

学校代码：10270

学号：222200595

上海师范大学

硕士学位论文

加性噪声驱动的时间变换随机微分方程的数值方法

学 院： 数 理 学 院

专 业： 计 算 数 学

研 究 方 向： 随 机 微 分 方 程 数 值 解

研 究 生 姓 名： 左 如 春

指 导 教 师： 刘 曄 副 研 究 员

完 成 日 期： 二 〇 二 四 年 九 月

论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中做了明确的声明并表示了谢意。

作者签名：_____ 日 期：_____

论文使用授权声明

本人完全了解上海师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它手段保存论文。暂缓出版的论文在公开后遵守此规定。

作者签名：_____ 导师签名：_____

日 期：_____ 日 期：_____

摘要

研究 Back-Euler-Maruyama (BEM) 数值逼近一类经过 Lamperti 变换后, 漂移系数线性增长、扩散系数是常数的时变随机微分方程. 证明了 BEM 的强收敛性与逆从属的稳定指数之间的关系, 并讨论收敛速度. 并通过数值模拟验证了理论结果.

关键词: 时间变换; 等距离散; 收敛阶; 逆从属

Abstract

change

Key Words: Keyword 1; Keyword 2; Keyword 3

目 录

摘 要	I
Abstract	II
目 录	III
第 1 章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 主要结论	2
1.3 结构安排	2
第 2 章 准备工作	3
2.1 符号说明	3
2.2 主要假设和引理	4
第 3 章 EM 数值方法	7
3.1 假设和引理	7
3.2 强收敛性	7
3.3 数值模拟	11
3.3.1 模拟 $D(s)$ 和 $E(t)$	11
3.3.2 时间变换的 OU 过程	12
3.4 非等距的离散格式	13
3.5 1 阶的 EM 全部写在这里	13
第 4 章 BEM 数值方法	17
4.1 假设和引理	17
4.2 强收敛性	17
4.3 数值模拟	20
4.4 关于 1 阶的写在这里	24
第 5 章 结论与展望	28
参考文献	29

致谢	31
----------	----

第1章 引言

1.1 研究背景

近年来, 由时间变换的布朗运动驱动的随机微分方程收到了广泛关注, 他们在金融, 生物和物理等方面有着广泛的应用. Meerschaert 和 Scheffler 在 [1] 中给出了从属和逆从属的重要性质, 这为后面对时间变换的研究做了大量铺垫. Kobayashi 在 [2] 中研究了一类可对偶化的时间变换 SDE, 与原始 SDE 对比, 揭示了逆从属微分项的作用. Magdziarz 在 [3] 中研究了一类漂移项完全依赖于时间, 并且满足全局 Lipschitz 条件, 扩散项是加性噪声的时间变换 SDE, 通过离散逆从属, 得到强收敛阶是 0.5 的数值方法. Jum 和 Kobayashi 在 [4] 中, 研究了一类漂移项和扩散项都是依赖于状态和逆从属过程, 并且满足全局 Lipschitz 条件和 Holder 连续性条件的时间变换 SDE, 利用对偶原则, 将时间变换 SDE 转换成一般的 SDE, 利用一般 SDE 已有的收敛结果, 得到时间变换 SDE 的 Euler-Maruyama(EM) 的强收敛阶是 0.5. Deng 和 Liu 在 [5] 中, 研究了一类漂移项是依赖于状态和逆从属过程, 并且满足单边 Lipschitz 条件和 Holder 连续性条件的时间变换 SDE, 同样利用对偶原则得到 semi-implicit Euler-Maruyama 的强收敛阶是 0.5. Jin 和 Kobayashi 在 [6] 中, 研究了一类漂移项和扩散项都是依赖于状态和时间, 并且满足全局 Lipschitz 条件和 Holder 连续性条件的时间变换 SDE, 在 [3] 的离散格式基础之上, 得到变步长的 EM 数值方法的强收敛阶是 0.5. Shen 等人在 [7] 中, 研究了一类由时间变换的布朗运动驱动的分布依赖 SDE, 其中漂移项和扩散项满足单边 Lipschitz 和 Holder 连续性条件, 给出了解的存在唯一性和稳定性. Li 等人在 [8] 中, 研究了时间变换 McKean-Vlasov SDE, 并给出了解的存在唯一性和稳定性的证明. He 等人在 [9] 中, 研究了漂移项和扩散项满足全局 Lipschitz 条件的时间变换 SDE, 证明了解的 p 阶矩是 η 稳定的. Li 等人在 [10] 中, 研究了时间变换 SDE 和时间变换脉冲 SDE, 得到了这些方程解的规律满足二次传输不等式的结果. Wu 等人 [11] 中, 研究了分步 theta 数值方法在非线性时间变换 SDE 中的均方稳定性, 并证明了该方法的强收敛性以及有限时间内达到 1 的收敛率. Wen 等人在 [12] 中, 研究了非自治时间变换 McKean-Vlasov SDE, 通过交互粒子系统探讨了 EM 方法的强收敛性和收敛率, 并证明了该方法的收敛率是 0.5.

关于可 Lamperti 变换的 SDE 数值方法的收敛性研究, 已有众多学者进行了深入探讨. Neuenkirch 和 Szpruch 在他们的文章 [15] 中, 提出了一种针对定义在域内的单边 Lipschitz 系数的一维 SDEs 的强近似方法. 他们通过 Lamperti 变换将原始

SDE 转换成具有加性噪声的 SDE，并应用 backward Euler-Maruyama (BEM) 方案，证明了该方法在保持 SDE 定义域的同时，具有一阶强收敛率。Alfonsi 在 [16] 中独立于 Neuenkirch 等人，研究了一大类 Lamperti 变换后漂移项满足单调条件的加性噪声 SDE，并得到一阶的强收敛阶。进一步地，Chen、Gan 和 Wang 在 [19] 中提出了一种新的显式时间步进方案，称为 Lamperti 平滑截断 (LST) 方案，用于强逼近 SIS 流行病模型。该方案基于 Lamperti 变换与显式截断方法的结合，能够在保持原始 SDEs 定义域的同时，证明具有一阶均方收敛率。最后，Yang 和 Huang 在 [18] 中，通过结合对数变换和 Euler-Maruyama (EM) 方法，为 SIS 流行病模型构建了一种保持正性的数值方法，并证明了该方法不仅保持了原始 SDE 的定义域，而且在有限时间区间内对于所有 $p > 0$ 的 p 阶矩收敛速率为一阶。这些研究为理解和改进 SDE 数值方法提供了重要的理论基础和实践指导。

1.2 主要结论

主要结论

1.3 结构安排

本文接下来的写作安排如下：

第2章 准备工作

2.1 符号说明

在这篇文章中, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 表示完备概率空间, $D = (D_t)_{t \geq 0}$ 表示具有 Laplace 指数 ψ , 从 0 开始的从属过程, 其中 ψ 的被杀率是 0 且具有 Lévy 测度 ν ; 即 D 是具有开始于 0 的 càdlàg 路径的一维非减 Lévy 过程, 其 Laplace 变换是:

$$\mathbb{E}[e^{-sD_t}] = e^{-t\psi(s)}, \quad \text{其中} \quad \psi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sy}) \nu(dy), \quad s > 0,$$

并且 $\int_0^\infty (y \wedge 1) \nu(dy) < \infty$, 我们考虑 Lévy 测度 ν 是无穷的情况, 即 $\nu(0, \infty) = \infty$, 这意味着复合泊松从属不在我们的考虑范围中. 令 $E = (E(t))_{t \geq 0}$ 是 D 的逆, 即:

$$E(t) := \inf\{u > 0; D_u > t\}, \quad t \geq 0.$$

我们称 E 为逆从属过程. 如果从属过程 D 是稳定的, 并且其指数为 $\beta \in (0, 1)$, 则 $\psi(s) = s^\beta$, 并且 E 被称为逆 β -稳定从属过程. 假设 $\nu(0, \infty) = \infty$ 表明 D 具有严格递增的路径, 并且有无限多个跳跃, 因此, E 具有从 0 开始的连续、非递减路径. 此外, D 和 E 之间的逆关系意味着, 对于所有 $t, x \geq 0$, 有 $\{E_t > x\} = \{D_x < t\}$. 注意, D 的跳跃对应于 E 上保持常数的 (随机) 时间间隔, 在这些常数周期内, 任何形式为 $X \circ E = (X_{E_t})_{t \geq 0}$ 的时间变换过程也保持常数. 如果 B 是与 D 独立的标准布朗运动, 我们可以将由时间变换布朗运动 $B \circ E$ 表示的粒子视为在常数周期内被困住且无法移动; 注意, 尽管 $B \circ D$ 是一个 Lévy 过程, 但 $B \circ E$ 甚至不是一个马尔可夫过程.

E 和 $B \circ E$ 都从 0 开始, 对于二次变差, 满足 $[B \circ E, B \circ E] = E$ 和 $[E, E] = [B \circ E, E] = 0$. 有关更一般的时间变换半鞅的随机微积分的详细信息, 请参见 [2] 的第 4 节.

令 $S = (l, r)$, 其中 $-\infty \leq l < r \leq \infty$, 函数 a, b 是 $S \rightarrow S$ 的连续可微函数. 考虑下面的 SDE:

$$dy(t) = a(y(t))dE(t) + b(y(t))dB(E(t)) \quad (2.1)$$

并且假设它在 S 中有唯一强解, 即

$$\mathbb{P}(y(t) \in S, t \geq 0) = 1.$$

如果 $b(x) > 0$ 对所有的 $x \in S$ 都成立, 那么我们可以使用 Lamperti 变换

$$F(x) = \lambda \int^x \frac{1}{b(y)} dy \quad (2.2)$$

对于某些 $\lambda > 0$. 并且 $F^{-1} : F(S) \rightarrow S$ 是被良好定义的, 令 $x(t) = F(y(t))$ 利用 [24] 中的时间变换 Itô 公式可以得到:

$$dx(t) = f(x(t))dE(t) + \lambda dB(E(t)) \quad (2.3)$$

其中

$$f(x) = \lambda \left(\frac{a(F^{-1}(x))}{b(F^{-1}(x))} - \frac{1}{2}b'(F^{-1}(x)) \right), \quad x \in F(S),$$

$F(D) = (F(l), F(r))$. 这种变换可以将扩散项的非线性项转换到漂移项中.

2.2 主要假设和引理

假设 2.1. 令 $T > 0$, 假设漂移项系数 f 是二阶连续可微的并且满足:

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |f'(x(t))| + \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| f'(x(t))f(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x(t)) \right| < \infty. \quad (2.4)$$

从 [24] 引入下面的三个关于时间变换的引理

引理 2.1 (第一变量变换公式). 令 B 是一维标准的布朗运动. 如果 $H \in L(B(t), \mathcal{F}_t)$, 则 $H_{E(t-)} \in L(B_{E(t)}, \mathcal{F}_{E_t})$. 此外, 对于所有 $t \geq 0$, 几乎处处有

$$\int_0^{E_t} H_s dB(s) = \int_0^t H_{E(s-)} dB_{E(s)}.$$

引理 2.2 (第二变量变换公式). 令 B 是一维标准的布朗运动, 设 D 和 E 是满足 $[D \rightarrow E]$ 或 $[D \leftarrow E]$ 的. 假设 B 与 E 同步. 如果 $K \in L(B_{E(t)}, \mathcal{F}_{E_t})$, 则 $(K_{D(t-)}) \in L(B(t), \mathcal{F}_{E(D_t)})$. 此外, 对于所有 $t \geq 0$, 几乎处处有

$$\int_0^t K_s dB_{E(s)} = \int_0^{E_t} K_{D(s-)} dB(s).$$

引理 2.3 (Itô 公式). 令 B 是一维标准的布朗运动. 令 D 和 E 满足 $[D \rightarrow E]$ 或 $[D \leftarrow E]$. X 是由下述 SDE 定义的随机过程:

$$X(t) := \int_0^t A(s)ds + \int_0^t F(s)dE(s) + \int_0^t G(s)dB(E(s))$$

其中 $A(s) \in L(t, \mathcal{F}_{E(t)})$, $F(s) \in L(E(t), \mathcal{F}_{E(t)})$, 以及 $G(s) \in L(B(E(s)), \mathcal{F}_{E(t)})$. 如果 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 那么 $f(X(t))$ 是 $\mathcal{F}_{E(t)}$ -半鞅, 对于所有的 $t \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(0) &= \int_0^t f'(X(s))A(s)ds + \int_0^{E(t)} f'(X(D(s-)))F(D(s-))ds \\ &+ \int_0^{E(t)} f'(X(D(s-)))G(D(s-))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^{E(t)} f''(X(D(s-)))\{G(D(s-))\}^2 ds. \end{aligned}$$

下面引入离散型 Gronwall 不等式,

引理 2.4. 令 $\Delta t > 0, g_n, \lambda_n \in \mathbb{R}, \eta > 0, a_1 = 0$, 再假设 $1 - \eta \Delta E_j > 0, 1 + \lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}$, 那么如果

$$a_{n+1} \leq a_n(1 + \lambda_n) + \eta a_{n+1} \Delta E_n + g_{n+1}$$

则下面的不等式成立:

$$a_n \leq \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=j}^n (1 - \eta \Delta E_i) g_{j+1} \prod_{l=j+1}^{n-1} (1 + \lambda_l) \quad (2.5)$$

下面的引理对于证明本文主要定理起着关键性的作用.

引用 [25] 中的引理.

引理 2.5. 假设在逆从属过程 $E(t)$ 的 Laplace 变换中, $\psi(s) = s^\alpha$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_t}{t} = 0, \text{ a.s.} \quad (2.6)$$

引理 2.6. 如果 E 是从属过程 D 的逆, 其拉普拉斯指数 ψ 在无穷大处的正则变化指数是 $\beta \in [0, 1)$. 如果 $\beta = 0$, 进一步假设 $\nu(0, \infty) = \infty$. 固定 $\lambda > 0, t > 0$ 和 $r > 0$.

(1) 如果 $r < \frac{1}{1-\beta}$, 则 $\mathbb{E}[e^{\lambda E_t^r}] < \infty$.

(2) 如果 $r > \frac{1}{1-\beta}$, 则 $\mathbb{E}[e^{\lambda E_t^r}] = \infty$.

引理 2.7. 对于任意给定的 $0 = t_0 < ih < t_1 < t_2 < \dots < t_n < (i+1)h$, 都有:

$$\mathbb{E} \left[\int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 dE(t_1) \dots dE(t_{n-1}) dE(t_n) \right] \leq Ch^{1+(n-1)\beta} \quad (2.7)$$

, 其中 C 是与 h 无关的常数.

证明: 现在, 在 $[0, \infty)$ 上引入随机测度 Π , 定义为 $\Pi((s, t]) = E(t) - E(s)$, 其中 $t > s \geq 0$. 令 $\{C(t)\}_{t \geq 0}$ 为由 Π 驱动的 Cox 过程, 即在条件 $\Pi = \lambda$ 下, $\{C(t)\}$ 的分布与强度为 λ 的非齐次泊松过程等价. 注意, 根据 [26], $\{C(t)\}$ 是具有更新函数的更新过程:

$$u(t) = \mathbb{E}[C(t)] = \mathbb{E}[E(t)] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (2.8)$$

对于更新过程 $C(t)$, 参见 [23], 可以得到

$$\mathbb{E}[dC(t_n) \dots dC(t_1)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i-1}) dt_i$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. 由于 Cox 过程 $C(t)$ 的阶乘矩等于其驱动测度 Π 的普通矩, 参见 [23] 我们得到

$$\mathbb{E}[dE(t_n) \dots dE(t_1)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i-1}) dt_i.$$

因此:

$$\begin{aligned}
 I &= \mathbb{E} \left[\int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 dE(t_1) \dots dE(t_{n-2}) dE(t_{n-1}) dE(t_n) \right] \\
 &= \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 \mathbb{E} [dE(t_1) \dots dE(t_{n-2}) dE(t_{n-1}) dE(t_n)] \\
 &= \frac{\alpha^n}{\Gamma^n(\alpha+1)} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} \prod_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n
 \end{aligned}$$

下面单独考虑积分项:

$$I_1 = \int_{ih}^{t_2} (t_2 - t_1)^{\alpha-1} t_1^{\alpha-1} dt_1$$

做如下变换, 令 $t_1 = ih + s_1 h$, 同时 $t_2 = ih + s_2 h$, 其中 h 是步长, 因此 $s_1, s_2 \in [0, 1]$, 注意由于我们不考虑时间在原点处, 因此这里的 $i = \frac{T}{h}$, 这里的 T 是一个时间范围, 于是

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} h^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} h ds_1 \\
 &= h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} ds_1
 \end{aligned}$$

由于 $(ih + s_1 h)^{\alpha-1}$ 关于 s_1 在 $[0, 1]$ 是单调递减的, 并且积分 I_n 中, 被积函数和积分区域都是正的, 因此

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih)^{\alpha-1} ds_1 \\
 &= T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1
 \end{aligned}$$

令 $w_1 = s_2 - s_1$, 于是

$$I_1 \leq T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1 = T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} w_1^{\alpha-1} dw_1 = \frac{T^{\alpha-1} s_2^\alpha}{\alpha} h^\alpha$$

因此:

$$I \leq Ch^\alpha \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_3} \prod_{i=3}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n$$

同理, 分析如下积分:

$$I_2 = \int_{ih}^{t_3} (t_3 - t_2)^{\alpha-1} dt_2 \leq Ch^\alpha$$

因此:

$$I \leq Ch^{2\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_4} \prod_{i=4}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_3 \dots dt_{n-1} dt_n$$

如此进行迭代, 我们得到:

$$I \leq Ch^{(n-1)\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} 1 dt_1 \leq Ch^{1+(n-1)\alpha}$$

□

第3章 EM 数值方法

3.1 假设和引理

假设 3.1. 在这一章节中, 我们假设 $SDE(2.3)$ 的漂移项系数 f 满足全局 Lipschitz 条件的, 即存在一个常数 $K > 0$, 使得:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \quad (3.1)$$

假设 3.2. 在这一章节中, 我们假设 $SDE(2.3)$ 的漂移项系数 f 满足线性增长条件, 即存在一个常数 $K > 0$, 使得:

$$|f(x)| \leq K(1 + |x|). \quad (3.2)$$

3.2 强收敛性

下面的命题致力于推导 $\sup_{0 \leq r \leq T} |X_r|$ 的 p 阶矩存在的充分条件, 其中 X 是 $SDE(2.3)$ 的解。这些条件对于本论文主要定理的建立是必要的。

命题 3.1. 令 X 是 $SDE(2.3)$ 的解, 其中 f 满足假设 2.1, 假设 3.1 和假设 3.2, 那么对于任意的 $p \geq 1$, 都有 $\mathbb{E}[Y_T^{(p)}] < \infty$, 其中 $Y_t^{(p)} := 1 + \sup_{0 \leq r \leq t} |X_r|^p$.

证明: 设 $S_\ell := \inf\{t \geq 0 : Y_t^{(p)} > \ell\}$, 其中 $\ell \in \mathbb{N}$ 。由于解 X 具有连续的路径, 对每个 $t \geq 0$, $Y_t^{(p)} < \infty$, 因此, 随着 $\ell \rightarrow \infty$, $S_\ell \uparrow \infty$ 。对于 \mathbb{P}_D 几乎处处路径, 我们首先将 Gronwall 型不等式应用于函数 $t \mapsto \mathbb{E}_B[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}]$ 对于固定的 ℓ , 然后令 $t = T$ 并在得到的不等式中让 $\ell \rightarrow \infty$ 来建立 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}]$ 的上界。请注意, 由于 S_ℓ 的定义,

$$\int_0^t \mathbb{E}_B[Y_{r \wedge S_\ell}^{(p)}] dE_r \leq \ell E_t < \infty,$$

这使得我们可以安全地应用 Gronwall 型不等式。

假设 $p \geq 2$, 因为对于 $1 \leq p < 2$ 的结果可以直接通过应用 $p \geq 2$ 时的结果和 Jensen 不等式得到。根据时间变换的 Itô 公式, 有 $X_s^p = x_0^p + J_s + K_s$, 其中

$$J_s := \int_0^s \sigma p X_r^{p-1} dB_{E_r};$$

$$K_s := \int_0^s \left\{ p X_r^{p-1} f(X_r) + \frac{\sigma^2}{2} p(p-1) X_r^{p-2} \right\} dE_r.$$

固定 $t \in [0, T]$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$ 。根据假设 3.2 以及不等式 $(x + y + z)^p \leq c_p(x^p + y^p + z^p)$,

其中 $x, y, z \geq 0$ 且 $c_p = 3^{p-1}$, 有

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |K_s| \right] \leq \left(pc_p K + \frac{1}{2} p(p-1) c_p K^2 \right) \int_0^{t \wedge S_\ell} \mathbb{E}_B[Y_r^{(p)}] dE_r.$$

由于 $(J_s)_{s \geq 0}$ 是一个局部鞅, 应用 BDG 不等式得到

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |J_s| \right] \leq b_1 \mathbb{E}_B \left[\left(\int_0^{t \wedge S_\ell} \sigma^2 p^2 X_r^{2p-2} dE_r \right)^{1/2} \right],$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |J_s| \right] &\leq b_1 \mathbb{E}_B \left[pc_p K \left(Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)} \int_0^{t \wedge S_\ell} Y_r^{(p)} dE_r \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}_B \left[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)} \right] + 2b_1^2 p^2 c_p^2 K^2 \int_0^{t \wedge S_\ell} \mathbb{E}_B[Y_r^{(p)}] dE_r, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由基本不等式 $(ab)^{1/2} \leq a/\lambda + \lambda b$ 导出, 适用于任意 $a, b, \lambda > 0$, 且 $\lambda := 2b_1 pc_p K$. 注意, 对于任意非负过程 $(L_t)_{t \geq 0}$, 都有

$$\int_0^{t \wedge S_\ell} L_r dE_r \leq \int_0^t L_{r \wedge S_\ell} dE_r.$$

确实, 当 $t \leq S_\ell$ 时, 不等式显然成立, 而如果 $t > S_\ell$, 则

$$\int_0^{S_\ell} L_r dE_r + \int_{S_\ell}^t L_{S_\ell} dE_r \geq \int_0^{t \wedge S_\ell} L_r dE_r.$$

因此, 通过上面对 J_s 和 K_s 的估计, 有

$$\mathbb{E}_B[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) + 2K^2 (pc_p K + (p(p-1)c_p/2 + 2b_1^2 p^2 c_p^2)) \int_0^t \mathbb{E}_B[Y_{r \wedge S_\ell}^{(p)}] dE_r,$$

通过应用 Gronwall 型不等式, 得到

$$\mathbb{E}_B[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) e^{2K^2 E_T (pc_p K + (p(p-1)c_p/2 + 2b_1^2 p^2 c_p^2))}.$$

令 $t = T$, 并让 $\ell \rightarrow \infty$, 由于 $\xi(u)$ 不依赖于 ℓ , 并应用单调收敛定理, 可得

$$\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) e^{2K^2 E_T (pc_p K + (p(p-1)c_p/2 + 2b_1^2 p^2 c_p^2))}.$$

对两边取期望 \mathbb{E}_D , 得到 $\mathbb{E}[Y_T^{(p)}] \leq \mathbb{E}[ce^{cE_T}] < \infty$, 这归因于 [22] 中定理 1 的结果。□

回顾一下, 假设 X_t 是一个步长为 $\delta > 0$ 的逼近过程, 如果存在有限的正常数, 使得对于所有足够小的 δ , 有 $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - X_t| \right] \leq C\delta^\eta$, 则我们称 X_t 强收敛于解 $X(t)$ 并且收敛阶数为 η 。

定理 3.1. 对于任意的 $\epsilon > 0$, 令 $\epsilon < T_1 < T_2$, 在假设 2.1, 假设 3.1 和假设 3.2 的条件下, 存在常数 C , 使得下面的不等式成立:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{i=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |X(t_i) - X_{t_i}| \right] \leq C\Delta t^\alpha$$

证明：考虑 SDE (2.3) 在 $[t_i, t_{i+1})$ 的积分：

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s)) dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)). \quad (3.3)$$

由时间变换的变量变换公式 [2], 上式等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(s-))) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)). \quad (3.4)$$

针对于漂移项 $f(X(D(s-)))$, 下面等式恒成立：

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-))) - f(X(D(t_i-))) dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t_i-)}^{D(t-)} df(X(s)) dt. \quad (3.5)$$

由引理 2.3 的时间变换 Itô 公式, 于是 (4.6) 变成

$$\begin{aligned} & \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-))) - f(X(D(t_i-))) dt \\ &= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \left(f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s-))) \right) ds dt \\ & \quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

由 (3.5) 与 (4.7), 以及时间变换的变量变换公式可以得到

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_i-))) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ & \quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \left(f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s-))) \right) ds dt \\ & \quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) dt \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ & \quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t_i)}^{E(t)} \left(f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s-))) \right) ds dE(t) \\ & \quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t_i)}^{E(t)} \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) dE(t) \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ & \quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \left(f(X(s)) f'(X(s)) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \\ & \quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t). \end{aligned}$$

因此

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) + R_i. \quad (3.7)$$

将 R_i 分解成 $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$, 其中:

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t), \\ R_i^{(2)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t). \end{aligned}$$

使用 (3.4) 和 (3.7) 可以得到:

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}} = X(t_i) - X_{t_i} + (f(x(t_i)) - f(x_{t_i}^\delta))\Delta E_i + R_i. \quad (3.8)$$

令 $e_i = X(t_i) - X_{t_i}$, 由假设 3.1 得到:

$$|e_{s+1}| \leq (1 + K\Delta E_s)|e_s| + R_s, \text{ 其中 } s = \lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil. \quad (3.9)$$

由引理 2.4, 可以得到 $|e_n| \leq \sum_{j=\lceil T_1/\Delta t \rceil-1}^{n-1} |R_{j+1}| \prod_{l=j+1}^{n-1} |1 + K\Delta E_l|$, 其中 $n = \lceil T_2/\Delta t \rceil$.

为了估计这个不等式, 我们使用了逆从属过程 $E(t)$ 路径几乎处处 Hölder 连续的事实。具体地, 对于每个 $0 < \beta < 1$, 存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有 t, s (当 $t \neq s$ 时), 有

$$|E(t) - E(s)| \leq C|t - s|^\beta \quad \text{a.s.}$$

其中, β 与 Lévy 过程 $D(t)$ 的稳定指数 α 相关, 通常有 $\beta \leq \alpha$ 。这一 Hölder 连续性表明, 逆过程 $E(t)$ 的增量按照指数 α 的速率衰减, 因此 $E(t)$ 展现出平滑的连续路径。于是,

$$\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=1}^k (1 + K\Delta E_l) \leq \sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=1}^k (1 + C\Delta t^\beta)$$

通过对 Δt 取极限, 于是

$$\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=1}^k (1 + K\Delta E_l) < \infty$$

于是:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |e_k| \right] \leq C \mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}| \leq C \mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}^{(1)}| + C \mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}^{(2)}|. \quad (3.10)$$

由于 f 满足全局 Lipschitz 和线性增长条件, 因此 f 的导数必然是有界的。于是对于第一项, 由命题 3.1 和引理 2.7, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|R_{j+1}^{(1)}|] &= \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \mathbb{E}_B \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \right] \\ &= C \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \mathbb{E}_B [1 + |X(s)|] dE(s) dE(t) \right] \\ &\leq C \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t 1 dE(s) dE(t) \right] \end{aligned}$$

$$\leq C\Delta t^{1+\alpha}.$$

于是:

$$\mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}^{(1)}| = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} |R_{j+1}^{(1)}| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^{1+\alpha} \leq C\Delta t^\alpha. \quad (3.11)$$

对于第二项 $\mathbb{E} \left| \sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^{(2)} \right|$, 通过 BDG 不等式和引理 2.7 可以得到下面的不等式:

$$\mathbb{E}[dB_E dE]^2 = \mathbb{E}[(dB_E)^2 (dE)^2] = \mathbb{E}_D[(dE)^2 \mathbb{E}_B(dB_E)^2] \leq C \mathbb{E}_D[dE]^3 \leq C\Delta t^{1+2\alpha}. \quad (3.12)$$

于是,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|R_{j+1}^{(2)}| \right] &= \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}_B \left[\int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB_{E(s)} \right] dE(t) \right] \\ &\leq C \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{t_i}^t \mathbb{E}_B (\sigma f'(X(s)))^2 dE(s) \right]^{\frac{1}{2}} dE(t) \right] \\ &\leq C \mathbb{E}_D \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{t_i}^t 1 dE(s) \right]^{\frac{1}{2}} dE(t) \\ &\leq C\Delta t^{\frac{1}{2}+\alpha}. \end{aligned}$$

使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 再结合 (3.12) 可以得到:

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^{(2)} \right| \leq C \mathbb{E} \left| \sum_{j=0}^{n-1} (R_{j+1}^{(2)})^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} (R_{j+1}^{(2)})^2} \leq C \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^{1+2\alpha}} \leq C\Delta t^\alpha.$$

综上所述,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |e_k| \right] \leq C\Delta t^\alpha.$$

□

3.3 数值模拟

3.3.1 模拟 $D(s)$ 和 $E(t)$

设定等距步长 $\delta \in (0, 1)$ 及时间区间 $T > 0$. 为了在区间 $[0, T]$ 上逼近逆从属过程 E , 我们遵循 [3] 中提出的方法. 具体来说, 首先通过模拟具有独立且平稳增量的从属过程 D 的样本路径来进行逼近. 设定 $D_0 = 0$, 然后遵循规则 $D_{i\delta} := D_{(i-1)\delta} + Z_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 其中 $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为独立同分布的序列, 且 $Z_i \stackrel{d}{=} D_\delta$. 我们在找到整数 N 使得 $T \in [D_N\delta, D_{(N+1)\delta})$ 时停止该过程. 请注意, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 值的随机变量 N 确实存在, 因为 $D_t \rightarrow \infty$ 随着 $t \rightarrow \infty$ 几乎必然成立. 可以通过下面的算法生成

随机变量 $\{Z_i\}$,

$$Z(i) = \delta^{1/\alpha} \xi_i$$

其中 ξ_i 是独立同分布的完全偏斜的 α 稳定随机变量, ξ_i 的实现过程如下:

$$\xi_i = \frac{\sin(\alpha(V + c_1))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + c_1))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

其中 $c_1 = \frac{\pi}{2}$, 随机变量 V 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布, W 是均值为 1 的指数分布. 然后, 令

$$E_t^\delta := (\min\{n \in \mathbb{N}; D_{n\delta} > t\} - 1) \delta, \quad t \in [0, T].$$

过程 $E^\delta = (E_t^\delta)_{t \geq 0}$ 的样本路径是具有恒定跳跃大小 δ 的单调递增阶梯函数, 第 i 个等待时间为 $Z_i = D_{i\delta} - D_{(i-1)\delta}$. 过程 E^δ 有效地逼近 E ; 实际上, 几乎必然地,

$$E_t - \delta \leq E_t^\delta \leq E_t \quad \text{对于所有 } t \in [0, T].$$

在 [22] 中对 ΔE 的处理时, t 每次跳 $D_{n\delta} - D_{(n-1)\delta}$, 于是 E 每次对应改变 δ . 然而, 在我们的离散格式中, 选择对 t 做等距离散, 让 t 每次跳跃的长度是固定的长度 h , 于是 E 在第 i 次跳跃对应的变化就是 $E_{ih} - E_{(i-1)h}$, 这样的离散会导致出现 $\Delta E = 0$, 这是得到收敛阶是 α 的关键.

3.3.2 时间变换的 OU 过程

例 3.1. 考虑时间变换的的布朗运动驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程

$$dX(t) = \mu X(t) dE_t + \sigma dB_{E_t}. \quad (3.13)$$

该方程对应的 EM 数值格式是:

$$X_{i+1} = (1 + \mu \Delta E_i) X_i + \sigma \Delta B_{E_i}$$

在 (3.13) 中, 对 $X(t)$ 做变量变换, 令 $Y(t) = e^{-\mu t} X(t)$, 并应用时间变换 Itô 公式, 可以得到 (3.13) 的解为

$$X(t) = e^{\mu E(t)} X(0) + \sigma e^{\mu E(t)} \int_0^t e^{-\mu E(s)} dB_{E(s)}. \quad (3.14)$$

要想使假设 2.1 成立, 只需要 $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$ 成立即可, 从 [22] 的定理 1 和 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X(t)| &= \mathbb{E}[e^{\mu E(t)} X(0)] + \mathbb{E}\left[\sigma e^{\mu E(t)} \int_0^t e^{-\mu E(s)} dB_{E(s)}\right] \\ &\leq (\mathbb{E}[e^{2\mu E(t)}] \mathbb{E}[X(0)^2])^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}[\sigma^2 e^{2\mu E(t)}] \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-2\mu E(s)} dE(s)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C + C \left(\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-2\mu E(s)} dE(s)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq C + C (\mathbb{E}[E(t)])^{\frac{1}{2}}$$

$$< \infty$$

因此 (3.13) 满足定理 4.1 的假设条件. 在我们的数值实验中, 我们关注端点 $T = 1$ 处的 L_1 误差, 因此我们令

$$e_T^i = \mathbb{E} |X_T^{\delta_4} - X_T^{\delta_i}|,$$

其中 $X_T^{\delta_i}$ 是步长为 δ_i 时 T 处的模拟值, $\delta_i = 10^{-i}$, 对于我们的数值实验, 我们设 $\mu = 1, \sigma = 1$, 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10^3} |X_T^{\delta_5} - X_T^{\delta_i}|.$$

选择步长为 2^{-14} 作为参考, 通过 $2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, 2^{-9}$ 的步长来估计 L_1 误差. 下表为取不同 α 时, 收敛阶和误差之间的对比

α	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
收敛阶 (非等距)	0.9937	1.0345	1.0195	1.0204	1.0261	1.0318	1.0283	1.0281
收敛阶 (等距)	—	—	—	0.5932	0.7074	0.7890	0.9085	0.9908

表 3.1 不同 α 对应的收敛率和误差

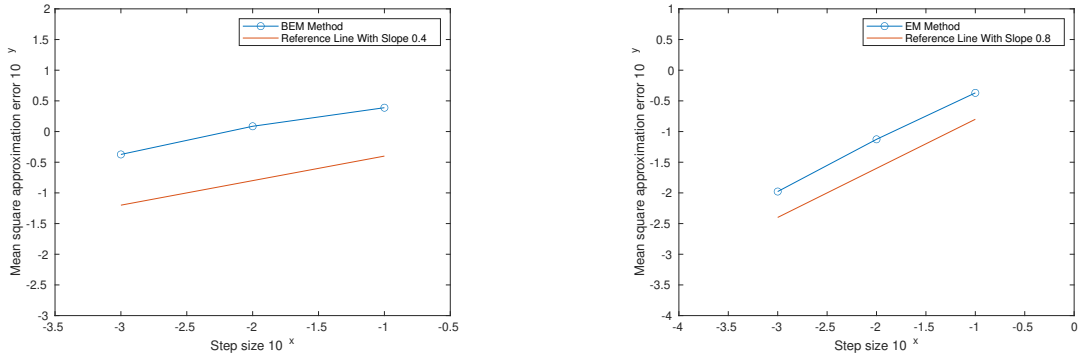


图 3.1 EM 方法的 L_1 误差, 左图为 $\alpha = 0.4$, 右图为 $\alpha = 0.8$

3.4 非等距的离散格式

3.5 1 阶的 EM 全部写在这里

假设 3.3. 假设下面不等式成立: $|f(x)f'(x)| + |\sigma f'(x)| + |\sigma f''(x)| \leq K(1 + |x|)$;

定理 3.2. 设 X 为随机微分方程 (3.1) 的解, 假设条件 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 和 \mathcal{H}_4 满足. 设 X^δ 为在 (4.3)–(4.4) 中定义的 Euler-Maruyama 型近似过程. 则存在与 δ 无关的常数

$C > 0$, 使得对所有 $\delta \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^\delta| \right] \leq C\delta$$

因此, X^δ 在 $[0, T]$ 上以 1 阶一致强收敛于 X 。

证明: 利用 (3.1) 并通过 Itô 公式展开 dE_r 积分的被积函数,

$$\begin{aligned} X_{\tau_{n+1}} &= X_{\tau_n} + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} f(X_{\tau_n}) dE_r + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \sigma dB_{E_r} + R_{(\tau_n, \tau_{n+1})}; \\ R_{(a,b)} &:= \int_a^b \int_a^s \left(f(X_{\tau_{n_r}}) f'(X_{\tau_{n_r}}) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X_{\tau_{n_r}}) \right) dE_r dE_s + \int_a^b \int_a^s \sigma f'(X_{\tau_{n_r}}) dB_{E_r} dE_s, \end{aligned}$$

因此: $Z_t := \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X_s^\delta| \leq I_1 + I_2$, 其中

$$\begin{aligned} I_1 &:= \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s F(X_{\tau_{n_r}}) - F(X_{\tau_{n_r}}^\delta) dE_r \right|; \\ I_2 &:= \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \sum_{i=0}^{n_s-1} R_{(\tau_i, \tau_{i+1})} + R_{(\tau_{n_s}, s)} \right|. \end{aligned}$$

很容易观察到

$$\mathbb{E}_B[I_1] \leq C \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_r] dE_r. \quad (3.15)$$

主要的技术部分涉及余项 I_2 , 其中包含两个不同的双重积分: $dE_{r_1} dE_{r_2}$ 和 $dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}$ 。我们将在下面逐一处理这些积分。

对于第一个积分 $dE_{r_1} dE_{r_2}$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \int_{\tau_{n_2}}^{\tau_2} f f' + \frac{\sigma^2}{2} f'' dE_{r_1} dE_{r_2} \right| \right] \\ &\leq \frac{3}{2} K \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \int_0^t \int_{\tau_{n_{r_2}}}^{\tau_2} dE_{r_1} dE_{r_2} \\ &\leq \frac{3}{2} K E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \delta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

另一方面, 我们需要估计 $\mathbb{E}_B [\sup_{0 \leq s \leq t} |M_{n_s} + U_s|]$, 其中 $M_0 := 0$, 对于 $n \geq 1$, $M_n := \sum_{i=0}^{n-1} L_i$,

$$L_i := \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \int_{\tau_i}^{\tau_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}, \quad U_s := \int_{\tau_{n_s}}^s \int_{\tau_{n_s}}^{\tau_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}.$$

我们首先验证随机积分 $L_i, i = 0, 1, \dots, n_t - 1$ 关于 \mathbb{P}_B 是不相关的。令 $i < j$, 因此 $\tau_{i+1} \leq \tau_j$ 。观察到 $\mathbb{E}_B[L_i L_j] = \mathbb{E}_B[L_i \mathbb{E}_B[L_j | \mathcal{F}_{E_{r_j}}]]$ 。根据假设和估计 (3.4),

$$\mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left| \int_{\tau_j}^{r_2} F_x G(X_{r_1}) dB_{E_{r_1}} \right|^2 dE_{r_2} \right] \leq \delta^2 K^2 \mathbb{E}_B[Y_t^{(2)}] < \infty.$$

因此, $\mathbb{E}_B [L_j | \mathcal{F}_{E_{\tau_j}}] = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_j}^{r_2} F_x G(X_{r_1}) dB_{E_{r_1}} | \mathcal{F}_{E_{\tau_j}} \right] dE_{r_2} = 0$, 这是由于条件 Fubini 定理 (参考文献 [26] 中的定理 27.17) 和鞅性质, 从而得到不相关性。另一方面, 由于 E 具有连续路径, 变量变换公式 (参考文献 [13] 中的定理 3.1) 表明 M_n 可以表示为

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\delta}^{(i+1)\delta} \int_{i\delta}^{E_{r_2}} \sigma f' dB_{r_1} dr_2$$

该表示式, 以及参考文献 [12] 中引理 5.7.1 和 10.8.1 的证明, 表明离散时间过程 $(M_n)_{n \geq 0}$ 是一个平方可积的 $((\mathcal{F}_{n\delta})_{n \geq 0}, \mathbb{P}_B)$ -鞅, 初始值为 0。因此, 由 BDG 不等式 (3.2) 和 L_i 的不相关性,

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M_{n_s}^2 \right] \leq b_2 \sum_{i=0}^{n_t-1} \mathbb{E}_B[L_i^2]$$

因此, 由 Cauchy-Schwartz 不等式,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M_{n_s}^2 \right] &\leq b_2 \delta \sum_{i=0}^{n_t-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_i}^{r_2} |\sigma f'|^2 dE_{r_1} \right] dE_{r_2} \\ &\leq 2b_2 \delta K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \sum_{i=0}^{n_t-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (E_{r_2} - E_{\tau_i}) dE_{r_2} \\ &\leq 2b_2 E_T K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} U_s^2 \right] &\leq \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} (E_s - E_{\tau_{n_s}}) \int_{\tau_{n_s}}^s \left| \int_{\tau_{n_s}}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 dE_{r_2} \right] \\ &\leq \delta \int_0^t \mathbb{E}_B \left[\sup_{s \in [r_2, t]} \left| \int_{\tau_{n_s}}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 \right] dE_{r_2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

由于 $\{(\tau_{n_s}, r_2) : r_2 \leq s \leq t\} \subset \{(\tau_{n_{r_2}}, u) : \tau_{n_{r_2}} \leq u \leq r_2\}$, 于是

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_B \left[\sup_{S \in [r_2, t]} \left| \int_{\tau_x}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E}_B \left[\sup_{u \in [\tau_{n_{r_2}}, r_2]} \left| \int_{\tau_{n_{r_2}}}^u \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 \right] \\ &\leq b_2 \mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_{n_{r_2}}}^{r_2} |\sigma f'|^2 dE_{r_1} \right] \end{aligned}$$

$$\leq 2b_2 K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta.$$

因此, (4.29) 的上界为 $2b_2 E_T K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta^2$. 将其与 (4.28) 结合得:

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |M_{n_s} + U_s|^2 \right] \leq 8b_2 E_T K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta^2. \quad (3.19)$$

根据估计 (4.27) 和 (4.30),

$$\mathbb{E}_B[I_2] \leq \left\{ \frac{3}{2} E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] + (8b_2 E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}])^{1/2} \right\} K \delta. \quad (3.20)$$

现在, 将 (4.26) 和 (4.31) 与 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \leq \sqrt{2} \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}$ 结合得:

$$\mathbb{E}_B[Z_t] \leq \xi_2(E_T) \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2} \delta + K \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_r] dE_r.$$

其中 $\xi_2(u) := K(\frac{3\sqrt{2}}{2}u + (8b_2 u)^{1/2})$. 应用 Gronwall 类型不等式, 对两边取 \mathbb{E}_D 并使用 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$\mathbb{E}[Z_T] \leq \mathbb{E}[\xi_2^4(E_T)]^{1/4} \mathbb{E}[(Y_T^{(2)})^2]^{1/4} \mathbb{E}[e^{2KE_T}]^{1/2} \delta.$$

由于对于任意的 $\lambda > 0, t > 0, n > 0$, 都有 $\mathbb{E}[e^{\lambda E_t}] < \infty$, 以及 $\mathbb{E}[E^n(t)] < \infty$, 再结合命题 3.1, 于是可以得到该定理成立.

□

第4章 BEM 数值方法

4.1 假设和引理

假设 4.1. 在这一章节中, 我们令 $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, 并且假设时间变换的 $SDE(2.3)$ 在 $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ 有唯一强解, 即:

$$\mathbb{P}(x(t) \in (\alpha, \beta), t \geq 0) = 1.$$

假设 4.2. 在这一章节中, 我们令 $c \in [-\infty, +\infty)$, $I = (c, +\infty)$, $d \in I$ 是区间中任意的一点, 并且假设 $SDE(2.3)$ 的漂移项系数 f 满足下述单调性:

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I, x \leq y, f(y) - f(x) \leq K(y - x). \quad (4.1)$$

假设 4.3. 在这一章节中, 我们假设 $SDE(2.3)$ 的漂移项系数 f 满足线性增长条件, 即存在一个常数 $K > 0$, 使得:

$$|f(x)| \leq K(1 + |x|). \quad (4.2)$$

对于 $SDE(2.3)$ 在漂移项系数 f 在单调条件下, 解的存在唯一性的证明可以参考 [24] 中漂移性满足全局 Lipschitz 条件的证明.

4.2 强收敛性

对于随机微分方程 (2.3), 它的 BEM 数值格式是:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_{i+1}})\Delta E_i + \sigma\Delta B_{E_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad X_0 = X(0) \quad (4.3)$$

其中 $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$ 以及 $\Delta B_{E_i} = B(E(t_{i+1})) - B(E(t_i))$.

定理 4.1. 对于任意的 $\epsilon > 0$, 令 $\epsilon < T_1 < T_2$, 在假设 2.1, 假设 4.1, 假设 4.2 和假设 4.3 的条件下, 存在常数 C , 使得下面的不等式成立:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{i=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |X(t_i) - X_{t_i}| \right] \leq C\Delta t^\alpha.$$

证明: 由于第一变量变换和第二变量变换公式引理 2.1, 引理 2.2 的成立, 使得我们可以考虑 (2.3) 在 $[t_i, t_{i+1})$ 的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s))dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)) \quad (4.4)$$

等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} f(X(D(s-)))ds + \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} \sigma dB(s) \quad (4.5)$$

针对于漂移项 $f(X(D(s-)))$, 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-))) - f(X(D(t-))) dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t-)}^{D(t_{i+1}-)} df(X(s)) dt \quad (4.6)$$

对于 $df(X(s))$, 由引理 2.3 的时间变换 Itô 公式:

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(0) &= \int_0^{E(t)} f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X(D(s-))) ds \\ &\quad + \int_0^{E(t)} \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) \end{aligned}$$

于是 (4.6) 变成

$$\begin{aligned} &\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-))) - f(X(D(t-))) dt \\ &= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(D(s))) f'(X(D(s))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds dt \quad (4.7) \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s))) dB(s) dt. \end{aligned}$$

由 (2.3) 与 (4.7), 以及 [2, Theorem 3.1] 可以得到

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}))) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(D(s))) f'(X(D(s))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds dt \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s))) dB(s) dt \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \left(f(X(D(s))) f'(X(D(s))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds dE(t) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \sigma f'(X(D(s))) dB(s) dE(t) \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(s)) f'(X(s)) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \end{aligned}$$

因此

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_{i+1})) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) + R_i \quad (4.8)$$

其中

$$\begin{aligned} R_i = & - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \\ & - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \end{aligned}$$

将 R_i 分解成 $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$, 其中:

$$\begin{aligned} R_s^{(1)} = & - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t). \\ R_s^{(2)} = & - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \end{aligned}$$

和离散格式相减, 即 (4.8)-(4.3) 得到:

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}} = X(t_i) - X_{t_i} + (f(X(t_{i+1})) - f(X_{t_{i+1}}))\Delta E_i + R_i \quad (4.9)$$

令 $e_i = X(t_i) - X_{t_i}$ 由假设 4.2 得到:

$$(1 - K_1 \Delta E_s) e_{s+1} \leq e(s) + R_s, \quad \text{其中 } s = \lceil T_1/\Delta t \rceil, \lceil T_1/\Delta t \rceil + 1 \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil \quad (4.10)$$

定义 $\gamma_l = 1 - K_1 \Delta E_l$, $N_1 = \lceil T_1/\Delta t \rceil$ 以及 $N_2 = \lceil T_2/\Delta t \rceil$, 在 [21], 我么可以得到对于离散后的随机过程 E_t , 存在与 Δt 无关的 C 使得 $\Delta E_t \leq C\Delta t$, 所以

$$\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=N_1}^k \gamma_l^{-1} < \sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=N_1}^k (1 - C\Delta t)^{-1} \quad (4.11)$$

通过对 Δt 取极限, 于是

$$\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=N_1}^k \gamma_l^{-1} < \infty$$

由引理 2.4 结合 (4.11), 我们可以得到

$$\mathbb{E} \left[\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |e_k| \right] \leq C \mathbb{E} \sum_{j=N_1}^{N_2} |R_j^{(1)}| + C \mathbb{E} \sum_{j=N_1}^{N_2} |R_j^{(2)}|.$$

由于 f 满足单调条件和超线性增长条件, 因此 f 的导数在有限区间必然是有界的. 于是对于第一项, 由命题 3.1 和引理 2.7 可以推导出类似的性质和引理, 于是可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|R_{j+1}^{(1)}|] &= \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^t \mathbb{E}_B \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \right] \\ &= C \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^t \mathbb{E}_B [1 + |X(s)|^a] dE(s) dE(t) \right] \\ &\leq C \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^t 1 dE(s) dE(t) \right] \\ &\leq C \Delta t^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{N_1}^{N_2} \mathbb{E} \left| R_j^{(1)} \right| \leq C \sum_{j=N_1}^{N_2} \Delta t^{1+\alpha} \leq C \Delta t^\alpha \quad (4.12)$$

因为

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[R_k^{(2)} | \mathcal{F}_{k\Delta t} \right] &= \mathbb{E}_D \mathbb{E}_B \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \right] \\ &= \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}_B \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)}$$

是鞅. 我们知道由 **BDG** 不等式和引理 2.7 可以得到:

$$\mathbb{E}[dB_E dE]^2 = \mathbb{E}[(dB_E)^2 (dE)^2] = \mathbb{E}_D[(dE)^2 \mathbb{E}_B(dB_E)^2] \leq C \mathbb{E}_D[dE]^3 \leq C \Delta t^{1+2\alpha}$$

于是对于第二项,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|R_{j+1}^{(2)}| \right] &= \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}_B \left[\int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB_{E(s)} \right] dE(t) \right] \\ &\leq C \mathbb{E}_D \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{t_i}^t \mathbb{E}_B (\sigma f'(X(s)))^2 dE(s) \right]^{\frac{1}{2}} dE(t) \right] \\ &\leq C \mathbb{E}_D \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{t_i}^t 1 dE(s) \right]^{\frac{1}{2}} dE(t) \\ &\leq C \Delta t^{\frac{1}{2}+\alpha}. \end{aligned}$$

由 **BDG** 不等式和 **Cauchy-Schwarz** 不等式, 可以得到:

$$\mathbb{E} \sum_{j=N_1}^{N_2} \left| R_j^{(2)} \right| \leq C \mathbb{E} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} (R_j^{(2)})^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\sum_{j=N_1}^{N_2} \mathbb{E} (R_j^{(2)})^2} \leq C \sqrt{\sum_{j=N_1}^{N_2} \Delta t^{1+2\alpha}} \leq C \Delta t^\alpha$$

综上所述,

$$\mathbb{E}[e_n] \leq C \Delta t^\alpha$$

□

4.3 数值模拟

例 4.1. 考虑时间变换的的布朗运动驱动的 *CIR* 过程

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma\sqrt{y(t)}dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) > 0. \quad (4.13)$$

如果 $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, 那么 $D = (0, \infty)$ 并且假设 4.1 在 $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ 是成立的. 另外, 使用 Itô 公式 $X(t) = F(y(t))$, 其中 F 是由 (2.2) 定义, 即对时间变换的 CIR 过程进行 Lamperti 变换可以得到

$$dX(t) = f(X(t))dE(t) + \frac{1}{2}\sigma dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \sqrt{y(0)} \quad (4.14)$$

其中

$$f(X) = \frac{1}{2}\kappa(\theta_v X^{-1} - X), \quad X > 0 \quad (4.15)$$

其中 $\theta_v = \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa}$, 并且 BEM 数值格式如下

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_{i+1}})\Delta E_i + \frac{1}{2}\sigma\Delta B_{E_i}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.16)$$

观察到

$$f'(X) = -\frac{1}{2}\kappa(\theta_v X^{-2} + 1) \quad (4.17)$$

以及

$$f(X)f'(X) + \frac{\sigma^2}{2}f''(X) = -\frac{\kappa^2}{4}(\theta_v^2 X^{-3} - X) + \frac{1}{2}\kappa\theta_v X^{-3}\sigma^2. \quad (4.18)$$

因此为了满足假设 2.1, 只需要满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X(t)^{-3}] = \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[y(t)^{-\frac{3}{2}}] < \infty. \quad (4.19)$$

对于时间变换的 CIR 过程 $y(t)$ 的矩有界, 即

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[y(t)^q] < \infty \quad \text{for } q > -\frac{2k\theta}{\sigma^2}, \quad (4.20)$$

下面验证, 对于由时间变换的的布朗运动驱动的 CIR 过程 (4.13) 的精确解矩有界.

命题 4.1. 对于由时间变换的布朗运动驱动的 CIR 过程 (4.13), 其中 $y_0 > 0, 1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$, 都存在一个常数 C 使得

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[(y(t))^{-p}] \leq C(1 + y(0)^{-p})$$

证明: 定义停时 $\tau_n = \inf\{0 < s \leq T; y(s) \leq 1/n\}$, 通过 Itô 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B[(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] &= y(0)^{-p} - p\mathbb{E}_B\left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{K(\theta - y(s))}{(y(s))^{p+1}} dE(s)\right] \\ &\quad + p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}\mathbb{E}_B\left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{1}{(y(s))^{p+1}} dE(s)\right] \\ &\leq y(0)^{-p} + pK \int_0^t \mathbb{E}_B\left(\frac{1}{(y(s \wedge \tau_n))^p}\right) dE(s) \\ &\quad + \mathbb{E}_B\left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{p\left(\frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta\right)}{(y(s))^{p+1}} dE(s)\right] \end{aligned}$$

通过计算可以找到正数 \underline{C} 使得, 当 $\frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta < 0$ 时, 对于任意的 $y(0) = x > 0$, 都有

$$\frac{p \left(\frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta \right)}{x^{p+1}} \leq \underline{C}$$

因此

$$\mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq y(0)^{-p} + \underline{C}E(T) + pK \int_0^t \sup_{r \in [0, s]} \mathbb{E}_B [(y(r \wedge \tau_n))^{-p}] dE(s)$$

于是由 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq (y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))$$

两边同时取 \mathbb{E}_D 并使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] &\leq \mathbb{E} [(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} [(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T))^2] \mathbb{E} [\exp(2pKE(T))]} \end{aligned}$$

从 [4] 可以得到

$$\mathbb{E}[E^n(t)] = \frac{n!}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha} \quad (4.21)$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda E(t)}] < \infty \quad (4.22)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}, t > 0$. 最后, 让 $n \rightarrow +\infty$, 我们完成了这个证明. \square

注 4.1. 在这里只是证明了当 $1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$ 的时候, 矩的存在性, 实际上更可以证明 $p < \frac{2K\theta}{\sigma^2}$, 但是证明起来过于复杂, 这里就不在说明, 对于我们的结果已经够用了.

对于假设 2.1, 可以验证只需要保证 $1 < \frac{4K\theta}{3\sigma^2}$ 成立即可, 而这个区间可以被 $1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$ 包含在内, 因此只需要保证 p 在后者这个区间即可. 至于假设 4.2, 在 $(0, \infty)$ 中很容易可以验证存在这样的 κ 使之成立. 因此由定理 4.1 可以得到, 对于时间变换的 CIR 过程, 使用 BEM 数值格式的强收敛阶是 α .

在我们的数值实验中, 我们关注端点 $T = 1$ 处的 L_1 误差, 因此我们令

$$e_T^i = \mathbb{E} |X_T^{\delta_{15}} - X_T^{\delta_i}|$$

其中 $X_T^{\delta_i}$ 是步长为 δ_i 时 T 处的模拟值, $\delta_i = 2^{-i}$, 对于我们的数值实验, 取 $\theta = 0.125, \kappa = 2$ 以及 $\sigma = 0.5$, 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10^3} |X_T^{\delta_{15}} - X_T^{\delta_i}|.$$

选择步长为 2^{-15} 作为参考, 通过 $2^{-11}, 2^{-10}, 2^{-9}, 2^{-8}$ 的步长来估计 L_1 误差.

例 4.2. 考虑时间变换的的布朗运动驱动的 CEV 过程

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma y(t)^\alpha dB_{E(t)} \quad (4.23)$$

其中 $0.5 < \alpha < 1, \kappa, \theta, \sigma > 0$. 通过变换 $X(t) = F(y(t))$ 的变换之后, 其中 F 是由 (2.2) 定义, 我们可以得到假设 4.2 在 $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ 下, 是成立的, 此时

$$dX(t) = f(X(t))dE(t) + (1 - \alpha)\sigma dB(E(t))$$

其中

$$f(X) = (1 - \alpha) \left(\kappa \theta X^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \kappa X - \frac{\alpha \sigma^2}{2} X^{-1} \right), \quad X > 0.$$

同时我们需要验证另一个假设 2.1. 因为 $\alpha > 0.5$, 于是 $\frac{1}{1-\alpha} > 2$, 因此

$$f'(X) = -\alpha \kappa \theta X^{-\frac{1}{1-\alpha}} - (1 - \alpha)\kappa + (1 - \alpha) \frac{\alpha \sigma^2}{2} X^{-2}, \quad X > 0$$

同时我们又有

$$f''(X) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \kappa \theta X^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - (1 - \alpha) \alpha \sigma^2 X^{-3}.$$

下面验证, 对于由时间变换的的布朗运动驱动的 CEV 过程 (4.23) 的精确解矩有界.

命题 4.2. 对于由时间变换的布朗运动驱动的 CEV 过程 (4.23), 其中 $X_0 > 0$, 对于任意的 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 和任意的 $p > 0$, 都存在一个常数 C 使得

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [(y(t))^{-p}] \leq C(1 + y(0)^{-p})$$

证明: 定义停时 $\tau_n = \inf\{0 < s \leq T; y(s) \leq 1/n\}$, 通过 Itô 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] &= y(0)^{-p} - p \mathbb{E}_B \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{K(\theta - y(s))}{(y(s))^{p+1}} dE(s) \right] \\ &\quad + p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E}_B \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{1}{(y(s))^{p+2(1-\alpha)}} dE(s) \right] \\ &\leq y(0)^{-p} + pK \int_0^t \mathbb{E}_B \left(\frac{1}{(y(s \wedge \tau_n))^p} \right) dE(s) \\ &\quad + \mathbb{E}_B \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \left(p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{(y(s))^{p+2(1-\alpha)}} - p \frac{K\theta}{(y(s))^{p+1}} \right) dE(s) \right] \end{aligned}$$

可以找到正数 C 使得, 对于任意的 $y(0) = x > 0$, 都有

$$\left(p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{x^{p+2(1-\alpha)}} - p \frac{K\theta}{x^{p+1}} \right) \leq C$$

通过计算可以得到, $\underline{C} = p(2\alpha - 1) \frac{\sigma^2}{2} \left[(p+2(1-\alpha)) \frac{\sigma^2}{2K\theta} \right]^{\frac{p+2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$ 是最小的上界. 因此

$$\mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq y(0)^{-p} + \underline{C}E(T) + pK \int_0^t \sup_{r \in [0, s]} \mathbb{E}_B [(y(r \wedge \tau_n))^{-p}] dE(s)$$

于是由 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq (y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))$$

两边同时取 \mathbb{E}_D 并使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [(y(t \wedge \tau_n)^x)^{-p}] &\leq \mathbb{E} [(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} [(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T))^2] \mathbb{E} [\exp(2pKE(T))]} \end{aligned}$$

从 [4] 可以得到

$$\mathbb{E}[E^n(t)] = \frac{n!}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha} \quad (4.24)$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda E(t)}] < \infty \quad (4.25)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}, t > 0$. 最后, 让 $n \rightarrow +\infty$, 我们完成了这个证明. \square

由 Lamperti 变换可知, $X(t)$ 的逆阶矩可以 $y(t)$ 的逆阶矩控制, 于是假设 2.1 成立. 因此根据定理 4.1 可以得到由时间变换布朗运动驱动的 CEV 过程的收敛阶是 α

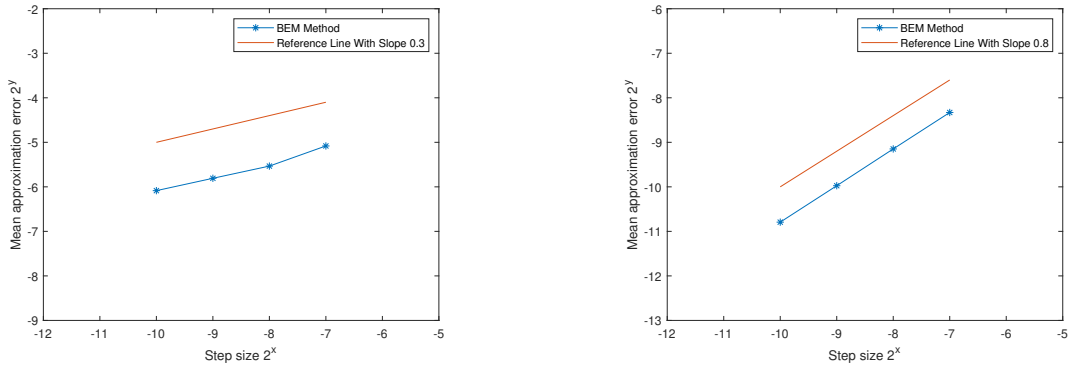


图 4.1 时间变换 CIR 过程的数值解与解析解之间的绝对误差估计. 左图是 $\alpha = 0.3$, 右图是 $\alpha = 0.8$

4.4 关于 1 阶的写在这里

假设 4.4. 假设下面不等式成立: $|f'f(x)| + |\sigma f'| + |\sigma F''| \leq K(1 + |x|)$;

定理 4.2. 设 X 为随机微分方程 (3.1) 的解, 假设条件 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 和 \mathcal{H}_4 满足. 设 X^δ 为在 (4.3)–(4.4) 中定义的 Euler-Maruyama 型近似过程. 则存在与 δ 无关的常数 $C > 0$, 使得对所有 $\delta \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^\delta| \right] \leq C\delta$$

因此, X^δ 在 $[0, T]$ 上以 1 阶一致强收敛于 X .

证明: 利用 (3.1) 并通过 Itô 公式展开 dE_r 积分的被积函数,

$$\begin{aligned}
 X_{\tau_{n+1}} &= X_{\tau_n} + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} f(X_{\tau_n}) dE_r + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \sigma dB_{E_r} + R_{(\tau_n, \tau_{n+1})}; \\
 R_{(a,b)} &:= \int_a^b \int_a^{r_2} \left(f(X_{\tau_{nr_1}}) f'(X_{\tau_{nr_1}}) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X_{\tau_{nr_1}}) \right) dE_{r_1} dE_{r_2} + \int_a^b \int_a^{r_2} \sigma f'(X_{\tau_{nr_1}}) dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}, \\
 \text{因此: } Z_t &:= \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X_s^\delta| \leq I_1 + I_2, \text{ 其中}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s F(X_{\tau_{nr}}) - F(X_{\tau_{nr}}^\delta) dE_r \right|; \\
 I_2 &:= \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \sum_{i=0}^{n_s-1} R_{(\tau_i, \tau_{i+1})} + R_{(\tau_{n_s}, s)} \right|.
 \end{aligned}$$

很容易观察到

$$\mathbb{E}_B[I_1] \leq C \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_r] dE_r. \quad (4.26)$$

主要的技术部分涉及余项 I_2 ，其中包含两个不同的双重积分： $dE_{r_1} dE_{r_2}$ 和 $dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}$ 。我们将在下面逐一处理这些积分。

对于第一个积分 $dE_{r_1} dE_{r_2}$,

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \int_{\tau_{n_2}}^{r_2} f f' + \frac{\sigma^2}{2} f'' dE_{r_1} dE_{r_2} \right| \right] \\
 &\leq \frac{3}{2} K \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \int_0^t \int_{\tau_{nr_2}}^{r_2} dE_{r_1} dE_{r_2} \\
 &\leq \frac{3}{2} K E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \delta.
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

另一方面，我们需要估计 $\mathbb{E}_B [\sup_{0 \leq s \leq t} |M_{n_s} + U_s|]$ ，其中 $M_0 := 0$ ，对于 $n \geq 1$ ， $M_n := \sum_{i=0}^{n-1} L_i$ ，

$$L_i := \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \int_{\tau_i}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}, \quad U_s := \int_{\tau_{n_s}}^s \int_{\tau_{n_s}}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} dE_{r_2}.$$

我们首先验证随机积分 $L_i, i = 0, 1, \dots, n_t - 1$ 关于 \mathbb{P}_B 是不相关的。令 $i < j$ ，因此 $\tau_{i+1} \leq \tau_j$ 。观察到 $\mathbb{E}_B[L_i L_j] = \mathbb{E}_B[L_i \mathbb{E}_B[L_j | \mathcal{F}_{E_{\tau_j}}]]$ 。根据假设和估计 (3.4)，

$$\mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left| \int_{\tau_j}^{r_2} F_x G(X_{r_1}) dB_{E_{r_1}} \right|^2 dE_{r_2} \right] \leq \delta^2 K^2 \mathbb{E}_B[Y_t^{(2)}] < \infty.$$

因此， $\mathbb{E}_B[L_j | \mathcal{F}_{E_{\tau_j}}] = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_j}^{r_2} F_x G(X_{r_1}) dB_{E_{r_1}} | \mathcal{F}_{E_{\tau_j}} \right] dE_{r_2} = 0$ ，这是由于条件 Fubini 定理（参考文献 [26] 中的定理 27.17）和鞅性质，从而得到不相关性。另一方面，由于 E 具有连续路径，变量变换公式（参考文献 [13] 中的定理 3.1）表明 M_n 可以表示为

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\delta}^{(i+1)\delta} \int_{i\delta}^{E_{r_2}} \sigma f' dB_{r_1} dr_2$$

该表示式，以及参考文献 [12] 中引理 5.7.1 和 10.8.1 的证明，表明离散时间过程 $(M_n)_{n \geq 0}$ 是一个平方可积的 $((\mathcal{F}_{n\delta})_{n \geq 0}, \mathbb{P}_B)$ -鞅，初始值为 0。因此，由 BDG 不等式 (3.2) 和 L_i 的不相关性，

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M_{n_s}^2 \right] \leq b_2 \sum_{i=0}^{n_t-1} \mathbb{E}_B[L_i^2]$$

因此，由 Cauchy-Schwartz 不等式，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} M_{n_s}^2 \right] &\leq b_2 \delta \sum_{i=0}^{n_t-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_i}^{r_2} |\sigma f'|^2 dE_{r_1} \right] dE_{r_2} \\ &\leq 2b_2 \delta K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \sum_{i=0}^{n_t-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (E_{r_2} - E_{\tau_i}) dE_{r_2} \\ &\leq 2b_2 E_T K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} U_s^2 \right] &\leq \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} (E_s - E_{\tau_{n_s}}) \int_{\tau_{n_s}}^s \left| \int_{\tau_{n_s}}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 dE_{r_2} \right] \\ &\leq \delta \int_0^t \mathbb{E}_B \left[\sup_{s \in [r_2, t]} \left| \int_{\tau_{n_s}}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 \right] dE_{r_2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

由于 $\{(\tau_{n_s}, r_2) : r_2 \leq s \leq t\} \subset \{(\tau_{n_{r_2}}, u) : \tau_{n_{r_2}} \leq u \leq r_2\}$ ，于是

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_B \left[\sup_{S \in [r_2, t]} \left| \int_{\tau_x}^{r_2} \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E}_B \left[\sup_{u \in [\tau_{n_{r_2}}, r_2]} \left| \int_{\tau_{n_{r_2}}}^u \sigma f' dB_{E_{r_1}} \right|^2 \right] \\ &\leq b_2 \mathbb{E}_B \left[\int_{\tau_{n_{r_2}}}^{r_2} |\sigma f'|^2 dE_{r_1} \right] \\ &\leq 2b_2 K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta. \end{aligned}$$

因此，(4.29) 的上界为 $2b_2 E_T K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta^2$ 。将其与 (4.28) 结合得：

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |M_{n_s} + U_s|^2 \right] \leq 8b_2 E_T K^2 \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}] \delta^2. \quad (4.30)$$

根据估计 (4.27) 和 (4.30)，

$$\mathbb{E}_B[I_2] \leq \left\{ \frac{3}{2} E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] + (8b_2 E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}])^{1/2} \right\} K \delta. \quad (4.31)$$

现在, 将 (4.26) 和 (4.31) 与 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \leq \sqrt{2}\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}$ 结合得:

$$\mathbb{E}_B[Z_t] \leq \xi_2(E_T)\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}\delta + K \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_r]dE_r.$$

其中 $\xi_2(u) := K(\frac{3\sqrt{2}}{2}u + (8b_2u)^{1/2})$. 应用 Gronwall 类型不等式, 对两边取 \mathbb{E}_D 并使用 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$\mathbb{E}[Z_T] \leq \mathbb{E}[\xi_2^4(E_T)]^{1/4}\mathbb{E}[(Y_T^{(2)})^2]^{1/4}\mathbb{E}[e^{2KE_T}]^{1/2}\delta.$$

由于对于任意的 $\lambda > 0, t > 0, n > 0$, 都有 $\mathbb{E}[e^{\lambda E_t}] < \infty$, 以及 $\mathbb{E}[E^n(t)] < \infty$, 再结合命题 3.1, 于是可以得到该定理成立.

□

第 5 章 结论与展望

参考文献

- [1] Meerschaert M M, Scheffler H P. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times[J]. Journal of applied probability, 2004, 41(3):623-638.
- [2] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. J. Theor. Probab., 2011, 24:789-820.
- [3] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stoch Process Their Appl, 2009, 119(10):3238-3252.
- [4] Jum E, Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion[J]. Probab. Math. Statist, 2014.
- [5] Deng C S, Liu W. Semi-implicit euler–maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. BIT Num. Math., 2020, 60:1133-1151.
- [6] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators[J]. BIT Num. Math., 2021, 61(3): 829-857.
- [7] Shen G, Zhang T, Song J, et al. On a class of distribution dependent stochastic differential equations driven by time-changed brownian motions[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2023, 88(2):33.
- [8] Li Z, Xu L, Yan L. McKean-vlasov stochastic differential equations driven by the time-changed brownian motion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023, 527(1):127336.
- [9] He X, Zhang Y, Wang Y, et al. η -stability for stochastic functional differential equation driven by time-changed brownian motion[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2024, 2024(1): 60.
- [10] Li Z, Huang B, Zhao J, et al. Transportation inequalities for stochastic differential equations driven by the time-changed brownian motion[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2023, 29(4):1571-1583.
- [11] Wu D, Li Z, Xu L, et al. Mean square stability of the split-step theta method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. Applicable Analysis, 2024, 103(9):1733-1750.
- [12] Wen X, Li Z, Xu L. Strong approximation of non-autonomous time-changed mckean–vlasov stochastic differential equations[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2023, 119:107122.
- [13] Higham D J, Mao X, Stuart A M. Strong convergence of euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations[J]. SIAM journal on numerical analysis, 2002, 40(3):1041-1063.

- [14] Mao X. The truncated euler–maruyama method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 290:370-384.
- [15] Neuenkirch A, Szpruch L. First order strong approximations of scalar sdes defined in a domain [J]. Numer. Math., 2014, 128:103-136.
- [16] Alfonsi A. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process[J]. Stat. Probab. Lett., 2013, 83(2):602 –607.
- [17] Iacus S M, et al. Simulation and inference for stochastic differential equations: with r examples: volume 486[M]. Springer, 2008.
- [18] Yang H, Huang J. First order strong convergence of positivity preserving logarithmic euler–maruyama method for the stochastic sis epidemic model[J]. Appl. Math. Lett., 2021, 121:107451.
- [19] Chen L, Gan S, Wang X. First order strong convergence of an explicit scheme for the stochastic sis epidemic model[J]. J. Comput. Appl. Math., 2021, 392:113482.
- [20] Liu W, Mao X, Tang J, et al. Truncated euler-maruyama method for classical and time-changed non-autonomous stochastic differential equations[J]. Appl. Numer. Math., 2020, 153:66-81.
- [21] Li X, Liao J, Liu W, et al. Convergence and stability of an explicit method for autonomous time-changed stochastic differential equations with super-linear coefficients[J]. Adv. Appl. Math. Mech., 2023, 15(3):651-683.
- [22] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. J. Math. Anal. Appl., 2019, 476(2):619-636.
- [23] Daley D J, Vere-Jones D, et al. An introduction to the theory of point processes: volume i: elementary theory and methods[M]. Springer, 2003.
- [24] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion, itô calculus, and fokker-planck equation-fractional generalizations[M]. World Scientific, 2018.
- [25] Nane E, Ni Y. Stability of stochastic differential equation driven by time-changed l\`evy noise [J]. arXiv preprint arXiv:1604.07382, 2016.
- [26] Kingman J. On doubly stochastic poisson processes[C]//Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society: volume 60. Cambridge University Press, 1964:923-930.

致谢

感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师
感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师
感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老
师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师感谢老师。

[illegible][illegible]