Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin, LaBRI, Université de Bordeaux

16 Mars 2023

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

Introduction

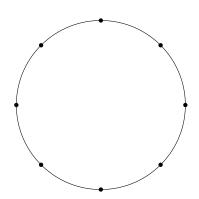
Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition Loi de T^L

Références

$$G = (V, E)$$
, ici le cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

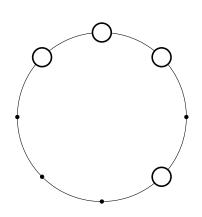
Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur Z Définition

Loi de T^L

Conclusio

Références



 N_t trous:

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

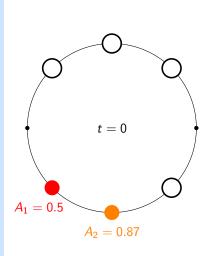
Loi de T^L sur

Définition

Loi de T^L

001101010

Références



 N_{t} trous :

$$ag{r}^{init} = \left\{igcolumnes
ight\}$$

 N_b balles:

$$\textit{\textbf{B}}^{init} = \left\{ egin{matrix} igwedge, igwedge, igwedge, \ldots \end{smallmatrix}
ight\}$$

une horloge par balle :

$$\textbf{\textit{A}}_{\nu} \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

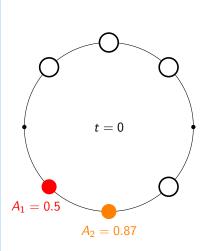
Loi de T^L sur

, ..

Sur

Définition Loi de T^L

Référence



 N_t trous :

$$ag{T}^{init} = \left\{igcolumnder
ight\}$$

 $N_{\rm b}$ balles:

$$\mathbf{\textit{B}}^{init} = \{ lacktriangledown, lacktriang$$

une horloge par balle :

$$oldsymbol{A}_{
u} \sim \mathcal{U}\left([0,1]
ight)$$

$$(\boldsymbol{\mathit{B}}^{init}, \boldsymbol{\mathit{T}}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ N_b, N_t \end{pmatrix}\right)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

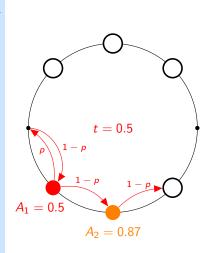
Loi de T^L sur

Sur

Définition Loi de T^L

. . .

Référence



 N_{t} trous :

$$ag{T}^{init} = \left\{igcolumnder
ight\}$$

 $N_{\rm b}$ balles :

$$\textit{\textbf{B}}^{init} = \left\{ egin{matrix} igwedge, igwedge, igwedge, \ldots \end{smallmatrix}
ight\}$$

une horloge par balle :

$$oldsymbol{A}_{
u} \sim \mathcal{U}\left([0,1]
ight)$$

$$(oldsymbol{\mathcal{B}}^{init}, oldsymbol{\mathcal{T}}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(egin{pmatrix} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ N_b, N_t \end{pmatrix}
ight)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

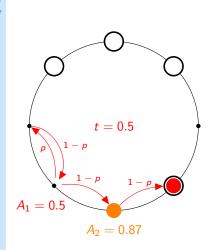
21112

Définition

Loi de T^L

Conclusio

Référence



 N_t trous :

$$ag{T}^{init} = \left\{igcolumnder
ight\}$$

 $N_{\rm b}$ balles :

$$\textit{\textbf{B}}^{init} = \left\{ egin{matrix} igwedge, igwedge, igwedge, \ldots \end{smallmatrix}
ight\}$$

une horloge par balle :

$$oldsymbol{A}_{
u} \sim \mathcal{U}\left([0,1]
ight)$$

$$(oldsymbol{\mathcal{B}}^{init}, oldsymbol{\mathcal{T}}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(egin{pmatrix} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ N_b, N_t \end{pmatrix}
ight)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

.....

Loi de T^L sur

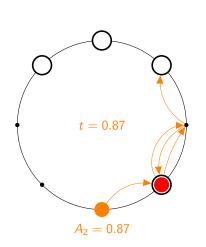
Sur

Définition

Loi de T^L

Concidence

Références



 N_{t} trous :

$$ag{T}^{init} = \left\{igcolumndsigcolumnaigcolumndsigcolumndsigcolumnaigcolumndsigcolumndsigcolumndsigcolumndsigcolumndsigc$$

 $N_{\rm b}$ balles :

$$\textit{\textbf{B}}^{init} = \left\{ egin{matrix} igwedge, igwedge, igwedge, \ldots \end{smallmatrix}
ight\}$$

une horloge par balle :

$$\textbf{\textit{A}}_{\nu} \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$$

$$(oldsymbol{\mathcal{B}}^{init}, oldsymbol{\mathcal{T}}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(egin{pmatrix} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ N_b, N_t \end{pmatrix}
ight)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

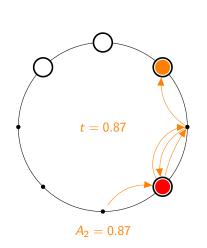
Loi de T^L sur

Définition

Loi de T^L

Conclusio

Référence



 N_t trous :

$$ag{T}^{init} = \left\{igcolumnder
ight\}$$

 $N_{\rm b}$ balles :

$$\textit{\textbf{B}}^{init} = \left\{ egin{matrix} igwedge, igwedge, igwedge, \ldots \end{smallmatrix}
ight\}$$

une horloge par balle :

$$oldsymbol{A}_{
u} \sim \mathcal{U}\left([0,1]
ight)$$

$$(\boldsymbol{\mathit{B}}^{init},\,\boldsymbol{\mathit{T}}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ N_{b},\,N_{t}\end{pmatrix}\right)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

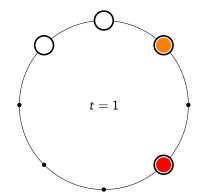
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Concidato

Références



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

meroduction

Loi de T^L sur

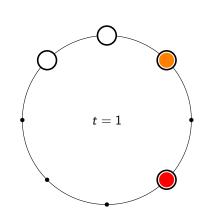
e....

Définition

Loi de T^L

Conclusio

Référence



Trous libres:

$${m T^L} = \Big\{ { t positions des } igotimes \hat{m C} \; \hat{m a} \; t = 1 \Big\}$$

Trous occupés :

$$oldsymbol{\mathcal{T}^{O}} = \left\{ egin{array}{ll} \operatorname{positions} & oldsymbol{eta} & oldsymbol{eta}, \ldots \ & \dot{\mathbf{a}} & t=1 \end{array}
ight\}$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

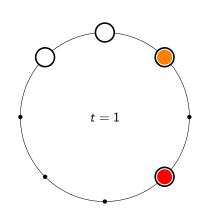
Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition Loi de T^L

Références



Trous libres:

$${m T^L} = \Big\{ { t positions des } igotimes \hat{m D} \; \hat{m a} \; t = 1 \Big\}$$

Trous occupés :

$$oldsymbol{\mathcal{T}^{O}} = \left\{ egin{matrix} ext{positions des} & oldsymbol{\bigcirc}, oldsymbol{\bigcirc}, \ldots \ ext{à} & t=1 \end{smallmatrix}
ight\}$$

Proposition (graphes finis)

La variable aléatoire **T**^L est bien définie.

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

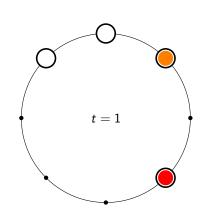
Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition Loi de T^L

.



Trous libres:

$${m T}^{m L} = \Big\{ { t positions des } igotimes \hat{m D} \; \hat{m a} \; t = 1 \Big\}$$

Trous occupés :

Proposition (graphes finis)

La variable aléatoire T^L est bien définie.

Questions

Quelle est la loi de T^L ? Et que se passe-t-il si $G = \mathbb{Z}$?

Un peu de contexte : des systèmes de particules

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Sur

Loi de T^L

Conclusio

Références

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]
- internal diffusion-limited aggregation (IDLA) (Lawler, Bramson, Griffeath [LBG92])
- Activated Random Walk (ARW); Diffusion-Limited Annihilating Systems (Cabezas, Rolla, Sidoravicius) ...

Un peu de contexte : des systèmes de particules

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

meroducero

Loi de T^L sur

S.... 1

Jui 2

Loi de T^L

Conclusio

Références

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]
- internal diffusion-limited aggregation (IDLA) (Lawler, Bramson, Griffeath [LBG92])
- Activated Random Walk (ARW); Diffusion-Limited Annihilating Systems (Cabezas, Rolla, Sidoravicius) ...
- processus de parking (Chassaing, Louchard, ...)
- interprétation probabiliste des Remixed Eulerian Numbers (Nadeau, Tewari [NT22])

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur

e....

Définition

Loi de T^L

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^{\boldsymbol{L}}(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^{\boldsymbol{L}}(O_2)$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Définiti

Loi de TL

Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

e....

Définit

Loi de TL

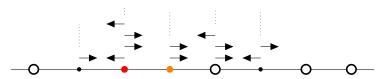
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

m/ 11m

Sur 2

Loi de TL

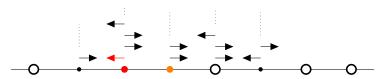
Conclusio

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Dáfini

Loi de T^L

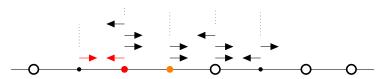
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

...

Loi de T^L

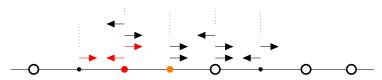
Conclusio

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

,

Sur

Loi de TL

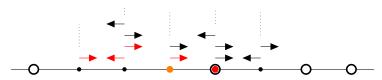
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

.

Loi de TL sur

Sur

Définition

Loi de T^L

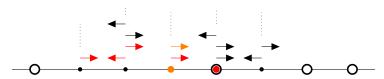
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

m . C

Loi de TL

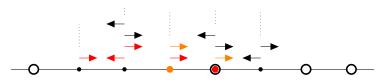
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

_

Défini

Loi de T^L

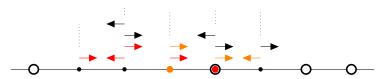
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de TL sur

.

Définiti

Loi de TL

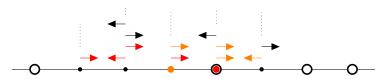
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

.

Loi de TL sur

.

Définiti

Loi de T^L

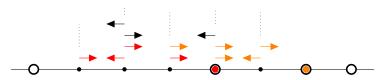
Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de TL sur

e....

Définition

Loi de T^L

Conclusion

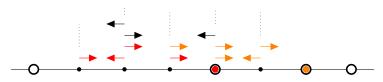
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

sur chaque sommet : une pile de flèches partagée par toutes les balles



commutation : même ensemble de trous atteints, et même, mêmes flèches utilisées! $T^L(O_1) = T^L(O_2)$ p.s.

La loi de T^L

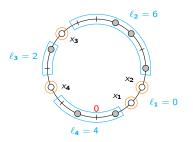
Un système de particules : le modèle de golf $\operatorname{sur} \mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

Loi de TL sur

Définition Loi de TL





$$\textcolor{blue}{\textbf{X}} = \{\textbf{x}_1, \dots, \textbf{x}_{N_\ell}\}, \; \textbf{N}_\ell = \textbf{N}_t - \textbf{N}_b.$$

$$0 \le x_1 \le \ldots \le x_{N_\ell} < n$$

$$\forall i, \ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$$

$$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}} = \boldsymbol{\mathsf{X}}\right) = ?$$

La loi de T^L

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

. /

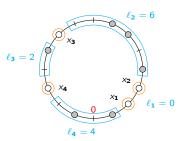
Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition Loi de T^L

Conclusio

Référence



$$\label{eq:continuity} \textcolor{red}{\textbf{X}} = \{\textbf{x}_1, \dots, \textbf{x}_{N_\ell}\}, \; \textbf{N}_\ell = \textbf{N}_t - \textbf{N}_b.$$

$$0 \le x_1 \le \ldots \le x_{N_\ell} < n$$

$$\forall i, \ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$$

$$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{T^L} = \boldsymbol{X}\right) = ?$$

Théorème (Loi des trous libres)

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^{L}}=\boldsymbol{X}\right) = \frac{1}{|C^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}}}|} \sum \prod_{i=1}^{N_{\ell}} \frac{1}{b_{i}+1} \binom{\ell_{i}}{b_{i},b_{i},\ell_{i}-2b_{i}}$$

où la somme porte sur les $(b_i)_{i\in N_\ell}$ tels que $\sum_{i\in N_\ell} b_i = N_b$, et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Calcul de la loi de T^L : cas monotrou

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition Loi de T^L

Conclusion

Référence

cas monotrou : cas particulier où $N_t = N_b + 1$ clé : invariance par rotation

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{b}}+1,p}\left(\boldsymbol{T^{L}}=\left\{ \boldsymbol{\mathsf{x}}\right\} \right)=\frac{1}{n}$$

Calcul de la loi de T^L : cas monotrou

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

- - - - 1

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur Z Définition

Loi de T^L

Références

cas monotrou : cas particulier où $N_t = N_b + 1$ clé : invariance par rotation

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{b}}+1,p}\left(\boldsymbol{T^{L}}=\left\{x\right\}\right)=\frac{1}{n}$$

Lemme (Loi des trous libres - cas monotrou)

Si $N_t = N_b + 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{b}}+1,\rho}\left(\boldsymbol{\mathit{T}^{L}}=\left\{ \mathbf{x}\right\} \middle| \mathbf{x}\in\boldsymbol{\mathit{T}^{init}}\right)=\frac{1}{N_{\mathbf{t}}}=\frac{1}{N_{\mathbf{b}}+1}$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur 2

Définition Loi de T^L

Conclusio

Références

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{\textit{n},\textit{N}_{b},\textit{N}_{t},\textit{p}}\left(\textit{\textbf{T}}^{\textit{\textbf{L}}}=\frac{\textit{\textbf{X}}}{\textit{\textbf{X}}}\right)=$$



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur ℤ

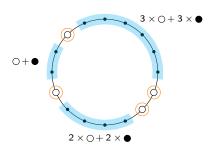
Définition Loi de T^L

Conclusio

Références

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{\textit{n},\textit{N}_{b},\textit{N}_{t},\textit{p}}\left(\textit{\textbf{T}}^{\textit{L}}=\frac{\textit{\textbf{X}}}{\textit{\textbf{X}}}\right)=$$



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

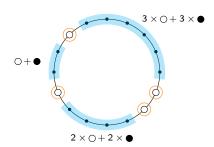
Définition

C---I---

Références

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}} = \boldsymbol{\times}\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}} = \boldsymbol{\times}\middle| \underset{\text{et } \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}{\overset{X \subseteq \boldsymbol{\mathit{T}}^{init}}{\text{et } \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}}\right) \mathbb{P}\left(\underset{\text{et } \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}{\overset{X \subseteq \boldsymbol{\mathit{T}}^{init}}{\text{et } \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}}\right)$$



Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Illitroduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

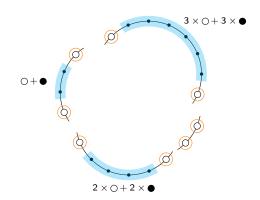
Définition

Loi de T^L

Références

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}}=\textcolor{red}{\textcolor{red}{\boldsymbol{\mathsf{X}}}}\right)=\mathbb{P}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}}=\textcolor{red}{\textcolor{red}{\boldsymbol{\mathsf{X}}}}\bigg|\underset{\mathsf{et}\;\forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i|=b_i}{\overset{\boldsymbol{\mathit{X}}\subseteq\boldsymbol{\mathit{T}}^{\mathit{init}}}}\mathbb{P}\left(\underset{\mathsf{et}\;\forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i|=b_i}{\overset{\boldsymbol{\mathit{X}}\subseteq\boldsymbol{\mathit{T}}^{\mathit{init}}}}\right)$$



Calcul de la loi de T^L

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition Loi de T^L

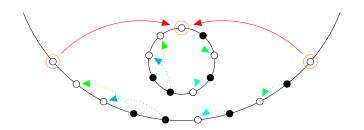
. . .

Références

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}} = \boldsymbol{\times}\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{\mathit{T^L}} = \boldsymbol{\times}\middle| \underset{\mathsf{et} \ \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}{\overset{X \subseteq \boldsymbol{\mathit{T}}^{init}}{\text{et} \ \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}}\right) \mathbb{P}\left(\underset{\mathsf{et} \ \forall i,|\boldsymbol{\mathit{B}}_i| = b_i}{\overset{X \subseteq \boldsymbol{\mathit{T}}^{init}}{\text{et}}}\right)$$



Calcul de la loi de T^L

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

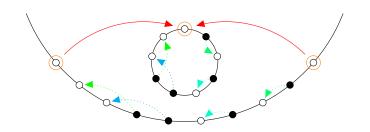
Sur

Définition Loi de T^L

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$egin{aligned} \mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(oldsymbol{\mathcal{T}^{L}}=oldsymbol{\mathcal{X}}
ight) &= \mathbb{P}\left(oldsymbol{\mathcal{T}^{L}}=oldsymbol{\mathcal{X}}igg|_{\mathbf{et}\,orall_{i},|oldsymbol{B}_{i}|=b_{i}}^{oldsymbol{\mathcal{X}}\subseteqoldsymbol{\mathcal{T}}^{init}}igg)\,\mathbb{P}\left(egin{aligned} oldsymbol{\mathcal{X}}\subseteqoldsymbol{\mathcal{T}}^{init}\ \mathbf{et}\,oldsymbol{\mathcal{Y}}_{i},|oldsymbol{B}_{i}|=b_{i} \end{aligned}
ight) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{N_{\ell}}rac{1}{b_{i}+1}
ight) \end{aligned}$$



Calcul de la loi de TL

Un système de particules : le modèle de golf $\operatorname{sur} \mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

Loi de TL sur

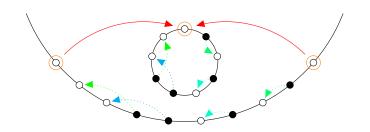
Définition

Loi de TL

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\begin{split} \mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^{L}}=\boldsymbol{X}\right) &= \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T^{L}}=\boldsymbol{X}\middle|\underset{\mathsf{et}}{\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{T}^{init}}\underset{|\boldsymbol{B}_{i}|=b_{i}}{\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{T}^{init}}\right)\mathbb{P}\left(\underset{\mathsf{et}}{\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{T}^{init}}\underset{|\boldsymbol{B}_{i}|=b_{i}}{\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{T}^{init}}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{N_{\ell}}\frac{1}{b_{i}+1}\right)\frac{\prod_{i=1}^{N_{\ell}}\binom{2b_{i}}{b_{i}}}{\binom{n}{N_{\mathbf{t}}}} \end{split}$$



Calcul de la loi de T^L

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

,

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Loi de T^L

Conclusio

Référence

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\begin{split} \mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},\rho}\left(\boldsymbol{\mathcal{T}^{L}} = \boldsymbol{\times}\right) &= \mathbb{P}\left(\boldsymbol{\mathcal{T}^{L}} = \boldsymbol{\times} \middle| \underset{\mathsf{et}}{\overset{\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{T}}^{init}}} \underset{\mathsf{et}}{\boldsymbol{\mathcal{H}_{i}}} \middle| \boldsymbol{\mathcal{B}_{i}} \middle| = b_{i}\right) \mathbb{P}\left(\underset{\mathsf{et}}{\overset{\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{T}}^{init}}} \middle| \boldsymbol{\mathcal{B}_{i}} \middle| = b_{i}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{N_{\ell}} \frac{1}{b_{i}+1}\right) \frac{\prod_{i=1}^{N_{\ell}} \binom{2b_{i}}{b_{i}}}{\binom{n}{N_{\mathbf{t}}}} \end{split}$$

Théorème (Loi des trous libres)

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{\mathcal{T}^{L}}=\boldsymbol{\mathcal{X}}\right) = \frac{1}{|C^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}}}|} \sum \prod_{i=1}^{N_{\ell}} \frac{1}{b_{i}+1} \binom{\ell_{i}}{b_{i},b_{i},\ell_{i}-2b_{i}}$$

où la somme porte sur les $(b_i)_{i \in N_\ell}$ tels que $\sum_{i \in N_\ell} b_i = N_b$, et $\forall i, 2b_i \le \ell_i$.

Définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Sur 3

Définition

Loi de TL

Conclusion

Références

Configuration initiale

pour chaque sommet u, indépendamment :

- lacktriangle état : balle avec proba $d_{
 m b}$ XOR trou avec proba $d_{
 m t}$, $0 \le d_{
 m b} < d_{
 m t}$
- lacksquare horloge : $oldsymbol{A}_{u}\sim\mathcal{U}\left(\left[0,1
 ight]
 ight)$

Chaque balle trouve-t-elle un trou?

Définition du modèle sur $\mathbb Z$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

S....

Définition

Loi de T^L

Conclusio

Diff....

Configuration initiale

pour chaque sommet u, indépendamment :

- lacktriangle état : balle avec proba $d_{
 m b}$ XOR trou avec proba $d_{
 m t}$, $0 \le d_{
 m b} < d_{
 m t}$
- horloge : $\mathbf{A}_{u} \sim \mathcal{U}([0,1])$

Chaque balle trouve-t-elle un trou?

La difficulté

- une infinité de balles
- **p** pour tout u, une infinité de v tels que $\mathbf{A}_v < \mathbf{A}_u$

Première question

Le modèle est-il bien défini?

Bonne définition du modèle sur $\mathbb Z$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Sur

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

Théorème (Cas où $d_{\rm b} < d_{\rm t})$

Le modèle sur \mathbb{Z} est bien défini.

Bonne définition du modèle sur $\mathbb Z$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur 2

Définition Loi de T^L

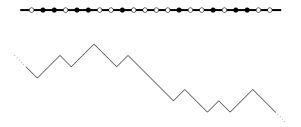
C---l---!-

Références

Théorème (Cas où $d_{\rm b} < d_{\rm t}$)

Le modèle sur \mathbb{Z} est bien défini.

Clé : codage des états



Bonne définition du modèle sur $\mathbb Z$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Sur 2

Définition

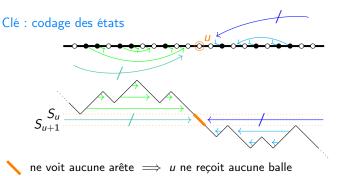
Loi de T^L

Conclusio

Références

Théorème (Cas où $d_{\rm b} < d_{\rm t}$)

Le modèle sur \mathbb{Z} est bien défini.



Bonne définition du modèle sur Z

Un système de particules : le modèle de golf $\operatorname{sur} \mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

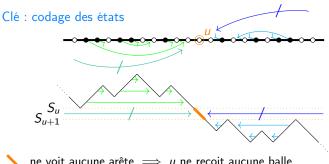
Loi de TL sur

Définition

Loi de TL

Théorème (Cas où $d_b < d_t$)

Le modèle sur Z est bien défini.



ne voit aucune arête $\implies u$ ne reçoit aucune balle

Proposition

Il existe une infinité de \ p.s. (à droite et à gauche de tout sommet).

La loi de T^L sur \mathbb{Z}

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction Loi de T^L sur

S....

Définition

Conclusion

Référence

On note $(\Delta_i T^L)_{i \in \mathbb{Z}}$ le processus qui indexe les distances inter-trous libres. (ici $d_b + d_t = 1$ et $d_b < d_t$)

Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $\left(\mathbf{L}_{i}^{(\lambda)}\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ (explicites) tels que pour tout R > 0,

$$\mathbb{P}\left(\Delta_{i} \boldsymbol{T^{L}} = 2b_{i}, -R \leq i \leq R\right) = \frac{(2b_{0} + 1)\lambda^{2b_{0}} C_{b_{0}}}{\mathcal{H}(\lambda)} \prod_{i=-R, i \neq 0}^{R} \frac{\lambda^{2b_{i}} C_{b_{i}}}{\mathcal{G}(\lambda)}$$

$$=\prod_{i=-R}^{R}\mathbb{P}\left(\boldsymbol{L}_{i}^{(\lambda)}=2b_{i}\right)$$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

e....

Définition

Conclusion

Références

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{b}}, \frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{t}}$



Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

■ Environnement local suffisant : les $(\Delta_i T^L)_{-R \le i \le R'} (\Delta_i T^{L(n)})_{-R \le i \le R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

Sur

Définition

Conclusion

Référence

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{b}}, \frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{t}}$



Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- Environnement local suffisant : les $(\Delta_i T^L)_{-R \le i \le R'} (\Delta_i T^{L(n)})_{-R \le i \le R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.
- **couplage** des configurations locales initiales sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction Loi de T^L sur

Sur 2

Définition Loi de T^L

Conclusio

Référence

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{b}}, \frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{t}}$



Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- Environnement local suffisant : les $(\Delta_i T^L)_{-R \le i \le R'} (\Delta_i T^{L(n)})_{-R \le i \le R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.
- **couplage** des configurations locales initiales sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- couplage des flèches

$$\implies \Delta_i T^L = \Delta_i T^{L(n)}, -R \leq i \leq R$$

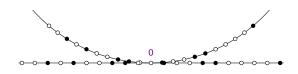
Un système de modèle de golf

Zoé Varin

Loi de TL sur

Loi de TL

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathsf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathsf{b}}, \frac{N_{\mathsf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathsf{t}}$



Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- Environnement local suffisant : les $(\Delta_i T^L)_{-R \le i \le R'} (\Delta_i T^{L^{(n)}})_{-R \le i \le R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.
- couplage des configurations locales initiales sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- couplage des flèches

$$\implies \Delta_i T^L = \Delta_i T^{L(n)}, -R \leq i \leq R$$

conclusion en calculant :

$$\mathbb{P}\left(\Delta_{i} \boldsymbol{\mathcal{T}^{L(n)}} = 2b_{i}, -R \leq i \leq R-1\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{i}^{(\lambda)} = 2b_{i})$$

Résultat final

Un système de particules : le modèle de golf $\operatorname{sur} \mathbb{Z} / n \mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

Loi de TL sur

Loi de TL

Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $\left(\mathbf{L}_{i}^{(\lambda)}\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ (explicites) tels que pour tout R > 0, $\mathbb{P}\left(\Delta_{i}\mathbf{T}^{L} = 2b_{i}, -R \leq i \leq R\right) = \prod_{i=1}^{R} \mathbb{P}\left(\mathbf{L}_{i}^{(\lambda)} = 2b_{i}\right)$

$$\mathbb{P}\left(\Delta_{i}oldsymbol{\mathcal{T}^{L}}=2b_{i},-R\leq i\leq R
ight)=\prod_{i=-R}^{N}\mathbb{P}\left(oldsymbol{\mathcal{L}}_{i}^{(\lambda)}=2b_{i}
ight)$$

Bilan et travail en cours

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

.

Définitio

Loi de T^L

Références

■ Extension sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- plusieurs balles par sommets : ok
- trous à capacité plus grande que 1?
- théorèmes limites sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (distances maximales entre deux trous libres)
- calcul de la distance parcourue par une balle? (asymptotique dans [PRS19])

Références

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur

.

Définition Loi de T^L

Conclusion

Références

Persi Diaconis and William Fulton, *A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **49** (1991), no. 1, 95–119.

- Gregory F Lawler, Maury Bramson, and David Griffeath, *Internal diffusion limited aggregation*, The Annals of Probability (1992), 2117–2140.
- Philippe Nadeau and Vasu Tewari, Remixed eulerian numbers, 2022.
- Michał Przykucki, Alexander Roberts, and Alex Scott, *Parking on the integers*, arXiv preprint arXiv :1907.09437 (2019).

Petite parenthèse : que se passe-t-il pour T^{O} ?

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur

Zoé Varin

Introduction
Loi de T^L sur

Loi de T^L s $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur

Définition

Conclusio

Références

On sait faire le calcul exact de la loi avec Maple :

```
 \begin{array}{ll} b: z: t: s: 3: v: s: 1: n: z= b+tv; \\ c: = 1/(b \operatorname{inoid} 1(t, b)) + b \operatorname{inoid} 1(t+v; t); \\ \operatorname{mu} 10: z= \operatorname{cradd}(f \operatorname{inoid} 1(t, b)) + b \operatorname{inoid} 1(t+v; t); \\ \operatorname{mu} 10: z= \operatorname{cradd}(f \operatorname{inoid} 1(t, b)) + b \operatorname{cradd} 1(t, b); \\ \operatorname{ctatsfinaux} 10: z= \operatorname{der} (f \operatorname{ctatof}(\operatorname{cepand}(\operatorname{disff}(\operatorname{aut}0, \operatorname{Mrep4(sfin)}))), \operatorname{rep4(sfin)}), \operatorname{sfin} \operatorname{in} \operatorname{etatsfinaux} 10:); \\ \operatorname{Loiff} O = \left( \frac{18}{30} \frac{4}{6} \frac{p^2 + 6}{7} \frac{9}{2} \frac{p^2 - 10}{2} \frac{p^2 - 10p + 2}{2} (0.0.3, 0.3) \right|, \left| -\frac{p^2 - 4}{9} \frac{p^2 - 29}{2} \frac{p^2 + 20}{2} \frac{p^2 - 14}{2} \frac{p^2 - 2p + 1}{2} \frac{p^2 - 4}{2} \frac{p^2 - 2p + 1}{2} \frac{p^2 - 4}{2} \frac{p^2 - 2p + 1}{2} \frac{p^2 - 2p^2 + 2p + 2}{2} \frac{p^2 - 10p^2 - 2p + 2}{2} \frac{p^2 - 2p + 1}{2} \frac{p^2 - 2p + 2p + 2p + 1}{2} \frac{p^2 - 2p + 1}{2} \frac
```