

Wydział: WFiIS	Imię i nazwisko: 1. Axel Zuziak 2. Marcin Węglarz		Rok II	Grupa B	Zespół 03
LABORATORIUM TECHNIK JĄDROWYCH	Temat: Statystyczny charakter rozpadów promieniotwórczych.				Nr ćwiczenia 1+9
Data wykonania: 04.03.2015	Data oddania: 18.03.2015	Zwrot do poprawy:	Data oddania:	Data zaliczenia:	OCENA:

# 1 Statystyczny charakter rozpadów promieniotwórczych

## 1.1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne zapoznanie się ze statystycznym charakterem rozpadów promieniotwórczych oraz wyznaczaniem histogramów rozkładów Poissona i Gaussa. Wyznaczono również charakterystykę licznika Geigera-Mullera.

## 1.2 Wstęp teoretyczny

Charakterystyką licznika Geigera-Mullera nazywamy zależność między częstością zliczeń rejestrowanych impulsów i napięciem zasilania licznika, przy stałym strumieniu padających na licznik cząstek i stałym poziomie progu dyskryminacji elektronicznej. Wykres [1] przedstawia prostoliniowy odcinek o niewielkim nachyleniu zwany *plateau* licznika. Wartość  $U_A$  nazywamy progiem geigerowskim. Nachylenie plateau  $\alpha$  jest zdefiniowane jako przyrost liczby zliczeń przypadający na 100V wzrostu napięcia zasilania w zakresie plateau:

$$\alpha = \frac{(J_B - J_A)}{J_A} \quad (1)$$

Rozkład Poissona jest to dyskretny rozkład prawdopodobieństwa, wyrażający prawdopodobieństwo szeregu zdarzeń, gdy występują one ze znaną średnią częstością. Wzór opisujący taki rozkład można zapisać:

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad (2)$$

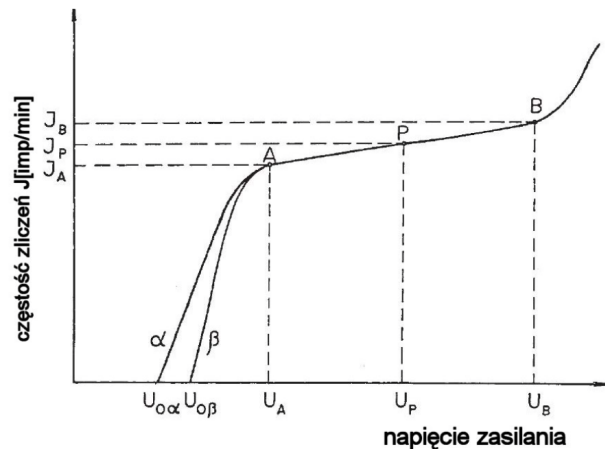
Powyższy wzór pozostaje prawdziwy dla dowolnych  $k$  oraz  $\lambda$ . Jednak dla dużych wartości posługiwania się tym rozkładem jest kłopotliwe, gdyż wartości  $k!$  oraz  $\lambda^k$  rosną bardzo szybko wraz ze wzrostem  $k$ . Na szczęście wzór 2 szybko upodabnia się do rozkładu Gaussa zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym. Poniższy wzór opisuje rozkład Gaussa:

$$\Phi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (3)$$

Często stosowanym testem statystycznym jest test chi-kwadrat ( $\chi^2$ ). Pozwala on określić czy wyniki danych pomiarów są zgodne, na określonym przedziale ufności z wynikami oczekiwanymi.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(x_i - x_{oi})^2}{x_{oi}} \quad (4)$$

Gdzie  $x_i$  to wartości pomiarowe danej wielkości,  $x_{oi}$  wartość oczekiwana tej wielkości podlegającej określonemu rozkładowi statystycznemu, natomiast  $r$  to liczba pomiarów. Korzystając z tabel statystycznych możemy określić wartość  $\chi^2_\alpha$ . Jeżeli  $\chi^2 < \chi^2_\alpha$  to nie mamy podstaw do odrzucenia założonej hipotezy. Można zatem przyjąć, że nie występują tu żadne inne rodzaje błędów oprócz błędów o charakterze fluktuacji statystycznych.

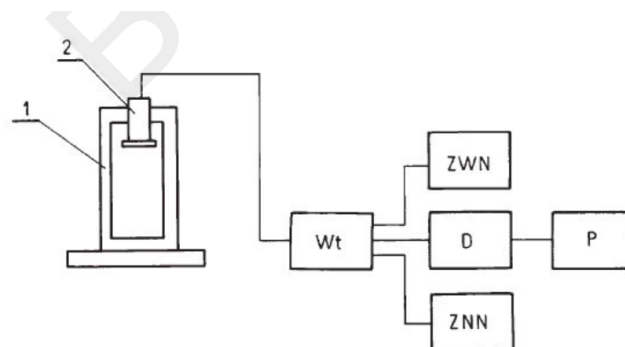


Rysunek 1: Charakterystyka licznika Geigera-Mullera [2]

### 1.3 Wykonanie ćwiczenia

Ćwiczenie rozpoczęto od zapoznania się z układem pomiarowym składającym się z:

- Domek pomiarowy
- Licznik Geigera-Mullera
- Wtórnik
- Zasilacz wysokiego napięcia
- Dyskryminator amplitudy
- Przelicznik
- Zasilacz niskiego napięcia



Rysunek 2: Schemat blokowy zestawu pomiarowego [2]

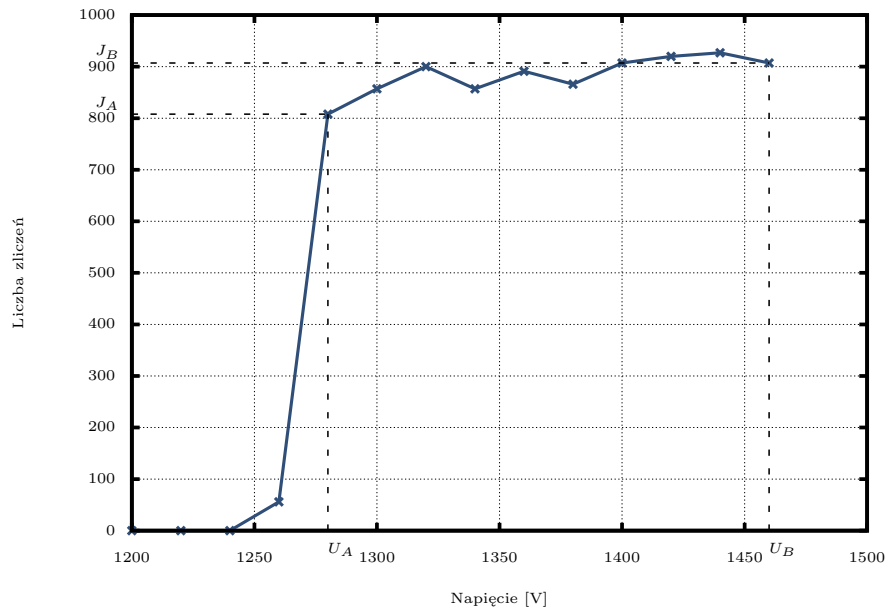
Umieszczono źródło punktowe  $^{137}\text{Cs}$  w domku pomiarowym blisko licznika. W celu określenia napięcia progowego ustawiono długi czas pomiaru wynoszący 1000s i powoli zwiększano napięcie. Następnie wyznaczono charakterystykę licznika przeprowadzając pomiary co 20V w zakresie od 60V poniżej napięcia progowego do 200V powyżej tego napięcia. Czas trwania pojedynczego pomiaru wyznaczono tak, aby liczba zliczeń w plateau wynosiła około 1000. Następnie źródło umieszczono na zewnątrz domku pomiarowego w celu osiągnięcia średnio jednego zliczenia na sekundę. Wykonano 100 takich jednosekundowych pomiarów. Kolejno wykonano 100 pomiarów przy źródle umieszczonym w domku na samym dole oraz 200 pomiarów przy źródle umieszczonym na samej górze.

## 1.4 Wyniki pomiarów

- Wyznaczenie charakterystyki licznika G-M

Tabela 1: Wyniki pomiarów zliczeń w zależności od napięcia.

	Napięcie [V]	Liczba zliczeń	Liczba zliczeń na sekundę
1	1200	0	0,0
2	1220	0	0,0
3	1240	0	0,0
4	1260	56	2,8
5	1280	808	40,4
6	1300	857	42,9
7	1320	900	45,0
8	1340	857	42,9
9	1360	891	44,6
10	1380	866	43,3
11	1400	907	45,4
12	1420	920	46,0
13	1440	927	46,4
14	1460	907	45,4



Rysunek 3: Wykres zależności liczby zliczeń od napięcia.

Na wykres [3] naniesiono punkty  $(U_A, J_A)$  oraz  $(U_B, J_B)$ .

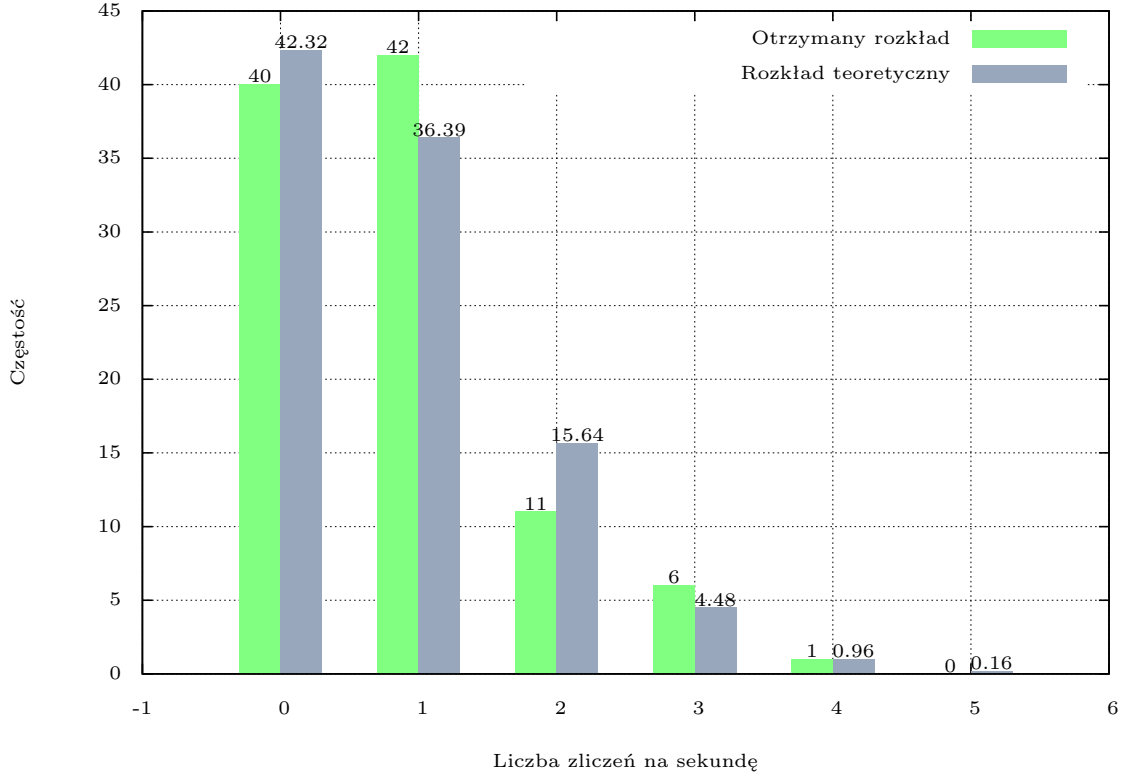
$J_A = 808$	$U_A = 1280 \text{ V}$
$J_B = 907$	$U_B = 1460 \text{ V}$

Korzystając ze wzoru 1 obliczono nachylenie  $\alpha = 12,25\%$  przypadające na 180 V. Łatwo wyliczyć, że nachylenie na 100 V wynosi:

$$\alpha = 6,73\%$$

- **Pomiar liczby zliczeń ze źródłem na zewnątrz domku pomiarowego**

Następnie wykonano sto pomiarów dla źródła umieszczonego w takiej odległości poza domkiem aby średnio obserwować jedno zliczenie na sekundę. Wyniki pomiarów przedstawiono na wykresie 4. Razem z otrzymanym rozkładem przedstawiono rozkład teoretyczny (Poissona) wynikający ze wzoru 2. Obliczenia oparto na wyliczonej średniej arytmetycznej  $\lambda = 0,86$  zliczeń na sekundę.

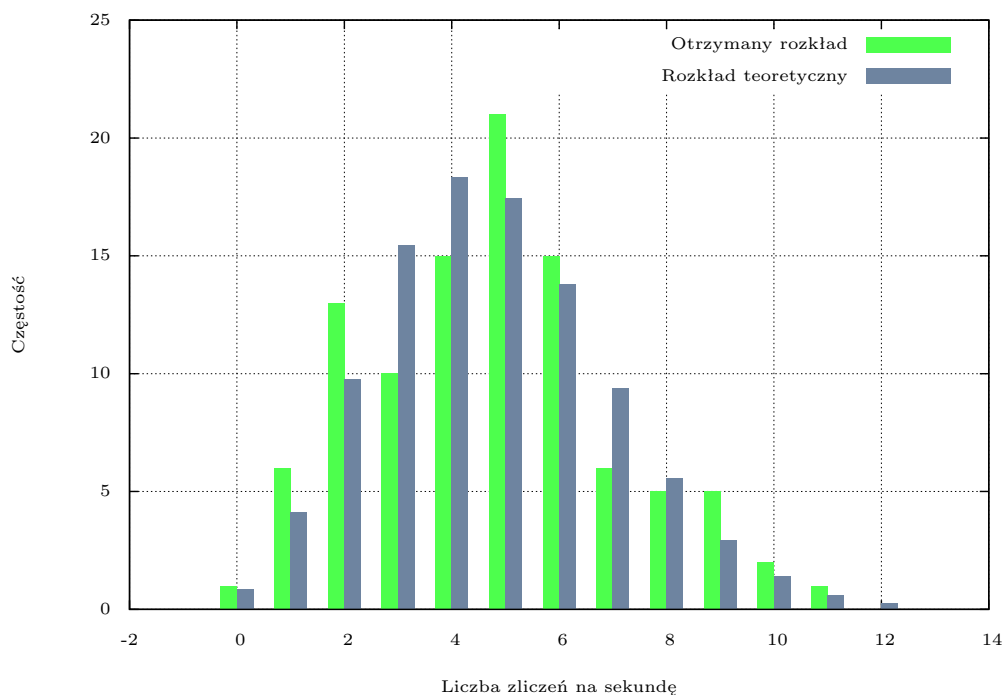


Rysunek 4: Histogramy otrzymanego rozkładu oraz rozkładu Poissona o  $\lambda = 0,86$

Obliczono wartość  $\chi^2$  korzystając ze wzoru 4. Otrzymano wynik 3,04 następnie korzystając z tablic statystycznych [3] odczytano wartość krytyczną dla przedziału ufności 0,05 oraz liczby stopni swobody 5 wynikającej z liczby obserwacji 6 pomniejszonej o jeden estymowany parametr. Odczytana wartość  $\chi^2_{\alpha} = 4.35$  jest mniejsza od  $\chi^2$  zatem nie ma podstaw by odrzucić hipotezę iż dany rozkład jest rozkładem Poissona.

- **Pomiar liczby zliczeń ze źródłem na najniższym poziomie domku pomiarowego** Badane źródło umieszczono wewnątrz domku pomiarowego tak, aby obserwować około 5 zliczeń w przedziale czasowym trwającym 1 sekundę. Wykonano 100 takich pomiarów. Na rysunku 5 przedstawiono histogram otrzymanego rozkładu oraz histogram rozkładu teoretycznego o  $\lambda = 4,75$ . W tabeli 2 przedstawiono wyniki obliczeń składowych  $\chi^2$  oraz ostateczny wynik.

Tablice statystyczne [3] przewidują dla 12 stopni swobody i przedziału ufności 0,05 wartość krytyczną: 21,03, która jest mniejsza od wyliczonej  $\chi^2$ . Nie mamy zatem podstaw aby odrzucić hipotezę, że ten rozkład jest rozkładem Poissona.



Rysunek 5: Histogramy otrzymanego rozkładu oraz rozkładu Poissona o  $\lambda = 4,75$

Tabela 2: Wyniki pomiarów liczby zliczeń dla źródła na najniższym poziomie domku pomiarowego.

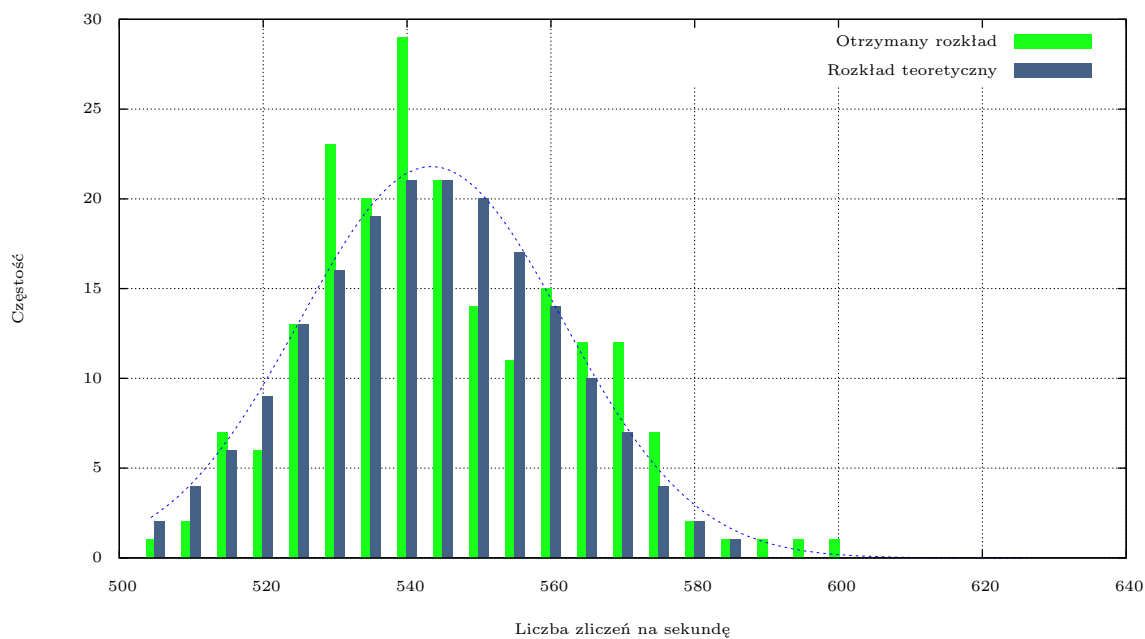
Liczba zliczeń	Częstość	Częstość teoretyczna	$(x - x_{oi})^2 / x_{oi}$
0	1	0,87	0,02
1	6	4,11	0,87
2	13	9,76	1,08
3	10	15,45	1,92
4	15	18,35	0,61
5	21	17,43	0,73
6	15	13,80	0,10
7	6	9,37	1,21
8	5	5,56	0,06
9	5	2,93	1,45
10	2	1,39	0,26
11	1	0,60	0,26
12	0	0,24	0,24
		$\chi^2$	<b>8,82</b>

- **Źródło umieszczone bardzo blisko licznika**

Źródło umieszczono na najwyższym szczeblu domku pomiarowego. Wykonano 200 pomiarów o czasie trwania równym 1s. Otrzymane wyniki przedstawiono tabeli 3. Otrzymane rozkłady przedstawiono na wykresie 6. Przy pomocy arkusza kalkulacyjnego wyliczono wartość oczekiwaną  $\mu = 543,40$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma = 18,30$ . Dla liczby stopni swobody równej 23 oraz przedziału ufności tablice statystyczne przewidują wartość  $\chi^2_{\alpha} = 35,17$ . Jak wynika z tabeli 3 otrzymana wartość  $\chi^2 = 23,22$  jest mniejsza od wartości krytycznej, zatem tak jak w poprzednich przypadkach nie mamy podstaw odrzucić hipotezy, że otrzymany rozkład jest rozkładem normalnym.

Tabela 3: Wyniki pomiarów liczby zliczeń dla źródła umieszczonego bardzo blisko licznika.

	Przedział	Częstość	Wartość teoretyczna	$(x - x_{oi})^2 / x_{oi}$
1	$(-\infty)-500$	0	1,31	1,31
2	500-505	1	2,41	0,83
3	505-510	2	4,12	1,09
4	510-515	7	6,54	0,03
5	515-520	6	9,63	1,37
6	520-525	13	13,15	0,00
7	525-530	23	16,68	2,40
8	530-535	20	19,63	0,01
9	535-540	29	21,43	2,67
10	540-545	21	21,72	0,02
11	545-550	14	20,43	2,02
12	550-555	11	17,83	2,62
13	555-560	15	14,44	0,02
14	560-565	12	10,86	0,12
15	565-570	12	7,58	2,58
16	570-575	7	4,90	0,90
17	575-580	2	2,95	0,30
18	580-585	1	1,64	0,25
19	585-590	1	0,85	0,03
20	590-595	1	0,41	0,86
21	595-600	1	0,18	3,68
22	600-605	0	0,08	0,08
23	605-610	0	0,03	0,03
24	$610 - (+\infty)$	0	0,01	0,01
			$\chi^2$	<b>23,22</b>



Rysunek 6: Histogramy otrzymanego rozkładu oraz rozkładu Gaussa

## 1.5 Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników charakterystyki licznika G-M nie można stwierdzić, że jest on w bardzo dobrej kondycji. Uważa się, że nachylenie plateau poniżej 5% jest wyznacznikiem dobrego licznika. Dla badanego licznika nachylenie wynosiło 6,73%. Przeprowadzone testy  $\chi^2$  na badanych rozkładach nie pozwoliły obalić hipotezy, że badane rozpadły promieniotwórcze nie podlegają danym rozkładom statystycznym. Zatem można wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia danej ilości rozpadów w przeciągu pewnego czasu.

## 2 Czas połowicznego rozpadu srebra.

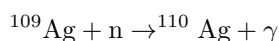
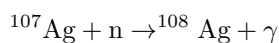
### 2.1 Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie czasu połowicznego rozpadu srebrnej płytki aktywowanej neutronami. Zapoznanie się z metodą wyznaczania czasu połowicznego rozpadu dwóch różnych izotopów znajdujących się w jednej próbce i różniących się czasami życia.

### 2.2 Wstęp.

Doświadczalne wyznaczenie czasu połowicznego rozpadu poprzez narysowanie krzywej rozpadu jest możliwe dla izotopów o krótkim czasie życia (czas połowicznego rozpadu rzędu kilkudziesięciu sekund lub kilku minut). Przykładami takich izotopów mogą być aktywowane izotopy srebra.

W przyrodzie srebro występuje w postaci dwóch stabilnych izotopów:  $^{107}\text{Ag}$  (51.35%) oraz  $^{109}\text{Ag}$  (48.65%). Pod wpływem bombardowania neutronami (termicznymi lub szybkimi) srebro ulega aktywacji poprzez pochłonięcie neutronu:



Oprócz powyższych izotopów powstają jeszcze  $^{108m}\text{Ag}$  oraz  $^{110m}\text{Ag}$  jednak ich czasy połowicznego rozpadu to odpowiednio 418 lat oraz 250 dni, więc nie wpływają one na wyniki naszego doświadczenia.

Powstałe w wyniku aktywacji izotopy mają czas połowicznego rozpadu (tablicowy [1]) równy 2.37 min dla  $^{108}\text{Ag}$  oraz 24.6 s dla  $^{110}\text{Ag}$ , co w dalszej części doświadczenia wyznaczano. Oba izotopy ulegają rozpadowi  $\beta^-$ .

Powyższe rozpadły opisuje prawo rozpadu promieniotwórczego:

$$N(t) = N_0 \exp^{-\lambda t} \quad (5)$$

Po przekształceniu możemy je zapisać w postaci:

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0 \quad (6)$$

Z powyższego równania wynika, że dla rozpadu pojedynczego izotopu narysowany w skali półlogarytmicznej wykres liczby rozpadów od czasu powinien być linią prostą. Wyznaczając współczynnik kierunkowy tej prostej oraz korzystając z definicji czasu połowicznego rozpadu możemy go wyznaczyć jako:

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (7)$$

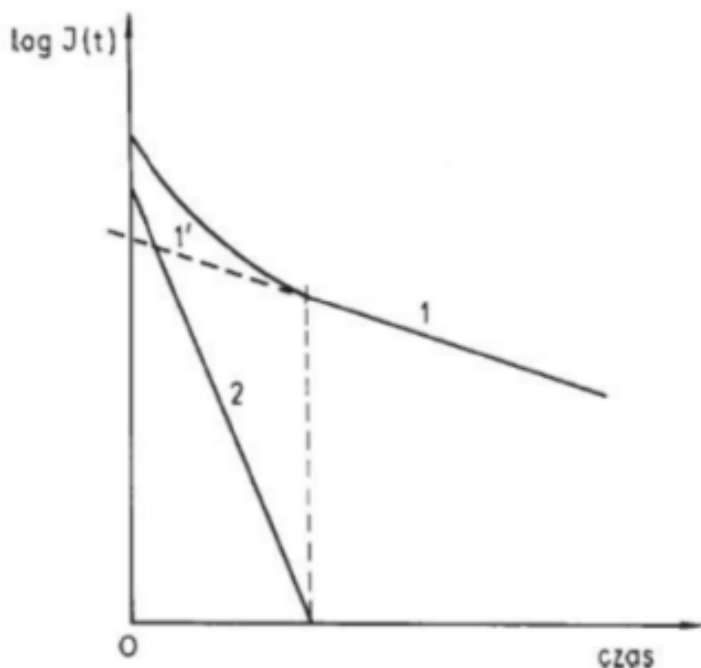
Gdzie:

$\tau$  - czas połowicznego rozpadu

$\lambda$  - stała rozpadu wyznaczona jako współczynnik nachylenia prostej

W przypadku, gdy w badanej próbce znajdują się kilka izotopów wykorzystujemy różnicę w czasach połowicznego rozpadu (po czasie około  $3.5\tau_1$  pierwszy z izotopów całkowicie się rozpadnie przy czym ciągle będziemy rejestrować rozpadły drugiego izotopu). Narysowany w skali półlogarytmicznej wykres powinien wyglądać mniej więcej tak jak ten na Rysunku 7.

Krzywa 1 na rysunku reprezentuje wyznaczoną krzywą, celem znalezienia prostej 2 należy wyznaczyć (np. metodą najmniejszych kwadratów) równanie prostej 1', a następnie ekstrapolować ją do punktu  $t = 0$ . Jeżeli przez  $t_1$  oznaczymy czas, w którym izotop o krótszym czasie życia uległ całkowitemu rozpadowi, to prostą 1' będziemy dopasowywać do punktów zaczynających się od tego właśnie punktu. Kolejnym krokiem jest odjęcie prostej 1' od danych pomiarowych i do otrzymanych punktów z przedziału od  $t = 0$  do  $t_1$  ponownie dopasowujemy prostą. Otrzymane proste to proste rozpadu poszczególnych izotopów w skali półlogarytmicznej, czasy ich połowicznego rozpadu wyznaczamy ze wzoru (7)



Rysunek 7: Schemat wykresu półlogarytmicznego dla rozpadu dwóch izotopów różniących się czasami połowicznego rozpadu.

### 2.3 Wykonanie ćwiczenia.

Doświadczenie rozpoczęto od włożenia srebrnej płytki do źródła neutronów na czas 10 minut.

Następnie po upływie tego czasu bardzo szybko (około 20s upłynęło od wyjęcia płytki do rozpoczęcia pomiarów) wyjęto płytkę i umieszczono w detektorze rozpoczynając pomiary. Liczbę zliczeń notowano w odstępie 6 sekund, wyniki przedstawia wykres przedstawiony na Rysunku 8. Czas  $t_1$  całkowitego rozpadu srebra  $^{110}\text{Ag}$  oszacowano na 150s.

Do dalszych obliczeń przyjęto, że wielkości związane z  $^{108}\text{Ag}$  będą miały indeks 1 natomiast związane z  $^{110}\text{Ag}$  indeks 2.

Do danych pomiarowych dla czasu  $t$  większego od 150 sekund dopasowano prostą odpowiadającą rozpadowi  $^{108}\text{Ag}$  :

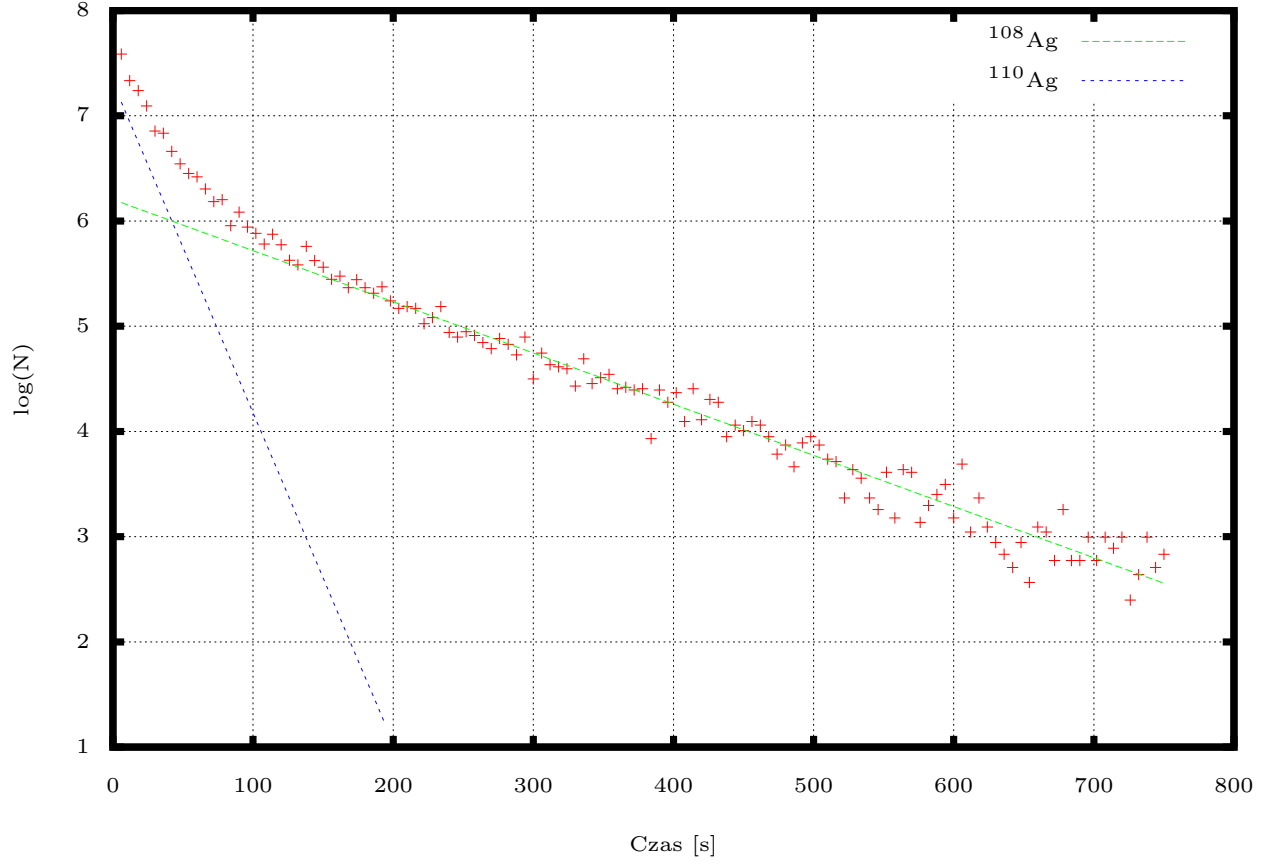
$$a_1 = -4.864 \pm 0.085 \cdot 10^{-3}$$

$$b_1 = 6.205 \pm 0.041$$

Porównując współczynnik  $a_1$  ze wzorem (6) otrzymujemy:

$$\lambda_1 = 4.864 \pm 0.085 \cdot 10^{-3}$$





Rysunek 8: Częstość zliczeń w skali logarytmicznej z naniesionymi prostymi odpowiadającymi rozpadom poszczególnych izotopów srebra.

W kolejnym kroku odjęto od danych pomiarowych wartości funkcji  $a_1x + b_1$  i do otrzymanych punktów w zakresie  $[0:150]$  sekund dopasowano prostą odpowiadającą rozpadowi  $^{110}\text{Ag}$  :

$$a_2 = -0.0314 \pm 0.0017$$

$$b_2 = 7.32 \pm 0.13$$

Ponownie porównując prostą ze wzorem (6) otrzymujemy:

$$\lambda_2 = 0.0314 \pm 0.0017$$

W ostatnim kroku korzystając ze wzoru (7) oraz z prawa przenoszenia niepewności pomiarowej wyznaczono czasy połowicznego rozpadu.

$$u(\tau) = \sqrt{\left[ \frac{-\ln 2}{\lambda^2} u(\lambda) \right]^2} \quad (8)$$

Wyliczone wartości dla  $^{108}\text{Ag}$ :

$$\tau_1 = 142.5 \pm 2.5 \text{ s}$$

$$\tau_{1tab} = 142.2\text{s}$$

oraz dla  $^{110}\text{Ag}$ :

$$\tau_2 = 22.1 \pm 1.2\text{s}$$

$$\tau_{2tab} = 24.6\text{s}$$

## 2.4 Wnioski.

Wartości możemy uznać za równe jeżeli moduł z różnicy tych wartości jest mniejszy od niepewności wyznaczenia wartości pomnożonej przez stałą  $k$  (przyjmujemy  $k=2$ ).

$$|\tau_1 - \tau_{1tab}| = 0.3 \cdot k \cdot u(\tau_1) = 5$$

$$0.3 < 5$$

Tak więc dla  $^{108}\text{Ag}$  wyniki uzyskane doświadczalnie są zgodne z wartościami tablicowymi.

$$|\tau_2 - \tau_{2tab}| = 2.5 \cdot k \cdot u(\tau_2) = 2.4$$

$$2.5 \not< 2.4$$

Wartości wyznaczone dla  $^{110}\text{Ag}$  nie są zgodne z wartościami tablicowymi dla  $k=2$ , jednak jak widać różnica jest niewielka. Wpływ na wynik ma również bardzo krótki czas życia  $^{110}\text{Ag}$ , być może gdyby szybciej umieszczono próbkę w detektorze udało by się dokładniej wyznaczyć czas połowicznego rozpadu i z większą dokładnością. Przedstawiona powyżej metoda jest dobrym sposobem na wyznaczenie czasu połowicznego rozpadu izotopów których czas życia jest niewielki. Szczególnie dokładny wynik otrzymaliśmy dla izotopu  $^{108}\text{Ag}$ .

## Literatura

- [1] <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/>
- [2] B. Dziunikowski, S.J. Kalita *Ćwiczenia laboratoryjne z jądrowych metod pomiarowych*, Wydawnictwa AGH, Kraków 1995
- [3] Mariusz Przybycień *Tablice Statystyczne*, dostęp on-line  
[http://home.agh.edu.pl/~mariuszp/wfiis\\_stat/tablice\\_ps\\_wir.pdf](http://home.agh.edu.pl/~mariuszp/wfiis_stat/tablice_ps_wir.pdf)