

Modelowanie i statystyka danych czasu życia

Analiza przeżycia

Zuzanna Klaman

2026-02-17

Spis treści

1	Charakterystyka i symulacja rozkładu Exponentiated Weibull	2
1.1	Definicje matematyczne rozkładu EW	2
1.2	Analiza kształtów funkcji hazardu	4
1.3	Generator liczb losowych	5
1.4	Porównanie teoretycznej gęstości z empirycznym histogramem	6
1.5	Zestawienie statystyk opisowych i wartości teoretycznych	7
2	Symulacja i analiza danych cenzurowanych	8
2.1	Algorytmy generowania danych cenzurowanych	8
2.2	Analiza statystyczna wygenerowanych prób	10
2.3	Porównawcza analiza opisowa czasu remisji choroby	12
3	Estymacja parametrów i ocena właściwości estymatorów	13
3.1	Estymacja NW i przedziały ufności dla cenzurowania typu I	13
3.2	Analiza parametrów czasu remisji przy założeniu cenzurowania typu II	14
3.3	Analiza porównawcza właściwości estymatorów	15
4	Weryfikacja hipotez statystycznych i analiza mocy testów	17
4.1	ZImplementacja testu ilorazu wiarygodności	17
4.2	Symulacyjna analiza mocy oraz rozmiaru testu ilorazu wiarygodności	18
4.3	Weryfikacja hipotezy o średnim czasie remisji w grupach pacjentów A i B . .	19

1 Charakterystyka i symulacja rozkładu Exponentiated Weibull

1.1 Definicje matematyczne rozkładu EW

Rozważamy rozkład *exponentiated-Weibull*, stanowiący uogólnienie klasycznego rozkładu Weibulla. Charakteryzuje się on trzema parametrami: α , β oraz γ , które przyjmują wartości dodatnie ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$). Poniżej przedstawiono podstawowe funkcje opisujące ten rozkład: funkcję gęstości prawdopodobieństwa, dystrybuantę, dystrybuantę odwrotną oraz funkcję hazardu.

- Funkcja gęstości

$$f(t, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]\right)^{\gamma-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (1)$$

```
f_EW <- function(t, alpha, beta, gamma){  
  (alpha * gamma / beta) * (t / beta)^(alpha - 1) *  
    (1 - exp(-(t / beta)^alpha))^(gamma - 1) * exp(-(t / beta)^alpha)  
}
```

- Dystrybuanta

$$F(t, \alpha, \beta, \gamma) = \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]\right)^\gamma \quad (2)$$

```
F_EW <- function(t, alpha, beta, gamma){  
  (1 - exp(-(t / beta)^alpha))^gamma  
}
```

- Dystrybuanta odwrotna

$$Q(p) = \beta \cdot \left(-\ln\left(1 - p^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3)$$

```
Q_EW <- function(p, alpha, beta, gamma){  
  beta * (-log(1 - p^(1 / gamma)))^(1 / alpha)  
}
```

- Funkcja hazardu

$$h(t, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{f(t, \alpha, \beta, \gamma)}{S(t)} = \frac{f(t, \alpha, \beta, \gamma)}{1 - \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]\right)^\gamma} \quad (4)$$

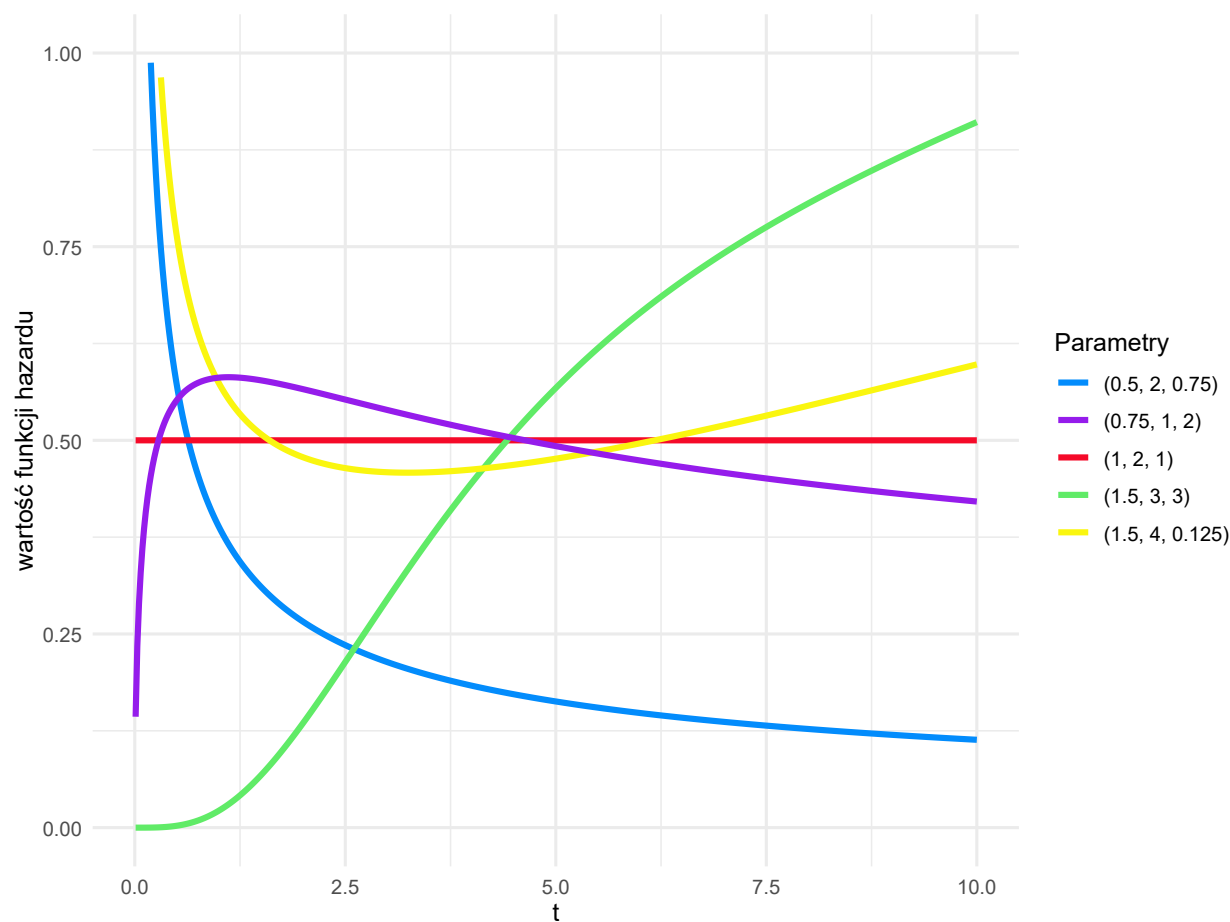
```
S_EW <- function(t, alpha, beta, gamma){
  1 - F_EW(t, alpha, beta, gamma)
}

h_EW <- function(t, alpha, beta, gamma){
  f_EW(t, alpha, beta, gamma) / S_EW(t, alpha, beta, gamma)
}
```

gdzie S_{EW} to funkcja przeżycia dla rozkładu \mathcal{EW} .

1.2 Analiza kształtów funkcji hazardu

W zależności od przyjętych wartości parametrów α , β oraz γ , funkcja hazardu $h(t)$ rozkładu \mathcal{EW} może przyjmować różnorodne kształty. Poniższy wykres pokazuje, jak zmiana parametrów wpływa na kształt tej funkcji, prezentując pięć odmiennych przebiegów dla różnych ich zestawów.



Rysunek 1: Wykres funkcji hazardu rozkładu \mathcal{EW} dla różnych parametrów

Jak widać na wykresie (zobacz rysunek 1), funkcja hazardu rozkładu \mathcal{EW} przyjmuje różnorodne formy w zależności od parametrów. Obok klasycznych przebiegów, takich jak malejący, stały i rosnący, występują również bardziej złożone, niemonotoniczne kształty.

1.3 Generator liczb losowych

Poniżej widoczna jest deklaracja funkcji generującej zmiennych losowych z rozkładu \mathcal{EW} . Wykorzystano do tego funkcję dystrybuanaty odwrotnej

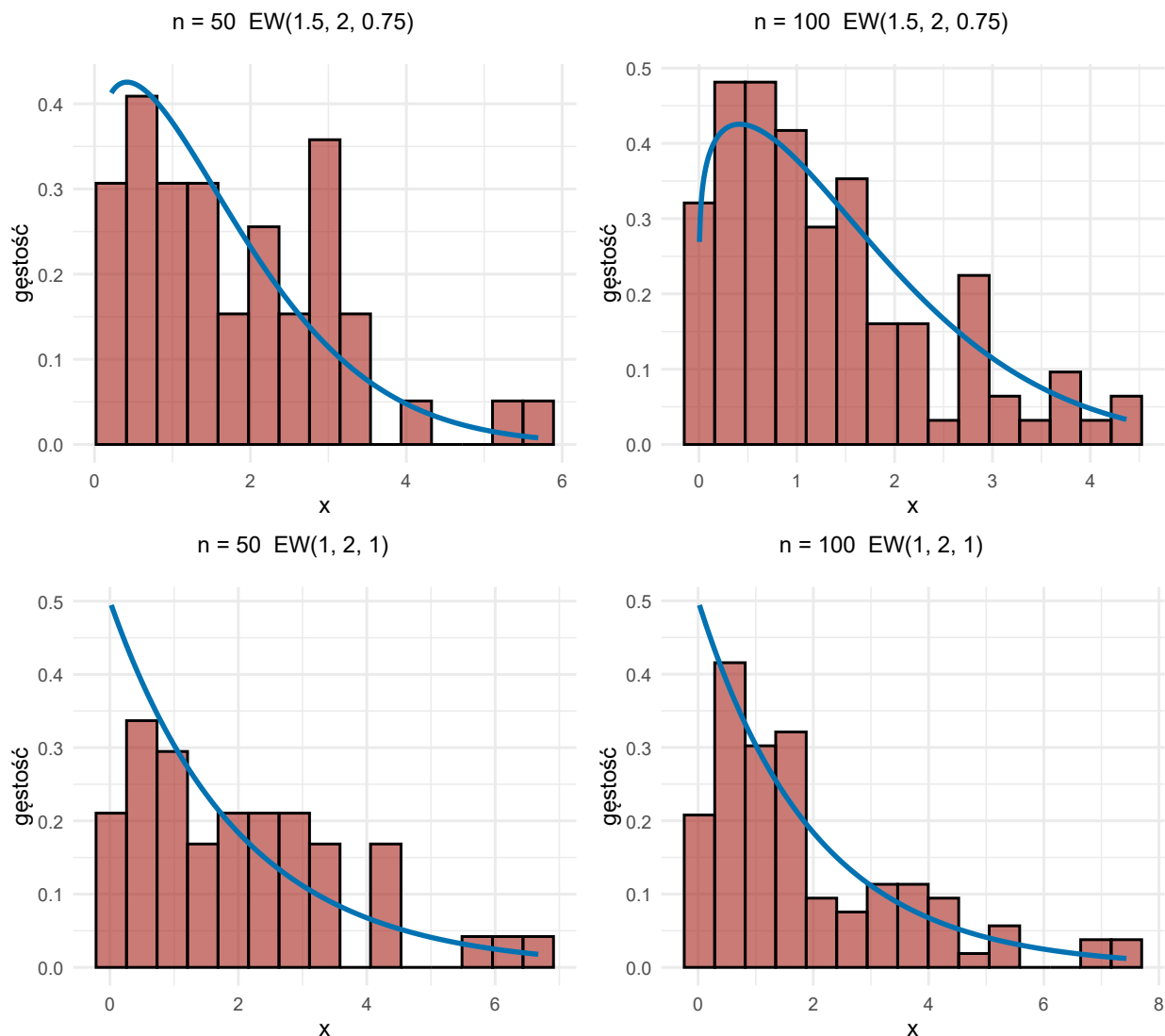
$$Q(p) = \beta \cdot \left(-\ln \left(1 - p^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Docelowa funkcja (*losowe_EW*) przekształca losowe wartości z przedziału $(0, 1)$ na wartości z rozkładu \mathcal{EW} .

```
losowe_EW <- function(n, alpha, beta, gamma){  
  u <- runif(n)  
  x <- Q_EW(u, alpha, beta, gamma)  
  return(x)  
}
```

1.4 Porównanie teoretycznej gęstości z empirycznym histogramem

Porównamy losowo wygenerowane dane z krzywą gęstości rozkładu \mathcal{EW} . Wygenerowano próbki losowe o dwóch różnych rozmiarach ($n = 50$ i $n = 100$) dla dwóch odmiennych zestawów parametrów - $(1.5, 2, 0.75)$ oraz $(1, 2, 1)$. Na histogramy gęstości, utworzone z tych próbek, nałożono teoretyczne krzywe gęstości prawdopodobieństwa.



Analiza czterech powyższych wykresów pozwala sformułować następujące wnioski:

- Dla obu zestawów parametrów widać wyraźnie, że histogramy dla większej próby ($n = 100$) nieco lepiej dopasowują się do teoretycznej krzywej gęstości niż te dla mniejszej próby ($n = 50$).
- Histogramy dla mniejszych prób charakteryzują się większą losową zmiennością. Widać w nich luki i nieregularności, które znikają przy większej próbie.

1.5 Zestawienie statystyk opisowych i wartości teoretycznych

Aby lepiej scharakteryzować wygenerowane próby losowe, wyznaczono dla nich zestaw kluczowych miar statystyki opisowej. Dla każdej z prób obliczono: średnią, medianę, odchylenie standardowe, kwartył dolny, kwartył górny, rozstęp oraz wartości minimalną i maksymalną. Dodatkowo w tabeli zamieszczone zostały wartości teoretyczne mediany i kwartyli, które odpowiadają przyjętym parametrom rozkładów.

Wartości podstawowych statystyk opisowych wyznaczono dla czterech przypadków:

- przypadek 1: $\mathcal{EW}(1.5, 2, 0.75)$ dla $n = 50$
- przypadek 2: $\mathcal{EW}(1.5, 2, 0.75)$ dla $n = 100$
- przypadek 3: $\mathcal{EW}(1, 2, 1)$ dla $n = 50$
- przypadek 4: $\mathcal{EW}(1, 2, 1)$ dla $n = 100$

Tabela 1: Statystyki opisowe dla różnych zestawów parametrów

	przypadek 1	przypadek 2	przypadek 3	przypadek 4
mean	1.77	1.31	2.05	1.92
median	1.53	1.00	1.80	1.37
sd	1.29	1.09	1.66	1.76
Q1	0.61	0.47	0.69	0.61
Q3	2.75	1.80	2.84	2.92
IQR	2.14	1.33	2.15	2.32
min	0.21	0.01	0.02	0.02
max	5.69	4.37	6.67	7.43
range	5.48	4.36	6.65	7.41
Q1 teor.	0.62	0.62	0.58	0.58
mediana teor.	1.27	1.27	1.39	1.39
Q3 teor.	2.19	2.19	2.77	2.77

Na podstawie Tabeli 1 można zauważyć, że statystyki empiryczne (mediana, Q1, Q3) z wygenerowanych prób są zbliżone do teoretycznych wartości dla tych rozkładów. Dodatkowo, porównując przypadki z różną wielkością próby (np. przypadek 3 z $n = 50$ i przypadek 4 z $n = 100$), widać, że większa próba daje wyniki nieco bliższe wartościom teoretycznym.

2 Symulacja i analiza danych cenzurowanych

2.1 Algorytmy generowania danych cenzurowanych

Zmienne losowe o rozkładzie uogólnionym wykładniczym $\mathcal{GE}(\lambda, \alpha)$ wygenerowano metodą odwróconej dystrybucyjności, w której funkcja kwantylowa ma postać:

$$Q(p) = \frac{-1}{\lambda} \cdot \ln(1 - p^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (5)$$

przy czym losowania dokonano z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, 1)$.

```
set.seed(123456)

Q_GE <- function(p, lambda, alpha){
  -1/lambda * log(1 - p^(1/alpha))
}

losowe_GE <- function(n, lambda, alpha){
  u <- runif(n)
  x <- Q_GE(u, lambda, alpha)
  return(x)
}
```

2.1.1 Funkcja do generowania n zmiennych cenzurowanych w przypadku cenzurowania I-go typu.

```
funkcja_1 <- function(n, lambda, alpha, t0){
  x <- losowe_GE(n, lambda, alpha)
  t <- pmin(x, t0)
  warunek <- ifelse(x <= t0, 1, 0)
  data.frame(czas = t, cenzura = warunek)
}
```


2.1.2 Funkcja do generowania n zmiennych cenzurowanych w przypadku cenzurowania II-go typu.

```
funkcja_2 <- function(n, lambda, alpha, m){  
  x <- losowe_GE(n, lambda, alpha)  
  posort <- sort(x)  
  dobre <- posort[1:m]  
  ostatnia_wart <- posort[m]  
  zle <- rep(ostatnia_wart, n-m)  
  cenzura <- c(dobre, zle)  
  cenzura2 <- c(rep(1, m), rep(0, n - m))  
  data.frame(czas = cenzura, cenzura = cenzura2)  
}
```

2.1.3 Funkcja do generowania n zmiennych cenzurowanych w przypadku cenzurowania losowego (niezależnego).

Tutaj rozkład czasu cenzurowania jest rozkładem wykładniczym $\mathcal{E}(\eta)$, gdzie η jest wartością oczekiwaną rozkładu cenzurowania.

```
f_wykl <- function(n, eta){  
  dane2 <- rexp(n, 1/eta)  
  return(dane2)  
}  
  
funkcja_3 <- function(n, lambda, alpha, eta){  
  x <- losowe_GE(n, lambda, alpha)  
  c <- f_wykl(n, eta)  
  t <- pmin(x, c)  
  warunek <- ifelse(x <= c, 1, 0)  
  data.frame(czas = t, cenzura = warunek)  
}
```

2.2 Analiza statystyczna wygenerowanych prób

W oparciu o funkcje zaimplementowane powyżej, wygenerowano trzy zbiory danych, po jednym dla każdego z analizowanych typów cenzurowania. Dla każdego zbioru obliczono i przedstawiono wartości statystyk opisowych.

- Cenzurowanie I-go typu

```
n_a <- 200 ; lambda_a <- 1.5 ; alpha_a <- 2 ; t0_a <- 1.8  
dane_a <- funkcja.1(n_a, lambda_a, alpha_a, t0_a)
```

Tabela 2: Statystyki dla cenzurowania I-go typu ($n = 200$, $t_0 = 1.8$)

Statystyka	Wartość
Całkowita liczba obserwacji	200
Liczba danych niecenzurowanych	173
Liczba danych cenzurowanych	27
Minimum	0.02
Kwartył dolny	0.41
Mediana	0.84
Kwartył górny	1.36
Maksimum	1.8

- Cenzurowanie II-go typu

```
n_b <- 200; lambda_b <- 1.5; alpha_b <- 2; m_b <- 175  
dane_b <- funkcja.2(n_b, lambda_b, alpha_b, m_b)
```

Tabela 3: Statystyki dla cenzurowania II-go typu ($n = 200$, $m = 175$)

Statystyka	Wartość
Całkowita liczba obserwacji	200
Liczba danych niecenzurowanych	175
Liczba danych cenzurowanych	25
Minimum	0.02
Kwartył dolny	0.48
Mediana	0.78
Kwartył górny	1.35
Maksimum	1.79

- Cenzurowanie losowe

```
n_c <- 200; lambda_c <- 1.5; alpha_c <- 2; eta_c <- 4.0
dane_c <- funkcja_3(n_c, lambda_c, alpha_c, eta_c)
```

Tabela 4: Statystyki dla cenzurowania losowego ($n = 200$, $\eta = 4.0$)

Statystyka	Wartość
Całkowita liczba obserwacji	200
Liczba danych niecenzurowanych	156
Liczba danych cenzurowanych	44
Minimum	0.01
Kwartył dolny	0.45
Mediana	0.76
Kwartył górny	1.13
Maksimum	3.82

Tabele dobrze odzwierciedlają definicje cenzurowania poszczególnych typów: W cenzurowaniu II-go typu (Tabela 3) liczba danych niecenzurowanych jest stała i równa parametrowi $m = 175$. W cenzurowaniu I-go typu (Tabela 2) maksymalny czas jest ogólnie określony przez $t_0 = 1.8$. Cenzurowanie losowe (Tabela 4) pozwoliło na zaobserwowanie znacznie większych wartości niż w pozostałych dwóch przypadkach, gdzie zakres był ograniczony przez czas lub liczbę awarii.

2.3 Porównawcza analiza opisowa czasu remisji choroby

Przeprowadzono analizę opisową danych pochodzących z badania klinicznego. W badaniu wzięło udział 40 pacjentów, których losowo przydzielono do dwóch równolicznych grup. Obserwację prowadzono przez okres jednego roku, monitorując czas do wystąpienia remisji choroby. Zebrane dane są przykładem danych cenzurowanych I-go typu. Pacjenci, u których remisja choroby nastąpiła przed upływem roku, są obserwacjami kompletnymi - niecenzurowanymi. Natomiast pacjenci, u których remisja nie wystąpiła w ciągu roku, są obserwacjami cenzurowanymi.

- LEK A

Tabela 5: Statystyki opisowe dla Leku A ($n = 20$)

Statystyka	Wartość
Całkowita liczba obserwacji	20
Liczba danych niecenzurowanych	10
Liczba danych cenzurowanych	10
Minimum	0.03
Kwartył dolny	0.38
Mediana	0.97
Kwartył górny	1
Maksimum	1

- LEK B

Tabela 6: Statystyki opisowe dla Leku B ($n = 20$)

Statystyka	Wartość
Całkowita liczba obserwacji	20
Liczba danych niecenzurowanych	10
Liczba danych cenzurowanych	10
Minimum	0.04
Kwartył dolny	0.33
Mediana	0.85
Kwartył górny	1
Maksimum	1

Analiza uzyskanych wyników sugeruje, że chociaż oba leki wykazują podobną skuteczność ogólną, lek B, którego statystyki widoczne są w Tabeli 6, prowadzi do remisji w krótszym czasie. Świadczy o tym niższa mediana czasu do osiągnięcia remisji w grupie B w porównaniu z grupą A (wyniki widoczne w Tabeli 5).

3 Estymacja parametrów i ocena właściwości estymatorów

3.1 Estymacja NW i przedziały ufności dla cenzurowania typu I

Przeanalizujemy ponownie powyższe dane, przyjmując, że są one realizacjami zmiennych z rozkładu wykładniczego.

3.1.1 Wyznaczenie ocen NW średniego czasu do remisji

Oszacowania średniego czasu do remisji choroby dla pacjentów z różnych grup uzyskano przy użyciu metody największej wiarygodności. W przypadku danych cenzurowanych I-go typu metoda ta opiera się na następującym wzorze:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^R X_{(i)} + (n - R)t_0}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i \leq t_0)} \quad (6)$$

Tabela 7: Oszacowanie największej wiarygodności

Estymator	Lek A	Lek B
$\hat{\mu}$ - NW średniego czasu do remisji	1.421583	1.345867

Na podstawie Tabeli 7, oszacowany średni czas do remisji choroby jest krótszy dla leku B niż dla leku A. Sugeruje to, że lek B, działa szybciej i prowadzi do remisji w krótszym okresie niż lek A.

3.1.2 Konstrukcja przedziałów ufności

Wyznaczono realizację przedziałów ufności, na poziomie ufności $1 - \alpha$, przyjmując $\alpha = 0,05$ oraz $\alpha = 0,01$. Wykorzystano poniższe wzory:

$$\tilde{T}_L = \frac{-\log(1 - T_L)}{t_0} \quad (7)$$

$$\tilde{T}_u = \frac{-\log(1 - T_U)}{t_0} \quad (8)$$

Przedziały ufności uzyskane dla leku A i leku B są identyczne (Tabela 8). Jest to konsekwencją sposobu działania funkcji `binom.confint`, która wykorzystuje te same dane wejściowe - liczbę pacjentów, liczbę remisji oraz czas obserwacji. Ponieważ wartości te są takie same w obu grupach, obliczone przedziały nie różnią się między sobą.

Tabela 8: Przedziały ufności dla średniego czasu μ

Lek	α	Przedział ufności
A	0.05	[0.768, 3.151]
A	0.01	[0.656, 4.072]
B	0.05	[0.768, 3.151]
B	0.01	[0.656, 4.072]

3.2 Analiza parametrów czasu remisji przy założeniu cenzurowania typu II

W poniższej analizie przyjęto, że obserwacje czasu do remisji choroby były prowadzone do momentu, w którym u dziesięciu pacjentów zaobserwowano remisję. Taki sposób zakończenia badania odpowiada cenzurowaniu typu II. Celem jest oszacowanie estymatorów w oparciu o ten nowy model.

3.2.1 Wyznaczenie ocen NW średniego czasu do remisji

Poniżej wyznaczono estymatory największej wiarygodności dla średniego czasu do remisji oraz intensywności. Podstawą estymacji jest całkowity czas badania T . Oblicza się go na podstawie wzoru:

$$T = \sum_{i=1}^m t_{(i)} + (n - m)t_{(m)} \quad (9)$$

Tabela 9: Oszacowania NW dla cenzurowania typu II

Statystyka	Lek A	Lek B
$\hat{\mu}$ - NW średniego czasu	1.3638	1.0371

Analiza estymatorów NW dla cenzurowania typu II potwierdza poprzednie obserwacje. Lek B wykazuje wyraźnie krótszy średni czas do remisji w porównaniu do leku A, co sugeruje, że działa on szybciej.

3.2.2 Konstrukcja przedziałów ufności

W celu wyznaczenia przedziałów ufności wykorzystano metodę opartą na rozkładzie Gamma. Dolną (T_L) i górną (T_U) granicę przedziału ufności na poziomie $1 - \alpha$ obliczono za pomocą wzorów:

$$T_L = \frac{m \cdot q_{Ga}(\alpha/2)}{T} \quad (10)$$

$$T_U = \frac{m \cdot q_{Ga}(1 - \alpha/2)}{T} \quad (11)$$

gdzie $q_{Ga}(p)$ to kwantyl rzędu p z rozkładu $Gamma(m, 1/m)$

Tabela 10: Przedziały ufności dla μ

Lek	α	Przedział ufności
A	0.05	[0.7983, 2.844]
A	0.01	[0.682, 3.6692]
B	0.05	[0.607, 2.1626]
B	0.01	[0.5186, 2.7901]

Przedziały ufności dla leku B są przesunięte w kierunku niższych wartości - krótszych czasów, co potwierdza wcześniejszy wniosek, że działa on szybciej niż lek A. Na podstawie tych wyników, nie można jednak jednoznacznie stwierdzić, który z nich jest lepszy, ponieważ przedziały na siebie nachodzą.

3.3 Analiza porównawcza właściwości estymatorów

Porównano dokładność dwóch różnych estymatorów nieznaney wartości parametru ϑ . Jako miarę dokładności przyjęto obciążenie oraz błąd średniokwadratowy:

- Obciążenie: $Bias(\hat{\vartheta}, \vartheta) = E_{\vartheta}(\hat{\vartheta} - \vartheta)$, $Bias(\tilde{\vartheta}, \vartheta) = E_{\vartheta}(\tilde{\vartheta} - \vartheta)$
- Błąd Średniokwadratowy: $MSE(\hat{\vartheta}, \vartheta) = E_{\vartheta}(\hat{\vartheta} - \vartheta)^2$, $MSE(\tilde{\vartheta}, \vartheta) = E_{\vartheta}(\tilde{\vartheta} - \vartheta)^2$

Dla każdej kombinacji parametrów (n i t_0) symulacja została powtórzona $M = 10000$ razy. W każdej i - tej symulacji generowano próbę n niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_n z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(\vartheta)$, obliczano statystyki dla cenzurowania w czasie t_0 oraz obliczano wartości obu estymatorów.

Podczas przeprowadzania symulacji wykorzystano poniższe wzory:

$$R = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_j \leq t_0)$$

$$T_1 = \sum_{X_j \leq t_0} X_j + (n - R)t_0$$

$$\widehat{bias}(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\vartheta}^{(i)} - \vartheta)$$

$$\widehat{MSE}(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\vartheta}^{(i)} - \vartheta)^2$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli.

Tabela 11: Porównanie obciążeń i błędów średniokwadratowych estymatorów $\hat{\vartheta}$ i $\tilde{\vartheta}$

n	t_0	$\text{bias}(\hat{\vartheta})$	$\text{MSE}(\hat{\vartheta})$	$\text{bias}(\tilde{\vartheta})$	$\text{MSE}(\tilde{\vartheta})$
10	0.5	0.06964	0.30513	0.07850	0.32943
10	1.0	0.07403	0.21799	0.32241	5.55566
10	2.0	0.08671	0.17365	2.34932	25.39028
30	0.5	0.02055	0.09061	0.02292	0.09355
30	1.0	0.02513	0.05703	0.03354	0.06655
30	2.0	0.02843	0.04413	0.20332	1.69169

Na podstawie Tabeli 11, estymator $\hat{\vartheta}$ jest wyraźnie lepszy, bardziej stabilny i dokładny w każdym przypadku. Zwiększenie liczby prób n poprawia oba estymatory, jednak $\tilde{\vartheta}$ staje się niestabilny, gdy czas obserwacji t_0 rośnie, co widać po bardzo dużym błędzie MSE.

4 Weryfikacja hipotez statystycznych i analiza mocy testów

4.1 ZImplementacja testu ilorazu wiarygodności

W tej części rozpatrywane są dane cenzurowane I-go typu, które stanowią realizacje zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym. Celem jest przeprowadzenie testu ilorazu wiarygodności w celu weryfikacji hipotez dotyczących parametru ϑ . Rozważane są trzy warianty hipotez:

- (a) $H_0^{(1)} : \vartheta = \vartheta_0$ przy hipotezie alternatywnej $H_1^{(1)} : \vartheta \neq \vartheta_0$,
- (b) $H_0^{(2)} : \vartheta \leq \vartheta_0$ przy hipotezie alternatywnej $H_1^{(2)} : \vartheta > \vartheta_0$,
- (c) $H_0^{(3)} : \vartheta \geq \vartheta_0$ przy hipotezie alternatywnej $H_1^{(3)} : \vartheta < \vartheta_0$.

Poniżej zdefiniowano funkcję obliczającą wartość poziomu krytycznego w teście ilorazu wiarygodności.

```
test_ilorazu_wiar_wykladniczy <- function(r, s, n, t0, theta0,
                                           rodzaj = c("two.sided", "less", "greater")){
  theta_hat <- r / (s + (n - r) * t0)
  logL0 <- r * log(theta0) - theta0 * (s + (n - r) * t0)
  logLhat <- r * log(theta_hat) - theta_hat * (s + (n - r) * t0)
  W <- -2 * (logL0 - logLhat)

  if (rodzaj == "two.sided")
    pval <- 1 - pchisq(W, df = 1)

  else if (rodzaj == "greater"){
    if (theta_hat > theta0)
      pval <- 0.5 * (1 - pchisq(W, df = 1))
    else
      pval <- 1
  }

  else if (rodzaj == "less"){
    if (theta_hat < theta0)
      pval <- 0.5 * (1 - pchisq(W, df = 1))
    else
      pval <- 1
  }

  return(data.frame(test_type = rodzaj, r = r, s = s, n = n, t0 = t0,
                    theta0 = theta0, theta_hat = round(theta_hat, 5),
                    W = round(W, 5), p_value = round(pval, 5)))
}
```

4.2 Symulacyjna analiza mocy oraz rozmiaru testu ilorazu wiarygodności

Przeprowadzono symulacje, których celem było oszacowanie mocy oraz rozmiaru testu ilorazu wiarygodności dla danych cenzurowanych I-go typu. Analizowano weryfikację dwustronnej hipotezy zerowej:

$$H_0^{(1)} : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{przy hipotezie alternatywnej} \quad H_1^{(1)} : \vartheta \neq \vartheta_0$$

Dane do każdej symulacji były generowane z rozkładu wykładniczego o parametrze intensywności ϑ równym aktualnie analizowanej wartości parametru.

Aby zbadać zachowanie testu, wybrano następujący zestaw parametrów symulacji:

- Liczba powtórzeń: $M = 10000$
- Poziom istotności: $\alpha = 0.05$
- Wartość w hipotezie zerowej: $\vartheta_0 = 1.2$
- Czas cenzurowania: $t_0 = 1$
- Analizowane rozmiary próbek: $n \in \{20, 50\}$
- Analizowane wartości: $\vartheta \in \{0.5, 0.8, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7, 2.0\}$

Tabela 12: Moc i rozmiar testu ($M = 1000$, $t_0 = 1.0$, $\vartheta_0 = 1.2$)

ϑ	Rodzaj pomiaru	Wynik ($n = 20$)	Wynik ($n = 50$)
0.5	moc testu	0.834	0.997
0.8	moc testu	0.300	0.630
1.0	moc testu	0.091	0.180
1.1	moc testu	0.059	0.092
1.2	rozmiar testu	0.036	0.050
1.3	moc testu	0.057	0.076
1.4	moc testu	0.077	0.166
1.6	moc testu	0.193	0.425
1.7	moc testu	0.268	0.602
2.0	moc testu	0.526	0.893

Zwiększenie wielkości próby z $n = 20$ do $n = 50$ znacząco zwiększa moc testu. Ponadto moc zwiększa się z odległością prawdziwej wartości ϑ od testowanej hipotezy. Rozmiar testu (wynik dla $\vartheta = 1.2$) dla $n = 20$ jest bardzo bliski zakładanemu poziomowi istotności, a dla $n = 50$ jest jemu równy. Świadczy to o poprawnym działaniu testu.

4.3 Weryfikacja hipotezy o średnim czasie remisji w grupach pacjentów A i B

Korzystając z funkcji zaimplementowanej wyżej, przeprowadzono analizę danych dotyczących badania klinicznego czasu remisji choroby w dwóch grupach pacjentów. Dane te miały postać cenzurowaną I-go typu, a do modelowania czasu remisji przyjęto, że są one realizacjami zmiennych z rozkładu wykładniczego.

Analiza miała na celu ocenę, czy średni czas do remisji choroby w obu badanych grupach jest równy 1. W tym celu przeprowadzono dwustronny test ilorazu wiarygodności w celu weryfikacji hipotezy $H_0 : \vartheta = 1$ przeciwko alternatywie $H_1 : \vartheta \neq 1$.

Tabela 13: Wyniki testu dla hipotezy o średnim czasie remisji

Grupa	$\hat{\vartheta}$	W	p -value	Decyzja (dla $\alpha = 0.05$)
A	0.70344	1.39624	0.23735	Brak podstaw do odrzucenia H_0
B	0.74302	0.97657	0.32305	Brak podstaw do odrzucenia H_0

Dla obu grup, A i B, uzyskane wartości p -value są wyższe od poziomu istotności 0.05. Oznacza to, że w żadnej z grup nie ma statystycznych podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (H_0).