

# SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM 5

## Diagonalizacja macierzy metodą potęgową z wykorzystaniem Redukcji Hotellinga

Zuzanna Grzesik

1 kwietnia 2020

### 1 Wstęp teoretyczny [1]

#### 1.1 Metoda potęgowa wyznaczania pojedynczych wartości własnych i wektorów własnych

Załóżmy, że istnieje  $n$  liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy  $\mathbf{A}$ , stanowią bazę przestrzeni liniowej, oznaczanych dalej jako  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ . Wówczas dla dowolnego wektora  $\mathbf{v}_0$  zachodzi równość:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i. \quad (1)$$

Jeśli  $\lambda_i$  stanowią wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$ , to:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i, \quad (3)$$

gdzie zakładamy, że wartości własne tworzą ciąg  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Jeśli  $\lambda_1$  jest dominującą wartością własną (tzn., że zachodzi zależność, że  $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1$  dla  $j \neq 1$ ) oraz  $\mathbf{v}_0$  ma składową w kierunku  $\mathbf{x}_1$  to wówczas zachodzi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}^m \mathbf{v}_0}{\lambda_1^m} = a_1 \mathbf{x}_1. \quad (4)$$

Korzystając z zależności z równania (3) możemy wyliczać wartość własną w następujący sposób:

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{v}_{m+1}}{\mathbf{y}^T \mathbf{v}_m}, \quad (5)$$

dla dowolnego wektora  $\mathbf{y}$  nieortogonalnego do  $\mathbf{x}_1$ .

Wektory własne macierzy wyznacza się w następujący sposób.

$$\mathbf{v}_m \approx \lambda_1^m a_1 \mathbf{x}_1 \quad (6)$$

więc unormowany wektor własny będzie miał postać:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}_m}{|\mathbf{v}_m|} \quad (7)$$

Jeśli wartość własna jest pierwiastkiem wielokrotnym równania charakterystycznego to metoda jest zbieżna bo składnik z  $\lambda_1$  dominuje:

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{v}_0 = \lambda_1^m \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i^m a_i \mathbf{x}_i. \quad (8)$$

Powyższa metoda w tej postaci pozwala nam na wyznaczanie tylko pierwszych wartości wektorów własnych. By wyznaczyć kolejne należy skorzystać z jednej z trzech metod, jakimi są:

- metoda redukcji wektora,
- metoda zerowania składowej,
- metoda redukcji macierzy.

Metoda, którą należało zaimplementować z trakcie laboratoriów korzystała z ostatniej z wymienionych czyli redukcji macierzy.

## 1.2 Redukcja macierzy, redukcja Hotellinga

**Twierdzenie:** Jeżeli  $\lambda_1$  jest wartością własną macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{x}_1$  odpowiadającym jej wektorem własnym oraz dla dowolnego wektora  $\mathbf{v}$  o własności:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x}_1 = 1, \quad (9)$$

to wtedy macierz zredukowana:

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{v}^T \quad (10)$$

ma te same wartości co macierz  $\mathbf{A}$ , oprócz  $\lambda_1$ , która jest zerem.

W zadaniu obliczeń dokonywaliśmy na macierzy symetrycznej, dlatego korzystaliśmy z redukcji Hotellinga. W metodzie tej za wektor  $\mathbf{v}$  przyjmujemy lewy wektor własny przynależny do wartości własnej  $\lambda_1$ , jednak zwykle nie znamy ich, dlatego metoda skuteczna jest tylko w przypadku macierzy symetrycznych, gdzie lewe wektory są identyczne z prawymi. Wówczas, gdy  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1$

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T. \quad (11)$$

W postaci rekurencyjnej:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \mathbf{A} \\ \mathbf{W}_i &= \mathbf{W}_{i-1} - \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}^T \\ i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (12)$$

## 2 Zadanie do wykonania

### 2.1 Opis problemu

Głównym zadaniem w trakcie laboratoriów było dokonanie diagonalizacji macierzy  $\mathbf{A}$  korzystając z metody potęgowej. Macierz  $\mathbf{A}$  była postaci:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i - j|}} \quad (13)$$

dla  $i, j = 0, 1, \dots, n-1$ , dla  $n = 7$ .

Następnie należało zaimplementować algorytm służący do wyznaczania wartości wektorów własnych macierzy, metodą iteracyjną, korzystającą z rozkładu Hotellinga.

$$\begin{aligned} &W_0 = A \\ &for(k = 0; k < K_{val}; k++) \{ \\ &\quad \mathbf{x}_k^0 = [1, 1, \dots, 1] \quad (inicjalizacja wektora startowego) \\ &\quad for(i = 1; i \leq IT\_MAX; i++) \{ \\ &\quad\quad \mathbf{x}_k^{i+1} = W_k \mathbf{x}_k^i \\ &\quad\quad \lambda_k^i = \frac{(\mathbf{x}_k^{i+1})^T \mathbf{x}_k^i}{(\mathbf{x}_k^i)^T \mathbf{x}_k^i} \\ &\quad\quad \mathbf{x}_k^i = \frac{\mathbf{x}_k^{i+1}}{\|\mathbf{x}_k^{i+1}\|_2} \\ &\quad\quad \} \\ &\quad W_{k+1} = W_k - \lambda_k \mathbf{x}_k^i (\mathbf{x}_k^i)^T \quad (iloczyn tensorowy) \\ &\quad \} \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie  $k$  - numer wyznaczanej wartości własnej,  $i$  - numer iteracji dla określonego  $k$ ,  $A$  - macierz pierwotna,  $W_k$  - macierz iteracji,  $\lambda_k^i$  -  $i$ -te przybliżenie  $k$ -tego wektora własnego,  $\mathbf{x}_k^i$  -  $i$ -te przybliżenie  $k$ -tego wektora własnego,  $K_{val} = n$  - liczba wartości własnych do wyznaczania,  $IT\_MAX = 12$  - maksymalna liczba iteracji dla każdego  $k$ . Wyniki pośrednie obliczania wartości własnych należało zapisać do pliku. Na

potrzebę powyższego algorytmu stworzyłam następujące funkcje pomocnicze: mnożącą dwie macierze, obliczającą iloczyn skalarny dwóch wektorów, dokonującą transpozycji macierzy oraz obliczającą macierz iteracji.

Następnym zadaniem było wyznaczyć postać macierzy  $\mathbf{D}$  zdefiniowanej jako iloczyn  $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ .

Dla wszystkich obliczeń przyjąłam podwójną precyzję (typ `double`).

## 2.2 Wyniki

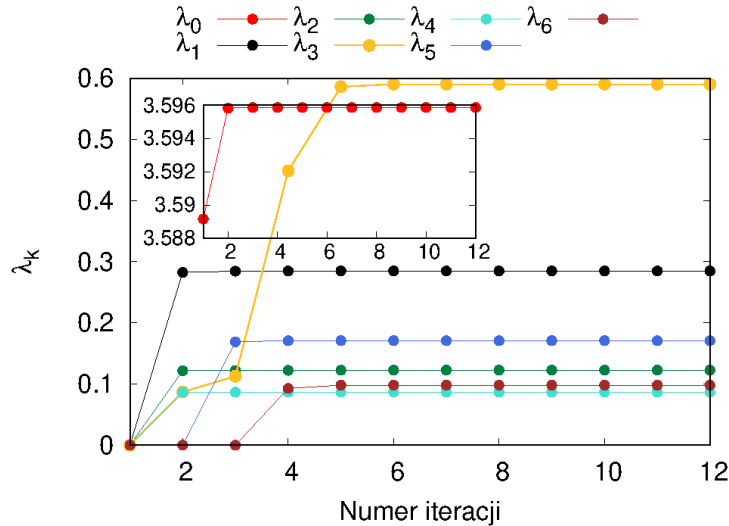
Obliczone w zadaniu wektory własne miały postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \begin{pmatrix} 0.352941 \\ 0.377935 \\ 0.392221 \\ 0.396889 \\ 0.392221 \\ 0.377935 \\ 0.352941 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0.477239 \\ 0.164774 \\ 0.314852 \\ 0.540298 \\ 0.314852 \\ 0.164774 \\ 0.477239 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 0.364007 \\ 0.461327 \\ 0.138849 \\ 0.518756 \\ 0.141987 \\ 0.466589 \\ 0.358362 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} -0.478726 \\ -0.447176 \\ -0.266515 \\ 0.000635757 \\ 0.26617 \\ 0.44604 \\ 0.479611 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} 0.130626 \\ -0.338022 \\ 0.476991 \\ -0.531333 \\ 0.476992 \\ -0.33802 \\ 0.130628 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} -0.449005 \\ 0.172676 \\ 0.518245 \\ -6.29403e-09 \\ -0.518245 \\ -0.172676 \\ 0.449005 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_6 &= \begin{pmatrix} 0.262282 \\ -0.520312 \\ 0.400604 \\ -3.40684e-13 \\ -0.400604 \\ 0.520312 \\ -0.262282 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Obliczone wartości własne były równe:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 3.59586 \\ \lambda_1 &= 0.284988 \\ \lambda_2 &= 0.122786 \\ \lambda_3 &= 0.590387 \\ \lambda_4 &= 0.0865954 \\ \lambda_5 &= 0.170974 \\ \lambda_6 &= 0.0981544 \end{aligned} \quad (16)$$

Kolejne przybliżenia znalezionych wartości własnych  $\lambda_k$ , dla IT\_MAX = 12 zostały przedstawione na wykresie (Rysunek 1).



Rysunek 1: Kolejne przybliżenia znalezionych wartości własnych  $\lambda_k$  w funkcji numeru iteracji.

Macierz  $\mathbf{D}$  miała postać:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3.59586} & -1.2268e-13 & -1.27676e-15 & 8.88178e-16 & 1.09357e-14 & 1.77636e-15 & -1.77636e-15 \\ -1.22548e-13 & \mathbf{0.284988} & -6.25256e-06 & -7.6505e-09 & -3.81633e-09 & -1.31839e-16 & 6.93889e-17 \\ -1.26635e-15 & -6.25256e-06 & \mathbf{0.122802} & -0.00332763 & -0.000329115 & -3.70643e-12 & -2.25514e-17 \\ 7.49401e-16 & -7.6505e-09 & -0.00332763 & \mathbf{0.590389} & 8.23117e-07 & 1.03251e-14 & 1.38778e-17 \\ 1.09201e-14 & -3.81633e-09 & -0.000329115 & 8.23117e-07 & \mathbf{0.0865957} & -2.97259e-09 & -1.56455e-14 \\ 1.8735e-15 & -1.38778e-16 & -3.70639e-12 & 1.02071e-14 & -2.97259e-09 & \mathbf{0.170974} & -1.03402e-08 \\ -2.12504e-15 & 6.76542e-17 & -5.55112e-17 & 2.94903e-17 & -1.56485e-14 & -1.03402e-08 & \mathbf{0.0981544} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Dodatkowo dokonałam obliczeń dla różnych liczb iteracji (IT\_MAX) i wyniki przedstawiłam w tabeli (Tabela 1)

IT_MAX	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
<b>12</b>	3.59586	0.284988	0.122786	0.590387	0.0865954	0.170974	0.0981544
<b>50</b>	3.59586	0.590116	0.28512	0.122787	0.170974	0.0865947	0.0981544
<b>100</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170683	0.122996	0.0865947	0.0981544
<b>200</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0865956	0.0981534
<b>250</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0976684	0.0870256
<b>287</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0981544	0.0865948
<b>288</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0981544	0.0865947
<b>289</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0981544	0.0865947
<b>300</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0981544	0.0865947
<b>500</b>	3.59586	0.59039	0.284988	0.170974	0.122787	0.0981544	0.0865947

Tabela 1: Końcowe wartości  $\lambda_k$  w zależności od wartości IT\_MAX

Jak widać powyżej, dokładność przybliżeń wzrasta wraz z liczbą iteracji. Liczba 288 to graniczna liczba, kiedy przybliżone wartości  $\lambda_k$  już się nie zmieniają w znacznym stopniu (dla dalszych liczb po przecinku liczby są dalej coraz dokładniejsze). Warto zauważyć też, że obliczone wartości własne dla 300 i więcej iteracji, to wartości obliczone przy mniejszej liczbie iteracji, ale w innej kolejności (czyli np.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  dla IT\_MAX=12 są odpowiednio równe  $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_6, \lambda_3, \lambda_5$  dla IT\_MAX=300).

Dla dokładniejszych wartości własnych, zmieni się również postać macierzy  $\mathbf{D}$ .

### 3 Wnioski

Metoda iteracyjna z Redukcją Hotellinga jest w tym przypadku dość szybką i prostą w implementacji metodą znajdowania wartości i wektorów własnych macierzy o wymiarach  $7 \times 7$ . Jednak, na podstawie wyników, można zauważyć, że dobra dokładność (do 7 miejsca po przecinku) i poprawna kolejność wartości własnych występuje dopiero przy 288 iteracjach. W przypadku małych macierzy, jak ta, na której dokonywaliśmy obliczeń, taka ilość iteracji nie wydłuża w znacznym stopniu czasu obliczeń, ale dla macierzy większego wymiaru metoda ta może być dość wolna.

### Literatura

- [1] Tomasz Chwiej, *Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy*  
[http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/diagonalizacja\\_2018.pdf](http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/diagonalizacja_2018.pdf)