1.3

张志聪

2025 年 8 月 1 日

1

只做第一题（处理过程很机械）。

写成方程的的增广矩阵，并进行初等变换：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-9}{2} \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-9}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+\frac{3}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{2} & -5 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+3R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{2} & -5 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4+\frac{3}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

写出对应方程组

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ -x_2 - 3x_4 = 2 \\ 5x_3 + 10x_4 = 3 \\ 3x_4 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

然后自下而上逐次求 x_4, x_3, x_2, x_1，最后得

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{4}{5} \\
x_2 &= -\frac{14}{5} \\
x_3 &= \frac{1}{15} \\
x_4 &= \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

2

先证明极端情况，$a_{11} = a_{21} = 0$（或 $a_{12} = a_{22} = 0$），这种情况 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 是必然的，无需讨论。

写出系数矩阵，并做初等变换，完成消元：

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}
$$

（这里假设了 $a_{11} \neq 0$，$a_{12} \neq 0$ 证明方式类似，只需调整方程顺序即可。）

- 充分性

  当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时

  $$a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} = 0$$

  此时，矩阵如下：

  $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  于是第二行是无效行，由命题 3.2 可知，方程组一定有非零解。

- 必要性

  反证法，假设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，

  于是，我们有

  $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} x_2 = 0 \end{cases}$$

因为，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，所有

$$x_2=0$$

进而

$$x_1=0$$

也就是说，此时方程没有非零解，与题设矛盾，假设不成立，命题得证。

3

有以下情况：

- 可以直接解出来；
- 存在矛盾的等式，无解；
- 存在无效行，使用命题 3.2，判断是否有非零解。

4

先做矩阵消元

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\a&0&-1\\-1&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+\frac{-a}{2}R_1}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{-a}{2}&-1-\frac{a}{2}\\-1&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+\frac{1}{2}R_1}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{-a}{2}&-1-\frac{a}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\0&\frac{-a}{2}&-1-\frac{a}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+aR_2}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\0&0&-1+3a\end{bmatrix}$$

写出对应的方程组

$$\begin{cases}2x+y+z=0\\\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}z=0\\(-1+3a)z=0\end{cases}$$

假设 $(-1+3a)\neq 0$，于是可得 $z=0$，进而得 $y=0,x=0$。此时，方程没有非零解。

假设 $(-1+3a)=0$（即 $a=\frac{1}{3}$），于是方程组成为

$$\begin{cases}2x+y+z=0\\ \frac{1}{2}y=-\frac{7}{2}z\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}x=3z\\ y=-7z\end{cases}$$

z 是自由变量。

5

只做第一题

对增广矩阵进行消元

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-\lambda R_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1-\lambda)R_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & -1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{bmatrix}$$

写出对应方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\\ -x_2+x_3=\lambda\\ (2-\lambda-\lambda^2)x_3=1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{cases}$$

调整下

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\\ -x_2+x_3=\lambda\\ (-\lambda+1)(\lambda+2)x_3=1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{cases}$$

考虑 $(-\lambda+1)(\lambda+2)=0$ 时，方程组的求解情况：

- $\lambda = -2$。

  第三个方程会出现如下矛盾

  $$0 = 3$$

  此时，方程无解。

- $\lambda = 1$。

  x_3 将是自由变量（答案中说 x_2 也是自由的，个人判断是错误的），

  $$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + 2 \\ x_2 &= x_3 - 1 \end{aligned}$$

考虑 $(-\lambda + 1)(\lambda + 2) \neq 0$，我们自下而上逐次求 x_3, x_2, x_1，最后得

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2} \\ x_2 &= \frac{1}{\lambda + 2} \\ x_3 &= \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda + 2} \end{aligned}$$

6

先进行增广矩阵消元：

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5
\end{bmatrix}
\xrightarrow{R_5+R_1}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & a_5+a_1
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{R_5+R_2}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & a_5+a_1+a_2
\end{bmatrix}
\xrightarrow{R_5+R_3}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a_5+a_1+a_2+a_3
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{R_5+R_4}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5+a_1+a_2+a_3+a_4
\end{bmatrix}
$$

- 必要性

  显然，如果 $a_5+a_1+a_2+a_3+a_4 \neq 0$，那么第 5 个方程存在矛盾，则线性方程组无解，可知 $a_5+a_1+a_2+a_3+a_4=0$ 是有解的必要条件。

- 充分性

  已知，$a_5+a_1+a_2+a_3+a_4=0$。

  写出消元后的矩阵，对应的方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 = a_1 \\
x_2 - x_3 = a_2 \\
x_3 - x_4 = a_3 \\
x_4 - x_5 = a_4
\end{cases}
$$

此时，x_5 是自由变量，可得

$$\begin{aligned} x_4 &= a_4 + x_5 \\ x_3 &= a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 &= a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \end{aligned}$$

由于第 5 行变为 $0 = 0$，不会引入矛盾，所构造的解满足全部方程。

于是，我们找到了满足所有方程的解，充分性证明完成。

7

自醒：不要看到方程组的解，就做矩阵消元法，不看当前的形式能不能直接处理，因为矩阵消元法的目的，也只是为了方便方程组解的处理的。

由方程组前 $n-1$ 个方程可得:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_n \\ x_2 &= -x_1 = x_n \\ x_3 &= -x_2 = -x_n \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= (-1)^{n-1} x_n \end{aligned}$$

n 是奇数时，

$$x_{n-1} = (-1)^{n-1} x_n = x_n$$

为了保证最后一个方程

$$x_{n-1} + x_n = 0$$

成立，此时只能 $x_n = 0$，于是所有的 x_i $(1 \le i \le n-1)$ 都为 0。

n 是偶数时，

$$x_{n-1} = (-1)^{n-1} x_n = -x_n$$

满足最后一个方程

$$x_{n-1} + x_n = 0$$

于是，我们找到了以 x_n 为自由变量的解。

8

二次曲线的一般形式为

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

我们需要通过五个点，确定系数 A, B, C, D, E, F 的值。

设任意不在同一条直线上的五个点为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$$

于是，我们有

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F & = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F & = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F & = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F & = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_5^2 + Dx_5 + Ey_5 + F & = 0 \end{cases}$$

我们得到了一个齐次方程组，对应的系数矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & F \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & F \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & F \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & F \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & F \end{bmatrix}$$

由命题 3.2 可知，他必定存在非零解。

这个非零解会不会使得 $A = B = C = 0$（即二次项全部为零），此时得到的不在是二次曲线，而是一条直线，这与题设五个点不在同一条直线上矛盾，故不会存在这种情况。

（2）给定四个点，这部分就是矩阵的计算问题了，就不做解答了。

9

所有方程相加，我们有

$(n-1)x_1 + (a(n-2)+1)x_2 + (a(n-2)+1)x_3 + (a(n-2)+1)x_4 + \cdots (a(n-2)+1)x_n$
$= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n$①

第一个方程乘以 $(a(n-2)+1)$，我们有

$$(a(n-2)+1)x_2+(a(n-2)+1)x_3+(a(n-2)+1)x_4+\cdots(a(n-2)+1)x_n$$
$$=(a(n-2)+1)b_1 ②$$

① − ②，我们有

$$\begin{aligned}(n-1)x_1&=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n-(a(n-2)+1)b_1\\ x_1&=\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n-(a(n-2)+1)b_1}{n-1}\\ x_1&=\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n-a(n-2)b_1}{n-1}\end{aligned}$$

第一个方程乘以 a，我们有

$$ax_2+ax_3+ax_4+\cdots+ax_n=ab_1 ③$$

式 ③ 减去方程二，我们有

$$\begin{aligned}-x_1+ax_2&=ab_1-b_2\\ x_2&=\frac{ab_1-b_2+x_1}{a}\end{aligned}$$

以此类推，对任意 $x_i(2\leq i\leq n)$ 都有

$$x_i=\frac{ab_1-b_i+x_1}{a}$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n-a(n-2)b_1}{n-1}\\ x_i&=\frac{ab_1-b_i+x_1}{a}(2\leq i\leq n)\end{aligned}$$

把结果代入方程组验证（只需代入方程 1 和方程 2，其他方程同理)，方程组成立，所以这就是方程组的解。

（这一步必不可少，因为我们假设了这个方程组有解，才能把所有的方程相加，具体可参考这个视频：`https://www.bilibili.com/video/BV13q4y1E75c/?spm_id_from=333.1391.0.0&vd_source=d155cb524fdd3dbd0fd732cc3ae44dff`
）

10

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是 0，于是未知量可以取任意值。

设存在一个 $a_t \neq 0 (1 \leq t \leq n)$，于是，利用题设，有：

$$
\begin{aligned}
a_t a_t x_{jk} - a_j a_k x_{tt} = 0 \\
x_{jk} = \frac{a_j a_k}{a_t^2} x_{tt}
\end{aligned}
$$

所以，我们得到 x_{tt} 为自由变量的解

$$x_{jk} = \frac{a_j a_k}{a_t^2} x_{tt}$$

与 9 题一样，需要验证该解是否满足所有方程组。对任意方程

$$
\begin{aligned}
a_i a_l x_{jk} - a_j a_k x_{il} &= a_i a_l \frac{a_j a_k}{a_t^2} x_{tt} - a_j a_k \frac{a_i a_l}{a_t^2} x_{tt} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

验证完毕。