TCTEM

左如春

2024 年 7 月 9 日

1 TCTEM

回忆 [1],[2] 中的截断 EM 数值格式. 首先我们选择一个严格递增的连续函数 $\mu:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 使得 $\mu(u)\to\infty$ as $u\to\infty$ 并且

$$\sup_{|x|\le u}\big(|f(x)|\vee|g(x)|\big)\le\mu(u),\quad\forall u\ge 1.$$

定义 μ^{-1} 是 μ 的逆函数,可以看到 μ^-1 是一个严格递增并且在 $[\mu(1),\infty)\to\mathbb{R}_+$ 连续的函数，再选择一个常数 $\hat{h}\ge 1\vee\mu(1)$ 和一个严格递减的函数 $h:(0,1]\to[\mu(1),\infty)$ 使得

$$\lim_{\Delta\to 0}h(\Delta)=\infty\qquad\Delta^{1/4}h(\Delta)\le\hat{h},\quad\forall\Delta\in(0,1].$$

在这里我们选择 $\mu(u)=H_3u^{1+0.5\rho}$, 其中 H_3 是一个正的常数，另外我们可以令 $h(\Delta)=\hat{h}\Delta^{-\varepsilon}$ 其中 $\varepsilon\in(0,1/4]$. 对于给定的步长 $\Delta\in(0,1]$, 我们定义截断映射 $\pi_\Delta:\mathbb{R}^d\to\{x\in\mathbb{R}^d:|x|\le\mu^{-1}(h(\Delta))\}$

$$\pi_\Delta(x)=\big(|x|\wedge\mu^{-1}(h(\Delta))\big)\frac{x}{|x|},$$

当 $x=0$ 时候，令 $x/|x|=0$. 也就是说, 当 $|x|\le\mu^-1(h(\Delta))$，π_Δ 将 x 映射到 x，当 $|x|>\mu^-1(h(\Delta))$，将映射到 $\mu^-1(h(\Delta))x/|x|$ 定义截断函数

$$f_\Delta(x)=f(\pi_\Delta(x))\quad\text{and}\quad g_\Delta(x)=g(\pi_\Delta(x))$$

对于任意的 $x\in\mathbb{R}$. 可以看到

$$|f_\Delta(x)|\vee|g_\Delta(x)|\le\mu(\mu^{-1}(h(\Delta)))=h(\Delta),\quad\forall x\in\mathbb{R}^d.$$

给定初值 $X_\Delta(0)=x_0$，下述离散格式的截断 EM 数值解 $X_\Delta(t_k)\approx x(t_k)$，

$$X_\Delta(t_{k+1})=X_\Delta(t_k)+f_\Delta(X_\Delta(t_k))\Delta+g_\Delta(X_\Delta(t_k))\Delta B_k,$$

其中 $t_k=k\Delta$ 和 $\Delta B_k=B(t_{k+1})-B(t_k)$，$k=0,1,...$

参考文献

[1] Mao X. The truncated euler–maruyama method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 290: 370-384.

[2] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. Journal of Theoretical Probability, 2011, 24: 789-820.