

6.2

张志聪

2025 年 10 月 5 日

1

- (1)

– 方法一：按照定义

对任意 $\alpha, \beta \in V$ ，我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) &= (\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \beta - 2(\eta, \beta)\eta) \\&= (\alpha, \beta) + (\alpha, -2(\eta, \beta)\eta) + (-2(\eta, \alpha)\eta, \beta) + (-2(\eta, \alpha)\eta, -2(\eta, \beta)\eta) \\&= (\alpha, \beta) - 2(\eta, \beta)(\alpha, \eta) - 2(\eta, \alpha)(\eta, \beta) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta)(\eta, \eta) \\&= (\alpha, \beta) - 2(\eta, \beta)(\alpha, \eta) - 2(\eta, \alpha)(\eta, \beta) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta) \\&= (\alpha, \beta) - 4(\alpha, \eta)(\eta, \beta) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta) \\&= (\alpha, \beta)\end{aligned}$$

所以， \mathcal{A} 是正交变换。

– 方法二：按照矩阵角度

按照命题 1.5 的推论，我们可以在 η 的基础上扩充成一组标准正交基，设为

$$\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n \tag{1}$$

于是, 线性变换 \mathcal{A} 在基 (1) 下矩阵 A 为

$$(\mathcal{A}\eta, \mathcal{A}\epsilon_2, \dots, \mathcal{A}\epsilon_n) = (\eta - 2(\eta, \eta)\eta, \epsilon_2 - 2(\eta, \epsilon_2)\eta, \dots, \epsilon_n - 2(\eta, \epsilon_n)\eta)$$

$$= (\eta, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$A^T A = E$$

可知 A 是正交矩阵, 所以 \mathcal{A} 是正交变换。

• (2)

由 (1) 的方法二的求解过程可知 $|A| = -1$, 所以 \mathcal{A} 是第二类的。

• (3)

$A^2 = E$, 由第四章命题 3.7(ii) 可知, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$ 。

• (4)

设 \mathcal{B} 在标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 B , 由于 \mathcal{B} 是正交变换, 所以 B 是正交矩阵, 因为 A 是正交矩阵, 则 A^{-1} 也是正交矩阵, 设

$$B_1 = A^{-1}B$$

是正交矩阵, 所以 B_1 对应的线性变换 \mathcal{B}_1 是正交变换, 又因为

$$|B_1| = |A^{-1}||B| = (-1)(-1) = 1$$

所以, \mathcal{B}_1 是第一类正交变换, 而且

$$AB_1 = B$$

所以

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}$$

2

我们有

$$V = V_1 \oplus V_1^\perp$$

由于 $\dim V_1 = n - 1$, 所以 $\dim V_1^\perp = 1$ 。

任取单位向量 $\eta \in V_1^\perp$; 在 V_1 取一组标准正交基 $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$, 合在一起得到 V 的一组标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ 。

因为 $\epsilon_i \in V_1$ ($i = 2, 3, \dots, n$), 所以

$$\mathcal{A}\epsilon_i = \epsilon_i \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

因为 $\mathcal{A}\eta \in V$, 可被线性表示为

$$\mathcal{A}\eta = k_1\eta + k_2\epsilon_2 + \dots + k_n\epsilon_n$$

于是, \mathcal{A} 在标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

因为 \mathcal{A} 是正交变换, 所以

$$|A| = \pm 1$$

所以 $k_1 = \pm 1$ 。

\mathcal{A} 是正交变换也可得

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\eta, \mathcal{A}\eta) &= (\eta, \eta) \\ &= 1 \\ &= k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 \end{aligned}$$

所以, $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$ 。

如果 $k_1 = 1$, 则

$$\mathcal{A}\eta = \eta \in V_1$$

出现矛盾。

综上, $k_1 = -1$, 于是

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

因为

$$\mathcal{A}(\eta) = -\eta = \eta - 2(\eta, \eta)\eta$$

$$\mathcal{A}(\epsilon_2) = \epsilon_2 = \epsilon_2 - 2(\eta, \epsilon_2)\eta$$

\vdots

$$\mathcal{A}(\epsilon_n) = \epsilon_n = \epsilon_n - 2(\eta, \epsilon_n)\eta$$

两个线性变换相等, 只需考察在一组基上向量相等, 所以 \mathcal{A} 是关于 η 的镜面反射。

3

- 必要性

利用题设和 \mathcal{A} 是正交变换, 我们有

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\mathcal{A}\alpha_i, \mathcal{A}\alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$$

- 充分性

(i) 先证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的秩是相同的。

取 V 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, 设

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)A$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)B$$

其中 A, B 都是 $n \times s$ 的矩阵。此时问题变为讨论 A 和 B 的秩。

有题设 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$ 可知 (标准真正交基下内积为对应坐标相乘在相加)

$$A^T A = B^T B$$

又因为（注：2-5-comment.tex 中有证明）

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$$

所以

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

(ii) 令

$$U = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

$$W = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

两者秩相同，可以构造一个同构映射 $f: U \rightarrow W$ 为对任意 $\alpha \in U$,

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s$$

定义

$$f(\alpha) = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + \dots + k_s \beta_s$$

此时，我们有

$$f(\alpha_i) = \beta_i$$

取 U^\perp, W^\perp 的一组基标准正交基

$$\epsilon_{r+1}, \epsilon_{r+2}, \dots, \epsilon_n$$

$$\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \dots, \eta_n$$

扩充 f ，对任意 $\alpha \in V$ ，

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s + k_{r+1} \epsilon_{r+1} + \dots + k_n \epsilon_n$$

定义

$$f(\alpha) = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + \dots + k_s \beta_s + k_{r+1} \eta_{r+1} + \dots + k_n \eta_n$$

验证 f 是正交变换：对任意 $\alpha', \alpha'' \in V$ ，

$$\alpha' = a_1 \alpha_1 + \dots + a_s \alpha_s + a_{r+1} \epsilon_{r+1} + \dots + a_n \epsilon_n$$

$$\alpha'' = b_1 \alpha_1 + \dots + b_s \alpha_s + b_{r+1} \epsilon_{r+1} + \dots + b_n \epsilon_n$$

因为 $(\beta_i, \eta_j) = 0 \quad (1 \leq i \leq r, j \geq r+1)$, 于是

$$\begin{aligned}
 (f(\alpha'), f(\alpha'')) &= (a_1\beta_1 + \cdots + a_{r+1}\eta_{r+1} + \cdots + a_n\eta_n, b_1\beta_1 + \cdots + b_{r+1}\eta_{r+1} + \cdots + b_n\eta_n) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_i b_j (\beta_i, \beta_j) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_i b_j (\alpha_i, \alpha_j) \\
 &= (\alpha', \alpha'')
 \end{aligned}$$

所以 f 就是目标正交变换。

4

用代数的方法, 算出镜面反射定义中的单位向量 η 。假设已有 \mathcal{A} 满足条件, 于是

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}\alpha &= \beta \\
 \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta &= \beta \\
 \alpha - \beta &= 2(\eta, \alpha)\eta
 \end{aligned}$$

因为 $2(\eta, \alpha)$ 是标量, 于是我们可知 $\alpha - \beta$ 、 η 向量的方向相同, 所以可得

$$\eta = \pm \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$$

假设 $\eta = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$, 则

$$\begin{aligned}
2(\eta, \alpha)\eta &= 2\left(\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}, \alpha\right)\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|^2}(\alpha - \beta, \alpha) \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|^2}[(\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta)] \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}[1 - (\alpha, \beta)] \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{(\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) + (\beta, \beta)}[1 - (\alpha, \beta)] \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{1 - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) + 1}[1 - (\alpha, \beta)] \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{2 - 2(\alpha, \beta)}[1 - (\alpha, \beta)] \\
&= 2\frac{\alpha - \beta}{2[1 - (\alpha, \beta)]}[1 - (\alpha, \beta)] \\
&= \alpha - \beta
\end{aligned}$$

所以, 可设 $\eta = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$, 并在 η 上扩展出 V 的一组标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$, \mathscr{A} 是一个镜面反射, 只需令:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\eta &= -\eta \\
\mathscr{A}\epsilon_2 &= \epsilon_2 \\
&\vdots \\
\mathscr{A}\epsilon_n &= \epsilon_n
\end{aligned}$$

且通过构造过程, 我们有

$$\mathscr{A}\alpha = \beta$$

5

设 A 是 n 维欧氏空间 V 上任意正交变换。

对 n 进行归纳。

$n = 1$ 时, 设单位向量 $\epsilon_1 \neq 0$ 是 V 的基, $\mathscr{A}\epsilon_1 = a_{11}\epsilon_1$, 因为这里的 a_{11} 就是特征值, 由命题 2.3 的推论 1 可知, $a_{11} = \pm 1$ 。

我们构造一个镜面反射 \mathcal{A}_1 使得

$$\mathcal{A}_1 \epsilon_1 = -\epsilon_1$$

其实一维的情况下，只有这么一种，理由如下：

注释 1. 设任意镜面反射 \mathcal{A}_1 的法向量为 β (即定义中的 η)，对任意 $\alpha \in V$ ，可表示为 $\alpha = k\beta$ ，于是，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \alpha &= \alpha - 2(\alpha, \beta)\beta \\ &= k\beta - 2(k\beta, \beta)\beta \\ &= k\beta - 2k\beta \\ &= -k\beta \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

所以，镜面反射 \mathcal{A}_1 与法向量的选取无关，是唯一的。

于是， $a_1 = -1$ 时， $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ ；

$a_1 = 1$ 时， $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1$ 。

归纳假设， $< n$ 时，命题成立。

取 V 的一组基标准正交基

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$$

设

$$\mathcal{A}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

因为 \mathcal{A} 是正交变换，所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也是一组标准正交基。

(i) 如果 $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ ，则我们有

$$\epsilon_i = \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

定义镜像反射:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n \epsilon_1 &= -\epsilon_1 = -\beta_1 \\ \mathcal{B}_n \epsilon_2 &= \epsilon_2 = \beta_2 \\ &\vdots \\ \mathcal{B}_n \epsilon_n &= \epsilon_n = \beta_n\end{aligned}$$

于是可得 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_n \mathcal{B}_n$ 。

(ii) 如果 $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$, 则存在 $\epsilon_i \neq \mathcal{A} \epsilon_i = \beta_i$, 不妨设 $\epsilon_1 \neq \beta_1$, 由习题 4 可知, 存在镜像反射 \mathcal{B}_1 使得

$$\mathcal{B}_1 \epsilon_1 = \beta_1$$

于是

$$\mathcal{B}_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (\beta_1, \mathcal{B}_1 \epsilon_2, \dots, \mathcal{B}_1 \epsilon_n)$$

是一组标准正交基。

令 $M = L(\epsilon_1)$ 则 $M^\perp = L(\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n)$, 由于 M^\perp 是 $n-1$ 维线性空间, $\mathcal{B}_1^{-1} \mathcal{A}|_{M^\perp}$ 是正交变换 (注: $\mathcal{A}|_{M^\perp} = L(\mathcal{B}_1 \epsilon_2, \dots, \mathcal{B}_1 \epsilon_n)$), 由归纳假设可知能被一系列镜面反射的乘积表示, 记为 $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3 \dots$ (有限个), \mathcal{B}_n 扩展为 V 上的镜面反射, 令 $\mathcal{B}_n \epsilon_1 = \epsilon_1$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_n(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) &= \mathcal{B}_1(\epsilon_1, \mathcal{B}_1^{-1} \beta_2, \dots, \mathcal{B}_1^{-1} \beta_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_n$$

归纳完成。