计算理论导论 第三次作业

周书予

2000013060@stu.pku.edu.cn

April 14, 2022

1

考虑构造一台多项式时间图灵机 M 识别语言 2COL.

对于输入 $G=(V,E)$, M 的工作流程是:

1. 初始化队列 Q 为空, 同时将 V 每个点的染色标记为 0.
2. 如果 Q 为空, 则跳转到第 6 步. 否则从 Q 中取出 (v,c).
3. 如果此时 v 的染色为 $3-c$, 则拒绝输入 G.
4. 如果 v 的染色为 0, 则将 v 的染色标记为 c, 并遍历 v 在 G 中的所有相邻点 w, 将 $(w,3-c)$ 加入 Q.
5. 返回第 2 步.
6. 找到 $v\in V$ 满足 v 的染色为 0, 将 $(v,1)$ 加入 Q. 如果这样的 v 不存在, 则接受输入 G.

对于任意的输入 G, M 都只会执行上述流程 $O(|G|)$ 步并停机, 流程中的每一步也只需要图灵机 M 的 $O(|G|)$ 步计算, 因此可以说明 $L(M)\in \mathbf{P}$. 接下来证明 $L(M)=$ 2COL.

- $\forall G\in L(M)$, M 在停机前其已经构造出了一种合法的染色方案, 因此说明 $G\in$ 2COL.
- $\forall G\notin L(M)$, 根据 M 的工作流程可知在对 G 进行染色的过程中出现了颜色冲突, 由归纳可知此时 G 中存在奇环, 而存在奇环的图是不存在 2 染色的, 因此 $G\notin$ 2COL.

综上, 2COL $\in \mathbf{P}$.

2

由 $L_1,L_2\in\mathbf{NP}$ 知, 存在 DTM M_1,M_2 以及多项式函数 $p_1,p_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足对于任意 $x\in\{0,1\}^*$, 都有 $x\in L_1\Leftrightarrow \exists u_1\in\{0,1\}^{p_1(|x|)}, M_1(x,u_1)=1, x\in L_2\Leftrightarrow \exists u_2\in\{0,1\}^{p_2(|x|)}, M_2(x,u_2)=1$.

构造 DTM M_3 满足 $M_3(x,u_1\circ u_2)=1$ 当且仅当 $M_1(x,u_1)=1$ **<u>或</u>** $M_2(x,u_2)=1$, 从而

$$x\in L_1\cup L_2\Leftrightarrow \begin{array}{c}\exists u_1\in\{0,1\}^{p_1(|x|)}, M_1(x,u_1)=1\\ \text{or}\\ \exists u_2\in\{0,1\}^{p_2(|x|)}, M_2(x,u_2)=1\end{array}\Leftrightarrow \exists u_1\circ u_2\in\{0,1\}^{p_1(|x|)+p_2(|x|)}, M_3(x,u_1\circ u_2)=1$$

故构造证明了 $L_1\cup L_2\in\mathbf{NP}$.

同理, 构造 DTM M_4 满足 $M_4(x,u_1\circ u_2)=1$ 当且仅当 $M_1(x,u_1)=1$ **<u>且</u>** $M_2(x,u_2)=1$, 从而

$$x\in L_1\cap L_2\Leftrightarrow \begin{array}{c}\exists u_1\in\{0,1\}^{p_1(|x|)}, M_1(x,u_1)=1\\ \text{and}\\ \exists u_2\in\{0,1\}^{p_2(|x|)}, M_2(x,u_2)=1\end{array}\Leftrightarrow \exists u_1\circ u_2\in\{0,1\}^{p_1(|x|)+p_2(|x|)}, M_4(x,u_1\circ u_2)=1$$

证明了 $L_1\cap L_2\in\mathbf{NP}$.

3

称 $G=(V_1,E_1)$ 与 $H=(V_2,E_2)$ 同构, 如果 G 可以被 "重标号" 使得与 H 相同, 亦即存在一个 $\sigma: V_1 \to V_2$ 的双射, 满足 $(u,v)\in E_1 \Leftrightarrow (\sigma(u),\sigma(v))\in E_2$. 而这样的双射 σ 很容易用长度为 $|V_1|\log|V_1|$ 的 01 串来编码.

构造一台图灵机 M, 其工作流程是对于输入的 $G=(V_1,E_1), H=(V_2,E_2)$ 以及 $\sigma: V_1\to V_2$, 检查 **(1)** σ 是不是双射, **(2)** $(u,v)\in E_1 \Leftrightarrow (\sigma(u),\sigma(v))\in E_2$ 是否成立, 若两项均成立则接受, 否则拒绝. 显然 M 是多项式时间图灵机, 且根据定义, $\langle G,H,\sigma\rangle\in L(M)$ 当且仅当 G 与 H 同构, 即 $\langle G,H\rangle\in \mathsf{ISO}$.

取 $p(n)=n^2$. 此时对于任意 $x\in\{0,1\}^*, x\in\mathsf{ISO}$ 当且仅当存在 $\sigma\in\{0,1\}^{p(|x|)}, M(x,\sigma)=1$, 故根据定义, $\mathsf{ISO}\in\mathbf{NP}$.

4

对于任意 $L\in\mathbf{NP}$, 考虑构造多项式时间规约 f 满足 $x\in L\Leftrightarrow f(x)\in\mathsf{HALT}$.

假设图灵机 M 与多项式 p 满足 $\forall x\in\{0,1\}^*, x\in L\Leftrightarrow \exists u\in\{0,1\}^{p(|x|)}, M(x,u)=1$, 考虑构造 $f(x)=\langle M',x\rangle$, 其中 M' 的工作流程是: 循环枚举所有长度为 $p(|x|)$ 的 01 串 u 并运行 $M(x,u)$, 一旦 $M(x,u)$ 返回 1 则停机, 否则永不停机.

- 虽然 M' 的运行时间可能达到 $|x|$ 的指数级别甚至更大, 但构造 M' 的描述是只需要多项式时间的, 因此 f 是多项式时间可计算的.
- 同时也不难验证 $\langle M',x\rangle\in\mathsf{HALT}$ 当且仅当存在 $u\in\{0,1\}^{p(|x|)}, M(x,u)=1$, 即 $x\in L$.

因此我们证明了 $L\leqslant_p \mathsf{HALT}$. 由 L 的任意性知 $\mathsf{HALT}\in\mathbf{NP}$-hard.

$\mathsf{HALT}\notin\mathbf{NP}$-complete, 因为否则会导致 $\mathsf{HALT}\in\mathbf{NP}\subseteq\mathbf{EXP}$, 即存在图灵机 M 可以在 $O(2^{n^c})$ 的时间内判定停机问题, 而我们知道停机问题是不可判定的, 因此矛盾.

5

对于任意 $B\in\mathbf{P}\setminus\{\varnothing,\Sigma^*\}$, 都存在 $x,y\in\Sigma^*$ 满足 $x\in B$ 而 $y\notin B$.

显然 $B\in\mathbf{NP}$. 欲证明 $B\in\mathbf{NP}$-complete, 还需要考虑将任意 $\mathbf{NP}$ 语言 A 多项式时间规约到 B. 考虑映射 f 满足 $f(w)=\begin{cases} x, & w\in A\\ y, & w\notin A\end{cases}$ $(\forall w\in\Sigma^*)$, 由 $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ 假设可知 $w\in A$ 可在多项式时间内判定, 因此 f 是多项式时间可计算的, 而 $w\in A\Leftrightarrow f(w)\in B$ $(\forall w\in\Sigma^*)$, 说明 $A\leqslant_p B$, 因此 $B\in\mathbf{NP}$-complete.

语言 B 对应的 x,y 可能并不是多项式时间可计算的, 但只需要指出其 "存在性" 即可, 因为在 "多项式时间规约" 的定义中, 只要求了映射 f "存在", 而不是某种意义上的 "多项式时间可构造". 满足条件的 x,y 完全可以视作映射的 f 的 "硬编码".

6

1. 考虑 $\phi=\bigwedge_i\left(\bigvee_j v_{ij}\right)$ 的一个 $\neq$-assignment x, 对于 ϕ 的每个从句 $c_i=\bigvee_j v_{ij}$, 都存在 k,k' 使得 $v_{ik}(x)=\text{True}, v_{ik'}(x)=\text{False}$, 这说明 $v_{ik}(\neg x)=\text{False}, v_{ik'}(\neg x)=\text{True}$, 从而 $\neg x$ 也使得 ϕ 的每个从句中包含两种不同的真值, 这说明 $\neq$-assignment 的否定仍是 $\neq$-assignment.

2. 考虑建立 $\mathsf{3SAT}$ 到 $\neq\mathsf{SAT}$ 的多项式时间规约: 考虑映射 f 满足

$$f\left(\bigwedge_i v_{i1}\vee v_{i2}\vee v_{i3}\right)=\bigwedge_i (v_{i1}\vee v_{i2}\vee z_i)\wedge(\overline{z_i}\vee v_{i3}\vee b)$$

我们不妨假设所有 *3CNF* 都形如上式左边括号里的形式, 因为如若不然, 则可以通过重复一些文字来得到一个如上格式的等价的 *CNF*.

考虑证明 $w \in \mathsf{3SAT} \Leftrightarrow f(w) \in \neq \mathsf{SAT}$:

(a) 如果 $w = (\bigwedge_i v_{i1} \vee v_{i2} \vee v_{i3}) \in \mathsf{3SAT}$, 说明存在 assignment x 使得 $w(x) = \text{True}$. 在 x 的基础上, 将每个 z_i 赋值为 $\neg(v_{i_1} \vee v_{i_2})$, 将 b 赋值为 False, 可以得到对 $f(w) = (\bigwedge_i (v_{i1} \vee v_{i2} \vee z_i) \wedge (\overline{z_i} \vee v_{i3} \vee b))$ 的赋值 x'.

只要验证 x' 是 $f(w)$ 的一个 $\neq$-assignment, 就能说明 $f(w) \in \neq \mathsf{SAT}$: 首先由 z_i 的赋值知从句 $v_{i1} \vee v_{i2} \vee z_i$ 中一定包含两种真值, 而要使 $\overline{z_i} \vee v_{i3} \vee b$ 只包含一种真值, 则必须有 $\overline{z_i}(x') = v_{i3}(x') = \text{False}$, 这导致了 $v_{i1}(x) = v_{i2}(x) = v_{i3}(x) = \text{False}$, 与 $w(x) = \text{True}$ 矛盾.

(b) 如果 $f(w) \in \neq \mathsf{SAT}$, 说明存在一个 $\neq$-assignment y. 讨论 $b(y)$ 的真值:

- 如果 $b(y) = \text{False}$, 则截取 y 中关于 v_{ij} 的部分得到的赋值 y' 可以满足 $w(y') = \text{True}$, 这是因为对于任意一组 $v_{i1}(y'), v_{i2}(y'), v_{i3}(y')$, 三者不可能同时为 False, 否则在 y 赋值下 $v_{i1} \vee v_{i2} \vee z_i$, $\overline{z_i} \vee v_{i3} \vee b$ 这两个从句中会有恰好一个从句包含三个 False, 与 $\neq$-assignment 矛盾.
- 如果 $b(y) = \text{True}$, 则选取前述 y' 的否定 $\neg y'$ 可以满足 $w(\neg y') = \text{True}$, 这是因为对于任意一组 $v_{i1}(\neg y'), v_{i2}(\neg y'), v_{i3}(\neg y')$, 三者不可能同时为 False, 否则在 y 赋值下 $v_{i1} \vee v_{i2} \vee z_i$, $\overline{z_i} \vee v_{i3} \vee b$ 这两个从句中会有恰好一个从句包含三个 True, 与 $\neq$-assignment 矛盾.

故 $w \in \mathsf{3SAT}$.

f 显然是多项式时间可计算的, 因此说明了 $\mathsf{3SAT} \leqslant_p \neq \mathsf{SAT}$.

3. 由 Cook-Levin Theorem 知 $\mathsf{3SAT} \in \mathbf{NP}$-complete, 即 $\forall L \in \mathbf{NP}, L \leqslant_p \mathsf{3SAT}$. 而前面我们证明了 $\mathsf{3SAT} \leqslant_p \neq \mathsf{SAT}$, 因此由 $\leqslant_p$ 的传递性可知 $\forall L \in \mathbf{NP}, L \leqslant_p \neq \mathsf{SAT}$, 即 $\neq \mathsf{SAT} \in \mathbf{NP}$-complete.