

毕业论文

左如春

2024 年 9 月 12 日

1 EM

由 Taylor 定理可知

$$\begin{aligned} f(X(r)) &= f(X(s)) + f'(X(s))(X(r) - X(s)) \\ &\quad + \int_0^1 (1-h)g''f(X(s) + h(X(r) - X(s)))(X(r) - X(s))^2 dh, \end{aligned}$$

可以写成

$$f(X(r)) = f(X(s)) + R_f(r; s, X(s)), \quad 0 \leq s \leq r,$$

其中

$$\begin{aligned} R_f(r; s, X(s)) &:= f'(X(s))(X(r) - X(s)) \\ &\quad + \int_0^1 (1-h)g''f(X(s) + h(X(r) - X(s)))(X(r) - X(s))^2 dh. \end{aligned}$$

由于扩散项 g 是常数，因此不做改变。将 f 的 Taylor 展开代入到下面的积分方程

$$X(t) = X(s) + \int_s^t f(X(r)) dr + \int_s^t g(X(r)) dW(r), \quad (1)$$

于是

$$X(t) = X(s) + f(X(s))(t - s) + g(X(s)) \int_s^t dW(r) + \int_s^t R_f(r; s, X(s)) dr \quad (2)$$

将这里的 R_M 去掉得到的就是 Milstein 方法

这个引理需要验证，应该是可以的。真实解的收敛性

Lemma 1.1. 假设 f 和 g 满足全局 *Lipschitz* 条件, 并且 $X(t)$ 是原 *SDE* 的真实解. 那么对于任意的 $T > 0$ 和 $X_0 \in \mathbb{R}$, 都存在 $K > 0$ 使得对于任意的 $0 \leq s, t \leq T$ 都有

$$\|X(t) - X(s)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq K|t - s|^{1/2}. \quad (3)$$

proof: 由 8.3

$$X(t) - X(s) = \int_s^t f(X(r)) dr + \int_s^t g(X(r)) dW(r).$$

Then, using (A.10),

$$\mathbb{E} [|X(t) - X(s)|^2] \leq 2\mathbb{E} \left[\left| \int_s^t f(X(r)) dr \right|^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\left| \int_s^t g(X(r)) dW(r) \right|^2 \right].$$

Following the argument for deriving (8.29), we find

$$\mathbb{E} [|X(t) - X(s)|^2] \leq 2L^2((t - s) + 1)(t - s) \left(1 + \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [|X(t)|^2] \right).$$

As $X \in \mathcal{H}_{2,T}$, this implies (8.55). \square

Proposition 1.2. 假设 f 和 g 满足全局 *Lipschitz* 条件, 并且 $X(t)$ 是原 *SDE* 的真实解. 对于每个 $T > 0$ 和 $X_0 \in \mathbb{R}^d$, 存在 $K > 0$ 对于任意的 $0 \leq s, t \leq T$:, 使得下述成立 (i) 对于 R_f

$$\mathbb{E} [|R_f(t; s, X(s))|] \leq K|t - s|^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

(ii) 对于 R_f 的积分, 其中 $t_j = j\Delta t$,

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{t_j < t} \int_{t_j}^{t \wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j)) dr \right| \right] \leq K\Delta t.$$

proof: (i) 在全球 *Lipschitz* 的条件下, 该结论可以直接得到

(ii) 由 R_f 的定义可知

$$\begin{aligned} R_f(r; s, X(s)) &= f'(X(s))(X(r) - X(s)) \\ &+ \int_0^1 (1 - h)g''f(X(s) + h(X(r) - X(s)))(X(r) - X(s))^2 dh \\ &= f'(X(s)) \left(g(X(s)) \int_s^r dW(p) \right) + f'(X(s)) \left(f(X(s))(t - s) + \int_s^t R_f(r; s, X(s)) dr \right) \\ &+ \int_0^1 (1 - h)g''f(X(s) + h(X(r) - X(s)))(X(r) - X(s))^2 dh. \end{aligned}$$

令

$$\Theta_j := \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(X(t_j)) \left(g(X(t_j)) \int_{t_j}^r dW(p) \right) dr \quad (5)$$

于是

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j)) dr \right|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{k-1} \Theta_j \right|^2 \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(X(t_j)) \left(f(X(t_j))(r - t_j) + \int_{t_j}^r R_f(p; t_j, X(t_j)) dp \right) dr \right|^2 \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_0^1 (1-h) f''(X(t_j) + h(X(r) - X(t_j))) (X(r) - X(t_j))^2 dh dr \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式以及前面的结论, 得到第二项和第三项是 Δt . 对于第一项, 对于 $k > j$, 我们有 $\mathbb{E}[\langle \Theta_j, \Theta_k \rangle] = \mathbb{E}[\langle \Theta_j, \mathbb{E}[\Theta_k | \mathcal{F}_{t_k}] \rangle] = 0$ a.s. 于是

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{k-1} \Theta_j \right|^2 \right] = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(X(t_j)) \left(g(X(t_j)) \int_{t_j}^r dW(p) \right) dr \right|^2 \right].$$

由于 $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^r dW(p) dr \sim N(0, \frac{1}{3} \Delta t^3 I_m)$, 求和中的每一项都是 $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ 于是最终的和是 $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. □

下面我们来证明 Milstein 的强收敛阶. 为了方便证明, 我们定义一个连续版本的过程 $X_{\Delta t}(t)$, 它和估计 X_n 在 $t = t_n$ 是相等的, 为此, 介绍变量 $\hat{t} := t_n$ 当 $t_n \leq t < t_{n+1}$ 并且令

$$X_{\Delta t}(t) = X_{\Delta t}(\hat{t}) + f(X_{\Delta t}(\hat{t})) \int_{\hat{t}}^t ds + G(X_{\Delta t}(\hat{t})) \int_{\hat{t}}^t dW(r)$$

注意, 当 $\hat{t} = t_n$ 时, $X_{\Delta t}(\hat{t}) = X_n$

$$X_{\Delta t}(t) = X_{\Delta t}(t_0) + \int_{t_0}^t f(X_{\Delta t}(\hat{s})) ds + \int_{t_0}^t G(X_{\Delta t}(\hat{s})) dW(s) \quad (6)$$

Theorem 1.3. 假设满足全局 Lipschitz 条件. 令 X_n 是精确解 $X(t)$ 的 Milstein 估计. 对于任意的 $T \geq 0$, 存在 $K > 0$ 使得

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |X(t_n) - X_n| \leq K \Delta t.$$

proof: 为了简化符号, 令 $D(s) := f(X_{\Delta t}(\hat{s})) - f(X(\hat{s}))$ 以及

$$M(s) := g(X_{\Delta t}(\hat{s})) - g(X(\hat{s}))$$

数值解6和真实解2相减, 可以得到

$$u_{\Delta t}(t) - X(t) = \int_0^t D(s)ds + \int_0^t M(s)dW(s) \quad (7)$$

$$+ \sum_{t_j < t} \int_{t_j}^{t \wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j)) dr + \int_{t_n}^t R_f(r; t_n, X(t_n)) dr. \quad (8)$$

令 $e(\hat{t}) = X_{\Delta t}(\hat{t}) - X(\hat{t})$. 于是,

$$\mathbb{E} [|e(\hat{t})|] \leq \mathbb{E} \left[\left| \int_0^{\hat{t}} D(s)ds \right| \right] + \mathbb{E} \left[\left| \int_0^{\hat{t}} M(s)dW(s) \right| \right] \quad (9)$$

$$+ \mathbb{E} \left[\left| \sum_{t_j < \hat{t}} \int_{t_j}^{t \wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j)) dr \right| \right]. \quad (10)$$

对于第一项, 由 Lipschitz 条件和 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^{\hat{t}} D(s)ds \right| \right] \leq \hat{t} \int_0^{\hat{t}} \mathbb{E} [|D(s)|] ds \leq \hat{t} \int_0^{\hat{t}} L \mathbb{E} [|e(s)|] ds. \quad (11)$$

对于第二项, 通过等距性质:

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^{\hat{t}} M(s)dW(s) \right|^2 \right] = \int_0^{\hat{t}} \mathbb{E} [|M(s)|_{\mathbb{F}}^2] ds. \quad (12)$$

由于前面的等式, 可以得到:

$$\mathbb{E} [|M(s)|_{\mathbb{F}}^2] \leq 2\mathbb{E} [|g(X_{\Delta t}(\hat{s})) - g(X(\hat{s}))|_{\mathbb{F}}^2] \leq 2(L + L_2)\mathbb{E} [|e(s)|^2] \quad (13)$$

因此存在独立于 Δt 的 $K_3 > 0$ 使得,

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^{\hat{t}} M(s) dW(s) \right|^2 \right] \leq K_3 \int_0^{\hat{t}} \mathbb{E} [|e(s)|^2] ds.$$

对于第三项, 由 Proposition (ii) 可知, 存在独立于 Δt 的 $K_2 > 0$ 使得

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t \wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j)) dr \right| \right] \leq K_2 \Delta t.$$

将这些估计放在一起, 于是对于 $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left[|e(\hat{t})|\right] \leq 3(TL + K_3) \int_0^{\hat{t}} \mathbb{E}\left[|e(s)|\right] ds + 3K_2\Delta t.$$

最终由 Gronwall 不等式即可完成这个证明.

□