Machine Learning Homework: Week 9 & 10

周书予

2000013060@stu.pku.edu.cn

May 18, 2022

Algorithm 1 Randomized Weighted Updating

1: Initialize $w_{1,i} \leftarrow 1, \forall i \in [n]$
2: Choose parameter $\beta \in [\frac{1}{2}, 1)$
3: **for** $t = 1 \to T$ **do**
4: Chooes $\tilde{y_t} = \tilde{y_{t,i}}$ with probability proportional to $w_{t,i}$
5: $w_{t+1,i} \leftarrow \begin{cases} \beta \cdot w_{t,i}, & \tilde{y_{t,i}} \neq y_t \\ w_{t,i}, & \tilde{y_{t,i}} = y_t \end{cases}, \forall i \in [n]$
6: **end for**

定理 1. 在 Randomized Weighted Updating 算法下, 有

$$\mathbb{E}\left[L_T\right] \leqslant (2-\beta)m_T^* + \frac{\ln n}{1-\beta}$$

证明. 注意到权值的更新无关于每轮有没有答错, 因此 $\mathbb{1}[\tilde{y_t} \neq y_t]$ 是独立随机变量.

第 i 轮结束后, 总权值的变化一定是 $W \to W(1-(1-\beta)\mathbb{P}\left(\tilde{y_t} \neq y_t\right))$, 由于 $\mathbb{E}\left[L_T\right] = \sum_{t=1}^{T} \mathbb{P}\left(\tilde{y_t} \neq y_t\right)$, 因此

$$\beta^{m_T^*} \leqslant n \prod_{t=1}^{T} (1-(1-\beta)\mathbb{P}\left(\tilde{y_t} \neq y_t\right)) \leqslant n \prod_{t=1}^{T} \mathrm{e}^{-(1-\beta)\mathbb{P}(\tilde{y_t} \neq y_t)} = n\mathrm{e}^{-(1-\beta)\mathbb{E}[L_T]}$$

从而得到了

$$\mathbb{E}\left[L_T\right] \leqslant \frac{\ln(1/\beta)m_T^* + \ln n}{1-\beta}$$

只需要进一步证明 $\frac{\ln(1/\beta)}{1-\beta} \leqslant 2-\beta$. 考虑函数 $f(\beta) = \ln\beta + (1-\beta)(2-\beta)$, $f'(\beta) = \frac{(1-\beta)(1-2\beta)}{\beta}$, 当 $\beta \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时恒有 $f'(\beta) \leqslant 0$, 从而 $f(\beta) \geqslant f(1) = 0$, 说明了 $\ln(1/\beta) \leqslant (1-\beta)(2-\beta)$, $\frac{\ln(1/\beta)}{1-\beta} \leqslant 2-\beta$. □