数值分析（研究生）

（开卷，19/1/2015）

学院：________ 姓名：___________ 学号：_____________

1.（15 分）求函数 $f(x)=|x|,(-\pi \le x \le \pi)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上最佳三角多项式平方逼近$S_n(x)$，其中

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

分别计算当 n=1,2,3 时的逼近函数，请将所得到的逼近函数和原函数绘在一张图上，比较逼近的效果。

解：取基函数 $\phi_0(x)=1,\phi_1(x)=\cos x,\phi_2(x)=\cos 2x,\phi_3(x)=\cos 3x$，权函数$w(x)=1.$

容易验证：$\left(\phi_i,\phi_j\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_i(x)\phi_j(x)dx=0,(i,j=0,1,2,3;i\neq j)$

$(\phi_0,\phi_0)=2\pi=6.2832$，$(\phi_i,\phi_i)=\pi=3.1416,(i=1,2,3)$

$$(\phi_0,f)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_0(x)f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}-xdx+\int_{0}^{\pi}xdx=9.8696$$

$$(\phi_1,f)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_1(x)f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}-xcosxdx+\int_{0}^{\pi}xcosxdx=-4.000$$

$$(\phi_2,f)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_2(x)f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}-xcos2xdx+\int_{0}^{\pi}xcos2xdx=0.000$$

$$(\phi_3,f)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_3(x)f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}-xcos3xdx+\int_{0}^{\pi}xcos3xdx=-0.4444$$

当$n=1$时，法方程组为

$$\begin{cases}6.2832\cdot\dfrac{a_0}{2}=9.8696\\3.1416\cdot a_1=-4.0000\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_0=3.1416\\a_1=-1.2732\end{cases}$$

相应的逼近函数： $S_1(x)=1.5708-1.2732\cos x$

当$n=2$时，法方程组

$$\begin{cases} 6.2832\cdot\dfrac{a_0}{2}=9.8696 \\ 3.1416\cdot a_1=-4.0000 \\ 3.1416\cdot a_2=0.0000 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} a_0=3.1416 \\ a_1=-1.2732 \\ a_2=0.0000 \end{cases}$

相应的逼近函数：$S_2(x)=1.5708-1.2732\cos x=S_1(x)$

当$n=3$时，法方程组

$$\begin{cases} 6.2832\cdot\dfrac{a_0}{2}=9.8696 \\ 3.1416\cdot a_1=-4.0000 \\ 3.1416\cdot a_2=0.0000 \\ 3.1416\cdot a_3=-0.4444 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} a_0=3.1416 \\ a_1=-1.2732 \\ a_2=0.0000 \\ a_3=-0.1415 \end{cases}$

相应的逼近函数：$S_3(x)=1.5708-1.2732\cos x-0.1415\cos 3x$

作图

随着 n 的增大，逼近效果会更好！

2.（10 分）线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix},$$

的准确解为$[1,1]^T$。如果系数矩阵有微小的改变，方程组变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

采用五位有效数字求解上述方程组，计算实际误差。该方程组是否是坏条件的？计算系数矩阵的∞条件数，并给出计算结果误差与系数矩阵误差之间的关系。

解：令

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.99990 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$

Gauss 消元，得

$$\tilde{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.5000 \end{bmatrix}$$

实际误差

$$\|x^* - \tilde{x}\|_\infty = 1$$

相对误差为100%，故这是一个坏条件的方程组。

另一方面，我们有

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ -5000 & 5000 \end{bmatrix}$$

所以，$\|\mathrm{A}\|_\infty = 3, \|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty = 20000$

A 的无穷条件数为

$$\mathrm{cond}_\infty(\mathrm{A}) = 60000$$

计算结果误差与系数矩阵误差之间的关系如下：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{1}{1} \le 60000\frac{0.0002}{3}$$

3.（15 分）通过次数不高于三次的 Lagrange 插值多项式及以下所提供的数值，采用四位有效数字近似计算 cos0.750

$$\cos 0.698 = 0.7661, \cos 0.733 = 0.7432, \cos 0.768 = 0.7193, \cos 0.803 = 0.6946$$

估计近似计算的误差界。我们知道 cos0.750 精确到四位有效数字的实际值为 0.7317。请解释实际误差与误差界之间的差别。

解：采用线性插值，插值函数

$$\mathrm{p}_1(x) = \frac{x-0.768}{0.733-0.768} \times 0.7432 + \frac{x-0.733}{0.768-0.733} = -0.6829x + 1.2438$$

$$\cos 0.750 \approx p_1(0.750) = 0.7316$$

实际误差 $|\mathrm{e}| = |0.7316 - 0.7317| = 0.0001$

插值误差界 $|R| \le \frac{1}{2!}M_2|(x-0.733)(x-0.768)| = \frac{M_2}{8}h^2$

其中

$$\mathrm{h} = 0.768 - 0.733 = 0.035, M_2 = \max_{x\in[0.733,0.768]}|(\cos x)''| = \cos 0.733 = 0.7432$$

故，$\mathrm{R} \leq 1.14 \times 10^{-4}$

显然，$|\mathrm{e}| = 0.0001 < 1.14 \times 10^{-4} = R$。即实际误差小于误差界。这与误差界的定义吻合。

4.（15 分）用 Newton 迭代法求方程 $e^{6x} - (\ln 8)e^{4x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 2)^3 = 0$ 在区间（-1，0）内的解，选择你认为合适的初始点，计算方程的根，使得近似解的相对误差不超过10^{-3}。请从理论上估计达到所需精度所需的迭代次数。

解：令$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{2x}$，方程变为$y^3 - \ln 8 y^2 + 3(\ln 2)^2 y - (\ln 2)^3 = 0$

构造相应的 Newton 迭代：

$$\mathrm{g(y)} = \mathrm{y} - \frac{y^3 - \ln 8 y^2 + 3(\ln 2)^2 y - (\ln 2)^3}{3y^2 - 2\ln 8 y + 3(\ln 2)^2}$$

不难证明，$\mathrm{g}'(\mathrm{y}) = \frac{g(y)g''(y)}{[g'(y)]^2} = \frac{[y^3 - \ln 8 y^2 + 3(\ln 2)^2 y - (\ln 2)^3][6y - 2\ln 8]}{[3y^2 - 2\ln 8 y + 3(\ln 2)^2]^2}$

$$= \frac{6[y - \ln 2]^4}{9[y - \ln 2]^4} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{g}''(\mathrm{y}) = 0$$

所以, Newton 迭代是大范围收敛的。取任意初始点，比如$y_0 = 1.2$,

容易得到解 $\mathrm{y} = \ln 2$，相应的$x^* = -0.1833$.

或记 $f(x) = e^{6x} - (\ln 8)e^{4x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 2)^3$

相应的 Newton 迭代函数

$$\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^{6x} - 3\ln 2 e^{4x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 2)^3}{6e^{6x} - 12\ln 2 e^{4x} + 6(\ln 2)^2 e^{2x}}$$

$$= \mathrm{x} - \frac{e^{2x} - \ln 2}{6e^{2x}}$$

$$\mathrm{g}'(x) = 1 - \frac{2e^{4x} - 2e^{2x}(e^{2x} - \ln 2)}{6e^{4x}} = 1 - \frac{\ln 2}{3e^{2x}}$$

$$\mathrm{g}''(x) = \frac{2\ln 2}{3e^{2x}}$$

不难证明，当$\mathrm{x} \in [-1,0]$时，$\mathrm{g}''(x) > 0$,故$\mathrm{g}'(x)$单调递增，

$$\mathrm{g}'(-1) = -0.7072, \mathrm{g}'(0) = 0.7676$$

故 $\mathrm{L} = \max\limits_{x \in [-1,0]} |g'(x)| = 0.7676 < 1$

取初始值$x_0 = -0.2$,利用迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - g(x_k), k = 0,1,\cdots$$

计算结果如下表：

k	x_k
1	-0.1943
2	-0.1906
3	-0.1881
4	-0.1865
5	-0.1854
6	-0.1847
7	-0.1842

故方程的近似解为：$x = -0.1833$

迭代次数估计：由公式$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$，得误差不超过$10^{-3}$的迭代次数需满足

$$k \ge \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}(1-L)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln L} = 12.1$$

故取$k = 13.$

5.（15 分）用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

对于你所给定的初始值，估计精度达到10^{-3}需要的迭代次数，并实际计算之。计算该迭代的渐进收敛速度,估算减小误差为初始误差 1%需要的迭代次数。

解： 取初始值为$x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$。方程组系数矩阵的分裂为

$$A = D + L + U$$

其中

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\4&-3&0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&8\end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

则迭代矩阵

$$B=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&0.3333&0\\0&-0.0556&0.3333\\0&-0.1875&0.1250\end{bmatrix}$$

$$g=(D+L)^{-1}[2 -4\ 5]^T=[0.6667 -0.7778\ 0.0000]^T$$

相应的迭代为

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g, k=0,1,\cdots$$

迭代结果如下表：

k	$x^{(k)}[1]$	$x^{(k)}[2]$	$x^{(k)}[3]$
1	0.6667	-0.7778	0.0000
2	0.4074	-0.7346	0.1458
3	0.4218	-0.6884	0.1560
4	0.4372	-0.6875	0.1486
5	0.4375	-0.6875	0.1486
6			
7			

由于误差$\left\|x^{(5)}-x^{(4)}\right\|_\infty=2.7\times10^{-4}<10^{-3}$达到精度要求，迭代终止，该方程组的近似解为： $x^*=[0.4375\quad -0.6875\quad 0.1486]^T$

下面是迭代次数估计：

由误差估计公式 $\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|\le10^{-3}$

其中$\|B\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le3}\sum_{j=1}^3\left|b_{ij}\right|=0.389, \left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty=0.7778$

故 $k\ge\frac{\ln\frac{10^{-3}\times(1-0.389)}{0.7778}}{\ln 0.389}\approx8$

迭代的渐进收敛速度 $R=-\ln\rho(B)=-\ln 0.236=1.445$。误差减小为初始误差的1% 所需的迭代次数满足： $\rho^k(B)\le1\%$,得$k\ge4$.

6. （10 分）利用 Broyden 方法解非线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1 - 2\cos(x_2 x_3) - 1 = 0 \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0 \\ 60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 = 0 \end{cases}$$

取$[0,0,0]^T$ 作为初始值，终止容限$\varepsilon = 10^{-3}$。

解： 令$\mathrm{f(x)} = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 \\ 60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{f'(x)} = \begin{bmatrix} 6 & -2x_3\sin(x_2x_3) & 2x_2\sin(x_2x_3) \\ x_1/\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} & 9 & \frac{1}{2}\cos x_3 / \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} \\ -3x_2e^{-x_1x_2} & -3x_1e^{-x_1x_2} & 60 \end{bmatrix}$$

计算过程如下：

$$\mathrm{f}(x_0) = [-3.0000 \quad 1.9296 \quad 31.4159]^T$$

$$\mathrm{f'(x)} = \begin{bmatrix} 6.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 9.0000 & 0.4856 \\ 0.0000 & 0.0000 & 60.0000 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = [f'(x_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1111 & -0.0009 \\ 0 & 0 & 0.0167 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 - H_0 f(x_0) = [0.5000 \quad -0.1861 \quad -0.5236]^T$$

$$y_0 = f(x_1) - f(x_0) = [3.0095 \quad -1.8043 \quad -31.1233]^T$$

$$H_1 = H_0 + (\Delta x_0 - H_0 y_0)\Delta x_0^T H_0 / \Delta x_0^T H_0 y_0 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0.4856 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_1 - H_1 f(x_1) = [0.4984 \quad -0.1998 \quad -0.5285]^T$$

$$y_1 = f(x_2) - f(x_1) = [-0.0079 \quad -0.1265 \quad -0.2733]^T$$

$$H_2 = H_1 + (\Delta x_1 - H_1 y_1)\Delta x_1^T H_1 / \Delta x_1^T H_1 y_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0.4856 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = x_2 - H_2 f(x_2) = [0.4981 \quad -0.1996 \quad -0.5288]^T$$

误差 $\|x_3 - x_2\| = 3.2 \times 10^{-4} < 10^{-3}$,故近似解为

$$x_3 = [0.4981 \quad -0.1996 \quad -0.5288]^T$$

7.（10 分） 给定数据

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.6	113.2	130.1	142.1	167.5	195.1	224.8	256.7	299.5	326.7

（1） 构造至少二次的多项式进行拟合，并计算误差；

（2） 构造形如be^{ax}的函数对上述数据拟合；

（3） 构造形如bx^a的函数对上述数据拟合，并利用拟合得到的函数计算 x=5 点的值。

解：（1）令$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,记$A_i = [\varphi_0(x_i) \quad \varphi_1(x_i) \quad \varphi_2(x_i)]$，其中$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$.令$A = [A_1^T \quad \cdots \quad A_{10}^T]^T$

则矛盾方程组

$$A\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

相应的法方程组

$$A^T A\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = A^T\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 10 & 54.1 & 303.4 \\ 54.1 & 303.4 & 1759.8 \\ 303.4 & 1759.8 & 10523.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1958.3 \\ 11366.16 \\ 68001.95 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.99 \\ -1.41 \\ 6.64 \end{bmatrix}$$

拟合多项式$y = 1.99 - 1.41x + 6.64x^2$,误差$E = \left\| A\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix} \right\|_2 = 0.0071$

（2）令$y = be^{ax}$,取对数得，$\ln y = \ln b + ax$，将问题线性化，类似于（1），取

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x,$$

有法方程组

$$\begin{bmatrix}10 & 54.1\\54.1 & 303.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ln b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52.0\\285.5\end{bmatrix}$$

解得$a=0.372, b=24.27$,故拟合函数$\mathrm{y}=24.27\mathrm{e}^{0.372x}$

（3）令$\mathrm{y}=\mathrm{b}x^{a}$，取对数得$\ln y=\ln b+\ln x\, a$，取基函数

$$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=\ln x,$$

法方程组

$$\begin{bmatrix}10 & 16.7\\16.7 & 28.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ln b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52.0\\87.6\end{bmatrix}$$

解得$a=2.019, b=6.246$,故拟合函数$\mathrm{y}=6.246\mathrm{x}^{2.019}$

当$\mathrm{x}=5$时,$\mathrm{y}=161.0$

8. （10 分）用复合 Simpson 公式计算积分

$$I(f)=\int_0^{\pi} x\sin x dx$$

讨论在绝对误差不超过 0.0002 条件下的步长，给出近似计算的实际误差。

解： 令$\mathrm{f(x)=xsinx}$

$$f^{(4)}(x)=xsinx-4\cos x$$

$$f^{(5)}(x)=5sinx+x\cos x$$

令$f^{(5)}(x)=0$，得$\mathrm{x}=2.6537$，故

$$M_4=\max_{x\in[0,\pi]}\left|f^{(4)}(x)\right|=\left|f^{(4)}(2.6537)\right|=4.7773$$

由误差界公式

$$|\mathrm{R}|\le\frac{\pi}{180}M_4h^4\le 0.0002$$

知$\mathrm{h}\le\left(\frac{0.0002\times 180}{4.7773\pi}\right)^{\frac{1}{4}}=0.22131$

取 $\mathrm{m}=\left[\frac{\pi-0}{2h}\right]=8$