计算理论导论 第二次作业

周书予

2000013060@stu.pku.edu.cn

March 23, 2022

1

(a)

$$
\begin{aligned}
S &\to 0T0 \mid 1T1 \\
T &\to 0T \mid 1T \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

(b)

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$$

2

假设 pushdown automaton $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ 识别了 CFL A. 考虑构造新的 pushdown automaton $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0', F')$, 其中

- $Q' = Q \cup \hat{Q}$ (i.e. $Q' = Q \cup \{\hat{q} | q \in Q\}$).
-
  - $\forall (q', b) \in \delta(q, c, a), (q', b) \in \delta'(q, c, a)$.
  - $\forall q \in Q, (\hat{q}, \varepsilon) \in \delta'(q, \varepsilon, \varepsilon)$.
  - $\forall (q', b) \in \delta(q, c, a), (\hat{q'}, b) \in \delta'(\hat{q}, \varepsilon, a)$
- $q_0' = q_0$.
- $F' = \hat{F}$ (i.e. $F' = \{\hat{q} | q \in F\}$).

直观上来看, 该构造就是把 M 的状态复制了两份, 其中一份用于匹配 A 的前缀, 另一份用于引导 A 的前缀转移到接受态. 接下来形式化地证明 M' 识别了 PREFIX(A).

- 考虑任取 $w \in A$, 存在某个 w 在 M 上匹配得到的状态序列 $q_0 q_1 \cdots q_n$. 对于 w 的前缀 v, 考虑匹配到 v 时转移到了 M 中状态 q_i, 则 M' 中状态序列 $q_0 q_1 \cdots q_{i-1} q_i \hat{q_i} \hat{q_{i+1}} \cdots \hat{q_n}$ 可以匹配 v. 从而说明 $v \in L(M')$, 从而 PREFIX$(A) \subseteq L(M')$.

- 考虑 $v \in L(M')$, 根据 M' 的构造, 必然存在匹配 v 的形如 $q_0 q_1 \cdots q_{i-1} q_i \hat{q_i} \hat{q_{i+1}} \cdots \hat{q_n}$ 的状态序列, 其中 $q_i \in Q$. 对于 $k \geqslant i$, 存在转移 $(\hat{q_{k+1}}, b) \in \delta'(\hat{q_k}, \varepsilon, a)$ 说明存在 $c_k \in \Sigma$ 使得 $(q_{k+1}, b) \in \delta(q_k, c_k, a)$, 从而可以得到串 $w = v c_i c_{i+1} \cdots c_{n-1}$ 使得 w 在 M 中的匹配序列是 $q_0 q_1 \cdots q_n$, 这说明 $w \in A$, 故 $v \in$ PREFIX(A), 从而 $L(M') \subseteq$ PREFIX(A).

因此 $L(M') =$ PREFIX(A). 这说明了 CFL 在 PREFIX 运算下是封闭的.

3

(a)

假设 $L = \{0^{2^n} | n \geqslant 0\}$ 是 CFL, 则存在 pumping length p. 考虑串 $0^{2^p} \in L$, 将其划分成五部分 $0^{2^p} = uvxyz$, 由于 $|vy| > 0, |vxy| \leqslant p$, 这导致 $2^p < |uv^2xy^2z| \leqslant 2^p + p < 2^{p+1}$, 使得 $uv^2xy^2z \notin L$, 产生矛盾. 故 L 不是上下文无关语言.

(b)

假设 $B = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ is palindrome and contains an equal number of 0s and 1s}\}$ 是 CFL, 则存在 pumping length p. 考虑串 $0^p1^{10p}0^p \in B$, 将其划分成五部分 $0^p1^{10p}0^p = uvxyz$.

- $uv^2xy^2z \in B$ 要求了 vy 中要包含相同数量的 0 和 1, 由于 $|vxy| \leqslant p$, v, y 无法均包含两种字符, 而如果 v 或者 y 包含了两种字符, 这将导致 uv^2xy^2z 的前半段或者后半段出现 0, 1 顺序的错乱而另外半段不会, 因此不满足回文性质.
- 以上说明了 v, y 只能包含相同数量的 0 和 1, 设 $|v| = |y| = k$, 这说明 $uv^2xy^2z = 0^{p+k}1^{10p+k}0^p$ 或者 $0^p1^{10p+k}0^{p+k}$, 二者都不是回文.

综上, 在进行划分时一定会导出矛盾, 因而 B 不是上下文无关语言.

4

考虑把格子映射到非负整数, 按照 $|x| + |y|$ 的顺序排列, 具体地, 映射 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ 满足

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ 2k(k-1) + 1 + y, & x > 0, y \geqslant 0 \\ 2k(k-1) + k + 1 - x, & x \leqslant 0, y > 0 \\ 2k(k-1) + 2k + 1 - y, & x < 0, y \leqslant 0 \\ 2k(k-1) + 3k + 1 + x, & x \geqslant 0, y < 0 \end{cases} \quad (\text{where } k = |x| + |y|)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 16 & & & \\
 & & 17 & 7 & 15 & & \\
 & 18 & 8 & 2 & 6 & 14 & \\
19 & 9 & 3 & 0 & 1 & 5 & 13 \\
 & 20 & 10 & 4 & 12 & 24 & \\
 & & 21 & 11 & 23 & & \\
 & & & 22 & & &
\end{array}$$

图 1: f 示意图

考虑构造标准图灵机 M, 把原 2DTM 中写在 (x,y) 位置上的符号写在 M 纸带上的 $f(x,y)$ 位置. 可以验证在 $[-T(n), T(n)] \times [-T(n), T(n)]$ 范围内, 任两个相邻格子的 f 值相差不超过 $4T(n)$, 从而可以实现运行时间为 $O(T(n))$ 的单步转移, 故实现了总运行时间为 $O(T^2(n))$ 的模拟.

5

$\Rightarrow$: 如果语言 L 是 decidable 的, 则存在一台 decider M 可以识别 L. 考虑构造 L 的 enumerator E, 其按照字典序枚举所有字符串并调用 M 判定该字符串是否属于 L, 由于这个判定可以在有限步内完成, 因而对于任意 $n \in \mathbb{N}$, E 都可以在有限步内顺序输出 L 中字典序前 n 小的字符串, 故是合法的.

$\Leftarrow$: 如果语言 L 可以被 enumerator E 按字典序枚举, 考虑构造图灵机 M, 其对于输入 w, 反复调用 E 按照字典序输出 L 中的串, 当输出串 s 满足 $s = w$ 时则接受 w, 当输出串满足 $s > w$ (字典序意义下) 时则拒绝 w. 由于 L 中字典序比 w 小的串仅有有限个, 该算法对于任意 w 输出都会在有限步内停机, 从而 M 是一台 decider, 说明 L 是 decidable language.

6

考虑把 $A_{\mathrm{TM}} = \{\langle \llcorner M \lrcorner, \alpha \rangle | M \text{ accepts } \alpha\}$ 规约到 $T = \{\llcorner M \lrcorner | M \text{ is a TM that accepts } \alpha^{\mathcal{R}} \text{ whenever it accepts } \alpha\}$.

构造映射 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ 满足 $f(\langle \llcorner M \lrcorner, \alpha \rangle) = \llcorner M' \lrcorner$, 其中 M' 的工作流程是

1. 输入串 w.
2. 判断串 w 是不是 01.
   - 如果是, 则直接接受.
   - 否则, 在输入 α 上运行 M, 如果 M 接受 α, 就接受, 如果 M 拒绝 α, 就拒绝. (M 可能不停机.)

M' 能被上述自然语言描述, 所以映射 f 是 computable 的.
如果 $\langle \llcorner M \lrcorner, \alpha \rangle \in A_{\mathrm{TM}}$, 则构造得到的 M' 会接受所有输入 w, 因而有 $\llcorner M' \lrcorner \in T$.
如果 $\langle \llcorner M \lrcorner, \alpha \rangle \notin A_{\mathrm{TM}}$, 则 M' 不会接受除了 01 外的任何串, i.e. 不会接受串 10, 这导致了 $\llcorner M' \lrcorner \notin T$.
综上所述, $\forall w \in \Sigma^*, w \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow f(w) \in T$, 而 f 又是 computable 的, 所以 $A_{\mathrm{TM}} \leqslant_m T$.
而我们在课堂上已经证明了 A_{TM} 是 undecidable 的, 所以 T 也是 undecidable 的.

7

考虑把 $E_{\mathrm{TM}} = \{\llcorner M \lrcorner | M \text{ accepts nothing}\}$ 规约到 $C_{\mathrm{TM}} = \{\langle \llcorner M_1 \lrcorner, \llcorner M_2 \lrcorner \rangle | M_1, M_2 \text{ are two TMs such that } L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$.

首先构造拒绝一切输入的图灵机 M_0. 构造映射 $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ 满足 $g(\llcorner M \lrcorner) = \langle \llcorner M \lrcorner, \llcorner M_0 \lrcorner \rangle$, 显然 g 是 computable 的.

注意到 $\llcorner M \lrcorner \in E_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow L(M) = \varnothing \Leftrightarrow L(M) \subseteq L(M_0) \Leftrightarrow g(\llcorner M \lrcorner) = \langle \llcorner M \lrcorner, \llcorner M_0 \lrcorner \rangle \in C_{\mathrm{TM}}$.

因此 $E_{\mathrm{TM}} \leqslant_m C_{\mathrm{TM}}$. 我们在课堂上已经证明了 E_{TM} 是 undecidable 的, 所以 C_{TM} 也是 undecidable 的.