音乐与数学 课程笔记

酥雨
zusuyu@stu.pku.edu.cn

June 5, 2022

目录

1 音乐基础知识

声音 (sound) 是由振动产生的, 振动的弦引起周围空气的疏密变化, 就形成了**声波**. 声波是**纵波 (longitudinal wave)**. 声音有四个**物理属性**, 分别是**音高 (pitch)**, **力度 (dynamics)**, **时值 (duration)** 和**音色 (timbre)**.

音乐会音高 (concert pitch) 为 440Hz, 也就是中央 C 上方的 A 对应的频率.

声学中用**声压水平 (sound pressure level, SPL)** 来度量声音的强弱, 定义为

$$L_p = 20\log_{10}\frac{p}{p_0}$$

其中 $p_0 = 20\mu\mathrm{Pa}$ 为听觉下限阈值, p 为实际声压. 声压水平 L_p 的单位是**分贝 (decibel, dB)**.

频谱图 (spectrogram) 和**泛音列 (overtone series, harmonic series)** 可以用来表示声音的音色. 这里涉及到傅里叶分析, 就不深究了.

声音可以分为**乐音 (musical tone)** 和**噪音 (noise)**. 注意**部分**打击乐器属于噪音, 区别在于是否有固定音高.

全体有固定音高的乐音构成一个集合, 称为**乐音体系**, 其中元素称为**音级 (scale step)**. 把所有音级从低到高排列得到**音级列**, 其中相邻元素相差一个**半音 (semitone)**, 就是钢琴键盘上任意两个相邻键的的音差.

我们给每个音级起一个名字, 称为**音名 (pitch name)**. 基础音名只有 7 个 C, D, E, F, G, A, B, 可以通过加下标来得到相差**八度 (octave)** 的新的音名. 接下来我们不加区分地使用音名与音级两个概念.

标准钢琴键盘一共有 **88 个琴键**, 音级为 A_0 到 C_8. $(3+7\times 12+1=88.)$ 中央 C 是 C_4.

固定唱名法中唱名与音级一一对应, 即 do = C, re = D, mi = E, fa = F, sol = G, la = A, si = B.

首调唱名法中 do 可以对应任意一个音级, 但需要保证相邻唱名之间分别相差 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1 个半音.

拍号 (time signature) 中 m/n 表示以 n 分音符为一拍, 每小节 m 拍.

区分全音符, 二分音符, 四分音符, 八分因素和十六分音符. 前二者是空心圆而后三者是实心, 从二分音符开始带竖线, 八分音符有一个尾巴, 十六分音符有两个. 以及注意音符是 dp 不是 bq.

高音谱号下, 二线位置是 G_4, C_4 位于下加一线.

低音谱号下, 四线位置是 F_3, C_4 位于上加一线.

低音谱号下, C_4 位于三线.

音程 (interval) 是两个音级之间的距离. 音程有两个参数: 度数, 半音数. 度数简单来说就是五线谱上的距离 (包含首尾, 相差多少线和间), 半音数需要结合音级一个一个数.

2 弦的振动

定理 2.1 (梅森定律).

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

弦的振动频率与其长度成反比, 与其张力的平方成正比, 与其线密度的平方成反比.

弦的第 n $(n\in\mathbb{N}^*)$ 个**振动模态 (mode of vibration)** 的振动频率为 $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ 称为**固有频率 (natural frequencies)**, f_1 称为**基频 (fundamental frequency)**, 对应的声音称为**基音 (fundamental note)**, 而 f_k $(k\geqslant 2)$ 对应的声音称为**泛音 (overtone)**, 其中 f_k 对应的称为 **第 $k-1$ 泛音**.

取 $f = f_1$, 则固有频率序列为

$$f, 2f, 3f, 4f, 5f, \cdots$$

称为泛音列 (overtone series, harmonic series).

3 乐律

律学 (temperament) 研究这样的问题: 乐音体系这个有限集合中的元素是怎么确定的? $\mathrm{C}, \sharp\mathrm{C}, \cdots, \mathrm{A}, \sharp\mathrm{A}, \mathrm{B}$ 这些音名对应什么音高?

我们知道八度音程的频率比是 1:2, 所以其实只需要研究同一个八度内的相对频率比. 换句话说, 不同的律法给出了不同的频率序列 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_{12})$, 满足 $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{12} < 2$.

3.1 三分损益 (五度相生)

$$a = \left\{1, \frac{3^7}{2^{11}}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^9}{2^{14}}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^{11}}{2^{17}}, \frac{3^6}{2^9}, \frac{3}{2}, \frac{3^8}{2^{12}}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^{10}}{2^{15}}, \frac{3^5}{2^7}\right\}$$

按照毕达哥拉斯的理论, 纯五度是 3:2 频率比, 而 $\gcd(7, 12) = 1$ (纯五度是 7 个半音), 所以从 C 的频率 1 出发, 每次乘 $\frac{3}{2}$ 得到其上方纯五度的音级对应频率, 如果结果超过 2 就再除以 2 下降八度, 最终就得到了上面这个玩意儿. 从分子中 3 的个数也可以推断出频率计算的先后顺序.

最后一个计算出频率的音是 F, 频率是 $\frac{3^{11}}{2^{17}}$, 进一步乘 $\frac{2}{3}$ 除以 2 得到 $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$, 这个略大于 1 的常数被称为 毕达哥拉斯音差. (因为这成为了 C 的另一个频率.)

管仲的那套理论也可以得到相同的结果, 但太麻烦了我不太想看, 于是便删繁就简了.

3.2 纯律

只给了 C, D, E, F, G, A, B 这七个音级的音高.

$$a' = \left\{1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}\right\}$$

motivation 大概是追求最简整数比之类的.

一个缺点是 D-A 纯五度不纯, $\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27} \neq \frac{3}{2}$, 两者之差 $\frac{40}{27} : \frac{3}{2} = \frac{81}{80} = 1.0125$ 称为谐调音差.

另一个缺点是有两种不同的大二度的频率比: C-D, F-G, A-B 的频率比是 9/8, 而 D-E, G-A 的是 10/9.

3.3 中庸律

仍然是只给出了七个音级的音高.

$$a' = \left\{1, \frac{5^{0.5}}{2}, \frac{5}{4}, \frac{2}{5^{0.25}}, 5^{0.25}, \frac{5^{0.75}}{2}, \frac{5^{1.25}}{4}\right\}$$

motivation 大概是设定全音频率比 α 和半音频率比 β, 要求 $\alpha^5\beta^2 = 2$, 且 $\beta^2 \approx \alpha$. 最终选定了 $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$. 也有说法是说 α 的取法来自于纯律中两种大二度频率比的几何平均 $\sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}}$.

3.4 (十二) 平均律

这个就简单了.

$$a_i = 2^{(i-1)/12}, i = 1, 2, \cdots, 12$$

3.5 音分

音分 (cents) 是音程的精确度量. 两个频率分别为 f_1, f_2 $(f_1 < f_2)$ 的音级之间的音分数 c 为

$$c = 1200 \log_2 \frac{f_2}{f_1}$$

比如说, (十二) 平均律下, 相邻音级之间的音分数是 $1200 \log_2 \left(2^{1/12}\right) = 100$.

4 调式, 音阶与和弦

4.1 调式与音阶

调试 (mode) 是一种特殊的乐音体系, 为若干音级围绕一个具有稳定感的中心音级 (主音), 按照一定的音程关系组织在一起形成的.

(调式) **音阶 (scale)** 就是把一个调式中的音级从低到高排列得到的音级序列.

4.1.1 自然大调

大大小大大大小. (相邻二度音程分别是什么, 下同)

I	II	III	IV	V	VI	VII
主音	上主音	中音	下属音	属音	下中音	导音

这些名称似乎是只针对于自然大调的, 可不敢乱用.

$$\flat\mathrm{C}, \flat\mathrm{G}, \flat\mathrm{D}, \flat\mathrm{A}, \flat\mathrm{E}, \flat\mathrm{B}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, \mathrm{G}, \mathrm{D}, \mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{B}, \sharp\mathrm{F}, \sharp\mathrm{C}$$

上面这一列自然大调, 在 C 的右边从左往右依次多一个升号, 在 C 的左边从右往左依次多一个降号.

B 和 $\flat$C, $\sharp$F 和 $\flat$G, $\sharp C$ 和 $\flat D$, 各音级完全是相同的, 只是在五线谱上被标记了不同的唱名. 这样的两个调被称为**等音调**. 15 个自然大调中只有以上三对等音调.(就是在上面那一列中相差 12 位的.)

4.1.2 自然小调

大小大大小大大.

以 A 为主音的自然小调的音阶完全由基本音级构成, 与 C 自然大调相同. 以 A 上方纯五度, E 为主音的自然小调, 音阶中只包含一个升号 $\sharp$F, 这与 G 自然大调相同. 类似的, 以 A 下方纯五度, D 为主音的自然小调, 音阶中只包含一个降号 $\flat$B, 这与 F 自然大调相同.

调号相同的自然大小调 pair 被称为**关系大小调**, 主音相同的自然大小调 pair 被称为**平行大小调**. 简单来讲, 自然大调对应的关系小调就是把字母序号减 2 模 7 再改成小写, 平行小调就是直接改成小写.

4.1.3 和声小调

大小大大小增大.

4.1.4 旋律小调

大小大大大大小.

4.2 和弦

和弦 (chord) 是三个及以上不同音高的乐音按照一定音程关系结合起来的.

三和弦有大三和弦, 小三和弦, 增三和弦, 减三和弦四种, 分别是大小, 小大, 大大, 小小.

七和弦有七种. 没有连续三个大二度的七和弦, 因为这样的话根音和七音就差了恰好十二个半音, 听上去就是纯八度, 从而使七和弦退化为三和弦.

和弦可以转位. 三和弦有三种转位 (包含原位和弦), 七和弦有四种.

4.3 调式中的和弦

调式中和弦的标注方法: 罗马数字的大小写与上标表示和弦的音程, 下标表示转位.

5 旋律与对称

音类 (pitch class) 是所有音阶关于" 相差八度" 的等价关系构成的等价类. 一共有 12 个音类. 把这 12 个音类顺序排成一个圆得到音类圆周.

$$\mathcal{PC} = \{\overline{\mathrm{C}}, \overline{\sharp\mathrm{C}}, \overline{\mathrm{D}}, \cdots, \overline{\mathrm{A}}, \overline{\sharp\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}\}$$

5.1 旋律的移调变换

$$T_n(\overline{x}) = \overline{x+n}, \quad \forall \overline{x} \in \mathcal{PC}$$

移调变换分为严格移调和调性移调, 前者是严格按照半音数移调, 但难以保证移调后的音级仍在调式音阶中. 后者就是前者加以细微修改, 保证移调后的音级仍在调式音阶中.

5.2 旋律的逆行与倒影

记 I 为关于中央 C 的倒影. 有 $I^2 = T_0, T_n * I = I * T_{-n}$.

记 R 为逆行, 有 $R^2 = T_0, R * T_i = T_i * R, R * I = I * R$.

$$\mathcal{M} = \langle T, I, R\rangle = \langle T, I\rangle \times \langle R\rangle \cong D_{24} \times \mathbb{Z}_2$$

是移调变换群的结构.

5.3 十二音技术

任取一个首零的 (因为可以根据这个排列来定义对称关系) 12 阶排列作为初始音列 P_0, 定义 $P_n = n + P_0$ $(1 \leqslant n < 12), I_n = n - P_n$ $(0 \leqslant n < 12)$, RP_n, RI_n 为两者的 reverse, 从而得到了 48 种音列.

可以写出一个 12×12 的矩阵, 从四个方向可以读出恰好上述 48 种音列. 称这个矩阵为音列矩阵 (tone row matrix).

以初始音阶 p 生成的音列矩阵, 第 i 行第 j 列 $(0 \leqslant i, j < 12)$ 上的数是 $-p_i + p_j \bmod 12$.

5.4 音列计数

事实上上述生成的 48 种音列可能退化成 24 种, 比如取 $P_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 时, 有 $I_k = RP_{k+1}, RI_k = P_{k+1}$.

但至少有 24 种, 因为 P_k, I_k 一定是互不相同的.

所以就要么是 48 种, 要么是 24 种. 24 种说明存在 k, 要么 $P_0 = RI_k$, 要么 $P_0 = RP_k$, 且这些情况是不交的. 前者等价于 $0 + a_{11} = a_1 + a_{10} = \cdots = a_5 + a_6 = k$, 后者等价于 $0 - a_{11} = a_1 - a_{10} = \cdots = a_5 - a_6 = a_6 - a_5 = \cdots = a_{11} - 0 = k$, 故要求 $k = 6$.

考虑全体音阶共有 12! 种, (按照能够出现在同一个音列矩阵中) 等价类内包含 24 种音阶的音阶 $6 \times 12!! + 12!! = 322560$ 个, 因此另外还有 $12! - 322560 = 478679040$ 个, 等价类包含 48 个音阶的音阶.

6 节奏

节奏奇性指不包含对径的起拍点的节奏型.

节奏型的**影子**指把起拍点替换成原节奏型相邻起拍点的中点, 得到的新节奏性.

距离序列就是相邻起拍点的差.

轮廓是距离序列相邻两项的大小关系, $0/+/-$. **轮廓同构**用于描述其轮廓可以通过循环位移变得相同的节奏型.

定理 6.1 (Burnside). G 是集合 X 上的置换群, 其轨道数 t 满足

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|$$

7 音网

和弦的**距离向量**是一个六元组 $\delta = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$, 其中 d_i 表示有多少对音级相差 i 个半音. 在音类圆周上, 等价于有多少对顶点的距离为 i. 对于 n 和弦, 其距离向量满足 $\sum_{i=1}^{6} d_i = \frac{n(n-1)}{2}$.

全音程和弦是距离向量为 $\delta = (1,1,1,1,1,1)$ 的和弦, 例如 $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \sharp\mathrm{F}\}$ 和 $\{\mathrm{C}, \sharp\mathrm{C}, \mathrm{E}, \sharp\mathrm{F}\}$. 通过移调与倒影变换作用下, 本质不同的全音程和弦只有以上两种.

$\{\sharp\mathrm{C}, \sharp\mathrm{D}, \sharp\mathrm{F}, \sharp\mathrm{G}, \sharp\mathrm{A}\}$ 是一种**五声音阶**. **全音音阶**就是在音类圆周上隔一个取一个, **半音音阶**就是取所有十二个音级.

自然大调音阶的距离向量是 $\delta = (2,5,4,3,6,1)$, 一共有 12 种. **五度圆周**可以给出自然大调音阶的另一种生成方式.

平均不和谐度 $D = 8p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 + 6p_6$.

假设在十二平均律下, 只讨论 24 种大小三和弦. 有三种三和弦的变换: **平行变换** P, **关系变换** R, **导音变换** L. 变换都保留了原本的两个音级而修改了另外一个, 在音类圆周上可以给出一个基于三角形对称的几何解释.

三种变换都是对合的 (平方等于单位变换). 可以证明的是 $RLPRLP = \mathrm{Id}$, 从而可以写成一张以三和弦为顶点的六边形网状结构, 称为**音网**.

音网有如下几个性质:

- 每个六边形的六个顶点代表的三和弦, 都有恰好一个公共音级, 这个音级等于六边形右上角大三和弦的根音.
- 称一个六边形的标号为上述的公共音级. 存在公共边的六边形, 其标号音级之间构成协和音程. 具体的, 一个六边形与其上, 下, 右上, 左下, 左上, 右下方的六边形分别构成纯四, 纯五, 大三, 小六, 小三, 大六度音程, 只有这些音程 (再加上纯八度) 是协和音程, 而其余音程都是不协和音程.
- 可以以某种特定形状在音网上定位出五声音阶与大小音阶.
- 把音网用对偶形式 (以六边形为点, 相邻六边形之间连边形成一张新图) 建立, 可以得到一个音类环面.