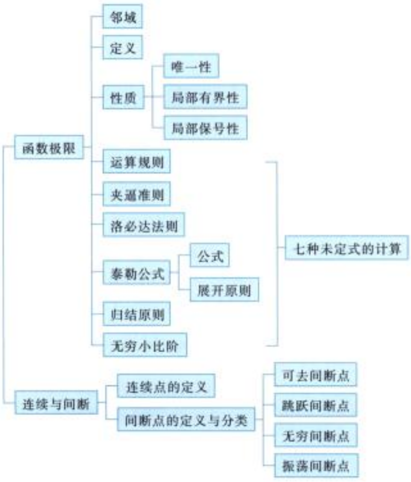
张3

第3讲 函数极限与连续性

基础知识结构



基础内容精讲

一、函数极限

1. 邻域

(1)一维的情形.

邻域 数轴上以点 x_0 为中心的任何开区间称为**点 x_0 的邻域**，记作 $U(x_0)$.

δ 邻域 设 x_0 是数轴上一个点，δ 是某一正数，则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x \mid |x-x_0|<\delta\},$$

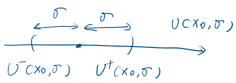
其中点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

去心 δ 邻域 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$：$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

左、右 δ 邻域 $\{x \mid 0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的**右 δ 邻域**，记作 $U^+(x_0,\delta)$；$\{x \mid 0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的**左 δ 邻域**，记作 $U^-(x_0,\delta)$.

1 dim:

$\mathring{U}(x_0,\delta)$

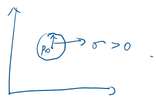


(2)二维的情形.

δ 邻域 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为**点 P_0 的 δ 邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\} \text{或} U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

2 dim



$U(p_0,\delta)=\{p \mid |pp_0|<\delta\}=U(p_0)$

去心 δ 邻域 点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$. 特别指出，如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

δ 邻域的几何意义 $U(P_0,\delta)$ 表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

邻域与区间(区域) 邻域当然属于区间(区域)的范畴，但事实上，邻域通常表示"一个局部位置"，比如"点 x_0 的 δ 邻域"，就可以称为"点 x_0 的附近". 于是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某 δ 邻域内有定义也就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，这个"附近"到底有多近多远，既难以说明也没有必要说明. 有例为证，2007 年有一道考研数学题如下：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

> **【注】** 关于邻域的一组概念非常重要，因为这涉及我们将要"在一个局部位置"细致地研究问题.

2. 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若存在常数 A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

$x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

写成"$\varepsilon-\delta$ 语言"：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

> **【注1】** 这里 x 的趋向方式要比数列问题多得多，对于 $x\to x_0$，既要考虑 x 从 x_0 的左侧(小于 x_0)无限接近 x_0，即 $x\to x_0^-$，也要考虑 x 从 x_0 的右侧(大于 x_0)无限接近 x_0，即 $x\to x_0^+$；对于 $x\to\infty$，既包括 $x\to-\infty$，也包括 $x\to+\infty$，不再一一列出. 读者应学会写出函数极限的精确定义，提示一下：对于 $x\to\infty$ 时的极限，其"$\varepsilon-X$ 语言"为
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0, \text{当} |x|>X \text{时，有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$x\to\infty \begin{cases} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases}$

> **【注2】** (1)函数的单侧极限.
>
> 若当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记为
>
> $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$
>
> 若当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**，记为
>
> $$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$
>
> (2)函数极限存在的充要条件.
>
> $$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A, \text{且} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,$$
>
> $$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x), \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)=A$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} f(x)=A+\alpha(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

3. 函数极限的性质

唯一性 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么极限唯一.

局部有界性 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在正常数 M 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

局部保号性 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$). $\min\{\frac{A}{2},\frac{3A}{2}\}<f(x)<\max\{\frac{A}{2},\frac{3A}{2}\}$.

> **【注】 推论** 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $\leqslant0$)且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant0$(或 $\leqslant0$).

4. 极限运算规则

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

①$\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim g(x)=kA\pm lB$，其中 k,l 为常数；

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$，特别地，若 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n;$$

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

5. 夹逼准则

如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件：

①$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

②$\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$.

则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$.

【注】 常见的一个问题：设任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim f(x)$ 是否一定存在？答案是否定的. $\lim[g(x)-\varphi(x)]$ 存在并不能说明 $\lim g(x)$，$\lim\varphi(x)$ 都存在，从而也不能保证 $\lim f(x)$ 存在.

例如，当 $x>0$ 时，取 $\varphi(x)=x+\frac{1}{x+1}$，$f(x)=x+\frac{2}{x+1}$，$g(x)=x+\frac{3}{x+1}$，则 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

6. 洛必达法则

洛必达

(1661—1704)

法则一 设①当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

② $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x|>X$，此时 X 为充分大的正数）存在，且 $F'(x)\neq0$；

③ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$）存在或无穷大，

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$）.

法则二 设①当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大；

② $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x|>X$，此时 X 为充分大的正数）存在，且 $F'(x)\neq0$；

③ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$）存在或无穷大，

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$）.

【注】（1）一般说来，洛必达法则是用来计算"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式极限的，不是"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型，就不能用洛必达法则.

（2）如果极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属于"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型，且 $f'(x)$，$F'(x)$ 继续满足洛必达法则的条件，则可以继续使用洛必达法则，即 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}$.

（3）如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不为 ∞，不能推出 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 不存在也不为 ∞，简单一点说就是：

对于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$，**"右存在，则左存在；但左存在，并不意味着右一定存在"**. 比如说，极限

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

存在，而如果使用洛必达法则，会有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),$$

这个极限显然不存在. 这是一个很细致、很隐蔽的问题，稍不注意就可能出错.

L'Hospital 通过右存在来推左存在

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{x'}\neq\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

7. 泰勒公式

泰勒

(1685—1731)

泰勒公式是极限计算的重要工具（其来源见第 6 讲"基础内容精讲"的定理 9）.

第一，要将以下几个重要函数的泰勒公式熟稔于心（$x\to0$）：

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$， $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，

$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$， $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$， $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$.

【注】 从数学命题的角度，对以上公式进行处理，可得到一组"差函数"的等价无穷小代换式：如 $x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，则 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3\ (x\to0)$，同理有 $\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3\ (x\to0)$，$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3\ (x\to0)$，$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}\ (x\to0)$ 等，并可将这些公式广义化，如第一个公式广义化为狗 $-\sin$ 狗 $\sim\frac{1}{6}$(狗)^3（狗 $\to0$），其余类似.

$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+o(x^2)$

第二，要掌握高阶无穷小的计算规则，详见下面的"9. 无穷小比阶".

第三，也是最关键的一点，用泰勒公式求极限时，函数应展开到 x 的几次幂？

（1）$\frac{A}{B}$ 型，适用"上下同阶"原则.

具体说来，如果分母（或分子）是 x 的 k 次幂，则应把分子（或分母）展开到 x 的 k 次幂，可称为"上下同阶"原则.

例如，为了计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$，把 $\sin x$ 泰勒展开，一般可写成如下三种形式：

① $\sin x=x+o(x)$；② $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$；③ $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$.

根据"上下同阶"原则，①式展开得"不够"，③式展开得"过多"，②式正符合要求. 于是，

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

（2）$A-B$ 型，适用"幂次最低"原则.

具体说来，即将 A，B 分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止.

例如，已知当 $x\to0$ 时，$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小，求 a，b.

用泰勒公式，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

显然，将 $\cos x$，$e^{-\frac{x^2}{2}}$ 展开到 x^4 时，其系数就不一样了. 使用"幂次最低"原则，展开到此项后，进行运算，得

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

于是可知 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4(x\to0)$，故 $a=-\frac{1}{12}$，$b=4$.

8. 海涅定理（归结原则）

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 存在.

【注】 众所周知，数列极限与函数极限是分别独立定义的，但是海涅定理是联系数列极限与函数极限的桥梁. 它指出：在极限存在的条件下，函数极限和数列极限可以相互转化. 虽然有些读者可能没有听说过这个定理，但是我们都在不知不觉地使用它，比如，证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 证明如下：

设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，若取 $x_n=\frac{1}{n\pi}\to0$，$n\to\infty$，则有 $f(x_n)=0$；若取 $x_n'=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\to0$，$n\to\infty$，

则有 $f(x_n')=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\to\infty$，$n\to\infty$，根据海涅定理，极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 证毕.

事实上，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是当 $x\to0$ 时的无界量，但不是无穷大量. 不是一直无穷大，"时而无穷大".

9. 无穷小比阶

（1）无穷小定义.

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0\right).$$

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

【注】 （1）无穷大定义.

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $|f(x)|$ 无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right).$$

（2）无穷小与无穷大的关系.

f(x)可能为零.

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

（2）无穷小的比阶.

设在自变量的同一变化过程中，$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq0$，则

①若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小**，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

②若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶的无穷小**；

③若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**； $k\neq1$ 同阶

④若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$； $k=1$ 等价.

⑤若 $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq0$，$k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 **k 阶无穷小**. ^k k阶.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

存在无法比阶的情况.

【注】 **并不是任意两个无穷小都可进行比阶的.** 例如，当 $x\to0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小，但是却不可以比阶，也就是说既无高低阶之分，也无同阶可言，因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

（3）无穷小运算规则.

①**有限个无穷小的和是无穷小.**

②有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③**有限个无穷小的乘积是无穷小.** 无穷个无穷小乘积可不为无穷小.

④无穷小的运算.

设 m,n 为正整数，则

a. $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l)$，$l=\min\{m,n\}$（加减法时低阶"吸收"高阶）；

b. $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$，$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$（乘法时阶数"累加"）；

c. $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m)$，$k\neq0$ 且为常数（非零常数相乘不影响阶数）.

【注】 在后面泰勒公式的应用中，会对上述高阶无穷小的运算提出要求，请读者学会正确书写.

（4）常用的等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，常用的等价无穷小有：

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^a-1\sim ax.$$

【注】 使用时一般都要做广义化：可将 x 替换为趋向于 0 的函数，请灵活使用.

二、函数的连续与间断

1. 连续点的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 间断点的定义与分类

以下设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义.

（1）可去间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$（$f(x_0)$ 甚至可以无定义），则称这类间断点称为**可去间断点**.

【注】 只要修改或者补充 $f(x_0)$，使得 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = f(x_0)$，就会使得函数在点 x_0 处连续，于是，这个点叫作可去间断点，也叫作**可补间断点**.

(2)跳跃间断点.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，则这类间断点称为**跳跃间断点**.

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**.

第一类间断点两边极限都存在.
第二类间断点至少一边极限不存在

(3)无穷间断点.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则这类间断点称为**无穷间断点**，如点 $x=0$ 为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点.

(4)振荡间断点.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 振荡不存在，则这类间断点称为**振荡间断点**，如函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义，且当 $x \to 0$ 时，函数值在 -1 与 1 这两个数之间交替振荡取值，极限不存在，故点 $x=0$ 为函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

无穷间断点和振荡间断点都属于**第二类间断点**，除此之外，还有不属于上述定义的第二类间断点，比如图 3-2 的情形.

【注】 (1)大学教材(如同济大学《高等数学》第七版)中一般均写明"在点 x_0 的某去心邻域有定义"的前提下，才讨论间断点. 如图 3-1 所示，显然，$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处只有右侧邻域有定义，故不讨论点 $x=x_0$ 是否为间断点.(但直线 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的铅垂渐近线)

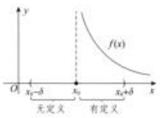


图 3-1

(2)进一步地，"在点 x_0 的某去心邻域有定义"的函数 $f(x)$，如图3-2所示.

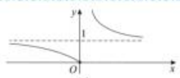
如图 3-2 所示的情形从未考过，因为一般的数学教材中没有单侧间断的定义，这种定义可参见国际上的一些教材，如菲氏《微积分学教程》有如下定义.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是右(或左)连续的，只需满足极限关系式

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\ (\text{或 } f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)).$$

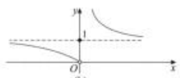
若这关系式不成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有**右间断(或左间断)**，如此说来，对于图 3-2(a)，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$，故 $x=0$ 处左连续，但 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$，故 $x=0$ 处右侧无穷间断，读者可类似分析图 3-2(b)的情形.

由于没有单侧间断，可以soft无穷间断点在x两侧均为无穷.



(a)

$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 　说 $\begin{cases} x=0 \text{ 处右侧无穷间断}, \\ x=0 \text{ 处左侧连续}. \end{cases}$



(b)

$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 　说 $\begin{cases} x=0 \text{ 处右侧无穷间断}, \\ x=0 \text{ 处左侧跳跃间断}. \end{cases}$

图 3-2

基础例题精解

1. 函数极限的性质

本部分主要考查函数极限的唯一性、局部有界性和局部保号性.

(1)对于唯一性，

①对于 $x \to \infty$，意味着 $x \to +\infty$，且 $x \to -\infty$；

②对于 $x \to x_0$，意味着 $x \to x_0^+$，且 $x \to x_0^-$.

我们称这个细节的问题为自变量取值的"双向性(有正有负)"，基于此，我们看几个重要的函数极限问题.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^x$ 不存在，因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$，$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$，根据"极限若存在，必唯一"，得原极限不存在；

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$ 不存在，因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{-x} = -1$；

$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在，因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$；

$\lim\limits_{x \to 0} [x]$ 不存在，因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} [x] = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^-} [x] = -1$.

由于极限双向性不存在极限
$\lim\limits_{x \to \infty} e^x$，$\lim\limits_{x \to 0} [x]$，
$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$

(2)对于局部有界性，

①设 $\lim\limits_{x \to \cdot} f(x)$ 存在，则当 $x \to \cdot$ 时，$f(x)$ 有界. 其中"$x \to \cdot$"是指 $x \to x_0$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 六种情形. 值得注意的是，极限存在只是函数局部有界的充分条件，并非必要条件；

②设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

③有界函数与有界函数的和、差、积仍为有界函数；

④若 $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内有界，则 $f(x)$ 在该区间内有界.

(3)对于局部保号性，主要和导数的几何应用结合来命题，参见第 5 讲的例题.

开区间改为闭区间有反例.

$|f'(x)| < M \quad (a<x<b)$

如 $f(x)=\sqrt{x} \quad (0<x<1)$

$|f(x)| < M \quad (a<x<b)$

proof: Hence $x \in (a,b)$, $|f'(x)| \le M$.

for $x_0 \in (a,b)$, according to lagrange theroem:

if $x \neq x_0$, $x \in (a,b)$

$|f(x)| \le |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)| = |f(x_0)| + |f'(\xi)| \cdot |x-x_0|$

$\le M(b-a) + |f(x_0)| \le M'$

例 3.1 已知 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 存在，且函数 $f(x) = x^2 + x - 2\lim\limits_{x \to 1} f(x)$，则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ($　　$)$.

(A) $\dfrac{3}{2}$　　(B) $-\dfrac{2}{3}$　　(C) $-\dfrac{3}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

解 应选(D).

本题考查极限的概念,如果极限存在,则它表示一个确定的数值,这是求解本题的关键.

设$\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$,于是

$$f(x)=x^2+x-2A,$$

两端同时取 $x\to1$ 时的极限,有

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+x-2A)=2-2A,$$

于是 $A=2-2A$,解得 $A=\frac{2}{3}$. 故选(D).

例 3.2 当 $x\to1$ 时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限( ).

(A)等于 1 (B)等于 0

(C)为∞ (D)不存在且不为∞

解 应选(D).

函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$在 $x=1$ 处没有定义,在 $x=1$ 的两侧表达式虽然相同,但是注意到当 $x\to1$ 时,$\frac{1}{x-1}$左、右极限不相等,因此应该考虑单侧极限.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

可知当 $x\to1$ 时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限不存在且不为$\infty$,故选(D).

3.2 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$

【注】 对于上述$\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$的情形,由于$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}$与$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}$不相等,因此不能忽视左极限与右极限,否则会导致错误,这是这类问题经常出现错误的原因.

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

$\neq$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

例 3.3 在下列区间内,函数 $f(x)=\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$有界的是( ).

(A)(−2,1) (B)(−1,0) (C)(1,2) (D)(2,3)

解 应选(B).

所给选项皆为开区间,因此不能直接利用连续函数在闭区间上的有界性定理,可以考虑在开区间两个端点处函数的极限是否存在.

由于 $f(x)$在 $x_1=1,x_2=3$ 处没有定义,因此当 $x\neq1,x\neq3$ 时,$f(x)$为初等函数且为连续函数. 又由

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$

可知在区间端点为 1 或 3 的开区间内,$f(x)$均为无界函数,故选(B).

【注】 (1)若 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上为连续函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上必定有界.

(2)若 $f(x)$在(a,b)内为连续函数,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在,则 $f(x)$在(a,b)内必定有界.

2. 七种未定式的计算

本节内容极其重要,它是高等数学计算的基础,读者要高度重视,充分训练.

对于$\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)$,自变量 x 的变化趋势共有六种情形:$x\to x_0^+(x>x_0)$,$x\to x_0^-(x<x_0)$,$x\to x_0$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$及 $x\to\infty$. 在没必要对其进行区别时,统一记成 $x\to\bullet$.

(1)化简是第一步,切记.

化简的方法:①提出极限不为 0 的因式;②等价无穷小代换;③恒等变形(基本的恒等变形法如提公因式、拆项、合并、分子分母同除变量的最高次幂等,高级的恒等变形法如变量代换,也叫换元法等). 需要强调的是,很多问题如果不化简就计算,可能计算会很复杂,甚至可能计算不出结果.

(2)判断类型,七种:"$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$""$\infty-\infty$""∞^0""0^0""1^∞".

(3)选择相应的方法进行计算(包括运算规则、夹逼准则、洛必达法则、泰勒公式、归结原则等).

(1)"$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$" "$0\cdot\infty$".

例 3.4 极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x-e^{2\sqrt{x}}+1}=$( ).

(A)∞ (B)2 (C)1 (D)$-\frac{1}{2}$

解 应选(D).

这是"$\frac{0}{0}$"型未定式,注意到函数表达式中含有根式,若直接利用洛必达法则,求导比较复杂,考虑到分子与分母中均含有$\sqrt{x}$,可先设 $t=\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x-e^{2\sqrt{x}}+1}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{t}{t^2-e^{2t}+1}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2t-2e^{2t}}=-\frac{1}{2}.$$

故选(D).

3.4:

$LHS=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x-\left[1+2\sqrt{x}+\frac{(2\sqrt{x})^2}{2!}+o(\sqrt{x})\right]+1}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}-x}$

例 3.5 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解 这是"$\frac{0}{0}$"型未定式,分子是根号差"$\sqrt{a}-\sqrt{b}$"的形式,请记住一句话,一般说来,**"见根号差,用有理化"**,这是一种重要的化简手段,则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{-\frac{x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

3.5 $LHS=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{2[x\ln(1+x)-x^2]}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\times\frac{1}{2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\tan^2x-\cos x}{1+\ln(1+x)-2x-\frac{1}{x+1}}\times\frac{1}{2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan x\cdot\sec^2x+\sin x}{\frac{1}{1+x}-2+\frac{1}{(x+1)^2}}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan x\sec^2x+\sin x}{1-2(x+1)^2+(1+x)}$

$=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{(2\cos x\sec^2x+1)\sin x}{x(1-2x)}$

例 3.6 求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解 这是"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式,注意到 $x\to-\infty$,也就意味着 $x<0$,并且 $\sqrt{4x^2+x-1}+x+1$ 是根号差"$\sqrt{a}-\sqrt{b}$"的形式,于是先用有理化做化简,再用 $t=-x$ 代换化为我们熟悉的式子,然后进行计算.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$

$=1$

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t^2+t-2}{\sqrt{t^2-\sin t}\left(\sqrt{4t^2-t-1}+t-1\right)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}\left(\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}+1-\frac{1}{t}\right)}=1.$$

例 3.7 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解 这是"$\infty\cdot0$"型未定式,理由同上,则有

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}\xlongequal{令t=-x}\lim_{t\to+\infty}\frac{-100}{\sqrt{1+\frac{100}{t^2}}+1}=-50.$$

【注】 顺便指出,本题和上题都有一个要注意的细节,就是当 $x<0$ 时,要使用代换 $t=-x$ 化为常见的情况,或用 $-x$ 同时除分子、分母,这样才不会出现正负上的错误.

3.7 $LHS=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{(\sqrt{x^2+100}-x)}$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-100t}{(\sqrt{t^2+100}+t)}$

$=-50$

例 3.8 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$.

解 这是"$\infty\cdot0$"型未定式,注意一个事实:当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)\sim x$,将其广义化,得

$$\ln(1+u)\sim u\,(u\to0).$$

于是在考研中常考的一个式子是 $\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1\,(x\to1)$,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)&=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x-1)\ln(1-x)\\&=\lim_{x\to1^-}(x-1)\ln(1-x)\\&\xlongequal{1-x=t}-\lim_{t\to0^+}t\ln t=0.\end{aligned}$$

【注】 在实考中,很多考生对于这种问题处理得不理想,事实上,读者一定要明白一个道理:不能只是简单地记住那几个基本的等价无穷小代换公式,而应该把它们广义化,并通过好的题目载体灵活应用,像本题一样.这再一次说明:数学解题能力必须在做题实践中才能提高.

$\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$

$=$

例 3.9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$.

解 当 $x\to0$ 时,由于 $\arcsin x-\arctan x=\left[\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]x^3+o(x^3)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$,故 $\arcsin x-\arctan x\sim\frac{1}{2}x^3$;同理,当 $x\to0$ 时,由于 $\sin x-\tan x=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)=-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$,故 $\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3$,所以原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}=-1$.

【注】 如果用洛必达法则,计算起来会相当麻烦.

3.9 $LHS=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=-1$

例 3.10 求 $I=\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]$,其中$[\cdot]$为取整符号.

解 当 $x\to0$ 时,$\frac{10}{x}\to\infty$,对于$[\infty]$,此时想到极限计算的利器——夹逼准则(当常规求极限的方法,比

3.10 $\frac{10}{x}-1\le\left[\frac{10}{x}\right]<\frac{10}{x}$

$\min\{10,x(\frac{10}{x}-1)\}\le x\left[\frac{10}{x}\right]\le\max\{10,x(\frac{10}{x}-1)\}$

$\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{10}{x}\right]=10$

如等价无穷小代换、泰勒公式、洛必达法则无法使用时,一定要能够想得起这个"两边夹击"的重要方法).

根据 $x-1<[x]\le x$,有

$$\frac{10}{x}-1<\left[\frac{10}{x}\right]\le\frac{10}{x}.$$

于是

$$\begin{cases}x>0\Rightarrow10-x<x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]\le10,\\x<0\Rightarrow10-x>x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]\ge10.\end{cases}$$

可见,无论 $x>0$,还是 $x<0$,不等式两边均可趋于同一极限,故 $I=\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{10}{x}\right]=10$.

(2)"$\infty-\infty$".

对于"$\infty-\infty$"型未定式,一般有两种思路.

(1)如果函数中有分母,则通分,将加减法变形为乘除法,以便于使用其他计算工具(比如洛必达法则),见例 3.11.

(2)如果函数中没有分母,则可以通过提取公因式,或者作倒代换,出现分母后,再利用通分等恒等变形的方法,将加减法变形为乘除法,见例 3.12.

例 3.11 极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=($ $)$.

(A)2 (B)$\frac{3}{2}$ (C)1 (D)$\frac{1}{2}$

解 应选(D).

所给极限为"$\infty-\infty$"型,先变形,化为"$\frac{0}{0}$"型.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]&=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故选(D).

3.11 $LHS=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2-\frac{x^3}{2!}+o(x^3)}=\frac{1}{2}$

例 3.12 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$.

解 $$原式\xlongequal{令u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}.$$

3.12 $LHS=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}=\frac{1}{2}$

(3)"∞^0""0^0""1^∞".

例 3.13 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解 这是"∞^0"型未定式,是幂指函数的极限,对于"∞^0"和"0^0"型这两种未定式,一般说来,我们都用恒等变形

$$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}\xlongequal{记}\exp\{\lim v\ln u\}.$$

3.13 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=1$

将其化成"$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$"这三种类型，然后计算. 故原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right\}$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

例 3.14 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{e}{x}}$.

解 这是"1^∞"型未定式，是幂指函数的极限，如果 $\lim u^v$ 属于"1^∞"型，则有一个重要且简单的计算方法：$\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$.

推导如下：利用第二重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，得

$$\lim u^v=\lim\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v}=e^{\lim(u-1)v}.$$

故
$$原式=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{e}{3}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{e^{3x}-1}{x}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{e}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}\right)\right\}=e^{\frac{e}{3}(1+2+3)}=e^{2e}.$$

例 3.15 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为正整数）.

解 这是"1^∞"型未定式，解法同上，于是

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

根据归结原则，取 $x=\frac{1}{n}$，则原式$=e^{\frac{1}{3}}$.

3. 已知某一极限，求另一极限

此类问题是考研的常考题，关键要抓住已知极限与未知极限的联系，实现问题的转化.

例 3.16 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=$（　　）.

(A) $\frac{13}{9}$　　(B) 4　　(C) $\frac{10}{3}$　　(D) $-\frac{8}{3}$

解 应选(D).

由所给极限可知当 $x\to0$ 时，$\tan 2x+xf(x)$是比 $\sin x^3$ 高阶的无穷小. 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}$可考虑将已知极限的函数转化为含$\frac{2+f(x)}{x^2}$的形式.

由于
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-2x+x[2+f(x)]}{x^3}$$

3.14: $LHS=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{[\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x})-\ln3]e}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{e\cdot\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}}}$

$=e^{2e}$

3.15

$LHS=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln(n\tan\frac{1}{n})}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}e^{\frac{\ln(\tan t)-\ln t}{t^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{t\to0^+\\ \xi\to0}}e^{\frac{(\tan t-t)}{t^2}\frac{1}{\xi}}$

$=\sqrt[3]{e}$

3.16 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x+xf(x)}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\tan2x}{x^3}$

$=0-\frac{8}{3}$

$=-\frac{8}{3}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\tan 2x-2x}{x^3}+\frac{2+f(x)}{x^2}\right]=0,$$

其中
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-2x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot2-2}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\cos^2 2x}{x^2\cos^2 2x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$$
$$=\frac{8}{3}.$$

则所求极限$=0-\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$，故选(D).

4. 已知极限反求参数

此类问题也是考研的常考题，事实上就是带着参数求极限，只是由于表达式中含着未知参数，要注意慎用洛必达法则(详见"基础内容精讲""一"中的"6").

例 3.17 设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求常数 a,b.

解 原极限$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-ax-bx^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$，从而

$$1-a=0,\ -\left(\frac{1}{2}+b\right)=2\Rightarrow a=1,b=-\frac{5}{2}.$$

【注】 本题还有一个值得借鉴的解法.

根据泰勒公式容易得：$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to0)$（请读者记住此式），故想办法把分子凑出这种形式.

$$2=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)-x+(ax+bx^2)}{x^2}$$
$$=-\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{bx^2}{x^2}=-\frac{1}{2}-b-\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x}{x^2},$$

故 $a-1=0\Rightarrow a=1$. 因而$-\frac{1}{2}-b=2\Rightarrow b=-\frac{5}{2}$.

5. 无穷小比阶

例 3.18 设当 $x\to0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小，则（　　）.

(A) $a=\frac{1}{2},b=1$　　(B) $a=1,b=1$　　(C) $a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(D) $a=-1,b=1$

解 应选(A).

方法一 由泰勒公式可知
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2).$$

由题设可知
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0,$$

即
$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+(1-b)x+o(x^2)}{x^2}=0.$$

3.17

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-ax-bx^2}{x^2}=2=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-a)x-(b+\frac{1}{2})x^2+o(x^2)}{x^2}$

$a=1,\ b=-\frac{5}{2}$

3.18

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-ax^2-bx-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+x+1-ax^2-bx-1+o(x^2)}{x^2}=0$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\frac{1}{2}-a)x^2+(1-b)x+o(x^2)}{x^2}$

$a=\frac{1}{2},b=1$

则 $a=\frac{1}{2}, b=1$.

方法二 由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x},$$

若 $b\neq 1$，上式右端趋于无穷，从而左端也趋于无穷，与原题设矛盾，所以 $b=1$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}-a=\frac{1}{2}-a=0,$$

故 $a=\frac{1}{2}$，所以应选(A).

例 3.19 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解 应选(C).

当 $x\to 0$ 时，

$$e^{\tan x}-e^x=e^x(e^{\tan x-x}-1)\sim e^x(\tan x-x)\sim \tan x-x,$$

而

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以

$$\tan x-x=\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

因此选(C).

【注】 可以仿照本方法来验证如下结论：

当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)\to 0, g(x)\to 0$，则 $e^{f(x)}-e^{g(x)}\sim f(x)-g(x)$.

例 3.20 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1), \alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　).

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　(C)$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　(D)$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

解 应选(B).

当 $x\to 0^+$ 时，

$$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim -\frac{1}{2}x^2,$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{5}{6}},$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x.$$

则从低阶到高阶的排序是 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$，故选(B).

6. 函数的连续与间断

例 3.21 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$ <u>1</u>.

解 应填 1.

由于　　$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(2x+a)=a,\quad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,$

3.19

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ \xi\to 0}}\frac{\tan x-x}{x^n}\cdot e^{\xi}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^n}$$

$$=\frac{1}{3},\ n=3$$

3.20

$a_3\sim\frac{x}{3}+o(x)$

$a_2\sim\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}+o(x^{\frac{5}{6}})$

$a_1\sim-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

3.21

$f(0)=f(0^+)$

$=a$

$=1$

因此要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，只需 $a=1=f(0)$，即 $a=1$.

例 3.22 设函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有(　　).

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B)1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C)2 个跳跃间断点　　(D)2 个无穷间断点

解 应选(A).

由表达式可知，$x=0, x=1$ 是间断点. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=0,$$

所以 $x=0$ 是可去间断点；而

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}=-\sin 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\sin 1,$$

故 $x=1$ 是跳跃间断点.

【注】 在 $x=0$ 时，也可以这样做：$\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}x\ln|x|=0$.

例 3.23 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

解 应选(B).

$f(x)$ 为非分段函数，只需讨论函数的无定义点：$x=0,1,-1$. 又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\left(-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)=\infty,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，故选择(B).

例 3.24 求极限 $\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解 此极限是“1^∞”型未定式，用公式 $\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$，有

$$f(x)=\exp\left\{\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right\}=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

函数为非分段函数，只讨论无定义点即可：

①$x=0$ 是函数的无定义点，由于 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；

②$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是函数的无定义点，由于 $f(x)$ 在 $x=k\pi$ 时的左极限和右极限中总有一个为 $+\infty$，因此 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是第二类间断点(详见“基础内容精讲”“二”中的“2”).

3.22: $x\neq 1, x\neq 0$,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\sin x=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\sin x=-\sin 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-x}\sin x=\lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot\sin x=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{1-x}\sin x=-\lim_{x'\to 0^+}\ln x'\sin x'=\lim_{t'\to+\infty}\frac{\ln t'}{t'}=0$$

3.23

$|x|\neq 1, x\neq 0$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$，可去

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=-\infty$$

无穷

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x+1}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\cdot\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\frac{x}{(-x)}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-1$$

跳跃

3.24:

$$\text{LHS}=\lim_{t\to x}e^{\frac{[\ln(|\sin t|)-\ln(|\sin x|)]x}{\sin t-\sin x}}$$

$$=\lim_{\substack{t\to x\\ \xi\to\sin t}}e^{\frac{x}{\xi}}$$

$$=\lim_{t\to x}e^{\cancel{\frac{x}{\sin t}}}=\lim_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

基础习题精练

习 题

3.1 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

3.2 已知$I=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$存在，$[\cdot]$为取整函数，求$I$，$a$.

3.3 已知$a>0$，$b>0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=$______.

3.4 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.5 设$a\neq\dfrac{1}{2}$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$.

3.6 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

3.7 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$，其中$a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

3.8 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{2^x-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

3.9 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则(　　).

(A)$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点　(B)$x=0$必是$g(x)$的第二类间断点

(C)$x=0$必是$g(x)$的连续点　(D)$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关

3.10 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数的间断点，其结论为(　　).

(A)不存在间断点　(B)存在间断点$x=1$　(C)存在间断点$x=0$　(D)存在间断点$x=-1$

解 答

3.1 分析 这是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式，看起来好像很简单，很多读者拿到这样一个问题，就直接用洛必达法则求导了，试试看？

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot2x^{-3}}{100x^{99}}=\frac{1}{50}\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots.$$

我们看到，越求导反而越复杂了，为什么？问题出在"$\dfrac{1}{x^2}$"这个形式上，注意，我们可以将"$\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^0}{x^2}$"称为"头轻

脚重"的"正三角形状△"，常识告诉我们，"正三角形状△"是稳定的. 生活和工程中我们喜欢这种稳定吗？当然，金字塔就是很好的例子. 可在数学上，这种稳定就不妙了——稳定就意味着不能动，不能动就做不下去了！比如$\int\dfrac{1}{x^3+2x^2+x+1}dx$，你怎么积分？而$\int\dfrac{x^3+2x^2+x+1}{1}dx$，积分多么简单！这个例子很极端，但很能说明问题. 所以此题的正确做法是先作"倒代换"，将"正三角形状△"改成"倒三角形状▽"，头重脚轻根底浅，垮了……搞定！

解

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x^2}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-50}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to+\infty}\frac{50\cdot49\cdot t^{48}}{e^t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0.$$

【注】 本题给我们的启示：①有些极限问题看起来很简单，但事实上如果不化简就计算，可能根本算不出结果；②可以通过变量倒代换将"正三角形状△"改成"倒三角形状▽"进行化简，这是一个经典思路，在后面的积分学和微分方程各章中，我们都会再次提到，请读者留心总结.

3.2 解

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to-\infty}\frac{\dfrac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}}{\dfrac{e^u}{1+e^u}}=0,\quad\lim_{x\to0^-}a[x]=-a,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\dfrac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}}{\dfrac{e^u}{1+e^u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2(e^u+e^{2u})}{1+e^{2u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2(e^{-u}+1)}{1+e^{-2u}}=2,\quad\lim_{x\to0^+}a[x]=0.$$

所以当且仅当$a=-2$时，原极限存在，此时$I=2$.

3.3 $\ln\dfrac{a}{b}$　**解** 利用变量代换. 令$\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=\lim_{t\to0^+}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to0^+}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln\frac{a}{b}\ (a>0,b>0).$$

3.4 解 方法一 这是"$\infty-\infty$"型未定式极限，首先通分变成"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2}.$$

方法二 利用等价无穷小量代换，$e^x-1\sim x$(当$x\to0$时)，则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+xe^x}{2}=\frac{3}{2}.$$

【注】 下面的做法是错误的：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2.$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0.$$

3.1

$$LHS=\lim_{t\to0^+}(-t)^{50}\cdot e^{-t}=0$$

3.2

$$I=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right]+a\cdot0=2\qquad I=2$$
$$=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right]-a=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-a=0-a=2,\quad a=-2$$

3.3

$$LHS=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln a}{x}}-e^{\frac{\ln b}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^{\ln at}-e^{\ln bt}}{t}=\lim_{\substack{t\to0^+\\ \xi\to0^+}}\frac{(\ln at-\ln bt)\cdot e^{\xi}}{t}=\ln a-\ln b$$

3.4

$$LHS=\lim_{x\to0}\frac{(e^x+xe^x)x-(e^x-1)}{(e^x-1)x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x x(x+1)-x(x+1)+x(x+1)-(e^x-1)}{(e^x-1)x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+1)-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-(x^2+x)}{(e^x-1)x}$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

3.5: $a\neq\frac{1}{2}$

$$LHS=\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{n-2na+1}{n-2na}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n-2na})}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1-2a}$$

3.6: $LHS=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-e^{x\ln(\sin x)}}{x^2\ln(x+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\ \xi\to0^+}}\dfrac{x\ln x-x\ln(\sin x)}{x^2\ln(1+x)}\cdot e^{\xi}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\ln(\sin x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{\substack{x\to0^+\\ \eta\to x}}\frac{x-\sin x}{x\cdot x\cdot\eta}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

3.7 $LHS=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{n}{x}\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^x}{n}\right)}$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^x-n}{n}}{\frac{x}{n}}}$$
$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^x-n}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}e^{\ln\prod_{i=1}^{n}a_i}\qquad e^{x\ln a_i}\sim1+x\ln a_i$$
$$=\prod_{i=1}^{n}a_i$$

3.8: $LHS=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x\ln2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2\ln2}=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2\ln2$$

3.9 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(\frac{1}{x})=a$

$a=0$时，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)=0$

$a\neq0$时 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)\neq g(0)$ 可去间断点

3.10

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ 0, & x=-1\\ 0, & |x|>1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1+x)=2$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$，$f(1)=1$ 跳跃

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)=0$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$，$x=-1$处连续

3.5 分析 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是“1^∞”型未定式极限，可以使用洛必达法则，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小量代换.

解 方法一

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}$$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 因为 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

3.6 解 原式$=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}\ (\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1)$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

3.7 解 因为$\lim\limits_{x\to0}a_i^x=1$，所以原极限为“$1^\infty$”型未定式.

方法一 使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{n}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}n\cdot\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right\}=a_1a_2\cdots a_n.$$

方法二 凑成第二个重要极限（“1^∞”型未定式极限都可以凑成第二个重要极限），在计算过程中使用洛必达法则.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}\cdot\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}},$$

其中

$$\lim_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}=\ln(a_1a_2\cdots a_n),\quad\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}}=e,$$

所以原式$=a_1a_2\cdots a_n$.

3.8 解 $\lim\limits_{x\to0}(2^x-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}=0\Rightarrow\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\frac{f(x)}{\sin x}\sim\frac{f(x)}{x}$（当 $x\to0$ 时）.

又 $2^x-1=e^{x\ln2}-1\sim x\ln2$（当 $x\to0$ 时），所以原式变为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2\ln2}=2$，故$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\ln4$.

3.9 (D) **解** 因为$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，而 $g(0)=0$，所以，当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$在

点 $x=0$ 处连续；当 $a\neq0$ 时，函数 $g(x)$在点 $x=0$ 处不连续，故选(D).

3.10 (B) **分析** 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$是以 x 为自变量的函数，但是，在 $n\to\infty$求极限时，x 则被看成一个常数（参数），根据 x 的不同取值求出极限，求极限完成后 x 又恢复变量的本来身份.

因为分式中有 x^{2n}，所以应该把 $x=-1$ 和 $x=1$ 作为分段点将函数写成分段函数，然后讨论函数的间断点.

解 当$|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，所以 $f(x)=1+x$；当$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

又 $f(1)=1$，$f(-1)=0$，所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\leqslant-1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

由此可知 $x=1$ 为间断点，故选(B).