网络流专题选讲

长郡中学　周书予

2018 年 12 月 8 日

前言

由于本人新入坑 LaTeX，有些地方可能做得比较粗糙，没法给大家带来优质的视觉体验，在此表示很抱歉。
网络流的内容比较广泛，本人才疏学浅没能全都研究透彻，这里就当作是抛砖引玉，希望可以给大家日后更深入的研究提供一些指导。

前言

由于本人新入坑 $\LaTeX$，有些地方可能做得比较粗糙，没法给大家带来优质的视觉体验，在此表示很抱歉。

网络流的内容比较广泛，本人才疏学浅没能全都研究透彻，这里就当作是抛砖引玉，希望可以给大家日后更深入的研究提供一些指导。

上面两段话是半年前写的。

目录

大致会讲到这么几方面的内容。

目录

大致会讲到这么几方面的内容。

- 基本概念与常用算法
- 网络流 24 题
- 上下界网络流
- 剩下的就是题了

基本概念

网络流 (network flows) 是一种类比水流的解决问题方法，与线性规划密切相关。

一张网络定义为 $G = (V, E, C, S, T)$，其中 V 表示点集，E 表示边集，C 表示边的容量限制，S 和 T 分别是源点和汇点。

网络流满足两个基本性质：容量限制与流量守恒。

基本概念

容量限制：设某条边 (u, v) 的容量为 $c(u, v)$，流量为 $f(u, v)$，则一定有 $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$。

流量守恒：对于 $\forall u \in V - \{S, T\}$，满足 $\sum_i f(i, u) = \sum_i f(u, i)$。

最大流

定义一张网络的流量为 $|f|$，在满足前面讲到的容量限制与流量守恒的前提下，有

$$|f| = \sum_i f(S, i)$$

最大的 $|f|$ 即为最大流。

割

将点集 V 分成两个非空子集 s, t 满足 $s \cup t = V, s \cap t = \emptyset$。
当 $S \in s$ 且 $T \in t$ 时，称这种分割为 $S - T$ 割。
记一个割的容量 $C_{s,t}$ 为所有从 s 到 t 的边的容量之和，即

$$C_{s,t} = \sum_{(u,v) \in E, u \in s, v \in t} c(u, v)$$

最小的 $S - T$ 割的容量 $\min\{C_{s,t}\}$ 即为最小割。

最大流最小割定理

在一个流网络中，最大流 = 最小割。

最大流最小割定理

在一个流网络中，最大流 $=$ 最小割。
读者自证不难。（大雾）

最大流算法

最大流算法

dinic，复杂度上界 $O(n^2m)$。

最大流算法

dinic，复杂度上界 $O(n^2m)$。
ISAP，与 dinic 的不同之处在于每次增广时不预先通过一遍 bfs 求出分层图，而是在增广的过程中考虑若点 x 尚有流量流入但所有出边（满足 $d_v + 1 = d_u$）均已流满，则将 x 点的标号增加 1。
复杂度上界与 dinic 相同，但运行效率明显优于 dinic。

最大流算法

dinic，复杂度上界 $O(n^2m)$。
ISAP，与 dinic 的不同之处在于每次增广时不预先通过一遍 bfs 求出分层图，而是在增广的过程中考虑若点 x 尚有流量流入但所有出边 (满足 $d_v + 1 = d_u$) 均已流满，则将 x 点的标号增加 1。复杂度上界与 dinic 相同，但运行效率明显优于 dinic。
gap 优化。若某次抬高点的标号时发现标号断层，则说明不再存在增广路，直接返回。

最大流算法

最大流算法

预流推进。

最大流算法

预流推进。
考虑手玩一张流网络，你会怎么做？

最大流算法

预流推进。
考虑手玩一张流网络，你会怎么做？
假设每个点都有一些剩余流量，初始时源点是 inf 其余点都是 0。
仍然对每个点定义标号 d_i，初始时源点为 n 其他点为 0，规定每次只能沿 $d_u = d_v + 1$ 的边推送流量（从源点向外推送不需要满足这个条件）。如果某个点仍有剩余流量却无法向外推送就抬高其标号。

最大流算法

预流推进。
考虑手玩一张流网络，你会怎么做？
假设每个点都有一些剩余流量，初始时源点是 inf 其余点都是 0。
仍然对每个点定义标号 d_i，初始时源点为 n 其他点为 0，规定每次只能沿 $d_u = d_v + 1$ 的边推送流量（从源点向外推送不需要满足这个条件）。如果某个点仍有剩余流量却无法向外推送就抬高其标号。
将点按照标号从大到小依次推送，复杂度上界被证明为 $O(n^2\sqrt{m})$，目测比较紧。

最大流算法

预流推进。
考虑手玩一张流网络，你会怎么做？
假设每个点都有一些剩余流量，初始时源点是 inf 其余点都是 0。
仍然对每个点定义标号 d_i，初始时源点为 n 其他点为 0，规定每次只能沿 $d_u = d_v + 1$ 的边推送流量（从源点向外推送不需要满足这个条件）。如果某个点仍有剩余流量却无法向外推送就抬高其标号。
将点按照标号从大到小依次推送，复杂度上界被证明为 $O(n^2\sqrt{m})$，目测比较紧。
优化：d_i 的初值可以设为到汇点的最短距离，不过 d_S 一定要设为 n；同样可以使用 gap 优化，在这里若标号出现断层，则标号大的那部分点的剩余流量一定无法流向汇点，直接将其标号设为 n，将剩余流量设为 0。

费用流

一般的费用流模型中，每条边产生的费用都和这条边的流量成正比。

费用流可以分为最大/最小费用最大流、最大/最小费用可行流，注意每次增广出来的费用一定是单调增/单调减的，所以当达到某个临界值的时候（比如说 0）即可停止增广。

费用流算法

费用流算法

spfa 费用流

费用流算法

spfa 费用流

一种优化：每次沿最短路类似 *Dinic* 那样增广，对于费用相同的路径在同一次 *spfa* 后处理，这样就减少了 *spfa* 的运行次数，适用于费用比较小的网络。

讲题之前

网络流 24 题是网络流算法的入门例题，值得一做。

讲题之前

网络流 24 题是网络流算法的入门例题，值得一做。
接下来可能会讲得比较快，所以有疑问的话请及时提出。

讲题之前

网络流 24 题是网络流算法的入门例题，值得一做。
接下来可能会讲得比较快，所以有疑问的话请及时提出。
还有，不要问我机器人路径规划怎么做，这里不讲谢谢。

1、飞行员配对方案问题

n 名英国皇家飞行员匹配 m 名外籍飞行员。问最大匹配数。
$n, m \leq 100$

2、太空飞行计划问题

有一些实验，有一些仪器。每个实验需要用到若干仪器。一个仪器买来要 C_i 元，一个实验完成可以获得 P_i 元。求最大收益。

$n, m \leq 50$

3、最小路径覆盖问题

给一个 DAG，用最少数量的路径覆盖这个 DAG 要求路径点不相交。

$n \leq 150, m \leq 6000$

4、魔术球问题

你要在 n 根柱子上依次放编号为 $1, 2, 3...$ 的球，要求上下相邻的两个球的编号之和为完全平方数。问 n 根柱子上最多放多少个球。

$n \leq 55$

5、圆桌问题

有 M 个不同单位的人，每个单位有 R_i 个人。
有 N 张桌子，每张桌子最多坐 C_i 个人。
同一个单位的人不同坐同一张桌子。
输出一组合法方案。
$m \le 150, n \le 270$

6、最长不下降子序列问题

给你一个序列 $x_1 ... x_n$，求：
最长不下降子序列的长度 s。
从序列中最多可取出多少个长度为 s 的不下降子序列。
如果允许在取出的序列中多次使用 x_1 和 x_n，则从给定序列中最多可取出多少个长度为 s 的不下降子序列。
$n \leq 500$

7、试题库问题

你有 n 道题，每道题有若干个类型。总共要选出 m 道题，其中每个类型选 P_i 道。
求一组合法方案。
$n \leq 1000$

9、方格取数问题

你有一个 $n \times m$ 的矩阵，每个格子上有一个权值 A_{ij}。你要选一些格子使两两不相邻同时权值和最大。

$n, m \leq 100$

10、餐巾计划问题

在接下来的 n 天里，每天需要 R_i 块餐巾。购买费用每块 p 分，送快洗每块 f 分，m 天后洗完，送慢洗每块 s 分，n 天后洗完。求最小费用。

$n \leq 2000$，时限 $4s$

11、航空路线问题

n 座城市 m 条航线，先从西往东飞到最东边城市再从东往西飞回起点，要求不经过重复城市（起点除外），使得路径最长（经过的城市数最多）。

$n \le 100$

13、星际转移问题 (CTSC1999 家园)

你要把 k 个人从地球运到月球上。
有 n 个中转站，每个中转站可容纳任意多人。
有 m 艘飞船，每艘飞船可容纳 H_i 个人，而且会在一些中转站之间周期性地停靠。
求最少的天数使所有人都运到月球上。
$n \le 13, m \le 20, k \le 50$

16、数字梯形问题

你有一个数字梯形，第一行有 m 个数，一共有 n 行。求：
(1) 从梯形顶至底的 m 条路径互不相交；
(2) 从梯形顶至底的 m 条路径只能在数字节点处相交；
(3) 从梯形顶至底的 m 条路径可以在数字和边上相交；
求最大路径权值。
$n, m \leq 20$

17、运输问题

m 个仓库，每个有 A_i 货物。
n 个零售商店，每个需要 B_i 货物。
从第 i 个仓库运到第 j 个零售商店需要 C_{ij} 的单位费用。
求最小总费用。
$n, m \leq 100$

18、分配问题

有 n 件工作要分配给 n 个人做。第 i 个人做第 j 件工作产生的效益为 C_{ij}。一个人只能做一件工作。
求总效益和最大。
$n \leq 100$

19、负载平衡问题

有 n 个沿铁路运输线环形排列的仓库，每个仓库存储的货物数量不等。问如何用最少搬运量可以使 n 个仓库的库存数量相同。搬运货物时，只能在相邻的仓库之间搬运。

$n \leq 100$

20、深海机器人问题

一张 $n \times m$ 的网格图，若干机器人沿边行走，且只能向北或向东走。

每条边上都有生物标本，走过一次可以获得收益，但走过一次也就收集完了，所以走第二次不会获得更多的收益。

有 a 个起点形如 (x, y, k)，表示有 k 个机器人可以从 (x, y) 出发开始收集。

有 b 个终点 (x, y, r) 同理。

求最大收益

$n, m \leq 15$

21、最长 k 可重区间集问题

你有 n 个开区间 (L_i, R_i)，定义 k 可重区间集 S 为对于 $\forall x \in R$，都有不超过 k 个 S 中的区间包含了 x。

k 可重区间集的长度定义为所有区间的长度之和。

求最长 k 可重区间集的长度。

$n \leq 500$

22、最长 k 可重线段集问题

把上一道题的开区间改成了开线段。要求这些线段在 x 轴上的投影最多 k 可重。

22、最长 k 可重线段集问题

把上一道题的开区间改成了开线段。要求这些线段在 x 轴上的投影最多 k 可重。

唯一的不同是可能有线段投影在 x 轴上是一个点需要特殊处理。

23、火星探险问题

火星地表有三种地况：平地，障碍，岩石标本。
K 辆探险车从 $(1,1)$ 出发，只能往右或往下走，在 (n,m) 位置结束。不能经过障碍，且岩石样本收集一次后就没了。
求最多收集多少岩石标本。并输出方案。
$n,m,K \leq 35$

24、骑士共存问题

$n \times n$ 的棋盘上有 m 个障碍，在非障碍格子放若干个骑士要求不互相攻击。求最大放置的个数。

$n \leq 200$

上下界网络流

上下界网络流

在一般的网络流模型中，对每条边的流量限制是 $0 \le f(u,v) \le c(u,v)$。现在加入对每条边流量下界的限制，即限制 $b(u,v) \le f(u,v) \le c(u,v)$。
加入对流量下界的限制后可能会导致不存在合法的流网络，所以上下界网络流通常存在一个是否有解的判定性问题。

无源汇上下界可行流

无源汇上下界可行流

这个东西的数学模型最简单所以就拿这个东西来讲。无源汇的意思就是对于 $\forall u \in V$ 满足 $\sum_i f(i,u) = \sum_i f(u,i)$，即不需要特判源和汇。可行流的意思是不需要是最大流只要满足合法即可。

无源汇上下界可行流

这个东西的数学模型最简单所以就拿这个东西来讲。无源汇的意思就是对于 $\forall u \in V$ 满足 $\sum_i f(i,u) = \sum_i f(u,i)$，即不需要特判源和汇。可行流的意思是不需要是最大流只要满足合法即可。

对于上下界网络流问题，我们有一个初步的想法：既然流量限制是 $b(u,v) \le f(u,v) \le c(u,v)$，那能不能先钦定每条边的流量至少是 $b(u,v)$，然后再跑容量上界是 $c(u,v) - b(u,v)$ 的网络流呢？

无源汇上下界可行流

这个东西的数学模型最简单所以就拿这个东西来讲。无源汇的意思就是对于 $\forall u \in V$ 满足 $\sum_i f(i,u) = \sum_i f(u,i)$，即不需要特判源和汇。可行流的意思是不需要是最大流只要满足合法即可。

对于上下界网络流问题，我们有一个初步的想法：既然流量限制是 $b(u,v) \le f(u,v) \le c(u,v)$，那能不能先钦定每条边的流量至少是 $b(u,v)$，然后再跑容量上界是 $c(u,v) - b(u,v)$ 的网络流呢？

无源汇上下界可行流

假的！

无源汇上下界可行流

假的！
考虑一下新图上每一条边的流量 $g(u,v) = f(u,v) - b(u,v)$，把它代入原图流量守恒的式子里去。

无源汇上下界可行流

假的！

考虑一下新图上每一条边的流量 $g(u,v)=f(u,v)-b(u,v)$，把它代入原图流量守恒的式子里去。

$$\sum f(u,i)=\sum f(i,u)$$

无源汇上下界可行流

假的！
考虑一下新图上每一条边的流量 $g(u,v)=f(u,v)-b(u,v)$，把它代入原图流量守恒的式子里去。

$$\sum f(u,i)=\sum f(i,u)$$

$$\sum g(u,i)+b(u,i)=\sum g(i,u)+b(i,u)$$

无源汇上下界可行流

假的！

考虑一下新图上每一条边的流量 $g(u,v)=f(u,v)-b(u,v)$，把它代入原图流量守恒的式子里去。

$$\sum f(u,i)=\sum f(i,u)$$

$$\sum g(u,i)+b(u,i)=\sum g(i,u)+b(i,u)$$

$$\sum g(u,i)-g(i,u)=\sum b(i,u)-b(u,i)$$

无源汇上下界可行流

假的！

考虑一下新图上每一条边的流量 $g(u,v)=f(u,v)-b(u,v)$，把它代入原图流量守恒的式子里去。

$$\sum f(u,i)=\sum f(i,u)$$

$$\sum g(u,i)+b(u,i)=\sum g(i,u)+b(i,u)$$

$$\sum g(u,i)-g(i,u)=\sum b(i,u)-b(u,i)$$

发现流量并不平衡。

无源汇上下界可行流

对于 $\forall u \in V$，记 $d(u) = \sum b(i,u) - b(u,i)$。
当 $d(u) > 0$ 时，说明流出流量大于流入流量，该点流量透支。
当 $d(u) < 0$ 时，说明流出流量小于流入流量，该点流量结余。

无源汇上下界可行流

对于 $\forall u \in V$，记 $d(u) = \sum b(i,u) - b(u,i)$。
当 $d(u) > 0$ 时，说明流出流量大于流入流量，该点流量透支。
当 $d(u) < 0$ 时，说明流出流量小于流入流量，该点流量结余。
新建源点汇点 S, T，对于 $d(u) > 0$ 的点，从 S 向 u 连的容量 $d(u)$ 边；对于 $d(u) < 0$ 的点，从 u 向 T 连容量 $-d(u)$ 的边。
求出从 S 到 T 的最大流。若 S 的出边没有流满则无解。
若流满，那么此时的图就是原图的一个可行流。

有源汇上下界可行流

有源汇上下界可行流

从 T 到 S 连一条容量为 inf 的边，转化为无源汇上下界网络流。跑出一个可行流后，这条 (T, S) 边上的实际流量恰好对应了原有源汇网络的实际流量。

上下界最大流

上下界最大流

在求出了可行流的基础上再跑一边 S 到 T 的最大流即可。
这里的 S 和 T 是指的原图中的 S 和 T。

上下界最小流

上下界最小流

要保证流量最小就要让新连的那条 $T-S$ 边的流量尽量小。也就是希望从新建的源点到汇点的最大流尽量不经过这一条边。
所以先不加入 $T-S$ 边，跑一遍最大流，再加入，再跑。
这样就是最小流了。

BZOJ2055 80 人环游世界

一个 80 人的团伙，想来一次环游世界。他们打算兵分多路，游遍每一个国家。因为他们主要分布在东方，所以他们只朝西方进军。设从东方到西方的每一个国家编号依次为 $1...n$。假若第 i 个人的游历路线为 $P_1, P_2...P_k (0 \leq k \leq n)$，则 $P_1 < P_2 < ... < P_k$。众所周知，中国相当美丽，这样在环游世界时就有很多人经过中国。我们用一个正整数 V_i 来描述一个国家的吸引程度，V_i 值越大表示该国家越有吸引力，同时也表示有且仅有 V_i 个人会经过那一个国家。

为了节省时间，他们打算通过坐飞机来完成环游世界的任务。同时为了省钱，他们希望总的机票费最小。

明天就要出发了，可是有些人临阵脱逃，最终只剩下了 m 个人去环游世界。他们想知道最少的总费用，你能告诉他们吗？

$n \leq 100, m \leq 79$

NOI2015 小园丁与老司机 Sub problem

有一张分层 DAG，你可以选择开车从任意点出发，到达任意点停止，求每条边经过至少一次需要出发多少次。

NOI2015 小园丁与老司机 Sub problem

模型等同于上下界最小流。
新建源汇后需要补满从源点连过来/连向汇点的边的流量。因为很显然存在可行流，所以直接在跑源点到汇点的最大流，这样剩下还没补满的流量就是上下界最小流了。

一些约定

在下文中为方便起见，记 (u, v, w) 表示从 u 连向 v 容量为 w 的边，记 $(u, v, w, cost)$ 表示从 u 连向 v 容量为 w 费用为 $cost$ 的边。

一些约定

在下文中为方便起见，记 (u, v, w) 表示从 u 连向 v 容量为 w 的边，记 $(u, v, w, cost)$ 表示从 u 连向 v 容量为 w 费用为 $cost$ 的边。接下来就全是题了，欢迎大家踊跃上来秒。

HNOI2013 切糕

有一个 $P \times Q$ 的矩阵，每个位置可以填一个 $[1, R]$ 的数。每个位置上填每个数都会有一个代价。
要求四连通的格子填的数之差不超过 D。
求最小代价。
$P, Q, R \leq 40, 0 \leq D \leq R$。

HNOI2013 切糕

HNOI2013 切糕

对每个位置建一条长为 R 的链，做最小割的时候就会恰好在每条链上割掉一条边，即选出一个权值。
考虑相邻的限制条件。如果某个位置上选的数是 x，那么其相邻选的数不得小于 $x-D$。从某个位置代表 x 的点向相邻位置代表 $x-D$ 的点连单向的 inf 边即可。

BZOJ2127 happiness

高一一班的座位表是个 $n \times m$ 的矩阵，经过一个学期的相处，每个同学和前后左右相邻的同学互相成为了好朋友。这学期要分文理科了，每个同学对于选择文科与理科有着自己的喜悦值，而一对好朋友如果能同时选文科或者理科，那么他们又将收获一些喜悦值。要求最大化全班同学的喜悦值之和。

$n, m \leq 100$

BZOJ2127 happiness

我们随机一位同学上来讲。

BZOJ2127 happiness

我们随机一位同学上来讲。
yyb

BZOJ2127 happiness

BZOJ2127 happiness

首先把最大受益转化成最小损失从而建立最小割模型。把所以收益都先加起来，然后用最小割求解最小损失。
我们把选文科的划在 S 这一边，把选理科的划在 T 这一边。那么这样对一个单点 x 的处理就很简单：直接令 $(S,x) =$ 选文科的收益，$(x,T) =$ 选理科的收益即可。
但是两人同时选文或选理的收益（或者说损失）要怎么计算呢？
我们假设两个人 x，y，他们俩一起选文的收益是 u，一起选理的收益是 v，对于可能出现的 $2^2 = 4$ 种情况分别讨论。

BZOJ2127 happiness

1、x，y 都选文。此时被割掉的边是 (x,T) 和 (y,T)，损失为 v；
2、x，y 都选理。此时被割掉的边是 (S,x) 和 (S,y)，损失为 u；
3、x 选文 y 选理。此时被割掉的边是 (x,T)、(S,y) 和 (x,y)，损失为 $u+v$；
4、x 选理 y 选文。此时被割掉的边是 (S,x)、(y,T) 和 (y,x)，损失为 $u+v$。
由上我们可以得到一个方程组：

$$(x,T)+(y,T)=v$$
$$(S,x)+(S,y)=u$$
$$(x,T)+(S,y)+(x,y)=u+v$$
$$(S,x)+(y,T)+(y,x)=u+v$$

BZOJ2127 happiness

只要是初中数学毕业了的就知道这个方程肯定解不出来（不定方程），但是考虑到这个东西并不会对其他产生影响，所以我们可以任意带一组可行解进去。令：

$(x,T)=\frac{v}{2}$
$(y,T)=\frac{v}{2}$
$(S,x)=\frac{u}{2}$
$(S,y)=\frac{u}{2}$
$(x,y)=\frac{u+v}{2}$
$(y,x)=\frac{u+v}{2}$

按照以上建图方式即可。由于除 2 可能会产生浮点数问题，所以可以把所有权值扩大两倍，保证所有容量是正整数。

BZOJ2132 圈地计划

最近房地产商 GDOI 从 NOI 手中得到了一块开发土地。据了解，这块土地是一块矩形的区域，可以纵横划分为 $n \times m$ 块小区域。GDOI 要求将这些区域分为商业区和工业区来开发。根据不同的地形环境，每块小区域建造商业区和工业区能取得不同的经济价值。更具体点，对于第 i 行第 j 列的区域，建造商业区将得到 $A_{i,j}$ 收益，建造工业区将得到 $B_{i,j}$ 收益。另外不同的区域连在一起可以得到额外的收益，即如果区域 (i,j) 相邻（相邻是指两个格子有公共边）有 k 块（显然 k 不超过 4）类型不同于 (i,j) 的区域，则这块区域能增加 $k \times C_{i,j}$ 收益。经过 Tiger.S 教授的勘察，收益矩阵 A, B, C 都已经知道了。你能帮 GDOI 求出一个收益最大的方案么？

$n, m \leq 100$

BZOJ2132 圈地计划

相邻不同色产生收益这点比较令人头疼，考虑转化一下模型。

BZOJ2132 圈地计划

相邻不同色产生收益这点比较令人头疼，考虑转化一下模型。
黑白染色。
最小割中割在左边的点为染成黑色的商业区和染成白色的工业区，这样就变成了不在同一边产生代价。

CF311E Biologist

有 n 个 01 变量，你要确定它们的值，改变第 i 个变量的代价是 v_i。

有 m 个限制条件，每个形如：某个变量集合内的所有元素都必须是 0，或者都必须是 1。达成这个条件会获得 W_i 的收益，否则有可能会付出 g 的代价。

求最大收益。

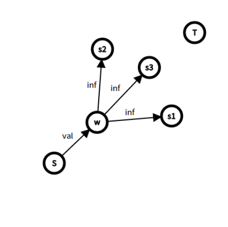
$1 \leq n \leq 10^4, 0 \leq m \leq 2000$。

CF311E Biologist

考虑一个长这样的建图。

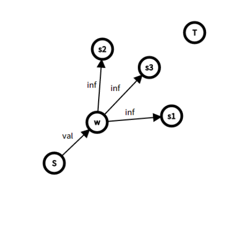
CF311E Biologist

考虑一个长这样的建图。



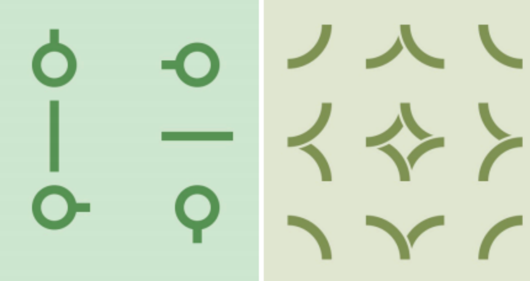
CF311E Biologist

考虑一个长这样的建图。



只要 s_i 中任意一个点被割在了 T 集合内，点 w 就也会被割在 T 集合内。这样就产生了 val 的代价。

BZOJ5120 无限之环



有 15 种水管如上图所示，你需要对非直线型水管进行旋转操作，使得整张图不漏水。
漏水的定义为存在某个接头没有和其它接头相连接。
求最少旋转次数。
$n \times m < 2000$。

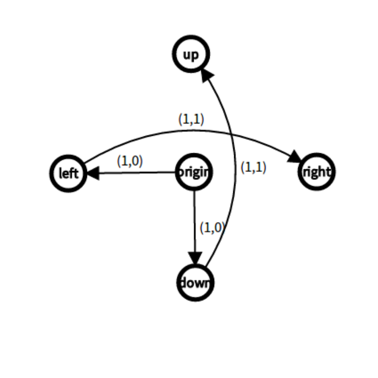
BZOJ5120 无限之环

BZOJ5120 无限之环

黑白染色。
每个位置拆五个点，分别表示原位置与上、下、左、右。S 向所有黑点连边，所有白点向 T 连边。黑点对应方向的点向白点对应方向的点连边。
本质上不同的建边方法只有三种，其他情况都可以旋转得到。黑点与白点的建边是完全对称的。接下来只讨论黑点对应的三种情况。

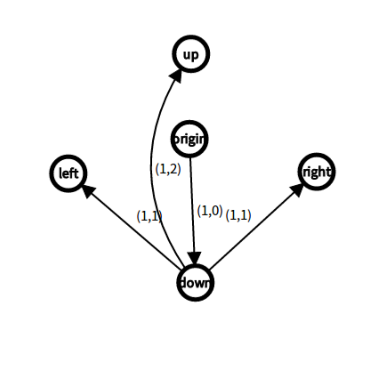
BZOJ5120 无限之环

BZOJ5120 无限之环



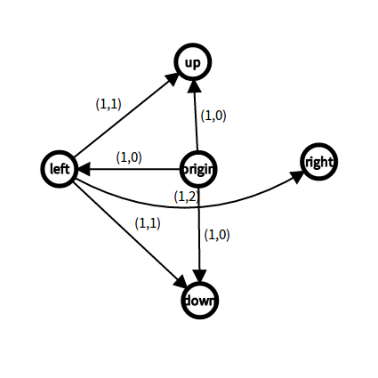
BZOJ5120 无限之环

BZOJ5120 无限之环



BZOJ5120 无限之环

BZOJ5120 无限之环



BZOJ3232 圈地游戏

一个 $n \times m$ 的网格图，每条边有一个代价 c，每个格子有一个权值 v。你要从中选出一个封闭图形，记选出的封闭图形内的格子的总权值为 $\sum v$，封闭图形边界上的边的总代价为 $\sum c$，你需要最大化 $\frac{\sum v}{\sum c}$。

$1 \leq n, m \leq 50$。

BZOJ3232 圈地游戏

BZOJ3232 圈地游戏

二分答案，把原问题转化为判定性问题：是否存在一个封闭图形，使得 $\sum v - mid \times \sum c > 0$。
把格子看成点，相邻格子之间连它们公共边的代价，再新建一个点表示网格外，与边界上的格子也连边。
由此问题转化为一个最大权闭合子图的问题，跑最小割即可。

UOJ389 白鸽

平面上有 n 个点 m 条边，有重边无自环。你需要找出一条路径经过所有的边恰好一次后回到起点，使得路径顺时针方向绕原点的次数尽量多。保证任意两点所确定的直线不过原点。

$n, m \leq 20000, |x_i|, |y_i| \leq 10^9$

UOJ389 白鸽

平面上有 n 个点 m 条边，有重边无自环。你需要找出一条路径经过所有的边恰好一次后回到起点，使得路径顺时针方向绕原点的次数尽量多。保证任意两点所确定的直线不过原点。

$n, m \le 20000, |x_i|, |y_i| \le 10^9$

欧拉回路与网络流

UOJ389 白鸽

问题相当于强制每一条边的流量为 1，但是没有规定方向。

UOJ389 白鸽

问题相当于强制每一条边的流量为 1，但是没有规定方向。
点按极角排序，强制从某条射线的一侧流向另一侧时产生贡献。
先假设每条边都是 $u-v$ 方向，其中 u 在极角排序中更靠前，这样可能会导致路径不合法，所以需要进行调整，具体来说就是某些边需要改成 $v-u$ 方向，也就是退流量恰好为 2。

UOJ389 白鸽

问题相当于强制每一条边的流量为 1，但是没有规定方向。
点按极角排序，强制从某条射线的一侧流向另一侧时产生贡献。
先假设每条边都是 $u-v$ 方向，其中 u 在极角排序中更靠前，这样可能会导致路径不合法，所以需要进行调整，具体来说就是某些边需要改成 $v-u$ 方向，也就是退流量恰好为 2。
怎么做到流的最小单位为 2？

UOJ389 白鸽

问题相当于强制每一条边的流量为 1，但是没有规定方向。
点按极角排序，强制从某条射线的一侧流向另一侧时产生贡献。
先假设每条边都是 $u-v$ 方向，其中 u 在极角排序中更靠前，这样可能会导致路径不合法，所以需要进行调整，具体来说就是某些边需要改成 $v-u$ 方向，也就是退流量恰好为 2。
怎么做到流的最小单位为 2？发现一旦某个点的度数是奇数就不存在合法路径，所以每个点的度数一定都是偶数，那么上下界网络流中每个点透支/结余的流量（也就是新建源点连向它/它连向新建汇点的流量）也一定是偶数。那么把图中每一条边的流量除以 2，费用乘以 2 即可。

AHOI2009 最小割

给你一张图，问每一条边是否可能出现在最小割中，是否一定出现在最小割中。$n \leq 4000, m \leq 60000$。

AHOI2009 最小割

AHOI2009 最小割

(u, v, w) 在最小割中的必要条件：若 w 减小，则最小割减小。
(u, v, w) 在最小割中的充分条件：若 w 增大，则最小割增大。

AHOI2009 最小割

(u, v, w) 在最小割中的必要条件：若 w 减小，则最小割减小。
(u, v, w) 在最小割中的充分条件：若 w 增大，则最小割增大。
在残余网络上沿剩有流量的边跑 $Tarjan$ 求出强连通分量。
那么 (u, v, w) 在最小割中的必要条件：边满流且 $bel_u \neq bel_v$。
(u, v, w) 在最小割中的充分条件：边满流且 $bel_u = bel_S, bel_v = bel_T$。

AHOI2009 最小割

证明？

AHOI2009 最小割

证明？

必要性证明：采用反证法。若 $bel_u = bel_v$，则说明 u 和 v 存在于某个环内，把这个环上每条边的流量减小 d，即可保证流量守恒与最大流不变，与之前的题设不符。否则最大流就一定会改变。

AHOI2009 最小割

证明？

必要性证明：采用反证法。若 $bel_u = bel_v$，则说明 u 和 v 存在于某个环内，把这个环上每条边的流量减小 d，即可保证流量守恒与最大流不变，与之前的题设不符。否则最大流就一定会改变。

充分性证明：若 $bel_u = bel_S, bel_v = bel_T$，则说明存在从 S 到 u 的增广路，从 v 到 T 的增广路，这样一来只要容量增加则最大流一定增加。

ZJOI2011 最小割

多组询问，每次询问图中有多少对点的最小割不超过 x。
$T \le 10, n \le 150, m \le 3000, q \le 30$。

ZJOI2011 最小割

黑科技——最小割树。

ZJOI2011 最小割

黑科技——最小割树。

初始时把所有点放在一个集合，从中任选两个点出来跑原图中的最小割，然后按照 s 集合与 t 集合的归属把当前集合划分成两个集合，递归处理。

这样一共跑了 $n-1$ 次最小割，可以证明图中任意一对点之间的最小割的数值都包含在这 $n-1$ 个数值当中。

ZJOI2011 最小割

如何证明？

ZJOI2011 最小割

如何证明？

设任意三点 a, b, c 之间的最小割分别为 $mincut(a, b), mincut(a, c), mincut(b, c)$。

设 $mincut(a, b)$ 是这三者中的最小值，那么在做 $a - b$ 割时，c 一定属于其中的某一个集合，设其与 a 同属于一个集合，那么就有 $mincut(b, c) \leq mincut(a, b)$。

又因为 $mincut(a, b) \leq mincut(b, c)$，所以两者相等。

也就是说任意三点之间的最小割一定是两个相等的较小值和一个较大值。

把这个定理推广，即可证明图中至多只有 $n - 1$ 种不同的最小割。

NOI2008 志愿者招募

奥运会持续 n 天，第 i 天一共需要 A_i 名志愿者。
有 m 种类型的志愿者，第 i 种志愿者会从第 s_i 天工作到第 t_i 天，单人招募费用是 c_i。
求最小招募费用。$n \le 1000, m \le 10000$。
样例：$a_i = \{2, 3, 4\}$，三种志愿者分别是 $(1, 2, 2)$，$(2, 3, 5)$ 和 $(3, 3, 2)$。

NOI2008 志愿者招募

设 x_i 表示第 i 种志愿者招募的数量。$(1 \le i \le m)$

$$\begin{cases} x_1 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_2 + x_3 \ge 4 \end{cases}$$

最小化目标函数 $F = 2x_1 + 5x_2 + 2x_3$。

看着不等式很不爽，所以给每个不等号的右边加上一个余项。

$$\begin{cases} x_1 = 2 + y_1 \\ x_1 + x_2 = 3 + y_2 \\ x_2 + x_3 = 4 + y_3 \end{cases}$$

NOI2008 志愿者招募

发现每个 x_i 出现的等式是连续的一段，所以可以考虑用每个式子减去上一个式子。

$$\begin{cases} x_1 = 2 + y_1 \\ x_2 = 1 + y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 = 1 + y_3 - y_2 \\ -x_2 - x_3 = -4 - y_3 \end{cases}$$

这时候你会发现每个 x_i, y_i 都恰好在上面的不等式组中出现了一次！

猜一猜等式有什么可供转化模型的方向？流量平衡？

NOI2008 志愿者招募

每个等式建一个点。对于每一个变量，我们由减去它的那个等式连边连向加上它的那个等式。对于常数项，从源点连向它/从它连向汇点以补足/抵消一部分流量。
在这里补足/抵消的流量是一定可以流满的，所以不需要上下界。

LOJ6079 「2017 山东一轮集训 Day7」养猫

你养了一只 mona。有 n 个时刻，每个时刻 mona 不是睡觉就是吃饭。在第 i 个时刻 mona 如果睡觉的话可以获得 s_i 点偷税值，如果吃饭的话可以获得 e_i 点偷税值。为了 mona 的健康成长，在任意连续的 k 个时刻里，mona 需要有至少 ms 个时刻在睡觉，有 me 个时刻在吃饭。

求 mona 可以获得的最大偷税值并输出方案。

$1 \le k \le n \le 1000, 0 \le ms + me \le k$。

LOJ6079 「2017 山东一轮集训 Day7」养猫

设 x_i 表示 mona 在 i 时刻是不是在睡觉 $(x_i \in \{0,1\})$
先假设 mona 一直在吃饭，答案初始化为 $\sum e_i$，然后在第 i 时刻睡觉的收益就是 $s_i - e_i$。

$$\begin{cases} ms \le x_1 + x_2 + \ldots + x_k \le k - me \\ ms \le x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1} \le k - me \\ \ldots \\ ms \le x_{n-k+1} + x_{n-k+2} + \ldots + x_n \le k - me \end{cases}$$

最大化目标函数 $F = \sum_{i=1}^{n} (s_i - e_i) x_i$

LOJ6079 「2017 山东一轮集训 Day7」养猫

$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+k-1} + y_i = k - me \\ x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+k-1} - z_i = ms \end{cases}$$

显然 $y_i + z_i = k - ms - me$

用含有 z_i 的等式减去含有 y_{i-1} 的等式。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k - z_1 = ms \\ -x_{i-1} + x_{i+k-1} - z_i - y_{i-1} = k - ms - me \ (2 \le i \le n-k+1) \\ +x_{n-k+1} + x_{n-k+2} + \ldots + x_n + y_{n-k+1} = k - me \end{cases}$$

类似上一题的方式建图。每个等式建一个点总共 $n-k+2$ 个点，再新建 $n-k+1$ 个辅助点以实现 $y_i + z_i = k - ms - me$。

WC2007 剪刀石头布

竞赛图中有一些边已经定向，现在要你给剩下的边定向，使得三元环的数量尽可能多。$n \le 100$。

WC2007 剪刀石头布

正难则反。

考虑三个点不形成三元环（剪刀石头布）的情况：必然有一个点入度为 2，一个点出度为 2，一个点入度出度都为 1。

WC2007 剪刀石头布

正难则反。

考虑三个点不形成三元环（剪刀石头布）的情况：必然有一个点入度为 2，一个点出度为 2，一个点入度出度都为 1。

我们考虑枚举入度为 2 的那个点，这样不形成三元环的数量就为 $\sum \binom{in_i}{2}$，答案就为 $\binom{n}{3} - \sum \binom{in_i}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \sum \frac{in_i^2 - in_i}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{4} - \sum \frac{in_i^2}{2}$。

前面的都是定值，所以要最大化三元环数量就只要最小化 $\sum \frac{in_i^2}{2}$ 就行了。

WC2007 剪刀石头布

正难则反。

考虑三个点不形成三元环（剪刀石头布）的情况：必然有一个点入度为 2，一个点出度为 2，一个点入度出度都为 1。

我们考虑枚举入度为 2 的那个点，这样不形成三元环的数量就为 $\sum \binom{in_i}{2}$，答案就为 $\binom{n}{3} - \sum \binom{in_i}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \sum \frac{in_i^2 - in_i}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{4} - \sum \frac{in_i^2}{2}$。

前面的都是定值，所以要最大化三元环数量就只要最小化 $\sum \frac{in_i^2}{2}$ 就行了。

而这个东西是一个凸函数，所以考虑拆边。

具体来说，假设一条边的费用 c 与流量 f 的关系为 $c = f^2$，就连边 $(1,1),(1,3),(1,5),(1,7)\dots$，这样在增广过程中一定会优先走费用较小的边，保证了正确性。

CodeChef Annual Parade

有一张 n 点 m 条边的有向图，边有边权，你可以随意放置任意数量的英雄在图上走。注意只要你放置了一个英雄他就要走至少一条边。
英雄走过一条边需要付出这条边边权的代价。
如果某位英雄的起点和终点不同，那么需要额外付出 C 的代价。
如果某一个点没有英雄经过，那么也需要付出 C 的代价。
现在有 k 组询问，每次给出一个不同的 C，问最小代价。
$n \leq 250, m \leq 30000, k \leq 10^5$。

CodeChef Annual Parade

先考虑只有一组询问怎么做。

CodeChef Annual Parade

先考虑只有一组询问怎么做。
发现两种付出 C 代价的条件其实是等价的，也就是如果某个点没有英雄进入，那么就需要付出 C 的代价。
费用流建图。把每个点拆成入点 i 和出点 i'，连边 $(S, i, 1, 0), (i', T, 1, -C), (i', i, inf, 0)$。对于每条有向边连边 (u, v', inf, w)。设初始费用为 nC，然后跑最小费用可行流即可。

CodeChef Annual Parade

先考虑只有一组询问怎么做。
发现两种付出 C 代价的条件其实是等价的，也就是如果某个点没有英雄进入，那么就需要付出 C 的代价。
费用流建图。把每个点拆成入点 i 和出点 i'，连边 $(S, i, 1, 0), (i', T, 1, -C), (i', i, inf, 0)$。对于每条有向边连边 (u, v', inf, w)。设初始费用为 nC，然后跑最小费用可行流即可。
多组询问怎么做？

CodeChef Annual Parade

先考虑只有一组询问怎么做。
发现两种付出 C 代价的条件其实是等价的，也就是如果某个点没有英雄进入，那么就需要付出 C 的代价。
费用流建图。把每个点拆成入点 i 和出点 i'，连边 $(S,i,1,0),(i',T,1,-C),(i',i,inf,0)$。对于每条有向边连边 (u,v',inf,w)。设初始费用为 nC，然后跑最小费用可行流即可。
多组询问怎么做？发现上述增广过程每一次恰好减去一个 C，把上边的 $(i',T,1,-C)$ 边的费用去掉，那么当某次增广的费用大于 C 时说明已达到最小代价即可停止增广。
由于费用流每次增广的费用一定严格不降，所以可以记录下来每一次增广的费用，然后二分一下即可。

BZOJ3218 a+b problem

有 n 个方格排成一排，每个方格有 6 个属性 $a_i, b_i, w_i, l_i, r_i, p_i$。
如果第 i 个方格染成黑色就会获得 b_i 的收益。
如果第 i 个方格染成白色就会获得 w_i 的收益。
如果方格 i 是黑色，且存在一个 j 满足 $1 \le j < i, l_i \le a_j \le r_i$，方格 j 为白色，就要付出 p_i 的代价。
求最大收益。
$n \le 5000$，时间限制 $2s$，空间限制 $48M$。

BZOJ3218 a+b problem

~~暴力建图都会吧，就不讲了。~~

BZOJ3218 a+b problem

~~暴力建图都会吧，就不讲了。~~
拆点 i 和 i'，建边 $(S, i, b_i), (i, T, w_i), (i, i', p_i)$，对于满足 $1 \leq j < i, l_i \leq a_j \leq r_i$ 的 j，连边 (i', j, inf)。这样的建边是 $O(n^2)$ 的，不仅时间上无法通过，而且还会英勇地 MLE。

BZOJ3218 a+b problem

~~暴力建图都会吧，就不讲了。~~
拆点 i 和 i'，建边 $(S, i, b_i), (i, T, w_i), (i, i', p_i)$，对于满足 $1 \leq j < i, l_i \leq a_j \leq r_i$ 的 j，连边 (i', j, inf)。这样的建边是 $O(n^2)$ 的，不仅时间上无法通过，而且还会英勇地 MLE。
考虑用主席树优化建边，按照下标顺序以权值为下标插入主席树，每次从 i' 出发的连边就相当于是连接了主席树上的一段区间。
这样点数和边数都变成了 $O(n \log n)$。

HDU4621 Life Game

你要给一个 $n \times m$ 的网格黑白染色，每个点染成黑或者白分别有 $b_{i,j}$ 和 $w_{i,j}$ 的收益。
有 q 个限制条件，要求你把某个子矩阵里的所有点都染成黑色或是白色。数据保证有解。
求最大收益。
$n, m \leq 50, q \leq 50000$。

HDU4621 Life Game

暴力建图就是使用 inf 边，这里不再赘述。

HDU4621 Life Game

暴力建图就是使用 inf 边，这里不再赘述。
用二维 RMQ 优化建图，这样一个限制就只会连四条边。
具体实现的话需要写两个 RMQ，一个从小到大连 inf，一个从大到小连 inf。

BZOJ3681 Arietta

有一棵树，每个点有一个点权 h_i。
有 m 种操作，每种操作可以从 D_i 子树中选出一个权值在 $[L_i, R_i]$ 之间的点。第 i 种操作最多进行 T_i 次。点不能重复被选。
求最多可以选出多少个点。
$n, m \leq 10^4, 1 \leq h_i, L_i, R_i \leq n$，时间限制 $2s$，空间限制 $64M$。

BZOJ3681 Arietta

最大流建图。
这里的连边相当于满足一个二维的限制，你要是愿意写的话可以直接线段树套线段树。这里介绍另一种方法。

BZOJ3681 Arietta

最大流建图。
这里的连边相当于满足一个二维的限制，你要是愿意写的话可以直接线段树套线段树。这里介绍另一种方法。
考虑 *dsu on tree*。

BZOJ3681 Arietta

最大流建图。
这里的连边相当于满足一个二维的限制，你要是愿意写的话可以直接线段树套线段树。这里介绍另一种方法。
考虑 *dsu on tree*。
我们可以用 *dsu on tree* 的那套理论每次维护出一个点子树对应的主席树，然后对应区间连边即可。
点数和边数是 $O(n\log^2 n)$，注意卡空间。

CTSC/APIO2007 数据备份 backup

数轴上有 n 个点，你需要选择 $2k$ 个点两两匹配，使得匹配总距离最小。

$n \leq 10^5, k \leq n/2$

CTSC/APIO2007 数据备份 backup

只有相邻的点才会匹配，所以是一个二分图，且每个点的度数不超过 2。我们现在要求的是这张二分图的最小权匹配。

链表模拟费用流。每一次找到权值最小的未匹配边，匹配之，并删除相邻两条未匹配边，同时加入一条新的匹配边。

复杂度 $O(n\log n)$