学校代码：10270　　　　学号：222200595

上海师范大学

硕士学位论文

加性噪声驱动的时间变换随机微分方程的数值方法

学　　院：数理学院

专　　业：计算数学

研究方向：随机微分方程数值解

研究生姓名：左如春

指导教师：刘暐 副研究员

完成日期：二〇二四年九月

论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中做了明确的声明并表示了谢意。

作者签名：______________ 日　　期：______________

论文使用授权声明

本人完全了解上海师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它手段保存论文。暂缓出版的论文在公开后遵守此规定。

作者签名：______________ 导师签名：______________

日　　期：______________ 日　　期：______________

摘 要

本研究提出了一种新的数值方法，专门针对一类具有高度非线性的时间变换随机微分方程（SDE）。这些 SDE 的漂移项和扩散项系数，满足超线性增长条件。通过应用 Lamperti 变换，我们将这些方程中的乘性噪声转换为加性噪声，从而简化了数值解的计算并提高了收敛阶。本研究不仅探讨了变换后的 SDEs 的强收敛性，还详细分析了收敛阶。此外，我们还通过数值模拟验证了理论结果的有效性，展示了该方法在提高收敛阶方面的显著优势，为时间变换 SDEs 的数值分析提供了新的视角和工具。

关键词： 时间变换；等距离散；收敛阶；逆从属；EM 型数值方法；Lamperti 变换；强收敛

Abstract

change

Key Words: Keyword 1; Keyword 2; Keyword 3

目 录

第 1 章　引言

1.1　研究背景

近年来, 由时间变换的布朗运动驱动的随机微分方程收到了广泛关注, 通过引入时间变换过程来描述复杂的动态系统行为，为研究次扩散现象提供了重要工具，它们在金融, 生物和物理等方面有着广泛的应用. Meerschaert 和 Scheffler 在 [1] 中，深入研究了连续时间随机行走（CTRWs）的极限行为, 不仅揭示了 CTRWs 的缩放极限是一个由经典稳定从属过程的逆过程所支配的 Lévy 运动，而且还证明了这一逆过程具有自相似性。这些发现对于理解异常扩散现象具有重要意义，并且为后续关于时间变换和分数阶动力学的研究提供了坚实的理论基础。Magdziarz 在 [2] 中探讨了一类具有时间依赖漂移项和加性噪声的次扩散过程的随机表示，这类过程的数学描述通常涉及分数阶福克-普朗克方程。Magdziarz 通过离散化逆从属过程，提出了一个强收敛的近似方案，得到了一个强收敛阶为 0.5 的数值方法。Kei Kobayashi 在 [3] 中研究了时变 SDE 的特性，特别是那些涉及半鞅和时间变换的特定条件，他证明了在一定条件下，任何由时间变换半鞅驱动的随机积分都可以表示为由原始半鞅驱动的时间变换随机积分。Jum 和 Kobayashi 在 [4] 中，研究一类 SDEs 的漂移项和扩散项不仅依赖于状态变量，还依赖于一个逆从属过程。在全局 Lipschitz 条件和 Holder 连续性条件下, 运用对偶原则，将这些复杂的时间变换 SDEs 转化为更易于处理的标准 SDEs 形式. 通过利用标准 SDEs 的已知收敛结果，得到时间变换 SDEs 的 Euler-Maruyama（EM）数值方法具有 0.5 的强收敛阶。Jin 和 Kobayashi 在 [5] 不同于 Jum 和 Kobayashi 在 [4] 中的研究，他们考虑的 SDEs 的系数依赖于时间变量而不是逆从属，这种改变使得应用对偶原则变得困难。为了克服这一难题，Jin 和 Kobayashi 采用了随机驱动的 Gronwall 型不等式来控制误差过程的矩，并建立了随机时间变换指数矩存在的有用准则，最终得到 EM 数值方法具有 0.5 的强收敛阶 Deng 和 Liu 在 [6] 中，研究了一类非线性时变 SDEs，在漂移系数依赖于状态变量和逆从属过程，并且满足单边 Lipschitz 和 Holder 连续性条件下，提出了半隐式 EM 数值方法来近似这类 SDEs，并证明了该方法的强收敛率为 0.5。同时提出了如何保持这类方程的均方多项式稳定性。Jin 和 Kobayashi 在 [7] 中，研究了一类不仅包含由逆从属驱动的漂移项，还包含由常规时间变量驱动的漂移项，在系数满足时变 Lipschitz 条件下，提出了 Milstein 型逼近方案，并详细分析了强收敛速率。Shen 等人在 [8] 中，研究了一类由时间变换布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程（DDSDEs），这些方程的特点是漂移项和扩散项不仅依赖

于状态变量，还依赖于其概率分布。在单边 Lipschitz 和 Holder 连续性条件下，得到这类 DDSDEs 解的存在唯一性，并进一步研究了其稳定性。Li 等人在 [9] 中，研究了一类由时间变换布朗运动驱动的 McKean-Vlasov 随机微分方程（SDEs），在适当的条件下，得到这类 SDEs 解的存在唯一性以及相对于初始数据和系数的稳定性，并且这些 SDEs 的解在均方意义下可以由相关平均 SDEs 的解来近似。Li 等人在 [10] 中，研究了时变 SDEs 和时变脉冲 SDEs，利用时变延迟 Gronwall 类不等式和 Girsanov 变换，得到解的二次传输不等式。Wu 等人在 [11] 中，研究了非线性时变 SDEs，在具有超线性增长的漂移系数和全局 Lipschitz 的扩散系数条件下，得到分步 theta 数值方法在有限时间内能够达到了经典的 0.5 强收敛率。Wen 等人在 [12] 中，研究了非自治时变 McKean-Vlasov SDE，其中漂移项之一由逆从属驱动，另一个由常规时间变量驱动。通过构建交互粒子系统，得到 EM 数值方法的强收敛率为 0.5。

截止目前对于时变 SDE 的研究，一方面对于逆从属的离散都是非等距的，这种格式的好处是逆从属在相邻的两个离散点的差值是非随机的，在后续处理时，可以直接将逆从属的增量转化成固定增量，这将大大简化证明步骤。坏处是在这种非等距的离散下，我们看不到收敛阶和逆从属的稳定指数的关系，为了保证逆从属的原始性质，我们渴望得到与稳定指数相关的收敛阶。另一方面对于 EM 型数值方法的收敛阶的研究中，在以往的工作大多都是得到 0.5 阶就够了，我们希望得到在一些特定情况下，EM 型数值方法在时变 SDE 能够得到更高的收敛阶，在经典的 SDE 的研究中，Lamperti 变换完美的解决了这一点。

关于 Lamperti 变换的 SDE 数值方法的收敛性研究，已有众多学者进行了深入探讨。Neuenkirch 和 Szpruch 在 [13] 中，通过运用 Lamperti 变换，将原始 SDE 转化为漂移项满足单边 Lipschitz 的加性噪声 SDE，并采用后向 Euler-Maruyama（BEM）数值方法进行近似，得到该方法在保持 SDE 定义域的同时，能够实现一阶强收敛率。Alfonsi 在 [14] 中独立于 Neuenkirch 等人，研究了一大类经过 Lamperti 变换后漂移项满足单调条件的加性噪声 SDE，通过构建隐式 EM 数值方法，实现了一阶强收敛率。Chen、Gan 和 Wang 在 [15] 中提出了 Lamperti 平滑截断（LST）方案，用于强逼近随机 SIS 流行病模型。该方案结合了 Lamperti 变换与显式截断方法，证明了在保持原始 SDE 定义域的同时，得到一阶均方收敛率。Yang 和 Huang 在他们的文章 [16] 中，通过结合对数变换和 EM 数值方法，为 SIS 流行病模型构建了一种保持正性的数值方法。证明了在保持原始 SDE 定义域的同时，在有限时间区间内收敛速率为一阶。

在本文中，我们将研究 Lamperti 变换后的时变 SDE, 重点关注 EM 型数值方法的强收敛阶。相较于以往的 EM 型数值方法，我们不仅可以得到与经典 SDE 一致

的 1 阶强收敛，另外通过对逆从属的等距离散，我们还建立了 EM 型数值方法的收敛阶和逆从属稳定指数的关系。

1.2　主要结论

主要结论

1.3　结构安排

本文接下来的写作安排如下:

第 2 章　准备工作

2.1　符号说明

在这篇文章中,$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 表示完备概率空间, $D=(D_t)_{t\geq 0}$ 表示具有 Laplace 指数 ψ, 从 0 开始的从属过程, 其中 ψ 的被杀率是 0 且具有 Lévy 测度 ν; 即 D 是具有开始于 0 的 càdlàg 路径的一维非减 Lévy 过程, 其 Laplace 变换是:

$$\mathbb{E}[e^{-sD_t}]=e^{-t\psi(s)},\quad \text{其中}\quad \psi(s)=\int_0^\infty (1-e^{-sy})\,\nu(\mathrm{d}y),\quad s>0,$$

并且 $\int_0^\infty (y\wedge 1)\nu(dy)<\infty$, 我们考虑 Lévy 测度 ν 是无穷的情况, 即 $\nu(0,\infty)=\infty$, 这意味着复合泊松从属不在我们的考虑范围中. 令 $E=(E(t))_{t\geq 0}$ 是 D 的逆, 即:

$$E(t):=\inf\{u>0;D_u>t\},\ t\geq 0.$$

我们称 E 为逆从属过程。如果从属过程 D 是稳定的，并且其指数为 $\beta\in(0,1)$，则 $\psi(s)=s^\beta$，并且 E 被称为逆 β-稳定从属过程。假设 $\nu(0,\infty)=\infty$ 表明 D 具有严格递增的路径，并且有无限多个跳跃，因此，E 具有从 0 开始的连续、非递减路径。此外，D 和 E 之间的逆关系意味着，对于所有 $t,x\geq 0$，有 $\{E_t>x\}=\{D_x<t\}$。注意，D 的跳跃对应于 E 上保持常数的（随机）时间间隔，在这些常数周期内，任何形式为 $X\circ E=(X_{E_t})_{t\geq 0}$ 的时间变换过程也保持常数。如果 B 是与 D 独立的标准布朗运动，我们可以将由时间变换布朗运动 $B\circ E$ 表示的粒子视为在常数周期内被困住且无法移动；注意，尽管 $B\circ D$ 是一个 Lévy 过程，但 $B\circ E$ 甚至不是一个马尔可夫过程。(见图 2.1)

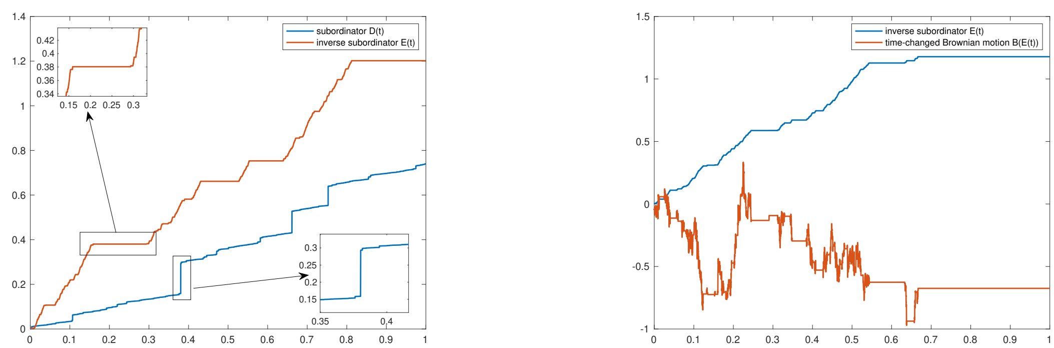

图 2.1　左图是稳定指数 $\alpha=0.8$ 的从属 D 和相应的逆从属 E, 右图是是稳定指数 $\alpha=0.8$ 的逆从属 E 和相应的时间变换布朗运动

E 和 $B\circ E$ 都从 0 开始，对于二次变差，满足 $[B\circ E,B\circ E]=E$和$[E,E]=$

$[B\circ E, E]=0$. 有关更一般的时间变换半鞅的随机微积分的详细信息，请参见 [3] 的第 4 节。

现在我们来介绍关于时间变换的 Lamperti 变换. 令 $S=(l,r)$, 其中 $-\infty\le l<r\le\infty$, 函数 a,b 是 $S\to S$ 的连续可微函数. 考虑下面的 SDE:

$$dy(t)=a(y(t))dE(t)+b(y(t))dB(E(t)) \tag{2.1}$$

并且假设它在 S 中有唯一强解, 即

$$\mathbb{P}(y(t)\in S,\ t\ge 0)=1.$$

如果 $b(x)>0$ 对所有的 $x\in S$ 都成立, 那么我们可以使用 Lamperti 变换

$$F(x)=\lambda\int^{x}\frac{1}{b(y)}dy \tag{2.2}$$

对于某些 $\lambda>0$. 并且 $F^{-1}:F(S)\to S$ 是被良好定义的, 令 $x(t)=F(y(t))$ 利用 [17] 中的时间变换 Itô 公式可以得到:

$$dx(t)=f(x(t))dE(t)+\lambda dB(E(t)) \tag{2.3}$$

其中

$$f(x)=\lambda\left(\frac{a(F^{-1}(x))}{b(F^{-1}(x))}-\frac{1}{2}b'(F^{-1}(x))\right),\quad x\in F(S),$$

$F(D)=(F(l),F(r))$. 这种变换可以将扩散项的非线性项转换到漂移项中, 在文章后续部分, 我们将着重研究具有加性噪声的 SDE(2.3).

2.2　主要引理

从 [17] 引入下面的三个关于时间变换的引理

引理 2.1 (第一变量变换公式). *令 B 是一维标准的布朗运动. 如果 $H\in L(B(t),\mathcal{F}_t)$, 则 $H_{E(t-)}\in L(B_{E(t)},\mathcal{F}_{E_t})$. 此外, 对于所有 $t\geqslant 0$, 几乎处处有*

$$\int_0^{E_t}H_s dB(s)=\int_0^t H_{E(s-)}dB_{E(s)}.$$

引理 2.2 (第二变量变换公式). *令 B 是一维标准的布朗运动, 设 D 和 E 是满足 $[D\longrightarrow E]$ 或 $[D\longleftarrow E]$ 的. 假设 B 与 E 同步. 如果 $K\in L(B_{E(t)},\mathcal{F}_{E_t})$, 则 $(K_{D(t-)})\in L(B(t),\mathcal{F}_{E(D_t)})$. 此外, 对于所有 $t\geqslant 0$, 几乎处处有*

$$\int_0^t K_s dB_{E(s)}=\int_0^{E_t}K_{D(s-)}dB(s).$$

引理 2.3 (Itô 公式). *令 B 是一维标准的布朗运动. 令 D 和 E 满足 $[D\longrightarrow E]$ 或 $[D\longrightarrow E]$. X 是由下述 SDE 定义的随机过程:*

$$X(t):=\int_0^t A(s)ds+\int_0^t F(s)dE(s)+\int_0^t G(s)dB(E(s))$$

其中 $A(s)\in L(t,\mathcal{F}_{E(t)})$, $F(s)\in L(E(t),\mathcal{F}_{E(t)})$, 以及 $G(s)\in L(B(E(s)),\mathcal{F}_{E(t)})$. 如果 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 那么 $f(X(t))$ 是 $\mathcal{F}_{E(t)}$-半鞅, 对于所有的 $t\geq 0$, 都有

$$f(X(t))-f(0)=\int_0^t f'(X(s))A(s)ds+\int_0^{E(t)} f'\left(X(D(s-))\right)F(D(s-))ds$$
$$+\int_0^{E(t)} f'\big(X(D(s-))\big)G(D(s-))dB(s)+\frac{1}{2}\int_0^{E(t)} f''\big(X(D(s-))\big)\big\{G(D(s-))\big\}^2 ds.$$

下面引入离散型 Gronwall 不等式,

引理 2.4. 令 $\Delta t>0, g_n,\lambda_n\in\mathbb{R},\eta>0,a_1=0$, 再假设 $1-\eta\Delta E_j>0$,$1+\lambda_n>0,n\in\mathbb{N}$, 那么如果

$$a_{n+1}\leq a_n(1+\lambda_n)+\eta a_{n+1}\Delta E_n+g_{n+1}$$

则下面的不等式成立:

$$a_n\leq\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{i=j}^{n}(1-\eta\Delta E_i)g_{j+1}\prod_{l=j+1}^{n-1}(1+\lambda_l) \tag{2.4}$$

下面的引理对于证明本文主要定理起着关键性的作用.

引用 [18] 中的引理。

引理 2.5. 假设在逆从属过程 $E(t)$ 的 *Laplace* 变换中, $\psi(s)=s^\alpha$, 那么

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E_t}{t}=0,\ a.s. \tag{2.5}$$

引理 2.6. 如果 E 是从属过程 D 的逆，其拉普拉斯指数 ψ 在无穷大处的正则变化指数是 $\beta\in[0,1)$ 。如果 $\beta=0$，进一步假设 $\nu(0,\infty)=\infty$。固定 $\lambda>0$, $t>0$ 和 $r>0$。

(1) 如果 $r<\frac{1}{1-\beta}$，则 $\mathbb{E}\left[e^{\lambda E_t^r}\right]<\infty$。

(2) 如果 $r>\frac{1}{1-\beta}$，则 $\mathbb{E}\left[e^{\lambda E_t^r}\right]=\infty$。

引理 2.7. 对于任意给定的 $0=t_0<ih<t_1<t_2<\ldots<t_n<(i+1)h$, 都有:

$$\mathbb{E}\left[\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\ldots\int_{ih}^{t_2}1dE(t_1)\ldots dE(t_{n-1})dE(t_n)\right]\leq Ch^{1+(n-1)\beta} \tag{2.6}$$

, 其中 C 是与 h 无关的常数.

证明： 现在, 在 $[0,\infty)$ 上引入随机测度 Π, 定义为 $\Pi((s,t])=E(t)-E(s)$, 其中 $t>s\geq 0$. 令 $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ 为由 Π 驱动的 Cox 过程, 即在条件 $\Pi=\lambda$ 下,$\{C(t)\}$ 的分布与强度为 λ 的非齐次泊松过程等价. 注意, 根据 [19],$\{C(t)\}$ 是具有更新函数的更新过程:

$$u(t)=\mathbb{E}[C(t)]=\mathbb{E}[E(t)]=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.7}$$

对于更新过程 $C(t)$, 参见 [20], 可以得到

$$\mathbb{E}[\mathrm{d}C(t_n)\dots\mathrm{d}C(t_1)] = \prod_{i=1}^{n} u'(t_i - t_{i-1})\mathrm{d}t_i$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. 由于 Cox 过程 $C(t)$ 的阶乘矩等于其驱动测度 Π 的普通矩, 参见 [20] 我们得到

$$\mathbb{E}[\mathrm{d}E(t_n)\dots\mathrm{d}E(t_1)] = \prod_{i=1}^{n} u'(t_i - t_{i-1})\mathrm{d}t_i.$$

因此:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}\left[\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\dots\int_{ih}^{t_2} 1dE(t_1)\dots dE(t_{n-2})dE(t_{n-1})dE(t_n)\right] \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\dots\int_{ih}^{t_2} 1\mathbb{E}\left[dE(t_1)\dots dE(t_{n-2})dE(t_{n-1})dE(t_n)\right] \\ &= \frac{\alpha^n}{\Gamma^n(\alpha+1)}\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\dots\int_{ih}^{t_2}\prod_{i=1}^{i=n}(t_i - t_{i-1})^{\alpha-1}dt_1\dots dt_{n-1}dt_n \end{aligned}$$

下面单独考虑积分项:

$$I_1 = \int_{ih}^{t_2}(t_2 - t_1)^{\alpha-1}t_1^{\alpha-1}dt_1$$

做如下变换, 令 $t_1 = ih + s_1h$, 同时 $t_2 = ih + s_2h$,, 其中 h 是步长, 因此 $s_1, s_2 \in [0, 1]$, 注意由于我们不考虑时间在原点处, 因此这里的 $i = \frac{T}{h}$, 这里的 T 是一个时间范围, 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}h^{\alpha-1}(ih + s_1h)^{\alpha-1}hds_1 \\ &= h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}(ih + s_1h)^{\alpha-1}ds_1 \end{aligned}$$

由于 $(ih + s_1h)^{\alpha-1}$ 关于 s_1 在 $[0, 1]$ 是单调递减的, 并且积分 I_n 中, 被积函数和积分区域都是正的, 因此

$$\begin{aligned} I_1 &\le h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}(ih)^{\alpha-1}ds_1 \\ &= T^{\alpha-1}h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}ds_1 \end{aligned}$$

令 $w_1 = s_2 - s_1$, 于是

$$I_1 \le T^{\alpha-1}h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}ds_1 = T^{\alpha-1}h^\alpha\int_0^{s_{n2}} w_1^{\alpha-1}dw_1 = \frac{T^{\alpha-1}s_2^\alpha}{\alpha}h^\alpha$$

因此:

$$I \le Ch^\alpha\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\dots\int_{ih}^{t_3}\prod_{i=3}^{n}(t_i - t_{i-1})^{\alpha-1}dt_2\dots dt_{n-1}dt_n$$

同理, 分析如下积分:

$$I_2 = \int_{ih}^{t_3} (t_3 - t_2)^{\alpha-1} dt_2 \leq Ch^{\alpha}$$

因此:

$$I \leq Ch^{2\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_4} \prod_{i=4}^{n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_3 \dots dt_{n-1} dt_n$$

如此进行迭代, 我们得到:

$$I \leq Ch^{(n-1)\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} 1 dt_1 \leq Ch^{1+(n-1)\alpha}$$

$\square$

第 3 章　EM 数值方法

3.1　假设

假设 3.1. *在这一章节中，我们假设 SDE(2.3) 的漂移项系数 f 满足全局* Lipschitz *条件的，即存在一个常数 $K > 0$，使得*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{3.1}$$

假设 3.2. *在这一章节中，我们假设 SDE(2.3) 的漂移项系数 f 满足线性增长条件，即存在一个常数 $K > 0$，使得*

$$|f(x)| \leq K(1 + |x|). \tag{3.2}$$

假设 3.3. *在这一章节中，我们假设 SDE(2.3) 的漂移项系数 f 是二阶连续可微的，并且存在常数 $K > 0$ 使得*

$$|f(x)f'(x)| + |\sigma f'(x)| + |\sigma^2 f''(x)| \leq K(1 + |x|). \tag{3.3}$$

3.2　等距步长的 EM 数值方法

下面的命题致力于推导 $\sup_{0\leq r\leq T}|X_r|$ 的 p 阶矩存在的充分条件，其中 X 是 SDE(2.3) 的解。这些条件对于本论文主要定理的建立是必要的。理论上这个可以扩展到所有的正数 p 吧。ifthen 下面的单边 lip 的的系数可以满足任何的次/超线性增长。当然如果我们能证明下面的那些实际上是满足超线性的话，那么就可以直接得到了，这里就不需要扩展了。

命题 3.1. *令 X 是 SDE(2.3) 的解，其中 f 满足假设 3.1和假设 3.2，那么对于任意的 $p \geq 1$，存在常数 c_1, c_1，使得 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}] < c_1 e^{c_2 E_T}$.，其中 $Y_t^{(p)} := 1 + \sup\limits_{0\leq r\leq t}|X_r|^p$, .*

证明： 设 $S_\ell := \inf\{t \geq 0 : Y_t^{(p)} > \ell\}$，其中 $\ell \in \mathbb{N}$。由于解 X 具有连续的路径，对每个 $t \geq 0$，$Y_t^{(p)} < \infty$，因此，随着 $\ell \to \infty$，$S_\ell \uparrow \infty$。对于 $\mathbb{P}_D$ 几乎处处的路径，我们首先将 Gronwall 型不等式应用于函数 $t \mapsto \mathbb{E}_B[Y_{t\wedge S_\ell}^{(p)}]$ 对于固定的 ℓ，然后令 $t = T$ 并在得到的不等式中让 $\ell \to \infty$ 来建立 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}]$ 的上界。请注意，由于 S_ℓ 的定义，

$$\int_0^t \mathbb{E}_B[Y_{r\wedge S_\ell}^{(p)}]\, dE_r \leq \ell E_t < \infty,$$

这使得我们可以安全地应用 Gronwall 型不等式。

假设 $p \geq 2$，因为对于 $1 \leq p < 2$ 的结果可以直接通过应用 $p \geq 2$ 时的结果和 Jensen 不等式得到。根据时间变换的 Itô 公式，有 $X_s^p = x_0^p + J_s + K_s$，其中

$$J_s := \int_0^s \sigma p X_r^{p-1}\, dB_{E_r};$$

$$K_s := \int_0^s \left\{ p X_r^{p-1} f(X_r) + \frac{\sigma^2}{2} p(p-1) X_r^{p-2} \right\} dE_r.$$

固定 $t \in [0, T]$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$。根据假设 3.2 以及不等式 $(x+y+z)^p \leq c_p(x^p + y^p + z^p)$，其中 $x, y, z \geq 0$ 且 $c_p = 3^{p-1}$，有

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |K_s| \right] \leq \left(p c_p K + \frac{1}{2} p(p-1) c_p K^2 \right) \int_0^{t \wedge S_\ell} \mathbb{E}_B [Y_r^{(p)}]\, dE_r.$$

由于 $(J_s)_{s \geq 0}$ 是一个局部鞅，应用 BDG 不等式得到

$$\mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |J_s| \right] \leq b_1 \mathbb{E}_B \left[\left(\int_0^{t \wedge S_\ell} \sigma^2 p^2 X_r^{2p-2}\, dE_r \right)^{1/2} \right],$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[\sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |J_s| \right] &\leq b_1 \mathbb{E}_B \left[p c_p K \left(Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)} \int_0^{t \wedge S_\ell} Y_r^{(p)}\, dE_r \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}_B \left[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)} \right] + 2 b_1^2 p^2 c_p^2 K^2 \int_0^{t \wedge S_\ell} \mathbb{E}_B \left[Y_r^{(p)} \right]\, dE_r, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由基本不等式 $(ab)^{1/2} \leq a/\lambda + \lambda b$ 导出，适用于任意 $a, b, \lambda > 0$，且 $\lambda := 2 b_1 p c_p K$. 注意，对于任意非负过程 $(L_t)_{t \geq 0}$，都有

$$\int_0^{t \wedge S_\ell} L_r\, dE_r \leq \int_0^t L_{r \wedge S_\ell}\, dE_r.$$

确实，当 $t \leq S_\ell$ 时，不等式显然成立，而如果 $t > S_\ell$，则

$$\int_0^{S_\ell} L_r\, dE_r + \int_{S_\ell}^t L_{S_\ell}\, dE_r \geq \int_0^{t \wedge S_\ell} L_r\, dE_r.$$

因此，通过上面对 J_s 和 K_s 的估计，有

$$\mathbb{E}_B[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) + 2K^2 \left(p c_p K + \left(p(p-1) c_p / 2 + 2 b_1^2 p^2 c_p^2 \right) \right) \int_0^t \mathbb{E}_B [Y_{r \wedge S_\ell}^{(p)}]\, dE_r,$$

通过应用 Gronwall 型不等式，得到

$$\mathbb{E}_B[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) e^{2K^2 E_T \left(p c_p K + \left(p(p-1) c_p / 2 + 2 b_1^2 p^2 c_p^2 \right) \right)}.$$

令 $t = T$，并让 $\ell \to \infty$，由于 $\xi(u)$ 不依赖于 ℓ，并应用单调收敛定理，可得

$$\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) e^{2K^2 E_T \left(p c_p K + \left(p(p-1) c_p / 2 + 2 b_1^2 p^2 c_p^2 \right) \right)}. \tag{3.4}$$

□

回顾一下，假设 X_t 是一个步长为 $\delta > 0$ 的逼近过程，如果存在有限的正常数，使得对于所有足够小的 δ ，有 $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\le t\le T}|X(t)-X_t|\right] \le C\delta^{\eta}$, 则我们称 X_t 强收敛于解 $X(t)$ 并且收敛阶数为 η.

对于随机微分方程 (2.3), 它的 EM 数值格式是:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_i})\Delta E_i + \sigma\Delta B_{E_i}, \quad i=0,1,2,\ldots, \qquad X_0 = X(0) \tag{3.5}$$

其中 $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$ 以及 $\Delta B_{E_i} = B(E(t_{i+1})) - B(E(t_i))$.

定理 3.1. *对于任意的常数 $\epsilon > 0$, 令 $\epsilon < T_1 < T_2$, $\lceil T_1/\Delta t\rceil = m$ 和 $\lceil T_2/\Delta t\rceil = n$, 在假设 3.1, 假设 3.2和假设 3.3的条件下, 存在常数 C, 使得下面的不等式成立:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{i=m,m+1,\ldots,n}|X(t_i)-X_{t_i}|\right] \le C\Delta t^{\alpha}$$

证明： 考虑 SDE (2.3)在 $[t_i, t_{i+1})$ 的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s))dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)). \tag{3.6}$$

由时间变换的变量变换公式 [3], 上式等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s)) = \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} f(X(D(s-)))ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)). \tag{3.7}$$

针对于漂移项 $f(X(D(s-)))$, 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-)))) - f(X(D(t_i-)))dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{D(t_i-)}^{D(t-)} df(X(s))dt. \tag{3.8}$$

由引理 2.3的时间变换 Itô 公式, 于是(3.8)变成

$$\begin{aligned}
&\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-))) - f(X(D(t_i-)))dt \\
&= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(D(s-)))f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s-)))\right)ds\,dt \\
&+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(D(s-)))\,dB(s)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由(3.7)与(3.9), 以及时间变换的变量变换公式可以得到

$$\begin{aligned}
X(t_{i+1}) = X(t_i) &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_i-)))\,dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\,dB(E(t)) \\
&+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(D(s-)))f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s-)))\right)ds\,dt \\
&+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(D(s-))))\,dB(s)\,dt \\
= X(t_i) &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i))\,dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\,dB(E(t))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{E(t_i)}^{E(t)}\left(f(X(D(s-)))f'(X(D(s-)))+\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s-)))\right)ds\,dE(t)\\
&+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{E(t_i)}^{E(t)}\sigma f'(X(D(s-)))\,dB(s)\,dE(t)\\
=&\,X(t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(X(t_i))\,dE(t)+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sigma\,dB(E(t))\\
&+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(s))f'(X(s))+\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s))\right)dE(s)\,dE(t)\\
&+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t).
\end{aligned}
$$

因此

$$
X(t_{i+1})=X(t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(X(t_i))\,dE(t)+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sigma\,dB(E(t))+R_i. \tag{3.10}
$$

将 R_i 分解成 $R_i=R_i^{(1)}+R_i^{(2)}$, 其中:

$$
\begin{aligned}
R_i^{(1)}&=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(s))f'(X(s))+\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s))\right)dE(s)\,dE(t),\\
R_i^{(2)}&=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t).
\end{aligned}
$$

使用 (3.7) 和(3.10)可以得到：

$$
X(t_{i+1})-X_{t_{i+1}}=X(t_i)-X_{t_i}+(f(x(t_i))-f(x_{t_i}^{\delta}))\Delta E_i+R_i. \tag{3.11}
$$

令 $e_i=X(t_i)-X_{t_i}$, 由假设 3.1得到：

$$
|e_{s+1}|\le(1+K\Delta E_s)|e_s|+R_s,\ \text{其中}s=m,\cdots,n. \tag{3.12}
$$

由引理 2.4, 可以得到 $|e_n|\le\sum\limits_{j=m-1}^{n-1}|R_{j+1}|\prod\limits_{l=j+1}^{n-1}|1+K\Delta E_l|$.

为了估计这个不等式，我们使用了逆从属过程 $E(t)$ 路径几乎处处 Hölder 连续的事实。具体地，对于每个 $0<\beta<1$，存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 t,s（当 $t\neq s$ 时），有

$$
|E(t)-E(s)|\le C|t-s|^{\beta}\quad \text{a.s.} \tag{3.13}
$$

其中，β 与 Lévy 过程 $D(t)$ 的稳定指数 α 相关，通常有 $\beta\le\alpha$。这一 Hölder 连续性表明，逆过程 $E(t)$ 的增量按照指数 α 的速率衰减，因此 $E(t)$ 展现出平滑的连续路径。于是,

$$
\sup_{k=m,\dots,n}\prod_{l=1}^{k}(1+K\Delta E_l)\le\sup_{k=m,\dots,n}\prod_{l=1}^{k}(1+C\Delta t^{\beta})
$$

通过对 Δt 取极限, 于是

$$
\sup_{k=m,\dots,n.}\prod_{l=1}^{k}(1+K\Delta E_l)<\infty
$$

于是:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{k=m,\ldots,n}|e_k|\right] \leq C\mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1}|R_{j+1}| \leq C\mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1}|R_{j+1}^{(1)}| + C\mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1}|R_{j+1}^{(2)}|. \tag{3.14}$$

于是对于第一项, 由假设 3.3, 命题 3.1和引理 2.7, 可以得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|R_{j+1}^{(1)}|\right] &= \mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\mathbb{E}_B\left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s))\right)dE(s)\,dE(t)\right]\\ &\leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\mathbb{E}_B\left[1+|X(s)|\right]dE(s)\,dE(t)\right]\\ &\leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}e^{E(T)}dE(s)\,dE(t)\right]\end{aligned}$$

这里的最后一个不等式是由于 (3.4). 由于 E_t 是 $\mathcal{G}_t$ 可测的, 并且满足引理 2.5, 于是存在 $T>0$ 使得 $E_T<T$. 同样的当 $t\leq T$, 我们可以得到

$$E_t \leq E_T \leq T, \tag{3.15}$$

因此我们可以得到

$$\mathbb{E}\left[|R_{j+1}^{(1)}|\right] \leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}e^{T}dE(s)\,dE(t)\right] \leq C\Delta t^{1+\alpha}.$$

于是, 我们利用期望的线性性质, 可以得到

$$\mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1}|R_{j+1}^{(1)}| = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}|R_{j+1}^{(1)}| \leq C\sum_{j=0}^{n-1}\Delta t^{1+\alpha} \leq C\Delta t^{\alpha}. \tag{3.16}$$

对于第二项 $\mathbb{E}|\sum_{j=0}^{n-1}R_{j+1}^{(2)}|$, 通过 BDG 不等式和引理 2.7可以得到于是,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|R_{j+1}^{(2)}|\right] &= \mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}_B\left[\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(s))dB_{E(s)}\right]dE(t)\right]\\ &\leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{t}\mathbb{E}_B\left(\sigma f'(X(s))\right)^2dE(s)\right]^{\frac{1}{2}}dE(t)\right]\\ &\leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{t}\mathbb{E}_B\left[1+|X(s)|\right]^2dE(s)\right]^{\frac{1}{2}}dE(t)\right]\\ &\leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{t}e^{2E(T)}dE(s)\right]^{\frac{1}{2}}dE(t)\right]\\ &\leq C\left\{\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{t}e^{2E(T)}dE(s)\right]^{\frac{1}{2}}dE(t)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\Delta t^{\frac{1}{2}+\alpha}.\end{aligned}$$

使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可以得到:

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^{(2)}\right| \leq C\mathbb{E}\left|\sum_{j=0}^{n-1}(R_{j+1}^{(2)})^2\right|^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(R_{j+1}^{(2)})^2} \leq C\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1}\Delta t^{1+2\alpha}} \leq C\Delta t^{\alpha}. \tag{3.17}$$

于是结合 (3.16) 和 (3.17), 得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{k=m\ldots n}|e_k|\right] \leq C\Delta t^{\alpha}.$$

□

3.3　随机步长的 EM 数值方法

首先，我们描述一种用于逆从属过程 E 的近似方法，该方法在 [15,16] 中给出。固定等距步长 $\delta > 0$ 和时间区间 $T > 0$。为了在区间 $[0, T]$ 上近似 E，我们首先模拟从属过程 D 的样本路径，该过程具有独立且平稳的增量，设定 $D_0 = 0$，然后按照规则 $D_i^\delta := D_{i-1}^\delta + Z_i$，其中 $i = 1, 2, 3, \ldots$，并且 $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个 i.i.d. 序列，且每个 Z_i 都服从分布 $Z = \Delta D_\delta$。我们在找到满足 $T \in [D_{N\delta}, D_{(N+1)\delta})$ 的整数 N 时停止这个过程。请注意，$\mathbb{N}$-值的随机变量 N 确实存在，因为几乎必然 $D_t \to \infty$ 当 $t \to \infty$ 时。为了生成随机变量 (Z_i)，可以使用 [2] 第六章中给出的算法。接下来，定义 $E^\delta := (\min(n \in \mathbb{N}; D_{n\delta} > t) - 1)\delta$。过程 $E^\delta = (E_t^\delta)_{t\geq 0}$ 是非递减的阶梯函数，具有常数跳跃大小 δ，并且第 i-次等待时间为 $Z_i = D_i^\delta - D_{i-1}^\delta$。事实上，很容易看出，对于 $n = 0, 1, 2, \ldots, N$，当 $t \in [D_{n\delta}, D_{(n+1)\delta})$ 时，$E^\delta = n\delta$。特别地，$E^\delta = N\delta$。如 [10,16] 所述，过程 E^δ 有效地近似 E；即，几乎必然地，

$$E_t - \delta \leq E^\delta \leq E_t \quad 对于所有 \quad t \in [0, T].$$

现在，对于 $n = 0, 1, 2, \ldots, N$，设定

$$\tau_n = D_{n\delta}.$$

根据 B 和 D 之间的独立假设，我们可以在时间步长 $\{0, \delta, 2\delta, \ldots, N\delta\}$ 上近似布朗运动 B。基于这一点，定义离散时间过程 $(X_{\tau_n})_{n\in\{0,1,2,\ldots,N\}}$ 为 $X_0 := x_0$，对于 $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$，有

$$X_{\tau_{n+1}} := X_{\tau_n} + f\left(X_{\tau_n}\right)\left(E_{\tau_{n+1}} - E_{\tau_n}\right) + \sigma\left(B_{E_{\tau_{n+1}}} - B_{E_{\tau_n}}\right). \tag{3.18}$$

由于关系 $E_{\tau_n} = n\delta$，上述等式等价于

$$X_{\tau_{n+1}} := X_{\tau_n} + f\left(X_{\tau_n}\right)\delta + \sigma\left(B_{(n+1)\delta} - B_{n\delta}\right). \tag{3.19}$$

注意，尽管表达式 (3.19) 看起来像是采取了非随机时间步长，但实际上我们确实采取了随机时间步长 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ 来离散化驱动过程 $E = (E_t)_{t\geq 0}$ 和 $B \circ E = (B_{E_t})_{t\geq 0}$，如 (3.18) 中所示；因此，时间变化过程的随机捕捉事件的关键特性（即产生常数时间段的部分）实际上是由随机步长 $\tau_{n+1} - \tau_n = D_{(n+1)\delta} - D_{n\delta} = \Delta D_\delta$ 所捕捉的。**{**此外，注意我们并没有通过非随机时间步长来离散化 SDE；如果这样做会变得非常困难，因为驱动过程 E 和 $B \circ E$ 都没有独立增量，也没有平稳增量。**}**

为了定义一个连续时间过程 $(X_t)_{t\in[0,T]}$，我们采用连续插值；即，当 $s \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ 时，

$$X_s := X_{\tau_n} + \int_{\tau_n}^{s} f\left(X_{\tau_n}\right) dE_r + \int_{\tau_n}^{s} \sigma dB_{E_r}. \tag{3.20}$$

定义

$$n_t = \max\left\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \tau_n \leq t\right\} \text{ 对于} t \geq 0.$$

那么显然对于任何 $t > 0$，都有 $\tau_{n_t} \leq t < \tau_{n_t+1}$。利用 (3.19) 和恒等式 $X_s - x_0 = \sum_{i=0}^{n_s-1}\left(X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}\right) + \left(X_s - X_{\tau_{n_s}}\right)$，我们可以将 $X_s - x_0$ 表示为

$$\sum_{i=0}^{n_s-1}\left[f\left(E_{\tau_i}, X_{\tau_i}\right)\delta + \sigma\left(B_{(i+1)\delta} - B_{i\delta}\right)\right] + \left(X_s - X_{\tau_{n_s}}\right).$$

其中我们使用了 $i\delta = E_{D_{i\delta}} = E_{\tau_i}$。利用 (3.21) 以及事实 $\tau_i = \tau_{n_r}$ 对于任意 $r \in [\tau_i, \tau_{i+1})$，我们可以将后者重新写成如下便于处理的形式：

$$X_s = x_0 + \int_0^s f\left(X_{\tau_{n_r}}\right) dE_r + \int_0^s \sigma\, dB_{E_r}. \tag{3.21}$$

接下来，我们来证明本章节第二个重要定理.

定理 3.2. *设 X 为 SDE(2.3) 的解，在 假设 3.1, 假设 3.2和假设 3.3的条件下，设 X_t 为在 (3.19) 和 (3.21) 中定义的 EM 数值方法。则存在与 δ 无关的常数 $C > 0$，使得对所有 $\delta \in (0,1)$，*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X(s) - X_s\right|\right] \leq C\delta$$

因此，X_t 在 $[0,T]$ 上以 1 阶一致强收敛于 $X(t)$。

证明： 类似于定理 3.1, 通过 Itô 公式展开，可以得到

$$X(\tau_{n+1}) = X(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} f(X(\tau_n))\, \mathrm{d}E_u + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \sigma\, \mathrm{d}B_{E_u} + R_{(\tau_n,\tau_{n+1})}; \tag{3.22}$$

$$
\begin{aligned}
R_{(a,b)} :=& \int_a^b \int_a^v \left(f(X(\tau_{n_u}))f'(X(\tau_{n_u})) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X(\tau_{n_u})) \right) \mathrm{d}E_u \,\mathrm{d}E_v \\
&+ \int_a^b \int_a^v \sigma f'(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v,
\end{aligned}
$$

将 (3.21) 与 (3.22) 相减, 可以得到 $Z_t := \sup_{0\le s\le t} |X(s) - X_s| \le I_1 + I_2$，其中

$$
\begin{aligned}
I_1 :=& \sup_{0\le s\le t} \left| \int_0^s f(X(\tau_{n_u})) - f(X_{\tau_{n_u}})\,\mathrm{d}E_u \right|; \\
I_2 :=& \sup_{0\le s\le t} \left| \sum_{i=0}^{n_s-1} R_{(\tau_t,\tau_{t+1})} + R_{(\tau_{n_s},s)} \right|.
\end{aligned}
$$

对于 I_1, 可以由假设 3.1得到

$$
\mathbb{E}_B[I_1] \le K \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_u]\,\mathrm{d}E_u. \tag{3.23}
$$

主要的技术部分涉及余项 I_2，其中包含两个不同的双重积分：$\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v$ 和 $\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v$。我们将在下面逐一处理这些积分。

对于第一个积分 $\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t} \left| \int_0^s \int_{\tau_{n_v}}^v f(X(\tau_{n_u}))f'(X(\tau_{n_u})) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v \right| \right] \\
&\le \frac{3}{2} K \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \int_0^t \int_{\tau_{n_v}}^v \mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v \\
&\le \frac{3}{2} K E_T \mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}]\delta.
\end{aligned}\tag{3.24}
$$

这里出现 δ 而不是 δ^α 的主要原因是我们采用的是随机离散的数值格式.

另一方面, 我们需要估计 $\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t} |M_{n_s} + U_s|\right]$, 其中 $M_0 := 0$, 对于 $n \ge 1$, $M_n := \sum_{i=0}^{n-1} L_i$,

$$
L_i := \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \int_{\tau_i}^v \sigma f'(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v, \quad U_s := \int_{\tau_{n_s}}^s \int_{\tau_{n_s}}^v \sigma f'(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v.
$$

我们首先验证随机积分 $L_i, i = 0, 1, \ldots, n_t - 1$ 关于 $\mathbb{P}_B$ 是不相关的。令 $i < j$，因此 $\tau_{i+1} \le \tau_j$。观察到 $\mathbb{E}_B[L_i L_j] = \mathbb{E}_B\left[L_i \mathbb{E}_B[L_j|\mathcal{F}_{E_{\tau_j}}]\right]$。根据假设和估计 (3.4)，

$$
\mathbb{E}_B\left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left| \int_{\tau_j}^v \sigma f'(X(u))\,\mathrm{d}B_{E_u} \right|^2 \mathrm{d}E_v \right] \le \delta^2 K^2 \mathbb{E}_B[Y_t^{(2)}] < \infty.
$$

因此，$\mathbb{E}_B\left[L_j|\mathcal{F}_{E_{\tau_j}}\right] = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{E}_B\left[\int_{\tau_j}^v \sigma f'(X(u))\,\mathrm{d}B_{E_u}|\mathcal{F}_{E_{\tau_j}}\right] \mathrm{d}E_v = 0$，这是由于条件 Fubini 定理（参考文献 [26] 中的定理 27.17）和鞅性质，从而得到不相关性。另一方面，由于 E 具有连续路径，变量变换公式（参考文献 [13] 中的定理 3.1）表明 M_n 可以表示为

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\delta}^{(i+1)\delta}\int_{i\delta}^{E_v}\sigma f'(X(D_{u-}))\,\mathrm{d}B_u\,\mathrm{d}v$$

该表示式，以及参考文献 [12] 中引理 5.7.1 和 10.8.1 的证明，表明离散时间过程 $(M_n)_{n\geq 0}$ 是一个平方可积的 $((\mathcal{F}_{n\delta})_{n\geq 0},\mathbb{P}_B)$-鞅，初始值为 0。因此，由 BDG 不等式 (3.2) 和 L_i 的不相关性，

$$\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\leq s\leq t}M_{n_s}^2\right]\leq b_2\sum_{i=0}^{n_t-1}\mathbb{E}_B[L_i^2]$$

因此，由 Cauchy-Schwartz 不等式，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\leq s\leq t}M_{n_s}^2\right]&\leq b_2\delta\sum_{i=0}^{n_t-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\mathbb{E}_B\left[\int_{\tau_i}^{v}|\sigma f'(X(u))|^2\,\mathrm{d}E_u\right]\mathrm{d}E_v\\&\leq 2b_2\delta K^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\sum_{i=0}^{n_t-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(E_v-E_{\tau_i})\mathrm{d}E_v\\&\leq 2b_2E_TK^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^2.\end{aligned}\tag{3.25}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\leq s\leq t}U_s^2\right]&\leq\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\leq s\leq t}(E_s-E_{\tau_{n_s}})\int_{\tau_{n_s}}^{s}\left|\int_{\tau_{n_s}}^{v}\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\mathrm{d}E_v\right]\\&\leq\delta\int_0^t\mathbb{E}_B\left[\sup_{s\in[v,t]}\left|\int_{\tau_{n_s}}^{v}\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\right]\mathrm{d}E_v.\end{aligned}\tag{3.26}$$

由于 $\{(\tau_{n_s},v):v\leq s\leq t\}\subset\{(\tau_{n_v},r):\tau_{n_v}\leq r\leq s\}$, 于是

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_B\Big[\sup_{s\in[v,t]}\Big|\int_{\tau_{n_s}}^{v}\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\Big|^2\Big]\\&\leq\mathbb{E}_B\left[\sup_{r\in[\tau_{n_v},v]}\left|\int_{\tau_{n_v}}^{r}\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\right]\\&\leq b_2\mathbb{E}_B\left[\int_{\tau_{n_v}}^{r}|\sigma f'(X(u))|^2\,\mathrm{d}E_u\right]\\&\leq 2b_2K^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta.\end{aligned}$$

因此，(3.26) 的上界为 $2b_2E_TK^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^2$. 将其与 (3.25) 结合得:

$$\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\leq s\leq t}|M_{n_s}+U_s|^2\right]\leq 8b_2E_TK^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^2.\tag{3.27}$$

根据估计 (3.24) 和 (3.27)，

$$\mathbb{E}_B[I_2]\leq\left\{\frac{3}{2}E_T\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}]+(8b_2E_T\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}])^{1/2}\right\}K\delta.\tag{3.28}$$

现在，将 (3.23) 和 (3.28) 与 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}] \le \sqrt{2}\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}$ 结合得:

$$\mathbb{E}_B[Z_t] \le \xi_2(E_T)\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}\delta + K\int_0^t \mathbb{E}_B[Z_u]\mathrm{d}E_u.$$

其中 $\xi_2(u) := K(\frac{3\sqrt{2}}{2}u + (8b_2u)^{1/2})$. 应用 Gronwall 类型不等式, 对两边取 $\mathbb{E}_D$ 并使用 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$\mathbb{E}[Z_T] \le \mathbb{E}[\xi_2^4(E_T)]^{1/4}\mathbb{E}[(Y_T^{(2)})^2]^{1/4}\mathbb{E}[e^{2KE_T}]^{1/2}\delta.$$

由于对于任意的 $\lambda > 0, t > 0, n > 0$, 都有 $\mathbb{E}[e^{\lambda E_t}] < \infty$, 以及 $\mathbb{E}[E^n(t)] < \infty$, 再结合命题 3.1, 于是可以得到该定理成立. □

注 3.1. *从定理的结论可以看出来, 对于同样的 EM 数值方法, 由于步长选取方式的不同, 得到的收敛阶也会随之改变. 相比较而言, 使用随机离散的数值格式可以达到更高的收敛阶.*

3.4 数值模拟

3.4.1 时间变换的 OU 过程

例 3.1. *考虑时间变换的的布朗运动驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程*

$$dX(t) = \mu X(t)dE_t + \sigma dB_{E_t}. \tag{3.29}$$

对于假设 3.1, 假设 3.2和假设 3.3, 显然该例子是满足的. 该方程对应的 EM 数值格式是:

$$X_{i+1} = (1 + \mu\Delta E_i)X_i + \sigma\Delta B_{E_i}$$

在我们的数值实验中, 我们关注端点 $T = 1$ 处的 L_1 误差, 因此我们令

$$e_T^i = \mathbb{E}\left|X_T^{\delta_4} - X_T^{\delta_i}\right|,$$

其中 $X_T^{\delta_i}$ 是步长为 δ_i 时 T 处的模拟值, $\delta_i = 2^{-i}$, 对于我们的数值实验, 我们设 $\mu = 1, \sigma = 1$, 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3}\sum_{j=1}^{10^3}\left|X_T^{\delta_{14}} - X_T^{\delta_i}\right|, \quad \text{其中 i = 6,7,8,9.}$$

选择步长为 2^{-14} 作为参考, 通过 $2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, 2^{-9}$ 的步长来估计 L_1 误差. 下表为取不同 α 时, 收敛阶和误差之间的对比

α	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
收敛阶 (非等距)	0.9937	1.0345	1.0195	1.0204	1.0261	1.0318	1.0283	1.0281
收敛阶 (等距)	–	–	–	0.5932	0.7074	0.7890	0.9085	0.9908

表 3.1 不同 α 对应的收敛率和误差

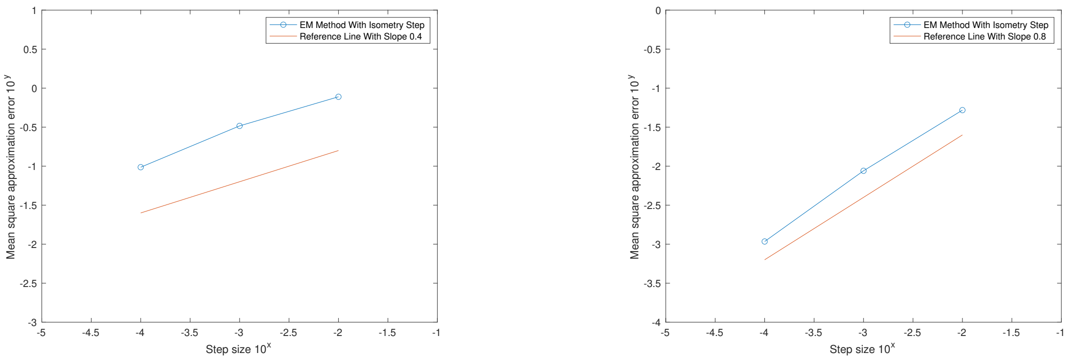

图 3.1 在等距步长下, EM 方法的 L_1 误差, 左图为 $\alpha = 0.4$, 右图为 $\alpha = 0.8$

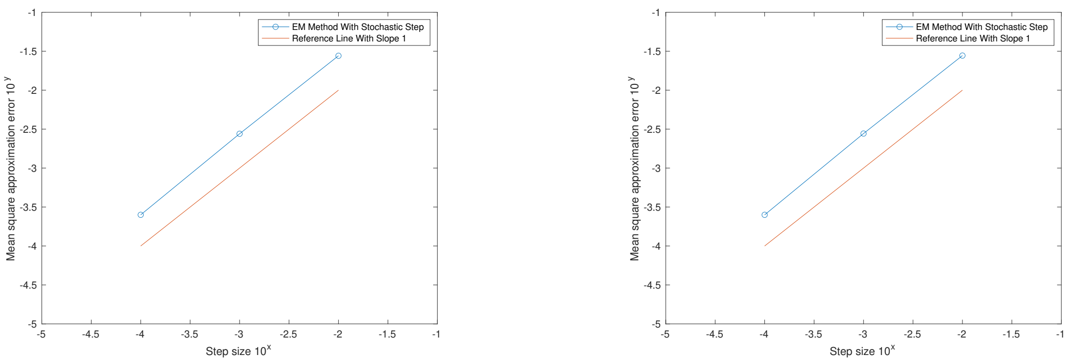

图 3.2 在随机步长下, EM 方法的 L_1 误差, 左图为 $\alpha = 0.4$, 右图为 $\alpha = 0.8$

第 4 章　BEM 数值方法

4.1　假设

假设 4.1. *在这一章节的中, 我们假设 SDE(2.3) 的漂移项系数 f 满足超线性增长条件, 即存在一个常数 $K>0$ 和 $\gamma>1$, 使得*

$$|f(x)| \leq K(1+|x|^{\gamma}). \tag{4.1}$$

假设 4.2. *在这一章节中, 我们假设 SDE(2.3) 的漂移项系数 f 是二阶连续可微的, 并且存在常数 $K>0$ 和 $\gamma>1$, 使得*

$$|f(x)f'(x)| + |\sigma f'(x)| + |\sigma^2 f''(x)| \leq K(1+|x|^{\gamma}). \tag{4.2}$$

对于 SDE(2.3) 在漂移项系数 f 在单调条件下, 解的存在唯一性的证明可以参考 [17] 中漂移性满足全局 Lipschitz 条件的证明.

4.2　等距步长的 BEM 数值方法

假设 4.3. *在这一小节中, 我们令 $c\in[-\infty,+\infty), I=(c,+\infty)$, $d\in I$ 是区间中任意的一点, 并且假设 SDE(2.3) 的漂移项系数 f 满足下述单调性:*

$$f: I \to \mathbb{R}, \exists K\in\mathbb{R}, \forall x,y\in I, x\leq y, f(y)-f(x)\leq K(y-x). \tag{4.3}$$

类似与命题 3.1, 我们可以得到下面的命题.

命题 4.1. *令 X 是 SDE(2.3) 的解, 其中 f 满足假设 4.3和假设 4.1, 那么对于任意的 $p\geq 1$, 存在常数 c_1, c_1, 使得 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}] < c_1 e^{c_2 E_T}$., 其中 $Y_t^{(p)} := 1+\sup\limits_{0\leq r\leq t}|X_r|^p$.*

对于随机微分方程 (2.3), 它的 BEM 数值格式是:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_{i+1}})\Delta E_i + \sigma\Delta B_{E_i}, \quad i=0,1,2,\ldots, \qquad X_0 = X(0) \tag{4.4}$$

其中 $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$ 以及 $\Delta B_{E_i} = B(E(t_{i+1})) - B(E(t_i))$.

定理 4.1. *对于任意的常数 $\epsilon>0$, 令 $\epsilon<T_1<T_2, \lceil T_1/\Delta t\rceil = m$ 和 $\lceil T_2/\Delta t\rceil = n$, 在假设 4.3, 假设 4.1和假设 4.2的条件下, 存在常数 C, 使得下面的不等式成立:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{i=m,m+1,\ldots,n}|X(t_i)-X_{t_i}|\right] \leq C\Delta t^{\alpha}.$$

证明： 由于第一变量变换和第二变量变换公式引理 2.1, 引理 2.2的成立, 使得我们

可以考虑 (2.3) 在 $[t_i, t_{i+1})$ 的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s))dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)) \tag{4.5}$$

等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s)) = \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} f(X(D(s-)))ds + \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} \sigma dB(s) \tag{4.6}$$

针对于漂移项 $f(X(D(s-)))$, 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-)))) - f(X(D(t-)))dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t-)}^{D(t_{i+1}-)} df(X(s))dt \tag{4.7}$$

对于 $df(X(s))$, 由引理 2.3的时间变换 Itô 公式:

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(0) = &\int_0^{E(t)} f(X(D(s-)))f'\left(X(D(s-))\right) + \frac{\sigma^2}{2} f''\big(X(D(s-))\big)ds \\ &+ \int_0^{E(t)} \sigma f'\big(X(D(s-))\big)dB(s) \end{aligned}$$

于是 (4.7) 变成

$$\begin{aligned} &\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-))) - f(X(D(t-)))dt \\ &= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(D(s)))f'(X(D(s))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds\, dt \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s)))\, dB(s)\, dt. \end{aligned} \tag{4.8}$$

由 (4.6) 与 (4.8), 以及 [3, Theorem 3.1] 可以得到

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) = &X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}))) \, dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \, dB(E(t)) \\ &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(D(s)))f'(X(D(s))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds\, dt \\ &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s)))) \, dB(s)\, dt \\ = &X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) \, dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \, dB(E(t)) \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \left(f(X(D(s)))f'(X(D(s))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds\, dE(t) \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \sigma f'(X(D(s))) \, dB(s)\, dE(t) \\ = &X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) \, dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma \, dB(E(t)) \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\, dE(t) \end{aligned}$$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t)$$

因此

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_{i+1}))\, dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\, dB(E(t)) + R_i \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned} R_i = &-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\, dE(t) \\ &-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t) \end{aligned}$$

将 R_i 分解成 $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$, 其中:

$$R_s^{(1)} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\, dE(t).$$

$$R_s^{(2)} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t)$$

和离散格式相减, 即 (4.9)-(4.4) 得到:

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}} = X(t_i) - X_{t_i} + (f(X(t_{i+1})) - f(X_{t_{i+1}}))\Delta E_i + R_i \tag{4.10}$$

令 $e_i = X(t_i) - X_{t_i}$ 由假设 4.3得到:

$$(1 - K_1\Delta E_s)e_{s+1} \leq e(s) + R_s, \quad 其中 s = m, m+1, \ldots, n \tag{4.11}$$

由逆从属过程 $E(t)$ 的 Hölder 连续性, 即 (3.13), 可以得到

$$\sup_{k=m,\ldots,n} \prod_{l=m}^{k} (1 - K_1\Delta E_l)^{-1} < \sup_{k=m,\ldots,n} \prod_{l=m}^{k} (1 - C\Delta t^{\gamma})^{-1} \tag{4.12}$$

通过对 Δt 取极限, 于是

$$\sup_{k=m,\ldots,n} \prod_{l=m}^{k} (1 - K_1\Delta E_l)^{-1} < \infty$$

结合 (4.12), 由引理 2.4我们可以得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{k=m,\ldots,n} |e_k|\right] \leq C\mathbb{E}\sum_{j=m}^{n}\left|R_j^{(1)}\right| + C\mathbb{E}\sum_{j=m}^{n}\left|R_j^{(2)}\right|.$$

对于第一项, 由假设 4.2, 命题 4.1和 (3.15), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|R_{j+1}^{(1)}|\right] &= \mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t} \mathbb{E}_B\left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\, dE(t)\right] \\ &= C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t} \mathbb{E}_B\left[1 + |X(s)|^{\gamma}\right] dE(s)\, dE(t)\right] \\ &\leq C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t} e^{\gamma E(s)} dE(s)\, dE(t)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t} e^{\gamma T}dE(s)\,dE(t)\right]\\
&\le C\Delta t^{1+\alpha}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_{m}^{n}\mathbb{E}\left|R_j^{(1)}\right| \le C\sum_{j=m}^{n}\Delta t^{1+\alpha} \le C\Delta t^{\alpha} \tag{4.13}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_k^{(2)}|\mathcal{F}_{k\Delta t}\right] &= \mathbb{E}_D\mathbb{E}_B\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t)\right]\\
&= \mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}_B\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t)\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum_{j=m}^{n}R_j^{(2)}
$$

是鞅. 我们知道由 BDG 不等式和引理 2.7可以得到:

$$
\mathbb{E}[dB_E dE]^2 = \mathbb{E}[(dB_E)^2(dE)^2] = \mathbb{E}_D[(dE)^2\mathbb{E}_B(dB_E)^2] \le C\mathbb{E}_D[dE]^3 \le C\Delta t^{1+2\alpha}
$$

于是对于第二项,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|R_{j+1}^{(2)}|\right] &= \mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}_B\left[\int_{t_i}^{t}\sigma f'(X(s))dB_{E(s)}\right]dE(t)\right]\\
&\le C\mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{t}\mathbb{E}_B\left(\sigma f'(X(s))\right)^2dE(s)\right]^{\frac{1}{2}}dE(t)\right]\\
&\le C\mathbb{E}_D\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{t}1dE(s)\right]^{\frac{1}{2}}dE(t)\\
&\le C\Delta t^{\frac{1}{2}+\alpha}.
\end{aligned}
$$

由 BDG 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可以得到:

$$
\mathbb{E}\sum_{j=m}^{n}\left|R_j^{(2)}\right| \le C\mathbb{E}\left|\sum_{j=m}^{n}(R_j^{(2)})^2\right|^{\frac{1}{2}} \le C\sqrt{\sum_{j=m}^{n}\mathbb{E}(R_j^{(2)})^2} \le C\sqrt{\sum_{j=m}^{n}\Delta t^{1+2\alpha}} \le C\Delta t^{\alpha}
$$

综上所述,

$$
\mathbb{E}[e_n] \le C\Delta t^{\alpha}
$$

□

4.3　随机步长的 BEM 数值方法

这里也得修改单调条件

假设 4.4. 在这一小节中, 我们假设 *SDE(2.3)* 的漂移项系数 f 满足单边 *Lipschitz*, 即存在常数 $K>0$ 使得

$$(x-y)(f(x)-f(y)) \le K|x-y|^2 \tag{4.14}$$

类似与 (3.19) 和 (3.21), 我们可以得到对应的 BEM 数值格式.

$$X_{\tau_{n+1}} := X_{\tau_n} + f\left(X_{\tau_{n+1}}\right)\delta + \sigma\left(B_{(n+1)\delta} - B_{n\delta}\right). \tag{4.15}$$

$$X_s := X_{\tau_n} + \int_{\tau_n}^{s} f\left(X_{\tau_{n+1}}\right) dE_r + \int_{\tau_n}^{s} \sigma dB_{E_r}. \tag{4.16}$$

定理 4.2. 设 X 为 *SDE*(2.3) 的解，在假设 4.1, 假设 4.2和假设 4.4的条件下, 设 X_t 为在 (4.15) 和 (4.16) 中定义的 *BEM* 数值方法。则存在与 δ 无关的常数 $C>0$，使得对所有 $\delta \in (0,1)$，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T} |X(s)-X_s|\right] \le C\delta$$

因此，X_t 在 $[0,T]$ 上以 *1* 阶一致强收敛于 $X(t)$。

证明： 类似于定理 3.1, 通过 Itô 公式展开，可以得到

$$X(\tau_{n+1}) = X(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} f(X(\tau_{n+1}))\,\mathrm{d}E_u + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \sigma\,\mathrm{d}B_{E_u} + R_{(\tau_n,\tau_{n+1})}; \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} R_{(a,b)} := &\int_a^b \int_v^b \left(f(X(\tau_{n_u}))f'(X(\tau_{n_u})) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X(\tau_{n_u})) \right) \mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v \\ &+ \int_a^b \int_v^b \sigma f'(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v, \end{aligned}$$

将 (4.16) 与 (4.17) 相减, 可以得到 $Z_t := \sup_{0\le s\le t}|X(s)-X_s| \le I_1 + I_2$，其中

$$\begin{aligned} I_1 &:= \sup_{0\le s\le t} \left| \int_0^s f(X(\tau_{n_u})) - f(X_{\tau_{n_u}})\,\mathrm{d}E_u \right|; \\ I_2 &:= \sup_{0\le s\le t} \left| \sum_{i=0}^{n_s-1} R_{(\tau_t,\tau_{t+1})} + R_{(\tau_{n_s},s)} \right|. \end{aligned}$$

对于 I_1, 可以由假设 3.1得到

$$\mathbb{E}_B[I_1] \le K \int_0^t \mathbb{E}_B[Z_u]\,\mathrm{d}E_u. \tag{4.18}$$

主要的技术部分涉及余项 I_2，其中包含两个不同的双重积分：$\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v$ 和 $\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v$。我们将在下面逐一处理这些积分。

对于第一个积分 $\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v$，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s\int_{\tau_{n_v}}^v f(X(\tau_{n_u}))f'(X(\tau_{n_u}))+\frac{\sigma^2}{2}f''(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v\right|\right]\\ &\le\frac{3}{2}K\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}]\int_0^t\int_{\tau_{n_v}}^v\,\mathrm{d}E_u\,\mathrm{d}E_v\\ &\le\frac{3}{2}KE_T\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}]\delta.\end{aligned}\tag{4.19}$$

这里出现 δ 而不是 δ^α 的主要原因是我们采用的是随机离散的数值格式.

另一方面，我们需要估计 $\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}|M_{n_s}+U_s|\right]$，其中 $M_0:=0$，对于 $n\ge 1$，$M_n:=\sum_{i=0}^{n-1}L_i$，

$$L_i:=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\int_v^{\tau_{i+1}}\sigma f'(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v,\quad U_s:=\int_{\tau_{n_s}}^s\int_v^s\sigma f'(X(\tau_{n_u}))\,\mathrm{d}B_{E_u}\,\mathrm{d}E_v.$$

我们首先验证随机积分 $L_i, i=0,1,\ldots,n_t-1$ 关于 $\mathbb{P}_B$ 是不相关的。令 $i<j$，因此 $\tau_{i+1}\le\tau_j$。观察到 $\mathbb{E}_B[L_iL_j]=\mathbb{E}_B\left[L_i\mathbb{E}_B[L_j|\mathcal{F}_{E_{\tau_j}}]\right]$。根据假设和估计 (3.4)，

$$\mathbb{E}_B\left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\left|\int_v^{\tau_{j+1}}\sigma f'(X(u))\,\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\mathrm{d}E_v\right]\le\delta^2K^2\mathbb{E}_B[Y_t^{(2)}]<\infty.$$

因此，$\mathbb{E}_B\left[L_j|\mathcal{F}_{E_{\tau_j}}\right]=\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathbb{E}_B\left[\int_v^{\tau_{j+1}}\sigma f'(X(u))\,\mathrm{d}B_{E_u}|\mathcal{F}_{E_{\tau_j}}\right]\mathrm{d}E_v=0$，这是由于条件 Fubini 定理（参考文献 [26] 中的定理 27.17）和鞅性质，从而得到不相关性。另一方面，由于 E 具有连续路径，变量变换公式（参考文献 [13] 中的定理 3.1）表明 M_n 可以表示为

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\delta}^{(i+1)\delta}\int_{E_v}^{(i+1)\delta}\sigma f'(X(D_{u-}))\,\mathrm{d}B_u\,\mathrm{d}v$$

该表示式，以及参考文献 [12] 中引理 5.7.1 和 10.8.1 的证明，表明离散时间过程 $(M_n)_{n\ge0}$ 是一个平方可积的 $((\mathcal{F}_{n\delta})_{n\ge0},\mathbb{P}_B)$-鞅，初始值为 0。因此，由 BDG 不等式 (3.2) 和 L_i 的不相关性，

$$\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}M_{n_s}^2\right]\le b_2\sum_{i=0}^{n_t-1}\mathbb{E}_B[L_i^2]$$

因此，由 Cauchy-Schwartz 不等式，

$$\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}M_{n_s}^2\right]\le b_2\delta\sum_{i=0}^{n_t-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\mathbb{E}_B\left[\int_v^{\tau_{i+1}}|\sigma f'(X(u))|^2\,\mathrm{d}E_u\right]\mathrm{d}E_v$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2b_2\delta K^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\sum_{i=0}^{n_t-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(E_{\tau_{i+1}}-E_v)\mathrm{d}E_v \\
&\le 2b_2E_TK^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^2. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}U_s^2\right] &\le \mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}(E_s-E_{\tau_{n_s}})\int_{\tau_{n_s}}^{s}\left|\int_v^s\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\mathrm{d}E_v\right] \\
&\le \delta\int_0^t\mathbb{E}_B\left[\sup_{s\in[v,t]}\left|\int_v^s\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\right]\mathrm{d}E_v. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

由于 $\{(\tau_{n_s},v)\ :\ v\ \le\ s\ \le\ t\}\ \subset\ \{(\tau_{n_v},r)\ :\ \tau_{n_v}\ \le\ r\ \le\ s\}$, 于是

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_B\Big[\sup_{s\in[v,t]}\Big|\int_{\tau_{n_s}}^{v}\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\Big|^2\Big] \\
&\le \mathbb{E}_B\left[\sup_{r\in[\tau_{n_v},v]}\left|\int_{\tau_{n_v}}^{r}\sigma f'(X(u))\mathrm{d}B_{E_u}\right|^2\right] \\
&\le b_2\mathbb{E}_B\left[\int_{\tau_{n_v}}^{r}|\sigma f'(X(u))|^2\,\mathrm{d}E_u\right] \\
&\le 2b_2K^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta.
\end{aligned}
$$

因此，(4.21) 的上界为 $2b_2E_TK^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^2$. 将其与 (4.20) 结合得:

$$
\mathbb{E}_B\left[\sup_{0\le s\le t}|M_{n_s}+U_s|^2\right]\le 8b_2E_TK^2\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]\delta^2. \qquad (4.22)
$$

根据估计 (4.19) 和 (4.22),

$$
\mathbb{E}_B[I_2]\le\left\{\frac{3}{2}E_T\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}]+(8b_2E_T\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}])^{1/2}\right\}K\delta. \qquad (4.23)
$$

现在，将 (4.18) 和 (4.23) 与 $\mathbb{E}_B[Y_T^{(1)}]\le\sqrt{2}\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}$ 结合得:

$$
\mathbb{E}_B[Z_t]\le\xi_2(E_T)\mathbb{E}_B[Y_T^{(2)}]^{1/2}\delta+K\int_0^t\mathbb{E}_B[Z_u]\mathrm{d}E_u.
$$

其中 $\xi_2(u):=K(\frac{3\sqrt{2}}{2}u+(8b_2u)^{1/2})$. 应用 Gronwall 类型不等式, 对两边取 $\mathbb{E}_D$ 并使用 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$
\mathbb{E}[Z_T]\le\mathbb{E}[\xi_2^4(E_T)]^{1/4}\mathbb{E}[(Y_T^{(2)})^2]^{1/4}\mathbb{E}[e^{2KE_T}]^{1/2}\delta.
$$

由于对于任意的 $\lambda>0,t>0,n>0$, 都有 $\mathbb{E}[e^{\lambda E_t}]<\infty$, 以及 $\mathbb{E}[E^n(t)]<\infty$, 再结合命题 4.1, 于是可以得到该定理成立. □

4.4 数值模拟

例 4.1. *考虑时间变换的的布朗运动驱动的 CIR 过程*

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma\sqrt{y(t)}dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) > 0. \tag{4.24}$$

如果 $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, 那么 $D = (0, \infty)$ 并且**??** 在 $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ 是成立的. 另外, 使用 Itô 公式 $X(t) = F((y(t))$, 其中 F 是由 (2.2) 定义, 即对时间变换的 CIR 过程进行 Lamperti 变换可以得到

$$dX(t) = f(X(t))dE(t) + \frac{1}{2}\sigma dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \sqrt{y(0)} \tag{4.25}$$

其中

$$f(X) = \frac{1}{2}\kappa\left(\theta_v X^{-1} - X\right), \quad X > 0 \tag{4.26}$$

其中 $\theta_v = \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa}$, 并且 BEM 数值格式如下

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_{i+1}})\Delta E_i + \frac{1}{2}\sigma\Delta B_{E_i}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.27}$$

观察到

$$f'(X) = -\frac{1}{2}\kappa(\theta_v X^{-2} + 1) \tag{4.28}$$

以及

$$f(X)f'(X) + \frac{\sigma^2}{2}f''(X) = -\frac{\kappa^2}{4}(\theta_v^2 X^{-3} - X) + \frac{1}{2}\kappa\theta_v X^{-3}\sigma^2. \tag{4.29}$$

因此为了满足**??**, 只需要满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X(t)^{-3}] = \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[y(t)^{-\frac{3}{2}}] < \infty. \tag{4.30}$$

对于时间变换的 CIR 过程 y(t) 的矩有界, 即

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[y(t)^q] < \infty \quad \text{for} \quad q > -\frac{2k\theta}{\sigma^2}, \tag{4.31}$$

下面验证, 对于由时间变换的的布朗运动驱动的 CIR 过程 (4.24) 的精确解矩有界.

命题 4.2. *对于由时间变换的布朗运动驱动的 CIR 过程 (4.24), 其中* $y_0 > 0$,$1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$, *都存在一个常数* C *使得*

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left[(y(t))^{-p}\right] \leq C(1 + y(0)^{-p})$$

证明： 定义停时 $\tau_n = \inf\{0 < s \le T; y(s) \le 1/n\}$, 通过 Itô 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B\left[(y(t\wedge\tau_n))^{-p}\right] &= y(0)^{-p} - p\mathbb{E}_B\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{K(\theta-y(s))}{(y(s))^{p+1}}dE(s)\right] \\
&\quad + p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}\mathbb{E}_B\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{1}{(y(s))^{p+1}}dE(s)\right] \\
&\le y(0)^{-p} + pK\int_0^t \mathbb{E}_B\left(\frac{1}{(y(s\wedge\tau_n))^p}\right)dE(s) \\
&\quad + \mathbb{E}_B\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{p\left(\frac{(p+1)\sigma^2}{2}-K\theta\right)}{(y(s))^{p+1}}dE(s)\right]
\end{aligned}$$

通过计算可以找到正数 $\underline{C}$ 使得, 当 $\frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta < 0$ 时, 对于任意的 $y(0) = x > 0$, 都有

$$\frac{p\left(\frac{(p+1)\sigma^2}{2}-K\theta\right)}{x^{p+1}} \le \underline{C}$$

因此

$$\mathbb{E}_B\left[(y(t\wedge\tau_n))^{-p}\right] \le y(0)^{-p} + \underline{C}E(T) + pK\int_0^t \sup_{r\in[0,s]}\mathbb{E}_B\left[(y(r\wedge\tau_n))^{-p}\right]dE(s)$$

于是由 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}_B\left[(y(t\wedge\tau_n)^x)^{-p}\right] \le \left(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)\right)\exp(pKE(T))$$

两边同时取 $\mathbb{E}_D$ 并使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[(y(t\wedge\tau_n)^x)^{-p}\right] &\le \mathbb{E}\left[\left(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)\right)\exp(pKE(T))\right] \\
&\le \sqrt{\mathbb{E}\left[(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T))^2\right]\mathbb{E}\left[\exp(2pKE(T))\right]}
\end{aligned}$$

从 [4] 可以得到

$$\mathbb{E}[E^n(t)] = \frac{n!}{\Gamma(n\alpha+1)}t^{n\alpha} \tag{4.32}$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda E(t)}] < \infty \tag{4.33}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}, t > 0$. 最后, 让 $n \to +\infty$, 我们完成了这个证明. □

注 4.1. *在这里只是证明了当 $1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$ 的时候, 矩的存在性, 实际上更可以证明 $p < \frac{2K\theta}{\sigma^2}$, 但是证明起来过于复杂, 这里就不在说明, 对于我们的结果已经够用了.*

对于**??**, 可以验证只需要保证 $1 < \frac{4}{3}\frac{k\theta}{\sigma^2}$ 成立即可, 而这个区间可以被 $1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$ 包含在内, 因此只需要保证 p 在后者这个区间即可. 至于假设 4.3, 在 $(0,\infty)$ 中很容易可以验证存在这样的 κ 使之成立. 因此由定理 4.1可以得到, 对于时间变换的 CIR 过程, 使用 BEM 数值格式的强收敛阶是 α.

在我们的数值实验中, 我们关注端点 $T=1$ 处的 L_1 误差, 因此我们令

$$e_T^i = \mathbb{E}\left|X_T^{\delta_{15}} - X_T^{\delta_i}\right|$$

其中 $X_T^{\delta_i}$ 是步长为 δ_i 时 T 处的模拟值,$\delta_i = 2^{-i}$, 对于我们的数值实验, 取 $\theta = 0.125, \kappa = 2$ 以及 $\sigma = 0.5$, 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3}\sum_{j=1}^{10^3}\left|X_T^{\delta_{15}} - X_T^{\delta_i}\right|.$$

选择步长为 2^{-15} 作为参考, 通过 $2^{-11}, 2^{-10}, 2^{-9}, 2^{-8}$ 的步长来估计 L_1 误差.

例 4.2. *考虑时间变换的的布朗运动驱动的 CEV 过程*

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma y(t)^{\alpha} dB_{E(t)} \tag{4.34}$$

其中 $0.5 < \alpha < 1, \kappa, \theta, \sigma > 0$. 通过变换 $X(t) = F(y(t))$ 的变换之后, 其中 F 是由 (2.2) 定义, 我们可以得到假设 4.3在 $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ 下, 是成立的, 此时

$$dX(t) = f(X(t))dE(t) + (1-\alpha)\sigma dB(E(t))$$

其中

$$f(X) = (1-\alpha)\left(\kappa\theta X^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \kappa X - \frac{\alpha\sigma^2}{2}X^{-1}\right), \quad X > 0.$$

同时我们需要验证另一个**??**. 因为 $\alpha > 0.5$, 于是 $\frac{1}{1-\alpha} > 2$, 因此

$$f'(X) = -\alpha\kappa\theta X^{-\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\alpha)\kappa + (1-\alpha)\frac{\alpha\sigma^2}{2}X^{-2}, \quad X > 0$$

同时我们又有

$$f''(X) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\kappa\theta X^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - (1-\alpha)\alpha\sigma^2 X^{-3}.$$

下面验证, 对于由时间变换的的布朗运动驱动的 CEV 过程 (4.34) 的精确解矩有界.

命题 4.3. *对于由时间变换的布朗运动驱动的 CEV 过程 (4.34), 其中 $X_0 > 0$, 对于任意的 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 和任意的 $p > 0$, 都存在一个常数 C 使得*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[(y(t))^{-p}\right] \le C(1 + y(0)^{-p})$$

证明： 定义停时 $\tau_n = \inf\{0 < s \le T; y(s) \le 1/n\}$, 通过 Itô 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_B\left[(y(t\wedge\tau_n))^{-p}\right] &= y(0)^{-p} - p\mathbb{E}_B\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{K(\theta - y(s))}{(y(s))^{p+1}}dE(s)\right] \\
&+ p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}\mathbb{E}_B\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\frac{1}{(y(s))^{p+2(1-\alpha)}}dE(s)\right] \\
&\le y(0)^{-p} + pK\int_0^t \mathbb{E}_B\left(\frac{1}{(y(s\wedge\tau_n))^p}\right)dE(s) \\
&+ \mathbb{E}_B\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\left(p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{(y(s))^{p+2(1-\alpha)}} - p\frac{K\theta}{(y(s))^{p+1}}\right)dE(s)\right]
\end{aligned}$$

可以找到正数 C 使得, 对于任意的 $y(0)=x>0$, 都有

$$\left(p(p+1)\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{x^{p+2(1-\alpha)}}-p\frac{K\theta}{x^{p+1}}\right)\leq C$$

通过计算可以得到,$\underline{C}=p(2\alpha-1)\frac{\sigma^2}{2}\left[(p+2(1-\alpha))\frac{\sigma^2}{2K\theta}\right]^{\frac{p+2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$ 是最小的上界. 因此

$$\mathbb{E}_B\left[(y(t\wedge\tau_n))^{-p}\right]\leq y(0)^{-p}+\underline{C}E(T)+pK\int_0^t\sup_{r\in[0,s]}\mathbb{E}_B\left[(y(r\wedge\tau_n))^{-p}\right]dE(s)$$

于是由 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}_B\left[(y(t\wedge\tau_n)^x)^{-p}\right]\leq\left(y(0)^{-p}+\underline{C}E(T)\right)\exp(pKE(T))$$

两边同时取 $\mathbb{E}_D$ 并使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[(y(t\wedge\tau_n)^x)^{-p}\right]&\leq\mathbb{E}\left[\left(y(0)^{-p}+\underline{C}E(T)\right)\exp(pKE(T))\right]\\&\leq\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(y(0)^{-p}+\underline{C}E(T)\right)^2\right]\mathbb{E}\left[\exp(2pKE(T))\right]}\end{aligned}$$

从 [4] 可以得到

$$\mathbb{E}[E^n(t)]=\frac{n!}{\Gamma(n\alpha+1)}t^{n\alpha}\tag{4.35}$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda E(t)}]<\infty\tag{4.36}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R},t>0$. 最后, 让 $n\to+\infty$, 我们完成了这个证明. □

由 Lamperti 变换可知,$X(t)$ 的逆阶矩可以 $y(t)$ 的逆阶矩控制, 于是**??**成立. 因此根据定理 4.1可以得到由时间变换布朗运动驱动的 CEV 过程的收敛阶是 α

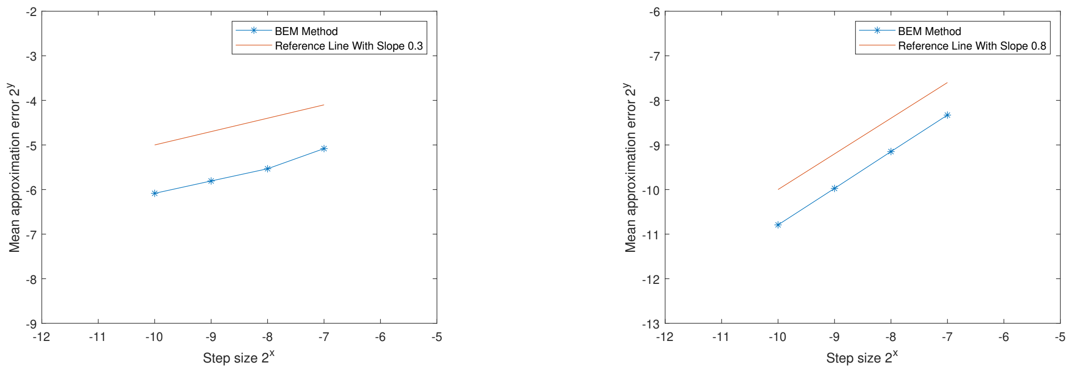

图 4.1　时间变换 CIR 过程的数值解与解析解之间的绝对误差估计. 左图是 $\alpha=0.3$, 右图是 $\alpha=0.8$

第 5 章　结论与展望

参考文献

[1] Meerschaert M M, Scheffler H P. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times[J]. Journal of applied probability, 2004, 41(3):623-638.

[2] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stoch Process Their Appl, 2009, 119(10):3238-3252.

[3] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. J. Theor. Probab., 2011, 24:789-820.

[4] Jum E, Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion[J]. Probab. Math. Statist, 2014.

[5] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. J. Math. Anal. Appl., 2019, 476(2):619-636.

[6] Deng C S, Liu W. Semi-implicit euler–maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. BIT Num. Math., 2020, 60:1133-1151.

[7] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators[J]. BIT Num. Math., 2021, 61(3): 829-857.

[8] Shen G, Zhang T, Song J, et al. On a class of distribution dependent stochastic differential equations driven by time-changed brownian motions[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2023, 88(2):33.

[9] Li Z, Xu L, Yan L. Mckean-vlasov stochastic differential equations driven by the time-changed brownian motion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023, 527(1):127336.

[10] Li Z, Huang B, Zhao J, et al. Transportation inequalities for stochastic differential equations driven by the time-changed brownian motion[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2023, 29(4):1571-1583.

[11] Wu D, Li Z, Xu L, et al. Mean square stability of the split-step theta method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. Applicable Analysis, 2024, 103(9):1733-1750.

[12] Wen X, Li Z, Xu L. Strong approximation of non-autonomous time-changed mckean–vlasov stochastic differential equations[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2023, 119:107122.

[13] Neuenkirch A, Szpruch L. First order strong approximations of scalar sdes defined in a domain [J]. Numer. Math., 2014, 128:103-136.

[14] Alfonsi A. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process[J]. Stat. Probab. Lett., 2013, 83(2):602 −607.

[15] Chen L, Gan S, Wang X. First order strong convergence of an explicit scheme for the stochastic sis epidemic model[J]. J. Comput. Appl. Math., 2021, 392:113482.

[16] Yang H, Huang J. First order strong convergence of positivity preserving logarithmic euler–maruyama method for the stochastic sis epidemic model[J]. Appl. Math. Lett., 2021, 121:107451.

[17] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion, itô calculus, and fokker-planck equation-fractional generalizations[M]. World Scientific, 2018.

[18] Nane E, Ni Y. Stability of stochastic differential equation driven by time-changed l\'evy noise [J]. arXiv preprint arXiv:1604.07382, 2016.

[19] Kingman J. On doubly stochastic poisson processes[C]//Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society: volume 60. Cambridge University Press, 1964:923-930.

[20] Daley D J, Vere-Jones D, et al. An introduction to the theory of point processes: volume i: elementary theory and methods[M]. Springer, 2003.

致谢

感谢老师.

感谢老师.

感谢老师.