一类高非线性非自治时间变换随机微分方程的 Milstein 型方法

报告人：吴若雪

专业：计算数学

指导教师：刘暐　副研究员

研究方向：随机微分方程数值解

2023.9.27

Outline

1. 研究背景与意义
2. 国内外研究现状
3. 研究内容与主要工作
4. 论文创新点与问题
5. 论文进度安排及预期成果
6. 主要参考文献

- 时变随机过程和时变随机微分方程 (SDEs) 作为描述亚扩散过程重要工具之一, 在众多领域发挥着重要作用. 包括：金融模型、生物化学等领域[1].
- 传统的随机微分方程数值方法包括 Euler 型方法、Milstein 型方法、Runge- Kutta 方法等. 但当随机微分方程项出现超线性增长时，经典的方法可能不收敛[2].

[1] Marcin Magdziarz, Sebastian Orzel, and Aleksander Weron. Option pricing in subdiffusive Bachelier model. J.Stat. Phys., 145(1):187–203, 2011.

[2] Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen, and Peter E. Kloeden. Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 467 (2130):1563–1576, 2011.

1.2 研究意义

- 具有超线性系数的经典布朗运动驱动的随机微分方程, 大量工作利用隐式方法进行研究, 隐式方法计算复杂度高、计算效率低.
- 时间变换的随机微分方程的真实解解很少能显式地表达出来, 因此其数值逼近尤为重要.
- 处理具有超线性增长项的随机微分方程, 截断 Euler-Maruyama 的强收敛率较低, 构造一种截断 Milstein 型方法具有重要的研究意义.

2. 国内外研究现状

2.1 超线性增长项 SDEs 的研究

隐式方法可用于处理具有超线性项的经典布朗运动驱动的随机微分方程. 由于显式数值方法结构清晰, 计算复杂度低, 近年来在处理超具有线性项的随机微分方程时常用改进显式方法:

- X. Mao(2013) 研究了向后 Euler-Maruyama 的强收敛率.
- J. Gao, H. Liang, S. Ma(2019) 研究 semi-implicit Euler 方法的强收敛.
- M. Hutzenthaler, A. Jentzen, P.E. Kloeden (2012) 研究了具有非全局 Lipschitz 条件的 SDEs 的 Tamed Euler 方法.
- X. Mao(2015) 提出利用截断 Euler-Maruyama 方法去处理具有超线性增长项的 SDEs.

2. 国内外研究现状

2.2 时变 SDEs 数值方法的研究

- Ernest Jum, Kei Kobayashi(2016) 第一篇关于离散格式下时间变换随机微分方程的数值逼近研究.
- Sixian Jin, Kei Kobayashi(2019) 系数满足全局 Lipschitz 条件下, 研究了时间变换 SDEs 的 EM 方法.
- Sixian Jin, Kei Kobayashi(2021) 研究时变 SDEs 的 Milstein 型方法.
- Chang-Song Deng and Wei Liu(2020) SDEs 满足超线性增长条件时, 研究了半隐式 EM 方法.
- Wei Liu, Xuerong Mao, Jingwen Tang, and Yue Wu(2020) 利用对偶原则研究了截断 EM 方法.

我们考虑一类时间变换随机微分方程 (SDEs):

$$dY(t) = f(t, Y(t))dE(t) + g(t, Y(t))dW(E(t)), \quad Y(0) = Y_0,$$

其中 f 为 SDEs 的漂移项, g 为扩散项. 这里 $T > 0$, $t \in [0, T]$, 对所有 $q > 0$ 有 $\mathbb{E}|Y_0|^q < \infty$. $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 和 $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

对于上述方程, 我们的研究内容如下:

- 对一类具有超线性增长系数, 且不满足对偶原则的时变 SDEs 构造 Trucated-Milstein 数值方法, 并进行收敛性分析;
- 通过 Matlab 编程, 数值验证一维和高维数值例子成立.

3.2 主要工作

在一类高非线性非自治时变 SDEs 中, 其系数满足以下条件:

- f 和 g 的空间变量满足超线性增长,

$$\begin{aligned}&|f(t,x)-f(t,y)| \vee |g(t,x)-g(t,y)| \vee |Lg(t,x)-Lg(t,y)| \\ &\leq C(1+|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha})|x-y|,\end{aligned}$$

- f 和 g 的时间变量满足 Hölder 连续,

$$\begin{aligned}|f(s,x)-f(t,x)| &\leq H_1(1+|x|^{\alpha+1})(s-t)^{\gamma_f}, \\ |g(s,x)-g(t,x)| &\leq H_2(1+|x|^{\alpha+1})(s-t)^{\gamma_g},\end{aligned}$$

我们研究时变 SDEs 的 Trucated-Milstein 方法强收敛性:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y(t)-X(t)|^{\bar{p}}\right) \leq h^{\min\{\gamma_f\bar{p},\gamma_g\bar{p},(1-2\varepsilon)\bar{p}\}}.$$

3.2 主要工作

本论文研究一类时变 SDEs 方程的 Trucated-Milstein 方法的强收敛率, 具体工作如下:

- 选择合适的截断函数, 构造 Trucated-Milstein 方法.
- 证明真实解和数值解的有界性.
- 验证数值解的连续时间关系.
- 结合 Talay 展开、Young 不等式、Jensen's 不等式、Gronwall's 不等式、Hölder 不等式等进行收敛性分析.
- 利用 Matlab 编程进行数值模拟, 验证理论结果的正确性.

3.2 主要工作

本论文通过一维和二维数值算例进行理论验证:

- 考虑一维时间变换随机微分方程:

$$
\begin{cases}
dY(t) = \left([t(1-t)]^{\frac{1}{4}} Y(t) - Y^5(t) \right) dE(t) + \left([t(1-t)] Y^2(t) \right) dW(E(t)), \\
Y(0) = 1.
\end{cases}
$$

- 考虑二维时间变换随机微分方程:

$$
\begin{cases}
dx_1(t) = \left([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} x_1(t) - x_2^5(t) \right) dE(t) + \left([t(1-t)]^{\frac{1}{2}} x_2^2(t) \right) dW(E(t)), \\
dx_2(t) = \left([t(1-t)]^{\frac{1}{5}} x_2(t) - x_1^5(t) \right) dE(t) + \left([t(1-t)]^{\frac{1}{1}} x_1^2(t) \right) dW(E(t)).
\end{cases}
$$

3.2 主要工作

一维和二维时间变换随机微分方程的 Trucated-Milstein 方法数值结果:

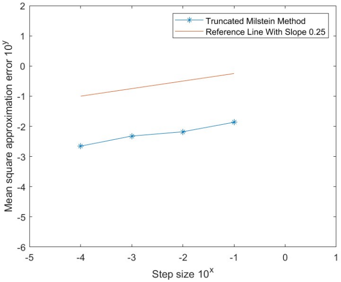

图 3.1: 一维 SDE 强收敛率为 0.25

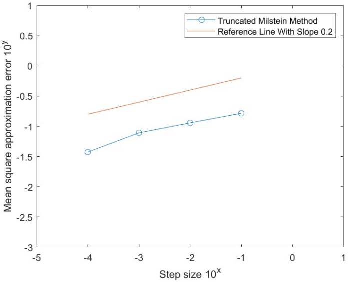

图 3.2: 二维 SDE 强收敛率为 0.2

4. 论文创新点与问题

- 我们考虑数值方法具有更高的收敛阶, 提出了一种采用截断技术抑制超线性项的 Milstein 型方法.
- 本文研究的时间变换随机微分方程不满足对偶原理, 并在非自治情况下进行研究.
- 在一维和多维的时变 SDEs 数值例子上进行了模拟, 然而将数值方法应用于多水平蒙特卡罗方法的期权选择等研究中，由于步长选择的不同，其研究受到一定的限制.

5. 论文进度安排及预期成果

5.1 进度安排

起止时间	论文进度安排
2023.2 -2023.3	论文定题，收集、阅读并整理相关图书、文献
2023.4 -2023.7	完成时间变换 SDEs 截断方法的构造，进行强收敛率推导、数值模拟
2023.8 -2023.9	论文撰写、修改、完成开题报告
2023.10 -2023.11	推导过程和数值模拟总结，进行排版、整理，初步完成论文初稿
2023.12 - 2024.1	毕业论文预答辩
2024.2 -2024.4	补充、完善论文，论文定稿
2024.5	毕业论文答辩

5.2 预期成果

本论文研究一类高非线性非自治时间变换 SDEs 的 Trucated-Milstein 方法, 其预期成果如下:

- 利用截断思想构造处理超线性增长项的 Trucated-Milstein 方法.
- 验证数值方法的强收敛性, 并给出强收敛率.
- 给出时变 SDEs 的 Trucated-Milstein 方法的实现代码, 通过一维和高维数值算例对理论结果进行验证, 形成研究论文.

6. 主要参考文献

对超线性增长项 SDEs 的研究:

- Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen, and Peter E. Kloeden. Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 467(2130):1563–1576, 2011.
- Xue-Rong Mao. The truncated euler–maruyama method for stochastic differentia lequations.Comput. Appl. Math., 290:370–384. 2015.
- Neuenkirch A,Szpruch L.First order strong approximations of scalar sdes defined in a domain[J].Numerische Mathematik,2014,128:103-136.

6. 主要参考文献

对时变 SDEs 数值方法的研究:

- Ernest Jum and Kei Kobayashi. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed Brownian motion. Probab. Math. Statist., 36(2):201–220, 2016.
- Sixian Jin and Kei Kobayashi. Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators. BIT, 61(3):829–857, 2021.
- Chang-Song Deng and Wei Liu. Semi-implicit Euler-Maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations. BIT, 60(4):1133–1151, 2020.

请各位老师批评指正！

谢谢!