - нелинейный остаток.

Будем искать решение в виде рядов по степеням функций $\phi(t), \psi(t)$, следуя методу, изложенному в [?]. Положим:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 e^{i\theta(\varphi_0, \psi_0)t}, \\ \psi(t) &= \varphi_0 e^{-i\theta(\varphi_0, \psi_0)t}. \end{aligned}$$

Причем частота $\theta(\varphi_0, \psi_0)$ сама является функцией амплитуд φ_0, ψ_0 :

$$\theta(\varphi_0, \psi_0) = \omega + \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_k \cdot (\varphi_0 \psi_0)^k.$$

Аназа для искомого решения имеет вид:

$$\begin{cases} z(\varphi, \psi) = \varphi + \sum_{k,j=1}^{+\infty} \{z\}_{k,j} \varphi^k \psi^j, \\ \eta(\varphi, \psi) = \psi + \sum_{k,j=1}^{+\infty} \{\eta\}_{k,j} \varphi^k \psi^j, \\ a(\varphi, \psi) = \sum_{k,j=1}^{+\infty} \{a\}_{k,j} \varphi^k \psi^j, \\ b(\varphi, \psi) = \sum_{k,j=1}^{+\infty} \{b\}_{k,j} \varphi^k \psi^j. \end{cases} \quad (40)$$

Дополнительно потребуем, чтобы ряд z не содержал степеней $(\varphi\psi)^k \varphi$, а ряд η не содержал степеней $(\varphi\psi)^k \psi$. Данное требование необходимо для однозначной разрешимости уравнений на коэффициенты при соответствующих степенях φ, ψ [?].

Подставив анзаз в уравнения (39) получается система уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases} ((p-q)i\omega - i\omega) \{z\}_{p,q} + \sum_{r=1}^{+\infty} (p-q)i\theta_r \{z\}_{p-r,q-r} = \{\mathcal{G}_z(z, \eta, a, b)\}_{p,q}, \\ ((p-q)i\omega + i\omega) \{\eta\}_{p,q} + \sum_{r=1}^{+\infty} (p-q)i\theta_r \{\eta\}_{p-r,q-r} = \{\mathcal{G}_\eta(z, \eta, a, b)\}_{p,q}, \\ ((p-q)i\omega - \xi) \{a\}_{p,q} + \sum_{r=1}^{+\infty} (p-q)i\theta_r \{a\}_{p-r,q-r} = \{\mathcal{G}_a(z, \eta, a, b)\}_{p,q}, \\ ((p-q)i\omega + \xi) \{b\}_{p,q} + \sum_{r=1}^{+\infty} (p-q)i\theta_r \{b\}_{p-r,q-r} = \{\mathcal{G}_b(z, \eta, a, b)\}_{p,q}. \end{cases} \quad (41)$$

Под $\{\mathcal{G}_\rho(z, \eta, a, b)\}_{p,q}$, $\rho \in \{z, \eta, a, b\}$ здесь подразумевается коэффициент в разложении при $\varphi^p \psi^q$ соответствующей компоненты вектора \mathcal{G} .

В оставшихся случаях когда $p = q + 1, p + q > 1$ для z получаем, что $\{z\}_{p,q} = 0$. Аналогично при $q = p + 1$ для η получаем, что $\{\eta\}_{p,q} = 0$ (здесь используется требование об отсутствии слагаемых вида $(\varphi\psi)^k\varphi$ в z и слагаемых вида $(\varphi\psi)^k\psi$ в η). В то же время $\{z\}_{1,0} = \{\eta\}_{0,1} = 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} \theta_p = \{\mathcal{G}_z\}_{p,q} & p = q + 1 > 1, \\ \theta_q = -\{\mathcal{G}_\eta\}_{p,q} & q = p + 1 > 1. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получаем следующие первые коэффициенты:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \{z\}_{1,1} = -\{\eta\}_{1,1} = i \frac{(\xi^2 + \alpha U_0)(\omega^2 - \alpha U_0)(\xi^2 + \alpha U_0 - 8\varepsilon^2 C(C - F))}{4\omega(C - F)(\xi^2 + \omega^2)(2C\hat{x}_0 + e_J D)\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon) \in i\mathbb{R}, \\ \{a\}_{1,1} = -\{b\}_{1,1} = \frac{-(\xi^2 + \alpha U_0)(\xi^2 + \alpha U_0 - 8\varepsilon^2 C(C - F))}{4\xi(C - F)(\xi^2 + \omega^2)(2C\hat{x}_0 + e_J D)\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ \theta_1 = \frac{(\xi^2 + \alpha U_0)}{8(2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 \omega(C - F)(\xi^2 + \omega^2)^2} \times \\ \left[\alpha U_0 \left(-4\alpha \xi^2 (2C\hat{x}_0 + e_J D) \varepsilon^2 (C - F) (8c^2 \hat{x}_0 - C(2C\hat{x}_0 + e_J D) + 3f(2C\hat{x}_0 + e_J D)) \right. \right. \\ + 2\omega^2 (\xi^4 (C + 2F) - 6\alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 \varepsilon^2 (C - F)(C + F) + 2\alpha \xi^2 (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2) \\ + \xi^4 (8C\varepsilon^2 (C - F)(C + 3F) + \alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)(6C\hat{x}_0 + (2C\hat{x}_0 + e_J D))) \\ \left. + 4\omega^4 (\xi^2 (C + F) - 2C\varepsilon^2 (C - F)(C + 3F)) - 4C\xi^6 - 2C\omega^6 \right) \\ + \alpha \xi^2 (2C\hat{x}_0 + e_J D) \left(-4\xi^2 \varepsilon^2 (C - F) (4C^2 \hat{x}_0 + C(2C\hat{x}_0 + e_J D) + 3f(2C\hat{x}_0 + e_J D)) \right. \\ \left. + 16C(2C\hat{x}_0 + e_J D)\varepsilon^4 (C - F)^2 (C + 3F) + \xi^4 (2C\hat{x}_0 + (2C\hat{x}_0 + e_J D)) \right) \\ + \alpha^2 U_0^2 \left(8C^3 \varepsilon^2 (\xi^2 - 2\alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)\hat{x}_0 + \omega^2) \right. \\ + 8C^2 \varepsilon^2 (2F(\xi^2 + \omega^2) + 2\alpha F(2C\hat{x}_0 + e_J D)\hat{x}_0 + \alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2) \\ - 2C(12F^2 \varepsilon^2 (\xi^2 + \omega^2) + 4\alpha F(2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 \varepsilon^2 + 4\xi^4 + 2\xi^2 \omega^2 - 3\alpha \xi^2 (2C\hat{x}_0 + e_J D)\hat{x}_0 - 2\omega^4) \\ \left. + 2F\omega^2 (\xi^2 + \omega^2) - \alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 (\xi^2 - 2\omega^2) \right) \\ + \alpha D e_J (2C\hat{x}_0 + e_J D) (\xi^2 + \alpha U_0)^2 (8C\varepsilon^2 (F - C) + \xi^2 + \alpha U_0) \\ + 2\omega^4 (2\alpha C(2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 \varepsilon^2 (C - F) - 4C\xi^2 \varepsilon^2 (C - F)(C + 3F) + F\xi^4) \\ + 2\omega^2 \left(\xi^6 (C + F) + 8\alpha C(2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 \varepsilon^4 (C - F)^2 (C + 3F) \right. \\ + \xi^4 (\alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 - 4C\varepsilon^2 (C - F)(C + 3F)) - 2\alpha \xi^2 (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2 \varepsilon^2 (C - F)(2C + 3F) \\ \left. - 2C\xi^2 \omega^6 - \alpha^3 U_0^3 (4C(\xi^2 + \omega^2) - 2\alpha C(2C\hat{x}_0 + e_J D)\hat{x}_0 + \alpha (2C\hat{x}_0 + e_J D)^2) \right) \Big] = \mathcal{O}(1) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Учитывая выражение для матрицы R^{-1} , заметим, что старые переменные не содержат особенность по ε :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (z - \eta) \underbrace{\frac{i\omega(\xi^2 + \alpha U_0)}{\alpha(2C\hat{x}_0 + e_J D)}}_{\mathcal{O}(1)} + (a - b) \underbrace{\frac{-\xi(\omega^2 - \alpha U_0)}{\alpha(2C\hat{x}_0 + e_J D)}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^3)}, \\
\lambda &= (z + \eta) \underbrace{\frac{(\xi^2 + \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)}}_{\mathcal{O}(1)} + (a + b) \underbrace{\frac{-(\omega^2 - \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}, \\
x &= (z - \eta) \underbrace{(-i\omega\varepsilon)}_{\mathcal{O}(\varepsilon)} + (a - b) \underbrace{(-\varepsilon\xi)}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}, \\
y &= 2(C - F)\varepsilon^2(z + \eta + a + b).
\end{aligned}$$

Потребовав вещественность старых переменных (Λ, λ, x, y) , получаем, что амплитуды экспонент должны быть вещественные и равные:

$$\varphi_0 = \psi_0 \equiv h.$$

4.2.2. Радиус сходимости рядов

Для доказательства существования решения и его сходимости классически применяется метод мажорант.

Определение 8. Будем говорить, что функция $f(x)$, вещественно-аналитическая в точке 0 , мажорируется сходящимся степенным рядом

$$\begin{aligned}
g(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n s^n, \quad s \geq 0, \\
g_n &\geq 0 \quad \forall n \geq 0,
\end{aligned}$$

если:

Пусть разложение $f(x)$ в ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n.$$

Тогда

$$\exists C > 0 : |f_n| \leq C \cdot g_n \quad \forall n \geq 0.$$

Обозначается

$$f \prec g.$$

Введем константу \varkappa :

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \max \left(\sup_{p, q \in \mathbb{R}} \left(\left| \frac{1}{(p - q)i\omega - \xi} \right| \right), \sup_{p, q \in \mathbb{R}} \left(\left| \frac{p - q}{(p - q)i\omega - \xi} \right| \right), \right. \\
&\quad \left. \sup_{p, q \in \mathbb{R}} \left(\left| \frac{1}{(p - q)i\omega - i\omega} \right| \right), \sup_{p, q \in \mathbb{R}} \left(\left| \frac{p - q}{(p - q)i\omega - i\omega} \right| \right) \right) = \\
&= \max \left(\frac{1}{|\xi|}, \frac{1}{|\omega|} \right) = \frac{1}{|\xi|} = O \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad \text{при достаточно малых } \varepsilon.
\end{aligned}$$

Тогда, применяя эту оценку к (41), получаем следующие неравенства для коэффициентов:

$$\begin{cases} |\{z\}_{p,q}| \leq \varkappa |\{\mathcal{G}_z(z, \eta, a, b)\}_{p,q}| + \varkappa \sum_{r=1}^{+\infty} |(p-q)\theta_r\{z\}_{p-r,q-r}|, \\ |\{\eta\}_{p,q}| \leq \varkappa |\{\mathcal{G}_\eta(z, \eta, a, b)\}_{p,q}| + \varkappa \sum_{r=1}^{+\infty} |(p-q)\theta_r\{\eta\}_{p-r,q-r}|, \\ |\{a\}_{p,q}| \leq \varkappa |\{\mathcal{G}_a(z, \eta, a, b)\}_{p,q}| + \varkappa \sum_{r=1}^{+\infty} |(p-q)\theta_r\{a\}_{p-r,q-r}|, \\ |\{b\}_{p,q}| \leq \varkappa |\{\mathcal{G}_b(z, \eta, a, b)\}_{p,q}| + \varkappa \sum_{r=1}^{+\infty} |(p-q)\theta_r\{b\}_{p-r,q-r}|. \end{cases} \quad (42)$$

В оригинальной работе Зигеля и Мозера [?] нелинейная добавка \mathcal{G} к правой части диагонализированного уравнения мажорируется функцией вида

$$\mathcal{G} \prec \frac{1}{1-s},$$

где $s = |z| + |\eta| + |a| + |b|$.

Однако такое предположение на \mathcal{G} дает слишком грубую оценку для радиуса сходимости построенных рядов.

В данном разделе опишем процедуру построения более точной оценки радиуса сходимости.

Учитывая связь старых координат (Λ, λ, x, y) и новых (z, η, a, b) через матрицу R , введем новую величину s :

$$s = |z| + |\eta| + \varepsilon(|a| + |b|).$$

Тогда учитывая (4.2.1) получаем:

$$\begin{cases} \Lambda \prec s, \\ \lambda \prec s, \\ x \prec \varepsilon s, \\ y \prec \varepsilon s. \end{cases} \quad (43)$$

Используя оценку (43) и учитывая, что точка 0 неподвижная, получаем следующую мажоранту для уравнения (16):

$$\begin{cases} -U \sin \lambda + V \cos \lambda \prec (\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s, \\ \alpha \Lambda \prec s, \\ -\varepsilon(2Fy - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial y} \sin \lambda) \prec \varepsilon(\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s, \\ \varepsilon(2F(x + \hat{x}_0) + e_J G - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial x} \sin \lambda) \prec \varepsilon(\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s. \end{cases}$$

Домножим слева эту оценку на матрицу R^{-1} , тогда имеем:

$$R^{-1} \mathbf{F} \left(R \begin{pmatrix} z \\ \eta \\ a \\ b \end{pmatrix} \right) \prec \begin{pmatrix} (\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s + s \\ (\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s + s \\ \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s + s \\ \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2) e^s + s \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Отбрасывая в (44) линейные члены и мажорируя получившееся выражение, приходим к покомпонентной мажоранте для \mathcal{G} :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{z,\eta} \prec (\varepsilon(s + \varepsilon s^2) e^s - \varepsilon s), \\ \mathcal{G}_{a,b} \prec ((s + \varepsilon s^2) e^s - s). \end{cases} \quad (45)$$

Заметим, что слагаемое $-s$ компенсирует линейный член в ряде Тейлора $(s + \varepsilon s^2) e^s$ и потому ряд для $(s + \varepsilon s^2) e^s - s$ начинается с квадратичного члена.

Для ряда h , зависящего от φ, ψ , введем обозначение:

$$||h|| = \sum_{p,q} |\{h\}_{p,q}| \varphi^p \psi^q$$

. Также введем обозначения:

$$\begin{cases} z^* = z - \varphi, \\ \eta^* = \eta - \psi, \\ a^* = a, \\ b^* = b, \\ \theta^* = \theta - \omega. \end{cases}$$

Сложим неравенства (42) с весом ε для a и b , домножим на $\varphi^p \psi^q$ и просуммируем. Тогда получаем мажорантное соотношение не содержащее производных:

$$(\varphi + \psi)||\theta^*|| + S \prec \varkappa(||\mathcal{G}_z|| + ||\mathcal{G}_\eta|| + \varepsilon(||\mathcal{G}_a|| + ||\mathcal{G}_b||) + ||\theta^*||S), \quad (46)$$

где $S = ||z^*|| + ||\eta^*|| + \varepsilon(||a^*|| + ||b^*||)$.

Для доказательства сходимости построенных решений достаточно показать, что сходятся ряды S и $||\theta^*||$ в окрестности $\varphi = 0, \psi = 0$, а так как коэффициенты всех рядов неотрицательны достаточно рассмотреть случай $\varphi = \psi > 0$.

Подставим (45) в (46):

$$2\varphi||\theta^*|| + S \prec \varkappa((\varepsilon(s + \varepsilon s^2)e^s - \varepsilon s) + ||\theta^*||S).$$

Для s верна оценка:

$$s \prec ||s|| \prec 2\varphi + S.$$

Поскольку ряд S начинается с квадратичных членов, введем ряд Y с неотрицательными коэффициентами и начинающийся с линейного члена:

$$Y = 2||\theta^*|| + \frac{1}{\varphi}S.$$

Выражая S , приходим к

$$S = \varphi Y - 2\varphi||\theta^*|| \prec \varphi U.$$

Возведем это выражение в квадрат и выразим $||\theta^*||S$. Тогда

$$||\theta^*||S = \frac{\varphi^2 Y^2}{4\varphi} - \frac{S^2}{4\varphi} - \frac{4\varphi^2 ||\theta^*||^2}{4\varphi} \prec \frac{\varphi^2 Y^2}{4\varphi}.$$

Собирая оценки вместе получаем:

$$Y \prec \frac{\varkappa}{4} (Y^2 + \varepsilon((2 + Y) + \varepsilon\varphi(2 + Y)^2) e^{\varphi(2+Y)} - (2 + Y)). \quad (47)$$

В силу того, что Y строится используя S и $||\theta^*||$, для доказательства сходимости построенных решений достаточно показать, что ряд Y сходится для достаточно малых φ . Для этого рассмотрим модельное уравнение:

$$\hat{Y} = \frac{\varkappa}{4} \left(\hat{Y}^2 + \varepsilon \left((2 + \hat{Y}) + \varepsilon\varphi(2 + \hat{Y})^2 \right) e^{\varphi(2+\hat{Y})} - (2 + \hat{Y}) \right),$$

решением которого является неизвестный ряд:

$$\hat{Y} = \hat{Y}(\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \varphi^k.$$

Исследуя уравнение можно показать что радиус сходимости R этого ряда равен:

$$R = O\left(\frac{1}{\varepsilon \varkappa^2}\right) = O(\varepsilon).$$

4.3. Устойчивое и неустойчивое многообразия периодических траекторий

В данной главе рассмотрим вопрос пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий построенных ранее периодических траекторий в окрестности положения равновесия *седло-центр*.

Определение 9. Пусть в динамической системе задано семейство периодических траекторий Γ_h (где h - параметр), лежащих в окрестности положения равновесия.

Устойчивое и неустойчивое многообразия таких траекторий определяются как:

$$\begin{aligned} W^s(\Gamma_h) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\Gamma_h, \theta^t(\mathbf{X})) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\}, \\ W^u(\Gamma_h) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\Gamma_h, \theta^t(\mathbf{X})) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}, \end{aligned}$$

здесь θ^t - поток системы, n - размерность фазового пространства.

Траектория $\gamma(t)$ называется гомоклинической к Γ_h , если:

$$\gamma(t) \in W^s(\Gamma_h) \cap W^u(\Gamma_h), \quad \gamma(t) \notin \Gamma_h.$$

и называется гетероклинической между Γ_{h_1} и Γ_{h_2} если:

$$\gamma(t) \in W^s(\Gamma_{h_2}) \cap W^u(\Gamma_{h_1}).$$

Это означает, что $\gamma(t)$ асимптотически приближается к Γ_h как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$ (приближается к Γ_{h_1} при $t \rightarrow +\infty$ и к Γ_{h_2} при $t \rightarrow -\infty$).

В данной главе обозначим периодические решения (??) как:

$$\Gamma_h(t) = (\Lambda^*(h, t), \lambda^*(h, t), x^*(h, t), y^*(h, t)).$$

Будем искать формальные решения, принадлежащие $W^{s,u}(\Gamma_h)$, в следующем виде:

$$\begin{cases} \Lambda^{s,u}(h, t) = \Lambda^*(h, t) + z_{\Lambda}^{s,u}(h, t), \\ \lambda^{s,u}(h, t) = \lambda^*(h, t) + z_{\lambda}^{s,u}(h, t), \\ x^{s,u}(h, t) = x^*(h, t) + z_x^{s,u}(h, t), \\ y^{s,u}(h, t) = y^*(h, t) + z_y^{s,u}(h, t), \end{cases} \quad (48)$$

Подставим (48) в уравнения (16). Будем требовать выполнение следующих граничных условий:

- Решения принадлежащие $W^s(\Gamma_h)$:

$$\begin{cases} z_{\Lambda}^s(k, +\infty) = 0, \\ z_{\lambda}^s(k, +\infty) = 0, \\ z_x^s(k, +\infty) = 0, \\ z_y^s(k, +\infty) = 0. \end{cases}$$

- Решения принадлежащие $W^u(\Gamma_h)$:

$$\begin{cases} z_{\Lambda}^u(k, -\infty) = 0, \\ z_{\lambda}^u(k, -\infty) = 0, \\ z_x^u(k, -\infty) = 0, \\ z_y^u(k, -\infty) = 0. \end{cases}$$

Введем новое медленное время $\tilde{\tau} = \frac{\theta(h)}{\omega} \tau = (1 + \mathcal{O}(h^2)) \tau$. Такая замена переменных, зависящая от h позволяет сделать частоту периодических решений не зависящей от h и в точности равной $\frac{\omega}{\varepsilon}$. При этом гамильтониан преобразуется следующим образом:

$$H_{old} \rightarrow H = \frac{\omega}{\theta(h)} H_{old} = H_{old} + \mathcal{O}(h^2).$$

Частота $\frac{\omega}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$ много больше характерного гиперблического масштаба $\frac{\xi}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$, поэтому можно произвести усреднение по периоду периодических решений. Под усреднением для некоторой функции $f(\Lambda, \lambda, x, y)$ здесь понимается следующее:

$$\langle f \rangle = \int_0^{\frac{2\pi\varepsilon}{\omega}} f(\Lambda^*(\tau), \lambda^*(\tau), x^*(\tau), y^*(\tau)) d\tau.$$

Подставим в гамильтониан (17) представление (48):

$$\begin{aligned} H(\Gamma_h + \mathbf{z}) = & \frac{\omega}{\theta(h)} \left(\frac{\alpha(\Lambda^*)^2}{2} + \alpha\Lambda^*z_\Lambda + \frac{\alpha z_\Lambda^2}{2} + F((x^*)^2 + (y^*)^2) + F((z_x + \hat{x}_0)^2 + z_y^2) + \right. \\ & + 2Fx^*(z_x + \hat{x}_0) + 2Fy^*z_y + e_J Gx^* + e_J Gz_x - \\ & - (U(\Gamma_h) + U(\mathbf{z}) + (2Cx^*z_x - 2Cy^*z_y - U_0))(\cos \lambda^* \cos z_\lambda - \sin \lambda^* \sin z_\lambda) - \\ & \left. - (V(\Gamma_h) + V(\mathbf{z}) + (2Cy^*z_x + 2Cz^*z_y))(\sin \lambda^* \cos z_\lambda + \cos \lambda^* \sin z_\lambda) \right) \end{aligned}$$

Такая система является неавтономной относительно переменной \mathbf{z} . Усредним гамильтониан, избавившись тем самым от неавтономности.

Подробно опишем процедуру усреднения лишь для одного из слагаемых. Рассмотрим:

$$\langle U(x^*, y^*) \cos \lambda^* \rangle = U_0 \langle \cos \lambda^* \rangle + (2C\hat{x}_0 + e_J D) \langle x^* \cos \lambda^* \rangle + C \langle (x^*)^2 \cos \lambda^* \rangle - C \langle (y^*)^2 \cos \lambda^* \rangle.$$

Подставляя явный вид Γ_h и раскладывая $\cos \lambda^*$ в ряд Фурье получаем в главном порядке:

$$\begin{aligned} \langle \cos \lambda^* \rangle &= \left\langle 1 - \frac{h^2}{2} \left(\frac{2(\xi^2 - \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\tilde{\tau}\omega}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(h^3) \right\rangle = \\ &= 1 - h^2 \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{2(\xi^2 - \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \right)^2}_{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(h^4), \\ \langle x^* \cos \lambda^* \rangle &= \langle h^2 ((-2i\varepsilon\omega)\{z\}_{1,1} + (-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}) + \mathcal{O}(h^3) \rangle = \\ &= h^2 \left(\underbrace{(-2i\varepsilon\omega)\{z\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} \right) + \mathcal{O}(h^4), \\ \langle (x^*)^2 \cos \lambda^* \rangle &= \left\langle h^2 (2\varepsilon\omega)^2 \sin^2 \left(\frac{\tilde{\tau}\omega}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(h^3) \right\rangle = h^2 \underbrace{\frac{1}{2} (2\varepsilon\omega)^2}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \mathcal{O}(h^4), \\ \langle (y^*)^2 \cos \lambda^* \rangle &= \left\langle h^2 (4\varepsilon^2(C - F))^2 \cos^2 \left(\frac{\tilde{\tau}\omega}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(h^3) \right\rangle = h^2 \underbrace{\frac{1}{2} (4\varepsilon^2(C - F))^2}_{\mathcal{O}(\varepsilon^4)} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\langle y^* \sin \lambda^* \rangle = h^2 \underbrace{\frac{1}{2} (4\varepsilon^2 (C - F)) \left(\frac{2(\xi^2 - \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \right)}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \mathcal{O}(h^4),$$

$$\langle y^* \cos \lambda^* \rangle, \langle x^* y^* \cos \lambda^* \rangle, \langle \sin \lambda^* \rangle, \langle x^* \sin \lambda^* \rangle, \langle x^* y^* \sin \lambda^* \rangle, \langle (x^*)^2 \sin \lambda^* \rangle, \langle (y^*)^2 \sin \lambda^* \rangle = \mathcal{O}(h^4).$$

Заметим, что для нечётных степеней тригонометрических функций выполняется:

$$\left\langle \sin^n \left(\frac{\tilde{\tau}\omega}{\varepsilon} \right) \cos^m \left(\frac{\tilde{\tau}\omega}{\varepsilon} \right) \right\rangle = 0 \quad \text{при нечётных } n \text{ или } m,$$

что объясняет отсутствие членов порядка h^3 (поскольку h^3 соответствует случаям $n+m=3, n+m=1$ – нечётной сумме).

Применяя эти результаты и отбрасывая постоянный член (т.к. он не влияет на уравнения движения), получаем:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = \frac{\omega}{\theta(h)} & \left(H_{old}(\mathbf{z}) + \alpha \langle \Lambda^* \rangle z_\Lambda + 2F \langle x^* \rangle z_x - \langle \cos \lambda^* - 1 \rangle \left(U(z_x, z_y) \cos z_\lambda + V(z_x, z_y) \sin z_\lambda \right) - \right. \\ & - \cos z_\lambda \left((2C\hat{x}_0 + e_J D) \langle y^* \sin \lambda^* \rangle + z_x 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle) + \langle (U(x^*, y^*) - U_0) \cos \lambda^* \rangle \right) - \\ & \left. - \sin z_\lambda \left(z_y 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle) \right) \right) + \mathcal{O}(h^4), \quad (49) \end{aligned}$$

$$N = 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle).$$

Введем обрезанный усредненный гамильтониан, учитывающий только поправки порядка h^2 :

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_0 = H_{old}(\mathbf{z}) - h^2 \theta_1 H_{old}(\mathbf{z}) + \alpha \langle \Lambda^* \rangle_0 z_\Lambda + 2F \langle x^* \rangle_0 z_x - \\ - \langle \cos \lambda^* - 1 \rangle_0 \left(U(z_x, z_y) \cos z_\lambda + V(z_x, z_y) \sin z_\lambda \right) - \\ - \cos z_\lambda \left((2C\hat{x}_0 + e_J D) \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0 + z_x 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0 + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0) + \langle (U(x^*, y^*) - U_0) \cos \lambda^* \rangle_0 \right) - \\ - \sin z_\lambda \left(z_y 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0 + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0) \right). \quad (50) \end{aligned}$$

Здесь $\langle \cdot \rangle_0$ означает что в среднем значении учитываются только поправки порядка h^2 , а старшие порядки отбрасываются.

Утверждение 10. 1) При достаточно малых h система (50) имеет неподвижную точку

$$(\hat{\Lambda}_0^*(h), \hat{\lambda}_0^*(h), \hat{x}_0^*(h), \hat{y}_0^*(h))$$

типа седло-центр в $\mathcal{O}(h^2)$ окрестности нуля,

2) Аналогично при достаточно малых h система (49) имеет неподвижную точку

$$(\hat{\Lambda}_0^{**}(h), \hat{\lambda}_0^{**}(h), \hat{x}_0^{**}(h), \hat{y}_0^{**}(h))$$

типа седло-центр в $\mathcal{O}(h^2)$ окрестности нуля.

Доказательство:

1,2) Рассмотрим динамическую систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (51)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ – фазовые переменные, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ – параметры.

Предполагаем, что:

- а) При $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ система имеет равновесие типа *седло-центр* в точке $\mathbf{x} = 0$, линеаризованная матрица $A_0 = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(0, \mathbf{p}_0)$ имеет собственные значения:

$$(\pm i\omega, \pm\xi), \quad \omega > 0, \xi > 0$$

$$\omega \neq l\xi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

- б) Параметры возмущаются малым образом:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + h^2\mathbf{q} + \mathcal{O}(h^4), \quad 0 < h \ll 1$$

$$\mathbf{q} = \text{const.}$$

Рассмотрим уравнение на неподвижную точку:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_0 + h^2\mathbf{q}) = 0.$$

Заметим, что $\mathbf{f}(0, \mathbf{p}_0) = 0$ (исходное положение равновесия) и $\det D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(0, \mathbf{p}_0) = \det A_0 \neq 0$ (так как все невозмущенные собственные значения не равны 0). Тогда по теореме о неявной функции гладкое семейство решений $\mathbf{x}^*(h) = \mathcal{O}(h^2)$. То есть для любого достаточно малого h система (51) имеет неподвижную точку $\mathbf{x}^*(h)$, лежащую в $\mathcal{O}(h^2)$ окрестности точки 0.

Анализируем возмущённую матрицу линеаризации:

$$A(h) = A_0 + h^2\mathcal{B} + \mathcal{O}(h^4),$$

где \mathcal{B} – постоянная возмущающая матрица.

По теореме о непрерывной зависимости собственных значений [?, ?] при достаточно малых h :

- Чисто мнимые собственные значения остаются на мнимой оси и являются комплексно-сопряженными,
- Вещественные собственные значения сохраняют знак.

Применяя данные результаты к системам (50) и (49), получаем требуемое утверждение.

Заметим, что можно ввести функции \tilde{U}, \tilde{V} , отличающиеся от U, V только значениями констант:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{U}(x, y) &= \underbrace{C (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1)}_{C + \mathcal{O}(h^2)} (x^2 - y^2) + \\ &+ x \underbrace{((2C \hat{x}_0 + e_J D) (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) + 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0 + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0))}_{(2C \hat{x}_0 + e_J D) + \mathcal{O}(h^2)} + \\ &+ \underbrace{(U_0 (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) + (2C \hat{x}_0 + e_J D) \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0 + \langle (U(x^*, y^*) - U_0) \cos \lambda^* \rangle_0)}_{U_0 + \mathcal{O}(h^2)} \\ \tilde{V}(x, y) &= 2C (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) xy + \\ &+ y ((2C \hat{x}_0 + e_J D) (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) + 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0 + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0)). \end{aligned} \right.$$

Тогда гамильтониан $\langle H \rangle_0$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_0 &= \frac{\alpha \omega z_\Lambda^2}{2\theta(h)} + \frac{\omega}{\theta(h)} \alpha \langle \Lambda^* \rangle_0 z_\Lambda - \tilde{U}(z_x, z_y) \cos z_\Lambda - \tilde{V}(z_x, z_y) \sin z_\Lambda + \\ &+ \frac{F\omega}{\theta(h)} ((z_x + \hat{x}_0)^2 + z_y^2) + (e_J G + 2F \langle x^* \rangle_0) z_x. \end{aligned}$$

Заметим, что данная система имеет неподвижную точку $(\hat{\Lambda}_0^*(h), \hat{\lambda}_0^*(h), \hat{x}_0^*(h), \hat{y}_0^*(h))$ типа седло-центр:

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda_0^*(h) &= -\frac{\omega \alpha \langle \Lambda^* \rangle_0}{\theta(h)}, \\ \lambda_0^*(h) &= 0, \\ x_0^*(h) &= \mathcal{O}(h^2), \\ y_0^*(h) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (52)$$

Заменой переменных сместим это положение равновесия в точку 0, тогда гамильтониан может быть записан как:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_0 &= \frac{\alpha \omega z_\Lambda^2}{2\theta(h)} - \hat{U}(z_x, z_y) \cos z_\Lambda - \hat{V}(z_x, z_y) \sin z_\Lambda + \frac{F\omega}{\theta(h)} ((z_x + \hat{x}_0 + \hat{x}_0^*(h))^2 + z_y^2) + \\ &+ \frac{\omega}{\theta(h)} (e_J G + 2F \langle x^* \rangle_0 + 2F \hat{x}_0^*(h)) z_x, \quad (53) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{U}(x, y) &= \underbrace{C (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1)}_{C + \mathcal{O}(h^2)} (x^2 - y^2) + \\ &+ x \underbrace{((2C \hat{x}_0 + e_J D) (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) + 2C (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) \hat{x}_0^*(h) + T)}_{(2C \hat{x}_0 + e_J D) + \mathcal{O}(h^2)} + \\ &+ ((2C \hat{x}_0 + e_J D) \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0 + \langle U(x^*, y^*) \cos \lambda^* \rangle_0 + T \hat{x}_0^*(h) + C (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) (\hat{x}_0^*(h))^2 + \\ &+ (2C \hat{x}_0 + e_J D) (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) \hat{x}_0^*(h)), \\ \hat{V}(x, y) &= 2C \langle \cos \lambda^* \rangle_0 xy + \\ &+ y ((2C \hat{x}_0 + e_J D) (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) + 2C (\langle \cos \lambda^* \rangle_0 - h^2 \theta_1) \hat{x}_0^*(h) + T), \end{aligned} \right.$$

$$T \equiv 2C (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0 + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0).$$

Отметим, что данная система отличается от системы (16) только изменением констант на величину порядка $\mathcal{O}(h^2)$.

Таким образом, при достаточно малых h системы структурно одинаковые и для такой системы можно сформулировать следующее

Утверждение 11. 1) Для неподвижной точки 0 типа седло-центр системы (53) существуют одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия, расщепление которых не более чем экспоненциально мало.

Доказательство:

Так как системы (53) и (16) отличаются только значением констант и структурно одинаковы при достаточно малых h для системы (53) справедливы все выкладки раздела 2.1. В частности, утверждение о том что расщепление устойчивого и неустойчивого многообразий не более чем экспоненциально мало.

4.3.1. Гетероклиническое пересечение W^s и W^u

Так как радиус сходимости рядов для периодических решений имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ($|h| \leq R(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$), введем масштабированный параметр μ :

$$h = \mu\varepsilon$$

$$|\mu| \leq \frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$$

Рассмотрим подробнее возмущение в системе (53):

$$\langle H \rangle_0(\mathbf{z}) = H_{old}(\mathbf{z}) + \hat{H}(\mathbf{z}, h, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{z}, h, \varepsilon) \equiv & -h^2\theta_1 H_{old}(\mathbf{z}) + 2F\langle x^* \rangle_0 z_x - \langle \cos \lambda^* - 1 \rangle_0 \left(U(z_x, z_y) \cos z_\lambda + V(z_x, z_y) \sin z_\lambda \right) - \\ & - \cos z_\lambda \left((2C\hat{x}_0 + e_J D) \langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0 + 2Cz_x (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle) + \langle (U(x^*, y^*) - U_0) \cos \lambda^* \rangle_0 \right) - \\ & - \sin z_\lambda \left(2Cz_y (\langle x^* \cos \lambda^* \rangle + \langle y^* \sin \lambda^* \rangle) \right) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (54)$$

Перейдем в (54) к параметру μ и сгруппируем слагаемые по степеням ε :

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\mathbf{z}, h, \varepsilon) &\equiv -\mu^2 \varepsilon^2 \theta_1 H_{old}(\mathbf{z}) + 2F \underbrace{\langle x^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^2)} z_x - \underbrace{\langle \cos \lambda^* - 1 \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \left(U(z_x, z_y) \cos z_\lambda + V(z_x, z_y) \sin z_\lambda \right) - \\
&- \cos z_\lambda \left((2C\hat{x}_0 + e_J D) \underbrace{\langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^4)} + 2Cz_x \left(\underbrace{\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \underbrace{\langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^4)} \right) + \underbrace{\langle (U(x^*, y^*) - U_0) \cos \lambda^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \right) - \\
&- \sin z_\lambda \left(2Cz_y \left(\underbrace{\langle x^* \cos \lambda^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \underbrace{\langle y^* \sin \lambda^* \rangle_0}_{\mu^2 \mathcal{O}(\varepsilon^4)} \right) \right) = \\
&= \varepsilon^2 \mu^2 \left(-H_{old}(\mathbf{z}) + 2Fz_x \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} - \right. \\
&- \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{2(\xi^2 - \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \right)^2}_{\mathcal{O}(1)} \left(U(z_x, z_y) \cos z_\lambda + V(z_x, z_y) \sin z_\lambda \right) - \\
&- \cos z_\lambda (2Cz_x + (2C\hat{x}_0 + e_J D)) \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} - \sin z_\lambda 2Cz_y \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} \left. \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Введем обозначение $[\cdot]_0$ для свободного коэффициента в разложении по степеням ε и рассмотрим возмущающую функцию $H_1(\mathbf{z})$, не зависящую от μ и ε :

$$\begin{aligned}
H_1(\mathbf{z}) &\equiv \left[-\theta_1 H_{old}(\mathbf{z}) + 2Fz_x \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} - \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{2(\xi^2 - \alpha U_0)}{(2C\hat{x}_0 + e_J D)} \right)^2}_{\mathcal{O}(1)} \left(U(z_x, z_y) \cos z_\lambda + V(z_x, z_y) \sin z_\lambda \right) - \right. \\
&- \cos z_\lambda (2Cz_x + (2C\hat{x}_0 + e_J D)) \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} - \sin z_\lambda 2Cz_y \underbrace{(-2\varepsilon\xi)\{a\}_{1,1}}_{\mathcal{O}(1)} \left. \right]_0.
\end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$\langle H \rangle_0 = H_{old}(\mathbf{z}) + \varepsilon^2 \mu^2 H_1(\mathbf{z}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (55)$$

$$\hat{H}(\mathbf{z}) = \varepsilon^2 \mu^2 H_1(\mathbf{z}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Будем искать формальное решение системы (55) в виде аналогичном (18):

$$\begin{cases} z_\Lambda^{s,u}(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_{\Lambda,k}^{s,u}(\tau, \mu), \\ z_\lambda^{s,u}(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_{\lambda,k}^{s,u}(\tau, \mu), \\ z_x^{s,u}(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_{x,k}^{s,u}(\tau, \mu), \\ z_y^{s,u}(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_{y,k}^{s,u}(\tau, \mu), \end{cases} \quad (56)$$

удовлетворяющие следующим граничным условиям:

- Решения принадлежащие $W^s(0)$:

$$\begin{cases} z_\Lambda^s(+\infty) = 0, \\ z_\lambda^s(+\infty) = 0, \\ z_x^s(+\infty) = 0, \\ z_y^s(+\infty) = 0, \end{cases}$$

- Решения принадлежащие $W^u(0)$:

$$\begin{cases} z_\Lambda^u(-\infty) = 0, \\ z_\lambda^u(-\infty) = 0, \\ z_x^u(-\infty) = 0, \\ z_y^u(-\infty) = 0. \end{cases}$$

Подставим представление (56) в уравнения Гамильтона системы (55)

$$\begin{cases} \dot{z}_\Lambda = -U \sin z_\lambda + V \cos z_\lambda - \varepsilon^2 \mu^2 \frac{\partial H_1}{\partial z_\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ \dot{z}_\lambda = \alpha z_\Lambda + \varepsilon^2 \mu^2 \frac{\partial H_1}{\partial z_\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ \dot{z}_x = -\varepsilon \left((2F z_y - \frac{\partial U}{\partial z_y} \cos z_\lambda - \frac{\partial V}{\partial z_y} \sin z_\lambda) + \varepsilon^2 \mu^2 \frac{\partial H_1}{\partial z_y} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right), \\ \dot{z}_y = \varepsilon \left((2F(z_x + \hat{x}_0) + e_J G - \frac{\partial U}{\partial z_x} \cos z_\lambda - \frac{\partial V}{\partial z_x} \sin z_\lambda) + \varepsilon^2 \mu^2 \frac{\partial H_1}{\partial x} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right), \end{cases} \quad (57)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Уравнения на нулевое приближение в точности совпадают с уравнениями медленной системы. В качестве их решения выберем сепаратрису медленной системы:

$$\begin{cases} z_{\Lambda,0}(\tau) = 0, \\ z_{\lambda,0}(\tau) = \lambda_-(x_{sep}(\tau), y_{sep}(\tau)), \\ z_{x,0}(\tau) = x_{sep}(\tau) - \hat{x}_0, \\ z_{y,0}(\tau) = y_{sep}(\tau). \end{cases}$$

Аналогично уравнения на $(z_{\Lambda,1}, z_{\lambda,1}, z_{x,1}, z_{y,1})$ являются алгебраическими по переменным $(z_{\Lambda,1}, z_{\lambda,1})$:

$$\begin{cases} z_{\Lambda,1}(\tau) = z'_{\lambda,0}, \\ z_{\lambda,1}(\tau) = \frac{1}{\beta} \left(z_{x,1} \left((2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \sin z_{\lambda,0} - 2C z_{y,0} \cos z_{\lambda,0} \right) + \right. \\ \left. + z_{y,1} \left(-2C z_{y,0} \sin z_{\lambda,0} - (2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \cos z_{\lambda,0} \right) \right), \end{cases}$$

и однородными дифференциальным по переменным $(z_{x,1}, z_{y,1})$:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} z_{x,1} \\ z_{y,1} \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\tau) \begin{pmatrix} z_{x,1} \\ z_{y,1} \end{pmatrix}$$

Здесь матрица $\mathcal{A}(\tau)$ - матрица введенная в (20). Базисом решений этой системы является пара вектор-функций $\mathbf{u}_1(\tau)$, $\tilde{\mathbf{u}}_1(\tau)$.

По утверждению 10 W^s и W^u одномерны, поэтому при их параметризации достаточно рассматривать лишь одно частное решение. Для простоты выберем тривиальное решение однородного уравнения:

$$(z_{\Lambda,1}(\tau), z_{\lambda,1}(\tau), z_{x,1}(\tau), z_{y,1}(\tau)) \equiv (0, 0, 0, 0)$$

Так как в нулевом и первом приближении ни уравнения, ни их решения не содержат μ , их зависимость от μ будем опускать.

Во втором приближении уравнения на $(z_{x,2}, z_{y,2})$ становятся неоднородными дифференциальными, причем неоднородности обретают зависимость от μ :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} z_{x,2} \\ z_{y,2} \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\tau) \begin{pmatrix} z_{x,2} \\ z_{y,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}_2^x(\tau) \\ \tilde{G}_2^y(\tau) \end{pmatrix} + \mu^2 \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_2^x(\tau) \\ \mathfrak{G}_2^y(\tau) \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где:

$$\mathfrak{G}_2^x = \frac{\partial H_1}{\partial z_y} \Big|_{z_{\Lambda,0}, z_{\lambda,0}, z_{x,0}, z_{y,0}} - \beta^{-1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial z_{\lambda}} \Big|_{z_{\Lambda,0}, z_{\lambda,0}, z_{x,0}, z_{y,0}} \right) (- 2C z_{y,0} \sin z_{\lambda,0} - (2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \cos z_{\lambda,0}),$$

$$\mathfrak{G}_2^y = \frac{\partial H_1}{\partial z_x} \Big|_{z_{\Lambda,0}, z_{\lambda,0}, z_{x,0}, z_{y,0}} - \beta^{-1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial z_{\lambda}} \Big|_{z_{\Lambda,0}, z_{\lambda,0}, z_{x,0}, z_{y,0}} \right) (- (2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \sin z_{\lambda,0} + 2C z_{y,0} \cos z_{\lambda,0}).$$

$$\begin{cases} z_{\Lambda,2}(\tau) = \frac{1}{\alpha} z'_{\Lambda,1}(\tau), \\ z_{\lambda,2}(\tau) = \frac{1}{\beta} \left(\alpha^{-1} z''_{\lambda,0} + \frac{\partial H_1}{\partial z_{\lambda}} \Big|_{z_{\Lambda,0}, z_{\lambda,0}, z_{x,0}, z_{y,0}} + \right. \\ \left. + z_{x,2} ((2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \sin z_{\lambda,0} - 2C z_{y,0} \cos z_{\lambda,0}) + \right. \\ \left. + z_{y,2} (- 2C z_{y,0} \sin z_{\lambda,0} - (2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \cos z_{\lambda,0}) \right). \end{cases}$$

Заметим, что по построению $\mathfrak{G}_2^x(\tau)$ – нечетная, а $\mathfrak{G}_2^y(\tau)$ – четная.

Кроме того, выражения $\tilde{G}_2^x, \tilde{G}_2^y$ вычисляются с использованием z_0, z_1 :

$$\tilde{G}_2^x = -\beta^{-1} (\alpha^{-1} z''_{\lambda,0}) (- 2C z_{y,0} \sin z_{\lambda,0} - (2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \cos z_{\lambda,0}),$$

$$\tilde{G}_2^y = -\beta^{-1} (\alpha^{-1} z''_{\lambda,0}) (- (2C z_{x,0} + 2C \hat{x}_0 + e_J D) \sin z_{\lambda,0} + 2C z_{y,0} \cos z_{\lambda,0}).$$

В силу того, что новые уравнения (58) отличаются от уравнений (20) только добавкой к неоднородности, решения (58) можно искать в виде:

$$\begin{cases} z_{x,2}(\tau, \mu) = z_{x,2}^0(\tau) + \hat{z}_{x,2}(\tau, \mu), \\ z_{y,2}(\tau, \mu) = z_{y,2}^0(\tau) + \hat{z}_{y,2}(\tau, \mu), \end{cases}$$

где $(z_{x,2}^0, z_{y,2}^0)$ – некоторое решение для второго приближения системы (20), а $(\hat{z}_{x,2}, \hat{z}_{y,2})$ – решение системы:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \hat{z}_{x,2} \\ \hat{z}_{y,2} \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\tau) \begin{pmatrix} \hat{z}_{x,2} \\ \hat{z}_{y,2} \end{pmatrix} + \mu^2 \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_2^x(\tau) \\ \mathfrak{G}_2^y(\tau) \end{pmatrix},$$

Обозначим для краткости $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{u}_2^0 = (x_2^0, y_2^0)$, $\hat{\mathbf{u}}_2 = (\hat{x}_2, \hat{y}_2)$. Тогда $\hat{\mathbf{u}}_2^{s,u}$ строятся по известным формулам (индексы s и u обозначают выполнение соответствующих граничных условий):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_2^u = \mu^2 \mathbf{u}_1(\tau) \int_{\tau^u}^{\tau} (\tilde{y}_1(\tau) \mathfrak{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \mathfrak{G}_2^y(\tau)) d\tau + \mu^2 \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} (x_1(\tau) \mathfrak{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \mathfrak{G}_2^x(\tau)) d\tau, \\ \hat{\mathbf{u}}_2^s = \mu^2 \mathbf{u}_1(\tau) \int_{\tau^s}^{\tau} (\tilde{y}_1(\tau) \mathfrak{G}_2^x(\tau) - \tilde{x}_1(\tau) \mathfrak{G}_2^y(\tau)) d\tau - \mu^2 \tilde{\mathbf{u}}_1(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} (x_1(\tau) \mathfrak{G}_2^y(\tau) - y_1(\tau) \mathfrak{G}_2^x(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

Для того, чтобы исследовать вопрос существования пересечения $W^u(\Gamma_{h_1})$ и $W^s(\Gamma_{h_2})$, рассмотрим разность

$$\mathbf{u}_2^u(\tau_1, \mu_1) - \mathbf{u}_2^s(\tau_2, \mu_2) = (\mathbf{u}_2^{0,u}(\tau_1) - \mathbf{u}_2^{0,s}(\tau_2)) + (\hat{\mathbf{u}}_2^u(\tau_1, \mu_1) - \hat{\mathbf{u}}_2^s(\tau_2, \mu_2)). \quad (59)$$

Подставим явный вид $\hat{\mathbf{u}}_2^u, \hat{\mathbf{u}}_2^s$ в (59) и перепишем это уравнение в матричной форме:

$$B(\tau_1, \tau_2) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1^2 \\ \mu_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\tau_1, \tau_2) \\ f_2(\tau_1, \tau_2) \end{pmatrix}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} B_{1,1} &= x_1(\tau_1) \int_{\tau^u}^{\tau_1} (\tilde{y}_1 \mathfrak{G}_2^x - \tilde{x}_1 \mathfrak{G}_2^y) d\tau + \tilde{x}_1(\tau_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\ B_{1,2} &= -x_1(\tau_2) \int_{\tau^s}^{\tau_2} (\tilde{y}_1 \mathfrak{G}_2^x - \tilde{x}_1 \mathfrak{G}_2^y) d\tau + \tilde{x}_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\ B_{2,1} &= y_1(\tau_1) \int_{\tau^u}^{\tau_1} (\tilde{y}_1 \mathfrak{G}_2^x - \tilde{x}_1 \mathfrak{G}_2^y) d\tau + \tilde{y}_1(\tau_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\ B_{2,2} &= -y_1(\tau_2) \int_{\tau^s}^{\tau_2} (\tilde{y}_1 \mathfrak{G}_2^x - \tilde{x}_1 \mathfrak{G}_2^y) d\tau + \tilde{y}_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -x_2^{0,u}(\tau_1) + x_2^{0,s}(\tau_1) = \\ &= -x_1(\tau_1) \int_{\tau_2^u}^{\tau_1} (\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y) d\tau - \tilde{x}_1(\tau_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \tilde{G}_2^y - y_1 \tilde{G}_2^x) d\tau + \\ &\quad + x_1(\tau_2) \int_{\tau_2^s}^{\tau_2} (\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y) d\tau - \tilde{x}_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \tilde{G}_2^y - y_1 \tilde{G}_2^x) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= -y_2^{0,u}(\tau_1) + y_2^{0,s}(\tau_1) = \\ &= -y_1(\tau_1) \int_{\tau_2^u}^{\tau_1} (\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y) d\tau - \tilde{y}_1(\tau_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \tilde{G}_2^y - y_1 \tilde{G}_2^x) d\tau + \\ &\quad + y_1(\tau_2) \int_{\tau_2^s}^{\tau_2} (\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y) d\tau - \tilde{y}_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \tilde{G}_2^y - y_1 \tilde{G}_2^x) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем линейное алгебраическое уравнение (60) на μ_1^2, μ_2^2 , коэффициенты которого зависят от набора параметров $\{\tau_1, \tau_2, \tau^s, \tau^u, \tau_2^s, \tau_2^u\}$.

Условием разрешимости неоднородного уравнения (60) является $\det B(\tau_1, \tau_2) \neq 0$.

Положим $\tau^u = \tau_1$, $\tau^s = \tau_2$, тогда:

$$\begin{aligned}
\det B(\tau_1, \tau_2) &= \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau (\tilde{x}_1(\tau_1) \tilde{y}_1(\tau_2) - \tilde{x}_1(\tau_2) \tilde{y}_1(\tau_1)) \equiv \\
&\equiv F(\tau_1, \tau_2) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\
B_{1,1} &= \tilde{x}_1(\tau_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\
B_{1,2} &= \tilde{x}_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\
B_{2,1} &= \tilde{y}_1(\tau_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau, \\
B_{2,2} &= \tilde{y}_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau.
\end{aligned}$$

Так как предполагается, что $\mu_1, \mu_2 > 0$, необходимо чтобы обе компоненты решения (60) были положительны $\mu_1^2 > 0, \mu_2^2 > 0$. Для этого необходимо выполнение следующих неравенств на коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\frac{B_{1,1}f_2 - B_{2,1}f_1}{\det B} &> 0, \\
\frac{B_{2,2}f_1 - B_{1,2}f_2}{\det B} &> 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,1}f_2 - B_{2,1}f_1 &= \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau \left(\int_{\tau_2^u}^{\tau_1} \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau \underbrace{\left(x_1(\tau_1) \tilde{y}_1(\tau_1) - \tilde{x}_1(\tau_1) y_1(\tau_1) \right)}_{W(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1)=1} \right) + \\
&+ \int_{\tau_2^s}^{\tau_2} \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau \left(\tilde{x}_1(\tau_1) y_1(\tau_2) - \tilde{y}_1(\tau_1) x_1(\tau_2) \right) + \\
&+ \int_{\tau_2}^{+\infty} \left(x_1 \tilde{G}_2^y - y_1 \tilde{G}_2^x \right) d\tau \left(\underbrace{\tilde{y}_1(\tau_1) \tilde{x}_1(\tau_2) - \tilde{x}_1(\tau_1) \tilde{y}_1(\tau_2)}_{-F(\tau_1, \tau_2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2,2}f_1 - B_{1,2}f_2 &= \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1 \mathfrak{G}_2^y - y_1 \mathfrak{G}_2^x) d\tau \left(\int_{\tau_2^u}^{\tau_1} \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau \left(\tilde{x}_1(\tau_2) y_1(\tau_1) - \tilde{y}_1(\tau_2) x_1(\tau_1) \right) + \right. \\
&+ \int_{\tau_2^s}^{\tau_2} \left(\tilde{y}_1 \tilde{G}_2^x - \tilde{x}_1 \tilde{G}_2^y \right) d\tau \underbrace{\left(x_1(\tau_2) \tilde{y}_1(\tau_2) - \tilde{x}_1(\tau_2) y_1(\tau_2) \right)}_{W(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1)=1} \left. + \int_{-\infty}^{\tau_1} \left(x_1 \tilde{G}_2^y - y_1 \tilde{G}_2^x \right) d\tau \left(\underbrace{\tilde{y}_1(\tau_1) \tilde{x}_1(\tau_2) - \tilde{x}_1(\tau_1) \tilde{y}_1(\tau_2)}_{-F(\tau_1, \tau_2)} \right) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем итоговые требования на коэффициенты:

$$\begin{aligned} \frac{B_{1,1}f_2 - B_{2,1}f_1}{\det B} = & -\frac{\int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1\tilde{G}_2^y - y_1\tilde{G}_2^x) d\tau}{\int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1\mathfrak{G}_2^y - y_1\mathfrak{G}_2^x) d\tau} + \frac{\int_{\tau_2^u}^{\tau_1} (\tilde{x}_1\tilde{G}_2^y - \tilde{y}_1\tilde{G}_2^x) d\tau}{F(\tau_1, \tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1\mathfrak{G}_2^y - y_1\mathfrak{G}_2^x) d\tau} + \\ & + \frac{\int_{\tau_2^s}^{\tau_2} (\tilde{x}_1\tilde{G}_2^y - \tilde{y}_1\tilde{G}_2^x) d\tau (\tilde{x}_1(\tau_1)y_1(\tau_2) - \tilde{y}_1(\tau_1)x_1(\tau_2))}{F(\tau_1, \tau_2) \int_{\tau_2}^{+\infty} (x_1\mathfrak{G}_2^y - y_1\mathfrak{G}_2^x) d\tau} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B_{2,2}f_1 - B_{1,2}f_2}{\det B} = & -\frac{\int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1\tilde{G}_2^y - y_1\tilde{G}_2^x) d\tau}{\int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1\mathfrak{G}_2^y - y_1\mathfrak{G}_2^x) d\tau} + \frac{\int_{\tau_2^s}^{\tau_2} (\tilde{x}_1\tilde{G}_2^y - \tilde{y}_1\tilde{G}_2^x) d\tau}{F(\tau_1, \tau_2) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1\mathfrak{G}_2^y - y_1\mathfrak{G}_2^x) d\tau} + \\ & + \frac{\int_{\tau_2^u}^{\tau_1} (\tilde{x}_1\tilde{G}_2^y - \tilde{y}_1\tilde{G}_2^x) d\tau (\tilde{x}_1(\tau_2)y_1(\tau_1) - \tilde{y}_1(\tau_2)x_1(\tau_1))}{F(\tau_1, \tau_2) \int_{-\infty}^{\tau_1} (x_1\mathfrak{G}_2^y - y_1\mathfrak{G}_2^x) d\tau} > 0, \end{aligned}$$

$$F(\tau_1, \tau_2) \equiv \tilde{y}_1(\tau_1)\tilde{x}_1(\tau_2) - \tilde{x}_1(\tau_1)\tilde{y}_1(\tau_2).$$

5. Заключение