# 毕业论文

左如春

2024 年 9 月 10 日

**摘要**

研究 Euler-Maruyama (EM) 数值逼近一类经过 Lamperti 变换后, 漂移系数线性增长、扩散系数是常数的时变随机微分方程. 证明了 EM 的强收敛性与逆从属的稳定指数之间的关系, 并讨论收敛速度. 并通过数值模拟验证了理论结果.

**关键词：**时间变换; 等距离散; 收敛阶; 逆从属.

## 1 Introduction

受到 [1] 的启发, 本文的目的是推导出一个有效的数值逼近具有全局 Lipschitz 的漂移系数和扩散项系数的一维随机微分方程. 主要思想是使用 Lamperti 变换将原始的时变 SDE 转化成带有加性噪声的时变 SDE, 见 [2], 通过 EM 对变换后的时变 SDE 进行逼近, 再将其变换成原始时变 SDE 的逼近格式.

对于时间变换的随机微分方程, 现在已经有了很多的数值逼近格式. 在 [3] 中证明了对于漂移项和扩散项都满足全局 Lipschitz 时, 可以采用对偶原则, 将时间变换随机微分方程转换成一般随机微分方程, 通过对一般随机微分方程使用 EM 数值格式进行逼近, 进而得到时间变换随机微分方程的强收敛阶. 在 [4] 中将这一思想运用在漂移项满足非全局 Lipschitz 条件时, 使用半隐式 EM 得到强收敛阶, 并研究了其稳定性. 这解决了一大类可以对偶化的时间变换微分方程的数值格式收敛性问题. 在 [5], 对于不能使用对偶原则的时间变换随机微分方程, 采用一种非等距的离散格式, 并得到强收敛阶. 纵观以往的时间变换的随机微分方程的数值格式, 大多采用的是非等距离散. 而在这篇文章中, 我们将使用等距离散来研究具有全局 Lipschitz 系数的漂移项系数和常数项扩散项系数的随机微分方程:

$$dX(s) = f(X(s))dE(s) + \sigma dB(E(s)) \tag{1.1}$$

# 2 Preliminaries

在这篇文章中,$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 表示完备概率空间, $D = (D(t))_{t\geq 0}$ 表示具有 Laplace 指数 $\psi$, 从 0 开始的从属, 其中 $\psi$ 的被杀率是 0 且具有 Lévy 测度 $\nu$; 即 $D$ 是具有开始于 0 的 càdlàg 路径的一维非减 Lévy 过程, 其 Laplace 变换是:

$$\mathbb{E}[e^{-sD(t)}] = e^{-t\psi(s)}, \quad \text{其中} \quad \psi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sy})\,\nu(\mathrm{d}y), \quad s > 0,$$

并且 $\int_0^\infty (y \wedge 1)\nu(dy) < \infty$, 我们考虑 Lévy 测度 $\nu$ 是无穷的情况, 即 $\nu(0,\infty) = \infty$, 这意味着复合泊松从属不在我们的考虑范围中. 令 $E = (E(t))_{t\geq 0}$ 是 $D$ 的逆, 即:

$$E(t) := \inf\{s > 0; D(s) > t\},\ t \geq 0.$$

我们称 $E$ 是逆从属过程, 注意 $E$ 是连续且非递减的. 如果从属 $D$ 是 Laplace 指数为 $\psi(s) = s^\beta$, $\beta \in (0,1)$ 的稳定过程, 那么对应的 $E$ 称为逆 $\beta$-稳定从属过程。一般我们假设 $B(t)$ 和 $D(t)$ 是相互独立的. 随机过程 $B(E(t))$ 被称作时间变换的布朗运动. 我们注意到 $D(t)$ 的跳跃部分和 $E(t)$ 的平坦部分相互对应的. 又由于 $E(t)$ 的平坦部分, 导致 $B(E(t))$ 在这一部分也是平坦的, 因此 $B(E(t))$ 可以被理解成是一种次扩散.

令 $S = (l, r)$, 其中 $-\infty \leq l < r \leq \infty$, 函数 $a, b$ 是 $S \to S$ 的连续可微函数. 考虑下面的 SDE:

$$dy(t) = a(y(t))dE(t) + b(y(t))dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) \in S$$

并且假设它在 S 中有唯一强解, 即

$$\mathbb{P}(y(t) \in S,\ t \geq 0) = 1.$$

如果 $b(x) > 0$ 对所有的 $x \in S$ 都成立, 那么我们可以使用 Lamperti 变换

$$F(x) = \lambda \int^x \frac{1}{b(y)} dy$$

对于某些 $\lambda > 0$. 并且 $F^{-1} : F(S) \to S$ 是被良好定义的, 令 $x(t) = F(y(t))$ 利用 [6] 中的时间变换 Itô 公式可以得到:

$$dx(t) = f(x(t))dE(t) + \lambda dB(E(t)) \quad t \geq 0, \quad x(0) \in F(S)$$

其中

$$f(x) = \lambda \left( \frac{a(F^{-1}(x))}{b(F^{-1}(x))} - \frac{1}{2} b'(F^{-1}(x)) \right), \quad x \in F(S),$$

$F(D) = (F(l), F(r))$. 这种变换可以将扩散项的非线性项转换到漂移项中.

# 3 Some Assumption and Lemmas

**Assumption 3.1.** 假设函数 $f$ 满足全局 Lipschitz 条件的, 即存在一个常数 $K>0$ 使得:

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y| \tag{3.1}$$

**Assumption 3.2.** 令 $T>0$, 假设函数 $f$ 是二阶连续可微的并且满足:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|f'(x(t))\right|^2 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|f'(x(t))f(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x(t))\right| < \infty. \tag{3.2}$$

**Lemma 3.3.** 令 $\Delta t>0, g_n, \lambda_n \in \mathbb{R}, \eta>0, a_0=0$, 再假设 $1-\eta\Delta t>0, 1+\lambda_n>0, n\in\mathbb{N}$, 那么如果

$$a_{n+1} \leq a_n(1+\lambda_n) + \eta a_{n+1}\Delta t + g_{n+1}$$

则下面的不等式成立:

$$a_n \leq \frac{1}{(1-\eta\Delta t)^n}\sum_{j=0}^{n-1}(1-\eta\Delta t)^j g_{j+1}\prod_{l=j+1}^{n-1}(1+\lambda_l) \tag{3.3}$$

从 [6] 可以得到下面的时间变换的 Itô 公式.

**Lemma 3.4.** 令 $B$ 是一维标准的布朗运动. 令 $D$ 和 $E$ 满足 $[D \longrightarrow E]$ 或者 $[U \longleftarrow E]$. $X$ 是由下述 SDE 定义的随机过程

$$X(t) := \int_0^t A(s)ds + \int_0^t F(s)dE(s) + \int_0^t G(s)dB_{E(s)}$$

其中 $A\in L(t,\mathcal{F}_{E(t)})$, $F\in L(E(t),\mathcal{F}_{E(t)})$, 以及 $G\in L(B_{E(t)},\mathcal{F}_{E(t)})$. 如果 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 那么 $f(X(t))$ 是 $\mathcal{F}_{E(t)}-$ 半鞅, 对于所有的 $t\geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} f(X(t))-f(0) &= \int_0^t f'(X(s))A(s)ds + \int_0^{E(t)} f'\left(X(D(s-))\right)F(D(s-))ds \\ &+ \int_0^{E(t)} f'\big(X(D(s-))\big)G(D(s-))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^{E(t)} f''\big(X(D(s-))\big)G^2(D(s-))ds \end{aligned}$$

**Lemma 3.5.** 对于任意给定的 $0=t_0<ih<t_1<t_2<\ldots<t_n<(i+1)h=T$, 都有:

$$\mathbb{E}\left[\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\ldots\int_{ih}^{t_2} 1\mathrm{d}E(t_1)\ldots dE(t_{n-1})dE(t_n)\right] \leq Ch^{1+(n-1)\beta} \tag{3.4}$$

, 其中 $C$ 是与 $h$ 无关的常数.

**proof：** 在 [7] 和 [8] 中可以直接得到, 如果 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, 那么:

$$\mathbb{E}[\mathrm{d}E(t_n)\ldots\mathrm{d}E(t_1)] = \prod_{i=1}^{n} u'(t_i - t_{i-1})\mathrm{d}t_i.$$

其中 $u(t) = \mathbb{E}[E(t)] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, 因此:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}\left[\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\ldots\int_{ih}^{t_2} 1dE(t_1)\ldots dE(t_{n-2})dE(t_{n-1})dE(t_n)\right] \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\ldots\int_{ih}^{t_2} 1\mathbb{E}\left[dE(t_1)\ldots dE(t_{n-2})dE(t_{n-1})dE(t_n)\right] \\ &= \frac{\alpha^n}{\Gamma^n(\alpha+1)}\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\ldots\int_{ih}^{t_2}\prod_{i=1}^{i=n}(t_i - t_{i-1})^{\alpha-1}dt_1\ldots dt_{n-1}dt_n \end{aligned}$$

下面单独考虑积分项：

$$I_1 = \int_{ih}^{t_2}(t_2 - t_1)^{\alpha-1}t_1^{\alpha-1}dt_1$$

做如下变换, 令 $t_1 = ih + s_1h$, 同时 $t_2 = ih + s_2h$, 其中 $h$ 是步长, 因此 $s_1, s_2 \in [0,1]$, 注意这里的 $i+1 = \frac{T}{h}$, 这样做的目的是不考虑时间在原点处, 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}h^{\alpha-1}(ih + s_1h)^{\alpha-1}hds_1 \\ &= h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}(ih + s_1h)^{\alpha-1}ds_1 \end{aligned}$$

由于 $(ih + s_1h)^{\alpha-1}$ 关于 $s_1$ 在 $[0,1]$ 是单调递减的, 并且积分 $I_1$ 中, 被积函数和积分区域都是正的, 因此

$$\begin{aligned} I_1 &\le h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}(ih)^{\alpha-1}ds_1 \\ &\le T^{\alpha-1}h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}ds_1 \end{aligned}$$

令 $w_1 = s_2 - s_1$, 于是

$$I_1 \le T^{\alpha-1}h^\alpha\int_0^{s_2}(s_2 - s_1)^{\alpha-1}ds_1 = T^{\alpha-1}h^\alpha\int_0^{s_2}w_1^{\alpha-1}dw_1 = \frac{T^{\alpha-1}s_2^\alpha}{\alpha}h^\alpha$$

因此:

$$I \le Ch^\alpha\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{ih}^{t_n}\int_{ih}^{t_{n-1}}\ldots\int_{ih}^{t_3}\prod_{i=3}^{n}(t_i - t_{i-1})^{\alpha-1}dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n$$

同理, 分析如下积分:

$$I_2 = \int_{ih}^{t_3} (t_3 - t_2)^{\alpha-1} dt_2 \le Ch^\alpha$$

因此:

$$I \le Ch^{2\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_4} \prod_{i=4}^{n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_3 \dots dt_{n-1} dt_n$$

如此进行迭代, 我们得到:

$$I \le Ch^{(n-1)\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} 1 dt_1 \le Ch^{1+(n-1)\alpha}$$

□

对于时间变换 SDE(1.1), 在漂移项满足全局 Lipschitz 的条件下, 可以得到该方程的强解存在且唯一, 见 [9] 中的定理 4.1. 此时该时变随机微分方程的 EM 数值格式可以写成:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(x_{t_i})\Delta E_i + \sigma \Delta B_{E_i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad X_0 = X(0) \tag{3.5}$$

其中 $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$ 以及 $\Delta B_{E_i} = B_{E(t_{i+1})} - B_{E(t_i)}$.

# 4 Isometric E-M with additive noise

**Theorem 4.1.** 对于任意的 $\epsilon > 0$, 令 $\epsilon < T1 < T2$, 在 Assumption 3.1和 Assumption 3.2的条件下, 存在常数 $C$, 使得下面的不等式成立:

$$\mathbb{E}[|X(t_i) - X_{t_i}|] \le C\Delta t^\alpha, \quad i = \lceil T1/\Delta t \rceil, \lceil T1/\Delta t \rceil + 1 \dots \lceil T2/\Delta t \rceil$$

**proof:** 考虑 SDE (1.1)在 $[t_i, t_{i+1})$ 的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s))dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)) \tag{4.1}$$

由时间变换的变量变换公式 (见 [9]), 上式等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s)) = \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} f(X(D(s-)))ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)) \tag{4.2}$$

针对于漂移项 $f(X(D(s-)))$, 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-)))) - f(X(D(t_i-)))dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t_i-)}^{D(t-)} df(X(s))dt \tag{4.3}$$

由 Lemma 3.4的时间变换 Itô 公式, 于是(4.3)变成

$$
\begin{aligned}
&\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-))) - f(X(D(t_i-)))dt \\
=&\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(D(s-)))f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s-)))\right) ds\, dt \\
&+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t} \sigma f'(X(D(s-)))\, dB(s)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

由(4.2)与(4.4), 以及时间变换的变量变换公式可以得到

$$
\begin{aligned}
X(t_{i+1}) &= X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_i-)))\, dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\, dB(E(t)) \\
&\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(D(s-)))f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s-)))\right) ds\, dt \\
&\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})}\int_{t_i}^{t} \sigma f'(X(D(s-))))\, dB(s)\, dt \\
&= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i))\, dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\, dB(E(t)) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{E(t_i)}^{E(t)}\left(f(X(D(s-)))f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(D(s-)))\right) ds\, dE(t) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{E(t_i)}^{E(t)} \sigma f'(X(D(s-)))\, dB(s)\, dE(t) \\
&= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i))\, dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\, dB(E(t)) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s))\right) dE(s)\, dE(t) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t)
\end{aligned}
$$

因此

$$
X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i))\, dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma\, dB(E(t)) + R_i \tag{4.5}
$$

将 $R_i$, 分解成 $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$, 其中:

$$
R_i^{(1)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t}\left(f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s))\right) dE(s)\, dE(t).
$$

$$R_i^{(2)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} \sigma f'(X(s))\, dB(E(s))\, dE(t)$$

使用 (4.5) 和(3.5)可以得到：

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}} = X(t_i) - X_{t_i} + (f(x(t_i)) - f(x_{t_i}^{\delta}))\Delta E_i + R_i \tag{4.6}$$

令 $e_i = X(t_i) - X_{t_i}$, 由 Assumption 3.1得到：

$$|e_{s+1}| \leq (1 + K\Delta E_s)|e_s| + R_s \quad \text{其中} s = 0, 1, 2, \cdots \lceil T/\Delta t\rceil \tag{4.7}$$

将 s 以此迭代, 可以得到 $|e_n| \leq \sum\limits_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}| \prod_{l=j+1}^{n-1}(1 + K\Delta E_l)$ , 其中 $n = \lceil T/\Delta t\rceil$
由 Assumption 3.2和 Lemma 3.5,

$$\mathbb{E}|R_j^{(1)}|^2 = \mathbb{E}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} 1dE(s)dE(t)\right|^2 \leq C\Delta t^{1+3\alpha} \tag{4.8}$$

$$\mathbb{E}|R_j^{(2)}|^2 \leq \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} 1dB_{E(s)}dE(t)\right]^2 \leq C\Delta t^{1+2\alpha} \tag{4.9}$$

于是, 有 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|e_n| &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}| \prod_{l=j+1}^{n-1} (1 + K\Delta E_l)\right] \\
&\leq \left[\mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^2 \mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{l=j+1}^{n-1} (1 + K\Delta E_l)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left[\mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\Delta t^{\alpha}
\end{aligned}$$

□

# 5 Numerical examples

通过下述方法得到 $D(t)$ 的数值模拟格式：

$$D(0) = 0,$$

$$D(nh) = D((n-1)h) + h^{1/\alpha}\xi_n$$

其中 $n = 1, 2, 3\ldots$ 并且 $\xi_n$ 是独立同分布的完全偏斜的 $\alpha$ 稳定随机变量,$\xi_n$ 的模拟过程如下:

$$\xi_n = \frac{\sin(\alpha(V + c_1))}{(\cos(V))^{1/\alpha}}\Big(\frac{\cos(V - \alpha(V + c_1))}{W}\Big)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

其中 $c_1 = \frac{\pi}{2}$, 随机变量 $V$ 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布,$W$ 是均值为 1 的指数分布.

## 5.1 linear drift and additional noise

先考虑下面这个方程:

$$dX(t) = \mu X(t)dE_t + \sigma dB_{E_t}$$

对应的 EM 数值格式是:

$$X_{i+1} = (1 + \mu\Delta E_i)X_i + \sigma\Delta B_{E_i}$$

在我们的数值实验中, 我们关注端点 $T = 1$ 处的 $L_1$ 误差, 因此我们令

$$e_T^i = \mathbb{E}\left|X_T^{\delta_4} - X_T^{\delta_i}\right|$$

其中 $X_T^{\delta_i}$ 是步长为 $\delta_i$ 时 T 处的模拟值,$\delta_i = 10^{-i}$, 对于我们的数值实验, 我们设 $\mu = 1, \sigma = 1$, 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3}\sum_{j=1}^{10^3}\left|X_T^{\delta_4} - X_T^{\delta_i}\right|.$$

选择步长为 $10^{-4}$ 作为参考, 通过 $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ 的步长来估计 $L_1$ 误差. 下表为取不同 $\alpha$ 时, 收敛阶和误差之间的对比

| $\alpha$ | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 | 0.9000 | 1.0000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rate | – | – | – | – | 0.5932 | 0.7074 | 0.7890 | 0.9085 | 0.9908 |
| error | Item | Item | Item | Item | Item | Item | Item | Item | Item |

表 5.1: 不同 $\alpha$ 对应的收敛率和误差

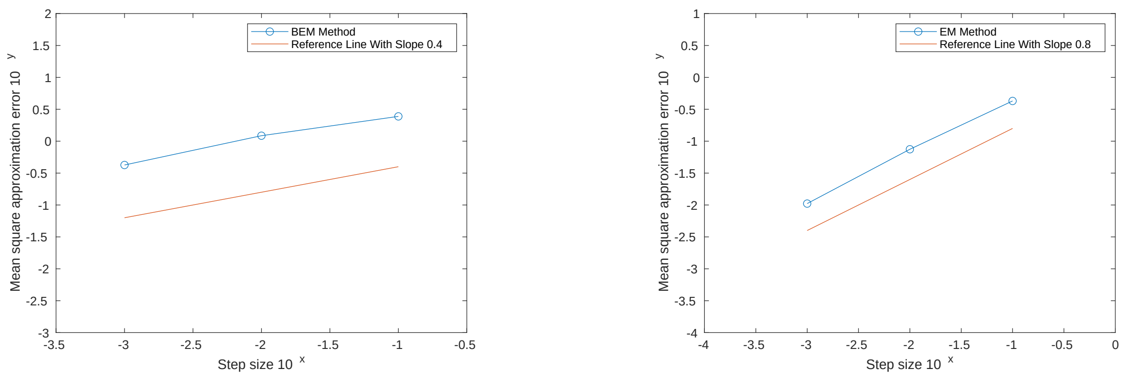


图 5.1: EM 方法的 $L1$ 误差

# 参考文献


[1] Alfonsi A. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process[J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(2): 602 –607.

[2] Iacus S M, et al. Simulation and inference for stochastic differential equations: with r examples: volume 486[M]. Springer, 2008.

[3] Jum E, Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion[A]. 2014.

[4] Deng C S, Liu W. Semi-implicit euler–maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. BIT Numerical Mathematics, 2020, 60: 1133-1151.

[5] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 476(2): 619-636.

[6] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion[J]. Ito calculus, and Fokker-Planck equation-fractional generalisations, 2018.

[7] Daley D J, Vere-Jones D, et al. An introduction to the theory of point processes: volume i: elementary theory and methods[M]. Springer, 2003.

[8] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2009, 119(10): 3238-3252.

[9] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. Journal of Theoretical Probability, 2011, 24: 789-820.