2.5 总结

张志聪

2025 年 9 月 25 日

注释 1. 特殊 n 阶方阵的封闭性。

- (1) 对角矩阵。

  两个对角矩阵 A, B，又如下封闭性：

  – 加法封闭: $A + B$ 也是对角矩阵；
  – 数乘封闭: kA 也是对角矩阵；
  – 乘法封闭: AB 也是对角矩阵。
  – 逆矩阵封闭: A 可逆，则 A^{-1} 也是对角矩阵（是上三角矩阵的特例）。

- (2) （反）对称矩阵。

  两个（反）对称矩阵 A, B，又如下封闭性：

  – 加法封闭: $A + B$ 也是（反）对称矩阵；
  – 数乘封闭: kA 也是（反）对称矩阵；
  – 乘法有条件的封闭: 充分必要条件“A, B 可交换，即 $AB = BA$”（习题 16）。
  – 逆矩阵封闭: A^{-1} 也是（反）对称矩阵（习题 18-1）。

- (3) 上（下）三角矩阵。

  两个上（下）三角矩阵 A, B，又如下封闭性：

  – 加法封闭: $A + B$ 也是上（下）三角矩阵；

– 数乘封闭: kA 也是上（下）三角矩阵；

– 乘法封闭: AB 也是上（下）三角矩阵；

– 逆矩阵封闭: A 可逆，则 A^{-1} 也是上（下）三角矩阵（习题 18-2）。

注释 2. 任何 n 阶方阵，总能表示成对称矩阵和反称矩阵之和。

证明：
设 A 为任意 n 阶方阵，那么

$$\begin{cases} A = B + C \\ A^T = B^T + C^T = B - C \end{cases}$$

解方程的可得

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{cases}$$

所以

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

注释 3. $Trace$ 具有一些优良的性质：习题 *23*

注释 4. n 阶矩阵 A 通过初等变换化为 Y，已知 Y 存在逆矩阵 Y^{-1}，那么 A^{-1} 与 Y^{-1} 的关系。

设 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$；$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使

$$\begin{aligned} P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t &= Y \\ Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} A^{-1} P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} &= Y^{-1} \\ A^{-1} &= Q_1 Q_2 \cdots Q_t Y^{-1} P_s \cdots P_2 P_1 \end{aligned}$$

注释 5. 对任意矩阵 A，我们有

$$rank(A) = rank(A^T A)$$

证明：

通过两者的基础解系相同来证明。

如果 $Ax = 0$，则 $A^T Ax = 0$；

如果 $A^T Ax = 0$，则

$$0 = x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax)$$

所以 $Ax = 0$（可设 $Ax = \alpha$，于是 $\alpha^T \alpha = 0$，即 $\alpha = 0$）。

由两者的基础解系相同，可知

$$rank(A) = rank(A^T A)$$