目录

1 引言 i

2 引言 i

3 引言 i

4 Euler-Maruyama 格式的收敛速度（当 $H \neq 0$ 时） 1

1 引言

这是正文的开始，当前页码为 0。

2 引言

这是正文的开始，当前页码为 0。

3 引言

这是正文的开始，当前页码为 0。

4 Euler-Maruyama 格式的收敛速度（当 $H \neq 0$ 时）

本节讨论了 Euler-Maruyama 类型逼近方案在解 SDE(3.1) 时的强收敛速度，其中 $H(u,x)=H(u)$，并在额外假设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 的基础上，给出了 SDE 系数的两组不同假设条件。这些不同的假设条件导致不同的收敛速度。本节所证明的结果回答了第 1 节中提出的问题 (**A**)，并将 [10] 中定理 3.1 的结果推广到当两个漂移项 H 和 F 同时出现的情况。然而，正如第 1 节中讨论的那样，本文采取的方法与 [10] 中的方法完全不同，因为对偶原则未被使用。

首先，我们描述一个用于逆从属 E 的逼近过程，该过程在 [15,16] 中给出。固定一个等距的步长 $\delta \in (0,1)$ 和一个时间范围 $T>0$。为了在区间 $[0,T]$ 上逼近 E，我们首先模拟从属过程 D 的样本路径，该过程具有独立和平稳增量，通过设置 $D_0=0$，然后根据规则：$D_{i\delta} := D_{(i-1)\delta}+Z_i, i=1,2,3,\ldots$，其中 $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是独立同分布的序列，满足 $Z_i \stackrel{d}{=} D_\delta$. 我们在找到整数 N 满足 $T\in[D_{N\delta}, D_{(N+1)\delta})$ 时停止此过程。注意，$\mathbb{N}\cup\{0\}$ 值的随机变量 N 确实存在，因为 $D_t\to\infty$，当 $t\to\infty$ 时几乎必然成立。为了生成随机变量 $\{Z_i\}$，可以使用 [2] 中第 6 章所给的算法。接下来，定义

$$E_t^\delta := (\min\{n\in\mathbb{N}; D_{n\delta}>t\}-1)\,\delta.$$

过程 $E^\delta=(E_t^\delta)_{t\geq 0}$ 的样本路径是单调递增的阶梯函数，具有常数跳跃大小 δ，第 i 个等待时间由 $Z_i=D_{i\delta}-D_{(i-1)\delta}$ 给出。实际上，很容易看出，对于 $n=0,1,2,\ldots,N$，

$$E_t^\delta = n\delta \quad \text{当且仅当} \quad t\in[D_{n\delta}, D_{(n+1)\delta}).$$

特别的，$E_T^\delta=N\delta$. 过程 E^δ 有效地近似了 [10,16] 中的 E；也就是几乎处处有，

$$E_t-\delta \leq E_t^\delta \leq E_t \quad \text{对于所有的} t\in[0,T]. \tag{4.1}$$

接下来, 对于 $n=0,1,2,\ldots,N$, 令

$$\tau_n = D_{n\delta}.$$

由于假设 B 和 D 之间的独立性，我们可以在时间步长 $\{0,\delta,2\delta,\ldots,N\delta\}$ 上逼近布朗运动 B。有了这个假设，定义离散时间过程 $(X_{\tau_n}^\delta)_{n\in\{0,1,2,\ldots,N\}}$，其中 $X_0^\delta := x_0$，并且对于 $n=0,1,2,\ldots,N-1$，有：

$$X_{\tau_{n+1}}^\delta := X_{\tau_n}^\delta + H(E_{\tau_n}^\delta)(\tau_{n+1}-\tau_n) + F(E_{\tau_n}^\delta, X_{\tau_n}^\delta)(E_{\tau_{n+1}}^\delta - E_{\tau_n}^\delta) \tag{4.2}$$

[0]本文翻译自 Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators 的第四章.

$$+ G(E^\delta_{\tau_n}, X^\delta_{\tau_n})(B_{E^\delta_{\tau_{n+1}}} - B_{E^\delta_{\tau_n}}),$$

由于 $E^\delta_{\tau_n} = n\delta$，上式等价于：

$$X^\delta_{\tau_{n+1}} := X^\delta_{\tau_n} + H(n\delta)(\tau_{n+1} - \tau_n) + F(n\delta, X^\delta_{\tau_n})\delta + G(n\delta, X^\delta_{\tau_n})(B_{(n+1)\delta} - B_{n\delta}). \quad (4.3)$$

特别地，当 $H \equiv F \equiv 0$ 且 $G \equiv 1$ 时，$(X^\delta_{\tau_n})_{n\in\{0,1,2,\ldots,N\}}$ 变为一个离散化的时间变换布朗运动，其样本路径如图 2 所示。请注意，尽管表达式 (4.3) 可能看起来像是采取了非随机的时间步长，但我们实际上是通过随机时间步长 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ 来离散化驱动过程 $E = (E_t)_{t\geq 0}$ 和 $B \circ E = (B_{E_t})_{t\geq 0}$，正如在 (4.2) 中所示；因此，时间变换过程的随机捕获事件（即产生恒定周期的事件）的关键特征，实际上是通过随机步长 $\tau_{n+1} - \tau_n = D_{(n+1)\delta} - D_{n\delta} \overset{\mathrm{d}}{=} D_\delta$ 来捕捉的。还要注意，我们并没有通过非随机时间步长来离散化 SDE，因为这在实践中是困难的，因为驱动过程 E 和 $B \circ E$ 既没有独立增量，也没有平稳增量。

为了定义一个连续时间过程 $(X^\delta_t)_{t\in[0,T]}$，我们采用连续插值方法；即，对于 $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$，

$$X^\delta_s := X^\delta_{\tau_n} + \int_{\tau_n}^s H(E_{\tau_n})\,\mathrm{d}r + \int_{\tau_n}^s F(E_{\tau_n}, X^\delta_{\tau_n})\,\mathrm{d}E_r + \int_{\tau_n}^s G(E_{\tau_n}, X^\delta_{\tau_n})\,\mathrm{d}B_{E_r}. \quad (4.4)$$

令

$$n_t = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \tau_n \leq t\}$$

那么显然对于任何 $t > 0$，都有 $\tau_{n_t} \leq t < \tau_{n_t+1}$。使用 (4.3) 和恒等式

$$X^\delta_s - x_0 = \sum_{i=0}^{n_s-1} \left(X^\delta_{\tau_{i+1}} - X^\delta_{\tau_i}\right) + \left(X^\delta_s - X^\delta_{\tau_{n_s}}\right),$$

我们可以将 $X^\delta_s - x_0$ 表示为

$$\sum_{i=0}^{n_s-1} \left[H(E_{\tau_i})(\tau_{i+1} - \tau_i) + F(E_{\tau_i}, X^\delta_{\tau_i})\delta + G(E_{\tau_i}, X^\delta_{\tau_i})(B_{(i+1)\delta} - B_{i\delta})\right] + \left(X^\delta_s - X^\delta_{\tau_{n_s}}\right).$$

其中我们使用了 $i\delta = E_{D_{i\delta}} = E_{\tau_i}$。利用 (4.4) 以及 $\tau_i = \tau_{n_r}$ 对于任何 $r \in [\tau_i, \tau_{i+1})$，我们可以将后者重新写为方便的形式：

$$X^\delta_s = x_0 + \int_0^s H(E_{\tau_{n_r}})\,\mathrm{d}r + \int_0^s F(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}})\,\mathrm{d}E_r + \int_0^s G(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}})\,\mathrm{d}B_{E_r}. \quad (4.5)$$

现在我们可以陈述本文的第一个主要定理，其中我们假设存在常数 $K > 0$ 和 $\theta \in (0, 1]$，使得对于所有 $u, v \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$，满足

$$\mathcal{H}_3 : |H(u) - H(v)| + |F(u, x) - F(v, x)| + |G(u, x) - G(v, x)| \leq K|u - v|^\theta(1 + |x|).$$

回忆一下，步长为 $\delta>0$ 的近似过程 X^δ 称为在 $[0,T]$ 上以 阶数 $\eta\in(0,\infty)$ 强收敛到解 X，如果存在有限的正常数 C 和 δ_0，使得对于所有 $\delta\in(0,\delta_0)$，有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t-X_t^\delta|\right]\le C\delta^\eta.$$

定理 4.1. *设 X 是满足随机微分方程 (3.1) 的解，且 $H(u,x)=H(u)$ 对所有 $(u,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$ 成立，并假设条件 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_3$ 均成立。假设 D 的拉普拉斯指数 ψ 在 ∞ 处是 正则变化的，其指数为 $\beta\in(0,1)$，且满足以下任一条件：*

(a) h 为常数，且 $\beta\in(1/2,1)$；

(b) h 是连续、单调递增的函数，并在 ∞ 处正则变化，指数为 $q\ge 0$，且 $\beta\in\left(\frac{2q+1}{2q+2},1\right)$。

设 X^δ 为定义在 (4.3) 和 (4.4) 中的 Euler-Maruyama 类型的近似过程。那么，存在一个常数 $C>0$（与 δ 无关），使得对于所有 $\delta\in(0,1)$，有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}|X_s-X_s^\delta|\right]\le C\delta^{\min\{\theta,1/2\}}.$$

因此，X^δ 以阶数 $\min\{\theta,1/2\}$ 强收敛于 X，且在 $[0,T]$ 上 一致收敛。

引理 4.1. *在定理4.1的假设下，对于任意 $t\ge s\ge 0$，有*

$$\mathbb{E}_B[|X_t-X_s|]\le\sqrt{2}h(E_t)\mathbb{E}_B[Y_t^{(2)}]^{1/2}\left\{(t-s)+(E_t-E_s)^{1/2}+(E_t-E_s)\right\},$$

其中 $Y_t^{(2)}$ 定义见命题 3.1。

证明： 通过 Cauchy–Schwartz 不等式, $\mathbb{E}_B[|X_t-X_s|]$ 可以被控制,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_B\left[\int_s^t|H(E_r)|\mathrm{d}r\right]+\mathbb{E}_B\left[\int_s^t|F(E_r,X_r)|\mathrm{d}E_r\right]+\mathbb{E}_B\left[\left|\int_s^t G(E_r,X_r)\mathrm{d}B_{E_r}\right|^2\right]^{1/2}\\&\le(t-s)h(E_t)+(E_t-E_s)h(E_t)\mathbb{E}_B[Y_t^{(1)}]+\sqrt{2}(E_t-E_s)^{1/2}h(E_t)\mathbb{E}_B[Y_t^{(2)}]^{1/2}.\end{aligned}$$

Jensen's 不等式给出了定理中的界限。 □

现在我们准备证明定理4.1，其中局部化序列 S_ℓ 定义为:

$$S_\ell:=\inf\left\{t\ge 0:\sup_{0\le s\le t}\left\{|X_s-X_s^\delta|\right\}>\ell\right\}$$

下面我们准备证明定理4.1, 该序列使得我们可以将过程 $(\sup_{0\le s\le t}\{|X_s-X_s^\delta|\})_{t\in[0,T]}$ 视为有界的。然而，正如在 3.1 备注中所述，为了阐明证明的主要思路，我们省略了 S_ℓ，并假设过程是有界的。相同的论证适用于第 4 和第 5 节中的所有论断。

定理 1.1 的证明 令 $Z_t := \sup_{0\le s\le t}|X_s - X_s^\delta|$，其中 $t\in[0,T]$。根据 (3.1) 和 (4.5) 中分别给出的 X 和 X^δ 的表示式，得到：

$$Z_t \le I_1 + I_2 + I_3,$$

其中：

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (H(E_r) - H(E_{\tau_{n_r}}))\mathrm{d}r\right|,\\
I_2 &:= \sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (F(E_r, X_r) - F(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}}))\mathrm{d}E_r\right|,\\
I_3 &:= \sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (G(E_r, X_r) - G(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}}))\mathrm{d}B_{E_r}\right|.
\end{aligned}$$

现在，在 I_1 的表达式中，回顾到 $\tau_{n_r}\le r<\tau_{n_r+1}$ 且 $0\le E_r - E_{\tau_{n_r}}\le (n_r+1)\delta - n_r\delta = \delta$。结合 Cauchy-Schwartz 不等式和假设 $\mathcal{H}_3$，我们得到：

$$I_1^2 \le t\int_0^t (H(E_r) - H(E_{\tau_{n_r}}))^2\,\mathrm{d}r \le K^2T^2\delta^{2\theta}. \tag{4.6}$$

至于 I_2，通过 Cauchy-Schwarz 不等式注意到：

$$\mathbb{E}_B[I_2^2] \le E_t\int_0^t \mathbb{E}_B\left[\left(F(E_r, X_r) - F(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}})\right)^2\right]\,\mathrm{d}E_r$$

由于 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3$ 和以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
|F(E_r, X_r) - F(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}})| &\le |F(E_r, X_r) - F(E_{\tau_{n_r}}, X_r)| + |F(E_{\tau_{n_r}}, X_r) - F(E_{\tau_{n_r}}, X_{\tau_{n_r}})|\\
&\quad + |F(E_{\tau_{n_r}}, X_{\tau_{n_r}}) - F(E_{\tau_{n_r}}, X^\delta_{\tau_{n_r}})|
\end{aligned}$$

则有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B[I_2^2] &\le 3E_T\int_0^t \mathbb{E}_B\left[K^2\delta^{2\theta}(1+|X_r|)^2 + h^2(E_{\tau_{n_r}})|X_r - X_{\tau_{n_r}}|^2 + h^2(E_{\tau_{n_r}})Z^2_{\tau_{n_r}}\right]\,\mathrm{d}E_r \qquad (4.7)\\
&\le 6E_T^2K^2\delta^{2\theta}\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\\
&\quad + 3E_Th^2(E_T)\left\{\int_0^t \mathbb{E}_B[|X_r - X_{\tau_{n_r}}|^2]\,\mathrm{d}E_r + \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_r^2]\,\mathrm{d}E_r\right\}.
\end{aligned}$$

现在，对于任意 $r\in[0,t]$，根据引理4.1和 $0\le E_r - E_{\tau_{n_r}}\le\delta$，我们有：

$$\mathbb{E}_B[|X_r - X_{\tau_{n_r}}|^2] \le 6h^2(E_T)\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\left\{(r-\tau_{n_r})^2 + \delta + \delta^2\right\}. \tag{4.8}$$

此外，

$$\int_0^t (r-\tau_{n_r})^2\,\mathrm{d}E_r = \sum_{i=0}^{n_t-1}\int_{t_i}^{\tau_{i+1}} (r-\tau_i)^2\,\mathrm{d}E_r + \int_{\tau_{n_t}}^t (r-\tau_{n_t})^2\,\mathrm{d}E_r \tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \delta\left(\sum_{i=0}^{n_t-1}(\tau_{i+1}-\tau_i)^2+(t-\tau_{n_t})^2\right)\leq 2T\delta\left(\sum_{i=0}^{n_t-1}(\tau_{i+1}-\tau_i)+(t-\tau_{n_t})\right)\\
&\leq 2T^2\delta.
\end{aligned}
$$

结合 (4.8) 和 (4.9) 与 (4.7)，并回忆起 $\delta<1$，我们得到：

$$
\mathbb{E}_B[I_2^2]\leq \xi_1(E_T)\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^{\min\{2\theta,1\}}+3E_Th^2(E_T)\int_0^t\mathbb{E}_B[Z_r^2]\,\mathrm{d}E_r, \tag{4.10}
$$

其中 $\xi_1(u):=36u^2h^4(u)+36uh^4(u)T^2+6u^2K^2$.

关于 I_3，使用 BDG 不等式和与前述段落类似的计算，得出：

$$
\mathbb{E}_B[I_3^2]\leq \xi_2(E_T)\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^{\min\{2\theta,1\}}+3b_2h^2(E_T)\int_0^t\mathbb{E}_B[Z_r^2]\,\mathrm{d}E_r, \tag{4.11}
$$

其中 $\xi_2(u):=\frac{b_2\xi_1(u)}{u}$。

将估计式 (4.6), (4.10) 和 (4.11) 结合起来得到

$$
E_B\left[Z_t^2\right]\leq \xi_3\left(E_T\right)E_B\left[Y_T^{(2)}\right]\delta^{\min\{2\theta,1\}}+9\left(E_T+b_2\right)h^2\left(E_T\right)\int_0^t E_B\left[Z_r^2\right]dE_r,
$$

其中 $\xi_3(u):=3\xi_1(u)+3\xi_2(u)+3K^2T^2$。利用第 IX 章第 6a 节中的 Gronwall 型不等式 [8] 的引理 6.3 并设置 $t=T$，得到

$$
E_B\left[Z_T^2\right]\leq \xi_3\left(E_T\right)E_B\left[Y_T^{(2)}\right]e^{9E_T(E_T+b_2)h^2(E_T)}\delta^{\min\{2\theta,1\}}.
$$

对两边取 E_D 的期望并使用 Cauchy-Schwartz 不等式，得到

$$
E\left[Z_T^2\right]\leq E\left[\xi_3^4\left(E_T\right)\right]^{1/4}E\left[\left(Y_T^{(2)}\right)^4\right]^{1/4}E\left[e^{18E_T(E_T+b_2)h^2(E_T)}\right]^{1/2}\delta^{\min\{2\theta,1\}}. \tag{4.12}
$$

所需的结果通过证明 (4.12) 右边的期望是有限的而得出。现在，假设 h 是常数。那么，根据命题 2.1 和 3.1，我们有 $E\left[\xi_3^4\left(E_T\right)\right]<\infty$ 和 $E\left[\left(Y_T^{(2)}\right)^4\right]\leq 8E\left[Y_T^{(8)}\right]<\infty$。至于 $E\left[e^{18E_T(E_T+b_2)h^2(E_T)}\right]$，由于引理 2.1，指数的形式是 $f\left(E_T\right)$，其中 $f\in RV_2(\infty)$，因此根据定理 2.1，该期望是有限的，当且仅当 $2<1/(1-\beta)$（即 $\beta\in(1/2,1)$）。

另一方面，如果 $h\in RV_q(\infty)$ 且 $q\geq 0$，根据命题 3.1，若 $\beta\in\left(\frac{2q}{2q+1},1\right)$，则 $E\left[Y_T^{(8)}\right]<\infty$。由于 $E\left[e^{18E_T(E_T+b_2)h^2(E_T)}\right]$ 的指数具有形式 $f\left(E_T\right)$，其中 $f\in RV_{2q+2}(\infty)$，根据定理 2.1，该期望是有限的，当且仅当 $2q+2<\frac{1}{1-\beta}$（即 $\beta\in\left(\frac{2q+1}{2q+2},1\right)$）。因此，只要 $\beta\in\left(\frac{2q+1}{2q+2},1\right)$，结果即成立。

注 4.1. *1.* 上述证明中使用的方法提供了一个一般性的思路，说明如何分析可能涉及随机时间变换的 *SDE* 近似方案的强收敛速度。

2. 如果我们允许系数 H 也依赖于 x，则上述证明将无法适用。事实上，这种情况将要求对 $E_B\left[I_1^2\right]$ 进行类似于 *(4.7)* 的估计，从而产生积分 $\int_0^t E_B\left[\left|X_r - X_{\tau_{n_r}}\right|^2\right] dr$。根据 *(4.8)*，这个积分的上界可以被包含在涉及积分 $\int_0^t (r-\tau_{n_r})^2 dr$ 的量级中。然而，与 *(4.9)* 不同的是，后者的积分不会导致包含 δ 的界限。

3. 尽管我们通过 *(4.4)* 中的连续插值对离散化过程 $\left(X_{\tau_n}^\delta\right)_{n\in\{0,1,2,\dots,N\}}$ 进行了插值，但在 $H\equiv 0$ 的情况下，采用分段常数插值 $X_t^\delta := X_{\tau_{n_t}}^\delta$ 也是可能的，正如 *[9]* 中所示。在这种情况下，Z_t 的界限将额外包含在区间 $[tn, s]$ 上的积分的上确界，包括

$$I_5 := \sup_{0\le s\le t}\left|\int_{\tau_{n_s}}^s G(E_r, X_r)\, dB_{E_r}\right|.$$

对 $E_B[I_5^2]$ 的估计可以借助于 *[4]* 中关于随机积分的连续模结果来进行，然而这只会得到收敛阶数为 $\frac{1}{2}-\varepsilon$ 的结果，其中 $\varepsilon > 0$。详情请参见 *[9]* 中的备注 *9(3)*。

4. 上述证明表明，参数 β 在确定 $E[Z^2]$ 上界有限性方面起着重要作用。另一方面，β 对于 X^δ 的收敛速度没有影响，这是因为我们构造的离散时间变化 E^δ 使得无论 β 的值如何，E^δ 都以 *1* 的阶数收敛到 E，正如 *(4.1)* 所示。上述论证表明，如果 E^δ 的收敛速度依赖于 β，则 X^δ 的收敛速度也可能涉及 β。