

Metodi di ottimizzazione per problemi di flusso di tipo “multicommodity”

Roberto Ladu

7 Ottobre 2011

INDICE

1	Introduzione	5
1.1	Il problema di flusso di costo minimo multicommodity	5
1.2	Alcune assunzioni	7
2	Metodi di Decomposizione Per Costi	9
2.1	Studio delle condizioni di ottimalità	9
2.2	Il problema Duale Lagrangiano	11
2.2.1	Algoritmo del subgradiente	12
3	Approccio di Generazione di colonne	17
3.1	Dall'algoritmo dei Piani di Taglio alla Generazione di Colonne	17
3.2	Formulazione basata su cammini	21
3.3	Algoritmo di generazione di colonne	24
4	Metodi di Decomposizione Per Risorse	29
	Bibliografia	35

1.1 Il problema di flusso di costo minimo multicommodity

Il problema di flusso di costo minimo multicommodity (MMCF ¹) è una generalizzazione del problema di flusso di costo minimo *single commodity* (MCF). Come MCF, infatti, anche MMCF è definito su una rete $R = (N, A)$, con N insieme dei nodi e A insieme degli archi (orientati), con la differenza che, se nel primo caso viene richiesto di trovare un flusso di costo minimo soddisfacente la domanda di una *singola* coppia origine-destinazione, nel secondo abbiamo K coppie distinte (con relative domande d_1, \dots, d_K) che condividono la stessa rete ².

Il problema può essere così formulato in termini di Programmazione Lineare (PL) :

Dati di input

K numero delle commodity

c^k vettore costo per unità di flusso associato alla commodity k

u_{ij} capacità dell'arco (i, j)

d_k domanda in unità di flusso della commodity k

¹Multicommodity Minimum Cost Flow.

²Le domande possono essere interpretate come richieste di beni (commodity) da trasportare, da cui deriva il termine multicommodity. In generale possono esistere più nodi origine e/o destinazione per ogni commodity; nel seguito, tratteremo solo il caso in cui le coppie origine-destinazione siano distinte e ogni commodity abbia un'unica coppia origine-destinazione.

$BS(i)$ stella entrante del nodo i : $BS(i) = \{(h, j) \in A \mid j = i\}$

$FS(i)$ stella uscente del nodo i : $FS(i) = \{(h, j) \in A \mid h = i\}$

b_i^k tali che:

$$b_i^k = \begin{cases} -d_k & \text{se il nodo } i \text{ è origine della commodity } k \\ d_k & \text{se il nodo } i \text{ è destinazione della commodity } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili

x_{ij}^k unità di flusso relative alla commodity k da inviare lungo l'arco (i, j) ; x^k denota il vettore avente come componenti x_{ij}^k , $\forall (i, j) \in A$.

Modello PL (Formulazione Nodi-Archi):

$$(MMFC) \quad \begin{aligned} & \min \sum_{k=1}^K c^k x^k \\ & \sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A \\ & \sum_{(h,i) \in BS(i)} x_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k \quad \forall i \in N, \quad k = 1, \dots, K \\ & x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

I vincoli $\sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij}$, $\forall (i, j) \in A$, saranno riferiti nel seguito come vincoli *di capacità*, mentre i vincoli $\sum_{(h,i) \in BS(i)} x_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k$, $\forall i \in N$, $k = 1, \dots, K$ prendono il nome di vincoli *di conservazione di flusso*. A questa formulazione talvolta vengono aggiunti anche vincoli di capacità individuale del tipo $0 \leq x_{ij}^k \leq u_{ij}^k$, $\forall (i, j) \in A$, $k = 1, \dots, K$ che nella nostra trattazione non considereremo.

MMCF gioca un ruolo di primo piano in diversi contesti applicativi, dove spesso risolvere un problema MMCF, solitamente di grandi dimensioni, risulta un passo necessario per la risoluzione di problemi più complessi. Nel settore delle telecomunicazioni MMCF è ben conosciuto. Oltre che essere un problema fondamentale per la progettazione di reti (o *capacitated*

network design), altri rilevanti problemi, quali il problema di assegnamento delle frequenze (*Routing and Wavelength Assignment*) nelle reti ottiche possono essere modellati in termini di flusso multicommodity([1]).

Anche il settore dei trasporti presenta numerosi problemi la cui struttura di base è MMCF ³. Per esempio, se modelliamo le diverse locazioni geografiche come dei nodi e le linee di trasporto (navali, aeree o terrestri) come archi, possiamo modellare un problema di gestione di import-export in cui le domande potrebbero rappresentare richieste di beni alimentari di vario genere.

Ma oltre a questi ci sono tantissimi altri campi di applicazione che hanno fatto sì che MMCF sia stato oggetto di una prolifica ricerca, orientata soprattutto allo studio di tecniche algoritmiche efficienti (in termini di tempo) per la risoluzione di problemi di grandi dimensioni.

1.2 Alcune assunzioni

Parlando di MMCF non ci si può esimere dal sottolineare una fondamentale differenza tra i problemi di flusso single commodity e quelli multicommodity: i secondi *non godono della proprietà di integralità* a garantire che i vertici del poliedro, rappresentante la regione ammissibile del modello *MMFC*, siano a componenti intere nel caso in cui il vettore delle capacità e il vettore delle domande siano a componenti intere. Questo fatto, ricollegabile con la *non totale unimodularità* della matrice dei vincoli di *MMFC*, rende il problema notevolmente più difficile da trattare nel caso si richieda, come accade sovente nelle applicazioni, che i flussi siano a componenti intere. Karp (vedi [2]) e successivamente Shamir et al. (vedi [3]) hanno dimostrato che la versione decisionale del problema MMCF con flussi interi è NP-Completo anche nel caso speciale di due commodity.

Nella trattazione seguente ci concentreremo sul problema MMFC nel caso continuo. Tale problema è interessante principalmente per due motivi:

1. nonostante la naturale struttura di PL, spesso su istanze di dimensioni reali l'applicazione di tecniche standard di PL può non risultare efficiente (in termini di tempo di calcolo);

³Citiamo il *Multivehicle Tanker Scheduling* e il *Warehousing of Seasonal Product*.

2. le tecniche algoritmiche che presenteremo per il caso continuo costituiscono importanti *building block* per il progetto di approcci risolutivi per il caso intero.

Alcune assunzioni di supporto sono l'assunzione di beni omogenei e di assenza di congestione. La prima assume che un' unità di flusso richieda un' unità di capacità dell'arco indipendentemente dalla commodity. È comunque possibile generalizzare i vincoli di capacità nel seguente modo, rilassando di conseguenza tale assunzione:

$$\sum_{k=1}^K \rho_{ij}^k x_{ij}^k \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A,$$

dove ρ_{ij}^k è un coefficiente di utilizzo arco/commodity.

La seconda assunzione, che è più forte, implica che il costo di invio lungo gli archi della rete sia una funzione lineare. In alcune applicazioni, come nelle telecomunicazioni e nei trasporti, invece, le commodity interagiscono in una maniera più complicata. In tali casi può quindi essere opportuno modellare il problema con una funzione obiettivo non lineare, per esempio della forma:

$$\sum_{(i,j) \in A} \frac{x_{ij}}{u_{ij} - x_{ij}}.$$

Questo tipo di funzione obiettivo, adatto a modellare il fenomeno di congestione degli archi della rete, è ovviamente complicante in quanto il problema di flusso diventa non lineare (PNL). È tuttavia possibile, in taluni casi e sotto opportune ipotesi, riformulare in termini PL (vedi [4]), approssimando la funzione obiettivo mediante una funzione lineare.

CAPITOLO 2

METODI DI DECOMPOSIZIONE PER COSTI

2.1 Studio delle condizioni di ottimalità

Data la struttura di PL del problema possiamo ottenere preziose informazioni sulle condizioni di ottimalità sfruttando il relativo problema duale lineare.

Associando ai vincoli di conservazione del flusso il vettore delle variabili duali π e ai vincoli di capacità il vettore delle variabili w^1 , la formulazione ($MMCF_{Dual}$) risulta:

$$\begin{aligned} (MMCF_{Dual}) \quad & \max \sum_{k=1}^K \sum_{i \in N} \pi_i^k b_i^k - \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} u_{ij} \\ & c_{ij}^{\pi^k} = c_{ij}^k + \pi_i^k - \pi_j^k + w_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A, \quad k = 1, \dots, K \\ & w_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Secondo il teorema degli scarti complementari [5] possiamo allora affermare che:

Proposizione 1 (Condizioni di ottimalità). $x \in \mathbb{R}^{|A| \times |K|}$, soluzione ammissibile di $MMCF$, è ottima $\iff \exists w_{ij}, (i,j) \in A$ e $\pi_i^k \quad i \in N, \quad k = 1, \dots, K$, tali che:

$$\bullet \quad w_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

¹In letteratura talvolta ci si riferisce a queste variabili come ai *prezzi ombra* o più semplicemente prezzi.

- $c_{ij}^{\pi k} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k = 1, \dots, K$
- $w_{ij}(u_{ij} - \sum_{k=1}^K x_{ij}^k) = 0 \quad \forall (i, j) \in A$
- $x_{ij}^k(c_{ij}^{\pi k}) = 0 \quad \forall (i, j) \in A, k = 1, \dots, K$

Queste condizioni di ottimalità possono essere interpretate come dei vincoli sul flusso: per spedire delle unità di flusso attraverso l'arco (i, j) il costo ridotto $c_{ij}^{\pi k}$ ottimo deve essere nullo e, nel caso la variabile w_{ij} che risolve $MMCF_{Duale}$ sia non nulla, allora l'arco (i, j) deve essere saturato, ovvero il flusso totale lungo (i, j) deve essere uguale alla capacità u_{ij} dell'arco.

Più formalmente, sia x una soluzione ottima per $MMCF$ e $[\pi, w]$ sia una soluzione ottima per $MMCF_{Duale}$, allora:

$$\begin{aligned} x_{ij}^k \neq 0 &\Rightarrow c_{ij}^{\pi k} = 0 \\ w_{ij} \neq 0 &\Rightarrow \sum_{k=1}^K x_{ij}^k = u_{ij} \end{aligned}$$

Vale il seguente teorema:

Teorema 1 (Dualizzazione parziale). *Sia $\{x_{ij}^k\}$ un flusso ottimo e siano $\{w_{ij}\}$ i prezzi ottimi per $MMCF_{Duale}$. Allora, per ogni commodity k , le variabili di flusso $\{x_{ij}^k\}$ sono soluzione del seguente problema di flusso single commodity:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^k + w_{ij}) x_{ij}^k \\ & \sum_{(h,i) \in BS(i)} x_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k \quad \forall i \in N \\ & x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

Si tratta chiaramente un problema di flusso di costo minimo sul grafo G con costi modificati $\{c_{ij}^k + w_{ij}\}$ dove $\{w_{ij}\}$ sono le variabili duali ottime. Per la dimostrazione si veda [6]. Date dunque $\{w_{ij}\}$ possiamo cercare la soluzione di flusso ottima tra quelle che si ottengono combinando le soluzioni di K problemi MFC.

Purtroppo non sempre è opportuno risolvere $MMFC_{Duale}$ applicando l'algoritmo del simplesso ([5] [6]) poichè potrebbe risultare un tempo di risoluzione maggiore di quello richiesto dall'algoritmo del simplesso applicato alla formulazione primale (dato il numero di vincoli maggiore).

Il problema può invece essere risolto efficientemente per mezzo del problema duale lagrangiano, presentato nel seguito. Infatti:

1. il duale lagrangiano di un problema di PL è equivalente al duale lineare (per approfondimenti vedere [7] e [8]);
2. viene così operata una *cost-decomposition* che dà adito a tecniche efficienti per la risoluzione del duale in questione.

2.2 Il problema Duale Lagrangiano

Il duale lagrangiano di *MMFC* è definito a partire dal rilassamento lagrangiano dei vincoli complicanti ($\sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$), ovvero:

$$(LR_w) \quad \begin{aligned} \phi(w) = \min & \sum_{k=1}^K c^k x^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{ij}^k - u_{ij} \right) \\ & Nx^k = b^k \quad k = 1, \dots, K, \\ & x^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

dove le variabili w_{ij} sono i moltiplicatori lagrangiani (non negativi) associati ai vincoli rilassati ² e la notazione $Nx^k = b^k$ denota i vincoli di conservazione del flusso relativi alla commodity k , in forma compatta, tramite la matrice di incidenza nodi-archi della rete (N).

Se z è il valore della funzione obiettivo di *MMCF* all'ottimo, vale la relazione (vedi [7])

$$\phi(w) \leq z \quad \forall w \geq 0.$$

Il duale lagrangiano è il problema che si propone di trovare il vettore di moltiplicatori w^* che minimizza lo scarto fra i valori ottimi delle due funzioni obiettivo ³; esso è esprimibile come:

$$(DLR) \quad \begin{aligned} \phi_{w^*} = \max_{w \geq 0} \{ & \phi(w) = \min \sum_{k=1}^K (c^k + w)x^k - wu : \\ & Nx^k = b^k, \quad x^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \}, \end{aligned}$$

dove u denota il vettore delle capacità degli archi della rete. Alcune osservazioni degne di nota:

- Poiché *MMCF* è un problema di PL vale $\phi_{w^*} = z$.
- w^* coincide con il vettore dei prezzi ottimi che risolvono *MMCF_{Duale}*.

² w denota il vettore avente come componenti tali moltiplicatori.

³ Ovvero $\max_{w \geq 0} \{\phi(w)\}$.

- LR_w risulta più facile da risolvere in quanto decomponibile in K problemi MFC, che possono essere risolti parallelamente.
- La funzione $\phi(w)$ è una *funzione concava lineare a tratti*. Infatti, fissato x^k , $\sum_{k=1}^K (c^k + w)x^k - wu$ è una funzione lineare in w e $\phi(w)$ è definita come il minimo fra queste funzioni al variare di x^k .

2.2.1 Algoritmo del subgradiente

Per risolvere DLR si può sfruttare l'ultima l'osservazione rifacendosi così ad un problema di massimizzazione della funzione $\phi(w)$ sottoposta al vincolo $w \geq 0$. Data la natura non differenziabile della funzione $\phi(w)$, per questa ottimizzazione viene utilizzato un metodo analogo a quello del gradiente ([9]) che funziona anche in caso di non differenziabilità della funzione da massimizzare.

Definizione 1 (Funzione convessa e concava). Una funzione $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, si dice *convessa* in \mathbb{R}^m se

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{R}^m \text{ vale che} \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Una funzione f a valori reali si dice *concava* se $-f$ è convessa.

Definizione 2 (Subgradiente e Supergradiente). Il *subgradiente* nel punto u di una funzione *convessa* $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è un vettore $\gamma(u) \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$\forall v \in \mathbb{R}^m \quad f(v) \geq f(u) + \gamma(u)^T(v - u) \quad (2.1)$$

Similmente, se f è *concava*, il vettore $\gamma(u)$ è detto *supergradiente* se

$$\forall v \in \mathbb{R}^m \quad f(v) \leq f(u) + \gamma(u)^T(v - u) \quad (2.2)$$

4

$f(u) + \gamma(u)^T(v - u)$ è una retta di supporto al grafico di f in $f(u)$ come esemplificato in figura 2.1. Vale il seguente teorema:

Teorema 2. *Il supergradiente di una funzione concava differenziabile f nel punto u coincide con il gradiente in quel punto:*

$$\gamma(u) = \nabla f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f(u)}{\partial u_m} \right).$$

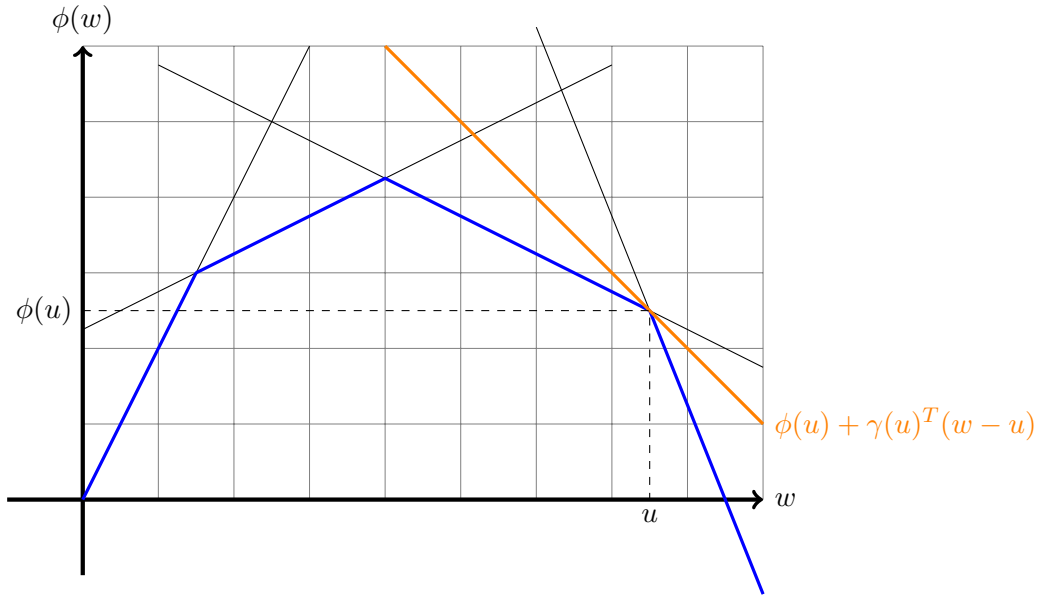


Figura 2.1: funzione concava $\phi(w)$ (in blu) e retta di supporto al grafico della funzione (in rosso).

L'algoritmo del subgradiente ([9]) è un algoritmo iterativo, di tipo ricerca locale, che cerca di massimizzare $\phi(w)$ lungo direzioni che sono subgradienti nei punti visitati dall'algoritmo.

L'algoritmo (specializzato per *MMFC*) è il seguente:

⁴ In alcuni testi la terminologia utilizzata è differente. In [10] viene usato il termine subgradiente per indicare anche il supergradiente. Secondo Rockafeller e Border è tuttavia meglio fare questa distinzione (vedi [10], [11]).

Inizializzazione

$$w^0 = w_0$$

$$\theta = \theta_0$$

$$h = 0$$

Iterazione h-esima

$$x_h = \operatorname{argmin}(LR_w)$$

$$\theta = \theta_h$$

$$w_{ij}^{h+1} = \max\{w_{ij}^h + \theta(\sum_k^K x_{hij}^k - u_{ij}), 0\}$$

$$h = h + 1$$

In questo algoritmo, ad ogni iterazione h viene invocata una procedura di risoluzione del rilassamento lagrangiano. Si usa questa soluzione, x_h , per calcolare un supergradiente (siamo nel caso di una funzione concava) nel punto w^h , ovvero $\sum_{k=1}^K x_h^k - u$, e ci si sposta lungo tale direzione di un opportuno passo θ_h , aggiornando l'indice di iterazione h . La scelta del massimo nella penultima istruzione, dovuta al vincolo $w_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$, garantisce di ottenere componenti non negative.

La lunghezza del passo

La scelta della lunghezza del passo θ_h è di cruciale importanza: passi troppo piccoli non permetterebbero all'algoritmo di convergere, passi troppo grandi potrebbero determinare un allontanamento dalla soluzione ottima ([6]).

Alcuni criteri suggeriti sono:

- $\theta_h = \theta_0 \quad \forall h$,
- $\theta_h = \frac{C}{\|\sum_{k=1}^K x_{hij}^k - u_{ij}\|_2} \quad \forall h$ (con C costante scelta in modo opportuno),
- $\theta_h = \frac{1}{h} \quad \forall h$.

L'utilizzo del metodo del subgradiente è consigliabile per varie ragioni. La principale motivazione è che, ad ogni iterazione, il *costo computazionale* è

contenuto: si sfrutta la decomposizione in K problemi di tipo MCF, che permette una rapida risoluzione di LR_w . Tuttavia tale metodo può presentare alcune limitazioni: per convergere bisogna eseguire piccoli passi, e questo può rallentare la terminazione dell'algoritmo.

CAPITOLO 3

APPROCCIO DI GENERAZIONE DI COLONNE

3.1 Dall'algoritmo dei Piani di Taglio alla Generazione di Colonne

Un altro algoritmo per risolvere il duale lagrangiano è l'algoritmo dei piani di taglio di Kelley [12]. Nel seguito descriveremo tale algoritmo in modo generale, in modo che sia valido anche nel caso si richiedano flussi interi. Il modello LR_w può essere riformulato nel seguente modo

$$(LR_w) \quad \begin{aligned} \phi(w) = \min & \sum_{k=1}^K c^k x^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{ij}^k - u_{ij} \right) \\ & x \in X, \end{aligned}$$

dove X è l'insieme dei punti appartenenti alla regione ammissibile del rilassamento lagrangiano (di *MMCF*) LR_w . Nel caso del modello *MMFC* considerato, X è un insieme infinito di punti, nel caso di un generico problema di PLI, invece, X può essere un insieme finito.

Consideriamo il duale lagrangiano della formulazione di cui sopra:

$$(DLR) \quad \phi_{w^*} = \max_{w \geq 0} \{ \phi(w) : w \in X \}.$$

Possiamo riscriverlo nel seguente modo:

$$\phi_{w^*} = \max_{v, w \geq 0} \{ v : v \leq \sum_{k=1}^K c^k x^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{ij}^k - u_{ij} \right), x \in X \}. \quad (3.1)$$

Osserviamo che ogni punto di X definisce un vincolo di tale formulazione¹ e che 3.1 è un problema di PL. Il numero degli elementi di X può tuttavia essere un ostacolo per la risoluzione standard (per esempio tramite un algoritmo del simplesso). Possiamo però osservare che, per il calcolo della soluzione ottima, servono solo $1 + |A|$ vincoli (corrispondenti ad una base ottima), da cui nasce l'idea di impostare un approccio per *generazione di vincoli*. Dato un sottoinsieme dei vincoli iniziali (dunque delle soluzioni ammissibili) $B \subset X$, definiamo il problema

$$(LR_{wB}) \quad \begin{aligned} \phi_B(w) = \min \quad & \sum_{k=1}^K c^k x^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{ij}^k - u_{ij} \right) \\ & x \in B. \end{aligned}$$

Ad ogni iterazione generiamo una soluzione ammissibile per DRL , sia \bar{w} , risolvendo il problema

$$(DRL_B) \quad \max_{w \geq 0} \{ \phi_B(w) \}.$$

Il problema DRL_B , analogo al problema DRL sull'insieme X , prende il nome di *Problema Master*, mentre la funzione ϕ_B prende il nome di *modello cutting plane* di ϕ .

Dato che $B \subset X$ e che LR_w è un problema di minimizzazione, vale $\phi_B(w) \geq \phi(w)$, $\forall w \geq 0$. Segue che, se $\phi_B(\bar{w}) = \phi(\bar{w})$, allora \bar{w} è soluzione ottima di DRL . Altrimenti generiamo un vincolo (un punto $x \in X \setminus B$) che,

¹ Nel caso X contenga un solo elemento (sia x_1) la formulazione diventa:

$$\phi_{w^*} = \max_{v, w \geq 0} \{ v : v \leq \sum_{k=1}^K c^k x_1^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{1_{ij}}^k - u_{ij} \right) \}.$$

Nel caso invece $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ la formulazione risulta essere:

$$\begin{aligned} \phi_{w^*} = \max_{v, w \geq 0} \{ v : v \leq & \sum_{k=1}^K c^k x_1^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{1_{ij}}^k - u_{ij} \right), \\ & v \leq \sum_{k=1}^K c^k x_2^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{2_{ij}}^k - u_{ij} \right), \dots, \\ & v \leq \sum_{k=1}^K c^k x_N^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{N_{ij}}^k - u_{ij} \right) \}. \end{aligned}$$

Nel primo caso abbiamo solo un vincolo, nel secondo N vincoli.

aggiunto a B , ci permetta di migliorare l'approssimazione della funzione obiettivo all'iterazione successiva, escludendo la soluzione attuale ². Questo vincolo è detto anche *disuguaglianza valida* ([7]) e il problema di individuare una disuguaglianza valida, se esiste, è detto *problema di separazione* ³. Per trovare questo vincolo calcoliamo la soluzione \bar{x} di $LR_{\bar{w}}$, tale che $\phi(\bar{w}) = \sum_{k=1}^K c^k \bar{x}^k + \sum_{(i,j) \in A} \bar{w}_{ij} (\sum_{k=1}^K \bar{x}_{ij}^k - u_{ij})$, quindi aggiungiamo \bar{x} a B . Presentiamo nel seguito uno schema di algoritmo basato su generazione di vincoli, o "cutting plane":

Inizializza B

do


$\bar{w} = \arg \max_{w \geq 0} \{\phi_B(w)\}$

$\bar{x} = \arg \min_{x \in X} \left\{ \sum_{k=1}^K c^k x^k + \sum_{(i,j) \in A} \bar{w}_{ij} \left(\sum_{k=1}^K x_{ij}^k - u_{ij} \right) \right\}$

$B = B \cup \{\bar{x}\}$

while $(\phi_B(\bar{w}) > \phi(\bar{w}))$

(Rilassamento Lagrangiano ($LR_{\bar{w}}$) "facilmente" risolvibile come K MCF indipendenti)



Riformulazione di Dantzig-Wolfe

La rivisitazione primale dell'algoritmo dei piani di taglio è nota come *decomposizione di Dantzig-Wolfe*. Nel seguito del paragrafo assumeremo che il problema sia formulato con variabili intere (problema di PLI) per rendere la trattazione più completa. Consideriamo il modello di flusso *MMCF* ristretto a $B \subseteq X$ ([7], [8]). Consideriamo la seguente formulazione in termini di inviluppo convesso:

²Dall'individuazione di questo *piano di taglio* deriva il nome dell'algoritmo.

³ Il problema di separazione per problemi PLI solitamente è NP-HARD; se così non fosse potremmo approssimare l'inviluppo convesso della regione ammissibile (continuando ad aggiungere disequazioni valide) e risolvere un qualunque problema PLI in tempo polinomiale.

$$\begin{aligned}
(P_B) \quad & \min \sum_{k=1}^K c^k x^k \\
& \sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A. \\
& x \in \text{Conv}(B)
\end{aligned}$$

Scrivendo in modo esplicito i moltiplicatori convessi:

$$\begin{aligned}
(P_B) \quad & \min \sum_{x \in B} \theta_x \sum_{k=1}^K c^k x^k \\
& \sum_{x \in B} \theta_x \sum_{k=1}^K x^k \leq u \\
& \sum_{x \in B} \theta_x = 1 \\
& \theta_x \geq 0 \quad \forall x \in B,
\end{aligned}$$

arriviamo ad una formulazione detta *reformulazione di Dantzig-Wolfe* ([7])

(P_B) , che per $B = X$ è proprio il duale di *DRL* come riformulato in 2.2 in termini di PL, ha una variabile θ_x per ogni elemento di B ; ciò suggerisce un approccio di *generazione di colonne* per risolvere *DRL*.

In modo analogo all'algoritmo dei piani di taglio, partendo da un sottoinsieme $B \subset X$ risolviamo il problema (P_B) (per esempio con un algoritmo del simplesso), ottenendo la soluzione primale $\{\bar{\theta}_x\}$ ⁴ e le soluzioni duali

$\{\bar{w} \text{ e } \bar{v}\}$, associate rispettivamente ai vincoli $\sum_{x \in B} \theta_x \sum_{k=1}^K x^k \leq u$ e $\sum_{x \in B} \theta_x = 1$.

La soluzione $\bar{\theta}_x$ è sicuramente ammissibile per (P_X) ([7]) ed è stata costruita in modo da essere in scarti complementari con le variabili duali $\{\bar{w}, \bar{v}\}$, della cui ammissibilità a priori non possiamo essere certi. I vincoli duali da

⁴ $\bar{x} = \sum_{x \in B} x \bar{\theta}_x, \bar{x} \in X.$

verificare sono:

$$\begin{aligned} \bar{w} \sum_{k=1}^K x^k - \bar{v} &\geq - \sum_{k=1}^K c^k x^k \quad \forall x \in X \setminus B \\ \bar{w} &\geq 0. \end{aligned}$$

Perchè siano ammissibili le variabili duali dobbiamo dunque controllare che $\sum_{k=1}^K (\bar{w} + c^k) x^k - \bar{v} \geq 0 \quad \forall x \in X \setminus B$. Possiamo a tal fine eseguire un'operazione detta di *pricing out*, cioè l'operazione che, dualmente al problema di separazione, ci permette di controllare se la soluzione trovata è ottima, oppure di individuare nuovi elementi da aggiungere a B . Per verificare l'ammissibilità duale possiamo risolvere il problema:

$$\min_{x \in X} \left\{ \sum_{k=1}^K (\bar{w} + c^k) x^k - \bar{v} \right\} \geq 0.$$

In particolare osserviamo che per risolvere il problema $\min_{x \in X} \left\{ \sum_{k=1}^K (\bar{w} + c^k) x^k \right\}$, possiamo risolvere K problemi di flusso single commodity non capacitato.

Dunque, trovati i K vettori di flusso \bar{x}^k , $k = 1, \dots, K$, possiamo valutare la condizione

$$\sum_{k=1}^K (\bar{w} + c^k) \bar{x}^k \geq \bar{v}.$$

Qualora questa sia soddisfatta, per il teorema degli scarti complementari abbiamo risolto il problema all'ottimo; in caso contrario possiamo utilizzare come direzione di decrescita il vettore \bar{x} aggiungendolo all'insieme B . Questi passi sono analoghi a quelli compiuti dall'algoritmo dei piani di taglio precedentemente presentato.

Data la particolare struttura del problema MMCF, nel caso continuo si può utilizzare un approccio di generazione di colonne senza ricorrere alla *reformulazione* di Dantzig-Wolfe, agendo direttamente su una formulazione per cammini del problema. Questo sarà il soggetto della prossima sezione.

3.2 Formulazione basata su cammini

Un altro esempio di decomposizione per costi sfrutta la formulazione per cammini del problema MMCF. La formulazione, mostrata di seguito, si contraddistingue per l'utilizzo di una variabile per ogni cammino del grafo che

unisce una coppia origine-destinazione. Utilizzando, infatti il teorema di decomposizione dei flussi ([6]), ogni flusso è esprimibile come somma di flussi lungo i cammini che connettono le coppie origine-destinazione del problema MMCF. In [4] viene sottolineato come questo tipo di formulazione riesca ad esprimere vincoli sui cammini che la formulazione nodi-archi non può invece esprimere; per questo motivo è molto utilizzata in contesti di progettazione di reti. Lo svantaggio di questa formulazione è tuttavia che il numero delle variabili può crescere in modo esponenziale rispetto alla dimensione dell'input.

Dati di input

- K numero delle commodity
- E numero degli archi
- c_i^k costo di invio di un' unità di flusso sul cammino i dal nodo origine al nodo destinazione della commodity k
- u_e capacità dell'arco e
- d_k domanda in unità di flusso della commodity k
- $\delta_{eik} \in \{0, 1\}$ coefficiente binario che indica se l'arco e fa parte del cammino i della commodity k (in tal caso $\delta_{eik} = 1$) o meno.
- $P(k)$ insieme dei cammini relativi alla commodity k

Variabili

- x_i^k unità di flusso da inviare dal nodo origine al nodo destinazione della commodity k lungo il cammino i

Formulazione nodi-cammini

$$\begin{aligned}
 (MMCF_{path}) \quad & \min \sum_{k=1}^K \sum_{i \in P(k)} c_i^k x_i^k \\
 & \sum_{i \in P(k)} x_i^k = d_k, \quad k = 1, \dots, K \\
 & \sum_{k=1}^K \sum_{i \in P(k)} \delta_{eik} x_i^k \leq u_e, \quad e = 1, \dots, E \\
 & x_i^k \geq 0, \quad \forall i \in P(k), k = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

Essendo un problema di PL, possiamo scrivere il suo duale lineare associando ai vincoli $\sum_{i \in P(k)} x_i^k = d_k$ le variabili duali σ_k e ai vincoli $\sum_{k=1}^K \sum_{i \in P(k)} \delta_{eik} x_i^k \leq u_e$ le variabili duali w_e :

$$\begin{aligned}
 (MMCFD_{path}) \quad & \max \sum_{k=1}^K \sigma_k d_k - \sum_{e=1}^E u_e w_e \\
 & \sigma_k - \sum_{e=1}^E \delta_{eik} w_e \leq c_i^k, \quad k = 1, \dots, K, \quad \forall i \in P(k) \\
 & w_e \geq 0, \quad e = 1, \dots, E.
 \end{aligned}$$

Dato che $c_i^k = \sum_{e=1}^E c_e^k \delta_{eik}$, possiamo riscrivere il vincolo complesso nel seguente modo:

$$\sigma_k - \sum_{e=1}^E \delta_{eik} w_e \leq c_i^k \iff \sum_{e=1}^E \delta_{eik} (w_e + c_e^k) \geq \sigma_k.$$

Facendo ricorso alle condizioni degli scarti complementari, possiamo affermare che:

Proposizione 2 (Condizioni di ottimalità). $x \in \mathbb{R}^m$ (con m numero dei cammini), soluzione ammissibile per $MMCF_{path}$, è ottima $\iff \exists w_e, e = 1, \dots, E$ e $\sigma_k, k = 1, \dots, K$ tali che:

- $w_e \geq 0, \quad e = 1, \dots, E$ (ammissibilità duale)
- $\sum_{e=1}^E (c_e^k + w_e) \delta_{eik} \geq \sigma_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad \forall i \in P(k)$ (ammissibilità duale)
- $w_e \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i \in P(k)} \delta_{eik} x_i^k - u_e \right) = 0, \quad e = 1, \dots, E$
- $x_i^k \left(\sum_{e=1}^E (c_e^k + w_e) \delta_{eik} - \sigma_k \right) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad i \in P(k)$

Queste condizioni hanno un'immediata interpretazione. Possiamo interpretare $\sum_{e=1}^E (c_e^k + w_e) \delta_{eik}$ come il costo del cammino i della commodity k modificato secondo i prezzi w_e . Inoltre, ispirati dalla condizione $\sum_{e=1}^E (c_e^k + w_e) \delta_{eik} \geq \sigma_k$, possiamo interpretare σ_k come la lunghezza del cammino minimo che collega origine e destinazione della commodity k . Conseguentemente le condizioni degli scarti complementari impongono che, a livello di soluzione ottima, il flusso sia inviato lungo cammini minimi. Infatti:

$$\begin{aligned} \text{da } x_i^k \left(\sum_{e=1}^E (c_e^k + w_e) \delta_{eik} - \sigma_k \right) &= 0 \\ \text{segue che } x_i^k > 0 &\Rightarrow \sum_{e=1}^E (c_e^k + w_e) \delta_{eik} = \sigma_k. \end{aligned}$$

Più formalmente possiamo asserire che:

Proposizione 3 (Interpretazione in termini di cammini di costo minimo).
A livello di soluzione ottima σ_k è la distanza minima dal nodo origine al nodo destinazione della commodity k rispetto ai costi $\{c_e^k + w_e\}$. Inoltre, i cammini utilizzati devono essere di costo minimo secondo questi costi modificati.

3.3 Algoritmo di generazione di colonne

Possiamo sfruttare queste osservazioni per progettare un algoritmo di risoluzione di tipo *generazione di colonne*. L'idea chiave di questa tecnica è di non esplicitare tutte le colonne della formulazione, ma di generarle solamente su domanda.

Con formulazioni come $MMCF_{path}$, visto il numero delle variabili, è quasi d'obbligo un approccio di questo tipo. Tuttavia, per utilizzare la generazione di colonne il problema deve avere una struttura particolare che permetta di effettuare il *pricing-out*, cioè l'operazione con cui si verifica l'ammissibilità delle variabili duali, senza esaminare esplicitamente tutte le colonne.

Nel nostro caso, supponiamo di voler utilizzare l'algoritmo del simplesso duale ([5]) a partire dalla formulazione $MMCFD_{path}$, che ha basi di dimensione $K + E$ (K è dovuto al numero di variabili σ_k , E alle variabili w_e), per le quali dunque non serve una rappresentazione esplicita per più di $K + E$ colonne (cammini) di $MMCF_{path}$. Partendo da una base duale ammissibile

B l'algoritmo esplora i vertici del poliedro, generando soluzioni di base della forma:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{ammissibile per } (MMCF_{path}) \text{ e } \{\bar{w}_e\}, \{\bar{\sigma}_k\}$$

Se $\{\bar{w}_e\}, \{\bar{\sigma}_k\}$ formulano una soluzione ammissibile per $MMCFD_{path}$ allora il problema è risolto all'ottimo. Tuttavia, mentre le condizioni $\bar{w}_e \geq 0, e = 1, \dots, E$, sono facilmente verificabili, per verificare che

$$\sum_{e=1}^E \delta_{eik}(\bar{w}_e + c_e^k) \geq \bar{\sigma}_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad \forall i \in P(k)$$

dovremmo analizzare tutti i cammini di cui, però, abbiamo solo una rappresentazione parziale. Ci viene in aiuto la seguente considerazione:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \delta_{eik}(\bar{w}_e + c_e^k) &\geq \bar{\sigma}_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad \forall i \in P(k) \\ \iff \min_{p \in P(k)} \left\{ \sum_{e=1}^E \delta_{epk}(\bar{w}_e + c_e^k) \right\} &\geq \bar{\sigma}_k, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

che scaturisce dall'osservazione che, se il cammino minimo rispetto ai costi modificati verifica la disequazione, allora tutti gli altri cammini la verificheranno a maggior ragione; d'altro canto, se tutti i cammini verificano la condizione sicuramente lo verificherà il cammino minimo.

Ciò significa che possiamo verificare la condizione complicante risolvendo K problemi di cammino minimo rispetto ai costi modificati $\{\bar{w}_e + c_e^k\}$, con-

trollando che la soluzione di ognuno di questi verifichi $\sum_{e=1}^E \delta_{eik}(\bar{w}_e + c_e^k) \geq \bar{\sigma}_k$.

Nel caso questa condizione non sia verificata possiamo aggiungere alla formulazione la colonna corrispondente al cammino minimo che viola la disuguaglianza, rendendo in genere possibile un miglioramento del valore della funzione obiettivo.

Considerazioni sull'algoritmo

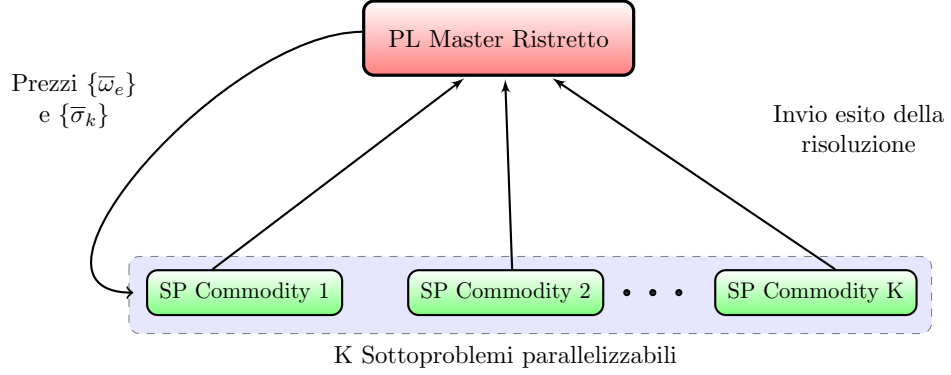


Figura 3.1: Decomposizione di Dantzig-Wolfe. In rosso il coordinatore, in verde i decision makers.

Possiamo interpretare l'algoritmo proposto come una *decomposizione di Dantzig-Wolfe* applicata alla risoluzione di un problema duale lagrangiano. Infatti il k -esimo problema di cammino minimo $\min_{p \in P(k)} \left\{ \sum_{e=1}^E \delta_{eik} (\bar{w}_e + c_e^k) \right\}$, $k = 1, \dots, K$, è equivalente al problema di flusso di costo minimo

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in P(k)} (c_i^k + \sum_{e=1}^E \delta_{eik} \bar{w}_e) x_i^k \\ & \sum_{i \in P(k)} x_i^k = d^k \\ & x_i^k \geq 0. \end{aligned}$$

Non essendo capacitato, tale problema è infatti equivalente ad inviare flusso lungo un cammino di costo minimo dal nodo origine al nodo destinazione della commodity. Questa formulazione equivale ad un rilassamento lagrangiano del modello ($MMFC_{path}$) con moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli $\sum_{k=1}^K \sum_{i \in P(k)} \delta_{eik} x_i^k \leq u_e$, $e = 1, \dots, E$.

Sfortunatamente il costo dell'aggiornamento dei moltiplicatori w_e tramite la risoluzione del *master ristretto* può essere più costoso di quello che offre il metodo del subgradiente.

La decomposizione di Dantzig-Wolfe rimane tuttavia una valida alternativa.

Dal punto di vista implementativo possiamo costruire in modo indipendente un *coordinatore* che si occupi del problema master ridotto e *K decision makers*.

Il coordinatore risolve un problema di PL, quindi manda in *broadcast* i prezzi $\{\omega_e, \sigma_k\}$ ai *decision makers*. Questi determinano il cammino minimo e ne confrontano il costo con σ_k . Se è minore allora viene mandata la soluzione al coordinatore, altrimenti si manda un messaggio segnalante l'esito del confronto. Nella figura è mostrato questo procedimento in maniera schematica. È evidente, che, essendo indipendenti, l'implementazione dei *K decision makers* lasci largo spazio alla parallelizzazione, determinante per una efficiente risoluzione.

L'utilizzo della decomposizione di Dantzig-Wolfe ha anche un altro vantaggio: ad ogni passo l'algoritmo mantiene una soluzione ammissibile per il problema di flusso di costo minimo, e possiamo stimare la distanza tra il valore di questa soluzione e il valore ottimo della funzione obiettivo. Più precisamente, ad ogni iterazione \bar{x} è una soluzione ammissibile per $MMCF_{path}$ per cui, indicando con z la funzione obiettivo di $MMCF_{path}$, si ha

$$z(\bar{x}) \geq z^*,$$

dove z^* denota il valore ottimo. Come già osservato, $\forall w \geq 0 \phi(w) \leq z^*$, dove $\phi(w)$ indica la funzione obiettivo di (LR_w) . Per cui $\phi(\bar{w})$, dove con \bar{w} si denota il vettore delle variabili duali usate per il calcolo dei costi modificati $\{c_{ij}^k + \bar{w}_{ij}\}$ nel calcolo dei cammini minimi, permette insieme a $z(\bar{x})$ di ricavare un *gap* con cui stimare la bontà della soluzione. Infatti vale che:

$$\phi(\bar{w}) \leq z^* \leq z(\bar{x}).$$

È possibile in particolare decidere di terminare la computazione se la differenza $z(\bar{x}) - \phi(\bar{w})$ risulta sufficientemente piccola. Rimane da notare che, se da un lato durante la computazione il valore dell'*upper bound* $z(\bar{x})$ è non crescente, dall'altro non è detto che il valore della funzione obiettivo del sottoproblema lagrangiano risolto all'ottimo sia non decrescente. Perciò bisogna memorizzare il migliore *lower bound* $\phi(\bar{w})$ per rendere più accurata la stima.

CAPITOLO 4

METODI DI DECOMPOSIZIONE PER RISORSE

La decomposizione per risorse nasce dall'osservazione che è possibile riformulare *MMCF* come un problema il cui obiettivo è determinare una partizione “ottimale” delle capacità degli archi tra le commodity:

$$\begin{aligned}
 (RMMCF) \quad z = \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K c_{ij}^k x_{ij}^k \\
 & \sum_{(h,i) \in BS(i)} x_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k, \quad \forall i \in N, \quad k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq x_{ij}^k \leq r_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in A, \quad k = 1, \dots, K \\
 & \sum_{k=1}^K r_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A
 \end{aligned}$$

In tal modo, per ogni ripartizione delle capacità, ci si riduce a risolvere K problemi di flusso single commodity.

Dato un vettore di risorse r possiamo allora definire

$$\begin{aligned}
 X_r = \{x \in \mathbb{R}^{|A| \times K} \mid & \sum_{(h,i) \in BS(i)} x_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k, \quad \forall i \in N, \quad k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq x_{ij}^k \leq r_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in A, \quad k = 1, \dots, K\}
 \end{aligned}$$

e

$$X_r^k = \{x \in \mathbb{R}^{|A|} \mid \exists x_2 \in X_r : x = x_2^k\}$$

pervenendo alla seguente formulazione alternativa:

$$\begin{aligned}
z &= \min z(r) \\
(RMMCF) \quad & \sum_{k=1}^K r_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\
& r_{ij}^k \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A, \quad k = 1, \dots, K
\end{aligned}$$

$$\text{dove } z(r) = \sum_{k=1}^K z^k(r^k)^1, \text{ con } z^k(r^k) = \min_{x \in X_r^k} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k$$

Vale allora la seguente:

Proposizione 4. $z(r)$ è una funzione di r convessa lineare a tratti.

Dimostrazione. Per la convessità bisogna dimostrare che, date due soluzioni ammissibili r_1 e r_2 , per ogni $\theta \in [0, 1]$ vale:

$$z(\theta r_1 + (1 - \theta)r_2) \leq \theta z(r_1) + (1 - \theta)z(r_2).$$

Notiamo che, se N è la matrice dei vincoli e x_1, x_2 sono due soluzioni ottime tali che $x_1 \in X_{r_1}$ e $x_2 \in X_{r_2}$, allora $x_3 = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \leq \theta r_1 + (1 - \theta)r_2 = r_3$ (a causa dei vincoli di X_r e perchè $\theta \in [0, 1]$). Inoltre $\theta N x_1 + (1 - \theta)N x_2 = b$. Perciò $x_3 \in X_{r_3}$. Possiamo anche osservare che r_3 è una soluzione ammissibile per *RMMCF* e che $z(r_3)$ è sicuramente minore o uguale di $c(x_3) = \theta c x_1 + (1 - \theta)c x_2$. Dato che abbiamo scelto x_1, x_2 come soluzioni ottime per r_1 ed r_2 , rispettivamente, si ha $z(r_1) = c(x_1)$ e $z(r_2) = c(x_2)$. Quindi:

$$z(\theta r_1 + (1 - \theta)r_2) \leq c(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) = \theta z(r_1) + (1 - \theta)z(r_2)$$

e dunque $z(r)$ è una funzione convessa.

Data una soluzione ottima di base x rispetto ad una partizione delle capacità r , per ogni altra partizione r_1 , se x rimane ammissibile allora è anche ottima, in quanto duale ammissibile. In ogni intervallo $[r_i, r_j]$ in cui la stessa soluzione rimane ammissibile z è una funzione lineare in r , perciò la funzione risulta lineari a tratti.

□

¹ r^k denota il vettore avente come componenti $r_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in A$.

Come risolvere il modello

A causa della natura non differenziabile della funzione $z(r)$ non possiamo utilizzare il metodo del gradiente per la minimizzazione. Sono invece possibili altri approcci, per esempio di tipo euristico. In [6] si parla di incremento *arc-at-time*. Si sceglie un arco (i, j) e, individuate secondo un qualche criterio due commodity k_1, k_2 , si prova a decrementare di un'unità $r_{ij}^{k_1}$ e a incrementare $r_{ij}^{k_2}$. Calcolando il nuovo valore della funzione $z(r)$ e confrontandolo con il valore dell'iterazione passata si può capire se l'intervento ha determinato un miglioramento della funzione obiettivo.

Il problema è che la convergenza al valore ottimo non è assicurata. Possiamo vedere l'aggiornamento di r come:

$$r \leftarrow r + \theta \gamma,$$

dove $\theta = 1$, $\gamma_{ij}^{k_1} = 1$ e $\gamma_{ij}^{k_2} = -1$, mentre per $k \neq k_1$ e $k \neq k_2$ e $(h, p) \neq (i, j)$ invece $\gamma_{h,p}^k = 0$. Questa interpretazione suggerisce un approccio basato sul subgradiente.

Prima si determina un subgradiente di $z(r)$ nel punto corrente r (sia γ); quindi ci si muove di un passo θ lungo γ in modo da ottenere un nuovo vettore ammissibile r' . Ci vengono in aiuto le seguenti proprietà:

Proposizione 5. (Decomponibilità di r) Sia γ^k ($k = 1, 2, \dots, K$) un sub-

gradiente di $z^k(r^k)$ nel punto \bar{r}^k . Allora $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^K \end{bmatrix}$ è un subgradiente di $z(r)$ in $\bar{r} = \begin{bmatrix} \bar{r}^1 \\ \bar{r}^2 \\ \vdots \\ \bar{r}^K \end{bmatrix}$.

Dimostrazione. Poichè γ^k è un subgradiente di $z^k(r^k)$ nel punto \bar{r}^k vale che

$$z^k(r^k) \geq z^k(\bar{r}^k) + \gamma^k(r^k - \bar{r}^k) \quad \forall r^k \text{ ammissibile}.$$

Sommando le K disequazioni membro a membro otteniamo:

$$\sum_{k=1}^K z^k(r^k) \geq \sum_{k=1}^K z^k(\bar{r}^k) + \sum_{k=1}^K \gamma^k(r^k - \bar{r}^k) \quad \forall r^k \text{ ammissibile}.$$

Dato che per definizione $\sum_{k=1}^K z^k(r^k) = z(r)$ e $\gamma r = \sum_{k=1}^k \gamma^k r^k$ vale che

$$z(r) \geq z(\bar{r}) + \gamma(r - \bar{r})$$

□

Proposizione 6. Sia x^* la soluzione ottima di un problema di flusso di costo minimo rispetto al vettore delle capacità r^* e sia c^π il vettore dei costi ridotti che soddisfa le condizioni di ottimalità rispetto a x^* . Sia inoltre μ un vettore tale che:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } x_{ij}^* < r_{ij}^* \\ c_{ij}^\pi & \text{se } x_{ij}^* = r_{ij}^*. \end{cases}$$

Allora per ogni $r' \geq 0$ ammissibile vale che $z(r') \geq z(r^*) + \mu(r' - r^*)$, e dunque μ è un subgradiente della funzione obiettivo $z(r)$ in r^* .

Dimostrazione. La dimostrazione segue dai seguenti fatti (per approfondimenti vedere [6]):

- Siano z_1 e z_2 i valori ottimi della funzione obiettivo di due problemi MCF definiti sullo stesso grafo $G = (N, A)$, che hanno rispettivamente funzione obiettivo cx e $c^\pi x$ (dove $\pi \in \mathbb{R}^{|N|}$ e $c_{ij}^\pi = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$) e stessi vincoli (nella forma $Nx = b$). Allora vale che

$$z_1 - z_2 = \pi b. \quad (4.1)$$

- Se x^* e c^π sono rispettivamente una soluzione ottima e il vettore dei costi ridotti ottimi di un problema MCF, allora vale che:

$$c_{ij}^\pi > 0 \Rightarrow x_{ij}^* = 0; \quad (4.2)$$

inoltre sia u_{ij} la capacità dell'arco (i, j) , allora vale che:

$$x_{ij}^* \in (0, u_{ij}) \Rightarrow c_{ij}^\pi = 0 \quad (4.3)$$

•

$$z(r^*) = \mu x^* + \pi b. \quad (4.4)$$

Quest'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $z(r^*) = cx^* = c^\pi x^* + \pi b$ (sfruttando (4.1)) e che $c^\pi x^* = \mu x^*$. Infatti se non fosse vero, allora $\mu_{ij} x^* \neq c_{ij}^\pi x^*$ per qualche (i, j) . Dalla definizione di μ sappiamo che deve valere che $x_{ij}^* < r_{ij}^*$ e dunque $\mu_{ij} = 0$, altrimenti i valori coinciderebbero. Possiamo distinguere due casi: se $x_{ij}^* \in (0, r_{ij}^*)$ oppure se $x_{ij}^* = 0$, nel primo caso per (4.3) vale che $c_{ij}^\pi = 0 = \mu_{ij}$, nel secondo caso per (4.2) $c_{ij}^\pi x^* = 0 = \mu_{ij} x^*$.

•

$$c^\pi \geq \mu \quad (4.5)$$

Infatti se $\mu_{ij} \neq c_{ij}^\pi$ allora per la costruzione di μ , $x_{ij}^* < r_{ij}^*$ e dunque $\mu_{ij} = 0$. Questo in congiunzione con il fatto che $c_{ij}^\pi \geq 0$ implica che $c_{ij}^\pi \geq \mu_{ij}$.

Si consideri $r' \neq r^*$, $z(r') = cx'$ per qualche x' e $cx' = c^\pi x' + \pi b$ per (4.1) e per (4.5), $c^\pi x' + \pi b \geq \mu x' + \pi b = \mu r' + \pi b$, dove l'ultima relazione deriva dal fatto che $\mu_{ij} \neq 0$ solo quando $x'_{ij} = r'_{ij}$. Dalla 4.4 segue che $\pi b = z(r^*) - \mu(x^*)$, per cui

$$\begin{aligned} z(r') &= c^\pi x' + \pi b \geq \mu r' + \pi b = z(r^*) - \mu(x^*) + \mu r', \\ \text{dato che } x^* &\leq r^* \text{ e che } \mu \geq 0, \\ z(r^*) - \mu(x^*) + \mu x' &\geq z(r^*) - \mu(r^*) + \mu(r'). \end{aligned}$$

□

Grazie alle due proprietà precedentemente enunciate, a partire da un vettore r_0 , partizione delle capacità, possiamo determinare un subgradiente $\gamma^k(r_0)$ per ogni commodity separatamente e da questi ottenere un subgradiente γ relativo a $z(r_0)$, eseguendo quindi un passo θ lungo γ . Se all'iterazione i -esima l'operazione $r_{i+1} \leftarrow r_i + \theta\gamma$ rende inammissibile il vettore r_{i+1} , modifichiamo r in modo che la soluzione sia ammissibile e possa convergere al valore ottimo. Per i dettagli consultare [6]. Nella figura seguente è mostrato un possibile schema di funzionamento di un risolutore che sfrutta la decomposizione per risorse.

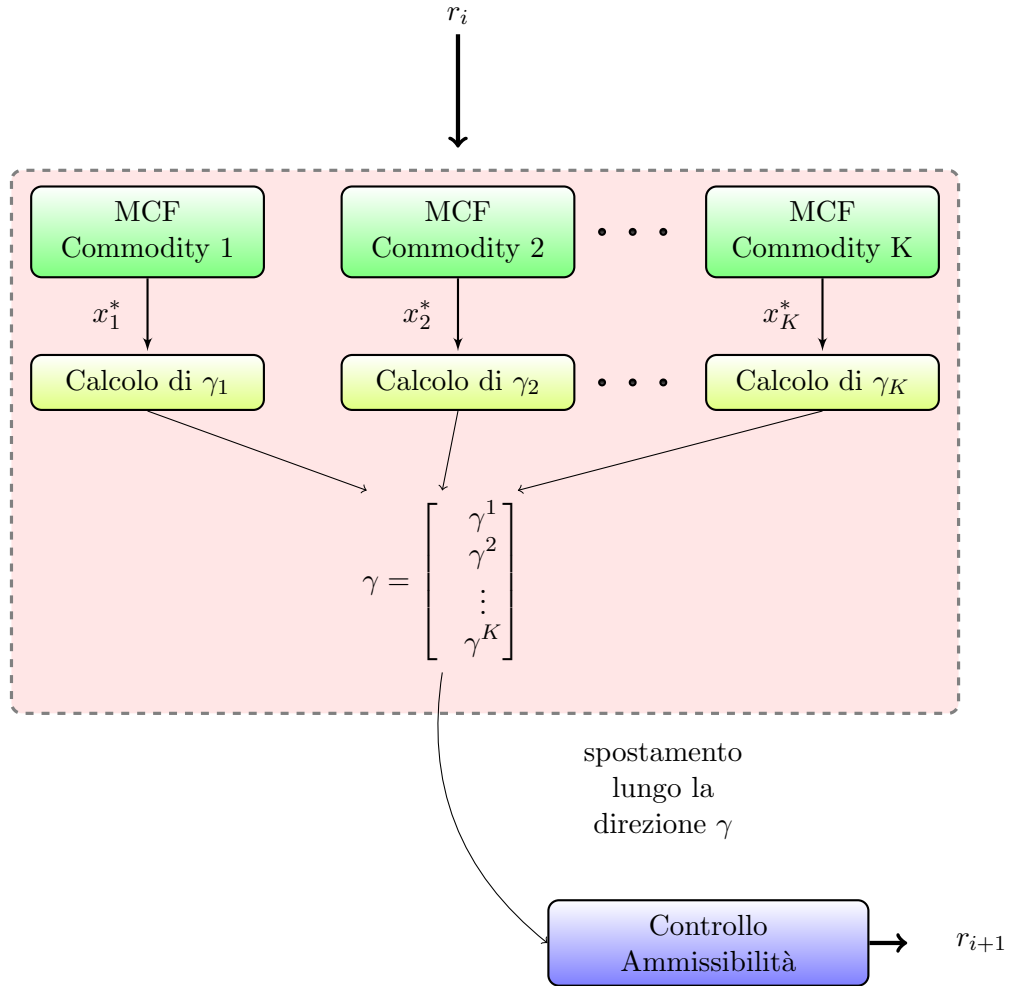


Figura 4.1: Architettura di un risolutore MMCF che sfrutta la decomposizione per risorse. In particolare viene mostrato il calcolo della partizione delle risorse durante una generica iterazione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Ganz I. Chlamtac and G. Karmi. Lightpath communications: an approach to high bandwidth optical wan's. *IEEE Transactions on Communications*, 1992.
- [2] R.M. Karp. On the complexity of combinatorial problem. 1975.
- [3] Even S., Itai A., and Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal on Computing*, 1976.
- [4] Pioro Michal and Mehdi Deepankar. *Routing, Flow, and Capacity Design in Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann, 2004.
- [5] Bigi Giancarlo, Frangioni Antonio, Gallo Giorgio, Pallottino Stefano, and Scutellà Maria, Grazia. *Appunti di Ricerca Operativa*. Servizio Editoriale Universitario di Pisa (SEU), 2006/2007.
- [6] K. Ravindra Ahuja, L. Thomas Magnanti, and B. James Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.
- [7] Wolsey Laurence, A. *Integer Programming*. Wiley-Interscience, 1998.
- [8] Frangioni Antonio. Tecniche di decomposizione e rilassamenti lagrangiani, dispensa per ciro. 2002.
- [9] Shor Naum Z., K. C. Kiwiel, and A. Ruszczyński. *Minimization Method for Non Differentiable Function*. Springer, 1985.

- [10] R.T Rockafeller. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [11] KC Border. Supergradients. 2009.
- [12] J. E. Kelley. The cutting-plane method for solving convex programs. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1960.