Projekt – delta hedging

Inżynieria finansowa 1

### 

### Katarzyna Streich

### Michał Krawiec

### Jakub Gierłachowski

Spis treści

[Katarzyna Streich 1](#_Toc371897111)

[Michał Krawiec 1](#_Toc371897112)

[Jakub Gierłachowski 1](#_Toc371897113)

[1. Wstęp 5](#_Toc371897114)

[1.1 Opis problemu 5](#_Toc371897115)

[1.2 Opcje 5](#_Toc371897116)

[1.2.1 Standardy opcji 5](#_Toc371897117)

[1.2.2 Wybór opcji 5](#_Toc371897118)

[2. Część teoretyczna 5](#_Toc371897119)

[2.1 Kalibracja 5](#_Toc371897120)

[2.2 Stopa wolna od ryzyka 6](#_Toc371897121)

[2.3 Wycena Opcji 6](#_Toc371897122)

[2.3.1 Równanie Blacka-Scholsa 6](#_Toc371897123)

[2.3.2 Opisy i wzory opcji 7](#_Toc371897124)

[2.4 Hedging 8](#_Toc371897125)

[2.4.1 Wstęp 8](#_Toc371897126)

[2.4.2 Hedging niezależny od modelu wyceny 8](#_Toc371897127)

[2.4.3 Hedging zależny od modelu wyceny 8](#_Toc371897128)

[2.4.4 Delta hedging 8](#_Toc371897129)

[2.4.5 Gamma hedging 8](#_Toc371897130)

[2.5 Premia za ryzyko 8](#_Toc371897131)

[3. Delta hedging 8](#_Toc371897132)

[3.1 Wstęp 8](#_Toc371897133)

[3.2 Rozkład zysku i strat 8](#_Toc371897134)

[3.3 Częstotliwość aktualizacji składu portfela 8](#_Toc371897135)

[3.4 Uwzględnienie premii za ryzyko 8](#_Toc371897136)

[3.5 Zastosowanie delta hedgingu w rzeczywistości 8](#_Toc371897137)

[3.6 Świat abstrakcyjny VS świat rzeczywisty 8](#_Toc371897138)

[3.7 Analiza wrażliwości 8](#_Toc371897139)

[3.8 Wnioski 8](#_Toc371897140)

[4. Gamma hedging 8](#_Toc371897141)

[4.1 Wstęp 9](#_Toc371897142)

[4.1.1 Opis 9](#_Toc371897143)

[4.1.2 Porównanie delta hedgingu z gamma hedgingiem 9](#_Toc371897144)

[4.2 Analiza wrażliwości 10](#_Toc371897145)

[4.2.1 Wartość opcji, a wartość aktywa bazowego 10](#_Toc371897146)

[4.2.2 Delta, a wartość aktywa bazowego 10](#_Toc371897147)

[4.2.3 Gamma, a wartość aktywa bazowego 10](#_Toc371897148)

[4.3 Podejście I – wykorzystanie 1 opcji binarnej 10](#_Toc371897149)

[4.3.1 Opis problemu 10](#_Toc371897150)

[4.3.2 Portfel 10](#_Toc371897151)

[4.3.3 Opis matematyczny 11](#_Toc371897152)

[4.3.4 Wykres delty 11](#_Toc371897153)

[4.3.5 Rozkład zysku/straty 11](#_Toc371897154)

[4.3.6 Wnioski 12](#_Toc371897155)

[4.4 Podejście II – wykorzystanie 2 opcji binarnych 12](#_Toc371897156)

[4.4.1 Opis problemu 12](#_Toc371897157)

[4.4.2 Portfel 12](#_Toc371897158)

[4.4.3 Opis matematyczny 12](#_Toc371897159)

[4.4.4 Wykres delty 13](#_Toc371897160)

[4.4.5 Rozkład zysku/straty 13](#_Toc371897161)

[4.4.6 Wnioski 13](#_Toc371897162)

[4.5 Podejście III – wykorzystanie wszystkich dostępnych opcji binarnych 13](#_Toc371897163)

[4.5.1 Opis problemu 13](#_Toc371897164)

[4.5.2 Portfel 14](#_Toc371897165)

[4.5.3 Opis matematyczny 15](#_Toc371897166)

[4.5.4 Wykres delty 15](#_Toc371897167)

[4.5.5 Rozkład zysku/straty 15](#_Toc371897168)

[4.5.6 Wnioski 15](#_Toc371897169)

[4.6 Wnioski 15](#_Toc371897170)

[5. Formuła ITO 15](#_Toc371897171)

[6. Podsumowanie 15](#_Toc371897172)

[6.1 Pierwsza część 15](#_Toc371897173)

[6.2 Druga część 15](#_Toc371897174)

1. Wstęp
   1. Opis problemu

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

* 1. Opcje
     1. Standardy opcji

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

* + 1. Wybór opcji

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

1. Część teoretyczna
   1. Kalibracja

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

* 1. Stopa wolna od ryzyka

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

Tabela 1 - wybór opcji (testowe)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | OW20F2240 | OW20O2330 | OBREA2026 | OTPEB2001 + 0,5 |
| Typ | call | put | call | put |
| Instrument bazowy | WIG20 | WIG20 | BRE | TPE |
| Data wykonania | 15-06-2012 | 16-03-2012 | 01-08-2012 | 01-08-2012 |
| Kurs początkowy  (instrumentu bazowego) | 2702,23 | 2702,23 | 318,90 | 6,41 |
| Kurs wykonania | 2400 | 3300 | 260 | 10,5 |
| Kurs rzeczywisty | 2233,38 | 2337,92 | 284,50 | 4,55 |

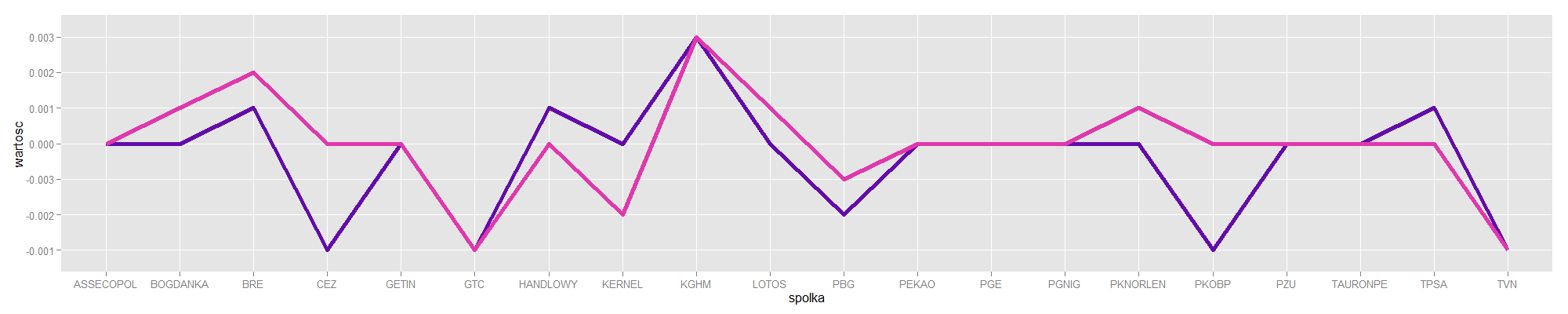
**INSTRUKCJA:** PPM na obrazku “wstaw podpis”.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

* 1. Wycena Opcji
     1. Równanie Blacka-Scholsa

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

Rysunek 1 - średnia



**INSTRUKCJA:** PPM na obrazku “wstaw podpis”.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

* + 1. Opisy i wzory opcji

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Do przeprowadzenia symulacji, potrzebna nam jest macierz kowariancji, której współczynniki wyliczamy ze wzoru:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit. Proin nibh augue, suscipit a, scelerisque sed, lacinia in, mi. Cras vel lorem. Etiam pellentesque aliquet tellus. Phasellus pharetra nulla ac diam. Quisque semper justo at risus. Donec venenatis, turpis vel hendrerit interdum, dui ligula ultricies purus, sed posuere libero dui id orci. Nam congue, pede vitae dapibus aliquet, elit magna vulputate arcu, vel tempus metus leo non est.

* 1. Hedging
     1. Wstęp
     2. Hedging niezależny od modelu wyceny
     3. Hedging zależny od modelu wyceny
     4. Delta hedging
     5. Gamma hedging
  2. Premia za ryzyko

1. Delta hedging
   1. Wstęp
   2. Rozkład zysku i strat
   3. Częstotliwość aktualizacji składu portfela
   4. Uwzględnienie premii za ryzyko
   5. Zastosowanie delta hedgingu w rzeczywistości
   6. Świat abstrakcyjny VS świat rzeczywisty
   7. Analiza wrażliwości
   8. Wnioski
2. Gamma hedging
   1. Wstęp
      1. Opis

W poprzednich rozdziałach mieliśmy okazję zapoznać się ze strategią zabezpieczania portfela metodą delta hedgingu. W tej części poznamy bardziej efektywną metodę, a mianowicie gamma hedging.

Wyobraźmy sobie, że chcemy zabezpieczyć opcję call z kursem wykonania 2300 i datą zapadalności 16 września 2011. Portfel aktualizujemy raz na tydzień. Jednak tym razem podczas każdej zmiany w portfelu musimy liczyć się z dodatkowymi opłatami – od każdej transakcji pobierana jest prowizja w wysokości 0,4% od jej wartości.

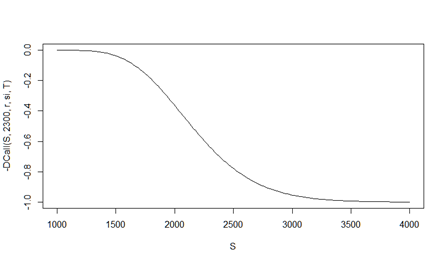
Mamy jednak więcej możliwości na zabezpieczenie naszego portfela: oprócz samego indeksu i inwestycji wolnej od ryzyka, możemy korzystać z opcji binarnych na WIG20, które przyjmujemy, że istnieją z takimi samymi kursami wykonania oraz zapadalnościami, jak opcje europejskie na GPW.

* + 1. Porównanie delta hedgingu z gamma hedgingiem

Poprzednio, używając metody delta hedging, nie kontrolowaliśmy tego, jak będzie zmieniał się nasz portfel podczas kolejnych rehedgingów. Co za tym idzie, w praktyce moglibyśmy być narażeni na duże koszty transakcyjne. Tym razem, wykorzystując opcje binarne jesteśmy w stanie stworzyć portfel będący nie tylko delta-neutralny, ale również gamma-neutralny. Pozycja gamma-neutralna oznacza posiadanie portfela, którego delta jest niewrażliwa na zmianę wartości aktywa bazowego, co oznacza, że nie musimy obawiać się, że przy kolejnej aktualizacji portfela czekają nas radykalne zmiany. Dzięki temu możemy ograniczyć wielkości naszych transakcji podczas kolejnych rehedgingów.

* 1. Analiza wrażliwości
     1. Wartość opcji, a wartość aktywa bazowego
     2. Delta, a wartość aktywa bazowego
     3. Gamma, a wartość aktywa bazowego
  2. Podejście I – wykorzystanie 1 opcji binarnej
     1. Opis problemu

Przyjrzyjmy się najpierw portfelowi złożonemu jedynie z krótkiej pozycji na opcji europejskiej call@2300. Załóżmy ponadto, że dzisiejszy kurs WIG20 to 2700. Oto wykres jego delty:



Dokładając do niego odpowiednią ilość samego indeksu otrzymamy oczywiście portfel z deltą równą 0. Jednakże zwróćmy uwagę, że w okolicy dzisiejszego kursu wykres jest mocno pochyły. Oznacza to, że jeśli do momentu kolejnego rehedgingu wartość kursu ulegnie nawet niewielkiej zmianie, to będziemy musieli wyraźnie zmienić ilość indeksu w naszym portfelu.

* + 1. Portfel

Zobaczymy, jak może nam pomóc opcja binarna. W tym celu stwórzmy portfel składający się z zabezpieczanej opcji, pewnej liczby opcji binarnych put z kursem wykonania 2600 oraz pewnej ilości indeksu. Jego wartość jest następująca:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gdzie:

– wartość opcji call@2300,

– wartość opcji binarnej put@2600,

– wartość indeksu.

* + 1. Opis matematyczny

Chcemy teraz dobrać takie wartości K i , aby uzyskać pozycję delta- oraz gamma-neutralną, czyli taką, aby zachodziły równości:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

W kontekście naszego portfela spełnione mają więc być równania:

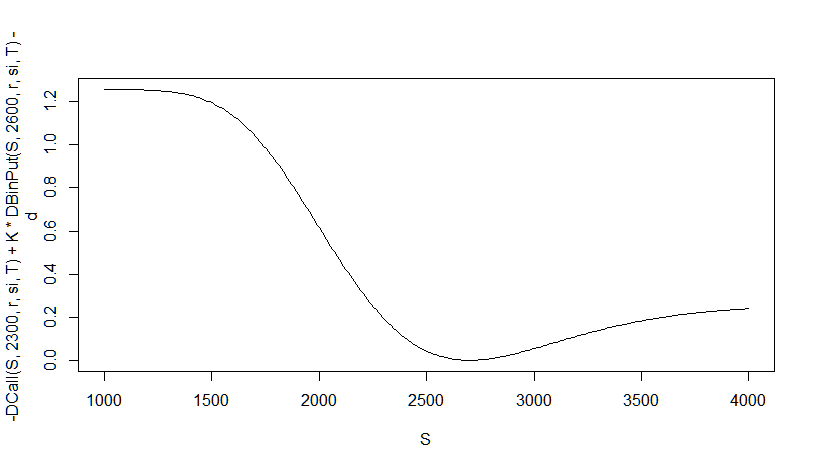
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Otrzymujemy więc:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

* + 1. Wykres delty

Spójrzmy, jak przy powyższych założeniach będzie wyglądał wykres delty naszego portfela:



* + 1. Rozkład zysku/straty

(tutaj będzie histogram zysku/straty analogiczny do części A, ewentualnie też wykres zysku/straty narastająco)

* + 1. Wnioski

Jak łatwo zauważyć, tym razem przy niewielkich zmianach kursu delta naszego portfela również niewiele się zmienia, dzięki czemu wystarczają jedynie małe modyfikacje podczas każdej aktualizacji jego składu.

* 1. Podejście II – wykorzystanie 2 opcji binarnych
     1. Opis problemu

Zobaczyliśmy, że dokładając 1 rodzaj opcji binarnych jesteśmy w stanie zbudować portfel gamma-neutralny i ograniczyć w ten sposób zmiany w jego składzie podczas kolejnych aktualizacji. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, żeby pójść o krok dalej i wziąć do portfela różne rodzaje opcji binarnych. Przyjrzyjmy się, czy możemy dzięki temu zyskać jeszcze lepszą pozycję, niż w pierwszym podejściu.

* + 1. Portfel

Zbudujmy w tym celu portfel, składający się, oprócz zabezpieczanej opcji i indeksu, z pewnej liczby opcji binarnych put@2300 oraz tej samej liczby opcji binarnych call@3000. Jego wartość przedstawia się następująco:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gdzie:

– wartość opcji call@2300,

– wartość opcji binarnej put@2300,

– wartość opcji binarnej call@3000,

– wartość indeksu.

* + 1. Opis matematyczny

Policzmy teraz, ile muszą wynosić K oraz , aby delta oraz gamma naszego portfela były równe 0. Spełnione muszą być oczywiście równania:

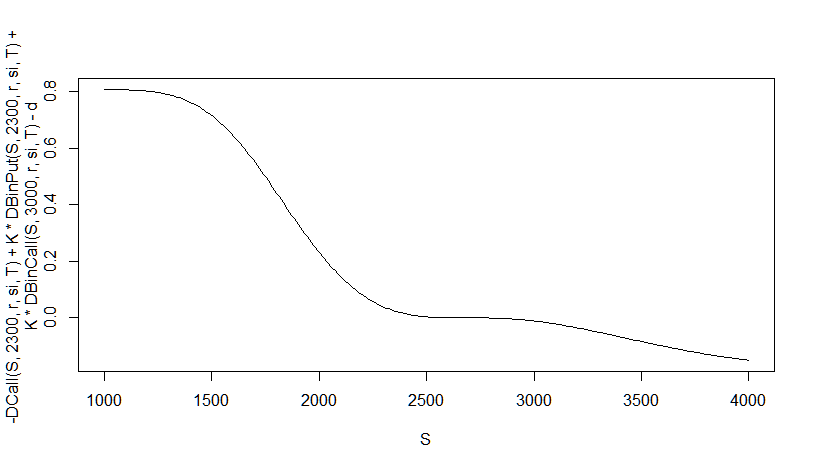
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Stąd łatwo wyliczyć, że:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

* + 1. Wykres delty

Zobaczmy, jak po takich modyfikacjach będzie zachowywała się delta naszego portfela:



* + 1. Rozkład zysku/straty

(tutaj będzie histogram zysku/straty analogiczny do części A, ewentualnie też wykres zysku/straty narastająco)

* + 1. Wnioski

Patrząc na wykres delty widzimy wyraźnie, że posiadając taki portfel jesteśmy w bardzo komfortowej sytuacji – jego delta jest prawie stała na odcinku od kursu 2500 do 2900. Oznacza to, że jeśli do momentu kolejnego rehedgingu kurs WIG20 nie zmieni się więcej niż o 200 (w dół lub w górę), to zmiany w portfelu będą minimalne. Jest to zdecydowanie lepszy rezultat niż uzyskany poprzednio, przy użyciu tylko jednego rodzaju opcji binarnych.

* 1. Podejście III – wykorzystanie wszystkich dostępnych opcji binarnych
     1. Opis problemu

Wiemy już, że dobieranie do portfela więcej niż jednego rodzaju opcji binarnych może znacznie poprawić naszą pozycję. W związku z tym można nie ograniczać się do jednego czy dwóch rodzajów, ale wykorzystać wszystkie dostępne opcje.

* + 1. Portfel

Tym razem chcemy stworzyć portfel, który oprócz zabezpieczanej opcji i indeksu będzie zawierał wszystkie dostępne opcje binarne. Zauważmy jednak, że naszym celem jest kontrolowanie jego delty, a delty opcji binarnych call i put dla jednakowego kursu wykonania są równe co do modułu, a różnią się jedynie znakiem. W związku z tym nie ma potrzeby brać wszystkich opcji call i wszystkich put – taki sam rezultat otrzymamy, biorąc, powiedzmy, dla kursów wykonania poniżej dzisiejszego opcje put, a dla kursów powyżej – call.

Przyjmijmy, że mamy do dyspozycji 5 serii opcji z kursami wykonania poniżej dzisiejszego oraz 5 serii z kursami powyżej niego. W związku z tym dodajmy do naszego portfela opcje binarne: put@2300, put@2400, put@2500, put@2600, put@2700, call@2800, call@2900, call@3000, call@3100, call@3200, każdą w dowolnej ilości. Wartość takiego portfela to:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gdzie:

– wartość opcji call@2300,

– wartość i-tej opcji binarnej put,

– wartość i-tej opcji binarnej call,

– wartość indeksu.

* + 1. Opis matematyczny
    2. Wykres delty
    3. Rozkład zysku/straty
    4. Wnioski
  1. Wnioski

1. Formuła ITO
2. Podsumowanie
   1. Pierwsza część
   2. Druga część