Functional Analysis

xiaowen

2024 年 11 月 27 日

目　　录

1 第一章

1.1 第一节

Theorem 1.1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon$$

成立，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并且导数为 *0*。

Theorem 1.2

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$。这就是罗尔 *(Rolle)* 定理。

Definition 1.1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

成立，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。这就是函数连续性的 $\varepsilon - \delta$ 定义。

Lemma 1.1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，且对任意 $x \in [a, b]$，都有 $|f(x)| \leq M$，$|g'(x)| \leq N$，其中 M, N 为正常数，则有*:*

$$\left|\int_a^b f(x)g'(x)dx\right| \leq MN(b - a)$$

这个不等式称为积分估值引理。

Proposition 1.1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且存在 $M > 0$，使得对任意 $x \in (a, b)$，都有 $|f'(x)| \leq M$，则对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$，有*:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

这就是利普希茨 *(Lipschitz)* 条件。

Corollary 1.1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且存在 $M > 0$，使得对任意 $x \in (a, b)$，都有 $|f'(x)| \leq M$，则对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$，有*:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

这就是利普希茨 *(Lipschitz)* 条件。

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的导数都存在。证明: 存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}$$

解：令 $g(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a) - f'(a)$

则 $g(a) = f'(a) - f'(a) = 0$ $g(b) = f'(b) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(b - a) - f'(a) = 0$

由罗尔定理可知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $g'(\xi) = 0$

即 $f''(\xi) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = 0$

所以 $f''(\xi) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}$

证毕。

! 这是一个标记框

提示

是一个提示框

2 这是第二章

定理 2.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1+0}{1-0}\\ &= 1\end{aligned}$$

3 这是第三章

定理 3.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1+0}{1-0}\\ &= 1\end{aligned}$$