

# 毕业论文

左如春

2024 年 9 月 12 日

## 摘要

研究 Back-Euler-Maruyama (BEM) 数值逼近一类经过 Lamperti 变换后, 漂移系数线性增长、扩散系数是常数的时变随机微分方程. 证明了 BEM 的强收敛性与逆从属的稳定指数之间的关系, 并讨论收敛速度. 并通过数值模拟验证了理论结果.

**关键词:** 时间变换; 等距离散; 收敛阶; 逆从属.

## 1 Introduction

受到 [1] 的启发, 本文的目的是推导出一个有效的数值逼近一类一维随机微分方程. 这类随机微分方程可以通过 Lamperti 变换, 将漂移项变换成满足单调条件的, 见 [2], 通过 BEM 对变换后的时变 SDE 进行逼近, 再将其变换成原始时变 SDE 的逼近格式.

对于时间变换的随机微分方程, 有关收敛阶的研究, 截止目前已经有很多结果.[3] 研究了非自治的时间变换 McKean-Vlasov 随机微分方程, 并给出 EM 方法的强收敛性和收敛阶.[4] 研究截断 EM 方法来逼近一类具有 Hölder 连续性和超线性增长的非自治随机微分方程, 并证明了强收敛性和收敛阶.[5] 研究一类具有时间变换 Lipschitz 界限下, 包含随机和非随机积分项的时间变换随机微分方程, 并讨论 EM 方法和 Ito-Taylor 方法的强收敛性和收敛阶.[6] 研究一类具有超线性增长的, 包含随机和非随机积分项的时间变换随机微分方程, 并讨论截断 EM 方法的强收敛性和收敛阶. 在 [7] 中证明了对于漂移项和扩散项都满足全局 Lipschitz 时, 可以采用对偶原则, 将时间变换随机微分方程转换成一般随机微分方程, 通过对一般随机微分方程使用 EM 数值格式进行逼近, 进而得到时间变换随机微分方程的强收敛阶. 在 [8] 中将这一思想

运用在漂移项满足非全局 Lipschitz 条件时, 使用半隐式 EM 得到强收敛阶, 并研究了其稳定性. 这解决了一大类可以对偶化的时间变换微分方程的数值格式收敛性问题. 在 [9], 对于不能使用对偶原则的时间变换随机微分方程, 采用一种非等距的离散格式, 并得到强收敛阶. 对于时间变换的随机微分方程, 现在已经有了很多的数值格式, 但是到目前为止这些数值格式, 大多采用的是非等距离散, 对于  $E(t)$  的离散, 通过对  $t$  非等距离散, 使之变成实际上是对  $E(t)$  的等距离散. 而在这篇文章中, 我们将对  $t$  采用等距离散来研究随机微分方程:

$$dX(s) = f(X(s))dE(s) + \sigma dB(E(s)) \quad (1)$$

这样离散, 会引入一个必须面临的困难, 在取期望的时候, 不能再像之前的离散那样, 将微分项的  $dt$  拿出来, 这就引入了不得不解决的麻烦, 对于  $dE(t)$  的分析. [10] 和 [11] 中对于 Cox 这个更新过程的描述, 对研究  $E(t)$  的期望起到了关键性作用.

## 2 Preliminaries

在这篇文章中,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  表示完备概率空间,  $D = (D_t)_{t \geq 0}$  表示具有 Laplace 指数  $\psi$ , 从 0 开始的从属, 其中  $\psi$  的被杀率是 0 且具有 Lévy 测度  $\nu$ ; 即  $D$  是具有开始于 0 的 càdlàg 路径的一维非减 Lévy 过程, 其 Laplace 变换是:

$$\mathbb{E}[e^{-sD_t}] = e^{-t\psi(s)}, \quad \text{其中} \quad \psi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-sy}) \nu(dy), \quad s > 0,$$

并且  $\int_0^\infty (y \wedge 1) \nu(dy) < \infty$ , 我们考虑 Lévy 测度  $\nu$  是无穷的情况, 即  $\nu(0, \infty) = \infty$ , 这意味着复合泊松从属不在我们的考虑范围中. 令  $E = (E(t))_{t \geq 0}$  是  $D$  的逆, 即:

$$E(t) := \inf\{u > 0; D_u > t\}, \quad t \geq 0.$$

我们称  $E$  是逆从属, 注意  $E$  是连续且非递减的. 一般我们假设  $B(t)$  和  $D(t)$  是相互独立的. 随机过程  $B(E(t))$  被称作时间变换的布朗运动. 我们注意到  $D(t)$  的跳跃部分和  $E(t)$  的平坦部分相互对应的. 又由于  $E(t)$  的平坦部分, 导致  $B(E(t))$  在这一部分也是平坦的, 因此  $B(E(t))$  可以被理解成是一种次扩散.

令  $S = (l, r)$ , 其中  $-\infty \leq l < r \leq \infty$ , 函数  $a, b$  是  $S \rightarrow S$  的连续可微函数. 考虑下面的 SDE:

$$dy(t) = a(y(t))dE(t) + b(y(t))dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) \in S$$

并且假设它在  $S$  中有唯一强解, 即

$$\mathbb{P}(y(t) \in S, t \geq 0) = 1.$$

如果  $b(x) > 0$  对所有的  $x \in S$  都成立, 那么我们可以使用 Lamperti 变换

$$F(x) = \lambda \int^x \frac{1}{b(y)} dy \quad (2)$$

对于某些  $\lambda > 0$ . 并且  $F^{-1} : F(S) \rightarrow S$  是被良好定义的, 令  $x(t) = F(y(t))$  利用 [12] 中的时间变换 Itô 公式可以得到:

$$dx(t) = f(x(t))dE(t) + \lambda dB(E(t)) \quad t \geq 0, \quad x(0) \in F(S)$$

其中

$$f(x) = \lambda \left( \frac{a(F^{-1}(x))}{b(F^{-1}(x))} - \frac{1}{2} b'(F^{-1}(x)) \right), \quad x \in F(S),$$

$F(D) = (F(l), F(r))$ . 这种变换可以将扩散项的非线性项转换到漂移项中

**Assumption 2.1.** 令  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ , 并且假设时间变换的  $SDE(1)$  在  $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$  有唯一强解, 即:

$$\mathbb{P}(x(t) \in (\alpha, \beta), t \geq 0) = 1.$$

**Assumption 2.2.** 令  $c \in [-\infty, +\infty)$ ,  $I = (c, +\infty)$ ,  $d \in I$  是区间中任意的一点. 假设漂移项系数  $f$  满足下述单调性:

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exists K \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I, x \leq y, f(y) - f(x) \leq K(y - x). \quad (3)$$

对于 (1) 中解的存在唯一性的证明可以参考 [12] 中漂移性满足全局 Lipschitz 条件的证明.

**Assumption 2.3.** 令  $T > 0$ , 假设漂移项系数  $f$  是二阶连续可微的并且满足:

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |f'(x(t))| + \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| f(x(t))' f(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x(t)) \right| < \infty. \quad (4)$$

从 [12] 引入下面的三个关于时间变换的引理

**Lemma 2.4** (第一变量变换公式). 令  $B$  是一维标准的布朗运动. 如果  $H \in L(B(t), \mathcal{F}_t)$ , 则  $H_{E(t-)} \in L(B_{E(t)}, \mathcal{F}_{E_t})$ . 此外, 对于所有  $t \geq 0$ , 几乎处处有

$$\int_0^{E_t} H_s dB(s) = \int_0^t H_{E(s-)} dB_{E(s)}.$$

**Lemma 2.5** (第二变量变换公式). 令  $B$  是一维标准的布朗运动, 设  $D$  和  $E$  是满足  $[D \rightarrow E]$  或  $[D \leftarrow E]$  的. 假设  $B$  与  $E$  同步. 如果  $K \in L(B_{E(t)}, \mathcal{F}_{E_t})$ , 则  $(K_{D(t-)}) \in L(B(t), \mathcal{F}_{E(D_t)})$ . 此外, 对于所有  $t \geq 0$ , 几乎处处有

$$\int_0^t K_s dB_{E(s)} = \int_0^{E(t)} K_{D(s-)} dB(s).$$

**Lemma 2.6** (Itô 公式). 令  $B$  是一维标准的布朗运动. 令  $D$  和  $E$  满足  $[D \rightarrow E]$  或  $[D \leftarrow E]$ .  $X$  是由下述 SDE 定义的随机过程:

$$X(t) := \int_0^t A(s) ds + \int_0^t F(s) dE(s) + \int_0^t G(s) dB(E(s))$$

其中  $A(s) \in L(t, \mathcal{F}_{E(t)})$ ,  $F(s) \in L(E(t), \mathcal{F}_{E(t)})$ , 以及  $G(s) \in L(B(E(s)), \mathcal{F}_{E(t)})$ . 如果  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , 那么  $f(X(t))$  是  $\mathcal{F}_{E(t)}$ -半鞅, 对于所有的  $t \geq 0$ , 都有

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(0) &= \int_0^t f'(X(s)) A(s) ds + \int_0^{E(t)} f'(X(D(s-))) F(D(s-)) ds \\ &\quad + \int_0^{E(t)} f'(X(D(s-))) G(D(s-)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^{E(t)} f''(X(D(s-))) \{G(D(s-))\}^2 ds. \end{aligned}$$

**Lemma 2.7.** 令  $\Delta t > 0, g_n, \lambda_n \in \mathbb{R}, \eta > 0, a_1 = 0$ , 再假设  $1 - \eta\Delta t > 0, 1 + \lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}$ , 那么如果

$$a_{n+1} \leq a_n(1 + \lambda_n) + \eta a_{n+1} \Delta t + g_{n+1}$$

则下面的不等式成立:

$$a_n \leq \frac{1}{(1 - \eta\Delta t)^n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \eta\Delta t)^j g_{j+1} \prod_{l=j+1}^{n-1} (1 + \lambda_l) \quad (5)$$

下面的引理对于证明本文主要定理起着关键性的作用.

**Lemma 2.8.** 对于任意给定的  $0 = t_0 < ih < t_1 < t_2 < \dots < t_n < (i+1)h$ , 都有:

$$\mathbb{E} \left[ \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 dE(t_1) \dots dE(t_{n-1}) dE(t_n) \right] \leq Ch^{1+(n-1)\beta} \quad (6)$$

, 其中  $C$  是与  $h$  无关的常数.

**Proof:** 现在, 在  $[0, \infty)$  上引入随机测度  $\Pi$ , 定义为  $\Pi((s, t]) = E(t) - E(s)$ , 其中  $t > s \geq 0$ . 令  $\{C(t)\}_{t \geq 0}$  为由  $\Pi$  驱动的 Cox 过程, 即在条件  $\Pi = \lambda$  下,  $\{C(t)\}$  的分布与强度为  $\lambda$  的非齐次泊松过程等价. 注意, 根据 [13],  $\{C(t)\}$  是具有更新函数的更新过程:

$$u(t) = \mathbb{E}[C(t)] = \mathbb{E}[E(t)] = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (7)$$

对于更新过程  $C(t)$ , 参见 [10], 可以得到

$$\mathbb{E}[dC(t_n) \dots dC(t_1)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i-1}) dt_i$$

其中  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . 由于 Cox 过程  $C(t)$  的阶乘矩等于其驱动测度  $\Pi$  的普通矩, 参见 [10] 我们得到

$$\mathbb{E}[dE(t_n) \dots dE(t_1)] = \prod_{i=1}^n u'(t_i - t_{i-1}) dt_i.$$

因此:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E} \left[ \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 dE(t_1) \dots dE(t_{n-2}) dE(t_{n-1}) dE(t_n) \right] \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} 1 \mathbb{E} [dE(t_1) \dots dE(t_{n-2}) dE(t_{n-1}) dE(t_n)] \\ &= \frac{\alpha^n}{\Gamma^n(\alpha + 1)} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_2} \prod_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n \end{aligned}$$

下面单独考虑积分项:

$$I_1 = \int_{ih}^{t_2} (t_2 - t_1)^{\alpha-1} t_1^{\alpha-1} dt_1$$

做如下变换, 令  $t_1 = ih + s_1 h$ , 同时  $t_2 = ih + s_2 h$ , 其中  $h$  是步长, 因此  $s_1, s_2 \in [0, 1]$ , 注意由于我们不考虑时间在原点处, 因此这里的  $i = \frac{T}{h}$ , 这里的  $T$  是一个时间范围, 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} h^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} h ds_1 \\ &= h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih + s_1 h)^{\alpha-1} ds_1 \end{aligned}$$

由于  $(ih + s_1 h)^{\alpha-1}$  关于  $s_1$  在  $[0, 1]$  是单调递减的, 并且积分  $I_n$  中, 被积函数和积分区域都是正的, 因此

$$\begin{aligned} I_1 &\leq h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} (ih)^{\alpha-1} ds_1 \\ &= T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1 \end{aligned}$$

令  $w_1 = s_2 - s_1$ , 于是

$$I_1 \leq T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_2} (s_2 - s_1)^{\alpha-1} ds_1 = T^{\alpha-1} h^\alpha \int_0^{s_{n2}} w_1^{\alpha-1} dw_1 = \frac{T^{\alpha-1} s_2^\alpha}{\alpha} h^\alpha$$

因此:

$$I \leq Ch^\alpha \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_3} \prod_{i=3}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n$$

同理, 分析如下积分:

$$I_2 = \int_{ih}^{t_3} (t_3 - t_2)^{\alpha-1} dt_2 \leq Ch^\alpha$$

因此:

$$I \leq Ch^{2\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{ih}^{t_n} \int_{ih}^{t_{n-1}} \dots \int_{ih}^{t_4} \prod_{i=4}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha-1} dt_3 \dots dt_{n-1} dt_n$$

如此进行迭代, 我们得到:

$$I \leq Ch^{(n-1)\alpha} \int_{ih}^{(i+1)h} 1 dt_1 \leq Ch^{1+(n-1)\alpha}$$

□

### 3 Main results

对于随机微分方程 (1), 它的 BEM 数值格式是:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_{i+1}})\Delta E_i + \sigma \Delta B_{E_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad X_0 = X(0) \quad (8)$$

其中  $\Delta E_i = E(t_{i+1}) - E(t_i)$  以及  $\Delta B_{E_i} = B(E(t_{i+1})) - B(E(t_i))$ .

**Theorem 3.1.** 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 令  $\epsilon < T1 < T2$ , 在假设 *Assumption 2.1, Assumption 2.2* 和 *Assumption 2.3* 的条件下, 存在常数  $C$ , 使得下面的不等式成立:

$$\mathbb{E}[|X(t_i) - X_{t_i}|] \leq C\Delta t^\alpha, \quad i = \lceil T1/\Delta t \rceil, \lceil T1/\Delta t \rceil + 1 \dots \lceil T2/\Delta t \rceil$$

**Proof:** 由于第一变量变换和第二变量变换公式 Lemma 2.4, Lemma 2.5 的成立, 使得我们可以考虑 (1) 在  $[t_i, t_{i+1})$  的积分:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(s))dE(s) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(s)) \quad (9)$$

等价于

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dX(s) = \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} f(X(D(s)))ds + \int_{E_{t_i}}^{E_{t_{i+1}}} \sigma dB(s) \quad (10)$$

针对于漂移项  $f(X(D(s-)))$ , 下面等式恒成立:

$$\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-))) - f(X(D(t-))) dt = \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_{D(t-)}^{D(t_{i+1}-)} df(X(s)) dt \quad (11)$$

对于  $df(X(s))$ , 由 Lemma 2.6 的时间变换 Itô 公式:

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(0) &= \int_0^{E(t)} f(X(D(s-))) f'(X(D(s-))) + \frac{\sigma^2}{2} f''(X(D(s-))) ds \\ &\quad + \int_0^{E(t)} \sigma f'(X(D(s-))) dB(s) \end{aligned}$$

于是 (11) 变成

$$\begin{aligned} &\int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}-))) - f(X(D(t-))) dt \\ &= \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \left( f(X(D(s))) f'(X(D(s))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds dt \quad (12) \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s))) dB(s) dt. \end{aligned}$$

由 (1) 与 (12), 以及 [14, Theorem 3.1] 可以得到

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= X(t_i) + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} f(X(D(t_{i+1}))) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \left( f(X(D(s))) f'(X(D(s))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds dt \\ &\quad + \int_{E(t_i)}^{E(t_{i+1})} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(D(s))) dB(s) dt \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \left( f(X(D(s))) f'(X(D(s))) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(D(s))) \right) ds dE(t) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{E(t)}^{E(t_{i+1})} \sigma f'(X(D(s))) dB(s) dE(t) \\ &= X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_i)) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left( f(X(s)) f'(X(s)) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t)$$

因此

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X(t_{i+1})) dE(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dB(E(t)) + R_i \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} R_i = & - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left( f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t) \\ & - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \end{aligned}$$

将  $R_i$  分解成  $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ , 其中:

$$\begin{aligned} R_s^{(1)} &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \left( f(X(s))f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(s)) \right) dE(s) dE(t). \\ R_s^{(2)} &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_t^{t_{i+1}} \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \end{aligned}$$

和离散格式相减, 即 (13)-(8) 得到:

$$X(t_{i+1}) - X_{t_{i+1}} = X(t_i) - X_{t_i} + (f(X(t_{i+1})) - f(X_{t_{i+1}}))\Delta E_i + R_i \quad (14)$$

令  $e_i = X(t_i) - X_{t_i}$  由 Assumption 2.2 得到:

$$(1 - K_1 \Delta E_s) e_{s+1} \leq e(s) + R_s, \quad \text{其中 } s = \lceil T1/\Delta t \rceil, \lceil T1/\Delta t \rceil + 1 \dots \lceil T2/\Delta t \rceil \quad (15)$$

定义  $\gamma_l = 1 - K_1 \Delta E_l$ ,  $N_1 = \lceil T1/\Delta t \rceil$  以及  $N_2 = \lceil T2/\Delta t \rceil$ , 由  $E$  的次线性性质, 我们可以取  $(K_1 \Delta E_l)_{max} = K' \Delta E \leq K'' \Delta t$ , 从而可以得到

$$\prod_{l=N_1}^{N_2} \gamma_l^{-1} < \frac{1}{(1 - C \Delta t)^{N_2 - N_1}} < \infty \quad (16)$$

由 Lemma 2.7, 我们可以得到

$$e_{N_2} \leq \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j \prod_{l=j}^{N_2} \gamma_l^{-1} \leq C \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j$$

于是结合 (16), 我们可以得到

$$\mathbb{E}|e_{N_2}| \leq C \mathbb{E} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(1)} \right| + C \mathbb{E} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)} \right|$$



下面先考虑第一项, 由 Lemma 2.8 和 Assumption 2.3, 可以得到

$$\mathbb{E}|R_j^{(1)}| \leq C\mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t 1 dE s dE t \right] \leq C\Delta t^{1+\alpha} \quad (17)$$

于是

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(1)} \right| \leq C \sum_{N_1}^{N_2} \mathbb{E} |R_j^{(1)}| \leq C \sum_{j=N_1}^{N_2} \Delta t^{1+\alpha} \leq C\Delta t^\alpha \quad (18)$$

因为

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [R_k^{(2)} | \mathcal{F}_{k\Delta t}] &= \mathbb{E}_D \mathbb{E}_B \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \right] \\ &= \mathbb{E}_D \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}_B \int_{t_i}^t \sigma f'(X(s)) dB(E(s)) dE(t) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)}$$

是鞅. 我们知道由 BDG 不等式和 Lemma 2.8 可以得到:

$$\mathbb{E}[dB_E dE]^2 = \mathbb{E}[(dB_E)^2 (dE)^2] = \mathbb{E}_D[(dE)^2 \mathbb{E}_B(dB_E)^2] \leq C\mathbb{E}_D[dE]^3 \leq C\Delta t^{1+2\alpha} \quad (19)$$

于是对于第二项, 由 BDG 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可以得到:

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} R_j^{(2)} \right| \leq C\mathbb{E} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} (R_j^{(2)})^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\sum_{j=N_1}^{N_2} \mathbb{E}(R_j^{(2)})^2} \leq C \sqrt{\sum_{j=N_1}^{N_2} \Delta t^{1+2\alpha}} \leq C\Delta t^\alpha$$

综上所述,

$$\mathbb{E}[e_n] \leq C\Delta t^\alpha$$

□

## 4 Numerical examples

通过下述方法得到  $D(t)$  的数值模拟格式:

$$D(0) = 0,$$

$$D(\delta n) = D_\alpha(\delta(n-1)) + \delta^{1/\alpha} \xi_n$$

其中  $n = 1, 2, 3 \dots$  并且  $\xi_n$  是独立同分布的完全偏斜的  $\alpha$  稳定随机变量,  $\xi_n$  的实现过程如下:

$$\xi_n = \frac{\sin(\alpha(V + c_1))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(V - \alpha(V + c_1))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

其中  $c_1 = \frac{\pi}{2}$ , 随机变量  $V$  是  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上的均匀分布,  $W$  是均值为 1 的指数分布.

## 4.1 Examples

在这一节中, 我们将主要结论应用到实际例子中.

### 4.1.1 CIR Process With Time-Changed Brownian Motion

回忆时间变换的 CIR 过程

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma\sqrt{y(t)}dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) > 0. \quad (20)$$

如果  $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ , 那么  $D = (0, \infty)$  并且 Assumption 2.1 在  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$  是成立的. 另外, 使用 Itô 公式  $X(t) = F(y(t))$ , 其中  $F$  是由 (2) 定义, 即对时间变换的 CIR 过程进行 Lamperti 变换可以得到

$$dX(t) = f(X(t))dE(t) + \frac{1}{2}\sigma dB(E(t)), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \sqrt{y(0)} \quad (21)$$

其中

$$f(X) = \frac{1}{2}\kappa(\theta_v X^{-1} - X), \quad X > 0 \quad (22)$$

其中  $\theta_v = \theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa}$ , 并且 BEM 数值格式如下

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(X_{t_{i+1}})\Delta E_i + \frac{1}{2}\sigma\Delta B_{E_i}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

观察到

$$f'(X) = -\frac{1}{2}\kappa(\theta_v X^{-2} + 1) \quad (24)$$

以及

$$f(X)f'(X) + \frac{\sigma^2}{2}f''(X) = -\frac{\kappa^2}{4}(\theta_v^2 X^{-3} - X) + \frac{1}{2}\kappa\theta_v X^{-3}\sigma^2. \quad (25)$$

因此为了满足 Assumption 2.3, 只需要满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X(t)^{-3}] = \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[y(t)^{-\frac{3}{2}}] < \infty. \quad (26)$$

对于时间变换的 CIR 过程  $y(t)$  的矩有界, 即

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[y(t)^q] < \infty \quad \text{for } q > -\frac{2k\theta}{\sigma^2}, \quad (27)$$

下面验证, 对于由时间变换的布朗运动驱动的 CIR 过程 (20) 的精确解矩有界.

**Proposition 4.1.** 对于由时间变换的布朗运动驱动的 CIR 过程 (20), 其中  $y_0 > 0, 1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$ , 都存在一个常数  $C$  使得

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[(y(t))^{-p}] \leq C(1 + y(0)^{-p})$$

**Proof:** 定义停时  $\tau_n = \inf\{0 < s \leq T; y(s) \leq 1/n\}$ , 通过 Itô 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B[(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] &= y(0)^{-p} - p \mathbb{E}_B \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{K(\theta - y(s))}{(y(s))^{p+1}} dE(s) \right] \\ &\quad + p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E}_B \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{1}{(y(s))^{p+1}} dE(s) \right] \\ &\leq y(0)^{-p} + pK \int_0^t \mathbb{E}_B \left( \frac{1}{(y(s \wedge \tau_n))^p} \right) dE(s) \\ &\quad + \mathbb{E}_B \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{p \left( \frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta \right)}{(y(s))^{p+1}} dE(s) \right] \end{aligned}$$

通过计算可以找到正数  $\underline{C}$  使得, 当  $\frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta < 0$  时, 对于任意的  $y(0) = x > 0$ , 都有

$$\frac{p \left( \frac{(p+1)\sigma^2}{2} - K\theta \right)}{x^{p+1}} \leq \underline{C}$$

因此

$$\mathbb{E}_B[(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq y(0)^{-p} + \underline{C}E(T) + pK \int_0^t \sup_{r \in [0, s]} \mathbb{E}_B[(y(r \wedge \tau_n))^{-p}] dE(s)$$

于是由 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_B[(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq (y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))$$

两边同时取  $\mathbb{E}_D$  并使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] &\leq \mathbb{E}[(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T))^2] \mathbb{E}[\exp(2pKE(T))]} \end{aligned}$$

从 [7] 可以得到

$$\mathbb{E}[E^n(t)] = \frac{n!}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha} \quad (28)$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda E(t)}] < \infty \quad (29)$$

其中  $\lambda \in \mathbb{R}, t > 0$ . 最后, 让  $n \rightarrow +\infty$ , 我们完成了这个证明.  $\square$

**Remark 4.2.** 在这里只是证明了当  $1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$  的时候, 矩的存在性, 实际上更可以证明  $p < \frac{2K\theta}{\sigma^2}$ , 但是证明起来过于复杂, 这里就不在说明, 对于我们的结果已经够用了.

对于 Assumption 2.3, 可以验证只需要保证  $1 < \frac{4}{3}\frac{k\theta}{\sigma^2}$  成立即可, 而这个区间可以被  $1 < p < \frac{2K\theta}{\sigma^2} - 1$  包含在内, 因此只需要保证  $p$  在后者这个区间即可. 至于 Assumption 2.2, 在  $(0, \infty)$  中很容易可以验证存在这样的  $\kappa$  使之成立. 因此由 Theorem 3.1 可以得到, 对于时间变换的 CIR 过程, 使用 BEM 数值格式的强收敛阶是  $\alpha$

#### 4.1.2 数值实验

在我们的数值实验中, 我们关注端点  $T = 1$  处的  $L_1$  误差, 因此我们令

$$e_T^i = \mathbb{E} |X_T^{\delta_{15}} - X_T^{\delta_i}|$$

其中  $X_T^{\delta_i}$  是步长为  $\delta_i$  时  $T$  处的模拟值,  $\delta_i = 2^{-i}$ , 对于我们的数值实验, 取  $\theta = 0.125, \kappa = 2$  以及  $\sigma = 0.5$ , 采用蒙德卡洛方法,

$$e_T^i \approx \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10^3} |X_T^{\delta_{15}} - X_T^{\delta_i}|.$$

选择步长为  $2^{-15}$  作为参考, 通过  $2^{-11}, 2^{-10}, 2^{-9}, 2^{-8}$  的步长来估计  $L_1$  误差.

#### 4.1.3 CEV Process With Time-Changed Brownian Motion

另外一个比较常用的金融模型是 CEV 模型, 下面是由时变布朗运动驱动的 CEV 模型

$$dy(t) = \kappa(\theta - y(t))dE(t) + \sigma y(t)^\alpha dB_{E(t)} \quad (30)$$

其中  $0.5 < \alpha < 1, \kappa, \theta, \sigma > 0$ . 通过变换  $X(t) = F(y(t))$  的变换之后, 其中  $F$  是由 (2) 定义, 我们可以得到 Assumption 2.2 在  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$  下, 是成立的, 此时

$$dX(t) = f(X(t))dt + (1 - \alpha)\sigma dw(t)$$

其中

$$f(X) = (1 - \alpha) \left( \kappa \theta X^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \kappa X - \frac{\alpha \sigma^2}{2} X^{-1} \right), \quad X > 0.$$

同时我们需要验证另一个 Assumption 2.3. 因为  $\alpha > 0.5$ , 于是  $\frac{1}{1-\alpha} > 2$ , 因此

$$f'(X) = -\alpha \kappa \theta X^{-\frac{1}{1-\alpha}} - (1 - \alpha) \kappa + (1 - \alpha) \frac{\alpha \sigma^2}{2} X^{-2}, \quad X > 0$$

同时我们又有

$$f''(X) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \kappa \theta X^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - (1 - \alpha) \alpha \sigma^2 X^{-3}.$$

下面验证, 对于由时间变换的布朗运动驱动的 CEV 过程 (30) 的精确解矩有界.

**Proposition 4.3.** 对于由时间变换的布朗运动驱动的 CEV 过程 (30), 其中  $X_0 > 0$ , 对于任意的  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  和任意的  $p > 0$ , 都存在一个常数  $C$  使得

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [(y(t))^{-p}] \leq C(1 + y(0)^{-p})$$

**Proof:** 定义停时  $\tau_n = \inf\{0 < s \leq T; y(s) \leq 1/n\}$ , 通过 Itô 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] &= y(0)^{-p} - p \mathbb{E}_B \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{K(\theta - y(s))}{(y(s))^{p+1}} dE(s) \right] \\ &\quad + p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E}_B \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{1}{(y(s))^{p+2(1-\alpha)}} dE(s) \right] \\ &\leq y(0)^{-p} + pK \int_0^t \mathbb{E}_B \left( \frac{1}{(y(s \wedge \tau_n))^p} \right) dE(s) \\ &\quad + \mathbb{E}_B \left[ \int_0^{t \wedge \tau_n} \left( p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{(y(s))^{p+2(1-\alpha)}} - p \frac{K\theta}{(y(s))^{p+1}} \right) dE(s) \right] \end{aligned}$$

可以找到正数  $C$  使得, 对于任意的  $y(0) = x > 0$ , 都有

$$\left( p(p+1) \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{x^{p+2(1-\alpha)}} - p \frac{K\theta}{x^{p+1}} \right) \leq C$$

通过计算可以得到,  $\underline{C} = p(2\alpha - 1) \frac{\sigma^2}{2} \left[ (p+2(1-\alpha)) \frac{\sigma^2}{2K\theta} \right]^{\frac{p+2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$  是最小的上界. 因此

$$\mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n))^{-p}] \leq y(0)^{-p} + \underline{C} E(T) + pK \int_0^t \sup_{r \in [0, s]} \mathbb{E}_B [(y(r \wedge \tau_n))^{-p}] dE(s)$$

于是由 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_B [(y(t \wedge \tau_n)^x)^{-p}] \leq (y(0)^{-p} + \underline{C} E(T)) \exp(pK E(T))$$

两边同时取  $\mathbb{E}_D$  并使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [(y(t \wedge \tau_n)^x)^{-p}] &\leq \mathbb{E} [(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T)) \exp(pKE(T))] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} [(y(0)^{-p} + \underline{C}E(T))^2] \mathbb{E} [\exp(2pKE(T))]} \end{aligned}$$

从 [7] 可以得到

$$\mathbb{E}[E^n(t)] = \frac{n!}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha} \quad (31)$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda E(t)}] < \infty \quad (32)$$

其中  $\lambda \in \mathbb{R}, t > 0$ . 最后, 让  $n \rightarrow +\infty$ , 我们完成了这个证明.  $\square$

由 Lamperti 变换可知,  $X(t)$  的逆阶矩可以  $y(t)$  的逆阶矩控制, 于是 Assumption 2.3 成立. 因此根据 Theorem 3.1 可以得到由时间变换布朗运动驱动的 CEV 过程的收敛阶是  $\alpha$

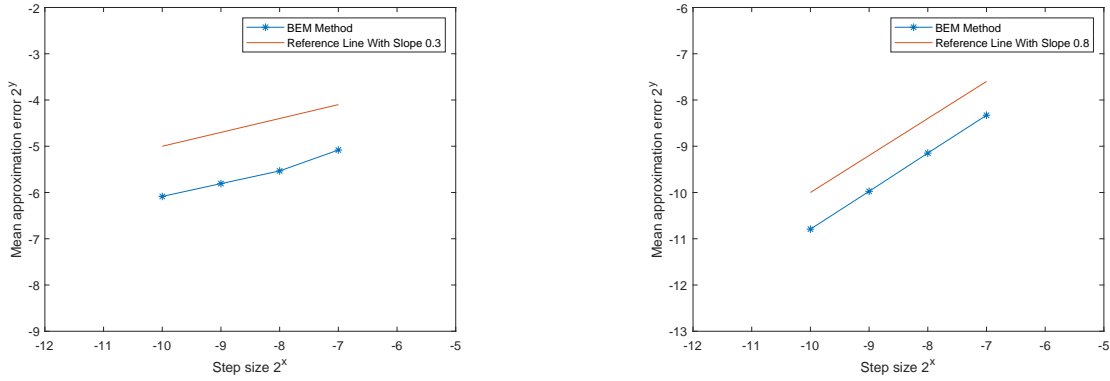


图 1: 时变 CIR 过程的 BEM 方法的  $L_1$  误差, 左图是  $\alpha = 0.3$ , 右图是  $\alpha = 0.8$

## A 附录 A

### 参考文献

- [1] Alfonsi A. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process[J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(2): 602 -607.
- [2] Iacus S M, et al. Simulation and inference for stochastic differential equations: with r examples: volume 486[M]. Springer, 2008.

- [3] Wen X, Li Z, Xu L. Strong approximation of non-autonomous time-changed mckean–vlasov stochastic differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2023, 119: 107122.
- [4] Liu W, Mao X, Tang J, et al. Truncated euler-maruyama method for classical and time-changed non-autonomous stochastic differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 153: 66-81.
- [5] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of time-changed stochastic differential equations involving drifts with random and non-random integrators[J]. BIT Numerical Mathematics, 2021, 61(3): 829-857.
- [6] Li X, Liao J, Liu W, et al. Convergence and stability of an explicit method for autonomous time-changed stochastic differential equations with super-linear coefficients[J]. ADVANCES IN APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS, 2023, 15(3): 651-683.
- [7] Jum E, Kobayashi K. A strong and weak approximation scheme for stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion[A]. 2014.
- [8] Deng C S, Liu W. Semi-implicit euler–maruyama method for non-linear time-changed stochastic differential equations[J]. BIT Numerical Mathematics, 2020, 60: 1133-1151.
- [9] Jin S, Kobayashi K. Strong approximation of stochastic differential equations driven by a time-changed brownian motion with time-space-dependent coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 476(2): 619-636.
- [10] Daley D J, Vere-Jones D, et al. An introduction to the theory of point processes: volume i: elementary theory and methods[M]. Springer, 2003.
- [11] Magdziarz M. Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2009, 119(10): 3238-3252.
- [12] Umarov S, Hahn M, Kobayashi K. Beyond the triangle: Brownian motion[J]. Ito calculus, and Fokker-Planck equation-fractional generalisations, 2018.
- [13] Kingman J. On doubly stochastic poisson processes[C]//Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society: volume 60. Cambridge University Press, 1964: 923-930.
- [14] Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations[J]. Journal of Theoretical Probability, 2011, 24: 789-820.