概率统计 (A) 课程作业: 参数估计

周书予

2000013060@stu.pku.edu.cn

May 19, 2022

1

1. $L(a,b) = \prod_{i=1}^n f(x_i;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leqslant x_1, \cdots, x_n \leqslant b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, 可以发现当 $x_i \in [a,b]$ 时, 似然函数 $L(a,b)$ 是关于区间长度 $b-a$ 的减函数, 因此 a,b 的极大似然估计量为使 $L(a,b)$ 取到最大值的 $\hat{a} = \min\{x_1, \cdots, x_n\}, \hat{b} = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$.

2. 矩关于参数 a,b 的函数为

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

可以解得参数关于矩的反函数

$$a = \mathbb{E}[X] - \sqrt{3\mathrm{Var}[X]}, \quad b = \mathbb{E}[X] + \sqrt{3\mathrm{Var}[X]}$$

于是利用样本一阶矩 $A_1 = \overline{X}$, 二阶中心距 $B_2 = \sum_i (X - \overline{X})^2/n$ 分别替代 $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}[X]$, 得到 a,b 的矩估计

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3B_2}, \quad \hat{b} = A_1 + \sqrt{3B_2}$$

2

1.

$$\mathbb{E}[T/n] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \lambda$$

从而 T/n 是对参数 λ 的无偏估计量.

2. $\varphi(T) = \frac{T^2-T}{n^2}$ 是 λ^2 的无偏估计量, 因为

$$\mathbb{E}\left[\frac{T^2-T}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{E}\left[T^2\right] - \mathbb{E}[T]\right) = \frac{1}{n^2}\left(n^2\lambda^2 + n\lambda - n\lambda\right) = \lambda^2$$

3

1.

$$\mathbb{E}[T(a)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i p = p$$

所以 $T(a)$ 是对 p 的无偏估计量.

2.

$$\mathrm{Var}[T(a)] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{Var}[X_i] = \frac{p-p^2}{n^2}\sum_{i=1}^n a_i^2$$

取 $a=(a_1=1,\cdots,a_n=1)$ 得到 $\mathrm{Var}\left[T(a)\right]=\frac{p(1-p)}{n}$ 是最小的. 由 Cramer-Rao 不等式,

$$\mathrm{Var}\left[\hat{p}\right]\geqslant\frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial\ln f(x;p)}{\partial p}\right)^2\right]}=\frac{p(1-p)}{n}$$

这说明 $T(a)$ 的方差达到了 Cramer-Rao 不等式下界, 因此是无偏估计中最好的.

4

1. 由上一次作业第 **7** 题, $2\lambda n\overline{X}\sim\chi^2(2n)$.

   引理 1. 若 $Z\sim\chi^2(q)$ 其中 $q>2$, 则 $\mathbb{E}\left[1/Z\right]=\frac{1}{q-2}$.

   证明. 考虑 $Z\sim\chi^2(q)$ 的密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2^{q/2}\Gamma(q/2)}z^{q/2-1}\mathrm{e}^{-z/2}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$, 于是

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z}\right]&=\int_0^\infty\frac{1}{2^{q/2}\Gamma(q/2)}z^{q/2-2}\mathrm{e}^{-z/2}\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{1}{2^{q/2}\Gamma(q/2)}(2t)^{q/2-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}(2t)\\&=\int_0^\infty\frac{1}{2\Gamma(q/2)}t^{q/2-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(q/2-1)}{2\Gamma(q/2)}=\frac{1}{q-2}\end{aligned}$$

   □

   根据上述引理, 有 $\mathbb{E}\left[1/2\lambda n\overline{X}\right]=\frac{1}{2n-2}$, 从而 $\mathbb{E}\left[1/\overline{X}\right]=\frac{\lambda n}{n-1}$.

2. $\varphi(X_1,\cdots,X_n)=\frac{n-1}{n\overline{X}}$ 是对 λ 的无偏估计.

5

记 $Y=\frac{X-a}{b}$, 可以验证 $f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}f_X(y)=\mathrm{e}^{-y}\mathbb{1}[y>0]$, 即 $Y\sim\mathrm{Exp}(1)$.
同样, 记 $Y_i=\frac{X_i-a}{b}$, 于是 $Y_i\sim$ i.i.d. $\mathrm{Exp}(1)$, 故可计算 $Y_{(1)}=\min\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 的密度函数为

$$f_{Y_{(1)}}(y)=\left[1-(1-F_Y(y))^n\right]'=n(1-F_Y(y))^{n-1}f_Y(y)=n\mathrm{e}^{-ny}\mathbb{1}[y>0]$$

从而有 $\mathbb{E}\left[Y_{(1)}\right]=\frac{1}{n}$. 此外显然有 $\mathbb{E}\left[\overline{Y}\right]=\mathbb{E}\left[Y\right]=1$.

1. 不难发现 $X_{(1)}=a+bY_{(1)}$, 因此 $\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right]=a+b\mathbb{E}\left[Y_{(1)}\right]=a+\frac{b}{n}$, 故当 b 已知时, $\psi(X_{(1)})=X_{(1)}-\frac{b}{n}$ 是 a 的一个无偏估计.

2. 不难发现 $\overline{X}=a+b\overline{Y}$, 因此 $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right]=a+b\mathbb{E}\left[\overline{Y}\right]=a+b$, 故当 a 已知时, $\varphi(\overline{X})=\overline{X}-a$ 是 b 的一个无偏估计.

6

1. 容易验证 $\mathbb{E}\left[\overline{X}^2\right]=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2$ 以及 $\mathbb{E}\left[S^2\right]=\sigma^2$, 因此 $\varphi(\overline{X},S^2)=\overline{X}-\frac{1}{n}S^2$ 是 μ^2 的一个无偏估计.

2.

   引理 2. 设 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则有 $\mathbb{E}\left[X^3\right]=\mu^3+3\mu\sigma^2$.

证明.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^3\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) x^3 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) (u+\mu)^3 \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) (u^3+3\mu u^2+3\mu^2 u+\mu^3) \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) u^3 \mathrm{d}u + 3\mu\mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] + 3\mu^2\mathbb{E}\left[X-\mu\right] + \mu^3 \\
&= 0 + 3\mu\sigma^2 + 0 + \mu^3 \\
&= \mu^3 + 3\mu\sigma^2
\end{aligned}
$$

□

直接考虑计算 $\mathbb{E}\left[\overline{X}S^2\right]$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\overline{X}S^2\right] &= \frac{1}{n(n-1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)\left(\sum_j (X_j-\overline{X})^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^3(n-1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)\left(\sum_j\left((n-1)X_j - \sum_{k\neq j} X_k\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^3(n-1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_i X_i\right)\left(n(n-1)\sum_j X_j^2 - n\sum_{j\neq k} X_j X_k\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^3(n-1)}\mathbb{E}\left[n(n-1)\sum_i X_i^3 + n(n-1)(n-3)\sum_{i\neq j} X_i X_j^2 - n(n-1)(n-2)\sum_{i\neq j, i\neq k, j\neq k} X_i X_j X_k\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \frac{n-3}{n}\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{n-2}{n}\mathbb{E}\left[X\right]^3 \\
&= \frac{1}{n}(\mu^3+3\mu\sigma^2) + \frac{n-3}{n}\mu(\mu^2+\sigma^2) - \frac{n-2}{n}\mu^3 \\
&= \mu\sigma^2
\end{aligned}
$$

因此常数 $c=1$.

7

记 $Z_k = X_k - \mu$, 则 $Z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ 为标准正态分布, 故

$$
\mathbb{P}\left(Y_k=1\right) = \mathbb{P}\left(X_k \leqslant 0\right) = \mathbb{P}\left(Z_k \leqslant -\mu\right) = \Phi(\mu) = 1-\Phi(\mu)
$$

定义似然函数

$$
L(\mu) = \mathbb{P}\left(y_1,\cdots,y_n|\mu\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(Y_i=y_i|\mu\right) = (1-\Phi(\mu))^{\sum_i Y_i}\Phi(\mu)^{n-\sum_i Y_i}
$$

为了最大化 $L(\mu)$, 考虑 $\ln L(\mu) = \sum_i Y_i \ln(1-\Phi(\mu)) + (n-\sum_i Y_i)\ln\Phi(\mu)$, 对 μ 求导得到 $\frac{\partial L(\mu)}{\partial\mu} = \sum_i Y_i \frac{-\phi(\mu)}{1-\Phi(\mu)} + (n-\sum_i Y_i)\frac{\phi(\mu)}{\Phi(\mu)}$. 求解 $\frac{\partial L(\mu)}{\partial\mu} = 0$, 得到 $\hat{\mu} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\sum_i Y_i}{n}\right)$, 此即为 μ 的极大似然估计.

8

1. 令 $Y_i = X_i/\theta$, 则显然有 $Y_i \sim$ i.i.d. $U(0,1)$, 此时 $Y/\theta = \max\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 的概率密度函数为 $f(y) = ny^{n-1}\mathbb{1}[0\leqslant y\leqslant 1]$, 说明 Y/θ 的分布与未知参数 θ 无关, 从而是枢轴量.

2.

$$\mathbb{P}\left(aY<\theta<bY\right)=\mathbb{P}\left(\frac{1}{b}<\frac{Y}{\theta}<\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geqslant 1-\alpha$$

当 $\frac{1}{a}>1-\alpha$ 时, 最小的满足条件的 b 为 $\frac{1}{\frac{1}{a}-1+\alpha}$. 当 $\frac{1}{a}\leqslant 1-\alpha$ 时, 不存在满足条件的 b.

9

设 $T\sim t(n)$, 以下记 $t_\beta(n)$ 表示满足 $\mathbb{P}(T\leqslant t)=\beta$ 的 $t\in\mathbb{R}$. $\chi^2_\beta(n)$ 同理.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(n-1)\Rightarrow 1-\alpha&=\mathbb{P}\left(t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}<t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\overline{X}+\sqrt{\frac{S^2}{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\overline{X}+\sqrt{\frac{S^2}{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)\\
\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow 1-\alpha&=\mathbb{P}\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}<\sigma<\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right)
\end{aligned}$$

代入 $n=145,\overline{X}=89.3,S^2=116.2,\alpha=0.05$, 有

$$\begin{aligned}
t_{\alpha/2}(n-1)&=-1.976575\\
t_{1-\alpha/2}(n-1)&=1.976575\\
\chi^2_{\alpha/2}(n-1)&=112.671131\\
\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)&=179.113678
\end{aligned}$$

此时 μ 和 σ 的 $1-\alpha$ 置信区间分别为

$$\left(\overline{X}+\sqrt{\frac{S^2}{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\sqrt{\frac{S^2}{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)=(87.530574,91.069426)$$
$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right)=(9.665402,12.186472)$$

10

1. 注意到 $\overline{X}\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2/n_1),\overline{Y}\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2/n_2)$, 因此其线性组合 $\overline{X}-\overline{Y}$ 也服从正态分布, 计算 $\mathbb{E}\left[\overline{X}-\overline{Y}\right]=\mu_1-\mu_2,\operatorname{Var}\left[\overline{X}-\overline{Y}\right]=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sigma^2$ 可知 $\overline{X}-\overline{Y}\sim\mathcal{N}\left(\mu_1-\mu_2,\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sigma^2\right)$, 即 $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$.

   注意到 $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1),\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$ 且两者独立, 从而 $\frac{(n_1+n_2-2)S_w^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-1)$.

   需要进一步说明的是 $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma}$ 与 $\frac{(n_1+n_2-2)S_w^2}{\sigma^2}$ 是相互独立的, 在上一次作业的第 **6** 题中已经证明过类似结论, 故不再赘述. 综上, 我们得到了

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}}=\frac{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma}}{\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)S_w^2}{\sigma^2}/(n_1+n_2-2)}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

2. 注意到 $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}} \sim t(n_1+n_2-2)$,

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}\left(t_{1-\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right) < \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_1+\mu_2}{S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}} < t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) < \mu_1-\mu_2 < \overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)
\end{aligned}$$

即 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2), \overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{n_1^{-1}+n_2^{-1}}t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right]$$