毕业论文

左如春

2024 年 9 月 12 日

1 EM

由 Taylor 定理可知

$$\begin{aligned} f(X(r)) = f(X(s)) + f'(X(s))\big(X(r) - X(s)\big) \\ + \int_0^1 (1-h) g'' f\big(X(s) + h(X(r) - X(s))\big)\big(X(r) - X(s)\big)^2 \, dh, \end{aligned}$$

可以写成

$$f(X(r)) = f(X(s)) + R_f(r; s, X(s)), \quad 0 \le s \le r,$$

其中

$$\begin{aligned} R_f(r; s, X(s)) := f'(X(s))\big(X(r) - X(s)\big) \\ + \int_0^1 (1-h) g'' f\big(X(s) + h(X(r) - X(s))\big)\big(X(r) - X(s)\big)^2 \, dh. \end{aligned}$$

由于扩散项 g 是常数，因此不做改变。将 f 的 Taylor 展开代入到下面的积分方程

$$X(t) = X(s) + \int_s^t f(X(r)) \, dr + \int_s^t g(X(r)) \, dW(r), \tag{1.1}$$

于是

$$X(t) = X(s) + f(X(s))(t-s) + g(X(s)) \int_s^t dW(r) + \int_s^t R_f(r; s, X(s)) \, dr \tag{1.2}$$

将这里的 R_M 去掉得到的就是 Milstein 方法

这个引理需要验证，应该是可以的。真实解的收敛性

Lemma 1.1. *假设 f 和 g 满足全局 Lipschitz 条件，并且 $X(t)$ 是原 SDE 的真实解. 那么对于任意的 $T>0$ 和 $X_0 \in \mathbb{R}$, 都存在 $K>0$ 使得对于任意的 $0 \le s,t \le T$ 都有*

$$||X(t)-X(s)||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)} \le K|t-s|^{1/2}. \tag{1.3}$$

proof： 由 8.3

$$X(t)-X(s) = \int_s^t f(X(r))\,dr + \int_s^t g(X(r))\,dW(r).$$

Then, using (A.10),

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-X(s)|^2\right] \le 2\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t f(X(r))\,dr\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t g(X(r))\,dW(r)\right|^2\right].$$

Following the argument for deriving (8.29), we find

$$\mathbb{E}\Big[\,|X(t)-X(s)|^2\,\Big] \le 2L^2\big((t-s)+1\big)(t-s)\bigg(1+\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\Big[\,|X(t)|^2\,\Big]\bigg).$$

As $X \in \mathcal{H}_{2,T}$, this implies (8.55). □

Proposition 1.2. *假设 f 和 g 满足全局 Lipschitz 条件，并且 $X(t)$ 是原 SDE 的真实解. 对于每个 $T>0$ 和 $X_0 \in \mathbb{R}^d$, 存在 $K>0$ 对于任意的 $0 \le s,t \le T$:，使得下述成立 (i) 对于 R_f*

$$\mathbb{E}\left[|R_f(t;s,X(s))|^2\right] \le \ K|t-s| \tag{1.4}$$

(ii) 对于 R_f 的积分, 其中 $t_j = j\Delta t$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{t_j<t}\int_{t_j}^{t\wedge t_{j+1}} R_f(r;t_j,X(t_j))\,dr\right|^2\right] \le K\Delta t^2.$$

proof： (i) 在全局 Lipschitz 的条件下，该结论可以直接得到
(ii) 由 R_f 的定义可知

$$\begin{aligned}
R_f(r;s,X(s)) = {} & f'(X(s))\big(X(r)-X(s)\big) \\
& + \int_0^1 (1-h)g''f\big(X(s)+h(X(r)-X(s))\big)\big(X(r)-X(s)\big)^2\,dh \\
& = f'(X(s))\bigg(g(X(s))\int_s^r dW(p)\bigg) + f'(X(s))\left(f(X(s))(t-s)+\int_s^t R_f(r;s,X(s))\,dr\right) \\
& + \int_0^1 (1-h)g''f\big(X(s)+h(X(r)-X(s))\big)\big(X(r)-X(s)\big)^2\,dh.
\end{aligned}$$

令

$$\Theta_j := \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(X(t_j))\Big(g(X(t_j))\int_{t_j}^{r} dW(p)\Big)dr \tag{1.5}$$

于是

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} R_f(r;t_j,X(t_j))\,dr\right|^2\right] \le 3\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{k-1}\Theta_j\right|^2\right]$$
$$+3\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(X(t_j))\left(f(X(t_j))(r-t_j)+\int_{t_j}^{r} R_f(p;t_j,X(t_j))\,dp\right)\,dr\right|^2\right]$$
$$+3\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^1 (1-h)f''\big(X(t_j)+h(X(r)-X(t_j))\big)\big(X(r)-X(t_j)\big)^2 dh\,dr\right|^2\right].$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式以及前面的结论，得到第二项和第三项是 Δt^2. 对于第一项，对于 $k>j$, 我们有 $\mathbb{E}[\langle\Theta_j,\Theta_k\rangle]=\mathbb{E}[\langle\Theta_j,\mathbb{E}[\Theta_k\mid\mathcal{F}_{t_k}]\rangle]=0$ a.s. 于是

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{k-1}\Theta_j\right|^2\right]=\sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\left[\left|\int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(X(t_j))\left(g(X(t_j))\int_{t_j}^{r} dW(p)\right)dr\right|^2\right].$$

由于 $\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{t_j}^{r} dW(p)\ dr \sim \mathrm{N}(0,\frac{1}{3}\Delta t^3 I_m)$, 求和中的每一项都是 $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ 于是最终的和是 $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

□

下面我们来证明 Milstein 的强收敛阶. 为了方便证明, 我们定义一个连续版本的过程 $X_\Delta t(t)$,它和估计 X_n 在 $t=t_n$. 是相等的,为此, 介绍变量 $\hat{t}:=t_n$ 当 $t_n\le t<t_{n+1}$ 并且令

$$X_{\Delta t}(t)=X_{\Delta t}(\hat{t})+f(X_{\Delta t}(\hat{t}))\int_{\hat{t}}^{t} ds+G(X_{\Delta t}(\hat{t}))\int_{\hat{t}}^{t} dW(r)$$

注意，当 $\hat{t}=t_n$ 时，$X_{\Delta t}(\hat{t})=X_n$

$$X_{\Delta t}(t)=X_{\Delta t}(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(X_{\Delta t}(\hat{s}))ds+\int_{t_0}^{t} G(X_{\Delta t}(\hat{s}))dW(s) \tag{1.6}$$

Theorem 1.3. *假设满足全局 Lipschitz 条件. 令 X_n 是精确解 $X(t)$ 的 Milstein 估计. 对于任意的 $T\ge 0$, 存在 $K>0$ 使得*

$$\sup_{0\le t_n\le T}|X(t_n)-X_n|\le K\Delta t.$$

proof： 为了简化符号, 令 $D(s) := f(X_{\Delta t}(\hat{s})) - f(X(\hat{s}))$ 以及

$$M(s) := g(X_{\Delta t}(\hat{s})) - g(X(\hat{s}))$$

数值解1.6和真实解1.2相减，可以得到

$$u_{\Delta t}(t) - X(t) = \int_0^t D(s)ds + \int_0^t M(s)dW(s) \tag{1.7}$$

$$+ \sum_{t_j<t} \int_{t_j}^{t\wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j))\, dr + \int_{t_n}^{t} R_f(r; t_n, X(t_n))\, dr. \tag{1.8}$$

令 $e(\hat{t}) = X_{\Delta t}(\hat{t}) - X(\hat{t})$. 于是,

$$\mathbb{E}\left[\left|e(\hat{t})\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\hat{t}} D(s)ds\right|^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\hat{t}} M(s)dW(s)\right|^2\right] \tag{1.9}$$

$$+ 3\mathbb{E}\left[\left|\sum_{t_j<\hat{t}} \int_{t_j}^{t\wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j))\, dr\right|^2\right]. \tag{1.10}$$

对于第一项，由 Lipschitz 条件和 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\hat{t}} D(s)ds\right|^2\right] \leq \hat{t}\int_0^{\hat{t}} \mathbb{E}\left[|D(s)|^2\right] ds \leq \hat{t}\int_0^{\hat{t}} L^2\mathbb{E}\left[|e(s)|^2\right] ds. \tag{1.11}$$

对于第二项，通过等距性质：

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\hat{t}} M(s)dW(s)\right|^2\right] = \int_0^{\hat{t}} \mathbb{E}\left[|M(s)|_{\mathrm{F}}^2\right] ds. \tag{1.12}$$

由于前面的等式，可以得到：

$$\mathbb{E}\Big[\,|M(s)|_{\mathrm{F}}^2\Big] \leq 2\mathbb{E}\Big[\,|g(X_{\Delta t}(\hat{s})) - g(X(\hat{s}))|_{\mathrm{F}}^2\Big] \leq\leq 2(L + L_2)\mathbb{E}\left[|e(s)|^2\right] \tag{1.13}$$

因此存在独立于 Δt 的 $K_3 > 0$ 使得,

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\hat{t}} M(s)\, dW(s)\right|^2\right] \leq K_3\int_0^{\hat{t}} \mathbb{E}\left[|e(s)|^2\right] ds.$$

对于第三项, 由 Proposition（ii）可知，存在独立于 Δt 的 $K_2 > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t\wedge t_{j+1}} R_f(r; t_j, X(t_j))\, dr\right|^2\right] \leq K_2\Delta t^2.$$

将这些估计放在一起, 于是对于 $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\Big[\big|e(\hat{t})\big|^2\Big] \leq 3\big(TL^2 + K_3\big)\int_0^{\hat{t}} \mathbb{E}\Big[|e(s)|^2\Big]\, ds + 3K_2\Delta t^2.$$

最终由 Gronwall 不等式即可完成这个证明.

□