Inwazja owadów w Kanadzie

Zuzanna Brzóska

20 11 2020

1 opis zjawiska

W lasach Kanady żyje pewien szkodnik - zwójka północnoamerykańska, gatunek gąsienicy. Przez większość czasu liczebność osobników tego gatunku pozostaje na niskim poziomie, jednak co jakiś czas (około 40 lat) "eksploduje" do bardzo wysokich wartości, wielkie połacie lasu zostają wtedy zdewastowane.

2 Budowa modelu

Jako że te skoki liczebności gąsienicy są bardzo niekorzystne dla gospodarki leśnej, poszukiwana jest odpowiedź na pytanie co powoduje te skoki oraz jak im zapobiec?

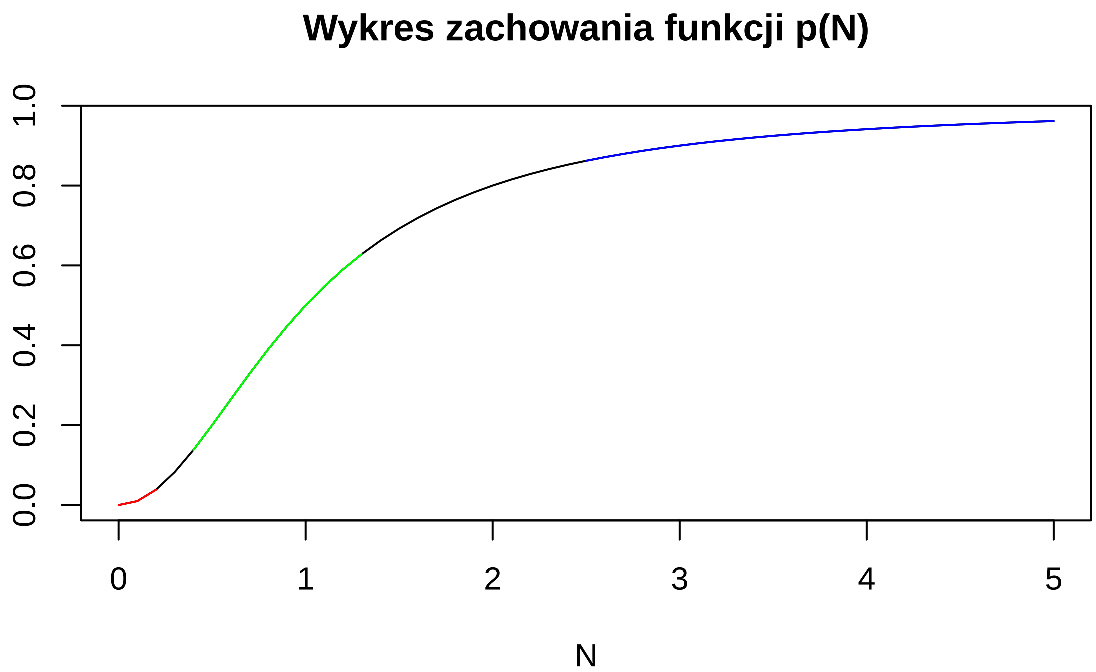
Naukowcy z Uniwersytetu Kolumbii Brytyjskiej, D. Ludwig, D. D. Jones oraz C.S. Holling stworzyli model matematyczny dopasowany do sytuacji tej gąsienicy.

Jest to modyfikacja ciągłego równania logistycznego, pewien model polowań:

$$\frac{d}{dt}N = r_B N(1 - \frac{N}{K_B}) - p(N)$$

gdzie: $N(t)$ - liczebność gąsienic, r_B - przyrost naturalny, K_B - optymalna pojemność środowiska, $p(N)$ - polowania ptaków.

Funkcja $p(N)$ zależy w pewnym stopniu od populacji gąsienic. Na początku gdy gąsienic jest mało (czerwona część poniższego wykresu), to ptaków też. Następnie wraz ze wzrostem liczebności gąsienic (część zielona wykresu) wzrasta liczebność ptaków, jednak populcja ptaków nie może wzrosnąć zbyt wysoko (część niebieska wykresu), nawet gdy gąsienic wciąż przybywa - wtedy populacja ptaków zbliża się do pewnej maksymalnej wartości.



Biolodzy potrzebowali funkcji, która będzie zachowywać się w opisywany sposób i zastosowali wzór postaci: $p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}$ (A i B dodatnie). Widać, że gdy $N \to \infty$ to $p(N) \to B$ - jest to wartość oznaczająca maksymalną wartość, jaką może osiągnąć populacja ptaków. Parametr A odpowiada za wypłaszczenie na początku, co można wywnioskować z analizy pochodnych $p(N)$ - punkt przegięcia jest w $\sqrt{\frac{A}{3}}$, więc im większe A tym dłużej krzywa jest wypłaszczona.

Ostatecznie więc mamy model postaci:

$$\frac{d}{dt}N = r_B N(1 - \frac{N}{K_B}) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

gdzie wszystkie parametry są dodatnie. Model ten jest jakościowy tzn. że oddaje ogólny charakter zachowania tej populacji, nie znamy dokładnych wartości parametrów.

3 Analiza modelu

Nasz model ma dużo parametrów i nie jest łatwo go analizować w takiej postaci, chcemy je zredukować, dlatego przeprowadzamy zamianę zmiennych: $u = \frac{N}{A}$ $r = \frac{Ar_B}{B}$ $q = \frac{K_B}{A}$ $\tau = \frac{Bt}{A}$ W nowych zmiennych model ma postać: $\frac{du}{d\tau} = ru(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2}$

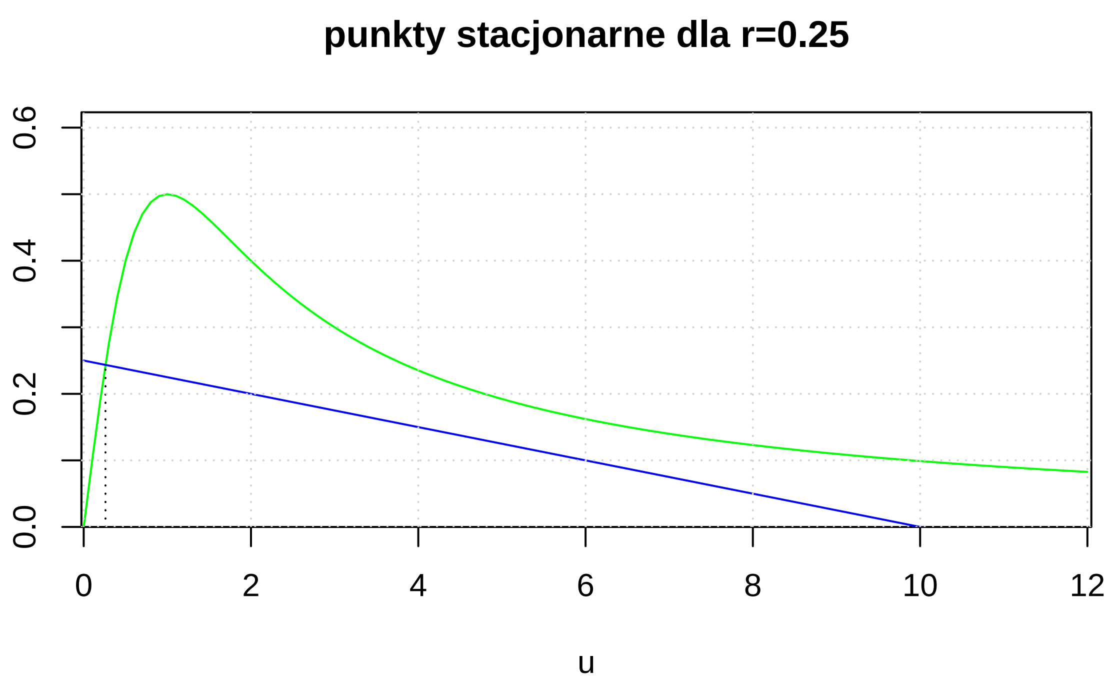
Przeanalizuję przebieg rozwiązań równania w zależności od parametrów r i q. Najpierw należy znaleźć stany stacjonarne, czyli rozwiązać równanie:

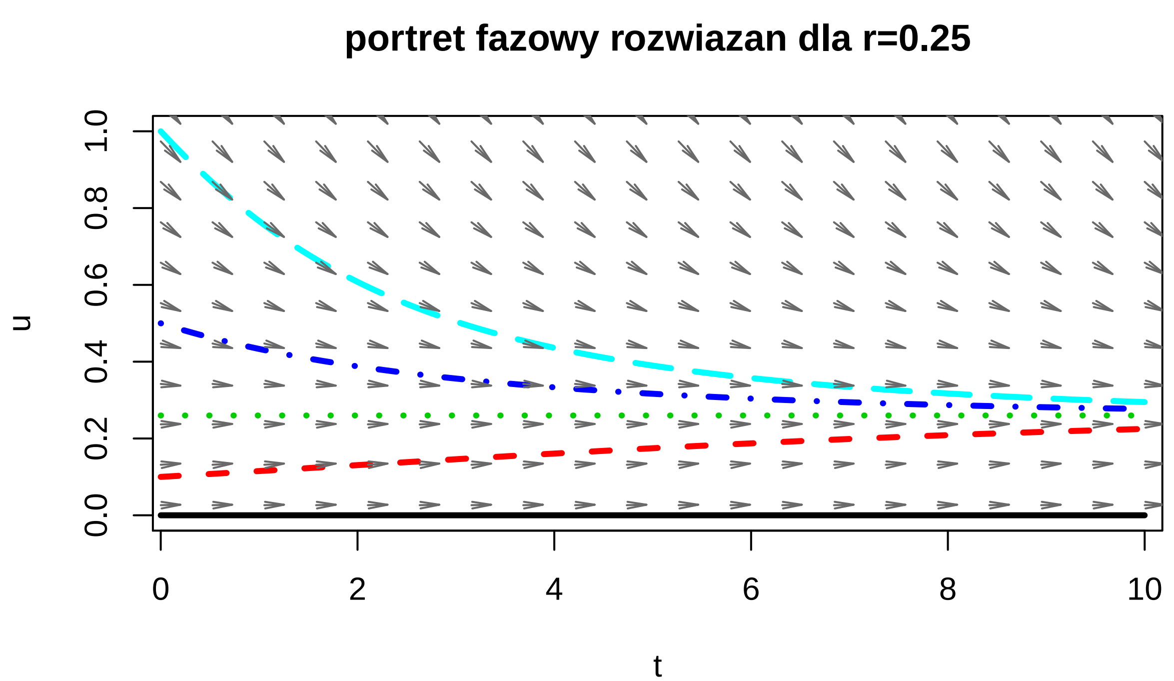
$ru(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2} = 0$

$u(r(\frac{1-u}{q}) - \frac{u}{1+u^2}) = 0$

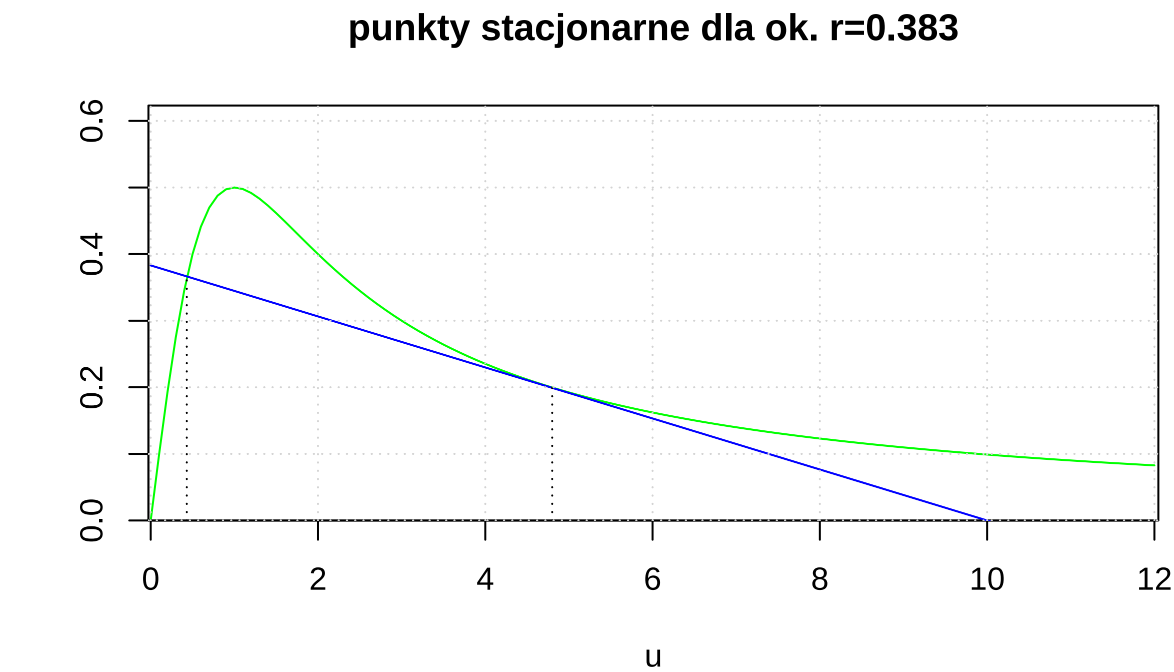
Widać od razu, że jednym z rozwiązań jest $u = 0$. Aby znaleźć pozostałe punkty stacjonarne należy rozwiązać równanie $r(1 - \frac{u}{q}) = \frac{u}{1+u^2}$, co najlepiej zrobić graficznie. Ustalę pewne q i będę manipulować parametrem r, ponieważ r związay jest z przyrostem naturalnym, na co łatwiej jest w rzeczywistości wpływać niż na pojemność środowiska, z którą związane jest q. Niech q=10, szukamy punktów stacjonarnych innych niż 0:

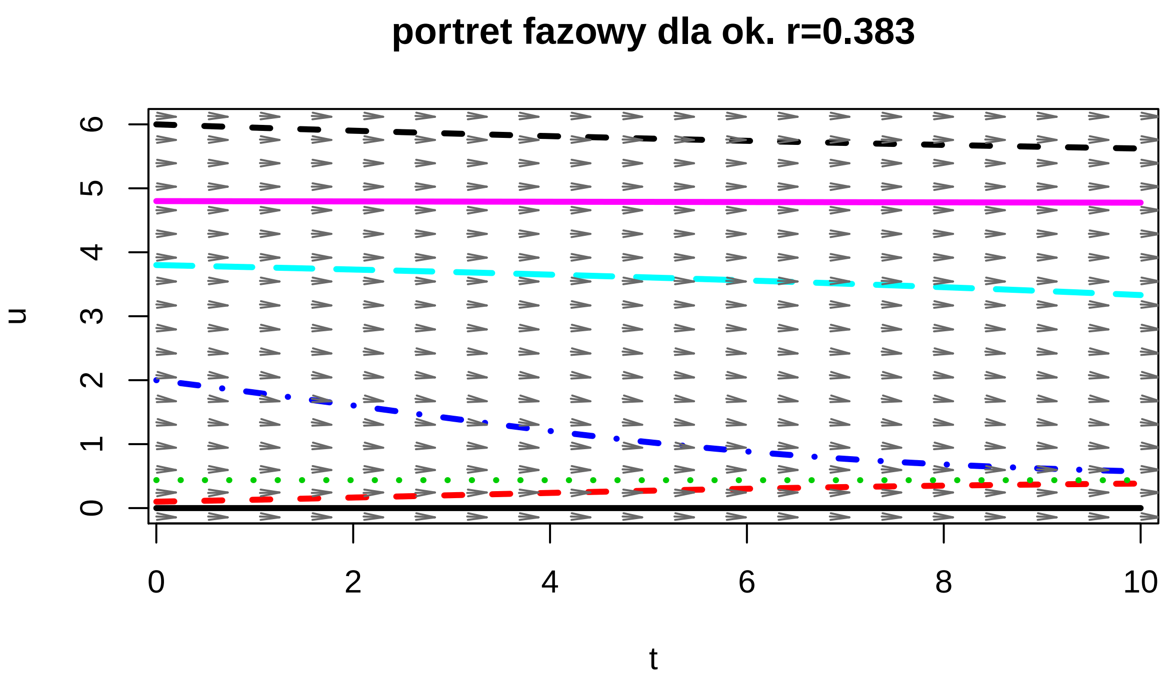
Na początku nasze r jest małe i wtedy mamy tylko jeden punkt stacjonarny:



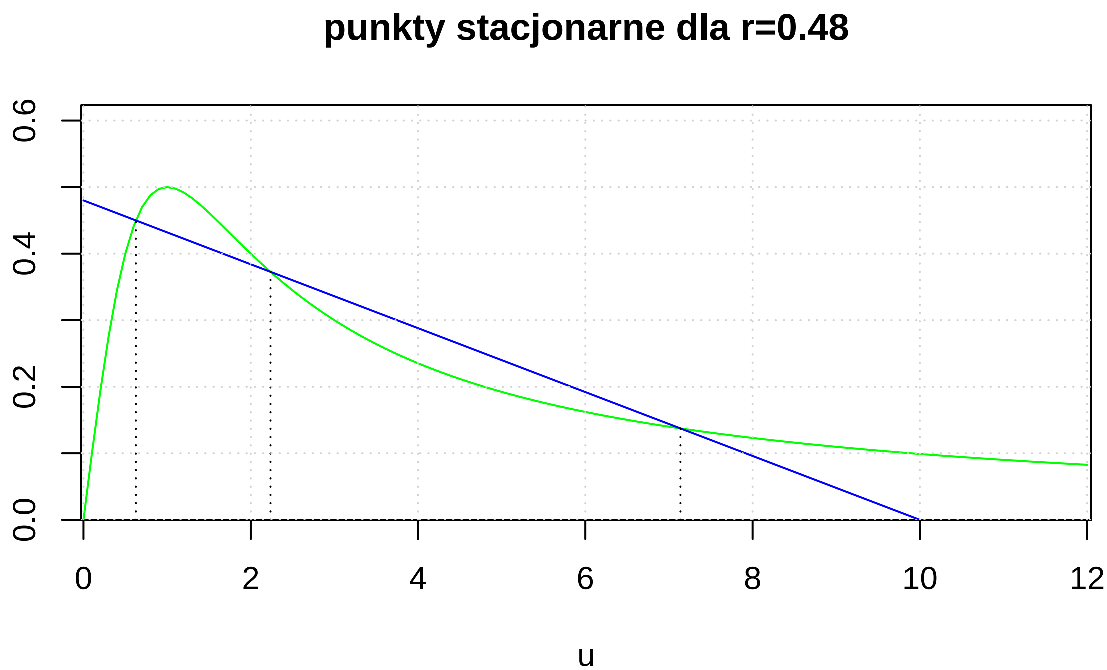


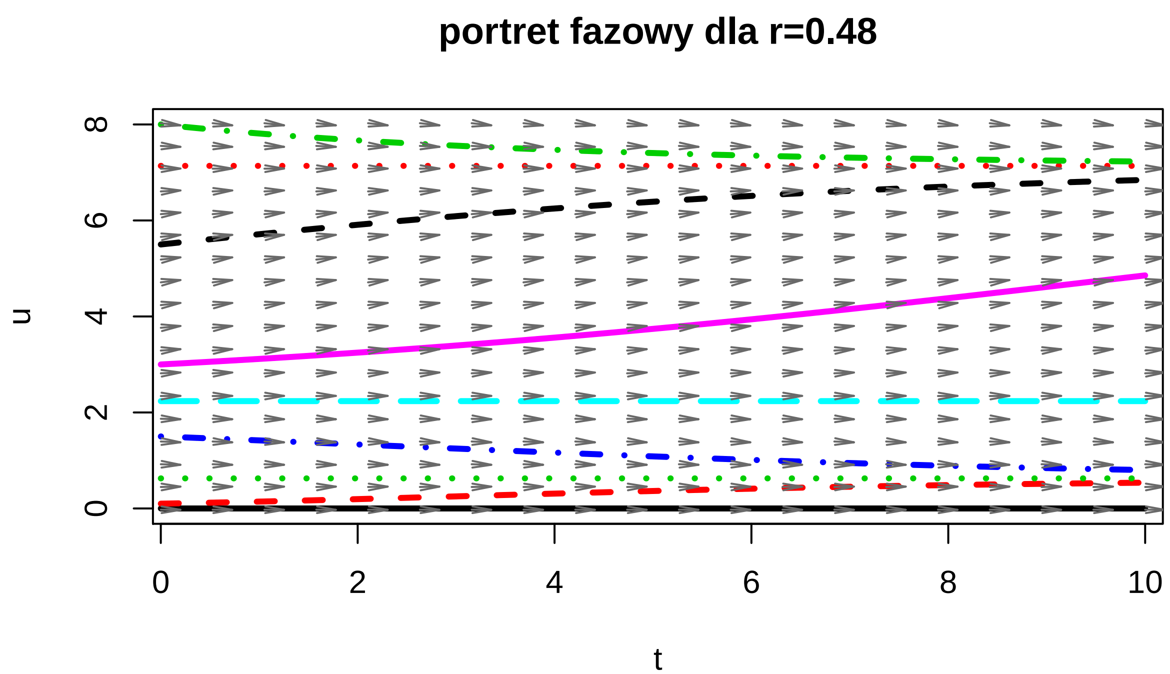
Zwiększamy r i pojawia się drugi punkt stacjonarny (jest to jednak sytuacja mało realistyczna w rzeczywistości):



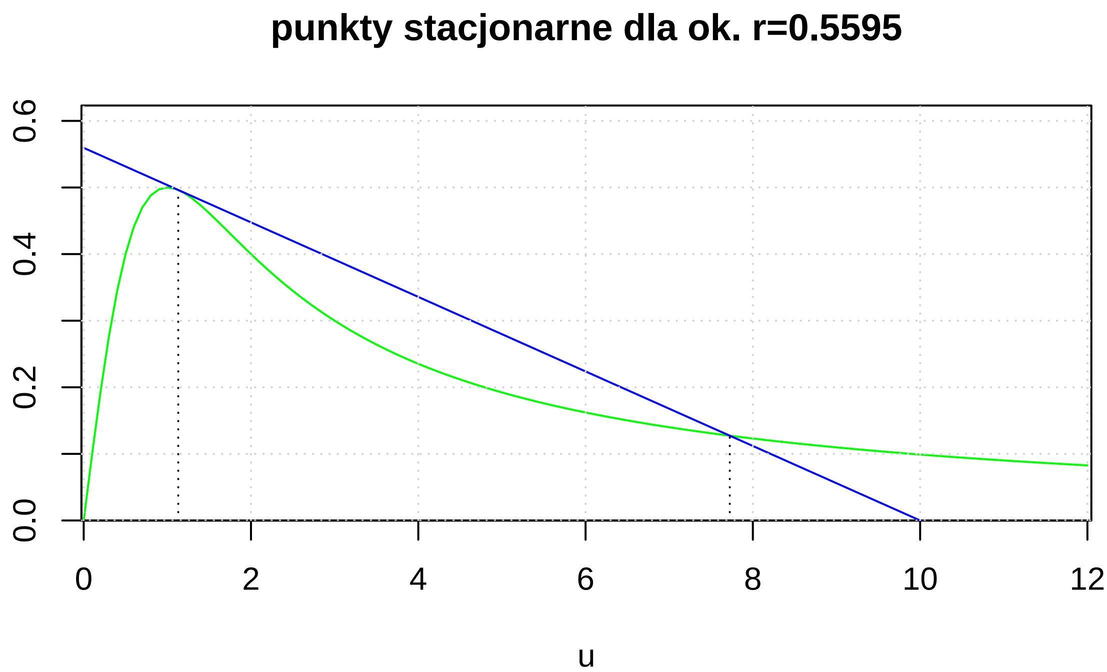


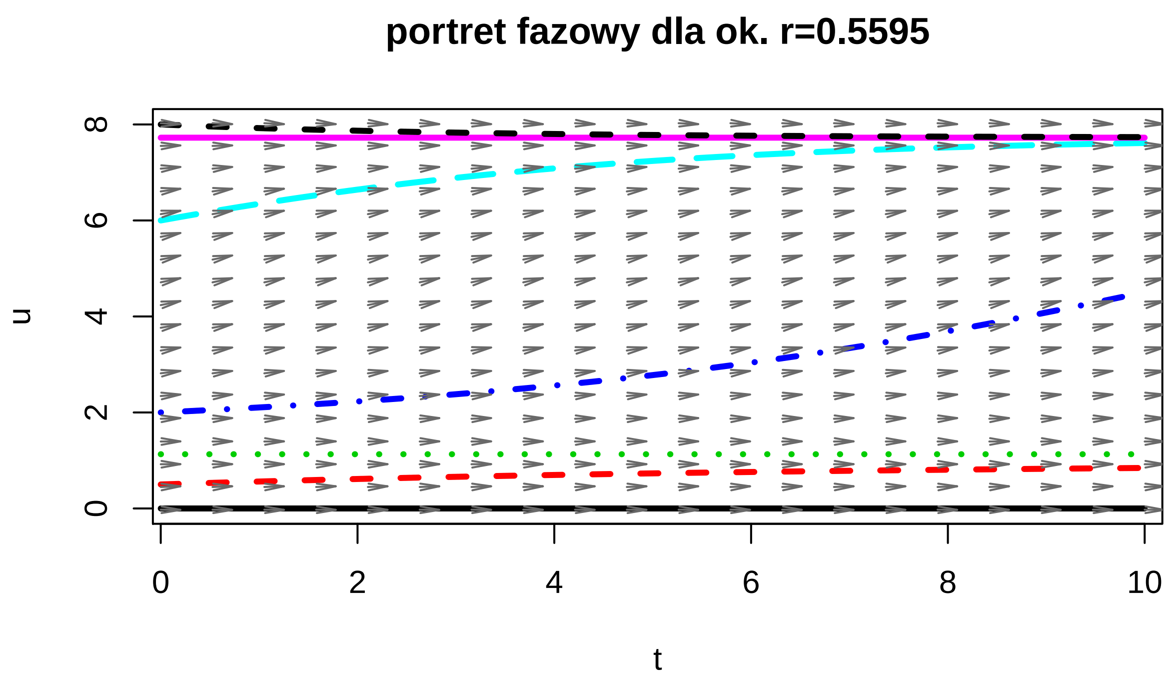
Jeśli dalej zwiększamy r pojawiają się 3 punkty stacjonarne:



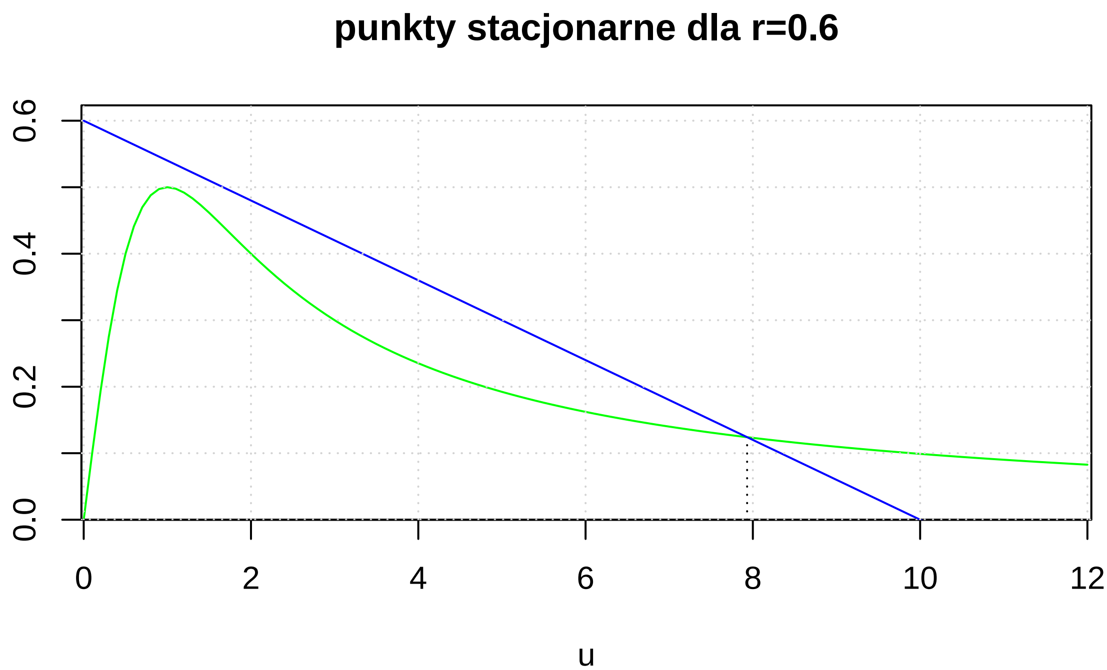


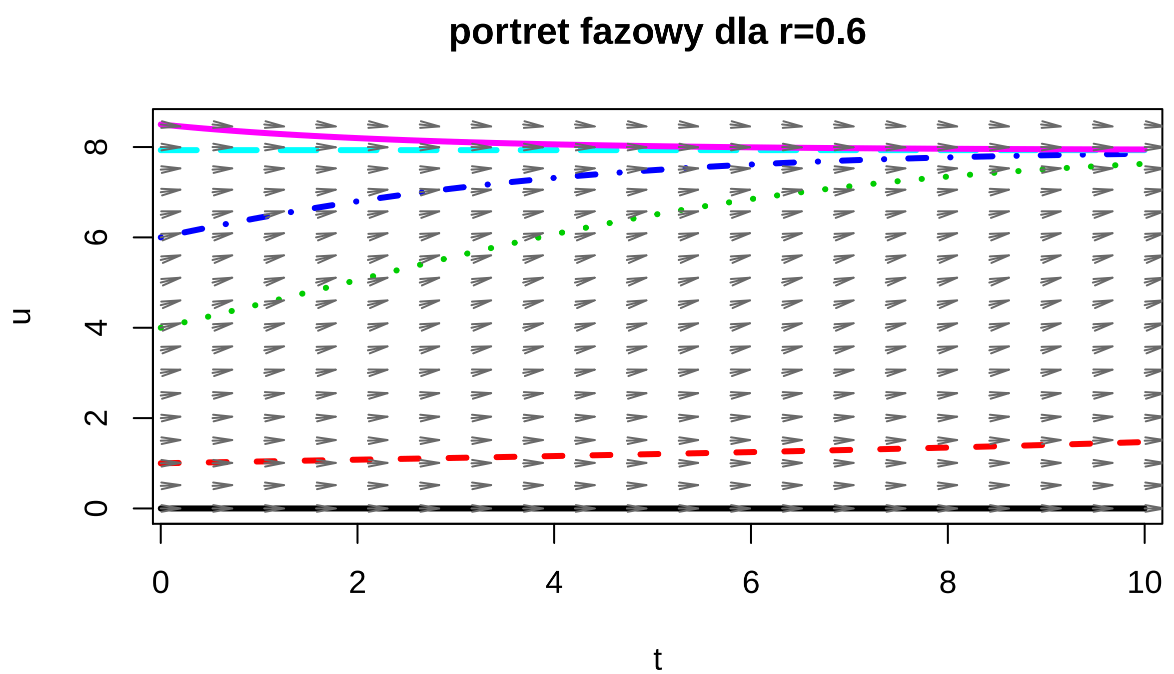
Zwiększając r dalej ponownie dochodzimy do miejsca gdzie mamy 2 punkty stacjonarne (i ponownie jest to sytuacja teoretycznie możliwa jednak niespotykana w życiu):





Gdy r jest już duże pozostaje tylko jedno miejsce stacjonarne i ze wzrostem r się to nie zmieni:





4 Analiza otrzymanych rozwiązań

Z powyższych rozwiązań widać, że jeśli r jest duże to populacja szybko dąży do wysokiej wartości, natomiast przy średnim r również tak się dzieje jeśli populacja przekroczy pewien poziom. Natomiast przy małym r populacja stabilizuje się na bezpiecznym, niskim poziomie i dlatego sposobem na powstrzymanie gwałtownych skoków populacji gąsienicy może być ograniczanie jej przyrostu naturalnego, np. poprzez opryski.

5 Referencje

Ludwig D, Jones DD, and Holling CS. Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest. J. Anim. Ecol., 47:315-332, 1978. https://www.jstor.org/stable/3939