加性噪声驱动的时间变换随机微分方程的数值方法

答辩人：左如春

专业：计算数学

指导教师：刘暐　副研究员

研究方向：常微分方程数值解

2024.09.20

Outline

1. 研究背景与意义
2. 国内外研究现状
3. 研究内容与主要工作
4. 论文创新点与问题
5. 论文进度安排

1. 研究背景与意义

- 时间变换随机过程和时间变换随机微分方程 (SDE) 作为描述亚扩散过程重要工具之一, 在众多领域发挥着重要作用. 包括: 金融模型、生物化学等领域[1].
- 对于时间变换 SDE 的研究, 目前的数值方法包括 Euler 型方法、Milstein 型方法等.
- 对于超线性系数的时间变换布朗运动驱动的 SDE, 若要获得更高的收敛阶, 一般需要采用 Milstein 方法或其他更高阶的数值方法.
- 对于一类可以通过 Lamperti 变换将漂移项转化为满足单调条件的 SDE, 使用 BEM 方法能够使强收敛阶超过 0.5.
- 时间变换的 SDE 的真实解解很少能显式地表达出来, 因此其数值逼近尤为重要.

[1] Marcin Magdziarz, Sebastian Orzel, and Aleksander Weron. Option pricing in subdiffusive Bachelier model. J.Stat. Phys., 145(1):187–203, 2011.

2. 国内外研究现状

- Alfonsi(2013) 单调条件, Lamperti 变换, BEM, 强收敛.
- Neuenkirch, Szpruch(2014) 单边 Lipschitz, Lamperti 变换, BEM, 强收敛.
- Yang, Huang(2021) SIS 模型, Lamperti 变换, 对数 EM, 强收敛.
- Jum, Kobayashi(2016) 全局 Lipschitz, 对偶原则, EM, 强弱收敛.
- Jin, Kobayashi(2019) 全局 Lipschitz, Hölder 连续, 非等距 EM, 强收敛
- Deng, Liu(2020) 单边 Lipschitz, Hölder 连续, 半隐式 EM, 强收敛, 均方稳定.
- Liu, Mao, Tang, Wu(2020) 单边 Lipschitz, Hölder 连续, 对偶原则, 截断 EM, 强收敛.

3. 研究内容与主要工作

3.1 研究内容

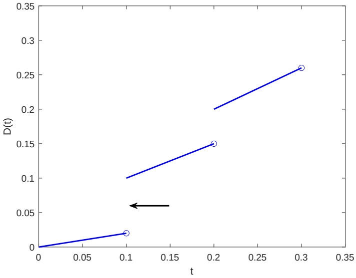

图 3.1: 具有稳定指数 α 的从属 D

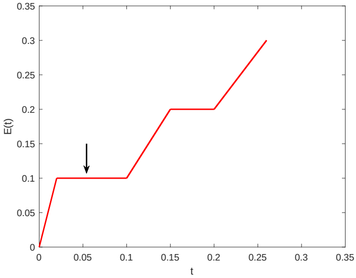

图 3.2: 逆从属 E

对于下面的时间变换 SDE:

$$dy(t) = a(y(t))dE(t) + b(y(t))dB(E(t)),\ t \geq 0,\ y(0) \in S.$$

通过 Lamperti 变换

$$F(x) = \lambda \int^x \frac{1}{b(y)} dy.$$

将乘性噪声转变成加性噪声

$$dx(t) = f(x(t))dE(t) + \lambda dB(E(t)),\ t \geq 0,\ x(0) \in F(S).$$

其中

$$f(x) = \lambda \left(\frac{a(F^{-1}(x))}{b(F^{-1}(x))} - \frac{1}{2} b'(F^{-1}(x)) \right),\ x \in F(S).$$

这里 $t \in S = (l, r)$, 其中 $-\infty \leq l < r \leq \infty$. 对所有 $q > 0$ 有 $\mathbb{E}|x_0|^q < \infty$. 函数 a, b 是 $S \to S$ 的连续可微函数.

3.2 主要工作

经过 Lamperti 变换后的时间变换 SDE, 漂移项系数 f 满足以下条件:

- f 满足单调条件

$$f:\ I \to \mathbb{R}, \quad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x,\ y \in I,\ x \le y,\ f(y) - f(x) \le K(y-x). \tag{3.1}$$

- f 是二阶连续可微的并且满足

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\,|f'(x(t))| + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|f'(x(t))f(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x(t))\right| < \infty. \tag{3.2}$$

在此基础之上, 我们研究一类时间变换 SDE 的 BEM 方法的强收敛阶.

3.2 主要工作

具体工作如下:

- 建立逆从属 $E(t)$ 在 Δt 时间内的期望 $\mathbb{E}\left[\Delta E(t)\right]^n$ 与 Δt 之间的关系.

$$\mathbb{E}[\Delta E(t)]^n \leq C\Delta t^{1+(n-1)\alpha}$$

- 证明真实解和数值解的矩有界.
- 结合 Itô 公式、Cauchy-Schwarz 不等式、BDG 不等式和 Gronwall’s 不等式等证明 BEM 数值方法的强收敛, 并给出强收敛阶.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x(t_i)-x_{t_i}|\right] \leq C\Delta t^{\alpha}$$

- 给出时间变换 SDE 的 BEM 方法的实现代码, 通过时间变换 CIR 和 CEV 过程的数值算例对理论结果进行验.

4. 论文创新点与问题

- 本文通过引入 Lamperti 变换, 将时间变换 SDE 的乘性噪声转化成加性噪声, 方便处理噪声项.
- 在数值方法中, 我们考虑对 t 直接等距离散, 从而得到收敛阶与 α 的关系.
- 由于引入的是对时间 t 的等距离散, 导致取期望时微分项 $dE(t)$ 不能直接放缩, 因此很多经典 SDE 和时间变换 SDE 的结果都无法直接使用.
- 当从属 D 的稳定指数 $\alpha < 0.5$ 时, 收敛阶与预期结果之间相差较大.

5. 论文进度安排

起止时间	论文进度安排
2024.02 - 2024.03	论文定题, 收集、阅读并整理相关文献
2024.04 - 2024.07	完成 $E(t)$ 在等距区间的估计, 并整理
2024.08 - 2024.09	论文撰写、修改、完成开题报告
2024.10 - 2024.11	推导过程和数值模拟总结
2024.12 - 2025.01	毕业论文预答辩
2025.02 - 2025.04	补充、完善论文, 论文定稿
2025.05	毕业论文答辩

请各位老师批评指正！

谢谢!