Sprawozdanie - laboratorium 1

Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Zuzanna Grzesik, 25.02.2020

1 Wstęp teoretyczny

Na laboratorium zajęliśmy się tematem układów algebraicznych równań liniowych i rozwiązywaniu ich metodami bezpośrednimi. Układy równań liniowych możemy zapisać również w postaci macierzowej, a dzięki tej postaci możemy skorzystać z innych metod rozwiązywania układu, np. metody Gaussa-Jordana.

1.1 Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana służy do odwracania macierzy oraz rozwiązywania układów równań z wieloma niewiadomymi.

Układ równań należy zapisać w formie trzech macierzy: pierwsza z nich zawiera współczynniki przy niewiadomych w równaniu, druga zapisane niewiadome, a trzecia stałe.

Przykładowy układ równań:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

Układ zapisany w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dla wyznacznika poniżej, który powstał z macierzy rozszerzonej powstałej z pierwszej i trzeciej macierzy, będziemy dokonywać przekształceń, by otrzymać wyznacznik macierzy jednostkowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right] \tag{3}$$

Po przekształceniach otrzymujemy wyznacznik takiej postaci:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & e_3 \end{array}\right] \tag{4}$$

Rozwiązanie układu równań wygląda następująco:

$$\begin{cases} x_1 = e_1 \\ x_2 = e_2 \\ x_3 = e_3 \end{cases} \tag{5}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Źródłem UARL mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy następującą zależność:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{6}$$

Gdy przybliżymy drugą pochodną położenia x w chwili t ilorazem różnicowym otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}. \tag{7}$$

Wprowadzamy oznaczenia $\Delta t = h$, x_i=*x(ih)* i dzięki temu otrzymujemy z równania (1) iteracyjną zależność, która pozwoli nam na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{8}$$

By móc rozwiązać równanie, potrzebujemy jeszcze informacji o wartościach x_0 i x_1 . Dają je warunki początkowe: $x_0 = A$ jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, zaś iloraz $(x_1$-$x_1)/h = v_0$ informuje oo początkowej wartości prędkości ciała.

Równanie (2) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

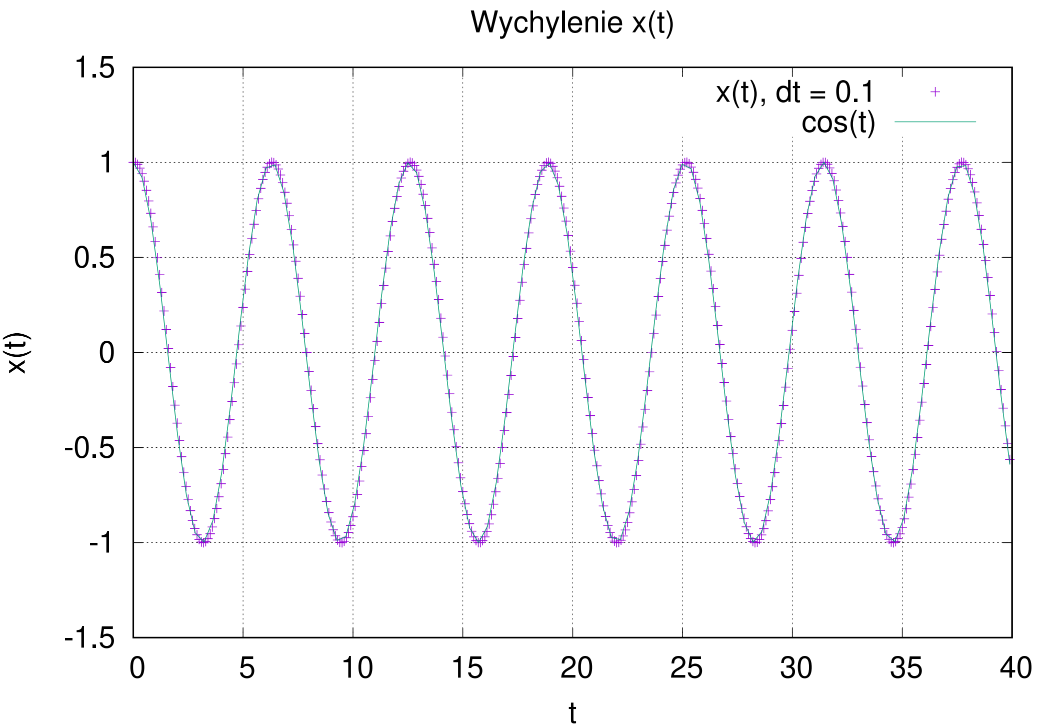
Naszym zadaniem było rozwiązać układ metodą Gaussa-Jordana oraz narysować zależność wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań. Przyjęte warunki: k/m=1, warunki początkowe $v_0 = 0$, $A = 1$ oraz krok całkowania $h = 0.1$

2.2 Wyniki

Skorzystaliśmy z procedury gaussj.c, która służy do rozwiązywania układów równań liniowych metodą Gaussa-Jordana. Zadeklarowaliśmy odpowiednio duży rozmiar macierzy, przekazaliśmy do niej dane z zadania i w wyniku otrzymaliśmy zależności wychylenia od czasu dla kroku czasowego równego 0.1 s. Przedstawiliśmy je na wykresie razem ze znanymi nam już zależnościami analitycznymi

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{10}$$

Dla naszych warunków początkowych $A = 1$ oraz $\omega = 1$ daje to *x(t)=cos(t)*



Rysunek 1: Obliczona numerycznie zależność wychylenia od czasu oraz wykres funkcji cos (t)

Jak widać dane obliczone numerycznie i wykres funkcji cos t pokrywają się ze sobą.

3 Wnioski

Korzystając z metody Gaussa-Jordana i procedury gaussj.c możemy z dużą dokładnością rozwiązać równanie liniowie, o czym świadczy wykres z wynikami obliczonymi numerycznie porównanymi z wynikami analitycznymi. Metoda ta jest dodatkowo wydajna i może wykonywać obliczenia również dla dużych macierzy, jak np. ta z treści zadania.