上海师范大学

研究生学位论文选题报告

(硕 士 研 究 生)

论　文　题　目 **加性噪声驱动的时间变换随机微分方程的数值方法**

研 究 生 姓 名　　左如春

学　　　　　号　　222200595

导 师 姓名、职称　　刘暐 副研究员

所　属　学　院　　数理学院

专　　　　　业　　计 算 数 学

研　究　方　向　　常微分方程数值解

二〇二四 年　九　月　二十　日

说　明

1．选题报告格式采用小四、宋体字体，行距为固定值 18 磅，A4 纸双面打印。要求字迹清晰，文句通顺，一至五的内容可加页打印，六至九的内容用黑色水笔填写。

2．选题报告所列各栏内容要详细填写、要求重点突出。

3．开题报告应在学校规定期限之前完成。

4．研究生在完成开题报告后，应将此表交到学院研究生教务办公室审核，通过后方可进入学位论文撰写阶段。

5.除了此表，博士生还应将《研究生考核登记表》，硕士生还应将《研究生考核登记表》和《研究生实践能力考核表》交到学院研究生教务办公室审核，通过中期考核后，方可进入学位申请阶段。

6．研究生毕业前，由学院将《研究生选题报告》、《研究生考核登记表》和《研究生实践能力考核表》三表存入研究生个人档案，交档案馆存档。

研究生开题报告书

一、 选题依据：（论文的研究意义、国内外研究现状分析）

论文的研究意义：

时变随机过程和时间变换随机微分方程(SDEs),作为描述亚扩散过程重要工具之一，被广泛应用于模拟物理[17,18,19]，金融[20,21]，水文学[22]和细胞生物学[23]中出现的异常扩散。传统的随机微分方程数值方法包括Euler型方法、Milstein 型方法、Runge-Kutta 方法等[24,25,26]。对于Euler型数值方法，直接应用在SDEs上，能够得到强收敛阶是0.5，而Milstein数值方法对应的强收敛阶是1，因此研究更高阶的EM型数值方法有着重要意义。

由于时变SDEs 的真解的显式形式很少，并且时变SDE 模型在实践中的应用时往往需要很多数量的样本路径来进行估计、测试和统计学习,基于观测数据的预测，即使是某些类型的时间变化的SDEs 模型的真实解的明确表达是可用的，在没有计算机模拟的帮助下执行这些计算是几乎不可能的。因此对时变SDEs 进行数值逼近同样具有重要的研究意义。

受到经典SDEs的启发，如果对原始SDEs使用Lamperti变换，将原来的乘性噪声变成加性噪声，此时Euler型数值方法等价于Milstein数值方法，从而得到强收敛阶是1。这种Lamperti变换对于提升EM型数值方法的强收敛阶有着重要意义。

国内外研究现状分析：

对于经典的随机微分方程,当漂移项和扩散项系数满足全局Lipschitz 条件时，国内外已有大量文献研究了不同类型的数值近似，其中包括 EM、Milstein、Runge-Kutta 方法等，近年来，具有超线性系数的经典布朗运动驱动的随机微分方程受到了广泛关注,大量工作利用隐式方法包括半隐式EM、隐式随机Runge-Kutta 方法等进行研究。然而如果直接使用半隐式Euler时，仅能得到0.5阶的强收敛阶，此时Szpruch L等人首次提出了更高阶的EM数值方法，通过对原始SDEs进行Lamperti变换，变换后的SDEs漂移项满足单边Lipschitz时，得到BEM数值方法为1阶[3]。Alfonsi A独立于Szpruch L等人，将 Lamperti 方法应用于 SDEs 中，与之不同的是 Alfonsi A 研究的Lamperti变换后的漂移项满足的是单调条件[1]。Yang H等人在SIS模型中应用Lamperti变换，使用对数Euler的数值方法证明1阶强收敛阶[4]。

Kobayashi 等人研究了在系数的空间变量上施加全局Lipschitz 条件时，不同结构时变SDEs 的不同数值方法。Jum 和Kobayashi 证明了一类时变SDEs的Euler-Maruyama(EM)方法在强和弱意义上的收敛性[9]，据我们所知，这是第一次研究时变SDEs 解的样本路径模拟。最近，Jin 和Kobayashi 研究了更一般类型的时变 SDEs 的一些欧拉型方法[11,]。对于时变 McKean-Vlasov SDEs,Wen 等人考虑了数值方法[5]。在SDEs 系数的空间变量允许出现超线性项的情况下，由于经典的欧拉型和 Milstein 型方法可能不收敛， 隐式方法

和修正的显式方法通常是较好的选择。在对偶原理不适用的情况下，关于具有超线性系数的时间变换随机微分方程提出的数值方法很少考虑到非自治的情况，当对时变 SDEs 漂移系数中的空间变量施加一些超线性增长条件时，Deng 和 Liu 研究了半隐式 EM 方法[10]；之后，Liu 等人利用对偶原理研究了截断 EM 方法[27]；在没有使用对偶原理情况下，Li 等人也讨论了截断型 EM 方法[8]。随后 Liao 等人讨论了截断 Milstein 方法[28]。

二、研究方案设计：

1.研究目标、研究内容和拟解决的关键问题 。

① 研究目标

对于经典布朗运动驱动的 SDEs，如果将其通过 Lamperti 变换，就可以将原始 SDEs 中的乘性噪声变成加性噪声，此时的 EM 型数值方法等价于 Milstein 数值方法，于是可以得到强收敛阶是 1 阶。于是我们考虑由时变布朗运动驱动的 SDEs 的 EM 型数值方法，得到类似的强收敛阶，通过由时变布朗运动驱动的 CIR 和 CEV 模型的数值模拟进行验证，同时将该数值方法应用到金融模型中的多层蒙特卡罗方法，进行期权选择的模拟研究。

② 研究内容

我们研究一类变换的时间变换随机微分方程(SDEs)：

$$dy(t) = a(y(t))dE(t) + b(y(t))dB(E(t))$$

它可以通过 Lamperti 变换：

$$F(x) = \lambda \int_0^x \frac{1}{b(y)} dy$$

变成如下形式：

$$dx(t) = \lambda\left(\frac{a\left(F^{-1}(x)\right)}{b\left(F^{-1}(x)\right)} - \frac{1}{2}\mathrm{b}'\left(F^{-1}(x)\right)\right)dE(t) + \lambda dB\left(E(t)\right)$$

其中漂移项系数满足单调条件。我们需要研究 BEM 在该类方程强收敛性和蒙特卡罗方法的应用。

③ 拟解决的关键问题

(1)在有限时间区间$[0,t]$中离散化过程$E(t)$

对于任何给定的$T > 0$和等距步长$\delta \in (0,1)$,通过$D_{i\delta} = D_{(i-1)\delta} + Z_i$,样本路径$D(s)$被模拟。$E(t)$的离散通过$E_t^\delta \coloneqq (\min\{n; D_{n\delta} > t\} - 1)\delta$。

(2)推导随机过程$E(t)$在Δt的增量$\Delta E(t)$的n阶矩的期望和与Δt之间的关系

(3)推导假设条件的成立

$$f(y) - f(x) \le K(y - x)$$

$$\sup_{t\in(0,T]} \mathbb{E}|f'(x)| + \sup_{t\in(0,T]} \mathbb{E}\left|f'(x)f(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x)\right| < \infty$$

(4)证明数值方法的强收敛性

$$\mathbb{E}\left[\left|X(t_i) - X_{t_i}\right|\right] \le C\Delta t^\alpha$$

(5)数值模拟进行验证

2.拟采取的研究方法、技术路线、实施方案。

① 研究方法

Cauchy-Schwarz 不等式：$|\mathbb{E}(XY)|^2 \le \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$

Gronwall’s 不等式：由 $u(t) \le c + \int_0^t v(s)u(s)\,ds$，那么 $u(t) \le c\exp(\int_0^t v(s)\,ds)$

BDG 不等式：$\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t} \mid \int_0^s g(r)\,dB(r) \mid^p) \le C_p\mathbb{E} \mid \int_0^s \mid g(r) \mid^2 dr \mid^{\frac{p}{2}}$

对于随机微分方程：$dx(t) = a(t)dt + b(t)dB(t)$，有$It\hat{o}$公式：

$$f\big(x(t)\big) = f\big(x(0)\big) + \int_0^t f'\big(x(s)\big)a(s) + \frac{1}{2}f''\big(x(s)\big)b^2(s)\,ds$$

$$+\int_0^t f'(x(s))b(s)\,dB(s)$$

如果更新过程$C(t)$的更新函数为$\mathbb{E}[C(t)] = u(t)$，那么$\mathbb{E}[\mathrm{d}C(t_1)\ldots\mathrm{d}C(t_n)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i+1})\,\mathrm{d}t_i$，其中$t_1 > t_2 > \cdots > t_n > t_{n+1} = 0$

② 技术路线

本文通过 matlab 进行数值模拟，其中包括由时间变换布朗运动驱动的 CIR 和 CEV 模型。对于金融模型中期权的选择等多种应用，将 BEM 方法用于多水平蒙特卡罗方法进行模拟验证。最终论文将通过 Latex 撰写。

③ 实施方案

1) 推导假设条件成立

2)构造等距离散的 BEM 方法

3)证明重要引理和定理

3.论文特色与创新点。

对于由时间变换的布朗运动驱动的随机微分方程,我们提出了一种等距的BEM数值方法来逼近解析解，与此同时，我们还对原始的 SDEs 使用 Lamperti 变换，将乘性噪声转变成加性噪声，此时原 BEM 数值方法等价于变换后的 SDEs 的 Milstein 数值方法，以此达到更高的强收敛阶。

4.研究的预期成果与进度安排。

起止时间	论文进度安排
2024.2 -2024.3	论文定题，收集、阅读并整理相关图书、文献
2024.4 -2024.7	完成时间变换 SDEs 截断方法的构造，进行强收敛率推导、数值模拟
2024.8 -2024.9	论文撰写、修改、完成开题报告
2024.10 -2024.11	推导过程和数值模拟总结，进行排版、整理
2024.12 - 2025.1	毕业论文预答辩
2025.2 -2025.4	论文润色，补充、完善论文
2025.5	论文定稿、毕业论文答辩

三、论文大纲（至少二级提纲）：

摘 要

Abstract

目 录

第 1 章 引言

1.1 研究背景

1.2 主要结论

1.3 结构安排

第 2 章 准备工作

2.1 符号说明

2.2 假设条件

2.3 主要引理

第 3 章 BEM 方法的强收敛性

第 4 章 数值模拟

4.1 模拟 D(s)和 E(t)

4.2 时间变换的布朗运动驱动的 CIR 过程

4.3 数值实验

4.4 时间变换的布朗运动驱动的 CEV 过程

第 5 章 结论与展望

参考文献

致谢

四、研究的前期基础与可行性分析

对于随机微分方程数值方法的研究，国内外已有大量的文章进行了分析。其中 EM 方法以其结构简单、易于实现的优点被广泛应用，以提高收敛阶为目标，一些文章进行了 Milstein 方法的研究，并将强收敛率从 1/2 提高到 1 阶，除此之外另外一些工作通过 Runge-Kutta 进行研究收敛和稳定。我们知道当 SDEs 的扩散项是加性噪声的时候，EM 型数值方法等价于 Milstein 方法，此时 EM 型数值方法的强收敛阶也提升到了 1 阶。[1] [3] [4]利用 Lamperti 变换将将原始 SDE 转化成带有加性噪声的 SDEs，以此使用 EM 型数值方法提升收敛阶。近年来，这种思想被广泛的用在由经典布朗运动驱动的随机微分方程中。

相比于经典的随机微分方程，时间变换的随机微分方程的研究较少，它可用于描述相对较慢的粒子扩散，它是描绘亚扩散现象的强有力工具。当时变 SDEs 的漂移和扩散系数满足全局 Lipschitz 条件时，Jum 和 Kobayashi 首次证明了一类时变 SDEs 的 Euler-Maruyama (EM)方法在强和弱意义上的收敛性，据我们所知， 这是第一次研究时变 SDEs 解的样本路径模拟。在对偶原则不适用的情况下，近年，Jin 和 Kobayashi 研究了更一般类型的时变 SDEs 的 EM 型和 Milstein 型方法。Deng 和 Liu 研究了半隐式 EM 方法，Liu 等人利用对偶原理研究了截断 EM 方法，Li 等人在没有使用对偶原理时讨论了截断型欧拉方法。据我们所知截至目前为止，对于由时间变换的布朗运动驱动的随机微分方程中，在进行数值离散的时候往往都是采用一种非等距的离散，以保证 SDEs 的微分项可由我们所控制，但是对于等距离散的数值方法，目前还没有人提出类似的研究。

基于上述的研讨，对于一类可以通过 Lamperti 变换的时间变换随机微分方程我们可以提出一种等距离散的 BEM 数值格式，和直接在原始的 SDEs 中使用 EM 型数值方法，通过 Lamperti 变换后，可以得到更高的收敛阶，更适合于在金融应用中非常流行的多层蒙特卡罗方法。

五、中英文参考文献（至少 40 篇以上）

[1] Alfonsi A. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process[J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(2):602–607.

[2] Iacus S M,et al. Simulation and inference for stochastic differential equations: with r examples: volume 486[M]. Springer, 2008.

[3] Neuenkirch A, Szpruch L. First order strong approximations of scalar sdes defined in a domain [J]. Numerische Mathematik, 2014, 128:103-136.

[4] Yang H, Huang J. First order strong convergence of positivity preserving logarithmic euler maruyama method for the stochastic sis epidemic model[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 121:107451.

[5] Wen X, Li Z, Xu L. Strong approximation of non-autonomous time-changed mckean–vlasov stochastic differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Sim ulation, 2023, 119:107122.

[6] Liu W, MaoX,Tang J, et al. Truncated euler-maruyama method for classical and time-changed non-autonomous stochastic differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 153:66-81.

[7] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators[J]. BIT Numerical Mathematics, 2021, 61(3):829-857.

[8] Li X, Liao J, Liu W, et al. Convergence and stability of an explicit method for autonomous time-changed stochastic differential equations with super-linear coefficients[J]. Adv. Appl.Math. Mech, 2023, 15(3): 651-683.

[9] Jum E,Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equa tions driven by a time-changed brownian motion[J]. arXiv preprint arXiv:1408.4377, 2014.

[10]DengCS,LiuW.Semi-impliciteuler–maruyamamethodfornon-linear timechanged stochastic differential equations[J]. BIT Numerical Mathematics, 2020, 60:1133-1151.

[11] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time changed brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 476(2):619-636.

[12] Daley D J, Vere-Jones D, et al. An introduction to the theory of point processes: volume i: elementary theory and methods[M]. Springer, 2003.

[13] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2009, 119(10):3238-3252.

[14] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion[J]. Ito calculus, and Fokker-Planck equation-fractional generalisations, 2018.

[15] Kingman J. On doubly stochastic poisson processes[C]//Mathematical Proceedings of the Cam bridge Philosophical Society: volume 60. Cambridge University Press, 1964:923-930.

[16] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. Journal of Theoretical Probability, 2011, 24:789-820.

[17] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Phys. Rep.339 (1) (2000) 1–77.

[18] R.R. Nigmatullin, The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, Phys. Status Solidi B 133 (1986) 425–430.

[19] G.M. Zaslavsky, Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos, Phys. D 76 (1) (1994) 110–122.

[20] R. Gorenflo, F. Mainardi, E. Scalas, M. Raberto, Fractional calculus and continuous-time finance III: the diffusion limit,in: Mathematical Finance, in: Trends in Mathematics, 2001, pp. 171–180.

[21] M. Magdziarz, S. Orzeł, A. Weron, Option pricing in subdiffusive Bachelier model, J. Stat. Phys. 145 (1) (2011) 187.

[22] D.A. Benson, S.W. Wheatcraft, M.M. Meerschaert, Application of a fractional advection-dispersion equation, Water Resour. Res. 36 (6) (2000) 1403–1412.

[23] M.J. Saxton, K. Jacobson, Single-particle tracking: applications to membrane dynamics, Annu. Rev. Biophys. Biomol.Struct. 26 (1997) 373–399.

[24] D.J. Higham, X. Mao, A.M. Stuart, Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 40 (3) (2002) 1041–1063.

[25] Q. Guo, W. Liu, X. Mao, R. Yue, The truncated Milstein method for stochastic

differential equations with commutative noise, J. Comput. Appl. Math. 338 (2018) 298–310.

[26] X. Mao, Convergence rates of the truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations, J. Comput. Appl. Math. 296 (2016) 362–375.

[27] Wei Liu, Xuerong Mao, Jingwen Tang, and Yue Wu. Truncated Euler-Maruyama method for classical and time- changed non-autonomous stochastic differential equations. Appl. Numer. Math., 153:66 – 81, 2020.

[28] Liao, J., Liu, W., Wang, X.: Truncated Milstein method for non-autonomous stochastic differential equations and its modification. J. Comput. Appl. Math. 402, 113817–16 (2022)

[29] A. Janicki, A. Weron, Simulation and Chaotic Behaviour of α-Stable Stochastic Processes, Marcel Dekker, New York, 1994.

[30] A. Jurlewicz, Limit theorems for randomly coarse grained continuous-time random walks, Dissertationes Math.431,1–45,2005.

[31] P. E. Kloeden and E. Plate n, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations,corrected edition, Springer, 1992.

[32] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, second edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[33] Jum, E.: Numerical approximation of stochastic differential equations driven by Lévy motion with infinitely many jumps. Ph.D. thesis, University of Tennessee - Knoxville ,2015.

[34] Mao, X.: Stochastic Differential Equations and Applications, second edn. Horwood Publishing Limited,Chichester ,2008.

[35] Mao, X., Szpruch, L.: Strong convergence rates for backward Euler–Maruyama method for non-linear dissipative-type stochastic differential equations with super-linear diffusion coefficients. Stochastics 85(1), 144–171 ,2013.

[36] Meerschaert, M.M., Scheffler, H.-P.: Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. J. Appl. Probab. 41(3), 623–638 ,2004.

[37] Protter, P. Stochastic Integration and Differential Equations, 2nd ed. Springer, 2004.

[38] Jentzen, A., Kloeden, P.E., Neuenkirch, A.: Pathwise approximation of stochastic differential equations on domains: higher order convergence rates without

global Lipschitz coefficients. Numerische Mathematik 112(1), 41–64 ,2009.

[39] Jentzen, A., Hutzenthaler, M., Kloeden, P.E.: Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with non-globally Lipschitz continuous coefficients. Ann. Appl. Probab. 22(4), 1611–1641,2012.

[40]. Jentzen, A., Hutzenthaler, M., Kloeden, P.E.: Divergence of the multilevel Monte Carlo Euler method for nonlinear stochastic differential equations. Ann. Appl. Prob. 23(5), 1721–1760 ,2013.

[41] Higham, D.J., Mao, X.: Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean-reverting square root process. J. Comput. Finance 8(3), 35–62 ,2005.

六、指导教师对选题报告的意见：

指导教师签名：　　　　　　　　　　　　年　　月　　日

开题报告的时间及参加报告会的考核小组人员名单（副教授以上职称者不少于 3 人，此栏由导师填写，导师不能担任组长）：

时　　间：　　　　年　　月　　日　　　　**地　　点：**

参加人员：组长：　　　　职称：　　　　签名：
成员：　　　　职称：　　　　签名：
成员：　　　　职称：　　　　签名：
成员：　　　　职称：　　　　签名：
成员：　　　　职称：　　　　签名：
成员：　　　　职称：　　　　签名：

七、考核小组对选题报告的评语及对选题的意见：

选题报告考查成绩：（记优、良、中、及格、不及格）____________

考核小组组长签名：　　　　　　　　年　　月　　日

八、学科带头人意见：

学科带头人签名：　　　　　　　　年　　月　　日

九、学院审核意见：

教学秘书：　　　　　　　　年　　月　　日

学院（盖章）