4.2

张志聪

2025 年 9 月 9 日

2

- 方法一

  设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$B$ 的列向量组为 $\beta_, \beta_2, \cdots, \beta_n$。并设

  $$rank(A) = rank(B) = r$$

  令 f_A 为 $K^n \to K^m$ 的线性映射：

  $$f_A(X) = AX$$

  则 $AX = 0$ 的解空间为 $Kerf_A$，而 $Imf_A = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，故 $dim(Imf_A) = rank(A) = r$，按照命题 3.5 的推论 1，有

  $$dimKerf_A + dimImf_A = dimK^n = n$$

  同理可得

  $$dimKerf_B + dimImf_B = dimK^n = n$$

  因为

  $$dimImf_A = dimImf_B$$

  于是可得

  $$dimKerf_A = dimKerf_B$$

它们的基础解系的维数相等，即

$$dimU = dimV$$

设 U, V 的一组基分别为

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \quad (I)$$
$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r} \quad (II)$$

定义映射 $f: U \to V$ 如下：任意 $Y \in U$，我们有

$$Y = a_1\alpha_{i_1} + a_2\alpha_{i_2} + \cdots + a_r\alpha_{i_r}$$

令

$$f(Y) = b_1\beta_{j_1} + b_2\beta_{j_2} + \cdots + b_r\beta_{j_r}$$

因为

$$\begin{aligned} f(\alpha_{i_1}) &= \beta_{j_1} \\ f(\alpha_{i_2}) &= \beta_{j_2} \\ &\vdots \\ f(\alpha_{i_r}) &= \beta_{j_r} \end{aligned}$$

易证 f 是线性映射，且 f 在 U, V 所取定的基下的矩阵为 E，这就找到了命题中的 $T = E$。

- 方法二

  因为 $rank(A) = rank(B)$，所以 A 与 B 相抵，所以存在 m 阶满秩方阵 P 和 n 阶满秩方阵 Q，使得

  $$A = PBQ$$

  任意 $\alpha \in U$，我们有

  $$\begin{aligned} A\alpha &= 0 \\ PBQ\alpha &= 0 \\ P^{-1}PBQ\alpha &= P^{-1}0 \\ BQ\alpha &= 0 \end{aligned}$$

令 $T=Q$，接下来证明 $f(Y)=TY(\forall Y\in U)$ 是 U 到 V 的同构映射。

因为 T 是矩阵，f 显然是线性映射。

(i)f 是单射：

$\forall \alpha,\beta\in U$，使得

$$
\begin{aligned}
T\alpha &= T\beta \\
T\alpha - T\beta &= 0 \\
T(\alpha-\beta) &= 0
\end{aligned}
$$

因为 T 满足，Tx 只有零解，所以存在

$$
\begin{aligned}
\alpha-\beta &= 0 \\
\alpha &= \beta
\end{aligned}
$$

(ii)f 是满射。

任意 $\beta\in V$，

$$
\begin{aligned}
T\alpha &= \beta \\
\alpha &= T^{-1}\beta
\end{aligned}
$$

需要证明 $\alpha\in U$。

$$
\begin{aligned}
A\alpha &= PBQ\alpha \\
&= PBQT^{-1}\beta \\
&= PBQQ^{-1}\beta \\
&= PB\beta
\end{aligned}
$$

因为 $\beta\ inV$，所以 $B\beta=0$，所以

$$A\alpha=0$$

综上，$\alpha\in U$，所以 T 是满射。

3