

# 时间变换随机微分方程的 $\alpha$ 阶逼近

左如春

2024 年 10 月 10 日

## 摘要

研究 Euler-Maruyama (EM) 数值逼近一类经过 Lamperti 变换后, 漂移系数线性增长、扩散系数是常数的时变随机微分方程. 证明了 EM 的强收敛性与逆从属的稳定指数之间的关系, 并讨论收敛速度. 并通过数值模拟验证了理论结果.

**关键词:** 时间变换; 等距离散; 收敛阶; 逆从属.

## 1 引言

受到 [1] 的启发, 本文的目的是推导出一个有效的数值逼近具有全局 Lipschitz 的漂移系数和扩散项系数的一维随机微分方程. 主要思想是使用 Lamperti 变换将原始的时变 SDE 转化成带有加性噪声的时变 SDE, 见 [2], 通过 EM 对变换后的时变 SDE 进行逼近, 再将其变换成原始时变 SDE 的逼近格式.

对于时间变换的随机微分方程, 现在已经有了很多的数值逼近格式. 在 [3] 中证明了对于漂移项和扩散项都满足全局 Lipschitz 时, 可以采用对偶原则, 将时间变换随机微分方程转换成一般随机微分方程, 通过对一般随机微分方程使用 EM 数值格式进行逼近, 进而得到时间变换随机微分方程的强收敛阶. 在 [4] 中将这一思想运用在漂移项满足非全局 Lipschitz 条件时, 使用半隐式 EM 得到强收敛阶, 并研究了其稳定性. 这解决了一大类可以对偶化的时间变换微分方程的数值格式收敛性问题. 在 [5], 对于不能使用对偶原则的时间变换随机微分方程, 采用一种非等距的离散格式, 并得到强收敛阶. 纵观以往的时间变换的随机微分方程的数值格式, 大多采用的是非等距离散. 而在这篇文章中, 我们将使用等距离散来研究具有全局 Lipschitz 系数的漂移项系数和常数项扩散项系数的随机微分方程:

$$dX(s) = f(X(s))dE(s) + \sigma dB(E(s)). \quad (1.1)$$

## 2 准备工作

在这篇文章中,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  表示完备概率空间,  $D = (D(t))_{t \geq 0}$  表示具有 Laplace 指数  $\psi$ , 从 0 开始的从属, 其中  $\psi$  的被杀率是 0 且具有 Lévy 测度  $\nu$ ; 即  $D$  是具有开始于 0 的 càdlàg 路径的一维非减 Lévy 过程, 其 Laplace 变换是:

$$\mathbb{E}[e^{-sD(t)}] = e^{-t\psi(s)}, \quad \text{其中} \quad \psi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sy}) \nu(dy), \quad s > 0.$$

并且  $\int_0^\infty (y \wedge 1) \nu(dy) < \infty$ , 我们考虑 Lévy 测度  $\nu$  是无穷的情况, 即  $\nu(0, \infty) = \infty$ . 这意味着复合泊松从属不在我们的考虑范围中. 令  $E = (E(t))_{t \geq 0}$  是  $D$  的逆, 即:

$$E(t) := \inf\{s > 0; D(s) > t\}, \quad t \geq 0.$$

我们称  $E$  是逆从属过程, 注意  $E$  是连续且非递减的. 如果从属  $D$  是 Laplace 指数为  $\psi(s) = s^\beta$ ,  $\beta \in (0, 1)$  的稳定过程, 那么对应的  $E$  称为逆  $\beta$ -稳定从属过程. 一般我们假设  $B(t)$  和  $D(t)$  是相互独立的. 随机过程  $B(E(t))$  被称作时间变换的布朗运动. 我们注意到  $D(t)$  的跳跃部分和  $E(t)$  的平坦部分相互对应的. 又由于  $E(t)$  的平坦部分, 导致  $B(E(t))$  在这一部分也是平坦的, 因此  $B(E(t))$  可以被理解成是一种次扩散.

令  $S = (l, r)$ , 其中  $-\infty \leq l < r \leq \infty$ , 函数  $f$  是  $S \rightarrow S$  的连续可微函数. 考虑 SDE(1.1) 并且假设它在  $S$  中有唯一强解, 即

$$\mathbb{P}(X(t) \in S, t \geq 0) = 1.$$

设定等距步长  $\delta \in (0, 1)$  及时间区间  $T > 0$ . 为了在区间  $[0, T]$  上逼近逆从属过程  $E$ , 我们遵循 [6] 中提出的方法. 具体来说, 首先通过模拟具有独立且平稳增量的从属过程  $D$  的样本路径来进行逼近. 设定  $D_0 = 0$ , 然后遵循规则  $D_{i\delta} := D_{(i-1)\delta} + Z_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , 其中  $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  为独立同分布的序列, 且  $Z_i \stackrel{d}{=} D_\delta$ . 我们在找到整数  $N$  使得  $T \in [D_N\delta, D_{(N+1)\delta})$  时停止该过程. 请注意,  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  值的随机变量  $N$  确实存在, 因为  $D_t \rightarrow \infty$  随着  $t \rightarrow \infty$  几乎必然成立. 可以通过下面的算法生成随机变量  $\{Z_i\}$ ,

$$Z(i) = \delta^{1/\alpha} \xi_i,$$

其中  $\xi_i$  是独立同分布的完全偏斜的  $\alpha$  稳定随机变量,  $\xi_i$  的实现过程如下:

$$\xi_i = \frac{\sin(\alpha(V + c_1))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(V - \alpha(V + c_1))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha},$$

其中  $c_1 = \frac{\pi}{2}$ , 随机变量  $V$  是  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上的均匀分布,  $W$  是均值为 1 的指数分布. 然后, 令

$$E_t^\delta := (\min\{n \in \mathbb{N}; D_{n\delta} > t\} - 1)\delta, \quad t \in [0, T].$$

过程  $E^\delta = (E_t^\delta)_{t \geq 0}$  的样本路径是具有恒定跳跃大小  $\delta$  的单调递增阶梯函数, 第  $i$  个等待时间为  $Z_i = D_{i\delta} - D_{(i-1)\delta}$ . 过程  $E^\delta$  有效地逼近  $E$ ; 实际上, 几乎必然地有

$$E_t - \delta \leq E_t^\delta \leq E_t, \quad \text{对于所有 } t \in [0, T].$$

图 2.1 中提供在这种离散方式下的  $E(t)$  和  $X(t)$ . 在 [5] 中对  $\Delta E$  的处理时,  $t$  每次跳  $D_{n\delta} - D_{(n-1)\delta}$ , 于是  $E(t)$  每次对应改变  $\delta$ . 然而, 在我们的离散格式中, 选择对  $t$  做等距离散, 让  $t$  每次跳跃的长度是固定的长度  $h$ , 于是  $E$  在第  $i$  次跳跃对应的变化就是  $E_{ih} - E_{(i-1)h}$ , 这样的离散会导致出现  $\Delta E = 0$ , 这是得到收敛阶是  $\alpha$  的关键.

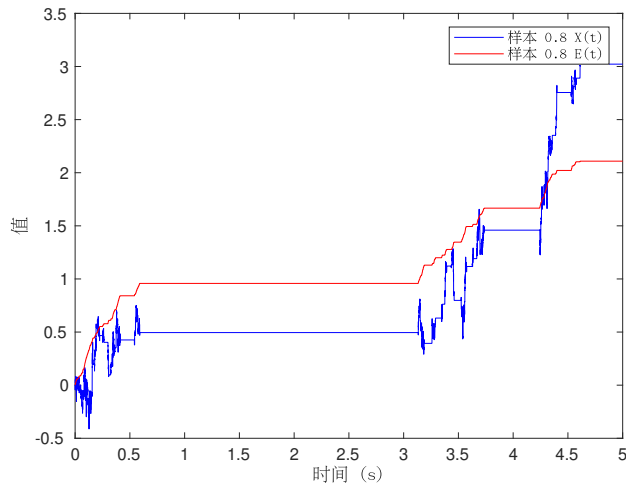


图 2.1:  $E(t)$  和  $X(t)$  的样本路径.

### 3 假设和引理

**假设 3.1.** 假设函数  $f$  满足全局 Lipschitz 条件的, 即存在一个常数  $K > 0$ , 使得:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \quad (3.1)$$

**假设 3.2.** 假设函数  $f$  满足线性增长条件, 即存在一个常数  $K > 0$ , 使得:

$$|f(x)| \leq K(1 + |x|). \quad (3.2)$$

**假设 3.3.** 令  $T > 0$ , 假设函数  $f$  是二阶连续可微的并且满足:

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |f'(x(t))|^2 + \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| f'(x(t))f(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x(t)) \right| < \infty. \quad (3.3)$$

**引理 3.4.** 令  $\Delta t > 0$ ,  $g_n, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,  $\eta > 0$ ,  $a_0 = 0$ , 再假设  $1 - \eta\Delta t > 0$ ,  $1 + \lambda_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 那么如果

$$a_{n+1} \leq a_n(1 + \lambda_n) + \eta a_{n+1} \Delta t + g_{n+1},$$

则下面的不等式成立:

$$a_n \leq \frac{1}{(1 - \eta\Delta t)^n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \eta\Delta t)^j g_{j+1} \prod_{l=j+1}^{n-1} (1 + \lambda_l). \quad (3.4)$$

可以在 [7] 中得到下面的时间变换的 Itô 公式.

**引理 3.5.** 令  $B$  是一维标准的布朗运动. 令  $D$  和  $E$  满足  $[D \longrightarrow E]$  或者  $[U \longleftarrow E]$ .  $X$  是由下述 SDE 定义的随机过程

$$X(t) := \int_0^t A(s) ds + \int_0^t F(s) dE(s) + \int_0^t G(s) dB_{E(s)},$$

其中  $A \in L(t, \mathcal{F}_{E(t)})$ ,  $F \in L(E(t), \mathcal{F}_{E(t)})$ , 以及  $G \in L(B_{E(t)}, \mathcal{F}_{E(t)})$ . 如果  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , 那么  $f(X(t))$  是  $\mathcal{F}_{E(t)}$ -半鞅, 对于所有的  $t \geq 0$ , 都有

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(0) &= \int_0^t f'(X(s)) A(s) ds + \int_0^{E(t)} f'(X(D(s-))) F(D(s-)) ds \\ &+ \int_0^{E(t)} f'(X(D(s-))) G(D(s-)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^{E(t)} f''(X(D(s-))) G^2(D(s-)) ds. \end{aligned}$$

下面的引理对于证明本文主要定理起着关键性的作用.

**引理 3.6.** 对于任意给定的  $0 = t_0 < ih < t_1 < t_2 < \dots < t_n < (i+1)h = T$ , 都有:

$$\mathbb{E} \left[ \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 dE(t_1) \dots dE(t_{n-1}) dE(t_n) \right] \leq Ch^{1+(n-1)\beta}, \quad (3.5)$$

其中  $C$  是与  $h$  无关的常数.

**证明 :** 在 [8] 和 [6] 中可以直接得到, 如果  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , 那么:

$$\mathbb{E}[dE(t_n) \dots dE(t_1)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i-1}) dt_i,$$

其中  $u(t) = \mathbb{E}[E(t)] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ , 因此:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E} \left[ \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 dE(t_1) \dots dE(t_{n-2}) dE(t_{n-1}) dE(t_n) \right] \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 \mathbb{E} [dE(t_1) \dots dE(t_{n-2}) dE(t_{n-1}) dE(t_n)] \\ &= \frac{\alpha^n}{\Gamma^n(\alpha+1)} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} \prod_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n. \end{aligned}$$

下面单独考虑积分项:

$$I_1 = \int_{ih}^{t_2} (t_2 - t_1)^{\alpha-1} t_1^{\alpha-1} dt_1.$$

做如下变换, 令  $t_1 = ih + s_1 h$ , 同时  $t_2 = ih + s_2 h$ , 其中  $h$  是步长, 因此  $s_1, s_2 \in [0, 1]$ , 注意这里的  $i+1 = \frac{T}{h}$ , 这样做的目的是不考虑时间在原点处, 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} h^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} h ds_1 \\ &= h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} ds_1. \end{aligned}$$

由于  $(ih + s_1 h)^{\alpha-1}$  关于  $s_1$  在  $[0, 1]$  是单调递减的, 并且积分  $I_1$  中, 被积函数和积分区域都是正的, 因此

$$\begin{aligned} I_1 &\leq h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih)^{\alpha-1} ds_1 \\ &\leq T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1. \end{aligned}$$

令  $w_1 = s_2 - s_1$ , 于是

$$I_1 \leq T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1 = T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} w_1^{\alpha-1} dw_1 = \frac{T^{\alpha-1} s_2^\alpha}{\alpha} h^\alpha.$$

因此

$$I \leq Ch^\alpha \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_3} \prod_{i=3}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n.$$

同理, 分析如下积分:

$$I_2 = \int_{ih}^{t_3} (t_3 - t_2)^{\alpha-1} dt_2 \leq Ch^\alpha.$$

因此

$$I \leq Ch^{2\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_4} \prod_{i=4}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_3 \dots dt_{n-1} dt_n.$$

如此进行迭代, 我们得到:

$$I \leq Ch^{(n-1)\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} 1 dt_1 \leq Ch^{1+(n-1)\alpha}.$$

□

对于时间变换 SDE(1.1), 在漂移项满足全局 Lipschitz 的条件下, 可以得到该方程的强解存在且唯一, 见 [9] 中的定理 4.1. 此时该时变随机微分方程的 EM 数值格式可以写成:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(x_{t_i})\Delta E_i + \sigma\Delta B_{E_i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad X_0 = X(0), \quad (3.6)$$

其中  $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$  以及  $\Delta B_{E_i} = B_{E(t_{i+1})} - B_{E(t_i)}$ .

## 4 主要定理

**性质 4.1.** 令  $X$  是 SDE(1.1) 的解, 其中  $f$  满足假设 3.1 和假设 3.2, 那么对于任意的  $p \geq 1$ , 都有  $\mathbb{E}[Y_T^{(p)}] < \infty$ , 其中  $Y_t^{(p)} := 1 + \sup_{0 \leq r \leq t} |X_r|^p$ .

**证明 :** 设  $S_\ell := \inf\{t \geq 0 : Y_t^{(p)} > \ell\}$ , 其中  $\ell \in \mathbb{N}$ . 由于解  $X$  具有连续的路径, 对每个  $t \geq 0$ ,  $Y_t^{(p)} < \infty$ , 因此, 随着  $\ell \rightarrow \infty$ ,  $S_\ell \uparrow \infty$ . 对于  $\mathbb{P}_D$  几乎处处路径, 我们首先将 Gronwall 型不等式应用于函数  $t \mapsto \mathbb{E}_B[Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}]$  对于固定的  $\ell$ , 然后令  $t = T$  并在得到的不等式中让  $\ell \rightarrow \infty$  来建立  $\mathbb{E}_B[Y_T^{(p)}]$  的上界. 请注意, 由于  $S_\ell$  的定义,

$$\int_0^t \mathbb{E}_B[Y_{r \wedge S_\ell}^{(p)}] dE_r \leq \ell E_t < \infty,$$

这使得我们可以安全地应用 Gronwall 型不等式。

假设  $p \geq 2$ , 因为对于  $1 \leq p < 2$  的结果可以直接通过应用  $p \geq 2$  时的结果和 Jensen 不等式得到. 根据时间变换的 Itô 公式, 有  $X_s^p = x_0^p + J_s + K_s$ , 其中

$$J_s := \int_0^s \sigma p X_r^{p-1} dB_{E_r};$$

$$K_s := \int_0^s \left\{ p X_r^{p-1} f(X_r) + \frac{\sigma^2}{2} p(p-1) X_r^{p-2} \right\} dE_r.$$

固定  $t \in [0, T]$  和  $\ell \in \mathbb{N}$ . 根据假设 3.2 以及不等式  $(x + y + z)^p \leq c_p(x^p + y^p + z^p)$ , 其中  $x, y, z \geq 0$  且  $c_p = 3^{p-1}$ , 有

$$\mathbb{E}_B \left[ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |K_s| \right] \leq \left( pc_p K + \frac{1}{2} p(p-1) c_p K^2 \right) \int_0^{t \wedge S_\ell} \mathbb{E}_B[Y_r^{(p)}] dE_r.$$

由于  $(J_s)_{s \geq 0}$  是一个局部鞅，应用 BDG 不等式得到

$$\mathbb{E}_B \left[ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |J_s| \right] \leq b_1 \mathbb{E}_B \left[ \left( \int_0^{t \wedge S_\ell} \sigma^2 p^2 X_r^{2p-2} dE_r \right)^{1/2} \right],$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B \left[ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge S_\ell} |J_s| \right] &\leq b_1 \mathbb{E}_B \left[ pc_p K \left( Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)} \int_0^{t \wedge S_\ell} Y_r^{(p)} dE_r \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}_B [Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] + 2b_1^2 p^2 c_p^2 K^2 \int_0^{t \wedge S_\ell} \mathbb{E}_B [Y_r^{(p)}] dE_r, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由基本不等式  $(ab)^{1/2} \leq a/\lambda + \lambda b$  导出，适用于任意  $a, b, \lambda > 0$ ，且  $\lambda := 2b_1 pc_p K$ 。注意，对于任意非负过程  $(L_t)_{t \geq 0}$ ，都有

$$\int_0^{t \wedge S_\ell} L_r dE_r \leq \int_0^t L_{r \wedge S_\ell} dE_r.$$

确实，当  $t \leq S_\ell$  时，不等式显然成立，而如果  $t > S_\ell$ ，则

$$\int_0^{S_\ell} L_r dE_r + \int_{S_\ell}^t L_{S_\ell} dE_r \geq \int_0^{t \wedge S_\ell} L_r dE_r.$$

因此，通过上面对  $J_s$  和  $K_s$  的估计，有

$$\mathbb{E}_B [Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) + 2K^2 (pc_p K + (p(p-1)c_p/2 + 2b_1^2 p^2 c_p^2)) \int_0^t \mathbb{E}_B [Y_{r \wedge S_\ell}^{(p)}] dE_r,$$

通过应用第 IX.6a 章 Gronwall 型不等式和引理 6.3 的结果 (见 [8])，得到

$$\mathbb{E}_B [Y_{t \wedge S_\ell}^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) e^{2K^2 E_T (pc_p K + (p(p-1)c_p/2 + 2b_1^2 p^2 c_p^2))}.$$

令  $t = T$ ，并让  $\ell \rightarrow \infty$ ，由于  $\xi(u)$  不依赖于  $\ell$ ，并应用单调收敛定理，可得

$$\mathbb{E}_B [Y_T^{(p)}] \leq 2(1 + |x_0|^p) e^{2K^2 E_T (pc_p K + (p(p-1)c_p/2 + 2b_1^2 p^2 c_p^2))}.$$

对两边取期望  $\mathbb{E}_D$ ，得到  $\mathbb{E}[Y_T^{(p)}] \leq \mathbb{E}[ce^{cE_T}] < \infty$ ，这归因于 [5] 中定理 1 的结果。

□

**定理 4.2.** 对于任意的  $\epsilon > 0$ ，令  $\epsilon < T_1 < T_2$ ，在假设 3.1 和假设 3.3 的条件下，存在常数  $C$ ，使得下面的不等式成立：

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{i=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |X(t_i) - X_{t_i}| \right] \leq C \Delta t^\alpha$$

**证明：** 考虑 SDE (1.1) 在  $[t_i, t_{i+1})$  的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s)) dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)). \quad (4.1)$$

由时间变换的变量变换公式 [9], 上式等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(s-))) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)). \quad (4.2)$$

针对于漂移项  $f(X(D(s-)))$ , 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-))) - f(X(D(t_i-))) dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t_i-)}^{D(t-)} df(X(s)) dt. \quad (4.3)$$

由引理 3.5 的时间变换 Itô 公式, 于是(4.3)变成

$$\begin{aligned} & \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t-))) - f(X(D(t_i-))) dt \\ &= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \left( f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s-))) \right) ds dt \\ &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

由(4.2)与(4.4), 以及时间变换的变量变换公式可以得到

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_i-))) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \left( f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s-))) \right) ds dt \\ &+ \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) dt \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t_i)}^{E(t)} \left( f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s-))) \right) ds dE(t) \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t_i)}^{E(t)} \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) dE(t) \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \left( f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \\
 & + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t).
 \end{aligned}$$

因此

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) + R_i. \quad (4.5)$$

将  $R_i$  分解成  $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ , 其中:

$$\begin{aligned}
 R_i^{(1)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \left( f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t), \\
 R_i^{(2)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t).
 \end{aligned}$$

使用 (4.5) 和 (3.6) 可以得到:

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}} = X(t_i) - X_{t_i} + (f(x(t_i)) - f(x_{t_i}^\delta))\Delta E_i + R_i. \quad (4.6)$$

令  $e_i = X(t_i) - X_{t_i}$ , 由假设 3.1 得到:

$$|e_{s+1}| \leq (1 + K\Delta E_s)|e_s| + R_s, \quad \text{其中 } s = \lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil. \quad (4.7)$$

由引理 3.4, 可以得到  $|e_n| \leq \sum_{j=\lceil T_1/\Delta t \rceil-1}^{n-1} |R_{j+1}| \prod_{l=j+1}^{n-1} |1 + K\Delta E_l|$ , 其中  $n = \lceil T_2/\Delta t \rceil$ .

在 [10], 我么可以得到对于离散后的随机过程  $E_t$ , 存在与  $\Delta t$  无关的  $C$  使得  $\Delta E_t \leq C\Delta t$ , 所以

$$\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=1}^k (1 + K\Delta E_l) \leq \sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=1}^k (1 + C\Delta t)$$

通过对  $\Delta t$  取极限, 于是

$$\sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} \prod_{l=1}^k (1 + K\Delta E_l) < \infty$$

于是:

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \cdots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |e_k| \right] \leq C \mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}| \leq C \mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}^{(1)}| + C \mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}^{(2)}|. \quad (4.8)$$

由于  $f$  满足全局 Lipschitz 和线性增长条件, 因此  $f$  的导数必然是有界的. 于是对于第一项, 由命题 4.1 和引理 3.6, 可以得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |R_{j+1}^{(1)}| \right] &= \mathbb{E}_D \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \mathbb{E}_B \left( f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \right] \\ &= C\mathbb{E}_D \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \mathbb{E}_B [1 + |X(s)|] dE(s) dE(t) \right] \\ &\leq C\mathbb{E}_D \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t 1 dE(s) dE(t) \right] \\ &\leq C\Delta t^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

于是:

$$\mathbb{E} \sum_{j=0}^{n-1} |R_{j+1}^{(1)}| = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} |R_{j+1}^{(1)}| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^{1+\alpha} \leq C\Delta t^\alpha. \quad (4.9)$$

对于第二项  $\mathbb{E} \left| \sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^{(2)} \right|$ , 通过 BDG 不等式和引理 3.6 可以得到下面的不等式:

$$\mathbb{E} [dB_E dE]^2 = \mathbb{E} [(dB_E)^2 (dE)^2] = \mathbb{E}_D [(dE)^2 \mathbb{E}_B (dB_E)^2] \leq C\mathbb{E}_D [dE]^3 \leq C\Delta t^{1+2\alpha}. \quad (4.10)$$

于是,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |R_{j+1}^{(2)}| \right] &= \mathbb{E}_D \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}_B \left[ \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB_{E(s)} \right] dE(t) \right] \\ &\leq C\mathbb{E}_D \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \int_{t_i}^t \mathbb{E}_B (\sigma f'(X(s)))^2 dE(s) \right]^{\frac{1}{2}} dE(t) \right] \\ &\leq C\mathbb{E}_D \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \int_{t_i}^t 1 dE(s) \right]^{\frac{1}{2}} dE(t) \\ &\leq C\Delta t^{\frac{1}{2}+\alpha}.\end{aligned}$$

使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 再结合 (4.10) 可以得到:

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1}^{(2)} \right| \leq C\mathbb{E} \left| \sum_{j=0}^{n-1} (R_{j+1}^{(2)})^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} (R_{j+1}^{(2)})^2} \leq C \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^{1+2\alpha}} \leq C\Delta t^\alpha.$$

综上所述,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{k=\lceil T_1/\Delta t \rceil \dots \lceil T_2/\Delta t \rceil} |e_k| \right] \leq C\Delta t^\alpha.$$

□

## 5 数值例子

例 5.1. 考虑时间变换的的布朗运动驱动的 *Ornstein-Uhlenbeck* 过程

$$dX(t) = \mu X(t) dE_t + \sigma dB_{E_t}. \quad (5.1)$$

该方程对应的 EM 数值格式是:

$$X_{i+1} = (1 + \mu \Delta E_i) X_i + \sigma \Delta B_{E_i}$$

在 (5.1) 中, 对  $X(t)$  做变量变换, 令  $Y(t) = e^{-\mu t} X(t)$ , 并应用时间变换 Itô 公式, 可以得到 (5.1) 的解为

$$X(t) = e^{\mu E(t)} X(0) + \sigma e^{\mu E(t)} \int_0^t e^{-\mu E(s)} dB_{E(s)}. \quad (5.2)$$

要想使假设 3.3 成立, 只需要  $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$  成立即可, 从 [5] 的定理 1 和 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X(t)| &= \mathbb{E} [e^{\mu E(t)} X(0)] + \mathbb{E} \left[ \sigma e^{\mu E(t)} \int_0^t e^{-\mu E(s)} dB_{E(s)} \right] \\ &\leq (\mathbb{E} [e^{2\mu E(t)}] \mathbb{E} [X(0)^2])^{\frac{1}{2}} + \left( \mathbb{E} [\sigma^2 e^{2\mu E(t)}] \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-2\mu E(s)} dE(s) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C + C \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-2\mu E(s)} dE(s) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C + C (\mathbb{E}[E(t)])^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

因此 (5.1) 满足定理 4.2 的假设条件. 在我们的数值实验中, 我们关注端点  $T = 1$  处的  $L_1$  误差, 因此我们令

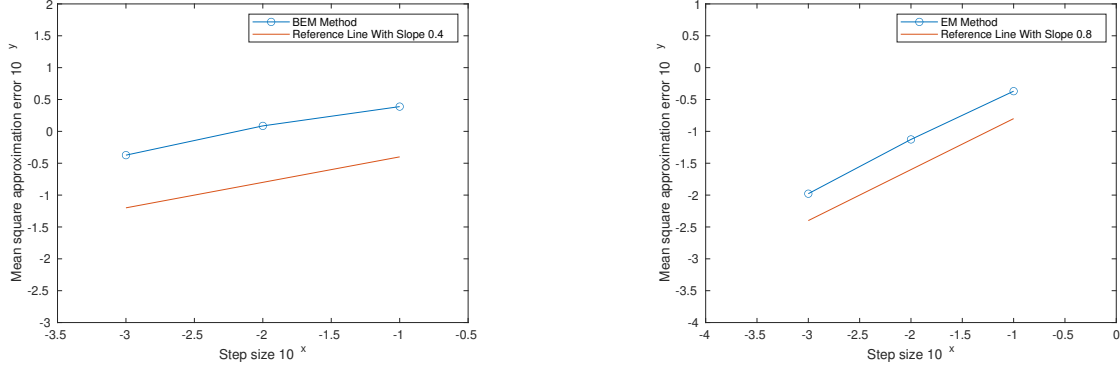
$$e_T^i = \mathbb{E} |X_T^{\delta_4} - X_T^{\delta_i}|,$$

其中  $X_T^{\delta_i}$  是步长为  $\delta_i$  时  $T$  处的模拟值,  $\delta_i = 10^{-i}$ , 对于我们的数值实验, 我们设  $\mu = 1, \sigma = 1$ , 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10^3} |X_T^{\delta_5} - X_T^{\delta_i}|.$$

选择步长为  $2^{-14}$  作为参考, 通过  $2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, 2^{-9}$  的步长来估计  $L_1$  误差. 下表为取不同  $\alpha$  时, 收敛阶和误差之间的对比

$\alpha$	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
收敛阶	—	—	—	—	0.5932	0.7074	0.7890	0.9085	0.9908

 表 5.1: 不同  $\alpha$  对应的收敛率和误差

 图 5.1: EM 方法的  $L_1$  误差, 左图为  $\alpha = 0.4$ , 右图为  $\alpha = 0.8$ 

## 参考文献

- [1] Alfonsi A. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process[J]. Stat Probab Lett, 2013, 83(2): 602–607.
- [2] Iacus S M, et al. Simulation and inference for stochastic differential equations: with r examples: volume 486[M]. Springer, 2008.
- [3] Jum E, Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion[J]. Probab. Math. Statist, 2016, 36(2).
- [4] Deng C S, Liu W. Semi-implicit euler–maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. BIT Numer Math, 2020, 60: 1133-1151.
- [5] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. J Math Anal Appl, 2019, 476(2): 619-636.
- [6] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stoch Process Their Appl, 2009, 119(10): 3238-3252.
- [7] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion, itô calculus, and fokker-planck equation-fractional generalizations[M]. World Scientific, 2018.

- [8] Daley D J, Vere-Jones D, et al. An introduction to the theory of point processes: volume i: elementary theory and methods[M]. Springer, 2003.
- [9] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. J Theor Probab, 2011, 24: 789-820.
- [10] Li X, Liao J, Liu W, et al. Convergence and stability of an explicit method for autonomous time-changed stochastic differential equations with super-linear coefficients[J]. Adv. Appl. Math. Mech, 2023, 15(3): 651-683.