图论 + 树上问题杂题选讲

租酥雨

2021 年 8 月 21 日

PA2014 Kuglarz

description

n 个倒置的杯子排成一行，有些杯子底下藏着一个小球，另一些没藏。
你可以花费 c_{ij} 的代价询问杯子 $i, i+1, \cdots, j$ 底下藏着的球的数量的奇偶性。
求根据询问信息猜出每个杯子底下有没有藏球所需的最小总代价。

constraint

$n \le 5000.$

PA2014 Kuglarz

tutorial

转化为前缀和，每次询问相当于是得到了某两个前缀和之间的相等关系。

已知 $s_0 = 0$，需要通过相等关系让 $s_1, \cdots, s_n$ 与 s_0 “连通”，那么求一棵最小生成树即可。

Lydsy1705 月赛棋盘上的守卫

description

有一张 $n \times m$ 的棋盘，你需要选择一些位置放置守卫。守卫分为两种：横向守卫与纵向守卫。
每个位置放置守卫的代价是不同的，但同一个位置上方式横向或纵向守卫的代价是相同的。
求为了满足“每行有至少一个横向守卫，每列有至少一个纵向守卫”的要求，所需的最小代价。

constraint

$n \times m \leq 10^6$，所有代价均非负。

Lydsy1705 月赛棋盘上的守卫

tutorial

对每行每列分别建立一个点，记第 i 行对应的点是 a_i，第 j 列对应的点是 b_j，对于一个 (x, y) 处的守卫，若它是横向的，则连边 $a_x \to b_y$，否则连边 $b_y \to a_x$。

这样转化后，问题的限制等价于对于这 $n + m$ 个点，需要选取一些边使每个点的出度都恰好为 1。

会发现只需要让每个连通块构成一棵基环树，就一定存在一种给边定向（给守卫确定横纵向）的方案使这个连通块满足限制。

所以只需要对这张图求“最小生成基环树森林”就可以了。

例题：tree

description

一张 n 个点 m 条边的带权无向图，边有黑白两色。求恰好有 k 条白边的边权和最小的生成树。

constraint

$n, m \leq 10^5$.

例题：tree

tutorial

给每条白边加上一个权值偏置 $Bias$，直接做最小生成树，那么生成树中白边的数量关于 $Bias$ 是单调的（需要在有相同权值的时候加一些特殊处理，比如说优先选白边)。

因此二分 $Bias$ 即可。这种做法也 OI 界也被称作 wqs 二分。

例题：瞎编的

description

有 n 座城市，编号为 $1, \cdots, n$。
有 m 条道路，每条道路会指定参数 l_1, r_1, l_2, r_2, c，道路很神奇，你可以从任意城市 $i \in [l_1, r_1]$ 出发，花费 c 的代价，到达任意城市 $j \in [l_2, r_2]$。
求从 1 号城市出发到其余每个城市的最短路。

constraint

$n, m \leq 3 \times 10^5$.

例题：瞎编的

tutorial

线段树优化连边。需要建立两棵线段树，一棵自上而下连边，一棵自下而上连边。

“一条道路”只需要提取出 $\log n$ 个区间，建立两个新点再连上一条长度为 c 的边即可。

注意到图中虽然有 $O(m\log n)$ 条边，但只有 m 条边的权值非零，可以使用一些技巧（Dijkstra 与 BFS 结合）来把时间复杂度优化到一个 $\log$。

SDOI2017 天才黑客

description

有一张 n 点 m 条边的有向图，每条边都有一个边权以及一个字符串，字符串的给出形式是给出一棵 k 个节点的 Trie 树上的某个节点。
定义一条路径的权值是每条边的权值之和，加上任意相邻两条边上字符串的最长公共前缀 (Longest Common Prefix, LCP) 长度之和。
求 1 号点到其余每个点的最小路径权值。

constraint

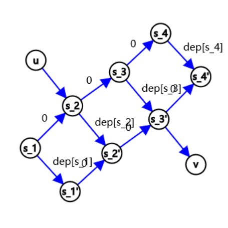
$n, m, k \leq 10^5$.

SDOI2017 天才黑客

tutorial

两个字符串的 LCP 长度对应到 Trie 树上就是两点的 LCA 深度，也是两点欧拉序区间中深度的**最小值**。

在原图中的每个点上，对其入边与出边用到的点集建立 Trie 树的一棵虚树，按欧拉序排序后得到点列 $p_1, p_2, \cdots, p_s$。我们希望建立一个结构，使得这个结构从 p_x 点进入、p_y 点离开的最短路长度是 $\min_{i=\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} dep_{s_i}$。



图有点丑，用 CSAcademy 上的 graph_editor 随手画的

上图解决了 $x \le y$ 的情况，可以对称地解决另外一半。

CERC2015 Juice Junctions

description

给出一张每个点度数不超过 3 的无向图，求两两节点之间的最小割（删去尽量少的边使得这两点不连通）。

constraint

$n \leq 3000, m \leq 4500.$

CERC2015 Juice Junctions

tutorial

显然最小割不超过 3，那么就只会是 $\{0,1,2,3\}$ 中的某一个。

- 当两个点连通时，它们的最小割 ≥ 1；
- 当两个点在同一个边双里时，它们的最小割 ≥ 2；
- 当两个点满足“删除任意一条边后仍在同一个边双里”时，它们的最小割 ≥ 3。

因此枚举每一条边删除后求边双即可。

POI2013 Price List

description

有一张 n 点 m 条边的无向图，每条边的边权都是 a。
现在对这张图进行一些操作：对于所有在原图中最短距离为 $2a$ 的点对 (i, j)，加入一条连接 i, j 且边权为 b 的边。
求这张新图中指定源点 S 到其余每个点的最短路。

constraint

$n, m \leq 10^5$.

POI2013 Price List

tutorial

可以发现新图上从 S 走到 T 的最短路的策略有且仅有如下三种：

- 只走 a 边，忽视加入的 b 边；
- 把两条 a 边并作一条 b 边走，最后视奇偶性可能会多出来一条 a 边；
- 只走 b 边。

前两种只需要对原图做一遍 BFS。考虑第三种：当 u 点向外转移时，需要先枚举一个 u 的相邻点 v，再枚举一个 v 的相邻点 w，若 u, w 之间没有边，便可以从 u 来更新 w。
注意到这个过程中每个点只会被更新一次，所以一旦 u 成功更新 w（等价于 u, w 之间没有边），$v \to w$ 这条枚举就可以删了。也就是说对于成功更新的部分，复杂度其实是关于一阶段枚举线性的，也即 $O(m)$。
问题在于不能成功更新的部分，即 u, w 之间有边，这会导致 (u, v, w) 构成一个三元环，而三元环个数是 $O(m\sqrt{m})$ 的，每个三元环对枚举复杂度的代价是常数的，因此总时间复杂度为 $O(m\sqrt{m})$。

LOJ6078 重排

description

给你一张可能含重边自环的 DAG，边有边权。你要从 s 走到 t。
当你从一个点出发准备向外走时，这个点的所有出边的边权会被随机打乱。你可以知道打乱后每条边的边权分别是多少进而做出相应决策。
求最短距离的期望。输出保留六位小数。

constraint

$n, m \leq 1000.$

LOJ6078 重排

tutorial

先假设没有自环。按拓扑序逆序 dp，现在 x 所有后继状态的 dp 值均已求出，我们想求要求 dp_x。

假设 x 的出边有 k 条，后继状态有 k 个，我们把这 $k \times k$ 个东西两两匹配，就得到了 k^2 对二元组。将二元组按权值从小到大排序，依次考虑计算最终的最优方案大于等于当前二元组的权值的概率。算概率等同于算方案数，Rabbit Numbering(SRM 463) 即可。这样单点的复杂度就是 $O(k^2 \log k)$，从 m 分析上界就是 $O(m^2 \log m)$。

现在有自环了，因为只要求保留六位小数，所以可以二分求出 dp_x 的近似解，具体来说就是每次把已有的 dp_x 当做是一个后继状态并套用上面的做法，根据得到的新 dp'_x 与 dp_x 的大小关系来调整 dp_x 的解。如果在加入自环的那些二元组时使用归并（将两个有序数组合并，复杂度线性），则可以将复杂度做到 $O(m^2 \log m)$。

CodeForces1110F Nearest Leaf

description

给出一棵树，树边有边权。有 q 次询问，每次询问给出 v, l, r，询问 dfs 序标号在 $[l, r]$ 内的所有叶子到 v 的最远距离。

constraint

$n, q \leq 5 \times 10^5$.

CodeForces1110F Nearest Leaf

tutorial

离线询问，先通过一遍 DFS 求出每个叶子到根的距离，再逐步移动询问点，每移动过一条边时，会导致一棵子树内的所有叶子的距离减去边权，而其他叶子的距离加上边权，用线段树维护即可。

ARC087F Squirrel Migration

description

有一棵 n 个点的树。记 $dis(i,j)$ 表示树上 i,j 两个点之间的距离，你需要生成一个排列 $\{p_i\}$，最大化

$$\sum_{i=1}^{n} dis(i,p_i)$$

你需要求出这个最大化的结果，以及有多少个排列能使得上式取到最大值。

constraint

$n \le 5000.$

ARC087F Squirrel Migration

tutorial

(计数题乱入)

对于一条树边 e，假设其两边的子树大小分别是 sz_e 和 $n-sz_e$，那么这条边对答案的贡献最多是 $2\min\{sz_e, n-sz_e\}$。我们证明答案可以取到 $2\sum_{e\in E}\min\{sz_e, n-sz_e\}$：只要选取一个点作为根，然后要求对于任意 i，i 与 p_i 均来自根的不同子树就可以了。显然我们会选择重心为根，并且一定能构造出一个满足条件的排列。

对于有两个重心的情况，会发现只要让每个 i 匹配任意一个另一侧的点即可，因此方案数是 $(\frac{n}{2}!)^2$。

对于有一个重心的情况，可以考虑容斥计算方案数（类似错排）。对于根的每一棵子树 u，枚举其中有 $0\le k_u\le sz_u$ 个 i 强制匹配子树内的点，其余点随意匹配，对总方案数的贡献是 $(-1)^{\sum k_u}(n-\sum k_u)!\prod\binom{sz_u}{k_u}^2 k_u!$，DP 计算即可。

CSP-S2019 树的重心

description

给出一棵树，对于一条树边 e，记 S_e 表示把 e 从树上删去后，剩下的两棵树上的重心的标号之和。求 $\sum_{e\in E} S_e$。

constraint

$n \leq 3 \times 10^5$.

CSP-S2019 树的重心

tutorial

固定一个点 x，统计割掉哪些边后，可以使 x 称为重心。

取原树的某个重心 r 作为根。当 $x \neq r$ 时，那么割掉的边必然要在子树外，且被割掉的部分会受到一个大小限制，可以用树状数组来统计。“在子树外”的条件可以用全集减去在子树内的，可以通过一些技巧实现“在子树内”这一限制。

当 $x = r$ 时，需要考虑割掉的边是否来自最大的子树，会分别得到不同的大小限制，同样用树状数组简单统计即可。

CEOI2019 动态直径

description

一棵 n 个点的树，每条边都有一个非负边权。
有 q 次修改操作，每次修改一条边的权值，并询问树的直径。

constraint

$n, q \leq 10^5$.

CEOI2019 动态直径

tutorial

线段树维护直径即可。合并即利用直径合并的结论。

ZJOI2019 语言

description

给一棵 n 个点的树和树上的 m 条路径，问有多少对 (i, j) 满足这两点同时被至少一条路径覆盖。

constriction

$1 \leq n, m \leq 10^5$.

ZJOI2019 语言

tutorial

对每个点求所有覆盖该点的链的链并大小，加起来除以 2 就是答案。
树上差分，即对于链 (x,y) 在 x 和 y 处加入这两个点，在 $fa_{lca(x,y)}$ 处删去（注意判出现次数)。线段树合并即可，复杂度 $O(n\log n)$。

POI2014 Hotel

description

给一棵 n 个点的树，从中选 3 个点使两两距离相同，求方案数。

constraint

原问题 $n \leq 5000$，加强版 $n \leq 10^6$.

POI2014 Hotel

tutorial

考虑朴素做法。记 $f_{i,j}$ 表示节点 i 子树内和 i 的距离为 j 的点数，$g_{i,j}$ 表示节点 i 子树内满足第三个点（在子树外）和 i 的距离为 j 的点对数目。

这样每次可以拿 $f_{u,j} \times g_{v,j+1}$ 和 $g_{u,j+1} \times f_{v,j}$ 更新答案，拿 $f_{u,j} \times f_{v,j-1}$ 更新 $g_{u,j}$，$f_{v,j}$ 更新 $f_{u,j+1}$，$g_{v,j}$ 更新 $g_{u,j-1}$，其中 v 是 u 的一个轻儿子。

仔细观察会发现，g 数组的更新与 f 是相反的，所以 g 数组反着开就行了。

Wannafly 挑战赛 12F 小 H 和圣诞树

description

一棵 n 个点的树，每个点有个颜色 col_i，每条边有个边权。
q 次询问，每次给两种颜色 a, b，求 $\sum_{col_x=a,col_y=b} dist(x, y)$。

constriction

$1 \leq n, m \leq 10^5$.

Wannafly 挑战赛 12F 小 H 和圣诞树

tutorial

设置阈值 S。

对于一种出现次数超过 S 的颜色，做两遍 DFS 对每个点预处理出“到所有该颜色点的距离和”。

查询时若一种颜色的出现次数超过 S，则直接暴力枚举较少的一种颜色统计答案；否则两种颜色的出现次数都不超过 S，把这不超过 $2S$ 个点拿出来建虚树后做前述的两遍 DFS（最好对多组涉及同一种颜色的询问一起做）。

总时间复杂度为 $O(\frac{n^2}{S} + n\sqrt{n} + nS\log n)$，当 S 取 $O(\sqrt{\frac{n}{\log n}})$ 时，复杂度为 $O(n\sqrt{n\log n})$。（默认 n, q 同阶）

谢谢大家！
祝大家学业有成！