算分第五次作业

周书予
2000013060@stu.pku.edu.cn

March 30, 2022

5.5

原问题的解是一个 8 维向量 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_8)$, 满足 $x_i \in [1, 8] \cap \mathbb{Z}$ 且两两不同, $x_i + i$ 两两不同, $x_i - i$ 两两不同.

搜索树是一棵 8 叉树 (每个节点有至多 8 个子节点), 其中每个节点 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ $(0 \leqslant k \leqslant 8)$ 都需要是**合法**的, 即需要满足 $\{x_i\}_{i=1}^k, \{x_i+i\}_{i=1}^k, \{x_i-i\}_{i=1}^k$ 均两两不同. 节点 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 有子节点 $(y_1, y_2, \cdots, y_{k+1})$, 当且仅当 $x_i = y_i$ $(\forall i \leqslant k)$. 根节点为 $()$, 广度优先遍历整棵树, 即得到了 8 皇后问题的一个广度优先搜索算法.

8 皇后问题求解的时间复杂度显然是常数. 如果扩展到 n 皇后问题, 时间复杂度为 $O(n!)$.

5.8

1. 电路板按照 $X = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$ 的顺序排列, 跨越每一对相邻插槽的连线数分别是 $1, 2, 1, 2, 2, 0, 1$, 故 $\mathrm{density}(X) = 2$.

2. 考虑 $N_2 = \{2, 3\}, N_3 = \{1, 3\}, N_4 = \{3, 6\}$, 无论 $1, 2, 3, 6$ 这四块电路板按照什么顺序排列, 3 号电路板总会存在其一侧 (左/右) 包含 $1, 2, 6$ 三块电路板中的至少两块, 这使得 3 号电路板与该侧相邻插槽的连线数至少是 2, 因此最优解 $\mathrm{dansity}(X) \geqslant 2$. 所以上述解是最优的.

排列-流水线作业调度问题

以排列树作为搜索空间, 树上的每个节点表示完整或部分的排列. 在节点 $X = \langle p_1, p_2, \cdots, p_k \rangle$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ 处, 维护向量 $\vec{t_X} = (t_{X,1}, \cdots, t_{X,m})$, 其中 $t_{X,j}$ 表示在依次接受 X 中所有作业后, 第 j 台机器停止加工的时间. 如果 $k < n$, 在选取 $p_{k+1} \notin \{p_1, \cdots, p_k\}$ 扩展到 $Y = \langle p_1, p_2, \cdots, p_{k+1} \rangle$ 时, 有更新 $t_{Y,j} = \max\{t_{X,j}, t_{Y,j-1}\} + T(p_{k+1}, j)$.

对于代价函数 $f(x)$, 在节点 X 处可估计该节点扩展出的叶节点的代价函数的上下界, 其中

$$\begin{aligned} l(x) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(t_{X,i} + \sum_{j \notin \{p_1, \cdots, p_k\}} T(j, i) \right) \\ u(x) &= t_{X,m} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \notin \{p_1, \cdots, p_k\}} T(j, i) \end{aligned} \tag{1}$$

按照优先队列式分支限界法实现即可.