算分第六次作业

周书予

2000013060@stu.pku.edu.cn

April 7, 2022

1 写出下列问题的线性规划表达

(a)

设 $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ \text{s.t.} \quad & \vec{y} \geqslant \vec{x} \\ & \vec{y} \geqslant -\vec{x} \\ & A\vec{x} \leqslant \vec{b} + 1 \\ & A\vec{x} \geqslant \vec{b} - 1 \end{aligned}$$

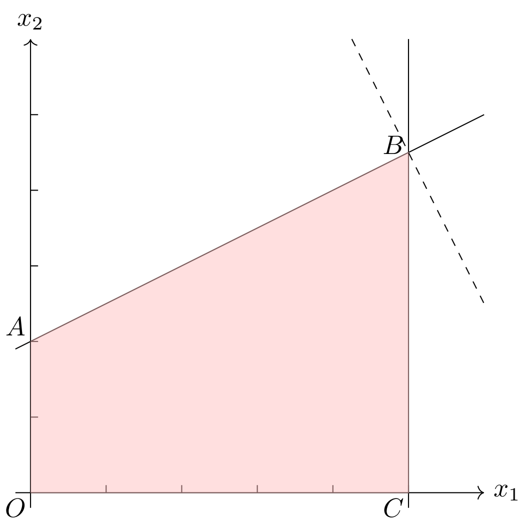
(b)

设 $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ \text{s.t.} \quad & \vec{y} \geqslant A\vec{x} + \vec{b} \\ & \vec{y} \geqslant 0 \end{aligned}$$

2 教材习题 6.6

(1)



最优解在 B 点: $x_1 = 5, x_2 = 4.5$, 最优值为 14.5.

(2)

标准型为

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & -2x_1 - x_2\\ \text{s.t.}\quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4\\ & x_1 + x_4 = 5\\ & x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3,4)\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 取 $B = (P_1, P_2)$, 则 $\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ 4.5\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) = (5, 4.5)$, 对应点 B, 是可行解.
- 取 $B = (P_1, P_3)$, 则 $\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ 9\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) = (5, 0)$, 对应点 C, 是可行解.
- 取 $B = (P_1, P_4)$, 则 $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\\ 9\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) = (-4, 0)$, 不是可行解.
- P_2, P_3 线性相关, 故不能取 $B = (P_2, P_3)$.
- 取 $B = (P_2, P_4)$, 则 $\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 2)$, 对应点 A, 是可行解.
- 取 $B = (P_3, P_4)$, 则 $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$, 对应点 O, 是可行解.

3 对偶线性规划

原线性规划问题可以写成

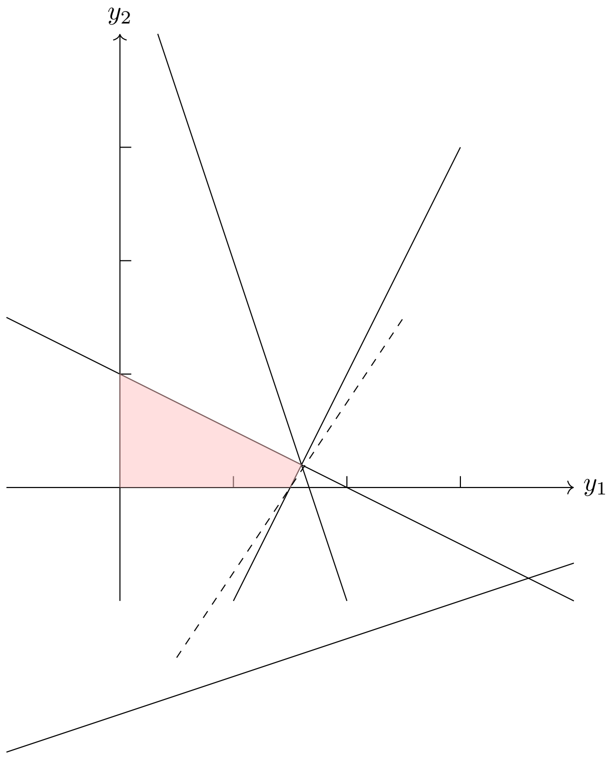
$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & \vec{c}^{\mathrm{T}}\vec{x}\\ \text{s.t.}\quad & A\vec{x} \geqslant \vec{b}\\ & \vec{x} \geqslant 0\end{aligned}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -3\end{pmatrix}, \vec{b} = (2, -3)^{\mathrm{T}}, \vec{c} = (2, 3, 5, 6)^{\mathrm{T}}, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$. 其对偶问题为

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & \vec{b}^{\mathrm{T}}\vec{y}\\ \text{s.t.}\quad & A^{\mathrm{T}}\vec{y} \leqslant \vec{c}\\ & \vec{y} \geqslant 0\end{aligned}$$

其中 $\vec{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$. 可以展开写为

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & 2y_1 - 3y_2\\ \text{s.t.}\quad & y_1 + 2y_2 \leqslant 2\\ & 2y_1 - y_2 \leqslant 3\\ & 3y_1 + y_2 \leqslant 5\\ & y_1 - 3y_2 \leqslant 6\\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geqslant 0\end{aligned}$$



最优解为 $y_1 = 1.5, y_2 = 0$, 最优值为 3.

注意到在 $(1.5, 0)$ 处, 对偶问题只有第二个限制条件是紧的, 根据互补松弛型, 原问题的最优解一定形如 $\vec{x} = (0, x_2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 故不难发现最优解为 $(0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 最优值为 3.

4 线性规划建模

我们希望能找到 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\{\alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} | \vec{x} \in \mathcal{P}_1\}$ 与 $\{\alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} | \vec{x} \in \mathcal{P}_2\}$ 不交. 可以考虑最大化 $\min\{\alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} | \vec{x} \in \mathcal{P}_1\}$ 与 $\max\{\alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} | \vec{x} \in \mathcal{P}_2\}$ 的差来实现这一点 (不难证明 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 是闭集, 因此 $\max, \min$ 是良定的).

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}_{\alpha} \quad \text{minimize}_{\vec{x}_1, \vec{x}_2} \quad & \alpha^{\mathrm{T}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\
\text{s.t.} \quad & A\vec{x}_1 \leqslant \vec{b} \\
& C\vec{x}_2 \leqslant \vec{d}
\end{aligned}
$$

考虑把该问题转换成线性规划问题. 固定 α 时, 该问题是一个关于 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 的线性规划问题, 考虑其对偶型, 可知如下规划问题与原问题等价:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}_{\alpha, \vec{y}_1, \vec{y}_2} \quad & -\vec{b}^{\mathrm{T}}\vec{y}_1 - \vec{d}^{\mathrm{T}}\vec{y}_2 \\
\text{s.t.} \quad & A^{\mathrm{T}}\vec{y}_1 \geqslant -\alpha \\
& C^{\mathrm{T}}\vec{y}_2 \geqslant \alpha
\end{aligned}
$$

该问题是一个线性规划问题, 故可以使用线性规划问题求解算法解决. 在解得最优解 α 后, 可以进一步通过解线性规划问题得到 $\min\{\alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} | \vec{x} \in \mathcal{P}_1\}$ 与 $\max\{\alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} | \vec{x} \in \mathcal{P}_2\}$ 的值, 分别记为 a, b, 令 $\gamma = \frac{a+b}{2}$, 即可满足 $\forall \vec{x} \in \mathcal{P}_1, \alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} > \gamma, \forall \vec{x} \in \mathcal{P}_2, \alpha^{\mathrm{T}}\vec{x} < \gamma$.