ZFC 公理体系十条

1. 外延公理。两个集合所有元素相同，则相等。$\forall X\forall Y(\forall x(x\in X\Leftrightarrow x\in Y)\Rightarrow X=Y)$
2. 分离公理。可以通过性质在已有集合中选子集。$\forall Y\exists X\forall x(x\in X\Leftrightarrow(x\in Y\wedge\phi(x)))$
3. 空集公理。存在不包含任何元素的集合。$\exists X(\forall x(x\notin X))$
4. 配对公理。把两个集合外面套个括号。$\forall X\forall Y\exists Z\forall u(u\in Z\Leftrightarrow(u=X\vee u=Y))$
5. 并集公理。把集合族所有集合的元素拆出来放一起。$\forall I\exists A\forall x(x\in X\Leftrightarrow\exists i\in I(x\in i))$
6. 幂集公理。存在一切子集构成的集合。$\forall X\exists Y\forall Z(Z\subseteq X\Leftrightarrow Z\in Y)$
7. 正则公理。每个集合都存在一个与自己交为空的元素，可以用来证明集合不存在。$\forall X(X\neq\varnothing\Leftrightarrow\exists y\in X,y\cap X=\varnothing)$
8. 替换公理。$\forall x\forall y\forall z(\phi(x,y,p)\wedge\phi(x,z,p)\Rightarrow y=z)\Rightarrow\forall X\exists Y\forall y(y\in Y\Leftrightarrow(\exists x\in X)\phi(x,y,p))$
9. 无穷公理。归纳集存在。
10. 选择公理。能从集合族每个集合里选出来一个元素。$\forall X(\varnothing\notin X\Rightarrow\exists f:X\to\bigcup X,\forall A\in X(f(A)\in A))$

用无穷公理与分离公理可以推出空集公理。用空集公理、幂集公理与替换公理可以推出配对公理。构造多元素集合需要配对公理和并集公理交替运用。构造笛卡尔积需要用两次幂集。

归纳集定义为 $0=\varnothing\in A,\forall n\in A,n^+:=n\cup\{n\}\in A$。所有归纳集的交良定且唯一，这个集合为自然数集 ω。

Peano 公理

1. $0=\varnothing$ 是自然数
2. 每个自然数都有唯一后继
3. 0 不是任意自然数的后继
4. 不同自然数有不同的后继
5. ω 满足归纳原理，$\omega:=\bigcap\{Y:Y\subseteq X\text{且为归纳集}\}$，其中 X 是由无穷公理确保的一个归纳集

传递集定义为 $a\in A\Rightarrow a\subseteq A$ 或者等价地 $a'\in a\in A\Rightarrow a'\in A$。每个自然数都是传递集。

若 A 为传递集，则 $\bigcup A,\bigcap A$ 也是。A 是传递集等价于 $\bigcup A\subseteq A$，等价于 $A\subseteq\mathcal{P}(A)$，后者等价于 $\mathcal{P}(A)$ 是传递集。

传递集的集合的并也是传递集。$\forall x\in\bigcup S$，存在某个 $X_0\in S$ 使得 $x\in X_0$，X_0 传递知 $x\subseteq X_0$，而 $X_0\subseteq\bigcup S$，故 $x\subseteq\bigcup S$，$\bigcup S$ 传递

Knaster-Tarski 不动点定理

设 X 是非空集合，映射 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ 满足对于任意的 $A\subseteq B\subseteq X$ 都有 $f(A)\subseteq f(B)$。证明存在“不动点” $T\subseteq X$ 使得 $f(T)=T$。

证明 取 $T=\bigcup\{A:A\text{满足}A\subseteq f(A)\}$，一方面 $T\subseteq\bigcup\{f(A):A\text{满足}A\subseteq f(A)\}\subseteq f(\bigcup\{A:A\text{满足}A\subseteq f(A)\})=f(T)$（第一个 $\subseteq$ 是因为 $A\subset f(A)$，第二个是因为 f 的单调性，每一个 $f(A)$ 都包含于 $f(T)$ 于是 $\bigcup f(A)$ 也包含于 $f(T)$）；另一方面由于 $T\subseteq f(T)\Rightarrow f(T)\subseteq f(f(T))$，说明 $f(T)$ 也是之前 $\bigcup$ 中的一项，导致 $f(T)\subseteq T$，从而 $f(T)=T$。 ■

良序 良序是指任意集合都有最小元。

已知 $(X,<)$ 是一个良序集。

$f:X\to X$ 增函数，则 $\forall x\in X,f(x)\geq x\Rightarrow f:X\to X$ 保序同构映射只能是恒等映射。$\Rightarrow f:X\to Y$ 的保序同构映射唯一。

可以通过保序同构映射来证明良序集的三歧性。

序数 关于序数有几条性质

X 是在以 $\in$ 定义的序下的良序集，则 X 是序数 iff $\forall x\in X, s_x=x$。*(充分性证明传递，必要性证两个方向的 $\subseteq$)*

α,β 是不同的序数，则 $\alpha\in\beta$ iff $\alpha\subseteq\beta$。*(充分性证明 $\beta\setminus\alpha$ 中最小元 $=\alpha$，需要证两个 $\subseteq$。必要性是定义)*

序数中的任意元素都是序数。特别地，0 属于任何序数。*(证明任意元素的良序和传递)*

序数 A, A^+ 之间没有新的序数，或者等价的，$A<B\Rightarrow A^+\le B$。

任意序数等于其绝对前段 $x=s(x)$。*(证明两边的 $\subseteq$)*

由序数构成的集合在 $\in$ 的序下是良序的。

等价于证明任意由序数构成的集合存在最小元。任取 $\alpha\in A$，要么 α 就是 A 中最小元，要么 $A\cap\alpha$ 非空，由 α 良序可知 $A\cap\alpha$ 中存在最小元 γ，断言这就是 A 的最小元：若不然，存在 $\gamma'\in\gamma\in\alpha$，传递性导出 $\gamma'\in\alpha$，这与 γ 的最小性矛盾。

不存在以所有序数为元素的集合。*先证明 A 是序数 $\Rightarrow\bigcup A$ 是序数，然后指出* $A\subseteq\bigcup A$，从而例如 $(\bigcup A)^+$ 就不可能是 A 的元素。

Cantor-Schroder-Bernstein 定理

若存在集合 S,T 之间双向的单射 $f:S\to T$ 和 $g:T\to S$，则 $S\sim T$。

证明 考虑定义映射 $F:\mathcal{P}(S)\to\mathcal{P}(S)$ 满足 $F(A)=S-g(T-f(A))$。首先验证 F 满足单调性（$A\subseteq B\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)\Rightarrow T-f(B)\subseteq T-f(A)\Rightarrow g(T-f(B))\subseteq g(T-f(A))\Rightarrow S-g(T-f(A))\subseteq S-g(T-f(B))$），然后根据 Knaster-Tarski 不动点定理可知存在 A^* 使得 $F(A^*)=A^*$，于是构造双射 $h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in A^*\\ g^{-1}(x) & x\in g(T-f(A^*))\end{cases}$，需要验证一下两种 case 都是双射。 ■

基数的定义：序数 α 被称为基数，如果序数 β 与 α 对等能推出 $\alpha\le\beta$。*可以理解成"最小的序数"。*

对角线法 用来说明两个集合不等势。证法通常是对于映射 f，利用 x_i 和 $f(x_i)$ 来构造出一个 $\notin\mathrm{Im}f$ 的元素，从而说明不可能存在满射。

1. **Cantor 定理** $A\neq\varnothing$，则 A 和 $\mathcal{P}(A)$ 不对等。对于 $f:A\to\mathcal{P}(A)$，考虑对角线上每一位取反，即构造集合 $B:=\{x\in A, x\notin f(x)\}$，则 $B\notin\mathrm{Im}f$，故满射不存在。

2. κ_i,λ_i 为两族基数，且 $\forall i\in I,\kappa_i<\lambda_i$，于是有 $\sum_{i\in I}\kappa_i<\prod_{i\in I}\lambda_i$。这里基数的 $\sum$ 可以理解为不交并（就是加个第二维然后并起来），$\prod$ 可以理解为笛卡尔积。对于任意映射 f，对于任意 $i\in I$，总存在 $\alpha_i\in\lambda_i$ 使得 α_i 不等于任何 $\sum_{i\in I}\kappa_i$ 在 f 下的像的第 i 位，因此构造 $\alpha=(\alpha_1,\cdots)\notin\mathrm{Im}f$ 说明不对等。

可数集 与自然数对等的集合称为可数集。$\mathbb{Q}$ 是可数集。可数集的可数并与有限笛卡尔积是可数集。

要证明什么东西可数，可以尝试把它拆成可数个可数集的并。比如说证明从中任取实数构成正项级数序列总收敛的正实数集可数，只需要说明对于任意 $n\in\mathbb{N}$，集合中 $\ge\frac{1}{n}$ 的元素个数有限即可。

$\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{N})=c$，即 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 与 $\mathbb{R}$ 等势。考虑 $f(x)=\{r\in\mathbb{Q}, r\le x\}$ 这是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的单射，而另一个方向的单射是很好构造的，所以根据 Cantor-Schroder-Bernstein 定理可知等势。

析取范式 (Disjunctive Normal Form) 是 $\bigvee_{i=1}^m(\bigwedge_{j=1}^n q_{ij})$，合取范式 (Conjunctive Normal Form) 是 $\bigwedge_{i=1}^m(\bigvee_{j=1}^n q_{ij})$。构造析取范式，就是把所有真值为 $\mathbf{T}$ 的情况列出来，构造合取范式，就是把所有真值为 $\mathbf{F}$ 的情况列出来。

命题逻辑的形式化推理 假言三段论：如果有 $\varphi\to\psi$ 和 $\psi\to\chi$，先通过 L1 得到 $\varphi\to(\psi\to\chi)$，再利用 L2 得到 $(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)$。

语法和语义/可靠与完备 语法是形式系统 $\vdash_L\varphi$，语义是真值 $\vDash_L\varphi$。可靠性是 $\vdash_L\varphi\Rightarrow\vDash_L\varphi$，完备性是 $\vDash_L\varphi\Rightarrow\vdash_L\varphi$。

可靠性是容易证明的，只需要对推导序列的公式个数作归纳，根据 MP 的重言性可知推出来的都是重言式。

证明完备性的过程略微繁琐。首先引入了扩充的概念，紧接着定义了一致扩充（存在某个公式不是该形式系统的定理）与完全扩充（任何一个公式 φ，$\varphi,\neg\varphi$ 中恰好有一个属于该形式系统），证明一致的形式系统一定存在使定理全为 $\mathbf{T}$ 的赋值（先完全扩充到 J，然后定义 $v(\varphi)=\begin{cases}\mathbf{T} & \vdash_J\varphi\\ \mathbf{F} & \vdash_J\neg\varphi\end{cases}$，反证 $v(\varphi\to\psi)=\mathbf{F}$ 当且仅当 $v(\varphi)=\mathbf{T}$ 且 $v(\psi)=\mathbf{F}$）。最后说明 L 是完备的：假设存在一个不在 L 中的重言式，那么把 $\neg\varphi$ 加到 L 中得到的 L^* 是一致的，而一致的形式系统存在赋值使所有定理取值 $\mathbf{T}$，这与 φ 重言矛盾。