学校代码：10270　　　　　　　　　　　　　　　　学号：******

上海师范大学

# 硕 士 学 位 论 文

# 一类高非线性非自治时间变换随机微分方程的 Milstein 型方法


学　　院：数 理 学 院

专　　业：计 算 数 学

研 究 方 向：随 机 微 分 方 程 数 值 解

研究生姓名：* * *

指 导 教 师：* * *


完 成 日 期：二 〇 二 四 年 三 月

# 论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中做了明确的声明并表示了谢意。

作者签名：______________ 日　　期：______________

# 论文使用授权声明

本人完全了解上海师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它手段保存论文。暂缓出版的论文在公开后遵守此规定。

作者签名：______________ 导师签名：______________

日　　期：______________ 日　　期：______________

# 摘 要

时间变换随机微分方程（SDEs）作为描述次扩散现象的重要工具被广泛应用于金融市场建模中, 因而关于时间变换随机微分方程数值方法的研究备受人们关注. 传统的求解方法主要包括 Euler-Maruyama 方法、Milstein 方法等经典的显式方法. 系数满足全局 Lipschitz 的时间变换随机微分方程通常采用简单易实现、计算效率高的经典的显式方法进行数值逼近. 然而对一类具有超线性增长项的时间变换随机微分方程, 经典的显式方法易发散.

本文针对一类高非线性非自治时间变换的随机微分方程, 利用截断的思想抑制超线性增长项提出了截断 Milstein 方法, 该方法保留了显式方法的优势. 文章证明了有限时间区间的强收敛性, 并获得了收敛阶.

本文研究的一类时间变换随机微分方程中, 漂移项和扩散项系数中的空间变量满足超线性增长条件, 时间变量满足 Hölder 连续条件. 此外, 这类时间变换随机微分方程不适用对偶原理, 从而无法建立经典随机微分方程与时间变换随机微分方程之间的联系, 故只能直接对时间变换随机微分方程构造数值方法. 文中通过构造截断 Milstein 方法, 并证明了该数值方法的收敛阶为 $\min\{\gamma_f, \gamma_g, (1-2\varepsilon)\}$, 其中 $\gamma_f$ 和 $\gamma_g$ 为时间变量 Hölder 连续指数, $\varepsilon$ 为任意小的数. 根据该结论可知截断 Milstein 的收敛阶与时间变量的光滑性有关, 当光滑性较差时, 数值方法的收敛阶由时间变量 Hölder 连续指数决定; 当光滑性较好时, 该方法的收敛阶接近于 1 阶. 文章最后通过 Matlab 对一维和二维时间变换随机微分方程数值算例的理论结果进行验证.

**关键词:** 时间变换随机微分方程; 高非线性; 非自治; 截断 Milstein 方法; 强收敛

# Abstract

Time-changed stochastic differential equations (SDEs) are widely used in financial market modeling as an important tool to describe sub-diffusion phenomena. Therefore, research on numerical methods of time-changed stochastic differential equations has attracted much attention. Traditional solution methods mainly include classic explicit methods such as Euler-Maruyama method and Milstein method. Time-changed stochastic differential equations which coefficients satisfy global Lipschitz are usually numerically approximated by classical explicit methods that are simple, easy to implement, and highly computationally efficient. However stochastic differential equations with superlinear growth terms, the classic explicit methods tend to diverge.

This paper proposes a truncated Milstein method for a class of highly nonlinear nonautonomous stochastic differential equations with time-changed processes, using the idea of truncation to suppress superlinear growth terms. This method retains the advantages of the explicit method. The article proves strong convergence in a finite time interval properties, and obtained the convergence order.

In a class of time-changed stochastic differential equations studied in this article, the spatial variables in the drift and diffusion coefficients satisfy the superlinear growth condition, and the temporal variables satisfies the Hölder continuity condition. In addition, the duality principle does not apply to these types of time-changed stochastic differential equations, so the connection between the classical stochastic differential equations and the time-changed stochastic differential equations cannot be established, so we can only directly construct a numerical method for the time-changed stochastic differential equations. In this paper, by constructing the truncated Milstein method, and it is proven that the convergence order of this numerical method is $\min\{\gamma_f, \gamma_g, (1-2\varepsilon)\}$, where $\gamma_f$ and $\gamma_g$ represents the Hölder exponents of the temporal variables and $\varepsilon$ is an arbitrarily small number. This conclusion implies that the convergence order of the truncated Milstein method is related to the smoothness of the temporal variables. When the smoothness is poor, the convergence order of the numerical method is determined by the Hölder exponents of the temporal variables. When the smoothness is good, the convergence order of this method approaches 1. At the end of the paper, the theoretical results of numerical examples of one-dimensional and two-dimensional time-changed stochastic differential equations through Matlab were verified.

**Key Words:** time-changed stochastic differential equations; highly non-linear; non-autonomous; Milstein-type method; strong convergence

# 目 录

# 第 1 章　前言

## 1.1　研究背景

近年来, 时间变换随机过程和时间变换随机微分方程（SDEs）作为描述次扩散过程的重要方法之一 [1], 受到了人们广泛的关注. Meerschaert 和 Scheffler 在 [2] 中对时间变换的随机过程进行了详细的研究, 将具有无限均值等待时间的连续时间随机游走与时间变换的随机过程联系起来, 并提出了一个重要的极限定理. Deng 和 Schilling 在 [3] 中证明了时间变换的分数布朗运动的一些重要性质和基本不等式. Kobayashi 在 [4] 中证明了时间变换随机微分方程的存在唯一性定理, 并提出了许多实用的分析方法. 在 [5] 中, Wu 研究了时间变换布朗运动驱动的随机微分方程的稳定性. Nane 和 Li 在[6, 7]中主要研究驱动噪声为时间变换的 Lévy 噪声的随机微分方程解的稳定性. Zhang 和 Yuan 在 [8] 中关注时间变换的随机泛函微分方程, 并探讨了此类方程的稳定性和收敛性问题. Yin 等人在 [9] 中研究了一类具有脉冲效应的时间变换随机微分方程的稳定性. Shen 等人在 [10] 中讨论了由时间变换布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程的存在唯一性和稳定性等性质. Li 等人在 [11] 中研究了时间变换的 McKean-Vlasov 随机微分方程的一些理论结果, 该方程也是一种分布依赖的随机微分方程.

时间变换过程和时间变换随机微分方程被广泛应用于金融市场建模中. 在 [12] 中 Magdziarz 通过使用经典的几何布朗运动和逆 $\alpha$-稳定过程推导了次扩散的 Black-Scholes 公式. 此外, Magdziarz 等人在 [13] 中提出了 Bachelier 模型的次扩散版本, 并深入研究了其在期权定价中的应用. Janczura 等人在 [14] 中研究了由 $\alpha$-稳定过程驱动的时间变换的 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 并探讨了该方法在金融数据建模和预测中的应用. 在[15–18]中讨论了时间变换过程与各种确定性分数阶微分方程之间的联系.

时间变换随机微分方程的数值近似至关重要的原因主要有两点: 首先, 时间变换随机微分方程的解析解很少能显式地表达出来. 其次, 在实践中, 时间变换随机微分方程模型的应用通常需要大量的样本路径进行统计学习, 如参数估计、检验和预测等. 在这种情况下, 即使某些类型的时间变换随机微分方程模型的解析解的显式表达式可用, 但在没有计算机模拟的帮助下进行这些计算也几乎是不可能的.

在随机过程中, 数值求解时间变换随机微分方程的一种思路是通过离散其对应的分数阶微分方程, 关于分数阶微分方程的数值方法已有众多的研究取得了显著的成果[19–22]. 在本篇文章中, 我们将关注时间变换随机微分方程数值逼近的

另一种方法, 即直接对时间变换随机微分方程进行离散. 在该方面, Kobayashi 及其合作者在方程系数的空间变量上施加全局 Lipschitz 条件, 并研究了不同结构的时间变换随机微分方程的多种数值方法. Jum 和 Kobayashi 在 [23] 中证明了一类时间变换随机微分方程的 Euler−Maruyama（EM）方法的强收敛和弱收敛. 据我们所知, 这是关于时间变换随机微分方程解的样本路径模拟的首次研究. 近年, Jin 和 Kobayashi 在[24, 25]中研究了更一般类型的时间变换随机微分方程的 Euler 型和 Milstein 型方法. 而 [23] 和[24, 25]在研究方法上的一个主要区别是 [4] 中建立的对偶原理在 [23] 中得到了应用, 而没有应用在[24, 25]中. 简而言之, 对偶原理揭示了经典随机微分方程与时间变换随机微分方程之间的关系, 提供了一种直接通过经典随机微分方程的数值方法来构造时间变换随机微分方程的数值方法的途径. 对于时间变换的 McKean-Vlasov 随机微分方程, Wen 等人在 [26] 中研究了相关的数值方法.

当随机微分方程中系数出现超线性项时, 经典的 Euler 型和 Milstein 型方法可能不会收敛 [27], 而隐式方法和改进的显式方法通常是良好的选择. 当在时间变换随机微分方程漂移系数的空间变量上施加超线性增长条件时, Deng 和 Liu 在 [28] 中研究了半隐式 EM 方法, Liu 等人则在 [29] 中借助对偶原理研究了截断 EM 方法. 另一方面, Li 等人 [30] 中在未采用对偶原理的前提下同样了研究了时间变换随机微分方程的截断 EM 方法. Liu 等人在 [31] 中对随机方程的截断方法进行了综述和分析. Tang 在 [32] 中对一类非自治随机微分方程的截断 EM 方法进行分析, 并通过对偶原理将截断 EM 方法的强收敛结论应用于时间变换随机微分方程的数值逼近研究中. Wu 在 [33] 中对随机微分方程的截断 θ 方法进行了收敛性分析.

在本文中, 我们重点研究了具有超线性增长系数的时间变换随机微分方程的数值方法. 相较于过去的研究[28–30], 我们提出了一种具有截断作用的 Milstein 型方法抑制超线性项. 该方法与 Euler 型方法相比具有更高的收敛阶, 更适用于在金融应用中流行的多层蒙特卡洛方法[34, 35].

## 1.2　结构安排

本文的写作安排如下:

第一章主要介绍本文的研究背景和现状、研究目的以及文章的主要结构. 通过对时间变换随机微分方程的相关研究方法进行综述, 引出本文将要研究的一类特殊的高非线性非自治时间变换随机微分方程.

第二章首先给出进行本文研究所需的符号和假设条件, 接着在非自治系统中详细介绍时间变换随机微分方程的截断 Milstein 方法的构造过程, 然后列举出证明

本文主要结论所需的重要引理, 对各个引理进行阐述说明并对其中缺少现有结论的引理进行详细证明.

第三章详细介绍本文的主要结论并对其进行证明. 通过使用前文所列的前提条件和假设, 本章证明了时间变换随机微分方程的截断 Milstein 方法的强收敛阶为 $\min\{\gamma_f, \gamma_g, (1-2\varepsilon)\}$, 其中 $\gamma_f$ 和 $\gamma_g$ 分别是时间变换随机微分方程漂移项和扩散项中时间变量的 Hölder 连续指数, $\varepsilon$ 为任意小的数, 故得出此类时间变换随机微分方程的截断 Milstein 的收敛阶与时间变量的光滑性有关的结论.

第四章通过 Matlab 数值模拟对一维和二维时间变换随机微分方程算例的理论结果进行验证, 在两个时间变换随机微分方程中取不同的时间变量 Hölder 连续指数, 将数值模拟所得的误差阶和本文的理论结果进行对比分析.

第五章首先对本文的主要内容和结论进行总结, 然后在本文研究的一类时间变换随机微分方程重要性质的基础上, 进一步探讨未来的研究方向.

# 第 2 章　准备工作

在这一章节中, 主要分为四个部分进行阐述:

第一部分将对本文使用的符号及其含义进行解释说明.

第二部分给出证明截断 Milstein 方法的收敛性并获得收敛阶所需的假设条件.

第三部分具体阐述截断函数的定义, 同时详细介绍非自治时间变换随机微分方程截断 Milstein 方法的构造过程.

第四部分列出一系列关键引理, 这些引理在证明截断 Milstein 方法的收敛阶主要结论时起到重要作用.

## 2.1　符号说明

在本文中, 定义 $(\Omega_W, \mathcal{F}^W, \mathbb{P}_W)$ 为一个完备的概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$ 是右连续且递增的, $\mathcal{F}_0^W$ 包含所有 $\mathbb{P}_W$ 空集, $W(t)$ 为该概率空间中定义的并适应 $\mathcal{F}_t^W$ 的一维维纳过程, $\mathbb{E}_W$ 表示关于 $\mathbb{P}_W$ 的期望. 定义另一个完备的概率空间 $(\Omega_D, \mathcal{F}^D, \mathbb{P}_D)$, 其中 $D(t)$ 表示从 $D(0)=0$ 开始在 $(\Omega_D, \mathcal{F}^D, \mathbb{P}_D)$ 上定义的一维 $\{\mathcal{F}_t^D\}$ 适应 Lévy 过程, 其在 $\{\mathcal{F}_t^D\}_{t\geq 0}$ 上严格递增, $\mathbb{E}_D$ 表示关于 $\mathbb{P}_D$ 的期望. 更多关于 $D(t)$ 的详细介绍和讨论可参考相关文献 [36, 37].

在本文中, 假设 $W(t)$ 和 $D(t)$ 是独立的. 定义乘积概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := (\Omega_W \times \Omega_D, F^W \otimes \mathcal{F}^D, \mathbb{P}_W \otimes \mathbb{P}_D)$, $\mathbb{E}$ 表示概率测度 $\mathbb{P}$ 下的期望. 显然 $\mathbb{E}(\cdot) = \mathbb{E}_D\mathbb{E}_W(\cdot) = \mathbb{E}_W\mathbb{E}_D(\cdot)$. 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $|x|$ 定义为欧几里得范数, $x^T$ 表示 $x$ 的转置. 此外, 对任意两个实数 $a$ 和 $b$, 我们使用符号 $a \vee b = \max(a, b)$ 和 $a \wedge b = \min(a, b)$. 对给定的集合 $G$, 其指示函数用 $I_G$ 表示.

由于 $D(t)$ 是严格递增的, 定义 $D(t)$ 的反函数为

$$E(t) := \inf\{s \geq 0\,;\, D(s) > t\}, \quad t \geq 0.$$

由 $t \mapsto E(t)$ 是连续且非递减的, $E(t)$ 被称为时间变换过程, $W(E(t))$ 被称为时间变换的维纳过程, 同时 $W(E(t))$ 也被视为一种亚扩散过程. 为了避免复杂的符号, 在本篇文章中, 我们考虑一维的 $W(E(t))$. 当 $W(t)$ 是一个多维的维纳过程且相同的 $E(t)$ 被用于 $W(t)$ 的每个分量中进行时间变换时, 本文的结果仍然成立. 但是, 如果在 $W(t)$ 的不同分量中使用不同的 $E(t)$ 进行时间变换时, 我们的结果可能不适用.

本文考虑的时间变换随机微分方程具有以下形式, 对任意 $T>0$ 和 $t\in[0,T]$,

$$dY(t)=f(t,Y(t))dE(t)+g(t,Y(t))dW(E(t)),\ \ Y(0)=Y_0, \tag{2.1}$$

对所有 $q>0$ 都有 $\mathbb{E}|Y_0|^q<\infty$, 其中: $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 且 $g:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$.

在对(2.1)的系数施加假设之前, 我们首先提出一些有用的符号, 即对任意 $y=(y^1,y^2,...,y^d)^T$ 和 $t\in[0,T]$, 定义

$$Lg(t,y)=\sum_{l=1}^{d}g^l(t,y)G^l(t,y),$$

其中 $g=(g^1,g^2,...,g^d)^T$, $g^l:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 且

$$G^l(t,y)=(\frac{\partial g^1(t,y)}{\partial y^l},\frac{\partial g^2(t,y)}{\partial y^l},...,\frac{\partial g^d(t,y)}{\partial y^l})^T.$$

## 2.2　假设条件

对时间变换随机微分方程(2.1)的系数施加如下的假设. 首先, 我们对漂移项和扩散项系数中的空间变量提出假设.

**假设 2.1.** *假设存在正常数 $\alpha$ 和 $C$, 使得*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\vee|g(t,x)-g(t,y)|\vee|Lg(t,x)-Lg(t,y)|\le C(1+|x|^\alpha+|y|^\alpha)|x-y|,$$

*对任意 $t\in[0,T]$ 和 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 成立.*

*从假设2.1 可以推出, 对任意 $t\in[0,T]$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$, 有*

$$|f(t,x)|\vee|g(t,x)|\vee|Lg(t,x)|\le M(1+|x|^{\alpha+1}), \tag{2.2}$$

*其中 $M$ 取决于 $C$ 和 $\sup_{0\le t\le T}(|f(t,0)|+|g(t,0)|+|Lg(t,0)|)$.*

**假设 2.2.** *假设存在一对常数 $p>2$ 和 $K>0$, 使得*

$$(x-y)^{\mathrm{T}}(f(t,x)-f(t,y))+(5p-1)|g(t,x)-g(t,y)|^2\le K|x-y|^2,$$

*对任意 $t\in[0,T]$ 和 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 成立.*

**假设 2.3.** *假设存在一对常数 $q>2$ 和 $K_1>0$, 使得*

$$x^{\mathrm{T}}f(t,x)+(5q-1)|g(t,x)|^2\le K_1(1+|x|^2),$$

*对任意 $t\in[0,T]$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$ 成立.*

假设(2.3)可以从假设(2.2)中推导得出, 但由于其中涉及到复杂的关系, 其中包括 $p$、$q$、$K$ 和 $K_1$ 之间的关系, 为简化符号, 我们将假设(2.3)提出作为一个新的假设.

**假设 2.4.** 假设存在一个正常数 $M'$, 使得

$$|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}|\vee|\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}|\vee|\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}|\vee|\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2}|\leq M'(1+|x|^{\alpha+1}),$$

对任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $t\in[0,T]$ 成立.

接下来, 我们对漂移项和扩散项系数中时间变量进行假设.

**假设 2.5.** 假设存在常数 $\gamma_f\in(0,1]$, $\gamma_g\in(0,1]$, $H_1>0$ 和 $H_2>0$, 使得

$$|f(s,x)-f(t,x)|\leq H_1(1+|x|^{\alpha+1})(s-t)^{\gamma_f},$$
$$|g(s,x)-g(t,x)|\leq H_2(1+|x|^{\alpha+1})(s-t)^{\gamma_g},$$

对任意 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 和 $s,t\in[0,T]$ 成立.

## 2.3　非自治时间变换随机微分方程的截断 Milstein 型方法

现在我们介绍本文讨论的 Milstein 型方法的构造过程.

**第一步**根据时间变换随机微分方程系数的形式, 我们选择一个严格递增的连续函数 $\mu:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, 当 $u\to\infty$ 时 $\mu(u)\to\infty$, 且对任意 $l=1,2,...,d$ 有

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{|x|\leq u}(|f(t,x)|\vee|g(t,x)|\vee|G^l(t,x)|)\leq\mu(u),\quad\forall u\geq 1.$$

**第二步**选择一个常数 $\hat{\kappa}\geq 1\wedge\mu(1)$ 和一个严格递减函数 $\kappa:(0,1]\to[\mu(1),\infty)$, 使得

$$h^{1/4}\kappa(h)\leq\hat{\kappa},\quad\forall h\in(0,1],\quad\text{且}\lim_{h\to 0}\kappa(h)=\infty.\tag{2.3}$$

**第三步**定义 $\mu^{-1}$ 为 $\mu$ 的反函数, 显然 $\mu^{-1}$ 是一个从 $[\mu(0),\infty)$ 到 $\mathbb{R}_+$ 严格递增的连续函数. 对于给定的步长 $h\in(0,1]$, 定义截断映射 $\pi_h:\mathbb{R}^d\to\{x\in\mathbb{R}^d:|x|\leq\mu^{-1}(\kappa(h))\}$,

$$\pi_h(x)=\left(|x|\wedge\mu^{-1}(\kappa(h))\right)\frac{x}{|x|},$$

当 $x=0$ 时 $x/|x|=0$. 然后通过以下方式定义截断函数:

$$f_h(t,x)=f(t,\pi_h(x)),\quad g_h(t,x)=g(t,\pi_h(x)),\quad G_h^l(t,x)=G^l(t,\pi_h(x)).$$

其中 $x\in\mathbb{R}^d$, $l=1,2,...,d$. 不难看出对任意 $t\in[0,T]$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$ 有

$$|f_h(t,x)|\vee|g_h(t,x)|\vee|G_h^l(t,x)|\leq\mu(\mu^{-1}(\kappa(h)))=\kappa(h).\tag{2.4}$$

容易验证存在一个正常数 $\hat{M}$, 使得

$$|\frac{\partial f_h(t,x)}{\partial x}|\vee|\frac{\partial^2 f_h(t,x)}{\partial x^2}|\vee|\frac{\partial g_h(t,x)}{\partial x}|\vee|\frac{\partial^2 g_h(t,x)}{\partial x^2}|\leq\hat{M},$$

对任意 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立.

**第四步**在有限时间区间 $[0,T]$ 内对给定的 $T>0$ 离散化过程 $E(t)$. 对给定的步长 $h$, 设 $t_i = ih$, 令 $\Delta_i$ 是独立同分布的序列并且满足 $\Delta_i = D(h)$, 其中 $i = 0,1,2,...$, 通过迭代 $D_h(t_i) = D_h(t_{i-1}) + \Delta_i$, $D_h(0) = 0$ 可以模拟出 $D(t)$ 的样本路径, 我们在某个正整数 $N$ 时停止迭代, 即当

$$T \in [D_h(t_N), D_h(t_{N+1})),$$

成立时.

**第五步**将离散化后的 $E(t)$ 用 $E_h(t)$ 表示, 通过以下方式定义为

$$E_h(t) = \big(\min\{n; D_h(t_n) > t\} - 1\big)h, \tag{2.5}$$

其中 $t \in [0,T]$. 不难看出当 $t \in [D_h(t_i), D_h(t_{i+1}))$ 时$E_h(t) = ih$.

对 $i = 1,2,...,N$, 定义 $\tau_i = D_h(t_i)$, 可以得到

$$E_h(\tau_i) = E_h(D_h(t_i)) = ih. \tag{2.6}$$

**第六步**设 $X_0 = Y(0)$, 定义 Milstein 方法的离散形式为

$$\begin{aligned} X_{\tau_{n+1}} =& X_{\tau_n} + f_h(\tau_n, X_{\tau_n})\Big(E_h(\tau_{n+1}) - E_h(\tau_n)\Big) \\ &+ g_h(\tau_n, X_{\tau_n})\Big(W(E_h(\tau_{n+1})) - W(E_h(\tau_n))\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d} g_h^l(\tau_n, X_{\tau_n}) G_h^l(\tau_n, X_{\tau_n})\Big(\Delta W^2(E_h(\tau_n)) - \Delta(E_h(\tau_n))\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

需要注意的是, $\{\tau_n\}_{n=1,2,...,N}$ 是一个与维纳过程独立的随机序列. 此外, 从公式(2.6)中容易得到

$$E_h(\tau_{n+1}) - E_h(\tau_n) = h \text{和} W(E_h(\tau_{n+1})) - W(E_h(\tau_n)) = W((n+1)h) - W(nh).$$

下面我们给出 Milstein 方法(2.7)的连续形式, 其在证明中将被使用到.

对任意 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, 设

$$Lg_h(t,x) := \sum_{l=1}^{d} g_h^l(t,x) G_h^l(t,x).$$

故截断 Milstein 方法的连续形式为

$$\begin{aligned} X(t) =& X(0) + \int_0^t f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dE(s) + \int_0^t g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dW(E(s)) \\ &+ \int_0^t Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))dW(E(s)), \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\bar{\tau}(s)=\tau_n\mathbf{1}_{[\tau_n,\tau_{n+1})}(s),\bar{X}(t)=\sum_{n=0}^{N}X_{\tau_n}\mathbf{1}_{[\tau_n,\tau_{n+1})}(t)$, 且

$$\Delta W(E_h(s))=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\tau_i\leqslant s<\tau_{i+1}\}}\big(W(E_h(s))-W(E_h(\tau_i))\big).$$

在本文重要结论的证明中, 以下形式的 Taylor 展开至关重要.

假设 $\psi:\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}^d$ 是一个三阶连续可微函数, 对任意 $\bar{z},z^*\in\mathbb{R}^{d+1}$ 有

$$\psi(\bar{z})-\psi(z^*)=\psi^{'}(z)|_{z=z^*}(\bar{z}-z^*)+R_\psi(\bar{z},z^*),$$

这里

$$R_\psi(\bar{z},z^*)=\int_0^1(1-\theta)\psi^{''}(z)|_{z=z^*+\theta(\bar{z}-z^*)}(\bar{z}-z^*,\bar{z}-z^*)d\theta.$$

其中 $\psi^{'}$ 和 $\psi^{''}$ 被以下方式定义, 即对任意 $z,\hat{z},\tilde{z}\in\mathbb{R}^{d+1}$, 有

$$\psi^{'}(z)(\hat{z})=\sum_{i=1}^{d+1}\frac{\partial\psi}{\partial z^i}\hat{z}_i,\quad \psi^{''}(z)(\hat{z},\tilde{z})=\sum_{i,k=1}^{d+1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial z^k}\hat{z}_i\tilde{z}_k,$$

这里 $\psi=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_d)^T$. 对任意 $j=1,2,...,d$, 有 $\psi_j:\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}^d$; 且对任意 $i=1,2,...,d+1$, 有 $\frac{\partial\psi}{\partial z^i}=(\frac{\partial\psi_1}{\partial z^i},\frac{\partial\psi_2}{\partial z^i},...,\frac{\partial\psi_d}{\partial z^i})^T$.

在本文中, 我们通过一维时间变量和 $d$ 维空间变量进行上述的 Taylor 展开. 更准确地说, 设 $\bar{z}=(\eta,\bar{x})$ 和 $z^*=(\eta,x^*)$, 其中 $\eta\in\mathbb{R}_+$, 且 $\bar{x},x^*\in\mathbb{R}^d$. 显然 $\bar{z}-z^*=(0,\bar{x}-x^*)$, 因此, 对 $\psi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 有

$$\psi(\eta,\bar{x})-\psi(\eta,x^*)=\psi^{'}(\eta,x)\big|_{x=x^*}(\bar{x}-x^*)+R_\psi(\eta,\bar{x},x^*),$$

其中

$$R_\psi(\eta,\bar{x},x^*)=\int_0^1(1-\theta)\psi^{''}(\eta,x)|_{x=x^*+\theta(\bar{x}-x^*)}(\bar{x}-x^*,\bar{x}-x^*)d\theta,$$

对任意 $\eta\in\mathbb{R}_+$ 和 $\bar{x},x^*\in\mathbb{R}^d$ 成立. 在该情况下, 对任意 $x,\bar{j},\bar{h}\in\mathbb{R}^d$, $\psi^{'}$ 和 $\psi^{''}$ 分别被定义为

$$\psi^{'}(\eta,x)(\bar{j})=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\bar{j}_i,\quad \psi^{''}(\eta,x)(\bar{j},\bar{h})=\sum_{i,k=1}^{d}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^k}\bar{j}_i\bar{h}_k,$$

其中 $\psi=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_d)^T$, $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=(\frac{\partial\psi_1}{\partial x^i},\frac{\partial\psi_2}{\partial x^i},...,\frac{\partial\psi_d}{\partial x^i})^T$, $\bar{j}=(\bar{j}_1,\bar{j}_2,...,\bar{j}_d)^T$ 和 $\bar{h}=(\bar{h}_1,\bar{h}_2,...,\bar{h}_d)^T$.

设 $\eta=\bar{\tau}(t),\bar{x}=X(t)$ 和 $x^*=\bar{X}(t)$, 根据上述推导可得对任意固定的 $t\in[0,T]$, 有

$$\begin{aligned}\psi(\bar{\tau}(t),X(t))-\psi(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))=&\psi^{'}(\bar{\tau}(t),x)\big|_{x=\bar{X}(t)}\int_0^t g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))dW(E(s))\\&+\tilde{R}_\psi(t,X(t),\bar{X}(t)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_\psi(t, X(t), \bar{X}(t)) =& \psi'(\bar{\tau}(t), x)\big|_{x=\bar{X}(t)}\bigg(\int_0^t f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dE(s) \\
&+ \int_0^t Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))dW(E(s))\bigg) \\
&+ R_\psi(\bar{\tau}(t), X(t), \bar{X}(t)). \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

因此, 用 $g_h$ 代替 $\psi$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}_{g_h}(t, X(t), \bar{X}(t)) \\
=& g_h(\bar{\tau}(t), X(t)) - g_h(\bar{\tau}(t), \bar{X}(t)) - Lg_h(\bar{\tau}(t), \bar{X}(t))\Delta W(E_h(t)). \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

## 2.4　主要引理

在本章末尾, 我们列举出一些已知的引理. 有关引理(2.1)和引理(2.2)的证明, 请参阅文献 [38]. 引理(2.3)的证明可以在文献 [23] 中找到. 同样地引理(2.4)引用自文献 [39].

**引理 2.1.** *若假设 2.1成立, 对任意 $h \in (0, 1]$, 有*

$$
\begin{aligned}
&|f_h(t, x) - f_h(t, y)| \vee |g_h(t, x) - g_h(t, y)| \vee |Lg_h(t, x) - Lg_h(t, y)| \\
\le& C(1 + |x|^\alpha + |y|^\alpha)|x - y|,
\end{aligned}
$$

*对任意 $t \in (0, T]$ 和 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 成立.*

**引理 2.2.** *若假设2.3成立, 对任意 $h \in (0, 1]$, 有*

$$
x^{\mathrm{T}} f_h(t, x) + (5q - 1)|g_h(t, x)|^2 \le \hat{K}_1(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,
$$

*其中 $\hat{K}_1 = 2K_1\left(1 \vee \frac{1}{\mu^{-1}(\kappa(1))}\right)$.*

**引理 2.3.** *对任意 $t_i \le t \le t_{i+1}$, 存在一个常数 $c$, 使得*

$$
|E(t) - E(t_i)| \le |E(t_{i+1}) - E(t_i)| \le ch.
$$

**引理 2.4.** *若假设2.1和2.3成立, 对任意 $p \in [2, q)$, 有*

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} |Y(t)|^p\right) < \infty.
$$

简而言之, 引理2.1和引理2.2表明, 在某种程度上截断函数 $f_h$ 和 $g_h$ 继承了假设2.1和假设2.3的性质. 引理2.3对于分析 $E_h(t)$ 的收敛阶起到重要作用. 引理2.4陈述了解析解的矩有界性.

接下来, 我们将呈现并证明用于第三章主要结论中的一些重要引理.

**引理 2.5.** 对任意 $h \in (0,1]$ 和 $\hat{p} > 2$, 有

$$\mathbb{E}_W|X(t) - \bar{X}(t)|^{\hat{p}} \le c_{\hat{p}} h^{\hat{p}/2} (\kappa(h))^{\hat{p}}, \quad \forall t \ge 0, \tag{2.12}$$

其中 $c_{\hat{p}} = c\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}} 3^{\hat{p}-1}$. 因此

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{E}_W|X(t) - \bar{X}(t)|^{\hat{p}} = 0, \quad \forall t \ge 0. \tag{2.13}$$

**证明：** 对任意 $h \in (0,1]$, $\hat{p} > 2$ 和 $t \ge 0$, 存在唯一的整数 $n \ge 0$ 使得 $\tau_n \le t < \tau_{n+1}$. 根据基本不等式的性质, 从(2.8)可得

$$\begin{aligned}
&|X(t) - \bar{X}(t)|^{\hat{p}} \\
=&|X(t) - X(\tau_n)|^{\hat{p}} \\
=&\bigg|\int_{\tau_n}^t f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dE(s) + \int_{\tau_n}^t g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dW(E(s)) \\
&+ \int_{\tau_n}^t Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))dW(E(s))\bigg|^{\hat{p}} \\
\le&3^{\hat{p}-1}\Bigg(\left|\int_{\tau_n}^t f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dE(s)\right|^{\hat{p}} + \left|\int_{\tau_n}^t g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dW(E(s))\right|^{\hat{p}} \\
&+ \left|\int_{\tau_n}^t Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))dW(E(s))\right|^{\hat{p}}\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

接下来, 我们依次估计(2.14)式中最后一个不等式右侧括号内的三项. 利用 Hölder 不等式第一项可以估计为

$$\mathbb{E}_W\left|\int_{\tau_n}^t f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dE(s)\right|^{\hat{p}} \le h^{\hat{p}-1}\mathbb{E}_W \int_{\tau_n}^t \left|f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\right|^{\hat{p}} dE(s). \tag{2.15}$$

对括号里的第二项, 我们设 $x(t) = \int_{\tau_n}^t g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))dW(E(s))$ 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\,|x(t)|^{\hat{p}} \\
=&\frac{\hat{p}}{2}\mathbb{E}_W \int_{\tau_n}^t \left(|x(s)|^{\hat{p}-2}\left|g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\right|^2 + (\hat{p}-2)\,|x(s)|^{\hat{p}-4}\left|x^T(s)g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\right|^2\right) dE(s) \\
\le&\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\mathbb{E}_W \int_{\tau_n}^t |x(s)|^{\hat{p}-2}\left|g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\right|^2 dE(s) \\
\le&\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\left(\mathbb{E}_W \int_{\tau_n}^t |x(s)|^{\hat{p}} dE(s)\right)^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}} \left(\mathbb{E}_W \int_{\tau_n}^t \left|g_h(\bar{\rho}(s), \bar{X}(s))\right|^{\hat{p}} dE(s)\right)^{\frac{2}{\hat{p}}} \\
=&\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\left(\int_{\tau_n}^t \mathbb{E}_W\,|x(s)|^{\hat{p}} dE(s)\right)^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}} \left(\mathbb{E}_W \int_{\tau_n}^t \left|g_h(\bar{\rho}(s), \bar{X}(s))\right|^{\hat{p}} dE(s)\right)^{\frac{2}{\hat{p}}}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}_W\left|x(t)\right|^{\hat{p}}$ 在 $t$ 上是非递减的, 故有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_W\left|x(t)\right|^{\hat{p}} &\le \frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\left[ch\mathbb{E}_W\left|x(t)\right|^{\hat{p}}\right]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}}\left(\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right|^{\hat{p}}dE(s)\right)^{\frac{2}{\hat{p}}}\\ &= \frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\left[ch^{\frac{\hat{p}-2}{p}}\mathbb{E}_W\left|x(t)\right|^{\hat{p}-2}\right]\left(\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right|^{\hat{p}}dE(s)\right)^{\frac{2}{\hat{p}}}.\end{aligned}$$

经过进一步的移项和简化得到

$$\mathbb{E}_W\left|x(t)\right|^{\hat{p}} \le \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right|^{\hat{p}}dE(s).$$

因此, 我们可以得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_W\left|\int_{\tau_n}^{t}g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))dW(E(s))\right|^{\hat{p}}\\ &\le \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right|^{\hat{p}}dE(s).\end{aligned}\tag{2.16}$$

对于括号中的第三项, 我们使用类似第二项的处理方法, 可以得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_W\left|\int_{\tau_n}^{t}Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E(s))dW(E_h(s))\right|^{\hat{p}}\\ &\le \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\right|^{\hat{p}}dE(s).\end{aligned}\tag{2.17}$$

将估计 (2.15)、(2.16) 和 (2.17)代入(2.14)中, 通过利用(2.6)、引理2.3和引理2.4可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_W|X(t)-\bar{X}(t)|^{\hat{p}} \le& 3^{\hat{p}-1}\Bigg(h^{\hat{p}-1}\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right|^{\hat{p}}dE(s)\\ &+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\left|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right|^{\hat{p}}dE(s)\\ &+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}\mathbb{E}_W\int_{\tau_n}^{t}\Big|Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\\ &\times\Delta W(E_h(s))\Big|^{\hat{p}}dE(s)\Bigg)\\ \le& 3^{\hat{p}-1}\Bigg(h^{\hat{p}-1}ch(\kappa(h))^{\hat{p}}+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}h(\kappa(h))^{\hat{p}}\\ &+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}ch^{\frac{\hat{p}-2}{2}}h^{\frac{\hat{p}}{2}}h(\kappa(h))^{2\hat{p}}\Bigg)\\ \le& c_{\hat{p}}\left(h^{\hat{p}-1}h(\kappa(h))^{\hat{p}}+h^{\hat{p}/2-1}h(\kappa(h))^{\hat{p}}+h^{\hat{p}/2}h^{\hat{p}/2}(\kappa(h))^{2\hat{p}}\right)\\ \le& c_{\hat{p}}\left(h^{\hat{p}}(\kappa(h))^{\hat{p}}+h^{\hat{p}/2}(\kappa(h))^{\hat{p}}+h^{\hat{p}}(\kappa(h))^{2\hat{p}}\right)\\ \le& c_{\hat{p}}h^{\hat{p}/2}(\kappa(h))^{\hat{p}},\end{aligned}$$

其中 $c_{\hat{p}} = c\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}} 3^{\hat{p}-1}$. 故完成了(2.12)的证明. 注意从(2.3)可得 $h^{\hat{p}/2}(\kappa(h))^{\hat{p}} \leq h^{\hat{p}/4}$, 因此(2.13)易从(2.12)中推导得出. □

**引理 2.6.** *若假设2.1 和 2.3成立, 则有*

$$\sup_{0<h\leq 1} \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^p] \leq C, \quad \forall T > 0, \tag{2.18}$$

*其中* $C = \left(2|X(0)|^p + 4c_p^{\frac{1}{2}}\hat{k}E(t) + 2(5p^2-p)c\hat{k}E(t)\right)e^{3(2p\hat{K}_1 \vee 2(p-2)\vee 2(5p^2-p))E(T)}$ *是一个取决于* $X(0)$*、*$p$*、*$T$*、*$c_p$*、*$\hat{k}$ *和* $\hat{K}_1$ *的常数, 但是与* $h$ *无关.*

**证明：** 对正整数 $\ell$ 定义停时 $\zeta_\ell := \inf\{t \geq 0; |X(t)| > \ell\}$, 可以得到

$$\int_0^t \mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq s\leq t\wedge\zeta_\ell} |X(s)|^p\right) dE(r) \leq \ell^p E(t),$$

对任意 $h \in (0,1]$ 和 $T \geq 0$ 成立. 通过 Itô 公式, 我们从(2.8)推导可得对 $0 \leq u \leq t\wedge\zeta_\ell$, 有

$$|X(u)|^p = |X(0)|^p + A_u + M_u, \tag{2.19}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_u := \int_0^u \Bigg(&p|X(s)|^{p-2}X^{\mathrm{T}}(s)f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) + \frac{1}{2}p(p-1)|X(s)|^{p-2}|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) \\
&+ Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))|^2\Bigg)dE(s),
\end{aligned}$$

$$M_u := \int_0^u p|X(s)|^{p-1}|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) + Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))|dW(E(s)).$$

由于随机积分 $(M_u)_{u\geq 0}$ 是一个具有二次变差的局部鞅, 故有

$$[M,M]_u = \int_0^u p^2|X(s)|^{2p-2}\Big|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) + Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2 dE(s),$$

对 $0 \leq s \leq t\wedge\zeta_\ell$ 有

$$\begin{aligned}
&p^2|X(s)|^{2p-2}\Big|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) + Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2 \\
\leq &p^2|X(s)|^p|X(s)|^{p-2}\Big|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) + Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2 \\
\leq &p^2\left(\sup_{0\leq u\leq t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\Big|X(s)|^{p-2}|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) + Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2.
\end{aligned}$$

对任意 $a,b \geq 0$ 和 $\lambda > 0$, 不等式 $(ab)^{1/2} \leq a/\lambda + \lambda b$ 成立, 则对 $0 \leq u \leq t\wedge\zeta_\ell$, 有

$$\begin{aligned}
&([M,M]_u)^{1/2} \\
\leq &p\Bigg(\sup_{0\leq u\leq t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\int_0^u |X(s)|^{p-2}\Big|g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) \\
&+ Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2 dE(s)\Bigg)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le p\left(\frac{\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p}{2p}+2p\int_0^u|X(s)|^{p-2}\Big|g_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\right.\\
&\quad\left.+Lg_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2dE(s)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p+2p^2\int_0^u|X(s)|^{p-2}\Big|g_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\\
&\quad+Lg_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2dE(s).
\end{aligned}
$$

再分别对 $A_u$ 和 $M_u$ 取期望, 有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_W(A_u)=&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u\left(p|X(s)|^{p-2}X^{\mathrm{T}}(s)f_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\right.\right.\\
&+\frac{1}{2}p(p-1)|X(s)|^{p-2}\Big|g_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\\
&\left.\left.+Lg_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2\right)dE(s)\right),
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_W(M_u)=&\mathbb{E}_W\left(\frac{1}{2}\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p+\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u 2p^2|X(s)|^{p-2}\Big|g_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\right.\\
&\left.+Lg_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\Delta W(E_h(s))\Big|^2dE(s)\right).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

然后对 (2.19) 取期望后代入 (2.20) 和 (2.21), 再利用基本不等式 $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\\
=&|X(0)|^p+\mathbb{E}_W(A_u)+\mathbb{E}_W(M_u)\\
\le&|X(0)|^p+\frac{1}{2}\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\\
&+\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u p|X(s)|^{p-2}\left(X^{\mathrm{T}}(s)f_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\right.\right.\\
&\left.\left.+(5p-1)|g_h(\bar\tau(s),\bar X(s))|^2\right)dE(s)\right)+\big(p(p-1)+4p^2\big)\\
&\times\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u|X(s)|^{p-2}|Lg_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\Delta W(E_h(s))|^2dE(s)\right)\\
\le&|X(0)|^p+\frac{1}{2}\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\\
&+\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u p|X(s)|^{p-2}\left(\bar X^{\mathrm{T}}(s)f_h(\bar\tau(s),\bar X(s))\right.\right.\\
&\left.\left.+(5p-1)|g_h(\bar\tau(s),\bar X(s))|^2\right)dE(s)\right)\\
&+\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u p|X(s)|^{p-2}(X(s)-\bar X(s))^{\mathrm{T}}f_h(\bar\tau(s),\bar X(s))dE(s)\right)
\end{aligned}
$$

$$+ (5p^2 - p)\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u |X(s)|^{p-2}|Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))|^2 dE(s)\right). \tag{2.22}$$

因此, 对任意 $0 \le u \le t \wedge \zeta_\ell$, 通过使用引理2.2和 Young 不等式:

$$a^{p-2}b \le \frac{p-2}{p}a^p + \frac{2}{p}b^{p/2}, \quad \forall a, b \ge 0.$$

我们能从 (2.22) 得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\\
\le&|X(0)|^p + \frac{1}{2}\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\\
&+ p\hat{K}_1\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u |X(s)|^{p-2}(1+|\bar{X}(s)|^2)dE(s)\right)\\
&+ \mathbb{E}_W\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\left((p-2)\int_0^u |X(s)|^p dE(s)\right.\\
&\left.+ 2\int_0^u |X(s)-\bar{X}(s)|^{p/2}|f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))|^{p/2}dE(s)\right)\\
&+ (5p^2 - p)\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}\int_0^u |X(s)|^{p-2}|Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))|^2 dE(s)\right).
\end{aligned}$$

接下来, 对任意 $0 \le u \le t \wedge \zeta_\ell$ 应用基本不等式, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le u\le t\wedge\zeta_\ell}|X(t)|^p\right) \le&2|X(0)|^p + 2p\hat{K}_1\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^{p-2}(1+|\bar{X}(s)|^2)dE(s)\\
&+ 2(p-2)\int_0^t \mathbb{E}_W|X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s) + I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中

$$I_1 = 4\mathbb{E}_W\int_0^t |X(s)-\bar{X}(s)|^{p/2}|f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))|^{p/2}dE(s),$$

$$I_2 = 2(5p^2-p)\mathbb{E}_W\left(\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^{p-2}|Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))|^2 dE(s)\right).$$

我们首先处理 $I_1$ 项, 根据引理2.5、不等式(2.3)和(2.4)可得

$$\begin{aligned}
I_1 =&4\mathbb{E}_W\int_0^t |X(s)-\bar{X}(s)|^{p/2}|f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))|^{p/2}dE(s)\\
\le&4\left(\kappa(h)\right)^{p/2}\int_0^t \mathbb{E}_W|X(s)-\bar{X}(s)|^{p/2}dE(s)\\
\le&4\left(\kappa(h)\right)^{p/2}\int_0^t \left(\mathbb{E}_W|X(s)-\bar{X}(s)|^p\right)^{1/2}dE(s)
\end{aligned}$$

$$\leq 4c_p^{\frac{1}{2}}(\kappa(h))^p h^{p/4}E(t)$$
$$\leq 4c_p^{\frac{1}{2}}\hat{k}E(t).$$

其次处理 $I_2$ 项, 通过不等式(2.3)、(2.4)和引理2.3可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2(5p^2-p)\mathbb{E}_W\left(\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^{p-2}|Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))|^2 dE(s)\right)\\
&\leq 2(5p^2-p)\mathbb{E}_W\left(\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^{p-2}ch|\kappa(h)|^4 dE(s)\right)\\
&\leq 2(5p^2-p)\left(\mathbb{E}_W\int_0^t \frac{p-2}{p}|X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)+\mathbb{E}_W\int_0^u \frac{2}{p}|\kappa(h)|^{2p}ch^{\frac{p}{2}}dE(s)\right)\\
&\leq 2(5p^2-p)\left(\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)\right)+2(5p^2-p)|\kappa(h)|^{2p}ch^{\frac{p}{2}}E(t)\\
&\leq 2(5p^2-p)\left(\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)\right)+2(5p^2-p)c\hat{k}E(t).
\end{aligned}$$

再将 $I_1$ 和 $I_2$ 代入(2.23)可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq u\leq t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right) &\leq 2|X(0)|^p+2p\hat{K}_1\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^{p-2}(1+|\bar{X}(s)|^2)dE(s)\\
&\quad+2(p-2)\int_0^t \mathbb{E}_W|X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)+4c_p^{\frac{1}{2}}\hat{k}E(t)\\
&\quad+2(5p^2-p)\left(\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)\right)+2(5p^2-1)c\hat{k}E(t)\\
&\leq 2|X(0)|^p+4c_p^{\frac{1}{2}}\hat{k}E(t)+2(5p^2-p)c\hat{k}E(t)\\
&\quad+2p\hat{K}_1\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^{p-2}(1+|\bar{X}(s)|^2)dE(s)\\
&\quad+2(p-2)\int_0^t \mathbb{E}_W|X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)\\
&\quad+2(5p^2-p)\left(\mathbb{E}_W\int_0^t |X(t\wedge\zeta_\ell)|^p dE(s)\right)\\
&\leq C_1+3C_2\int_0^t \mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq u\leq t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)dE(s),
\end{aligned}$$

其中 $C_1=2|X(0)|^p+4c_p^{\frac{1}{2}}\hat{k}E(t)+2(5p^2-p)c\hat{k}E(t)$ 和 $C_2=2p\hat{K}_1\vee 2(p-2)\vee 2(5p^2-p)$, 再通过应用 Gronwall 型不等式, 对任意 $t\in[0,T]$ 有

$$\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq u\leq t\wedge\zeta_\ell}|X(u)|^p\right)\leq C_1e^{(3C_2)E(t)}.$$

当 $\ell\to\infty$ 时 $\zeta_\ell\to\infty$. 令 $t=T$ 和 $\ell\to\infty$ 可得

$$\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^p\right)\leq C_1e^{(3C_2)E(T)}.$$

最后, 我们对两边同时取 $\mathbb{E}_D$, 并通过使用性质 $\mathbb{E}_D\left(E(T)e^{E(T)}\right) < \mathbb{E}_D\left(e^{2E(T)}\right) < \mathbb{E}_D\left(e^{3E(T)}\right) < \infty$ 可得

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|X(t)|^p\right) \le C,$$

其中 $C = \left(2|X(0)|^p + 4c_p^{\frac{1}{2}}\hat{k}E(t) + 2(5p^2-p)c\hat{k}E(t)\right)e^{3(2p\hat{K}_1\vee 2(p-2)\vee 2(5p^2-p))E(T)}$, 结论对任意 $h\in(0,1]$ 成立且 $C$ 与 $h$ 无关, 故推出式子(2.18)成立. □

**引理 2.7.** *若假设2.1、2.3、2.4和2.5成立, 且假设 $q\ge 2(\alpha+1)p$, 其中常数 $p>2$, 那么对任意 $\bar{p}\in[2,p)$ 和 $h\in(0,1]$, 有*

$$\sup_{0<h\le 1}\sup_{0\le t\le T}\left[\mathbb{E}|f^{'}(t,x)|_{x=X(t)}|^{\bar{p}} \vee \mathbb{E}|g^{'}(t,x)|_{x=X(t)}|^{\bar{p}}\right] < \infty,$$

*其中 $f^{'}$ 和 $g^{'}$ 分别表示 $f$ 和 $g$ 关于空间变量 $x$ 的一阶偏导数.*

*该引理易从假设2.4和引理2.7中推导得出.*

**引理 2.8.** *若假设2.1、2.2、2.3、2.4和2.5成立, 且假设 $q\ge 2(\alpha+1)p$, 其中常数 $p>2$, 那么对任意 $\bar{p}\in[2,p)$、$h\in(0,1]$ 和 $t\in[0,T]$, 有*

$$\mathbb{E}|\tilde{R}_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}} \vee \mathbb{E}|\tilde{R}_g(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}} \vee \mathbb{E}|\tilde{R}_{g_h}(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}} < Ch^{\bar{p}}(\kappa(h))^{2\bar{p}},$$

*其中 $C$ 是与 $h$ 和 $t$ 无关的正常数.*

**证明：** 首先, 当 $0\le t\le T$ 时, 我们通过假设2.4、引理2.5和引理2.6对 $|R_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}$ 进行估计, 同时应用 Hölder 不等式和 Jensen 不等式证得存在一个常数 C 满足该估计.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W|R_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\\
\le&\int_0^1(1-\theta)^{\bar{p}}\mathbb{E}_W\left|f^{''}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)+\theta(X(t)-\bar{X}(t))}\big(X(t)-\bar{X}(t),X(t)-\bar{X}(t)\big)\right|^{\bar{p}}d\theta\\
\le&\int_0^1\left[\mathbb{E}_W\left|f^{''}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)+\theta(X(t)-\bar{X}(t))}\right|^{2\bar{p}}\mathbb{E}_W|X(t)-\bar{X}(t)|^{4\bar{p}}\right]^{\frac{1}{2}}d\theta\\
\le&C\big(1+\mathbb{E}_W|X(t)|^{2(1+\alpha)\bar{p}}+\mathbb{E}_W|\bar{X}(t)|^{2(1+\alpha)\bar{p}}\big)^{\frac{1}{2}}\big(\mathbb{E}_W|X(t)-\bar{X}(t)|^{4\bar{p}}\big)^{\frac{1}{2}}\\
\le&Ch^{\bar{p}}k(h)^{2\bar{p}}.
\end{aligned}\tag{2.24}$$

通过应用 (2.10) 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W|\tilde{R}_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\\
\le&C\Big[h^{\bar{p}}\mathbb{E}_W\left|f^{'}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)}f_h(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))\right|^{\bar{p}}\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}_W\left|f^{'}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)}Lg_h(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))(\Delta W(E_h(t))^2-h)\right|^{\bar{p}}\\
&+\mathbb{E}_W|R_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\big[h^{\bar{p}}\mathbb{E}_W|f^{'}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)}f_h(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\\
&\quad+\frac{1}{2}\big(\mathbb{E}_W|f^{'}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)}Lg_h(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))|^{2\bar{p}}\mathbb{E}_W|\Delta W(E(t))^2-h|^{2\bar{p}}\big)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\mathbb{E}_W|R_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\big].
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

根据基本不等式 $|\sum_{i=1}^m a_i|^p\leq m^{p-1}\sum_{i=1}^m|a_i|^p$ 和引理2.3可推导出

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_W|\Delta W(E(t))^2-h|^{2\bar{p}}&\leq 2^{2\bar{p}-1}(\mathbb{E}_W|\Delta W(E(t))|^{4\bar{p}}+h^{2\bar{p}})\\
&\leq 2^{2\bar{p}-1}(c\Delta(E(t))^{2\bar{p}}+h^{2\bar{p}})\\
&\leq 2^{2\bar{p}-1}(2ch^{2\bar{p}})\\
&\leq 2^{2\bar{p}}ch^{2\bar{p}}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

使用(2.4)和引理2.7能得出, 对 $0\leq t\leq T$ 有

$$
\mathbb{E}_W\Big|f^{'}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)}f_h(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))\Big|^{\bar{p}}\leq C(k(h))^{\bar{p}},
\tag{2.27}
$$

$$
\mathbb{E}_W\Big|f^{'}(\bar{\tau}(t),x)|_{x=\bar{X}(t)}Lg_h(\bar{\tau}(t),\bar{X}(t))\Big|^{2\bar{p}}\leq C(k(h))^{4\bar{p}}.
\tag{2.28}
$$

接下来, 将 (2.24)、(2.26)、(2.27) 和 (2.28) 代入 (2.25), 同时利用 $\bar{X}(t)$ 和 $\Delta W(t)$ 之间的独立性有

$$
\mathbb{E}_W|\tilde{R}_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\leq Ch^{\bar{p}}(k(h))^{2\bar{p}}.
$$

最后, 我们对两边同取 $\mathbb{E}_D$ 可得

$$
\mathbb{E}|\tilde{R}_f(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\leq Ch^{\bar{p}}(k(h))^{2\bar{p}}.
$$

类似地, 可以得到

$$
\mathbb{E}|\tilde{R}_g(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\vee\mathbb{E}|\tilde{R}_{g_h}(t,X(t),\bar{X}(t))|^{\bar{p}}\leq Ch^{\bar{p}}(k(h))^{2\bar{p}}.
$$

证明完成. □

# 第 3 章　截断 Milstein 方法的强收敛性

本章我们研究以下形式的非自治时间变换随机微分方程:

$$dY(t) = f(t, Y(t))dE(t) + g(t, Y(t))dW(E(t)),$$

其中漂移项 $f$ 和扩散项 $g$ 中的空间变量满足超线性增长条件, 时间变量满足 Hölder 连续条件. 证明截断 Milstein 方法在有限时间内的强收敛性, 并获得收敛率.

## 3.1　主要结论及推论

**定理 3.1.** *若假设2.1、2.2、2.3 和2.5 对 $q > 2(\alpha+1)p$ 成立, 那么对任意 $\bar{p} \in [2, p)$ 和 $h \in (0, 1]$, $C$ 是一个常数且 $\lambda > 0$, 有*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y(t) - X(t)|^{\bar{p}}\right)\\ \le& C\left(h^{\gamma_f \bar{p}} + h^{\gamma_g \bar{p}} + h^{\bar{p}}(\kappa(h))^{2\bar{p}} + (\mu^{-1}(\kappa(h)))^{(\alpha+1)\bar{p}-q}\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

*和*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y(t) - \bar{X}(t)|^{\bar{p}}\right)\\ \le& C\left(h^{\gamma_f \bar{p}} + h^{\gamma_g \bar{p}} + h^{\bar{p}}(\kappa(h))^{2\bar{p}} + (\mu^{-1}(\kappa(h)))^{(\alpha+1)\bar{p}-q}\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

通过加强假设2.3的条件, 并选择特定的 $\mu(\cdot)$ 和 $\kappa(\cdot)$, 我们可以得到以下推论, 其更清晰地展示了截断 Milstein 方法的强收敛速率.

**推论 3.1.** *若假设2.1、2.2 和 2.5 成立, 且假设2.3对任意 $q > 2$ 成立, 那么对任意 $\bar{p} \in [2, p)$ 和 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}]$, 存在一个常数 $C$ 对任意 $h \in (0, 1]$ 和 $\lambda > 0$, 有*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y(t) - X(t)|^{\bar{p}}\right) \le h^{\min\{\gamma_f \bar{p}, \gamma_g \bar{p}, (1-2\varepsilon)\bar{p}\}} \tag{3.3}$$

*和*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y(t) - \bar{X}(t)|^{\bar{p}}\right) \le C h^{\min\{\gamma_f \bar{p}, \gamma_g \bar{p}, (1-2\varepsilon)\bar{p}\}}. \tag{3.4}$$

**注 3.1.** *推论3.1表明, 对于时间变量的某些光滑系数而言, 截断 Milstein 方法的强收敛率可以无限接近于 1, 但随着光滑系数的减小, 收敛速度也会相应减缓.*

**注 3.2.** *对此类高非线性非自治时间变换随机微分方程的研究, 相比于 Li 在 [30] 中研究的截断 Euler-Maruyama 方法, 本文研究的截断 Milstein 方法提高了收敛阶.*

## 3.2　强收敛率证明

本节我们将证明主要定理 3.1.

**证明：** 固定任意 $\bar{p} \in [2, p)$ 和 $h \in (0, 1]$, 对 $t \geq 0$ 令 $e(t) = Y(t) - X(t)$, 对每个整数 $\ell > |Y(0)|$ 定义停时

$$\theta_\ell = \inf\{t \geq 0 : |Y(t)| \vee |X(t)| \geq \ell\}, \tag{3.5}$$

这里, 我们设 $\inf \emptyset = \infty$ (通常情况下 $\emptyset$ 表示空集). 根据 Itô 公式, 对任意 $0 \leq t \leq T$ 有

$$\begin{aligned} |e(t \wedge \theta_\ell)|^{\bar{p}} = \int_0^{t \wedge \theta_\ell} \Big( &\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-1} \big(f(s, Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\big) \\ &+ \frac{\bar{p}(\bar{p}-1)}{2}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) \\ &- Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2\Big) dE(s) + M_{t\wedge\theta_\ell}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned} M_{t\wedge\theta_\ell} := \int_0^{t\wedge\theta_\ell} &\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-1}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) \\ &- Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big| dW(E(s)). \end{aligned}$$

由于随机积分 $(M_t)_{t\geq 0}$ 是一个局部鞅, 其二次变差为

$$\begin{aligned} [M, M]_{t\wedge\theta_\ell} = \int_0^{t\wedge\theta_\ell} &\bar{p}^2|e(s)|^{2\bar{p}-2}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) \\ &- Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2 dE(s). \end{aligned}$$

对 $0 \leq s \leq t \wedge \theta_\ell$ 有

$$\begin{aligned} &\bar{p}^2|e(s)|^{2\bar{p}-2}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) - Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2 \\ =&\bar{p}^2|e(s)|^{\bar{p}}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) - Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2 \\ \leq&\bar{p}^2(\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}})|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) \\ &- Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2. \end{aligned}$$

因此, 对任意 $a, b > 0$ 和 $\lambda > 0$, 我们使用不等式 $(ab)^{1/2} \leq a/\lambda + \lambda b$, 取 $\lambda = 2\bar{p}$ 有

$$\begin{aligned} &([M, M]_{t\wedge\theta_\ell})^{1/2} \\ \leq&\bar{p}\Big(\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s, Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s)) \\ &- Lg_h(\bar{\tau}(s), \bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2 dE(s)\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq &\bar{p}\bigg(\frac{\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}}}{2\bar{p}} + 2\bar{p}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s,Y(s))\\
&- g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) - Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2 dE(s)\bigg)\\
\leq &\frac{1}{2}\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} + 2\bar{p}^2\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bigg(|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s,Y(s))\\
&- g_h(\bar{\tau}(s),X(s)) + \tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))\big|^2\bigg)dE(s),
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

这里最后一个不等式使用了(2.11). 接下来, 对(3.7)取期望有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_W(M_{t\wedge\theta_\ell}) =&\mathbb{E}_W([M,M]_{t\wedge\theta_\ell})^{\frac{1}{2}}\\
=&\mathbb{E}_W\bigg(\frac{1}{2}\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} + 2\bar{p}^2\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s,Y(s))\\
&- g_h(\bar{\tau}(s),X(s)) + \tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))\big|^2 dE(s)\bigg).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

联立(3.6)和(3.7)可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq t\leq T}|e(t\wedge\theta_\ell)|^{\bar{p}}\right)\\
\leq&\mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(|e(s)|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right)\\
&+\frac{\bar{p}-1}{2}\big|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) - Lg_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\Delta W(E_h(s))\big|^2\bigg)dE(s)\\
&+\frac{1}{2}\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} + 2\bar{p}^2\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))\\
&+\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))\big|^2 dE(s)\bigg)\\
\leq&\mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(|e(s)|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right)\\
&+\frac{\bar{p}-1}{2}\big|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s)) + \tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))\big|^2\bigg)dE(s)\\
&+\frac{1}{2}\sup_{0\leq r\leq t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} + 2\bar{p}^2\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}\big|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))\\
&+\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))\big|^2 dE(s)\bigg).
\end{aligned}
$$

这里第二项应用了(2.11). 然后整理上述方程可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\leq t\leq T}|e(t)\wedge\theta_\ell)|^{\bar{p}}\right)\\
\leq&\mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(|e(s|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\bar{p}-1)|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2 \\
&+ (\bar{p}-1)|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2\Big)dE(s) + \frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} \\
&+ \bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\Big(4\bar{p}|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2 \\
&+ 4\bar{p}|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2\Big)dE(s)\Big) \\
\le& \mathbb{E}_W\Big(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(|e(s)|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right) \\
&+ (5\bar{p}-1)|g(s,Y(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\Big)dE(s) + \frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} \\
&+ \bar{p}(5\bar{p}-1)\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2 dE(s)\Big). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

上式推导中, 最后两项通过使用基本不等式 $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ 并进行合并得到. 接下来, 我们通过整理方程, 对任意 $a, b \ge 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 使用 Young 不等式 $(a+b)^2 \le (1+\varepsilon)a^2 + (1+1/\varepsilon)b^2$, 并在第二项中选择 $\varepsilon = (5p-5\bar{p})/(5\bar{p}-1)$, 故能从(3.9)中得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le t\le T}|e(t\wedge\theta_\ell)|^{\bar{p}}\right) \\
\le& \mathbb{E}_W\Big(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(|e(s)|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right) \\
&+ (5\bar{p}-1)\big|g(s,Y(s)) - g(s,X(s)) + g(s,X(s)) \\
&- g_h(\bar{\tau}(s),X(s))\big|^2\Big)dE(s) + \frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} \\
&+ (5\bar{p}^2-\bar{p})\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2 dE(s)\Big) \\
\le& \mathbb{E}_W\Big(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(|e(s)|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right) \\
&+ (5\bar{p}-1)\Big((1+\frac{5p-5\bar{p}}{5\bar{p}-1})|g(s,Y(s)) - g(s,X(s))|^2 \\
&+ (1+\frac{5\bar{p}-1}{5p-5\bar{p}})|g(s,X(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\Big)dE(s) \\
&+ \frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}} + (5\bar{p}^2-\bar{p})\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2} \\
&\times|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2 dE(s)\Big) \\
\le& \mathbb{E}_W\Big(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(|e(s)|^{\mathrm{T}}\left(f(s,Y(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(5p-1)|g(s,Y(s))-g(s,X(s))|^2+\frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(s,X(s))\\
&-g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\Big)dE(s)+\frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}}\\
&+(5\bar{p}^2-\bar{p})\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}-2}|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2dE(s)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

根据不等式的基本性质, 从(3.10)可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_W\left(\sup_{0\le t\le T}|e(t\wedge\theta_\ell)|^{\bar{p}}\right)\\
\le&\frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}}+\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^{\mathrm{T}}(s)\big(f(s,Y(s))\\
&-f(s,X(s))\big)+(5p-1)|g(s,Y(s))-g(s,X(s))|^2\Big)dE(s)\\
&+\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^{\mathrm{T}}(s)\big(f(s,X(s))-f_h(\bar{\tau}(s),X(s))\big)\\
&+\frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(s,X(s))-g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\Big)dE(s)\\
&+\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}(5\bar{p}^2-p)|e(s)|^{\bar{p}-2}|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2dE(s)\\
\le&\frac{1}{2}\sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell}|e(r)|^{\bar{p}}+[J_1]+[J_2]+[J_3],
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
J_1:=\mathbb{E}_W\Big(&\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^{\mathrm{T}}(s)\big(f(s,Y(s))-f(s,X(s))\big)\\
&+(5p-1)|g(s,Y(s))-g(s,X(s))|^2\Big)dE(s)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2:=\mathbb{E}_W\Big(&\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^{\mathrm{T}}(s)\left(f(s,X(s))-f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\right)\\
&+\frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(s,X(s))-g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\Big)dE(s)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
J_3:=\mathbb{E}_W\Big(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}(5\bar{p}^2-p)|e(s)|^{\bar{p}-2}|\tilde{R}_{g_h}(s,X(s),\bar{X}(s))|^2dE(s)\Big).
$$

根据假设2.2可推导出

$$
J_1\le H_1\int_0^T\mathbb{E}_W|e(s)|^{\bar{p}}dE(s),
\tag{3.12}
$$

其中 $H_1=\bar{p}K$. 接下来, 我们处理 $J_2$.

$$
J_2=\mathbb{E}_W\Big(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^{T}(s)\big(f(s,X(s))-f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\big)
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(s,X(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\bigg)dE(s)\bigg) \\
&\leq \mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(e^T(s)\big(f(s,X(s)) - f(\bar{\tau}(s),X(s))\big) \\
&\quad + \frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(s,X(s)) - g(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\bigg)dE(s) \\
&\quad + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(e^T(s)\big(f(\bar{\tau}(s),X(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\big) \\
&\quad + \frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(\bar{\tau}(s),X(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\bigg)dE(s)\bigg) \\
&\leq J_{21} + J_{22},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

通过使用假设2.5和基本不等式的性质, Young 不等式即对任意 $0\leq t\leq t\wedge\theta_\ell\leq T$,

$$
a^{p-2}b \leq \frac{p-2}{p}a^p + \frac{2}{p}b^{p/2}, \quad \forall a,b\geq 0.
$$

可以推出

$$
\begin{aligned}
J_{21} &= \mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(\frac{1}{2}|e(s)|^2 + \frac{1}{2}|f(s,X(s)) - f(\bar{\tau}(s),X(s))|^2 \\
&\quad + \frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(s,X(s)) - g(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\bigg)dE(s)\bigg) \\
&\leq C\bigg(\mathbb{E}_W\sup_{0\leq t\leq T}\bigg(\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}}dE(s) + \int_0^{t\wedge\theta_\ell}|f(s,X(s)) - f(\bar{\tau}(s),X(s))|^{\bar{p}}dE(s) \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\theta_\ell}|g(s,X(s)) - g(\bar{\tau}(s),X(s))|^{\bar{p}}\bigg)dE(s)\bigg) \\
&\leq C\bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar{p}}dE(s) + \mathbb{E}_W\int_0^T H_1^{\bar{p}}(1+|X(s)|^{(1+\alpha)\bar{p}})h^{\gamma_f\bar{p}}dE(s) \\
&\quad + \mathbb{E}_W\int_0^T H_2^{\bar{p}}(1+|X(s)|^{(1+\alpha)\bar{p}})h^{\gamma_g\bar{p}})dE(s)\bigg) \\
&\leq C\bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar{p}}dE(s) + h^{\gamma_f\bar{p}}E(T) + h^{\gamma_g\bar{p}}E(T)\bigg).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

其中最后一个不等式通过使用引理2.6得到. 接着, 我们根据不等式的基本性质处理 $J_{22}$ 项, 可得

$$
\begin{aligned}
J_{22} &= \mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(e^T(s)\big(f(\bar{\tau}(s),X(s)) - f(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\big)\bigg)dE(s) \\
&\quad + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\bigg(e^T(s)\big(f(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s)) - f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\big) \\
&\quad + \frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(\bar{\tau}(s),X(s)) - g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\bigg)dE(s)\bigg) \\
&\leq I_1 + I_2.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

对 $I_1$, 根据(2.9)和 Young 不等式可推导出

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^T(s)\big(f(\bar{\tau}(s),X(s))-f(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\big)\Big)dE(s)\bigg)\\
&\le \mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^T(s)\big(f'(\bar{\tau}(s),x)|_{x=\bar{X}(s)}\\
&\quad\times\int_0^s g_h(\bar{\tau}(s_1),\bar{X}(s_1))dW(E(s_1))+\tilde{R}_f(s,X(s),\bar{X}(s))\big)\Big)dE(s)\bigg)\\
&\le H_{21}\mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\Big(|e(s)|^{\bar{p}}+\big|e(s)^T(f'(\bar{\tau}(s),x)|_{x=\bar{X}(s)}\\
&\quad\times\int_0^s g_h(\bar{\tau}(s_1),\bar{X}(s_1))dW(E(s_1))\big|^{\frac{\bar{p}}{2}}+|e(s)^T\tilde{R}_f(s,X(s),\bar{X}(s))|^{\frac{\bar{p}}{2}}\Big)dE(s)\bigg)\\
&\le H_{21}\bigg(\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\Big(|e(s)|^{\bar{p}}dE(s)+\big|e(s)^T(f'(\bar{\tau}(s),x)|_{x=\bar{X}(s)}\\
&\quad\times\int_0^s g_h(\bar{\tau}(s_1),\bar{X}(s_1))dW(E(s_1))\big|^{\frac{\bar{p}}{2}}dE(s)+|\tilde{R}_f(s,X(s),\bar{X}(s))|^{\bar{p}}dE(s)\bigg).
\end{aligned}\tag{3.16}$$

再通过应用类似文献 [40] 中 (3.35) 的方法, 并结合(3.16)和引理 2.8可以得到

$$\begin{aligned}
I_1 &\le H_{21}\bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar{p}}dE(s)+\mathbb{E}_W\int_0^T|\tilde{R}_f(s,X(s),\bar{X}(s))|^{\bar{p}}dE(s)+h^{\bar{p}}\bigg)\\
&\le H_{21}\bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar{p}}dE(s)+\int_0^T\mathbb{E}_W|\tilde{R}_f(s,X(s),\bar{X}(s))|^{\bar{P}}dE(s)+h^{\bar{p}}\bigg)\\
&\le H_{21}\bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)^{\bar{p}}dE(s))+h^{\bar{p}}(k(h))^{2\bar{p}}+h^{\bar{p}}\bigg).
\end{aligned}\tag{3.17}$$

然后对 $I_2$ 应用 Young 不等式、假设2.1和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E}_W\bigg(\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}\bar{p}|e(s)|^{\bar{p}-2}\Big(e^T(s)\big(f(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))-f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\big)\\
&\quad+\frac{5p-1}{5p-5\bar{p}}|g(\bar{\tau}(s),X(s))-g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^2\Big)dE(s)\bigg)\\
&\le H_{22}\bigg(\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}}dE(s)+\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|f(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))\\
&\quad-f_h(\bar{\tau}(s),\bar{X}(s))|^{\bar{p}}+|g(\bar{\tau}(s),X(s))-g_h(\bar{\tau}(s),X(s))|^{\bar{p}}dE(s)\bigg)\\
&\le H_{22}\bigg(\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}|e(s)|^{\bar{p}}dE(s)+\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}(1+|\bar{X}(s)|^{\alpha\bar{p}}\\
&\quad+\big||\bar{X}(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big|^{\alpha\bar{p}}\Big)\bigg|\bar{X}(s)-\big(|\bar{X}(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big)\frac{\bar{X}(s)}{|\bar{X}(s)|}\bigg|^{\bar{p}}dE(s)\\
&\quad+\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}(1+|X(s)|^{\alpha\bar{p}}+\big||X(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big|^{\alpha\bar{p}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left|X(s)-\big(|X(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big)\frac{X(s)}{|X(s)|}\right|^{\bar p}dE(s)\Bigg)\\
&\le H_{22}\Bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar p}dE(s)+\int_0^T\bigg(\mathbb{E}_W\Big[1+|\bar X(s)|^q+\big||\bar X(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big|^q\Big]\bigg)^{\frac{\alpha\bar p}{q}}\\
&\times\left[\mathbb{E}_W\left|\bar X(s)-\big(|\bar X(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big)\frac{\bar X(s)}{|\bar X(s)|}\right|^{\frac{q\bar p}{q-\alpha\bar p}}\right]^{\frac{q-\alpha\bar p}{q}}dE(s)\\
&+\int_0^T\bigg(\mathbb{E}_W\Big[1+|X(s)|^q+\big||X(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big|^q\Big]\bigg)^{\frac{\alpha\bar p}{q}}\\
&\times\left[\mathbb{E}_W\left|X(s)-\big(|X(s)|\wedge\mu^{-1}(k(h))\big)\frac{X(s)}{|X(s)|}\right|^{\frac{q\bar p}{q-\alpha\bar p}}\right]^{\frac{q-\alpha\bar p}{q}}dE(s)\Bigg),
\end{aligned}
$$

上述证明中引理2.6被使用到. 再通过 Hölder 不等式和 Chebyshev 不等式 $\mathbb{P}(|x|\geqslant a)\leqslant a^{-q}\mathbb{E}|x|^q$(其中 $a>0,q>0$), 可得

$$
\begin{aligned}
I_2&\le H_{22}\Bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar p}dE(s)\\
&+\int_0^T\left(\mathbb{E}_W\left|I\left\{|\bar X(s)|>\mu^{-1}(k(h))\right\}|\bar X(s)|^{\frac{q\bar p}{q-\alpha\bar p}}\right|\right)^{\frac{q-\alpha\bar p}{q}}dE(s)\\
&+\int_0^T\left(\mathbb{E}_W\left|I\left\{|X(s)|>\mu^{-1}(k(h))\right\}|X(s)|^{\frac{q\bar p}{q-\alpha\bar p}}\right|\right)^{\frac{q-\alpha\bar p}{q}}dE(s)\Bigg)\\
&\le H_{22}\Bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar p}dE(s)\\
&+\int_0^T\left(\left[P\left\{|\bar X(s)|>\mu^{-1}(k(h))\right\}\right]^{\frac{q-\alpha\bar p-\bar p}{q-\alpha\bar p}}\left[\mathbb{E}|\bar X(s)|^q\right]^{\frac{\bar p}{q-\alpha\bar p}}\right)^{\frac{q-\alpha\bar p}{q}}dE(s)\\
&+\int_0^T\left(\left[P\left\{|X(s)|>\mu^{-1}(k(h))\right\}\right]^{\frac{q-\alpha\bar p-\bar p}{q-\alpha\bar p}}\left[\mathbb{E}|X(s)|^q\right]^{\frac{\bar p}{q-\alpha\bar p}}\right)^{\frac{q-\alpha\bar p}{q}}dE(s)\Bigg)\\
&\le H_{22}\Bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar p}dE(s)+\int_0^T\left(\frac{\mathbb{E}_W|\bar X(s)|^q}{|\mu^{-1}(k(h))|^q}\right)^{\frac{q-\alpha\bar p-\bar p}{q}}dE(s)\\
&+\int_0^T\left(\frac{\mathbb{E}_W|X(s)|^q}{|\mu^{-1}(k(h))|^q}\right)^{\frac{q-\alpha\bar p-\bar p}{q}}dE(s)\Bigg)\\
&\le H_{22}\Bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar p}dE(s)+\big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p-q}\Bigg).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

将(3.17) 和 (3.18) 代入(3.15) 可得

$$
J_{22}\le H_{22}\Bigg(\mathbb{E}_W\int_0^T|e(s)|^{\bar p}dE(s)+\big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p-q}+h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p}+h^{\bar p}\Bigg).\tag{3.19}
$$

对于 $J_3$ 的处理, 我们通过应用 Young 不等式和引理2.8可推出

$$
J_3=\mathbb{E}_W\sup_{0\le t\le T}\int_0^{t\wedge\theta_\ell}(5\bar p^2-\bar p)|e(s)|^{\bar p-2}|\tilde R_{g_h}(s,X(s),\bar X(s))|^2dE(s)
$$

$$
\begin{aligned}
&\le H_3 \mathbb{E}_W \sup_{0\le t\le T} \int_0^{t\wedge\theta_\ell} (|e(s)|^{\bar p} + |\tilde R_{g_h}(s, X(s), \bar X(s))|^{\bar p}) dE(s) \\
&\le H_3 \bigg( \mathbb{E}_W \int_0^T |e(s)|^{\bar p} dE(s) + \int_0^T \mathbb{E}_W |\tilde R_{g_h}(s, X(s), \bar X(s))|^{\bar p} dE(s) \bigg) \\
&\le H_3 \bigg( \mathbb{E}_W \int_0^T |e(s)|^{\bar p} dE(s) + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} \bigg). \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

其中 $H_{21}$、$H_{22}$、$H_3$ 和下面的 C 都是与 $h$ 无关的正常数, 其值可能会在每行之间发生变化. 最后联立方程(3.11)、(3.12)、(3.13)、(3.14)、(3.19)、(3.20)可将原始式子写为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_W \left( \sup_{0\le t\le T} |e(t\wedge\theta_\ell)|^{\bar p} \right) \le& \frac{1}{2} \sup_{0\le r\le t\wedge\theta_\ell} |e(r)|^{\bar p} + [J_1] + [J_2] + [J_3] \\
\le& 2([J_1] + [J_2] + [J_3]) \\
\le& C \bigg( \mathbb{E}_W \int_0^T |e(s)|^{\bar p} dE(s) + h^{\gamma_f \bar p} + h^{\gamma_g \bar p} \\
&\quad + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} + h^{\bar p} + \big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p - q} \bigg) \\
\le& C \bigg( \int_0^T \mathbb{E}_W \sup_{0\le u\le s} |e(u\wedge\theta_\ell)|^{\bar p} dE(s) + h^{\gamma_f \bar p} + h^{\gamma_g \bar p} \\
&\quad + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} + \big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p - q} \bigg).
\end{aligned}
$$

再应用 Gronwall 不等式可得

$$
\mathbb{E}_W( \sup_{0\le t\le T} |e(t\wedge\theta_\ell)|^{\bar p}) \le C \bigg( h^{\gamma_f \bar p} + h^{\gamma_g \bar p} + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} + (\mu^{-1}(k(h)))^{(\alpha+1)\bar p - q} \bigg) e^{\lambda E(T)},
$$

通过令 $n \to \infty$, 根据 Fatou 引理可得

$$
\mathbb{E}_W( \sup_{0\le t\le T} |e(t)|^{\bar p}) \le C \bigg( h^{\gamma_f \bar p} + h^{\gamma_g \bar p} + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} + \big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p - q} \bigg) e^{\lambda E(T)},
$$

其中 $C$ 与 $h$ 独立, 且 $\lambda > 0$. 接着我们对两边同时取 $\mathbb{E}_D$ 得

$$
\mathbb{E} \left( \sup_{0\le t\le T} |Y(t) - X(t)|^{\bar p} \right) \le C \bigg( h^{\gamma_f \bar p} + h^{\gamma_g \bar p} + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} + \big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p - q} \bigg). \qquad (3.21)
$$

再联立引理2.5和(3.21)可得

$$
\mathbb{E} \left( \sup_{0\le t\le T} |Y(t) - \bar X(t)|^{\bar p} \right) \le C \bigg( h^{\gamma_f \bar p} + h^{\gamma_g \bar p} + h^{\bar p}(k(h))^{2\bar p} + \big(\mu^{-1}(k(h))\big)^{(\alpha+1)\bar p - q} \bigg).
$$

最后通过选择适当 $\mu^{-1}(\cdot)$ 和 $\kappa(\cdot)$, 完成证明. □

# 第 4 章　数值模拟

接下来, 我们将通过 Matlab 数值模拟来验证所提数值方法的强收敛主要结论. 在本章中, 将呈现一维和二维的两个数值算例.

**例 4.1.** 考虑一个一维时间变换随机微分方程

$$\begin{cases} dY(t) = \Big([t(1-t)]^{\frac{1}{4}}Y(t) - Y^5(t)\Big)\, dE(t) + ([t(1-t)]Y^2(t))\, dW(E(t)), \\ Y(0) = 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

令 $T = 1$, 该方程中漂移项和扩散项系数分别为 $f(y) = [t(1-t)]^{\frac{1}{4}}y - y^5$ 和 $g(y) = [t(1-t)]y^2$. 显然, 它们都具有连续的二阶导数, 并且不难验证当 $\alpha = 4$ 时, 假设2.1和假设2.4成立.

对任意 $p > 2$ 有

$$\begin{aligned} &(x-y)^{\mathrm{T}}(f(t,x) - f(t,y)) + (5p-1)|g(t,x) - g(t,y)|^2 \\ =&(x-y)^T\Bigg([t(1-t)]^{\frac{1}{4}}(x-y) - (x^5 - y^5)\Bigg) + (5p-1)\Big|[t(1-t)](x^2-y^2)\Big|^2 \\ \le&(x-y)^2\Bigg([t(1-t)]^{\frac{1}{4}} - (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + (5p-1)[t(1-t)]^2(x+y)^2\Bigg). \end{aligned}$$

由于

$$-(x^3y + xy^3) = -xy(x^2+y^2) \le 0.5(x^2+y^2)^2 = 0.5(x^4+y^4) + x^2y^2.$$

因此

$$\begin{aligned} &(x-y)^{\mathrm{T}}(f(t,x) - f(t,y)) + (5p-1)|g(t,x) - g(t,y)|^2 \\ \le&(x-y)^2\Bigg([t(1-t)]^{\frac{1}{4}} - 0.5(x^4+y^4) + 2(5p-1)[t(1-t)]^2(x^2+y^2)\Bigg) \\ \le&K(x-y)^2. \end{aligned}$$

这里使用了 Young 不等式. 最后一个不等式根据多项式的最高阶项系数为负系数时始终有界的性质得到, 因此假设 2.2 成立.

类似地, 对任意 $q > 2$ 和任意 $t \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned} &x^{\mathrm{T}}f(t,x) + (5q-1)|g(t,x)|^2 \\ =&[t(1-t)]^{\frac{1}{4}}x - x^5 + (5q-1)[t(1-t)]^2x^4 \\ \le&K_1(1+|x|^2). \end{aligned}$$

故假设2.3成立.

然后对方程中的时间变量使用均值定理, 假设2.5在 $\gamma_f = \frac{1}{4}, \gamma_g = 1$ 时成立. 所以由定理3.1可得

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-X(t)|^{\bar{p}}\right) \le C\left(h^{\frac{\bar{p}}{4}} + h^{\bar{p}} + h^{\bar{p}}(\kappa(h))^{2\bar{p}} + \left(\mu^{-1}(\kappa(h))\right)^{5\bar{p}-q}\right)$$

和

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-\bar{X}(t)|^{\bar{p}}\right) \le C\left(h^{\frac{\bar{p}}{4}} + h^{\bar{p}} + h^{\bar{p}}(\kappa(h))^{2\bar{p}} + \left(\mu^{-1}(\kappa(h))\right)^{5\bar{p}-q}\right).$$

根据方程4.1的漂移项和扩散项的系数, 易得到

$$\sup_{0\le t\le 1}\sup_{|x|\le u}(|f(t,x)|\vee|g(t,x)|\vee|Lg(t,x)|) \le 2u^5, \quad \forall u\ge 1.$$

所以对任意 $\varepsilon\in(0,1/4]$, 我们令 $\mu(u)=2u^5$ 和 $\kappa(h)=h^{-\varepsilon}$, 则有 $\mu^{-1}(u)=(u/2)^{1/5}$ 和 $\mu^{-1}(\kappa(h))=(h^{-\varepsilon}/2)^{1/5}$. 当选择足够小的 $\varepsilon$ 和足够大的 $p$, 根据定理3.1, 可推导出

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le 1}|Y(t)-X(t)|^{\bar{p}}\right) \le Ch^{\bar{p}/4}$$

和

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le 1}|Y(t)-\bar{X}(t)|^{\bar{p}}\right) \le Ch^{\bar{p}/4}.$$

结论表明时间变换随机微分方程(4.1)的截断 Milstein 方法的收敛阶为 0.25.

接下来, 我们通过 Matlab 计算均方误差的近似值. 通过选择不同的步长 $10^{-1}$、$10^{-2}$、$10^{-3}$、$10^{-4}$、$10^{-5}$, 并对每个步长都模拟(2.7)的 M=100 条独立的轨迹. 我们选择 $\varepsilon=0.02$, 由于时间变换随机微分方程的真实解很难被显式表达, 故本文将步长为 $10^{-5}$ 的数值解视为精确解, 画出其收敛图如下:

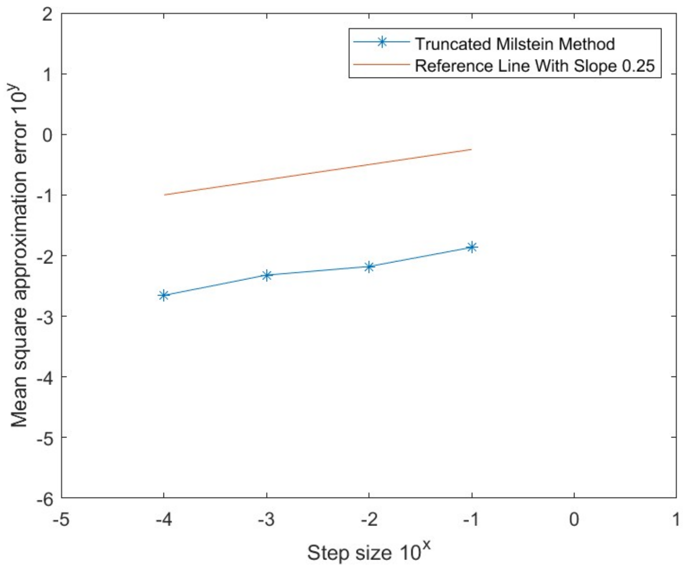


图 4.1　例4.1的收敛率

从图 4.1 中不难看出, 截断 Milstein 的强收敛阶约为 0.25. 我们通过 Matlab 数值模拟得出误差对步长的斜率为 0.2517, 故验证了理论结果.

**例 4.2.** 考虑一个二维时间变换随机微分方程

$$\begin{cases} dx_1(t) = \Big([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}x_1(t) - x_2^5(t)\Big)dE(t) + \Big([t(1-t)]^{\frac{1}{2}}x_2^2(t)\Big)dW(E(t)), \\ dx_2(t) = \Big([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}x_2(t) - x_1^5(t)\Big)dE(t) + \Big([t(1-t)]^{\frac{1}{1}}x_1^2(t)\Big)dW(E(t)). \end{cases} \tag{4.2}$$

其中

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} [t(1-t)]^{\frac{1}{5}}x_1 - x_2^5 \\ [t(1-t)]^{\frac{1}{5}}x_2 - x_1^5 \end{pmatrix} \quad 和 \quad g(t,x) = \begin{pmatrix} [t(1-t)]^{\frac{1}{2}}x_2^2 \\ [t(1-t)]^{\frac{1}{2}}x_1^2 \end{pmatrix}.$$

类似例 4.1, 不难验证系数 $f(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 满足假设2.1和2.4, 其中 $\alpha = 4$. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 容易得到

$$\begin{aligned} &(x-y)^{\mathrm{T}}(f(t,x)-f(t,y)) + (5p-1)|g(t,x)-g(t,y)|^2 \\ =&(x_1-y_1)\Big([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}(x_1-y_1) - (x_2^5-y_2^5)\Big) + (x_2-y_2)\Big([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}(x_2-y_2) \\ &- (x_1^5-y_1^5)\Big) + (5p-1)\Big([t(1-t)]^{\frac{1}{2}}(x_2^2-y_2^2)^2 + [t(1-t)]^{\frac{1}{2}}(x_1^2-y_1^2)\Big)^2 \\ \le&(x_1-y_1)^2\left([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} - (x_2^4+x_2^3y_2+x_2^2y_2^2+x_2y_2^3+y_2^4)\right) \\ &+ (x_2-y_2)^2\left([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} - (x_1^4+x_1^3y_1+x_1^2y_1^2+x_1y_1^3+y_1^4)\right) \\ &+ 2(5p-1)\Big([t(1-t)](x_2^2-y_2^2)^2 + [t(1-t)](x_1^2-y_1^2)^2\Big) \\ \le&(x_1-y_1)^2\left([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} - (x_2^4+x_2^3y_2+x_2^2y_2^2+x_2y_2^3+y_2^4)\right) \\ &+ (x_2-y_2)^2\Big([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} - (x_1^4+x_1^3y_1+x_1^2y_1^2+x_1y_1^3+y_1^4)\Big) \\ &+ 2(x_2-y_2)^2(5p-1)\Big([t(1-t)](x_2+y_2)^2\Big) + 2(x_1-y_1)^2(5p-1) \\ &\times\Big([t(1-t)](x_1+y_1)^2\Big). \end{aligned}$$

由于

$$-(x^3y+xy^3) = -xy(x^2+y^2) \le 0.5(x^2+y^2)^2 = 0.5(x^4+y^4) + x^2y^2.$$

故对任意 $t \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned} &(x-y)^{\mathrm{T}}(f(t,x)-f(t,y)) + (5p-1)|g(t,x)-g(t,y)|^2 \\ \le&(x_1-y_1)^2\Big([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} - 0.5(x_2^4+y_2^4) + 2(5p-1)[t(1-t)](x_1+y_1)^2\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(x_2-y_2)^2\left([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}-0.5(x_1^4+y_1^4)+2(5p-1)[t(1-t)](x_2+y_2)^2\right)\\
\leq& C(x-y)^2,
\end{aligned}
$$

这里使用了基本不等式 $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ 以及多项式的最高阶项系数为负系数时始终有界的性质, 故假设 2.2 成立.

对任意 $q>2$ 和 $t\in[0,1]$, 下面推导假设2.3是成立的.

$$
\begin{aligned}
&x^{\mathrm{T}}f(t,x)+(5q-1)|g(t,x)|^2\\
=&([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}x_1^2-x_1x_2^5)+([t(1-t)]^{\frac{1}{5}}x_2^2-2x_1^5x_2)+2(5q-1)|[t(1-t)](x_1^2+x_2^2)|^2\\
\leq&[t(1-t)]^{\frac{1}{5}}(x_1^2+x_2^2)-x_1x_2(x_1^4+x_2^4)+2(5q-1)[t(1-t)](x_1^2+x_2^2)\\
\leq& C(1+|x|^2).
\end{aligned}
$$

由于 $\gamma_f\in(0,1]$ 和 $\gamma_g\in(0,1]$, 对任意 $s,t\in[0,T]$, 我们通过对时间变量使用均值定理, 即

$$
\begin{aligned}
&|f(s,x)-f(t,x)|\\
\leq&\left|([(s(1-s)]^{\frac{1}{5}}-[t(1-t)]^{\frac{1}{5}})x_1+([s(1-s)]^{\frac{1}{5}}-[t(1-t)]^{\frac{1}{5}})x_2\right|\\
\leq& C_1|s-t|^{\frac{1}{5}}x_1+C_2|s-t|^{\frac{1}{5}}x_2
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&|g(s,x)-g(t,x)|\\
\leq&\left|([s(1-s)]^{\frac{1}{2}}-[t(1-t)]^{\frac{1}{2}})x_2^2+([s(1-s)]^{\frac{1}{2}}-[t(1-t)]^{\frac{1}{2}})x_1^2\right|\\
\leq& C_1|s-t|^{\frac{1}{2}}x_2^2+C_2|s-t|^{\frac{1}{2}}x_1^2.
\end{aligned}
$$

可得假设2.5在 $\gamma_f=1/5$ 和 $\gamma_g=1/2$ 时成立. 再根据定理3.1和例4.1, 对任意 $\varepsilon\in(0,1/4]$, 我们令 $\mu(u)=2u^5$ 和 $\kappa(h)=h^{-\varepsilon}$, 当选择足够小 $\varepsilon$ 和足够大的 $p$ 时, 根据定理3.1可得

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}|Y(t)-X(t)|^{\bar{p}}\right)\leq Ch^{\bar{p}/5}
$$

和

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}|Y(t)-\bar{X}(t)|^{\bar{p}}\right)\leq Ch^{\bar{p}/5}.
$$

上面结论表明了时间变换随机微分方程(4.2)截断 Milstein 方法的收敛阶为 $1/5$. 同样地, 接下来我们将通过计算机模拟进行验证.

同例4.1, 我们对(2.7)选取不同步长 $10^{-1}$、$10^{-2}$、$10^{-3}$、$10^{-4}$、$10^{-5}$ , 然后对每

个步长都模拟 M=100 条独立轨迹, 将步长为 $10^{-5}$ 的数值解视为精确解, 画出其收敛图如下:

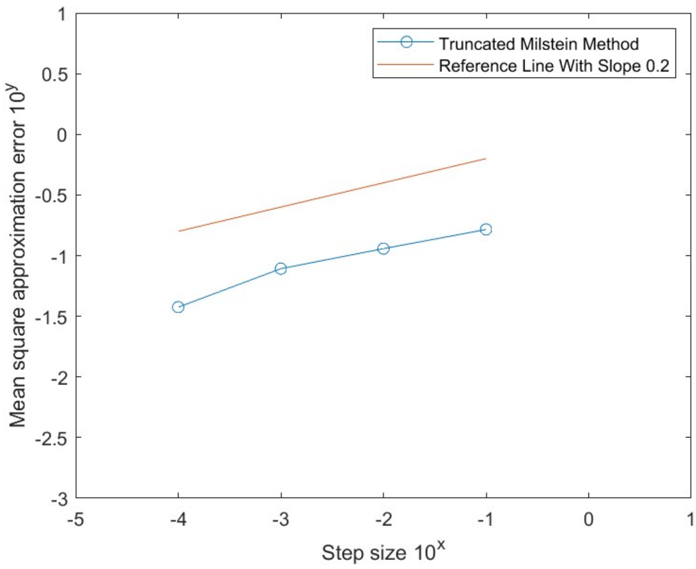


图 4.2　例子4.2的收敛率

从图 4.2 不难看出收敛阶约为 0.2. 我们通过应用线性回归得出误差线的斜率约为 0.2086, 其与理论结果非常接近, 同样验证了本文的重要结论.

# 第 5 章　结论与展望

由于时间变换随机微分方程在众多领域具有广泛的运用, 本文针对一类高非线性非自治的时间变换随机微分方程进行研究. 此类时间变换随机微分方程中漂移项和扩散项系数中空间变量满足超线性增长, 且时间变量满足 Hölder 连续的条件, 由于方程结构的特殊性, 我们并不能简单通过对偶原理由经典随机微分方程的数值方法来构造时间变换随机微分方程的数值方法. 为处理好时间变换随机微分方程高非线性条件的同时提高数值方法的收敛阶, 本文提出了截断 Milstein 方法, 并研究了在有限时间区间的强收敛性, 得到了强收敛阶为 $\min\{\gamma_f, \gamma_g, (1-2\varepsilon)\}$.

总的来说, 本文与现有研究的主要区别在于提出的时间变换随机微分方程不适用对偶原理, 同时处理的是非自治和高非线性情况, 构造了具有较高收敛阶的数值方法处理方程. 文章最后列举的两个数值例子验证了理论结果.

此外, 在一类高非线性非自治时间变换随机微分方程的数值分析中, 数值方法的稳定性也是一个重要的研究方向. 因为随机微分方程的数值求解中存在着随机项和数值误差的影响, 将导致问题研究更加复杂以及数值解的不稳定性, 因而探讨数值方法的稳定性至关重要. 然而这方面的研究将涉及到更复杂的符号和假设分析. 考虑本文篇幅有限, 我们将在未来的研究工作中专门探讨此类时间变换随机微分方程的截断 Milstein 方法的稳定性问题.

# 参考文献


[1] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion, Ito calculus, and Fokker-Planck equation - fractional generalizations[M]. Hackensack: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, 2018.

[2] Meerschaert M M, Scheffler H P. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times[J]. Journal of Applied Probability, 2004, 41(3):623-638.

[3] Deng C S, Schilling R L. Harnack inequalities for SDEs driven by time-changed fractional brownian motions[J]. Electronic Journal of Probability, 2017, 22:1-23.

[4] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. Journal of Theoretical Probability, 2011, 24(3):789-820.

[5] Wu Q. Stability analysis for a class of nonlinear time-changed systems[J]. Cogent Mathematics, 2016, 3(1):1228273.

[6] Nane E, Ni Y. Stability of the solution of stochastic differential equation driven by time-changed Lévy noise[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2017, 145(7):3085-3104.

[7] Nane E, Ni Y. Path stability of stochastic differential equations driven by time-changed Lévy noises[J]. Alea-latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, 2018, 15(1): 479-507.

[8] Zhang X, Yuan C. Razumikhin-type theorem on time-changed stochastic functional differential equations with Markovian switching[J]. Open Mathematics, 2019, 17(1):689-699.

[9] Yin X, Xu W, Shen G. Stability of stochastic differential equations driven by the time-changed Lévy process with impulsive effects[J]. International Journal of Systems Science, 2021, 52(11): 2338-2357.

[10] Shen G, Zhang T, Song J, Wu J L. On a class of distribution dependent stochastic differential equations driven by time-changed brownian motions[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2023, 88(2):1432-0606.

[11] Li Z, Xu L, Yan L. Mckean-vlasov stochastic differential equations driven by the time-changed brownian motion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023, 527(1):127336.

[12] Magdziarz M. Black-scholes formula in subdiffusive regime[J]. Journal of Statistical Physics, 2009, 136(3):553-564.

[13] Magdziarz M, Orzeł S, Weron A. Option pricing in subdiffusive Bachelier model[J]. Journal of Statistical Physics, 2011, 145(1):187-203.

[14] Janczura J, Orzeł S, Wyłomańska A. Subordinated $\alpha$-stable ornstein–uhlenbeck process as a tool for financial data description[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2011, 390(23-24):4379-4387.

[15] Chen Z Q. Time fractional equations and probabilistic representation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2017, 102:168-174.

[16] Hahn M, Kobayashi K, Umarov S. SDEs driven by a time-changed Lévy process and their associated time-fractional order pseudo-differential equations[J]. Journal of Theoretical Probability, 2012, 25(1):262-279.

[17] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stochastic Processes and their lications, 2009, 119(10):3238-3252.

[18] Nane E, Ni Y. Stochastic solution of fractional Fokker-Planck equations with space-time-dependent coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 442(1): 103-116.

[19] Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1-4):3-22.

[20] Du Q, Gunzburger M, Lehoucq R, Zhou K. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints[J]. SIAM Review, 2012, 54(4):667-696.

[21] Li C, Zeng F. Numerical Methods for Fractional Calculus[M]. Chapman and Hall: Numerical Methods for Fractional Calculus, 2015.

[22] Wang D, Zou J. Mittag − Leffler stability of numerical solutions to time fractional ODEs[J]. Numerical Algorithms, 2023, 92(4):212-2159.

[23] Jum E, Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed Brownian motion[J]. Probability and Mathematical Statistics, 2016, 36(2):201-220.

[24] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time-changed Brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 476(2):619-636.

[25] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators[J]. BIT Numerical Mathematics, 2021, 61(3):829-857.

[26] Wen X, Li Z, Xu L. Strong approximation of non-autonomous time-changed McKean − Vlasov stochastic differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2023, 119:107122.

[27] Hutzenthaler M, Jentzen A, Kloeden P E. Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2011, 467(2130):1563-1576.

[28] Deng C S, Liu W. Semi-implicit Euler−Maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. BIT Numerical Mathematics, 2020, 60(4):1133-1151.

[29] Liu W, Mao X, Tang J, Wu Y. Truncated Euler-Maruyama method for classical and time-changed non-autonomous stochastic differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 153:66-81.

[30] Li X, Liao J, Liu W, Xing Z. Convergence and stability of an explicit method for autonomous time-changed stochastic differential equations with super-linear coefficients[J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2023, 15(3):651-683.

[31] 刘暐, 毛学荣. 随机方程的截断方法综述[J]. 安徽工程大学学报, 2020, 35(1):1-11.

[32] 汤婧雯. 非自治随机微分方程的截断欧拉方法及其应用[D]. 上海师范大学, 2021.

[33] 吴硕. 随机微分方程的截断 θ 方法的收敛性分析[D]. 广西师范大学, 2017.

[34] Giles M. Improved Multilevel Monte Carlo Convergence Using the Milstein Scheme[M]//Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[35] Giles M B, Szpruch L. Multilevel monte carlo methods for applications in finance[J]. High-Performance Computing in Finance, 2018:197-247.

[36] Applebaum D. Lévy Processes and Stochastic Calculus[M]. Cambridge University Press, 2009.

[37] Sato K I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions[M]. Cambridge university press, 1999.

[38] Hu L, Li X, Mao X. Convergence rate and stability of the truncated Euler−Maruyama method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 337:274-289.

[39] Li X, Liu W, Tang T. Truncated Euler-Maruyama method for time-changed stochastic differential equations with super-linear state variables and Hölder's continuous time variables[J]. arXiv preprint arXiv:2110.02819, 2021.

[40] Wang X, Gan S. The tamed Milstein method for commutative stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2013, 19(3):466-490.

# 攻读硕士学位期间的研究成果

[1] Applied Mathematics Letters, 2023, 已正式刊出.