计算理论导论 课程笔记

酥雨
zusuyu@stu.pku.edu.cn

April 6, 2022

目录

1 正则语言

定义 1.1 (Deterministic Finite Automaton, DFA). (确定性) 有限自动机是一个五元组 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, 其中

- Q 是称为**状态**的有限集.
- Σ 是称为**字符集**的有限集.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ 被称为**转移函数**.
- $q_0 \in Q$ 称为**起始态**.
- $F \subseteq Q$ 称为**接受态 (终止态) 集合**.

称字符串 $w = w_1 w_2 \cdots w_m (w_i \in \Sigma)$ 可以被 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 接受, 如果存在状态序列 $r_0, r_1, \cdots, r_m \in Q$ 满足**(i)** $r_0 = q_0$, **(ii)** $r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$ $(\forall i = 0, 1, \cdots, m-1)$, **(iii)** $r_m \in F$.

所有可被 M 识别的字符串 w 构成集合 A, 则称 A 是 DFA M 的语言 (或者说 DFA M 识别/接受 A), 记为 $L(M) = A$.

定义 1.2 (正则语言). 正则语言就是能够被有限自动机识别的语言.

定义 1.3 (正则操作). 定义如下三种正则操作

- **Union**: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$.
- **Concatenation**: $A \circ B = \{xy | x \in A \text{ and } y \in B\}$.
- **Star**: $A^* = \{x_1 x_2 \cdots x_k | k \geqslant 0 \text{ and each } x_i \in A\}$.

注 1.1. 补集 $\overline{A} = \Sigma^* - A$ 操作在正则语言下是封闭的: 只需要把终止态集合 F 改成 $Q - F$ 即可.

定理 1.1. 正则操作 union 在正则语言下是封闭的: 把两个自动机放在一起跑就行了.

由于只利用已有的有限自动机模型证明 concatenation 和 star 的封闭性是困难的, 我们引入 “非确定性”.

定义 1.4 (Nondeterministic Finite Automaton, NFA). 非确定性有限自动机是一个五元组 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, 其中 δ 不再是 $Q \times \Sigma \to Q$ 的函数, 而是 $Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ 的, 其中 $\mathcal{P}$ 表示幂集, Σ_ε 表示 $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

相应的, 称字符串 $w = w_1 w_2 \cdots w_m (w_i \in \Sigma)$ 可以被 NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 接受, 如果 w 可以写成 $w = y_1 y_2 \cdots y_{m'} (y_i \in \Sigma_\varepsilon)$, 且存在状态序列 $r_0, r_1, \cdots, r_{m'} \in Q$ 满足**(i)** $r_0 = q_0$, **(ii)** $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$ $(\forall i = 0, 1, \cdots, m'-1)$, **(iii)** $r_{m'} \in F$.

注 1.2. DFA 的每个状态对每种字符都有恰好一条转移出边, 而相对的, NFA 可能有零条、一条或者多条, 有几条出边就表示会创建出多少个独立的 “后继进程”. 此外还存在 ε 的出边, 表示可以不输入任何字符创建进程.

定理 1.2 (NFA 与 DFA 的等价性). 任何 NFA 都存在等效的 DFA.

证明. 对 k 个状态的 NFA, 构造一个 2^k 个状态的 DFA, 每个状态表示 “可能处在的 NFA 状态” 的子集.

形式化的, 对于 NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, 构造 DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, 其中

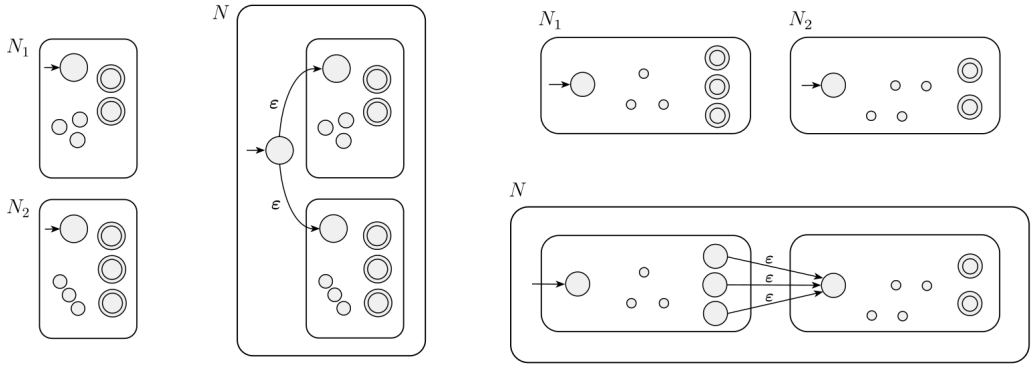
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
- $\forall R \in Q', a \in \Sigma, \delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$.
- $q_0' = \{q_0\}$.
- $F' = \{R \in Q' | R \cap F \neq \varnothing\}$.

□

推论 1.1. 一个语言是正则的当且仅当可以被一台非确定性有限自动机识别.

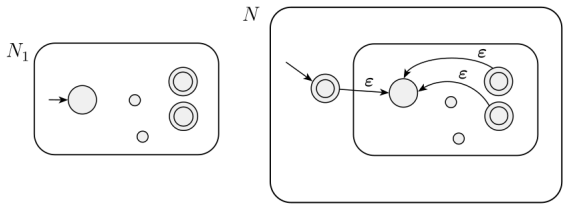
定理 1.3. union, concatenation 和 star 在正则语言下都是封闭的.

证明. 不多说了看图.



(a) proof for union

(b) proof for concatenation



(c) proof for star

□

定义 1.5 (正则表达式). 称 R 是正则表达式, 如果 R 为

- $\{a\}$, 其中 a 是字符集 Σ 中的某个元素
- $\{\varepsilon\}$, 其中 ε 表示空串
- $\varnothing$
- $(R_1 \cup R_2)$, 其中 R_1, R_2 是某两个正则表达式
- $(R_1 \circ R_2)$, 其中 R_1, R_2 是某两个正则表达式
- (R_1^*), 其中 R_1 是某个正则表达式

例 1.1. 对于任意正则表达式 R, $R \cup \varnothing = R \circ \varepsilon = R$, $R \circ \varnothing = \varnothing$, $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$.

定理 1.4 (正则表达式与有限自动机的等价性). 一个语言是正则的当且仅当它可以被一个正则表达式描述.

证明. "⇐" 的证明是简单的, 只需要根据正则表达式 R 构造 NFA, 利用 "union, concatenation, star 的封闭性" 的构造性证明即可.

"⇒" 的证明中, 我们引入 GNFA 的定义 (每条转移边上的 label 是一个正则表达式), 然后分别展示如何把 DFA 转化成 GNFA 以及如何根据 GNFA 构造正则表达式.

DFA 转 GNFA 是简单的——只需要额外加入两个状态表示 q_{start} 和 q_{accept} 即可.

观察到一个 GNFA 有 $k \geqslant 2$ 个状态. 如果 $k = 2$, 那么 q_{start} 到 q_{accept} 的转移边上的正则表达式就是该有限自动机对应的正则表达式. 如果 $k > 2$, 那么考虑选出一个状态 q_{rip} 删除, 此时对于 $q_i, q_j \in Q \setminus \{q_{\text{rip}}\}$, 如果

$\delta(q_i, q_{\text{rip}}) = R_1, \delta(q_{\text{rip}}, q_{\text{rip}}) = R_2, \delta(q_{\text{rip}}, q_j) = R_3, \delta(q_i, q_j) = R_4$, 则修改 $\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4)$. 归纳即可. □

定义 1.6 (Generalized Nondeterministic Finite Automaton, GNFA). 广义非确定性有限自动机是一个五元组 $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$, 其中 δ 是 $(Q \setminus \{q_{\text{accept}}\}) \times (Q \setminus \{q_{\text{start}}\}) \to \mathcal{R}$ 的转移函数, $\mathcal{R}$ 表示字符集 Σ 上的所有正则表达式. 注意不失一般性地要求了只有唯一的接受态, 以及 $q_{\text{start}} \neq q_{\text{accept}}$.

定理 1.5 (Pumping Lemma for Regular Language). 如果 A 是正则语言, 那么存在一个数 p (称为 **pumping length**), 使得对于任意 A 中长度至少为 p 的字符串 s, s 都可分成三部分 $s = xyz$ 满足

- for each $i \geqslant 0$, $xy^iz \in A$,
- $|y| > 0$,
- $|xy| \leqslant p$.

证明. 取 pumping length p 为识别此正则语言的 DFA M 的状态集大小 $|Q|$. 对于任意长度至少为 p 的 $s \in A$, 其经过的状态序列至少长为 $p+1$. 根据**鸽巢原理**, 存在一个状态 q 经过了至少两次, 于是把从 q_{start} 走到 q 的部分视作 x, q 回到自身的环视作 y, 从 q 走到 q_{accept} 的部分视作 z, 便构造出了划分. □

注 1.3. 利用 pumping lemma 可以证明某个语言 B 不是正则语言, 通用的方式是: 先假设 B 是正则的, 导出 pumping length p 的存在性, 然后根据这个 p 构造 $s \in B$, 并验证其**不能**被划分为 $s = xyz$. 第三个条件 $|xy| \leqslant p$ 有时也是有用的.

例 1.2. $B = \{0^n1^n | n \geqslant 0\}$ 不是正则语言.

证明. 假设 B 是正则语言, 那么就存在 pumping length p. 考虑串 0^p1^p, 无论 y 取其何种子串, $xyyz$ 都不可能 $\in B$. 因此 B 不是正则语言. □

例 1.3. $C = \{w | w \text{ has an equal number of 0s and 1s}\}$ 不是正则语言.

证明. 假设 C 是正则语言, 那么就存在 pumping length p. 考虑串 0^p1^p, 注意到我们要求了 $|xy| \leqslant p$, 所以 y 只能包含 0, 此时 $xyyz \notin B$. 因此 C 不是正则语言.

另一种证法是: 考虑 $C \cap 0^*1^* = B$, 正则语言在 *intersection* 下是封闭的, 所以 C 正则会导出 B 正则. □

例 1.4. $F = \{ww | w \in \{0,1\}^*\}$ 不是正则语言.

证明. 考虑串 0^p10^p1, 注意到 y 只能包含 0, 从而 $xyyz \notin F$, 因此 F 不是正则语言. □

例 1.5. $D = \{1^{n^2} | n \geqslant 0\}$ 不是正则语言.

证明. 考虑串 1^{p^2}. 由于 $|y| \leqslant p$, 所以 $|xyyz| = p(p+1) < (p+1)^2$ 不可能是完全平方数, $xyyz \notin D$, 说明 D 不是正则语言. □

例 1.6. $E = \{0^i1^j | i > j\}$ 不是正则语言.

证明. 考虑串 $0^{p+1}1^p$, y 只能包含 0, 且 $|y| > 0$, 因此 xz 中 0 的个数不超过 1 的个数, $xz \notin E$, 说明 E 不是正则语言. □

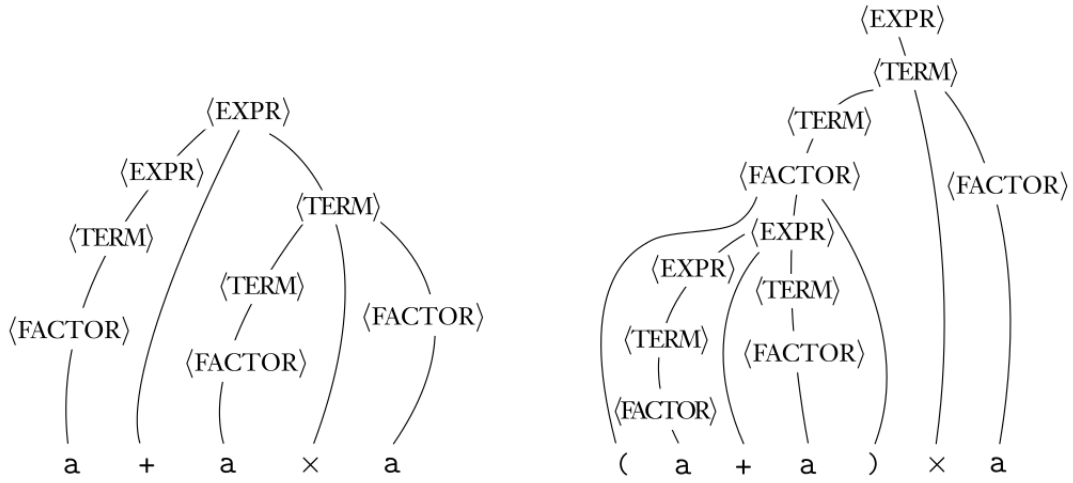
2 上下文无关文法

定义 2.1 (Context-Free Grammar/Language, CFG/CFL). 一个上下文无关文法是一个四元组 (V, Σ, R, S), 其中

- V 是称为**变量**的有限集,
- Σ 是称为**终止符**的有限集, 与 V 不交,
- R 是称为**规则**的有限集, 是从 V 到 $(V \cup \Sigma)^*$ 的映射,
- $S \in V$ 称为**起始变量**.

上下文无关语言就是上下文无关文法导出/生成的语言, 即 $\{w \in \Sigma^* | S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$.

定义 2.2 (parse tree). 形如这样子的东西.



命题 2.1. CFG 的描述能力严格强于有限自动机 (或者正则表达式).

证明. 对于任意的 DFA, 都可以构造与其等价的 CFG: 对每个状态 q_i 构造一个变量 R_i, 起始变量 R_0 对应起始态 q_0, 如果 $\delta(q_i, a) = q_j$, 就添加规则 $R_i \to aR_j$, 而如果 q_i 是接受态, 就添加规则 $R_i \to \varepsilon$.

而显然存在可被 CFG 描述的非正则语言, 比如 $\{0^n 1^n | n \in \mathbb{N}\}$. □

定义 2.3 (歧义性). 称一个串 w 由 CFG G 歧义生成, 如果存在 G 下 w 的两种 lestmost derivation (每次只替换最左边的变量) 方式, 或者说存在两棵不同的 parse tree 可以生成 w. 称一个 CFG G 是歧义的, 如果它可以歧义生成某些串.

定义 2.4 (固有歧义). 称一个 CFL L 是固有歧义的, 如果 L 只能由歧义的 CFG G 生成.

例 2.1. $\{a^i b^j c^k | i = j \text{ or } j = k\}$ 是固有歧义的.

我们希望能给有限自动机做一些加强, 使其能够达到与 CFG 相同的表达能力. 最终决定了为其添加栈结构, 于是得到了如下定义的 “下推自动机” :

定义 2.5 (Pushdown Automaton, PDA). 下推自动机是一个六元组 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, 其中

- Q 是状态集,
- Σ 是输入字符集,
- Γ 是栈字符集,
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ 是转移函数,

- $q_0 \in Q$ 是起始态,
- $F \subseteq Q$ 是接受态集合.

其中 $\Sigma_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon$ 分别表示 $\Sigma \cup \{\varepsilon\}, \Gamma \cup \{\varepsilon\}$. $(q', b) \in \delta(q, c, a)$ 表示在状态 q 上被输入 c 字符时, 会先从栈顶 pop 出字符 a, 再向栈顶 push 进字符 b, 最后转移到状态 q'. 幂集 $\mathcal{P}$ 暗含了下推自动机是 nondeterministic 的.

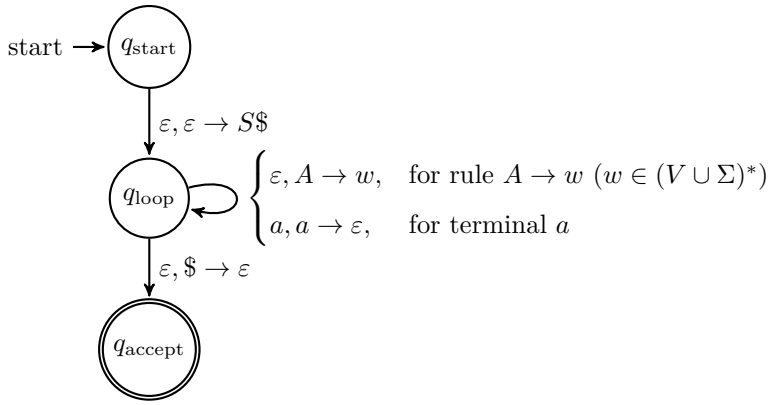
称字符串 $w = w_1 w_2 \cdots w_m (w_i \in \Sigma_\varepsilon)$ 可以被 PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ 接受, 如果存在状态序列 $r_0, r_1, \cdots, r_m \in Q$ 和字符串 (栈) 序列 $s_0, s_1, \cdots, s_m \in \Gamma^*$, 满足

- $r_0 = q_0, s_0 = \varepsilon$,
- for $i = 0, 1, \cdots, m-1$, $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, where $s_i = at, s_{i+1} = bt$ for some $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ and $t \in \Gamma^*$,
- $r_m \in F$.

类似的, 可以定义 $L(M)$ 表示 PDA M 接受的所有字符串构成的集合, 即 M 所识别的语言.

定理 2.1 (下推自动机与上下文无关文法的等价性). 一个语言是上下文无关的, 当且仅当存在某个下推自动机可以识别它.

证明. "⇒" : 需要根据 CFG 来构造 PDA. 一开始把 CFG 的起始变量写在栈上, 并保证在替换过程中栈顶始终是一个尚未替换的变量. 利用 nondeterminism 尝试每一种变量的替换方式. 每次只考虑替换栈顶的变量, 而如果栈顶是一个终止符, 就直接和输入匹配掉. 当输入匹配完且栈为空时, 代表输入串可接受.



"⇐" : 需要根据 PDA 来构造 CFG. 不妨假设[1]该 PDA 有如下特性: **(i)**只有一个接受态 q_{accept}, **(ii)**会在接受前清空栈, **(iii)**每次转移都会要么 push 要么 pop, 没有 both 和 neither 的情况. 构造变量 A_{pq} 表示所有能够使 PDA 从 "状态 p 且栈空" 转移到 "状态 q 且栈空" 的串组成的语言, 其中 $A_{q_0 q_{\text{accept}}}$ 是该 CFG 的起始变量. 按如下方式构造 CFG 的规则集合:

- 对于任意 $p, q, r, s \in Q, u \in \Gamma, a, b \in \Sigma_\varepsilon$, 如果 $(r, u) \in \delta(p, a, \varepsilon), (q, \varepsilon) \in \delta(s, b, u)$, 就添加规则 $A_{pq} \to a A_{rs} b$,
- 对于任意 $p, q, r \in Q$, 添加规则 $A_{pq} \to A_{pr} A_{rq}$,
- 对于任意 $p \in Q$, 添加规则 $A_{pp} \to \varepsilon$.

构造思路来源于考虑压栈弹栈的括号序列, 该序列要么被一个大括号包裹 (第一种), 要么由两个括号序列组成 (第二种). 可以归纳证明 A_{pq} 的构造方式与其含义的等价性. □

定理 2.2 (Pumping Lemma for CFL). 如果 A 是上下文无关语言, 那么存在一个数 p(称为 **pumping length**), 使得对于任意 A 中长度至少为 p 的字符串 s, s 都可以分成五部分 $s = uvxyz$ 满足

[1]需要简短地说明转化的可行性. 前两条只需要添加额外的结束状态和转移函数即可, 第三条需要在所有 both 和 neither 的转移中间插入中间状态.

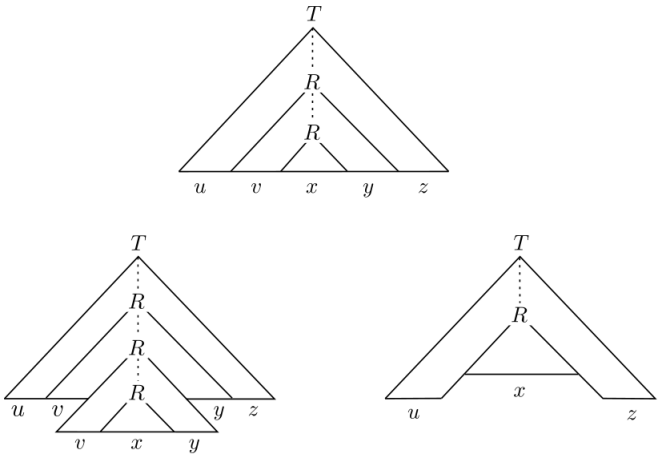
- for each $i \geqslant 0, uv^i xy^i z \in A$,
- $|vy| > 0$,
- $|vxy| \leqslant p$.

证明. 设 b 为规则中的最大“度数”, 即替换字符串的最大长度. 如果 parse tree 的树高是 h(根的深度是 0), 那么生成的字符串长度至多为 b^h.

取 pumping length p 为 $b^{|V|+1}$. 长度至少为 p 的串对应的 parse tree 树高至少为 $|V|+1$, 故存在一条“直链”上有至少 $|V|+1$ 个变量, 根据**鸽巢原理**, 存在一个变量出现至少两次, 记为 R, 那么对于 R 就可以无限复制或者把两次出现压缩成一次 (如图).

为了满足第二个条件, 我们要求 parse tree 必须是”最简”的, 因为只有冗余的替换方式才会导致两次 R 的出现之间没有任何字符实际生成.

为了满足第三个条件, 取 R 为满足条件的“深度最大”的, 即两个 R 都出现在最底下 $|V|+1$ 层. 此时 $|vxy|$ 对应上面的 R 的子树大小, 受深度限制不超过 $b^{|V|+1} = p$.



□

例 2.2. $B = \{a^n b^n c^n | n \geqslant 0\}$ 不是上下文无关语言.

证明. 假设 B 是正则语言, 那么就存在 pumping length p. 考虑串 $a^p b^p c^p$, 注意到 $|vxy| \leqslant p$ 故不可能含有超过两种字符, 那么在重复时就不可能保证三种字符出现次数仍然相同, 从而 B 不是上下文无关语言. □

例 2.3. $C = \{a^i b^j c^k | 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k\}$ 不是上下文无关语言.

证明. 考虑串 $a^p b^p b^p$, 注意 v, y 分别只能包含一种字符, 否则就会出现顺序错乱. 无论分别包含什么字符, 考虑 pumping up 或者 pumping down, 总可以使得生成的新字符串不属于 C, 从而 C 不是上下文无关语言. □

例 2.4. $D = \{ww | w \in \{0,1\}^*\}$ 不是上下文无关语言.

证明. 考虑 $s = 0^p 1^p 0^p 1^p$.

首先指出 vxy 必须跨域 s 的中点. 假设 vxy 只出现在 s 的左半边, 那么 uv^2xy^2z 中, 中点右侧的字符一定是 1(因为 $|vy| \leqslant p$, 只会把 $\frac{|vy|}{2} \leqslant \frac{p}{2}$ 个 1 推到右半边), 而起始字符是 0 说明该串不是 ww 形式的.

但如果 vxy 跨越 s 的中点, 那么就一定跟前 p 个 0 与后 p 个 1 无交, 因此 uxz 就会形如 $0^p 1^i 0^j 1^p$, 其中 $i, j < p$, 这显然不属于 D. □

3 图灵机

图灵机是有限自动机的进一步加强 (也严格强于下推自动机), 在状态集的基础上额外添加了外部存储设备——“纸带”. 一条纸带是一列无限长的存储单元 (称为“格子”), 其中每个格子上只能存储有限的信息, 在单步计算中也只能读取/写入一个格子, 读取/写入的格子位置 (称为“纸带头”) 在相邻两步计算间也至多移动一格.

通俗地来讲, 一台拥有 k 条纸带的图灵机在一步计算中, 会首先查询其状态并分别在 k 个纸带头位置读取 k 个字符, 然后根据这些信息, 决定变换到什么状态, 将 k 个纸带头处的字符改写成什么, 以及如何移动 k 个纸带头 (向左或右移动一格, 或者保持不动).

定义 3.1 (Deterministic Turing Machine, TM). 一台 k 条纸带的 (确定性) 图灵机是一个七元组 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$, 其中

- Q 是状态集.
- Σ 是不包含空格符 $\square$ 的输入字符集, Γ 是纸带字符集. $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{\text{L(eft)}, \text{S(tay)}, \text{R(ight)}\}^k$ 是转移函数.
- $q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}} \in Q$ 分别是起始态, 接受态和拒接态.

初始时, 第一条纸带的第一个格子上标有 $\triangleright$ 字符, 表示输入串的开始, 随后紧接着是输入串 $w \in \Sigma^*$. 除了这 $|w|+1$ 个格子外, 所有纸带的所有格子都被初始化为空格符 $\square$.

一旦图灵机运行到 q_{accept} 或者 q_{reject} 状态时, 它就会**停机**. 因此可以把一台图灵机看成一个 $\Sigma^* \to \{0,1\}$ 的函数. 一般地, 对于图灵机 M 和字符串 $x \in \Sigma^*$, 我们有 $M(x) \in \{0,1\}$, 其中 $M(x) = 1$ 当且仅当对于输入 x, M 会运行到 q_{accept}, $M(x) = 0$ 当且仅当对于输入 x, M 会运行到 q_{reject} **或者不停机**.

对于图灵机 M, 记 $L(M) = \{x \in \{0,1\}^* | M(x) = 1\}$ 为 M 所**识别**的语言.

注 3.1. 图灵机还存在另一种设定: 并没有 $q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}$ 两个特殊状态, 取而代之的是单一的停机状态 q_{halt}, 同时最后一条纸带被用作“输出纸带”. 图灵机运行到 q_{halt} 时停机, 此时输出纸带上的内容就是该图灵机的输出.

这种设定下的图灵机可以看作一个 $\Sigma^* \to \Sigma^*$ 的函数, 但不难验证其计算能力与原本设定下的是相同的. 之后为了省事可能会混淆使用两种设定, 不妨碍理解就好.

定义 3.2 (图灵可识别与图灵可判定). 称一个语言是**图灵可识别 (Turing-recognizable)** 的, 如果存在一台图灵机可以识别它 (i.e. 接受其中的每一个字符串). 称一台图灵机是一个 **decider**, 如果它对于任何输入都不会无限循环. 称一个语言是**图灵可判定 (Turing-decidable)** 的, 如果存在一台 decider 可以识别它.

定义 3.3 (函数的计算, 运行时间). 考虑函数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ 以及 $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 令 M 为一图灵机. 我们称 M 计算了函数 f, 如果对于任意 $x \in \{0,1\}^*$, 只要 M 被初始化为输入 x, 它就能在输出纸带上写下 $f(x)$ 并停机. 称 M 在 $T(n)$ 的时间内计算了 f, 如果它计算每个 x 都可以在 $T(|x|)$ 步内停机.

定义 3.4 (Time-constructible functions). 称一个函数 $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是 time-constructible 的, 如果 $T(n) \geqslant n$ 且存在运行时间为 $T(n)$ 的计算函数 $x \to \llcorner T(|x|) \lrcorner$ 的图灵机 M, 其中 $\llcorner x \lrcorner$ 表示 x 的 binary representation.

例 3.1. $A = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$ 可以被 (单纸带) 图灵机识别.

证明. 给待匹配的两个位置打上标记, 每次前后移动找标记, 用状态记录已经看过的字符, 若比较失败则直接 reject, 否则向后移动标记继续比较直到全部比完. 以上的描述的图灵机的运行时间是 $T(n) = O(n^2)$ 的. □

例 3.2. $B = \{ww | w \in \{0,1\}^*\}$ 可以被双纸带图灵机识别.

证明. 没有 # 记号, 无法方便地找到中间位置. 可以在二号纸带上把输入复制一遍, 然后二号纸带头移动到中间 (一号纸带头走一步, 二号纸带头走两步), 顺序比较即可. 运行时间是 $O(n)$. □

图灵机由字符集大小, 纸带数量等的不同, 产生了许多不同的变种. 它们在计算能力上会有所不同吗?

命题 3.1 (小字符集模拟大字符集). 对于任意 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$ 以及 time-constructible function $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 如果 f 可以被图灵机 M 以 $T(n)$ 时间计算, 那么它也可以被一台字符集为 $\{0,1,\square,\triangleright\}$ 的图灵机 $\tilde{M}$ 以 $O(T(n)\log|\Gamma|)$ 的时间计算.

证明. 任意 Γ 中的字符都可以用 $\log|\Gamma|$ 个比特表示. 每步转移时先用 $\log|\Gamma|$ 步读出纸带上一个字符的 encoding 并存入状态, 再根据转移函数进行移动, 最后用 $\log|\Gamma|$ 步写下新字符的 encoding 表示. □

命题 3.2 (单纸带模拟多纸带). 对于任意 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$ 以及 time-constructible function $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 如果 f 可以被有 k 条纸带的图灵机 M 以 $T(n)$ 时间计算, 那么它也可以被一台单纸带图灵机 $\tilde{M}$ 以 $O(kT^2(n))$ 的时间计算. 单纸带指的是只有一条可读可写的纸带, 它同时扮演了输入、工作和输出纸带的角色.

证明. 把单条纸带上的位置按照模 k 余数分配给 k 条纸带, 对每种字符 a 新建字符 $\hat{a}$ 表示所在纸带的纸带头指向这个字符. 注意到运行时间为 $T(n)$ 的图灵机, 对于长度为 n 的输入, 最多只会用到前 $T(n)$ 个位置, 所以每步转移时花费 $O(kT(n))$ 的代价搜索每个纸带头的位置即可[2], 运行时间为 $O(kT^2(n))$. □

注 3.2 (健忘的图灵机, oblivious Turing Machine). 纸带头的移动只与输入长度有关, 而与输入的具体内容无关, 即对于任意 $x\in\{0,1\}^*$ 以及 $i\in\mathbb{N}$, M 在输入 x 并执行到第 i 步时, 所有纸带头的位置是关于 $|x|$ 和 i 的函数. 可以证明健忘的图灵机可以以平方的 overhead 模拟一台标准图灵机.

命题 3.3 (单向图灵机模拟双向图灵机). 对于任意 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$ 以及 time-constructible function $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 如果 f 可以被双向图灵机 (纸带的两个方向都有无限长)M 以 $T(n)$ 时间计算, 那么它也可以被一台单向图灵机 $\tilde{M}$ 以 $O(T(n))$ 的时间计算.

论点 3.1 (Church-Turing Thesis). 任何物理上可实现的计算设备都可以被图灵机实现.

定理 3.1 (通用图灵机存在). 存在图灵机 $\mathcal{U}$ 使得对于任意 $x,\alpha\in\{0,1\}^*$, $\mathcal{U}(\langle x,\alpha\rangle)=M_\alpha(x)$, 其中 M_α 为被 α 表示的图灵机. 进一步地, 如果 M_α 对于 x 在 T 步内停机, 则 $\mathcal{U}(\langle x,\alpha\rangle)$ 可以在 $CT\log T$ 步内停机, 其中 C 是一个仅依赖于 M_α 的字符集大小、纸袋条数、状态数的常数.

证明. 构造 $\mathcal{U}$ 为一台五纸带图灵机, 五条纸带分别为

- Input, 被模拟图灵机 M 的输入.
- Description of M, 主要为了记录转移函数 δ 以便查询.
- Simulation of M, 记录纸带信息. 这里需要用单纸带来模拟 M, 因而会产生平方的 overhead.
- Current state of M, 这部分不能简单地存在 $\mathcal{U}$ 的状态里, 因为对于 $\mathcal{U}$ 来说, M 的状态集大小并不是常数.
- Output, M 的输出.

注意每步模拟的过程中, 读取 M 所在状态, 读取转移函数都是关于 n 常数时间的.

可以设计一种类似势能分析的算法, 把单纸带模拟多纸带的 overhead 降到 $O(n\log n)$, 从而使通用图灵机模拟的复杂度优化到 $O(T\log T)$. □

[2]可以考虑在已使用部分的“最远处”打上标记并维护, 这样每次搜索的代价就不超过当前写入过的格子数量

4 不可判定语言

定义 4.1 (可识别/判定语言, recognizable/decidable Language). 可识别语言就是能够被一台图灵机识别的语言. 可判定语言就是能够被一台 decider 识别的语言.

定理 4.1. 存在不可识别语言.

证明. 只需要考虑 "语言" 与 "可识别语言" 的基数. 前者的基数是 $2^{\aleph_0}$, 后者的基数不超过图灵机的基数 (因为存在可识别语言到图灵机的单射), 而图灵机可以被有限长的字符串描述, 因此是可数的. □

定义 4.2 (可计算函数 (Computable Function)). 可计算函数就是可以被一台图灵机计算的函数. 特别的, 考虑函数 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$, 则 f 是可计算函数当且仅当 $L=\{x\in\{0,1\}^*|f(x)=1\}$ 是可判定语言.

定理 4.2. 存在不可计算函数/存在不可判定语言.

(证明中的构造是重要的. 这个结论本身相比定理 4.1 是平凡的.)

证明. 我们认为存在一个映射 $\alpha\to M_\alpha$ 可以把任意字符串映到一台图灵机 (以某种既定格式编码, 再把非法格式的串映到某台特定的图灵机即可). 考虑函数 $\mathrm{UC}(\alpha)=1-M_\alpha(\alpha)$, 我们指出 UC 是不可计算函数.

假设 UC 可计算, 考虑计算 UC 的图灵机 M. 考虑 $\mathrm{UC}(\llcorner M\lrcorner)$, 由于 M 计算了 UC, 我们知道 $\mathrm{UC}(\llcorner M\lrcorner)=M(\llcorner M\lrcorner)$, 但根据 UC 的定义, 又有 $\mathrm{UC}(\llcorner M\lrcorner)=1-M(\llcorner M\lrcorner)$, 产生了矛盾. □

例 4.1 (停机问题不可判定). $\mathsf{HALT}=\{\langle\llcorner M\lrcorner,\alpha\rangle|M \text{ halts on } \alpha\}$ 是不可判定语言.

证明. 假设存在 M_{HALT} 可以判定 HALT.

利用 M_{HALT} 可以构造判定语言 $L=\{\alpha|\mathrm{UC}(\alpha)=1\}$ 的 decider: 计算 $M_{\mathsf{HALT}}(\langle\alpha,\alpha\rangle)$, 如果得到 0 (说明 M_α 对 α 不停机) 则直接输出 1, 否则输出 $M_\alpha(\alpha)$ 的结果. 这与 UC 不可计算相矛盾. 因此 HALT 不可判定. □

例 4.2 (接受问题不可判定). $\mathsf{AC}=\{\langle\llcorner M\lrcorner,\alpha\rangle|M \text{ accepts } \alpha\}$ 是不可判定语言.

证明. 利用 M_{AC} 可以直接构造 M_{UC}: 只要把 $M_{\mathsf{AC}}(\langle\alpha,\alpha\rangle)$ 的输出取反即可. □

定义 4.3 (映射规约, Mapping Reduction). 称语言 A 可映射规约到 (is mapping reducible to) 语言 B, 如果存在可计算函数 $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$, 使得 $w\in A$ 当且仅当 $f(w)\in B$, 记作 $A\leqslant_m B$.

命题 4.1. 如果 $A\leqslant_m B$, 则

- 如果 B 可判定, 则 A 也可判定.
- 如果 A 不可判定, 则 B 也不可判定.

例 4.3. $\mathsf{NAC}=\{\llcorner M\lrcorner|M \text{ accept nothing}\}$ 是不可判定语言.

证明. 考虑构造映射 f 满足 $w\in\overline{\mathsf{AC}}\Leftrightarrow f(w)\in\mathsf{NAC}$. 令 $f(\langle\llcorner M\lrcorner,\alpha\rangle)=\llcorner M'\lrcorner$ 其中 M' 不管输入直接运行 $M(\alpha)$. f 显然是可计算的, 故 $\overline{\mathsf{AC}}\leqslant_m\mathsf{NAC}$, 而可判定语言关于补集的封闭性导致 $\overline{\mathsf{AC}}$ 是不可判定语言, 从而 NAC 是不可判定语言. □

例 4.4. $\mathsf{EQU}=\{\langle\llcorner M_1\lrcorner,\llcorner M_2\lrcorner\rangle|L(M_1)=L(M_2)\}$ 是不可判定语言.

证明. 考虑构造映射 g. 取 $g(\llcorner M\lrcorner)=\langle\llcorner M\lrcorner,\llcorner M'\lrcorner\rangle$ 其中 M' 是拒绝一切输入的图灵机. 于是 $\llcorner M\lrcorner\in\mathsf{NAC}\Leftrightarrow\langle\llcorner M\lrcorner,\llcorner M'\lrcorner\rangle\in\mathsf{EQU}$, $\mathsf{NAC}\leqslant_m\mathsf{EQU}$, 从而 EQU 是不可判定语言. □

定理 4.3. 语言 A 可判定当且仅当 A 与 $\overline{A}$ 均可识别.

证明. $\Rightarrow$: 显然. $\Leftarrow$: 记 A 可被 M_1 识别, $\overline{A}$ 可被 M_2 识别, 考虑**并行**运行 M_1 和 M_2, 总有一个会给出结果. □

推论 4.1. HALT 和 AC 都是不可判定的可识别语言. 这说明 $\overline{\mathsf{HALT}}$ 和 $\overline{\mathsf{AC}}$ 都是不可识别语言.

5 时间复杂性, P 与 NP

定义 5.1 (DTIME 与 P). 对于函数 $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 称语言 $L\in\mathbf{DTIME}(T(n))$, 如果存在常数 $c>0$ 和一台运行时间为 $c\cdot T(n)$ 的 decider 可以识别 L.

$\mathbf{P}=\bigcup_{c\geqslant 0}\mathbf{DTIME}(n^c)$.

命题 5.1. $\mathbf{P}$ 在多项式次集合操作下是封闭的.

例 5.1. $\mathsf{PATH}=\{\langle G,s,t\rangle : G \text{ is a direct graph in which there is a path from } s \text{ to } t\}\in\mathbf{P}$.

定理 5.1 (Time Hierarchy Theorem). f,g 是满足 $f(n)\log f(n)=o(g(n))$ 的 time constructible 的函数, 则

$$\mathbf{DTIME}(f(n))\subsetneq\mathbf{DTIME}(g(n))$$

证明. 考虑这样的图灵机 D: 对于 $x\in\{0,1\}^*$, 用通用图灵机 $\mathcal{U}$ 模拟 $M_x(x)$ 运行至多 $g(|x|)$ 步 (是 $\mathcal{U}$ 的 $g(|x|)$ 步而不是 M_x 的 $g(|x|)$ 步), 如果 $\mathcal{U}$ 在 $g(|x|)$ 步数内输出了 $b\in\{0,1\}$, 则 D 输出 $1-b$, 否则 D 输出 0.

根据定义, D 对于任何输入 x 都会在 $g(|x|)$ 步内停机, 因此 $L(D)\in\mathbf{DTIME}(g(n))$. 我们通过反证法证明 $L(D)\notin\mathbf{DTIME}(f(n))$. 先叙述否命题: 存在图灵机 M 和常数 c, 使得对于任意输入 $x\in\{0,1\}^*$, M 都能在 $cf(|x|)$ 步内输出与 D 相同的结果.

对于输入 x, 用通用图灵机 $\mathcal{U}$ 模拟 M 只需要 $c'cf(|x|)\log f(|x|)$ 步, 其中 c' 是不依赖于 $|x|$ 的一个常数. 由于 $f(n)\log f(n)=o(g(n))$[3], 故存在充分大的 n_0 使得 $g(n)>c'cf(n)\log f(n)$ 对于任意 $n\geqslant n_0$ 均成立. 令 $x'=\llcorner M\lrcorner$ 满足 $|x'|\geqslant n_0$, 那么

- D 会输出与 M 相同的结果, 因为这是 M 的定义;
- D 会输出与 M 不同的结果, 因为 $c'cf(n)\log f(n)<g(n)$ 使得 $\mathcal{U}$ 对 M 的模拟已经结束了, 根据 D 的定义, D 应该输出相反的结果.

产生了矛盾. 因此 $\mathbf{DTIME}(f(n))\subsetneq\mathbf{DTIME}(g(n))$. □

定义 5.2 (NP). 称语言 $L\subseteq\{0,1\}^*$ 属于 **NP**, 如果存在一个多项式 $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和一个多项式时间图灵机 M(称为 L 的 **verifier**) 使得对于任意的 $x\in\{0,1\}^*$, 都有

$$x\in L\Leftrightarrow\exists u\in\{0,1\}^{p(|x|)},M(x,u)=1$$

如果 $x\in L$ 与 $u\in\{0,1\}^{p(|x|)}$ 满足 $M(x,u)=1$, 则称 u 是 x 的一个 **certificate**.

命题 5.2. 定义 $\mathbf{EXP}=\bigcup_{c\geqslant 0}\mathbf{DTIME}(2^{n^c})$, 则 $\mathbf{P}\subseteq\mathbf{NP}\subseteq\mathbf{EXP}$.

注 5.1. 根据 Time Hierarchy Theorem 我们知道 $\mathbf{P}\subsetneq\mathbf{EXP}$, 因此 $\mathbf{P}\subsetneq\mathbf{NP}$ 与 $\mathbf{NP}\subsetneq\mathbf{EXP}$ 至少一者为真.

定义 5.3 (非确定图灵机与 NTIME). 非确定图灵机 (Nondeterministic Turing Machine, NDTM) 是有两个转移函数 δ_0,δ_1 和一个特定状态 q_{accept} 的图灵机 M, 每步转移时, 可以任意选择遵从某一个转移函数. 对于输入 x, 称 $M(x)=1$ 当且仅当存在一个选择序列可以使 M 到达 q_{accept} 状态, 否则——任意选择序列都无法在停机前到达 q_{accept}——就认为 $M(x)=0$. 称 M 的运行时间为 $T(n)$, 如果对于任意输入 $x\in\{0,1\}^*$ 以及任意的选择序列, M 都会在 $T(|x|)$ 步内到达 q_{accept} 或者 q_{halt}.

对于 $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和语言 $L\subseteq\{0,1\}^*$, 称 $L\in\mathbf{NTIME}(T(n))$, 如果存在常数 $c>0$ 和一个运行时间为 $c\cdot T(n)$ 的非确定图灵机 M, 满足对于任意的 $x\in\{0,1\}^*$, $x\in L\Leftrightarrow M(x)=1$.

定理 5.2. $\mathbf{NP}=\bigcup_{c\geqslant 0}\mathbf{NTIME}(n^c)$.

证明. 非确定图灵机的选择序列可以看作 x 的一个 certificate, 反之亦然. □

[3] little-o 不能替换成 big-O, 我只能说懂的都懂.

定义 5.4 (多项式时间规约, NP-hard 与 NP-complete). 称语言 $L \subseteq \{0,1\}^*$ 可**多项式时间 (Karp) 规约**到语言 $L' \subseteq \{0,1\}^*$(记作 $L \leqslant_p L'$), 如果存在一个多项式时间可计算函数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ 使得对于任意 $x \in \{0,1\}^*$, $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L'$.

称 $L' \in \mathbf{NP}$-hard, 如果对于任意 $L \in \mathbf{NP}$, $L \leqslant_p L'$. $\mathbf{NP}$-complete $= \mathbf{NP} \cap \mathbf{NP}$-hard.

定理 5.3 ($\leqslant_p$ 的传递性).

- 若 $L \leqslant_p L'$ 且 $L' \leqslant_p L''$, 则 $L \leqslant_p L''$.
- 如果 $L \in \mathbf{NP}$-hard, 则 $L \in \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
- 如果 $L \in \mathbf{NP}$-complete, 则 $L \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

定理 5.4 (Cook-Levin Theorem). $\mathsf{SAT}, \mathsf{3SAT} \in \mathbf{NP}$-complete.

其中 $\mathsf{SAT} = \{\varphi \in \text{CNF} | \varphi \text{ is satisfiable}\}, \mathsf{3SAT} = \{\varphi \in \text{3CNF} | \varphi \text{ is satisfiable}\}$. CNF(Conjunctive Normal Form, 合取范式) 是一种形如 $\bigwedge_i \left(\bigvee_j v_{i_j} \right)$ 的特殊的 boolean formula, 其中每个 v_{i_j} 都是某个变量或者其否定. 3CNF 是每个 $\bigvee_j v_{i_j}$ (称为**从句 (clause)**) 中都只含有不超过 3 项的 CNF.

证明. $\mathsf{SAT}, \mathsf{3SAT} \in \mathbf{NP}$ 是平凡的. 先考虑证明 $\mathsf{SAT} \in \mathbf{NP}$-hard, 即 $\forall L \in \mathbf{NP}, L \leqslant_p \mathsf{SAT}$. 回顾两者定义

$$\begin{aligned} x \in L \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \text{ certificate } u \quad \text{s.t. } M(x,u) = 1 \\ \varphi_x \in \mathsf{SAT} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \text{ assignment } u \quad \text{s.t. } \varphi_x(u) = \text{True} \end{aligned}$$

因此考虑根据 M, x 来构造**多项式规模的** φ_x, 满足 $M(x,u) = 1 \Leftrightarrow \varphi_x(u) = \text{True}$.

不妨假设 M 是 **(i)** 双纸带且第一条纸带只读 **(ii)** oblivious 的 (参见注 3.2), 那么在 M 运行到第 i 步时, 其两个纸带头所指向的字符, 当前状态所组成的三元组 $z_i \in \Gamma \times \Gamma \times Q$ (称为 M 运行到第 i 步时的 **snapshot**) 将由后三者唯一决定: $z_{i-1}, z_{\text{prev}(i)}$ 和 $(x \circ u)_{\text{inputpos}(i)}$, 其中 $\text{prev}(i)$ 表示上一次工作纸带纸带头位置与第 i 步相同的时刻, $\text{inputpos}(i)$ 表示第 i 步时输入纸带的纸带头位置.

根据 M 的转移函数 δ, 可以构造出 $F : \{0,1\}^{2c+1} \to \{0,1\}^c$ 满足 $z_i = F(z_{i-1}, z_{\text{prev}(i)}, (x \circ u)_{\text{inputpos}(i)})$, 其中 c 是表示一个 snapshot 所需的比特数.

可以构造一个有 $n + p(n) + cT(n)$ 个变量的 CNF φ_x, 其中 p, T 是 M 的参数 (分别是 verifier 长度与运行时间关于 n 的函数). 把这些变量分别记为 y 以及 $z_1, \cdots, z_{T(n)}$, 它是下述这些条件的 AND:

1. y 的前 n 位和 x 相同.
2. z_1 表示初始状态 $(\triangleright, \square, q_{\text{start}})$.
3. $z_i = F(z_{i-1}, z_{\text{prev}(i)}, y_{\text{inputpos}(i)})$ $(\forall i \in \{2, \cdots, T(n)\})$.
4. $z_{T(n)}$ 表示到达 q_{halt} 的终止状态.

这些条件用 CNF 表示出来, 其长度是 $d(n + T(n))$, 其中 d 是与 n 无关的常数. 从而我们实现了多项式时间规约, 完成了 $L \leqslant_p \mathsf{SAT}$ 的证明.

然后考虑证明 $\mathsf{SAT} \leqslant_p \mathsf{3SAT}$. 只需要注意到

$$\bigvee_{i=1}^{k} u_i \cong \left(z \vee \bigvee_{i=1}^{k-2} u_i \right) \wedge (\overline{z} \vee u_{k-1} \vee u_k)$$

说明任意 CNF 都可以多项式时间规约到 3CNF. 所以 $\mathsf{SAT} \leqslant_p \mathsf{3SAT}$. □

例 5.2 (独立集). $\mathsf{INDSET} = \{\langle G, k \rangle | G \text{ has an independent set of size } k\} \in \mathbf{NP}$-complete.

证明. 显然 $\mathsf{INDSET} \in \mathbf{NP}$. 考虑通过 $\mathsf{3SAT} \leqslant_p \mathsf{INDSET}$ 来证明 $\mathsf{INDSET} \in \mathbf{NP}$-hard.

对于一个有 m 个 clause 的 3CNF φ, 对每个有 l 项的 clause 建不超过 2^l 个点, 表示能使这个 clause 为 True 的部分变量赋值 (互不相同). 在所有会产生冲突的点对间连边, 得到一张不超过 $7m$ 个点的图. 不难验证这张图存在大小为 m 的独立集当且仅当 φ 可满足. □

例 5.3 (点覆盖). Vertex-Cover $= \{\langle G, k\rangle | G$ has a subset of k vertices that covers all edges$\} \in$ **NP**-complete.

证明. 独立集很容易规约到点覆盖, 懂的都懂. □

例 5.4 (01 整数规划). 给出一列有理系数线性不等式, 判断是否存在一组 $\{0,1\}$ 赋值满足所有不等式. 把可满足的不等式组的集合记作 01IPROG. 01IPROG $\in$ **NP**-complete.

证明. 考虑证明 SAT $\leqslant_p$ 01IPROG. 只需要对每个 clause 构造一个不等式即可.

$$u_1 \vee \cdots \vee u_n \vee \overline{u_{n+1}} \vee \cdots \vee \overline{u_{n+m}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i + m - \sum_{i=1}^{m} u_{n+i} \geqslant 1$$

□

注 5.2. 如果把变量取值限制从 $\{0,1\}$ 改为全体有理数, 问题就变成了线性规划, 从而 $\in$ **P**.

例 5.5. DSAT $= \{\varphi \in \text{DNF} | \varphi$ is satisfiable$\} \in$ **P**. 只要线性地检查一下有没有某个 clause 都满足就行了.

例 5.6 (有向图哈密顿路径). dHAMPATH $= \{\llcorner G \lrcorner | G$ is directed and has a Hamiltonian path$\} \in$ **NP**-complete.

证明. 考虑证明 SAT $\leqslant_p$ dHAMPATH. 对于一个有 n 个变量和 m 个 clause 的 CNF φ:

- 对每个变量建 $2m+1$ 个点, 第 i 个变量对应的点记作 $a_{i,1}, \cdots, a_{i,2m+1}$. 对每个 clause 建一个点, 第 i 个 clause 对应的点记作 b_i. 再建立额外源汇 $v_{\text{start}}, v_{\text{end}}$, 总共是 $(2m+1)n + m + 2$ 个点.
- 对于每个 $i \in [1, n]$, $a_{i,1}, \cdots, a_{i,2m+1}$ 首尾相接连成一个 $2m+1$ 大小的**双向**环.
- v_{start} 向 $\{a_{1,1}, a_{1,2m+1}\}$ 连边, $\{a_{i,1}, a_{i,2m+1}\}$ 向 $\{a_{i+1,1}, a_{i+1,2m+1}\}$ 连边, $\{a_{n,1}, a_{n,2m+1}\}$ 向 v_{end} 连边, 均为单向.
- 如果 u_i 出现在了第 j 个从句中, 连边 $a_{i,j} \to b_j \to a_{i,j+1}$. 如果 $\overline{u_i}$ 出现在了第 j 个从句中, 连边 $a_{i,j+1} \to b_j \to a_{i,j}$.

对于每个双向环, 它可以也应该被顺时针或者逆时针地单向遍历, 即要么首先访问 $a_{i,1}$ 然后从小到大走到 $a_{i,2m+1}$, 要么首先访问 $a_{i,2m+1}$ 然后从大到小走到 $a_{i,1}$. 顺/逆时针的遍历方向对应着相应变量的 0/1 取值, 当取值符合期望时, 遍历该变量对应的环时可以顺带覆盖掉一些 b_j.

可以证明 $\varphi \in$ SAT 当且仅当上述构造出的图存在 v_{start} 到 v_{end} 的哈密顿路径. □

例 5.7 (有向图哈密顿回路). dHAMCYCLE $= \{\llcorner G \lrcorner | G$ is directed and has a Hamiltonian cycle$\} \in$ **NP**-complete.

证明. 考虑证明 dHAMPATH $\leqslant_p$ dHAMCYCLE. 对于图 G, 添加额外源汇 s, t, s 向所有点连边, 所有点向 t 连边, t 向 s 连边, 得到图 G'. G 存在哈密顿路径当且仅当 G' 存在哈密顿回路. □

例 5.8 (无向图哈密顿路径). uHAMPATH $= \{\llcorner G \lrcorner | G$ is undirected and has a Hamiltonian path$\} \in$ **NP**-complete.

证明. 考虑证明 dHAMPATH $\leqslant_p$ uHAMPATH.

对于有向图 G, 添加额外源汇 s, t(要连边) 后把每个点拆成三个点: 入点, 中间点, 出点, 适当连边得到无向图 G'. G 存在哈密顿路径 $\Rightarrow$ G' 存在哈密顿路径是显然的, 而如果 G' 存在哈密顿路径, 则任意一个入点/出点都会与其中间点相邻, 因为否则会导致中间点不得不成为路径的起止点, 而显然 s 的入点与 t 的出点是必须作为起止点的 (度数是 1). 于是 G' 的哈密顿路径不会破坏 G 的有向图结构, 从而可以构造出 G 的哈密顿路径. □

例 5.9 (无向图哈密顿回路). uHAMCYCLE $= \{\llcorner G \lrcorner | G$ is undirected and has a Hamiltonian cycle$\} \in$ **NP**-complete.

证明. 考虑证明 dHAMCYCLE $\leqslant_p$ uHAMCYCLE.

对于有向图 G, 直接把每个点拆成三个点: 入点, 中间点, 出点, 适当连边得到无向图 G'. G 存在哈密顿回路 $\Rightarrow$ G' 存在哈密顿回路是显然的, 而如果 G' 存在哈密顿回路, 则这条回路必然是 "入-中间-出-入-中间-出" 循环的, 因此也可以构造出 G 的哈密顿回路. □

例 5.10 (旅行商问题). $\mathsf{TSP} = \{\langle G, d_{ij}, k\rangle | G \text{ has a Hamiltonian cycle with distance measured by } d_{ij} \text{ at most } k\} \in$ **NP**-complete.

证明. 考虑证明 $\mathsf{dHAMCYCLE} \leqslant_p \mathsf{TSP}$. 根据 G 到底有没有这条边把边权设为 0 或者 1, k 取 0 就行. □

定义 5.5 (coNP). $\mathbf{coNP} = \{L | \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$.

例 5.11. $\overline{\mathsf{SAT}} \in \mathbf{coNP}$, 但在证明 $\overline{\mathsf{SAT}} \in \mathbf{NP}$ 时遇到了困难: 难以高效地验证 φ 对所有的 assignment 都为 False.

定义 5.6 (coNP 的另一种定义). 称语言 $L \subseteq \{0,1\}^*$ 属于 **coNP**, 如果存在一个多项式 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和一个多项式时间图灵机 M 使得对于任意的 $x \in \{0,1\}^*$, 都有

$$x \in L \Leftrightarrow \forall u \in \{0,1\}^{p(|x|)}, M(x,u) = 0$$

定义 5.7 (coNP-hard, coNP-complete). 称 $L' \in \mathbf{coNP}$-hard, 如果任意 $L \in \mathbf{coNP}, L \leqslant_p L'$.

$\mathbf{coNP}$-complete $= \mathbf{coNP} \cap \mathbf{coNP}$-hard.

例 5.12. $\overline{\mathsf{SAT}} \in \mathbf{coNP}$-complete. 这是因为 $\forall L \in \mathbf{coNP}$, 我们有 $\overline{L} \in \mathbf{NP}$. 由 Cook-Levin Thm. 知 $\overline{L} \leqslant_p \mathsf{SAT}$, 于是便有 $L \leqslant_p \overline{\mathsf{SAT}}$. ($A \leqslant_p B \Leftrightarrow \overline{A} \leqslant_p \overline{B}$.)

命题 5.3. 如果 $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, 则 $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP} = \mathbf{P}$. 反过来说, 只要证明了 $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$, 就能说明 $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

定义 5.8 (NEXP). $\mathbf{NEXP} = \bigcup_{c \geqslant 0} \mathbf{NTIME}(2^{n^c})$.

定理 5.5. 如果 $\mathbf{EXP} \neq \mathbf{NEXP}$, 则 $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

证明. 考虑证明逆否命题: 如果 $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, 则 $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$. 使用一种叫做**填充 (padding)** 的技术: 考虑 $L \in \mathbf{NTIME}(2^{n^c})$, 构造 $L_{\text{pad}} = \{\langle x, 1^{2^{|x|^c}}\rangle | x \in L\}$, 则可验证 $L_{\text{pad}} \in \mathbf{NP}$(因为问题几乎没变, 而输入规模变大了). 而如果 $L_{\text{pad}} \in \mathbf{P}$, 则也可以验证 $L \in \mathbf{EXP}$[4]. $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{NEXP}$ 是显然的, 故证明了 $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$. □

迄今为止, 我们研究的所有问题都是 Decision Problems, 即输出信息量为一比特的问题. 如果考虑把设定延伸到 Search Problems, 例如对给定的 CNF φ 求出一组 satisfying assignment, 这种问题会不会与 Decision Problems 有所不同呢?

定理 5.6. 假如 $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, 则对于任意 $L \in \mathbf{NP}$ 和它的 verifier M, 都存在多项式时间图灵机 B, 能够对输入 $x \in L$ 输出 x 的一个 certificate.

证明. 首先证明 $L = \mathsf{SAT}$ 时是正确的. 只需要依次对每个变量做 0/1 代入, 并调用 M 判断一下当前已进行的代入下是否仍存在解就行了.

对于任意的 $L \in \mathbf{NP}$, 由 Cook-Levin Thm. 我们知道 $L \leqslant_p \mathsf{SAT}$. 事实上这种规约有一个更好的性质: 不仅 $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in \mathsf{SAT}$, 而且可以把 $f(x)$ 的一个 satisfying assignment 映射到 x 的一个 certificate. 这样的规约被称为 **Levin 规约 (Levin reduction)**. □

定理 5.7 (Ladners Theorem, "NP-intermediate"). 假设 $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, 则存在既非 **P** 亦非 **NP**-complete 的 **NP** 语言.

证明. 摆烂了不证了. □

定理 5.8 (Nondeterministic Time Hierarchy Theorem). f, g 是满足 $f(n+1) = o(g(n))$ 的 time constructible 的函数, 则

$$\mathbf{NTIME}(f(n)) \subsetneq \mathbf{NTIME}(g(n))$$

证明. 摆烂了不证了. □

[4]形式化的验证需要具体给出图灵机的构造