4.3 注释

张志聪

2025 年 9 月 9 日

注释 1. 使用命题 *3.1* 证明：行变换不改变矩阵的列秩。

证明：

A 是 $m \times n$ 矩阵，设列向量组为

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \quad (I)$$

为每一个行变换都构造一个从 $K^m \to K^m$ 的单射，这里以初等行变换：第 i 上的 k 倍，加到第 j 行为例（设 A 经过初等行变换得到 B）：构造映射

$f: K^m \to K^m$ 如下：若 $\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，那么

$$f(\beta) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + ka_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

容易验证，f 是线性映射且是单射。首先设 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_k}$ 是 (I) 的极大线性无关部分组，于是，由命题 3.1 可知，$f(\beta_{i_1}), f(\beta_{i_2}), \cdots, f(\beta_{i_k})$ 是线性无关的。

对任意 $\beta \in (I)$，存在

$$\beta = k_1 \beta i_1 + k_2 \beta i_2 + \cdots + k_k \beta i_k$$

由于 f 是线性映射，于是

$$f(\beta) = k_1 f(\beta i_1) + k_2 f(\beta i_2) + \cdots + k_k f(\beta i_k)$$

所以，$f(\beta_{i_1}), f(\beta_{i_2}), \cdots, f(\beta_{i_k})$ 是 B 中列向量组的极大线性无关部分组。

综上可得，该行变换不改变矩阵的列秩。

注释 2. 同构是等价关系。

注释 3. U 和 V 是数域 K 上的有限维线性空间，U 和 V 同构的充分必要条件是

$$dimU = dimV$$

证明：

- 必要性

  U 和 V，所以存在一个线性映射 $f: U \to V$，且 f 是双射。由命题 3.2 可知

  $$dimU = dimV$$

- 充分性

  令 $n = dimU = dimV$，设

  $$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

  是 U 的一组基，

  $$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \quad (II)$$

  是 V 的一组基。

  任意 $\alpha \in U$，我们有

  $$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

  构造映射 $f: U \to V$ 如下：

  $$f(\alpha) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_n\beta_n$$

  易得，f 是同构映射。

注释 4. 通过基，证明命题 *3.5* 在 U, V 是有限维线性空间的情况下，命题成立。

证明：

设 $Kerf$ 的一组基为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$$

然后，以此扩充成 U 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$$

其中

$$\overline{\alpha_{r+1}}, \overline{\alpha_{r+2}}, \cdots, \overline{\alpha_n}$$

是 $U/Kerf$ 的一组基。

因为 $Kerf$ 的一组基，在映射 f 下都是零向量，于是不可能是 Imf 的基，我们考虑

$$f(\alpha_{r+1}), f(\alpha_{r+2}), \cdots, f(\alpha_n)$$

设

$$k_{r+1}f(\alpha_{r+1}) + k_{r+2}f(\alpha_{r+2}) + \cdots + k_n f(\alpha_n) = 0$$
$$f(k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \cdots + k_n\alpha_n) = 0$$

可得 $k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \cdots + k_n\alpha_n \in Kerf$，所以存在 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \cdots + k_n\alpha_n = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$
$$-k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_r\alpha_r + k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

所以，$f(\alpha_{r+1}), f(\alpha_{r+2}), \cdots, f(\alpha_n)$ 线性无关。

任意 $\beta \in Imf$，存在

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

使得

$$\begin{aligned}\beta &= f(\alpha) \\ &= a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + \cdots + a_n f(\alpha_n) \\ &= a_{r+1} f(\alpha_{r+1}) + a_{r+2} f(\alpha_{r+2}) + \cdots + a_n f(\alpha_n)\end{aligned}$$

所以，$f(\alpha_{r+1}), f(\alpha_{r+2}), \cdots, f(\alpha_n)$ 是 Imf 的一组基。

于是可得

$$dimU/Kerf = dimImf = n - r$$

所以，$U/Kerf$ 与 Imf 同构。

注释 5. 命题 *3.6(ii)*，有一点要特别注意：$dimU$ 是 n 维的，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ 也必须是 n 个，但命题本身没有说不可以重复。

注释 6. $f : U \to V$ 是同构映射，那么任意给定基下的矩阵 $A = \sigma(f)$ 都是满秩矩阵。

证明：

设 U, V 的一组基分别是

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$$

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$$

于是，我们有

$$(f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \cdots, f(\epsilon_n)) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)A$$

因为 f 是同构映射，按照命题 3.1(i)，$f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \cdots, f(\epsilon_n)$ 在 V 中线性无关，于是可得 A 是满秩的，因为如果 A 不是满秩的，那么存在 A 的某个列向量可以被其他列向量线性表示，即某个 $f(\epsilon_i)$ 可以被其他 $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \cdots, f(\epsilon_{i-1}), f(\epsilon_{i+1}), \cdots, f(\epsilon_n)$ 线性表示，出现矛盾。

注释 7. 线性变换 $\mathscr{P}$ 是线性空间 V 某个子空间 M 的投影变换的充分必要条件是 $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$。

证明：

- 必要性

  设 $V = M \oplus N$，因为 $\mathscr{P}$ 是线性空间 V 对子空间 M 的投影变换，那么 $\forall \alpha \in V$，设

  $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N)$$

  我们有

  $$\mathscr{P}(\alpha) = \alpha_1$$

  又

  $$\begin{aligned} \mathscr{P}^2(\alpha) &= \mathscr{P}(\mathscr{P}(\alpha)) \\ &= \mathscr{P}(\alpha_1) \\ &= \alpha_1 \end{aligned}$$

  所以

  $$\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$$

- 充分性

  令

  $$\begin{aligned} M &= Im\mathscr{P} \\ N &= Ker\mathscr{P} \end{aligned}$$

  由 3.5 推论 1，我们有

  $$dimM + dimN = dimIm\mathscr{P} + (dimV - dimIm\mathscr{P}) = dimV$$

  又因为 $Ker\mathscr{P}, Im\mathscr{P}$ 都是 V 的子空间，所以 U, V 是直和。

  任意 $\alpha \in V$，令

  $$\alpha = \mathscr{P}(\alpha) + (\alpha - \mathscr{P}(\alpha))$$

显然 $\mathscr{P}(\alpha) \in Im\mathscr{P}$，因为

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\alpha - \mathscr{P}(\alpha)) &= \mathscr{P}(\alpha) - \mathscr{P}(\mathscr{P}(\alpha)) \\ &= \mathscr{P}(\alpha) - \mathscr{P}(\alpha) \\ &= 0\end{aligned}$$

所以，$\alpha - \mathscr{P}(\alpha) \in Ker\mathscr{P}$。

综上

$$V = Im\mathscr{P} \oplus Ker\mathscr{P} = M \oplus N$$

由以上的讨论可知，任意 $\alpha \in V$，有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N)$$

且

$$\mathscr{P}(\alpha) = \alpha_1$$

所以，$\mathscr{P}$ 是线性空间对子空间 M 的投影变换。

注释 8. 互补投影变换：$\mathscr{E} - \mathscr{P}$

证明：

设 $\mathscr{P}$ 是线性空间 V 对子空间 M（关于直和分解式 $V = M \oplus N$）的投影变换。

任意 $\alpha \in V$，设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N)$$

我们有

$$\begin{aligned}(\mathscr{E} - \mathscr{P})(\alpha) &= \mathscr{E}(\alpha) - \mathscr{P}(\alpha) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \\ &= \alpha_2\end{aligned}$$

注释 9. 命题 *3.8* 的一般情况（即线性映射）。

注释 10. 命题 *3.9* 的一般情况（即线性映射）。