概率统计 (A) 课程作业: 大数定律与中心极限定理

周书予
2000013060@stu.pku.edu.cn

April 12, 2022

1

注意到 $\mathbb{E}\left[S_n\right]=\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i\right]=n, \operatorname{Var}\left[S_n\right]=\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}\left[X_i\right]=n$, 根据 Chebyshev 不等式, 有

$$\mathbb{P}\left(S_n>2n\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|S_n-\mathbb{E}\left[S_n\right]\right|>n\right) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\left[S_n\right]}{n^2}=\frac{1}{n}$$

2

1)

注意到 $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_i \leqslant x\}}\right]=\mathbb{P}\left(X_i \leqslant x\right)=F(x)$ 良定, 故根据辛钦大数定律, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|F_n(x)-F(x)\right| \leqslant \varepsilon\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-F(x)\right| \leqslant \varepsilon\right)=1$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立, 从而说明 $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$.

2)

注意到 $\mathbb{E}\left[f(X_i)\right]=\int_0^1 f(x) \mathrm{d} x$, 由 $f \in \mathbb{C}[0,1]$ 可知良定, 故根据辛钦大数定律, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n f(X_i)}{n}-\int_0^1 f(x) \mathrm{d} x\right| \leqslant \varepsilon\right)=1$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立, 从而说明 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{P} \int_0^1 f(x) \mathrm{d} x$.

3

1)

$$\begin{aligned}
\psi_{X_n}(t)=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i X_n t}\right] & =\sum_{k=0}^n \mathrm{e}^{i k t}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
& =\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{i t} \cdot \frac{\lambda / n}{1-\lambda / n}\right)^k \\
& =\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(\mathrm{e}^{i t} \cdot \frac{\lambda / n}{1-\lambda / n}+1\right)^n \\
& =\left(1+\left(\mathrm{e}^{i t}-1\right) \frac{\lambda}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

2)

注意到 $Y\sim\pi(\lambda)$ 的特征函数为

$$\psi_Y(t)=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}$$

由连续性定理, 只需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_{X_n}(t)=\psi_Y(t)$ 即可.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\psi_{X_n}(t)&=\lim_{n\to\infty}\left(1+(\mathrm{e}^{it}-1)\frac{\lambda}{n}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+(\mathrm{e}^{it}-1)\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}\cdot\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}\\&=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}\\&=\psi_Y(t)\end{aligned}$$

4

1)

记 X_i 表示对第 i 个顾客的服务时间, 则根据题意, $X_i\sim$ i.i.d. $\mathrm{Exp}(3)$, $\mathbb{E}[X_i]=\frac{1}{3},\mathrm{Var}[X_i]=\frac{1}{9}$.
由中心极限定理我们知道 $\sum\limits_{i=1}^{30}X_i\approx Z_{30}\sim\mathcal{N}(30\mathbb{E}[X_i],30\mathrm{Var}[X_i])=\mathcal{N}(10,\frac{10}{3})$, 从而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(9\leqslant\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant 11\right)&\approx\Phi\left(\frac{11-10}{\sqrt{30}\cdot\frac{1}{3}}\right)-\Phi\left(\frac{9-10}{\sqrt{30}\cdot\frac{1}{3}}\right)\\&=\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\right)\\&\approx 0.416118\end{aligned}$$

2)

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\approx Z_n\sim\mathcal{N}\left(\frac{n}{3},\frac{n}{9}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant 12\right)\approx\Phi\left(\frac{12-\frac{n}{3}}{\frac{\sqrt{n}}{3}}\right)\geqslant 95\%$$

$$\frac{12-\frac{n}{3}}{\frac{\sqrt{n}}{3}}\geqslant 1.64$$

$$n\leqslant 27$$

燕园美发有不低于 95% 的把握在 12 小时内服务完至多 27 个顾客.

5

记 X_i 表示第 i 个学生是否访问选课网, 则根据题意, $X_i\sim$ i.i.d. $\mathcal{B}(1,0.6)$, $\mathbb{E}[X_i]=0.6,\mathrm{Var}[X_i]=0.24$.
由中心极限定理我们知道 $\sum\limits_{i=1}^{15000}X_i\approx Z\sim\mathcal{N}(15000\mathbb{E}[X_i],15000\mathrm{Var}[X_i])=\mathcal{N}(9000,3600)$, 从而

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{15000}X_i\leqslant k\right)\approx\Phi\left(\frac{k-9000}{60}\right)\geqslant 99.9\%$$

使以上不等式成立的 k 的最小值是 9186, 即系统至少需要承受 9186 个学生同时访问, 才能保证有至少 99.9% 的把握在选课开始时不崩溃.