毕业论文

左如春

2024 年 11 月 27 日

摘要

研究 Euler-Maruyama (EM) 数值逼近一类经过 Lamperti 变换后, 漂移系数线性增长、扩散系数是常数的时变随机微分方程. 证明了 EM 的强收敛性与逆从属的稳定指数之间的关系, 并讨论收敛速度. 并通过数值模拟验证了理论结果.

关键词: 时间变换; 等距离散; 收敛阶; 逆从属.

1 Introduction

受到 [?] 的启发, 本文的目的是推导出一个有效的数值逼近具有全局 Lipschitz 的漂移系数和扩散项系数的一维随机微分方程. 主要思想是使用 Lamperti 变换将原始的时变 SDE 转化成带有加性噪声的时变 SDE, 见 [?], 通过 EM 对变换后的时变 SDE 进行逼近, 再将其变换成原始时变 SDE 的逼近格式.

对于时间变换的随机微分方程, 现在已经有了很多的数值逼近格式. 在 [?] 中证明了对于漂移项和扩散项都满足全局 Lipschitz 时, 可以采用对偶原则, 将时间变换随机微分方程转换成一般随机微分方程, 通过对一般随机微分方程使用 EM 数值格式进行逼近, 进而得到时间变换随机微分方程的强收敛阶. 在 [?] 中将这一思想运用在漂移项满足非全局 Lipschitz 条件时, 使用半隐式 EM 得到强收敛阶, 并研究了其稳定性. 这解决了一大类可以对偶化的时间变换微分方程的数值格式收敛性问题. 在 [?], 对于不能使用对偶原则的时间变换随机微分方程, 采用一种非等距的离散格式, 并得到强收敛阶. 纵观以往的时间变换的随机微分方程的数值格式, 大多采用的是非等距离散. 而在这篇文章中, 我们将使用等距离散来研究随机微分方程:

$$dX(s) = f(X(s))dE(s) + \sigma dB(E(s)) \tag{1.1}$$

2 Preliminaries

在这篇文章中,$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 表示完备概率空间, $D = (D_t)_{t\geq 0}$ 表示具有 Laplace 指数 ψ, 从 0 开始的从属, 其中 ψ 的被杀率是 0 且具有 Lévy 测度 ν; 即 D 是具有开始于 0 的 càdlàg 路径的一维非减 Lévy 过程, 其 Laplace 变换是:

$$\mathbb{E}[e^{-sD_t}] = e^{-t\psi(s)}, \quad 其中 \quad \psi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sy})\, \nu(\mathrm{d}y), \quad s > 0,$$

并且 $\int_0^\infty (y \wedge 1)\nu(dy) < \infty$, 我们考虑 Lévy 测度 ν 是无穷的情况, 即 $\nu(0, \infty) = \infty$, 这意味着复合泊松从属不在我们的考虑范围中. 令 $E = (E_t)_{t\geq 0}$ 是 D 的逆, 即:

$$E_t := \inf\{u > 0; D_u > t\},\ t \geq 0.$$

我们称 E 是逆从属, 注意 E 是连续且非递减的. 一般我们假设 $B(t)$ 和 $D(t)$ 是相互独立的. 随机过程 $B(E(t))$ 被称作时间变换的布朗运动. 我们注意到 $D(t)$ 的跳跃部分和 $E(t)$ 的平坦部分相互对应的. 又由于 $E(t)$ 的平坦部分, 导致 $B(E(t))$ 在这一部分也是平坦的, 因此 $B(E(t))$ 可以被理解成是一种次扩散.

令 $S = (l, r)$, 其中 $-\infty \leq l < r \leq \infty$, 函数 a, b 是 $S \to S$ 的连续可微函数. 考虑下面的 SDE:

$$dy(t) = a(y(t))dE(t) + b(y(t))dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) \in S$$

并且假设它在 S 中有唯一强解, 即

$$\mathbb{P}(y(t) \in S,\ t \geq 0) = 1.$$

如果 $b(x) > 0$ 对所有的 $x \in S$ 都成立, 那么我们可以使用 Lamperti 变换

$$F(x) = \lambda \int^x \frac{1}{b(y)} dy$$

对于某些 $\lambda > 0$. 并且 $F^{-1} : F(S) \to S$ 是被良好定义的, 令 $x(t) = F(y(t))$ 利用 [**?**] 中的时间变换 Itô 公式可以得到:

$$dx(t) = f(x(t))dE(t) + \lambda dB(E(t)) \quad t \geq 0, \quad x(0) \in F(S)$$

其中

$$f(x) = \lambda \left(\frac{a(F^{-1}(x))}{b(F^{-1}(x))} - \frac{1}{2} b'(F^{-1}(x)) \right), \quad x \in F(S),$$

$F(D) = (F(l), F(r))$. 这种变换可以将扩散项的非线性项转换到漂移项中

3 Some Assumptions and Lemmas

Assumption 3.1. 令 $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, 并且假设时间变换的 *SDE(??)* 在 $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ 有唯一强解，即*:*

$$\mathbb{P}(x(t) \in (\alpha, \beta), t \ge 0) = 1.$$

[?] 中的 Feller test 可以直接推广到时间变换 SDE 中, 因此 Assumption**??**等价于:

$$\lim_{x \to \alpha_+} v(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \beta_-} v(x) = \infty \tag{3.1}$$

其中

$$v(x) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\zeta_2} \frac{p'(\zeta_2)}{p'(\zeta_1)} d\zeta_1 d\zeta_2$$

尺度函数 $p(x)$ 是:

$$p(x) = \int_{x_0}^{x} \exp\left(-2 \int_{x_0}^{\xi} \frac{f(u)}{\sigma^2} du\right) d\xi, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

于是:

$$v(x) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\zeta_2} \exp\left(-2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{f(u)}{\sigma^2} du\right) d\zeta_1 d\zeta_2.$$

可以验证对于有限的 α 和 β,(**??**)等价于:

$$\lim_{x \to \alpha_+} \sup f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \beta_-} \inf f(x) = -\infty.$$

Assumption 3.2. 令 $c \in [-\infty, +\infty), I = (c, +\infty)$, $d \in I$ 是区间中任意的一点. 假设漂移项系数 f 满足下述单调性*:*

$$f : I \to \mathbb{R}, \ \ \exists \kappa \in \mathbb{R}, \forall x, x' \in I, x \le x', f(x') - f(x) \le \kappa(x' - x). \tag{3.2}$$

Assumption 3.3. 令 $T > 0$, 假设漂移项系数 f 是二阶连续可微的并且满足*:*

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E} \left| f'(x(t)) \right|^2 + \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E} \left| f(x(t))' f(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x(t)) \right| < \infty. \tag{3.3}$$

时间变换 SDE(**??**) 的强解存在唯一性可以由 [?] 中的定理 4.1 直接得到

Assumption 3.4. 一些正解的假设

从 [?] 可以得到下面的时间变换的 *Ito* 公式

Lemma 3.5. *令 Z 是一维标准的布朗运动. 令 D 和 E be a 满足 $[[D \longmapsto E]]$ or $[[U \longleftrightarrow E]]$. X 是由下述 SDE 定义的随机过程*

$$X_t := \int_0^t A_s ds + \int_0^t F_s dE_s + \int_0^t G_s dZ_{E_s}$$

其中 $A \in L(t, \mathcal{F}_{E_t})$, $F \in L(E_t, \mathcal{F}_{E_t})$, 以及 $G \in L(Z_{E_t}, \mathcal{F}_{E_t})$. 如果 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 那么 $f(X)$ 是 (F_{E_t})− 半鞅, 对于所有的 $t \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(0) &= \int_0^t f'(X_s) A_s ds + \int_0^{E_t} f'\left(X_{D(s-)}\right) F_{D(s-)} ds \\ &+ \int_0^{E_t} f'\left(X_{D(s-)}\right) G_{D(s-)} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^{E_t} f''\left(X_{D(s-)}\right)\left\{G_{D(s-)}\right\}^2 ds. \end{aligned}$$

Lemma 3.6. *令 $\Delta t > 0, g_n, \lambda_n \in \mathbb{R}, \eta > 0$, 再假设 $1 - \eta\Delta t > 0$，$1 + \lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}$, 那么如果*

$$a_{n+1} \leq a_n(1 + \lambda_n) + \eta a_{n+1}\Delta t + g_{n+1}$$

则下面的不等式成立:

$$a_n \leq \frac{1}{(1 - \eta\Delta t)^n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \eta\Delta t)^j g_{j+1} \prod_{l=j+1}^{n-1} (1 + \lambda_l) \tag{3.4}$$

下面的引理对于证明定理起着关键性的作用.

Lemma 3.7. *对于任意给定的 $0 = t_0 < ih < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < (i+1)h$，都有:*

$$\mathbb{E}\left[\int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \ldots \int_{ih}^{t_2} 1 dE_{t_1} \ldots dE_{t_{n-1}} dE_{t_n}\right] \leq C h^{1+(n-1)\beta} \tag{3.5}$$

, 其中 C 是与 h 无关的常数.

proof: 在 [?] 和 [?] 中可以直接得到, 如果 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$，那么:

$$\mathbb{E}[\mathrm{d}E_\alpha(t_n) \ldots \mathrm{d}E_\alpha(t_1)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i-1}) \mathrm{d}t_i.$$

其中 $u(t) = \mathbb{E}[E_\alpha(t)] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$，因此:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}\left[\int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \ldots \int_{ih}^{t_2} 1 dE_{t_1} \ldots dE_{t_{n-2}} dE_{t_{n-1}} dE_{t_n}\right] \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \ldots \int_{ih}^{t_2} 1 \mathbb{E}\left[dE_{t_1} \ldots dE_{t_{n-2}} dE_{t_{n-1}} dE_{t_n}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^n}{\Gamma^n(\alpha+1)} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \cdots \int_{ih}^{t_2} \prod_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_1 \ldots dt_{n-1} dt_n$$

下面单独考虑积分项:

$$I_1 = \int_{ih}^{t_2} (t_2 - t_1)^{\alpha-1} t_1^{\alpha-1} dt_1$$

做如下变换, 令 $t_1 = ih + s_1 h$, 同时 $t_2 = ih + s_2 h$,, 其中 h 是步长, 因此 $s_1, s_2 \in [0,1]$, 注意由于我们不考虑时间在原点处，因此这里的 $i = \frac{T}{h}$，这里的 T 是一个时间范围，于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} h^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} h ds_1 \\ &= h^{\alpha} \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} ds_1 \end{aligned}$$

由于 $(ih + s_1 h)^{\alpha-1}$ 关于 s_1 在 $[0,1]$ 是单调递减的，并且积分 I_n 中，被积函数和积分区域都是正的，因此

$$\begin{aligned} I_1 &\leq h^{\alpha} \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih)^{\alpha-1} ds_1 \\ &= T^{\alpha-1} h^{\alpha} \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1 \end{aligned}$$

令 $w_1 = s_2 - s_1$，于是

$$I_1 \leq T^{\alpha-1} h^{\alpha} \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1 = T^{\alpha-1} h^{\alpha} \int_0^{s_{n2}} w_1^{\alpha-1} dw_1 = \frac{T^{\alpha-1} s_2^{\alpha}}{\alpha} h^{\alpha}$$

因此:

$$I \leq C h^{\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \cdots \int_{ih}^{t_3} \prod_{i=3}^{n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_2 \ldots dt_{n-1} dt_n$$

同理，分析如下积分:

$$I_2 = \int_{ih}^{t_3} (t_3 - t_2)^{\alpha-1} dt_2 \leq C h^{\alpha}$$

因此:

$$I \leq C h^{2\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \cdots \int_{ih}^{t_4} \prod_{i=4}^{n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_3 \ldots dt_{n-1} dt_n$$

如此进行迭代，我们得到:

$$I \leq C h^{(n-1)\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} 1 dt_1 \leq C h^{1+(n-1)\alpha}$$

因此，得到收敛阶为 $1 + (n-1)\alpha$ □

4 Main results

对于随机微分方程(**??**)，它的 BEM 数值格式是:

$$X^{\delta}_{t_{i+1}} = X^{\delta}_{t_i} + f(x^{\delta}_{t_{i+1}})\Delta E_i + \sigma \Delta B_{E_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \qquad X^{\delta}_0 = X(0) \tag{4.1}$$

其中 $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$ 以及 $\Delta B_{E_i} = B_{E(t_{i+1})} - B_{E(t_i)}$.

Theorem 4.1. *对于任意的 $\epsilon > 0$, 令 $\epsilon < T1 < T2$, 在假设**??**,**??**和**??**的条件下，存在常数 C, 使得下面的不等式成立:*

$$\mathbb{E}[|X(t_i) - X^{\delta}_{t_i}|] \leq C\Delta t^{\alpha}, \quad i = \lceil T1/\Delta t \rceil, \lceil T1/\Delta t \rceil + 1 \dots \lceil T2/\Delta t \rceil$$

proof: 考虑 SDE(**??**) 在 $[t_i, t_{i+1})$ 的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s))dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)) \tag{4.2}$$

等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s)) = \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} f(X(D(s-)))ds + \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} \sigma dB(s) \tag{4.3}$$

针对于漂移项 $f(X(D-(s-)))$, 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-)))) - f(X(D(t-)))dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t_-)}^{D(t_{i+1}-)} df(X(s))dt \tag{4.4}$$

对于 $df(X(s))$，由 Lemma**??**的时间变换 ito 公式:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(0) = \int_0^{E_t} f(X(D(s-)))f'\left(X_{D(s-)}\right) + \frac{\sigma^2}{2} f''\left(X_{D(s-)}\right)ds \\ + \int_0^{E_t} \sigma f'\left(X_{D(s-)}\right)dB_s \end{aligned}$$

于是(**??**)变成

$$\begin{aligned} &\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-))) - f(X(D(t-)))dt \\ &= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(D(s)))f'(X(D(s))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds\, dt \\ &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s)))\, dB(s)\, dt. \end{aligned} \tag{4.5}$$

由(??)与(??)，以及 [? , Theorem 3.1] 可以得到

$$\begin{aligned}
X(t_{i+1}) &= X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1})))\,dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\,dB(E(t)) \\
&\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(D(s)))f'(X(D(s))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds\,dt \\
&\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s))))\,dB(s)\,dt \\
&= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i))\,dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\,dB(E(t)) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \left(f(X(D(s)))f'(X(D(s))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds\,dE(t) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \sigma f'(X(D(s)))\,dB(s)\,dE(t) \\
&= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i))\,dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\,dB(E(t)) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\,dE(t) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t)
\end{aligned}$$

因此

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_{i+1}))\,dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\,dB(E(t)) + R_i \tag{4.6}$$

令 $R_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\,dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t$
将 R_i 分解成 $R_s = R_s^{(1)} + R_s^{(2)}$, 其中:

$$\begin{aligned}
R_s^{(1)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t}^{t_{i+1}} \left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s)\,dE(t). \\
R_s^{(2)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t}^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s))\,dB(E(s))\,dE(t)
\end{aligned}$$

和离散格式相减，即 (??)-(??)得到:

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}}^{\delta} = X(t_i) - X_{t_i}^{\delta} + (f(x(t_{i+1})) - f(x_{t_{i+1}}^{\delta}))\Delta E_i + R_i \tag{4.7}$$

令 $e_i = X(t_i) - X_{t_i}^{\delta}$ 由假设??得到:

$$(1 - K_1 \Delta E_s) e_{s+1} \le e_s + R_s, \quad 其中 s = \lceil T1/\Delta t \rceil, \lceil T1/\Delta t \rceil + 1 \ldots \lceil T2/\Delta t \rceil \tag{4.8}$$

定义 $\gamma_l = 1 - K_1\Delta E_l$,$N_1 = \lceil T1/\Delta t\rceil$ 以及 $N_2 = \lceil T2/\Delta t\rceil$, 由于始终存在常数 C, 使得 $\Delta E_l < C\Delta t$, 从而可以得到

$$\prod_{l=N_1}^{N_2} \gamma_l^{-1} < \frac{1}{(1-C\Delta t)^{N_2-N_1}} < \infty.$$

由 Lemma**??**, 我们可以得到

$$e_{N_2} \leq \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j \prod_{l=j}^{N_2} \gamma_l^{-1} \leq C \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j$$

于是

$$\mathbb{E}|e_{N_2}| \leq C\mathbb{E}|\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(1)}| + C\mathbb{E}|\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)}|$$

.

下面先考虑第一项, 由 Lemma**??**和 Assumption**??**, 可以得到

$$\mathbb{E}|R_j^{(1)}| \leq C\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} 1 dEsdEt\right] \leq C\Delta t^{1+\alpha} \tag{4.9}$$

于是

$$\mathbb{E}|\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(1)} \prod_{l=j}^{N_2} \gamma_l| \leq C\sum_{N_1}^{N_2} \mathbb{E}|R_j^{(1)}| \leq C\sum_{j=N_1}^{N_2} \Delta t^{1+\alpha} \leq C\Delta t^{\alpha} \tag{4.10}$$

下面考虑第二项, 因为 $\mathbb{E}\left[R_k^{(2)}|\mathcal{F}_{k\Delta t}\right] = \mathbb{E}_D\mathbb{E}_B\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t)\right] = \mathbb{E}_D\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}_B \int_{t_i}^{t} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t)\right] = 0$, 因此

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)}$$

是鞅

下面考虑第二项 $\mathbb{E}|\sum_{j=N_1}^{N_2} R_{j+1}^{(2)}|$, 在此之前通过 BDG 不等式和 Lemma**??**可以得到下面的不等式:

$$\mathbb{E}[dB_E dE]^2 = \mathbb{E}[(dB_E)^2(dE)^2] = \mathbb{E}_D[(dE)^2\mathbb{E}_B(dB_E)^2] \leq C\mathbb{E}_D[dE]^3 \leq C\Delta t^{1+2\alpha} \tag{4.11}$$

接下来使用 BDG 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式，可以得到:

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)}\right| \leq C\mathbb{E}\left|\sum_{j=N_1}^{N_2} (R_j^{(2)})^2\right|^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{\sum_{j=N_1}^{N_2} \mathbb{E}(R_j^{(2)})^2} \leq C\sqrt{\sum_{j=N_1}^{N_2} \Delta t^{1+2\alpha}} \leq C\Delta t^{\alpha}$$

综上所述,

$$\mathbb{E}[e_n] \le C\Delta t^{\alpha}$$

□

tips:We have also proved that $\mathbb{E}[\Delta E \Delta B_E] \le C\Delta t^{1+\frac{\alpha}{2}}$,however it seems that it's nothing help here.

5 Numerical examples

通过下述方法得到 $D_\alpha(t)$ 的数值模拟格式:

$$\begin{aligned} &D_\alpha(0) = 0, \\ &D_\alpha(\delta n) = D_\alpha(\delta(n-1)) + \delta^{1/\alpha}\xi_n \end{aligned}$$

其中 $n = 1, 2, 3 \ldots$ 并且 ξ_n 是独立同分布的完全偏斜的 α 稳定随机变量，ξ_n 的实现过程如下:

$$\xi_n = \frac{\sin(\alpha(V + c_1))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \Big(\frac{\cos(V - \alpha(V + c_1))}{W}\Big)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

其中 $c_1 = \frac{\pi}{2}$, 随机变量 V 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布，W 是均值为 1 的指数分布.

5.1 Examples

在这一节中, 我们将主要结论应用到实际例子中.

5.1.1 CIR Process With Time-Changed Brownian Motion

回忆时间变换的 CIR 过程

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma\sqrt{y(t)}dB(E(t)), \quad t \ge 0, \quad y(0) > 0.$$

如果 $2\kappa\theta \ge \sigma^2$, 那么 $D = (0, \infty)$ 并且 Assumption**??** 在 $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ 是成立的. 另外, 使用 $F(y) = \sqrt{y}$ 对时间变换的 CIR 过程进行 Lamperti 变换可以得到

$$dx(t) = f(x(t))dE(t) + \frac{1}{2}\sigma dB(E(t)), \quad t \ge 0, \quad x(0) = \sqrt{y(0)} \tag{5.1}$$

其中

$$f(x) = \frac{1}{2}\kappa\left(\theta_v x^{-1} - x\right), \quad x > 0 \tag{5.2}$$

where $\theta_v = \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa}$ 并且 BEM 数值格式如下

$$X^\delta_{t_{i+1}} = X^\delta_{t_i} + f(X^\delta_{t_{i+1}})\Delta E_i + \frac{1}{2}\sigma\Delta B(E_i), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5.3}$$

观察到

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\kappa(\theta_v x^{-2} + 1) \tag{5.4}$$

以及

$$(f'f)(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x) = -\frac{\kappa^2}{4}(\theta_v^2 x^{-3} - x) + \frac{1}{2}\kappa\theta_v x^{-3}\sigma^2. \tag{5.5}$$

因此为了满足 Assumption**??**, 只需要满足

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[x(t)^{-3}] = \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[y(t)^{-\frac{3}{2}}] < \infty. \tag{5.6}$$

由于标准 CIR 过程 Y(t) 的矩有界

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[Y(t)^q] < \infty \quad \text{for} \quad q > -\frac{2k\theta}{\sigma^2} \tag{5.7}$$

容易验证, 对于时间变换的 CIR 过程 y(t) 的矩有界, 即

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[y(t)^q] < \infty \quad \text{for} \quad q > -\frac{2k\theta}{\sigma^2}, \tag{5.8}$$

因此如果 $1 < \frac{4}{3}\frac{k\theta}{\sigma^2}$,Assumption**??**是成立的. 至于 Assumption**??**, 在 $(0,\infty)$ 中很容易可以验证存在这样的 κ 使之成立. 因此由 Theorem**??**可以得到, 对于时间变换的 CIR 过程, 使用 BEM 数值格式的强收敛阶是 α

5.1.2 数值实验

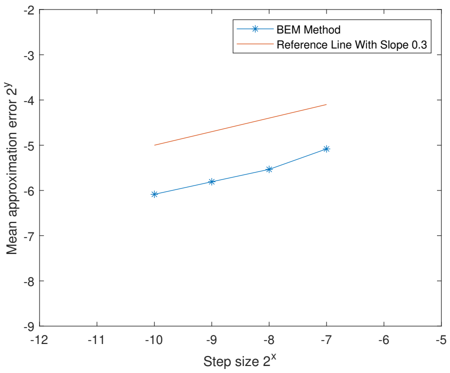
在我们的数值实验中，我们关注端点 $T = 1$ 处的 L_1 误差，因此我们令

$$e^i_T = \mathbb{E}\left|X^{\delta_{15}}_T - X^{\delta_i}_T\right|$$

其中 $X^{\delta_i}_T$ 是步长为 δ_i 时 T 处的模拟值，$\delta_i = 2^{-i}$, 对于我们的数值实验，取 $\theta = 0.125, \kappa = 2$ 以及 $\sigma = 0.5$, 采用蒙德卡洛方法，

$$e^i_T \approx \frac{1}{10^3}\sum_{j=1}^{10^3}\left|X^{\delta_{15}}_T - X^{\delta_i}_T\right|.$$

选择步长为 2^{-15} 作为参考，通过 $2^{-11}, 2^{-10}, 2^{-9}, 2^{-8}$ 的步长来估计 L_1 误差.



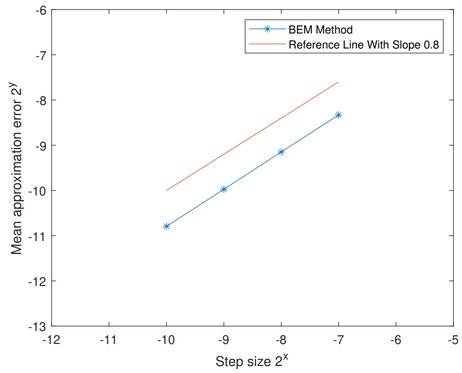


图 5.1: BEM 方法的 L_1 误差，左图是 $\alpha = 0.3$，右图是 $\alpha = 0.8$

6 Present Job

我们想证明的是对于一个漂移项和扩散项都是非线性的时间变换 SDE, 将它进行 Lamperti 变换, 变成漂移项是非线性, 扩散项是常数的时间变换 SDE, 然后使用数值方法进行离散, 得到与模拟代码一致的强收敛阶 α. 截止当前的证明, 我们已经证明了显式 EM 在 L^1 误差下的强收敛阶是 α, 在证明 L^p 时, 若使用之前的方法, 得到的强收敛阶不仅与模拟的结果不一致, 并且与 p 有关, 强收敛阶与模拟代码不一致. 证明的显示 EM 的强收敛阶, 看起来对我们的预期没有什么意义, 至少暂时我还没有找到对于原始非线性的漂移项扩散项经过 Lamperti 变换之后, 得到的时变 SDE 漂移项满足全局 Lipschitz, 进而能够使用显示 EM 得到强收敛阶. 下面对于变换后非线性的 SDE, 采用截断 EM 或者 BEM, 都会出现一个难以处理的东西, 我们必须计算 L^2 误差, 也就是 e^2, 这将导致不得不使用 Gronwall 不等式来处理这个式子, 此时也会出现完全与 p 相关的收敛阶, 那么我们可能需要换一个方法了.

A 附录 A