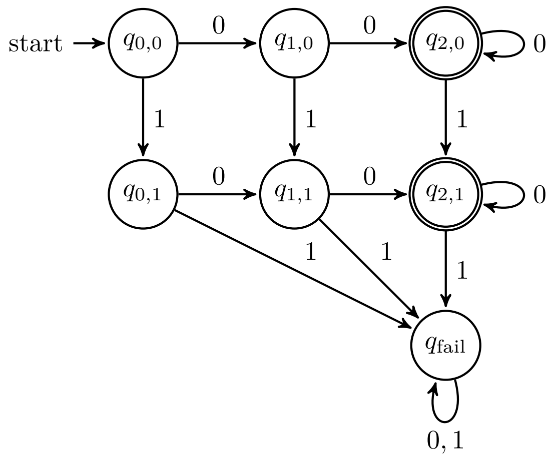
计算理论导论 第一次作业

周书予
2000013060@stu.pku.edu.cn

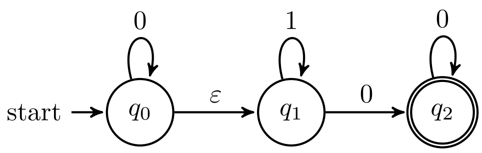
March 20, 2022

1

1.1



1.2



2

分析

需要让可接受的串在到达终止状态后, 无论再加上什么后缀都无法再到达一个终止状态. 因此只需要从识别 A 的 DFA 的终止状态集合中剔除掉一些不合法的即可.

证明

假设 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 识别语言 A, 考虑修改其终止状态集合得到新的 DFA $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$, 其中

$$F' = \{q \in F | \nexists q' \in F \text{ s.t. } q' \text{ is reachable from } q\}$$

称 q' 可以被 q 到达, 如果存在串 $w \in \Sigma^*$(记 $|w| = l$), 状态序列 $r_0, r_1, \cdots, r_l$ 满足 $r_0 = q_0, r_i = \delta(r_{i-1}, w_i)$ $(\forall 1 \leqslant i \leqslant l)$, 以及两个非负整数 $0 \leqslant m < n \leqslant l$ 满足 $r_m = q, r_n = q'$.

不难验证 M' 可以识别 $\mathsf{NOEXTEND}(A)$, 因此正则语言在 $\mathsf{NOEXTEND}$ 下是封闭的. □

3

分析

需要构造新的自动机来“交替”匹配 a, b 两串. 由于匹配顺序是不确定的, 需要引入 nondeterminism.

证明

假设 DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1), M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ 分别识别语言 A, B, 考虑构造 NFA $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$, 其中

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$.
- $\delta_3((q_x, q_y), a) = \{(\delta_1(q_x, a), q_y), (q_x, \delta_2(q_y, a))\}$.
- $q_3 = (q_1, q_2)$.
- $F_3 = F_1 \times F_2$.

不难验证 M_3 可以识别语言 A **shuffle** B, 因此正则语言在 **shuffle** 下是封闭的. □

4

考虑 $C = \{1^{kn} | n \geqslant 0\}$, 显然 C 可以由 k 个状态的 DFA 识别.

对于任意有 $k-1$ 个状态 $q_1, \cdots, q_{k-1}$ 的 DFA , 考虑在输入了串 $1, 11, \cdots, 1^k$ 后, 根据鸽巢原理, 至少存在其中两个串使得该 DFA 在输入了这两个串后到达了相同的状态, 不妨假设分别是 1^m 和 1^n $(1 \leqslant m < n \leqslant k)$, 这说明该 DFA 在输入 1^k 和 1^{n-m+k} 后也会到达相同的状态, 但显然 $1^k \in C$ 而 $1^{n-m+k} \notin C$, 所以产生了矛盾.

5

(a))

假设 $A = \{0^n 1^m 0^n | m, n \geqslant 0\}$ 是正则语言, 则根据 pumping lemma 存在 pumping length p. 考虑 $s = 0^p 1^p 0^p \in A$, 将其划分成 $s = xyz$, 由于 $|xy| \leqslant p$, y 只能包含 0 字符, 而 $|y| > 0$ 导致了 $xyyz \notin A$, 产生矛盾. 故 $A = \{0^n 1^m 0^n | m, n \geqslant 0\}$ 不是正则语言.

(b)

由于正则语言在取补集下是封闭的, $B = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ is not a palindrome}\}$ 是正则语言当且仅当 $\overline{B} = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ is a palindrome}\}$ 是正则语言.

于是考虑证明 $\overline{B}$ 不是正则语言. 假设 $\overline{B}$ 是正则语言, 由于正则语言对求交运算封闭, 故 $\overline{B} \cap 0^*1^*0^* = A$ 也是正则语言, 与前一问的结论矛盾. 于是 $\overline{B}$ 以及 B 都不是正则语言.

6

F 不是正则语言.

假设 F 是正则语言, 则 $F \cap ab^*c^* = \{ab^n c^n | n \geqslant 0\} \triangleq F'$ 也是正则语言, 根据 pumping lemma 存在 pumping length p. 考虑 $s = ab^p c^p \in F'$, 将其划分成 $s = xyz$, 由于 $|xy| \leqslant p$, y 只能包含 a 或 b 字符, 于是 $xyyz \notin F'$, 产生矛盾. 故 F 不是正则语言.