

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka stosowana

Zuzanna Brzóška

Matematyczne modele fal

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Grzegorza Karcha

Wrocław 2021

Spis treści

1	Jednowymiarowe równanie fali	3
1.1	Konstruowanie rozwiązań z warunkami brzegowymi Dirichleta . . .	3
1.2	Metoda różnic skończonych dla równania fali	6
1.3	Symulacje numeryczne dla warunków Dirichleta	6
1.3.1	Struna uderzona z lewej strony	7
1.3.2	Struna o zadanym kształcie uderzona z lewej strony	7
1.3.3	Analiza zbieżności metod numerycznych	9
2	Równanie fali na kwadracie	11
2.1	Symulacje numeryczne dla warunków Dirichleta na kwadracie . . .	13
3	Dodatek matematyczny	14
3.1	Szeregi Fouriera	14
4	Dodatek programistyczny	15

1 Jednowymiarowe równanie fali

Rozważamy zagadnienie brzegowe dla równania fali:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x) \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) \end{cases}$$

na odcinku skończonym $0 < x < \ell$. Przeanalizujemy jego rozwiązania z jednorodnymi warunkami brzegowymi Dirichleta oznaczającymi, że końce struny są przymocowane. W powyższym zagadnieniu pierwsza linijka to równanie fali z pewną stałą c , a w drugiej linijce znajdują się warunki brzegowe, czyli zachowanie struny na końcach. Następnie mamy warunki początkowe informujące nas o zachowaniu całej struny w czasie $t = 0$: pierwszy warunek informuje nas o jej kształcie, a drugi o jej prędkości początkowej (sam kształt nie wystarczy, by stwierdzić, jak struna będzie się poruszać w czasie).

1.1 Konstruowanie rozwiązań z warunkami brzegowymi Dirichleta

Szukamy rozwiązania ogólnego dla zagadnienia (1), będącego kombinacją liniową rozwiązań szczególnych, które składają się z rozdzielonych zmiennych:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Podstawiając to rozwiązanie do równania fali i następnie dzieląc przez $c^2 XT$, otrzymujemy równanie

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Możemy zauważyć, że λ nie zależy ani od x , ani od t , zatem wnioskujemy, że jest stałą. Dzięki temu otrzymujemy dwa oddzielne liniowe równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu dla $X(x)$ i $T(t)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \text{ oraz } T''(t) - c^2 \lambda T(t) = 0.$$

Warunki brzegowe

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \Leftrightarrow X(0)T(t) = X(\ell)T(t) = 0$$

dają nam warunki $X(0) = 0 = X(\ell)$, ponieważ zakładamy, że funkcja $T(t)$ nie jest tożsamościowo równa 0, gdyż szukamy rozwiązań innych niż trywialne.

Łatwo możemy pokazać, że λ jest ujemne, ponieważ:

1. Jeśli $\lambda > 0$ to mamy rozwiązanie $X(x)$ dane wzorem $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$, gdzie A, B to stałe. Warunki $X(0) = 0 = X(\ell)$ implikują wtedy $A = B = 0$, a oczywiście nie interesują nas trywialne rozwiązania $X(x) \equiv 0$.

2. Jeśli $\lambda = 0$ to rozwiązanie $X(x)$ dane jest wzorem $X(x) = Ax + B$ i podobnie jak poprzednio z warunków $X(0) = 0 = X(\ell)$ otrzymujemy $A = B = 0$ czyli rozwiązania tylko trywialne.

Skoro wiemy, że $\lambda < 0$, to możemy przyjąć $\lambda = -\beta^2$ i $\beta > 0$. Wtedy możemy zapisać rozwiązania $X(x)$ i $T(t)$:

$$X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$$

oraz

$$T(t) = C \cos(\beta ct) + D \sin(\beta ct).$$

Mamy już rozwiązanie ogólne równania fali. Uwzględniając warunki brzegowe, otrzymujemy

$$0 = X(0) = A \text{ i } 0 = X(\ell) = B \sin(\beta \ell).$$

Skoro nie interesuje nas oczywiste rozwiązanie $X(x) \equiv 0$, musimy mieć więc $\beta \ell = n\pi$, stąd mamy wartości własne $\lambda_n = (\frac{n\pi}{\ell})^2$ i rozwiązania $X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ oraz $T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell}$.

Otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań zagadnienia dla naturalnych n :

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

gdzie A_n, B_n są pewnymi stałymi. Są to właśnie rozwiązania szczególne, których kombinacje liniowe dają nam rozwiązanie ogólne:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (1.1)$$

Trzeba jeszcze zastanowić się, kiedy funkcja takiej postaci będzie spełniać warunki początkowe. Wyglądają one wówczas następująco:

$$\Phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

oraz

$$\Psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Stąd możemy wyznaczyć odpowiednie współczynniki A_n i B_n :

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n c} \int_0^{\ell} \Psi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx.$$

Skonstruowaliśmy rozwiązanie równania fali. Pozostaje jedynie sprawdzić, czy znaleziony przez nas szereg (1.1) rzeczywiście jest zbieżny do naszego rozwiązania. W tym celu udowodnimy poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli*

$$\begin{cases} \Phi, \Psi \in C^2([0, \ell]) \\ \Phi(0) = \Psi(0) = 0 \\ \Phi(\ell) = \Psi(\ell) = 0 \end{cases}$$

to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n c} \int_0^{\ell} \Psi(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx,$$

zbiega jednostajnie na zbiorze $[0, \ell] \times [0, \infty)$.

Dowód. Korzystamy z nierówności trójkąta i dochodzimy do nierówności:

$$\begin{aligned} \left| \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right| &\leq |A_n| \left| \cos \frac{n\pi ct}{\ell} \right| + \left| B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right| \left| \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right| \\ \left| \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right| &\leq |A_n| + |B_n|. \end{aligned}$$

Patrzymy najpierw na pierwszy składnik powyższego ograniczenia:

$$|A_n| = \left| \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx \right|.$$

Korzystając z całkowania przez części oraz założeń $\Phi(0) = \Phi(\ell) = 0$ przekształcamy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \Phi(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx &= \left(-\Phi(x) \frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{\pi nx}{\ell} \right)_0^{\ell} + \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} \Phi'(x) \cos \frac{\pi nx}{\ell} dx = & \text{top} \\ &= \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} \Phi'(x) \cos \frac{\pi nx}{\ell} dx = \\ &= \frac{\ell}{n\pi} \left(\Phi'(x) \frac{\ell}{n\pi} \sin \pi nx \Big|_0^{\ell} - \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} \Phi''(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx \right) = \\ &= -\frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \int_0^{\ell} \Phi''(x) \sin \frac{\pi nx}{\ell} dx. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy ograniczenie

$$\begin{aligned} |A_n| &= \frac{2}{\ell} \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \left| \int_0^\ell \Phi'' \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx \right| \\ |A_n| &\leq \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \int_0^\ell |\Phi''(x)| \left| \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right| dx \\ |A_n| &\leq \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \int_0^\ell |\Phi''(x)| dx. \end{aligned}$$

Dzięki założeniu $\Phi \in C^2(0, \ell)$ wiemy, że istnieje pewna stała M , taka że

$$\int_0^\ell |\Phi''(x)| dx \leq M,$$

a to doprowadza nas do wniosku

$$|A_n| \leq \frac{2M\ell}{n^2 \pi^2}.$$

Analogicznie możemy dojść do wniosku

$$|B_n| \leq \frac{2K\ell^2}{n^3 \pi^3 c}$$

dla pewnej stałej K ograniczającej całkę z $\Psi''(x)$. Dostajemy zatem

$$\left| \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right| \leq \frac{2M\ell}{n^2 \pi^2} + \frac{2K\ell^2}{n^3 \pi^3 c}.$$

Naturalnie szereg $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2M\ell}{n^2 \pi^2} + \frac{2K\ell^2}{n^3 \pi^3 c} \right)$ jest zbieżny, tak więc z kryterium Weierstrassa o majoryzacji otrzymujemy zbieżność naszego skonstruowanego szeregu będącego rozwiązaniem równania fali. \square

1.2 Metoda różnic skończonych dla równania fali

1.3 Symulacje numeryczne dla warunków Dirichleta

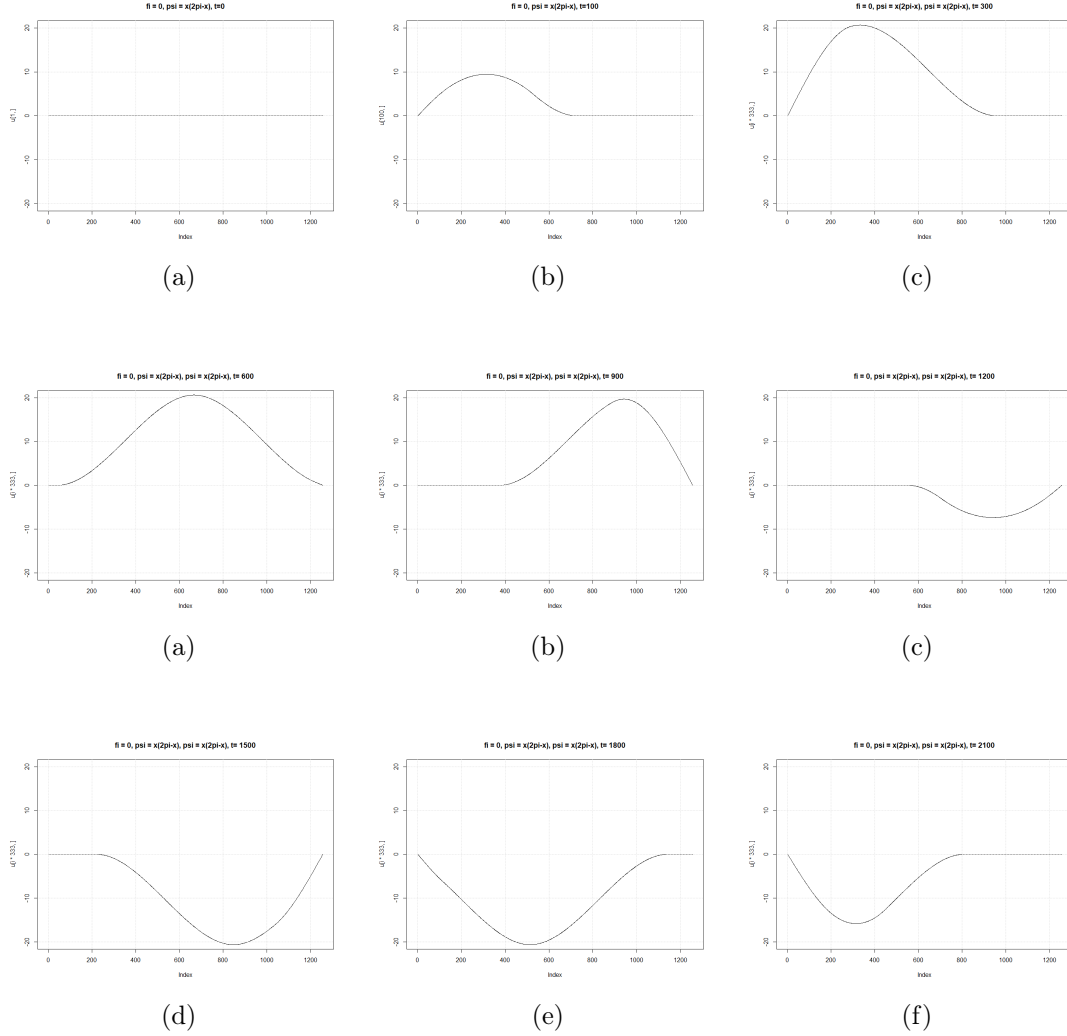
Poniżej znajdują się symulacje rozwiązania zagadnienia brzegowego równania fali

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x) \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) \end{cases}$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi Dirichleta. Symulacje wykonane są dwiema metodami: metodą różnic skończonych, do której nie jest potrzebne rozwiązanie danego równania, tylko jego postać; oraz z użyciem wyznaczonych wcześniej w tej pracy rozwiązań równania danych szeregiem Fouriera, obcięty do 100 pierwszych wyrazów. Symulacje przeprowadzone są dla różnych warunków początkowych:

1.3.1 Struna uderzona z lewej strony

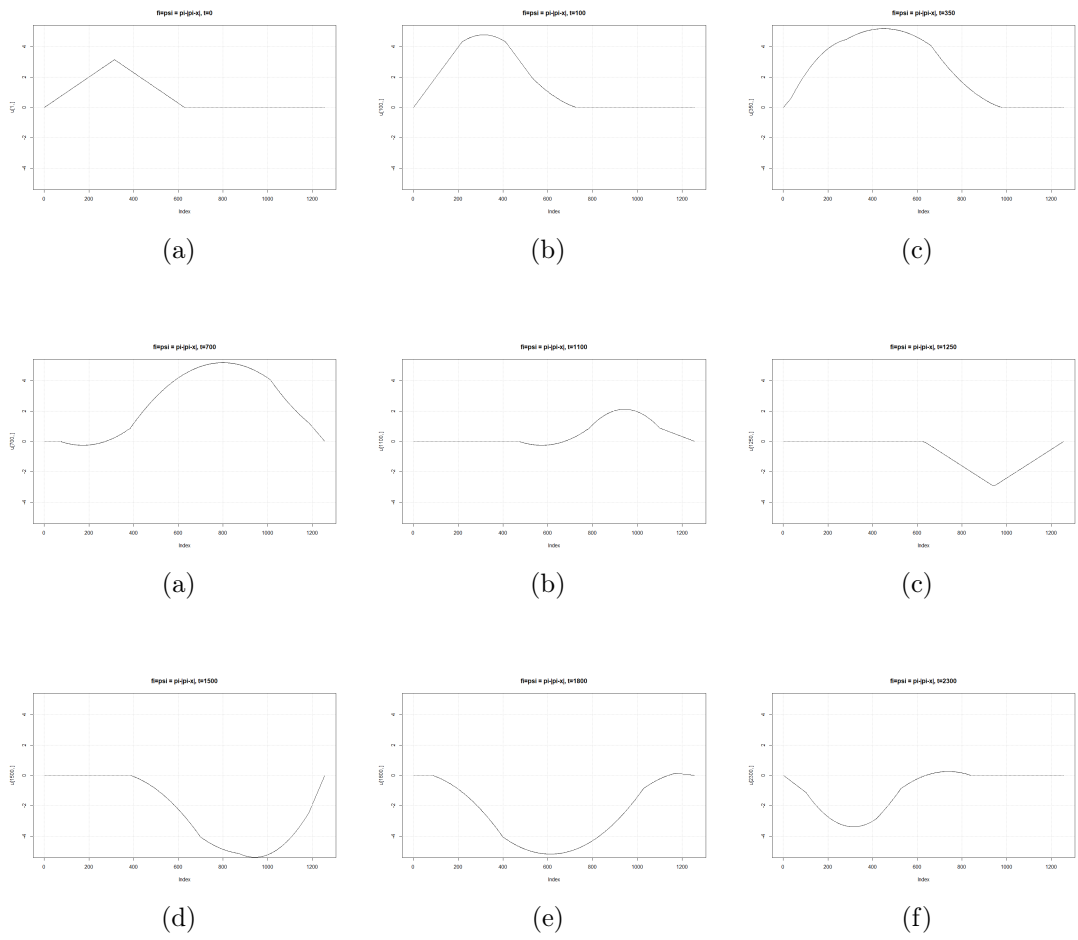
Symulacje dla $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x) = \begin{cases} (2\pi - x), & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & x \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$



Rysunek 2: Fig. 1

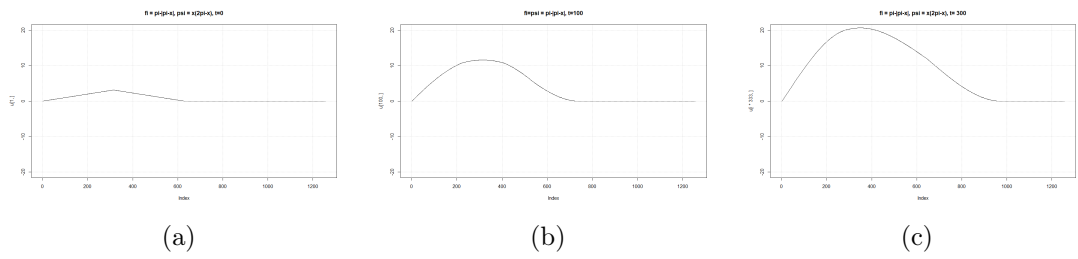
1.3.2 Struna o zadanym kształcie uderzona z lewej strony

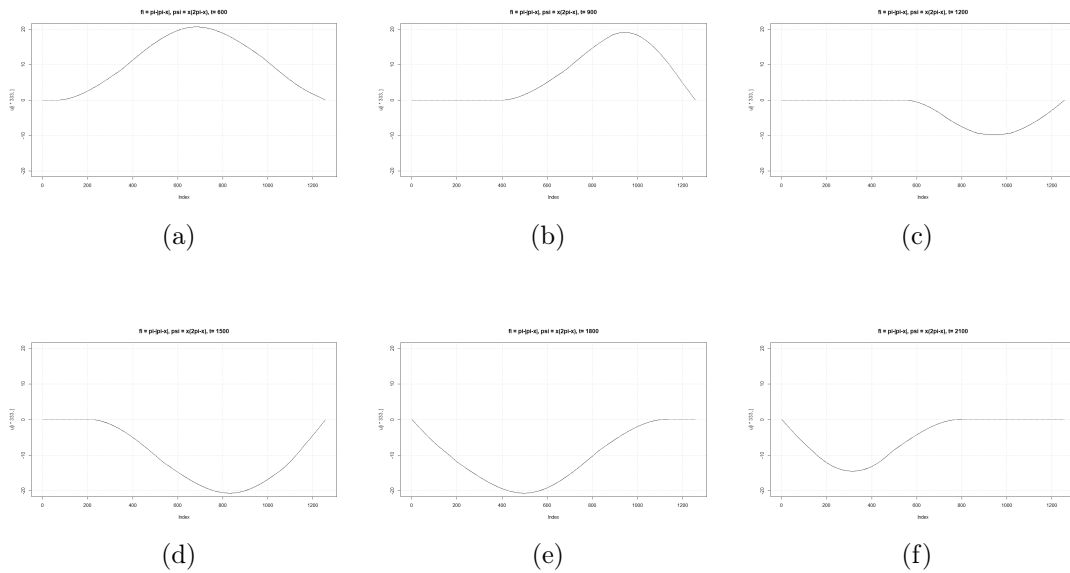
Symulacje dla $\Phi(x) = \Psi(x) = \pi - |x - \pi|$



Rysunek 4: Fig. 2

Symulacje dla $\Phi(x) = \pi - |x - \pi|$, $\Psi(x) = x(2\pi - x)$

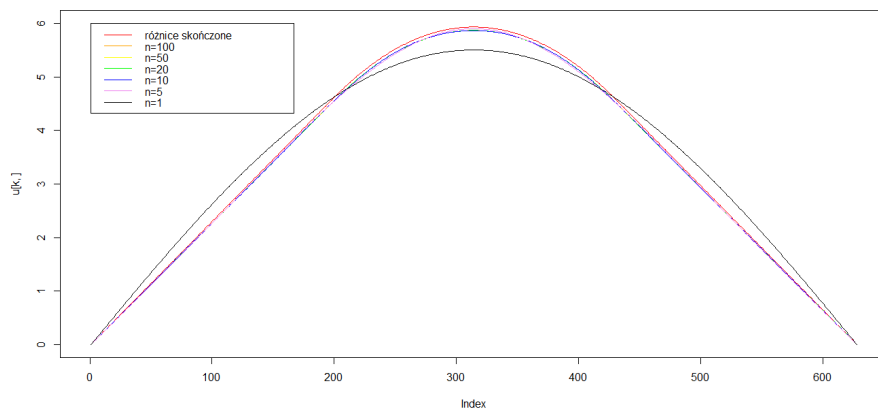




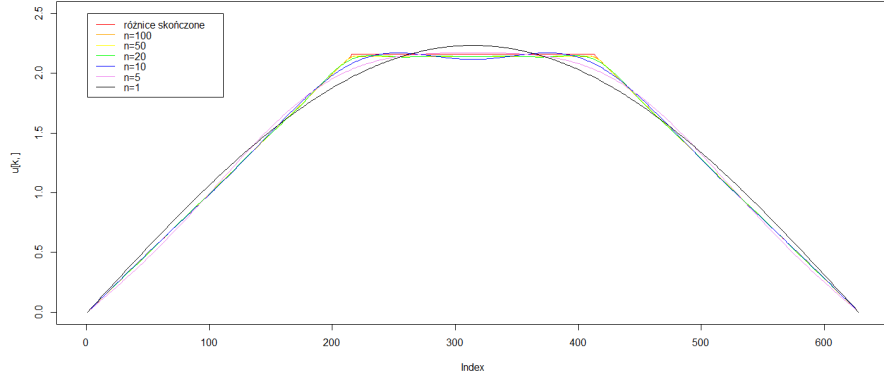
Rysunek 6: Fig. 3

Powyższe symulacje zostały wykonane metodą różnic skończonych oraz szeregiem Fouriera dla $n = 100$, dla takiego n różnica między tymi metodami jest niemal niezauważalna. Można zastanowić się, jakie n wystarczy, by wykresy były tak dokładne (oczywiście dla naszych wybranych funkcji).

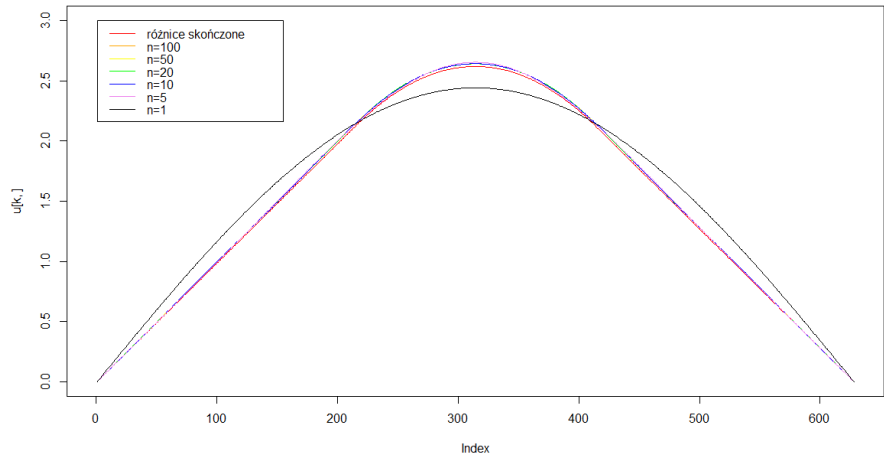
1.3.3 Analiza zbieżności metod numerycznych



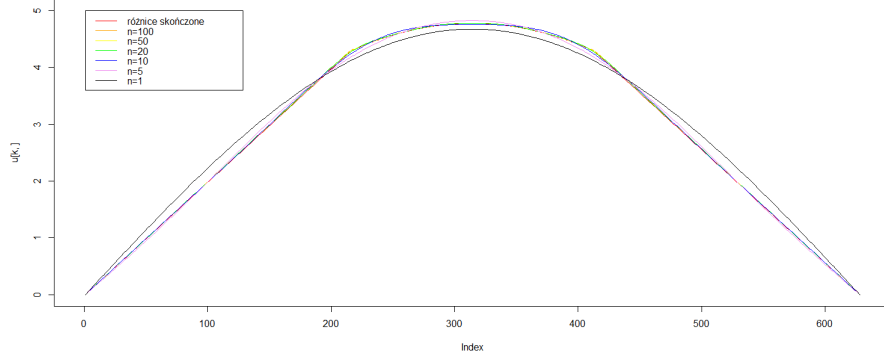
(a) $\Phi = x(2\pi - x)$, $\Phi = 0$, $t = 200$



(a) $\Phi = \pi - |\pi - x|, \Phi = 0, t = 100$



(b) $\Phi = 0, \Phi = \pi - |\pi - x|, t = 100$



(c) $\Phi = \Phi = \pi - |\pi - x|, t = 100$

Rysunek 8: Fig. 4

2 Równanie fali na kwadracie

Rozważę dwuwymiarowe jednorodne równanie fali

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

na kwadracie o brzegu długości L , z jednorodnymi warunkami brzegowymi Dirichleta $u(0, y, t) = u(L, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, L, t) = 0$.

Szukając rozwiązań dwuwymiarowego równania fali postępujemy analogicznie jak w wypadku jednowymiarowym – szukamy rozwiązań postaci: $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Podstawiając to rozwiązanie do równania fali, otrzymujemy równanie $XYT'' = c^2(X''YT + XY''T)$, następnie dzielimy je przez c^2XYT i dostajemy równanie $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = c^2\frac{T''}{T}$. Podobnie jak w przypadku równania jednowymiarowego, możemy wywnioskować, że skoro prawa strona zależy tylko od czasu, a lewa strona zależy tylko od zmiennych przestrzennych, obie strony równania muszą być równe stałej. Kontynuując ten proces, pokazujemy, że oba wyrazy po lewej stronie również są stałymi.

Dla pewnych stałych a , b i λ mamy więc do rozwiązania równania różniczkowe zwyczajne $\frac{X''}{X} = -a^2$, $\frac{Y''}{Y} = -b^2$ oraz $\frac{T''}{T} = -\lambda^2$ (gdzie $a^2 + b^2 = c^2\lambda^2$), dla których można łatwo znaleźć rozwiązania:

$$T(t) = C \cos(\lambda t) + D \sin(\lambda t),$$

$$X(x) = E \cos(ax) + F \sin(ax),$$

$$Y(y) = G \cos(by) + H \sin(by).$$

Warunki brzegowe $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = 0$ dają nam, że $E = G = 0$. Natomiast warunki brzegowe $u(L, y, t) = u(x, L, t) = 0$ dają $\sin(aL) = 0$ i $\sin(bL) = 0$, zatem $a = \frac{p\pi}{L}$ i $b = \frac{q\pi}{L}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}$. Podstawiając rozwiązania tych równań zwyczajnych do naszego równania $u = XYT$, otrzymujemy

$$u(x, y, t) = (C \cos(\lambda t) + D \sin(\lambda t)) \left(F \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \right) \left(H \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) \right),$$

co możemy uprościć, zapisując stałe jako $A = CFH$ oraz $B = DFH$. Równanie przyjmie wtedy postać:

$$u(x, y, t) = (A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t)) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right).$$

Znowu, podobnie jak w przypadku struny, rozwiązaniem ogólnym jest kombinacja liniowa rozwiązań szczególnych, czyli suma po wszystkich możliwych wartościach p i q . Ostateczne rozwiązanie jest wobec tego postaci

$$u(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (A_{pq} \cos(\lambda_{pq} t) + B_{pq} \sin(\lambda_{pq} t)) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right).$$

Stałą λ możemy policzyć, ponieważ $\lambda = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{(p^2+q^2)}{L^2}}$, natomiast A_{pq}, B_{pq} możemy policzyć, używając warunków początkowych równania fali $u(x, y, 0)$ oraz $u_t(x, y, 0)$. Do tego użyjemy ortogonalności funkcji sinusa, tzn.

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \mathbb{1}_{m,n} = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Najpierw używając warunku brzegowego $u(x, y, 0)$ zapisujemy całkę

$$I = \int_0^L \left(\int_0^L u(x, y, 0) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) dy.$$

Podstawiamy do powyższego wzoru rozwiązanie ogólne, wstawiając 0 za t , i otrzymujemy w konsekwencji całkę (całki i sumy możemy poprzestawiać miejscami dzięki ich zbieżności):

$$I = \sum_{q'=1}^{\infty} \int_0^L \left(\sum_{p'=1}^{\infty} A_{p'q'} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{p'\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{q'\pi y}{L}\right) dy.$$

Korzystając dwukrotnie ze wspomnianej wcześniej ortogonalności sinusa skracamy równanie:

$$I = \sum_{q'=1}^{\infty} \int_0^L \sum_{p'=1}^{\infty} A_{p'q'} \frac{L}{2} \mathbb{1}_{p,p'} \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{q'\pi y}{L}\right) dy,$$

$$I = \frac{L}{2} \sum_{q'=1}^{\infty} \int_0^L A_{pq'} \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{q'\pi y}{L}\right) dy,$$

$$I = \frac{L}{2} \sum_{q'=1}^{\infty} A_{pq'} \frac{L}{2} \mathbb{1}_{q,q'} = \frac{L^2}{4} A_{pq}.$$

Stąd, łącząc powyższe równanie z tym, gdzie użyty był warunek początkowy, otrzymujemy ostatecznie wzór na A_{pq} :

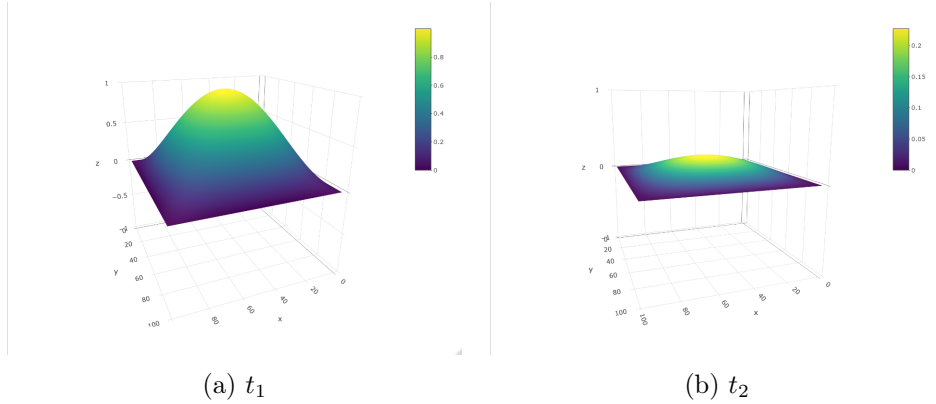
$$A_{pq} = \frac{4}{L^2} \int_0^L \left(\int_0^L u(x, y, 0) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) dy.$$

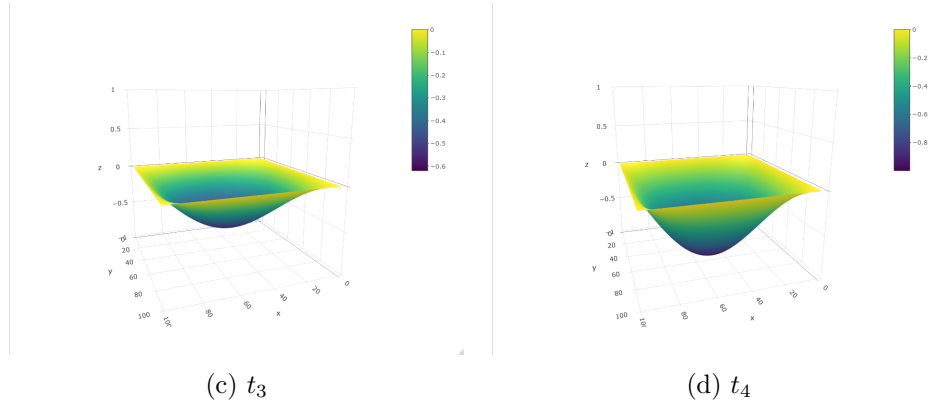
Przeprowadzając zupełnie analogiczne rozumowanie dla warunku początkowego $u_t(x, y, 0)$, możemy wyznaczyć B_{pq} wzorem

$$B_{pq} = \frac{4}{\lambda_{pq} L^2} \int_0^L \left(\int_0^L u_t(x, y, 0) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{q\pi y}{L}\right) dy.$$

2.1 Symulacje numeryczne dla warunków Dirichleta na kwadracie

Poniżej znajduje się symulacja rozwiązania równania fali na kwadracie jednostkowym z jednorodnymi warunkami Dirichleta, dla równania szczególnego $p = q = 1$ oraz gdzie $c = 1$, a $u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ i $u_t(x, y, 0) = 0$:





Rysunek 9: Rozwiązanie równania fali na kwadracie dla kolejnych kroków czasowych (t)

3 Dodatek matematyczny

3.1 Szeregi Fouriera

W rozdziale 1 szukaliśmy rozwiązań równania fali i wyznaczaliśmy współczynniki szeregów Fouriera, które były naszymi rozwiązaniami. Teraz pokażemy skąd wzięły się wzory na te współczynniki. Wszystkie poniższe twierdzenia dowodzone są w Strauss, *Partial Differential Equations. An Introduction*, rozdział 5.

Twierdzenie 3.1. Niech $\Phi(x) \in C([0, \ell])$, taka że $\Phi(0) = \Phi(\ell) = 0$. Wówczas szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\Phi(x)$ na $[0, \ell]$.

Twierdzenie 3.2. Niech $\Phi(x) \in C([0, \ell])$, taka że $\Phi(0) = \Phi(\ell) = 0$. Wówczas szereg postaci

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\Phi(x)$ na $[0, \ell]$.

Twierdzenie 3.3. Niech $\Phi \in C^2([0, \ell])$, taka że $\Phi(0) = \Phi(\ell) = 0$. Wtedy szereg postaci

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right),$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \Phi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\Phi(x)$ określonej na $[0, \ell]$.

Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do przedstawionego wcześniej dowodu twierdzenia 1.1.

Twierdzenie 3.4. Szereg Fouriera

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

jest zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$ na odcinku (a, b) , jeżeli $f(x)$ jest ciągła na tym oraz ma kawałkami ciągłą pochodną na tym odcinku.

Dowód powyższego twierdzenia znaleźć można w Fernández, “Convergence and Divergence of Fourier Series”.

Twierdzenie 3.5. Szereg Fouriera

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$ na odcinku $[a, b]$, jeżeli $f \in C^2[a, b]$ oraz funkcja $f(x)$ spełnia zadane warunki brzegowe.

4 Dodatek programistyczny

[language=R]

Bibliografia

- [1] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations. An Introduction*. 2007.
- [2] Miguel García Fernández. “Convergence and Divergence of Fourier Series”. Prac. mag. University of Barcelona, 2018.