2.1

张志聪

2025 年 8 月 3 日

1-5

略

6

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，我们有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k_{s+1}\beta = 0$$

存在非零解。

可知 $k_{s+1} \neq 0$，因为如果 $k_{s+1} = 0$，则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

存在非零解，于是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，与题设矛盾。

所以，β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示成

$$\beta = -\frac{1}{k_{s+1}}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s)$$

7

对任意线性无关的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \quad (I)$$

设其部分组为

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir} \quad (II)$$

其中 $1 \leq ir \leq s$。

$ir = 1$ 时，由于是线性无关的，所以不存在零向量，于是向量组 α_{i1} 是线性无关的。

$ir > 1$ 时，假设 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$ 线性相关，于是向量组 (II) 中存在 γ 向量可以被 (II) 中的其他向量线性表示，因为 (II) 中的向量也是 (I) 中的向量，进而可得 (I) 线性相关，与题设矛盾，假设不成立。

综上，命题得证。

8

略

9

- (1)

  反证法，假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，于是

  $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

  存在非零解。

  以上可以看做对应方程组的非零解，这个解满足所有方程，每个向量中去掉 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 个分量，会让方程数减少，但这个解还是可以满足剩下的方程，即：

  $$k_1\alpha_1' + k_2\alpha_2\prime + \cdots + k_m\alpha_m\prime = 0$$

  可得 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_m'$ 是线性相关的，与题设矛盾。

- (2)

  是 (1) 中证明的一部分：

  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，于是

  $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

存在非零解。

以上可以看做对应方程组的非零解，这个解满足所有方程，每个向量中去掉 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 个分量，会让方程数减少，但这个解还是可以满足剩下的方程，即：

$$k_1\alpha_1' + k_2\alpha_2\prime + \cdots + k_m\alpha_m\prime = 0$$

可得 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_m'$ 是线性相关的。

10

就是矩阵的初等变换的另一种阐述。

11

- 方法一（推荐）

  因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是线性相关的，那么

  $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

  存在非零解。

  从右往左，一定可以找到第一个非零的系数 $k_t(1 \le t \le s)$（因为题设中 $\alpha_1 \neq 0$，所以找到的第一个非零系数不会是 k_1），于是，α_t 就可以被之前的向量线性表示。

- 方法二（复杂）

  反证法，假设不存在 α_i 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 表示。那么，任意 $1 < k \le s$ 时，α_k 也不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性表示。因为如果能够被线性表示成：

  $$\alpha_k = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{k-1}\alpha_{k-1} + c_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + c_s\alpha_s$$

  由假设可知，$c_{k+1}, c_{k+2}, \cdots, c_s$ 均为 0，因为如果 $c_s \neq 0$，那么

  $$\alpha_s = \frac{1}{c_s}\alpha_k - \frac{1}{c_s}(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{k-1}\alpha_{k-1} + c_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + c_{s-1}\alpha_{s-1})$$

  与假设矛盾，所以 $c_s = 0$；类似地，可推出其他系数为 0。

于是，我们有

$$\alpha_k = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{k-1}\alpha_{k-1}$$

会与假设矛盾。

由 k 的任意性可知，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是线性无关的，与题设矛盾，假设不成立，命题得证。

12

略

13

按照极大线性无关部分组的定义证明。

线性无关性,题设已给出,我们只需证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以被 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$ 线性表示即可。由条件 (2) 可知，

$$a_1\alpha_i + a_2\alpha_{i_1} + \cdots + a_{r+1}\alpha_{i_r} = 0$$

存在非零解，这里 $a_1 \neq 0$，否者 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是线性相关的，与条件 (1) 矛盾。

所以，α_i 可以被 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$ 线性表示，由 α_i 的任意性可知，满足了极大线性无关部分组的定义，命题得证。

14

设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \quad (I)$$

反证法，假设命题不成立，那么，有 (I) 的线性无关的部分组：

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir} \quad (II)$$

存在 $\alpha_t \in (I)$ 无法被 (II) 线性表示。

于是，我们有

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}, \alpha_t \quad (III)$$

是线性无关的（反证法，利用习题 6）。

设

$$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jr} \quad (I')$$

是 (I) 的极大线性无关部分组，因为 (I) 的秩是 r，所以 (I') 的个数为 r。

(I') 可以线性表示 (I)，因为 (III) 是 (I) 的部分组，所以 (I') 也可以线性表示 (III)。由替换定理结论 1（2-1-comment.tex 中有证，也是命题 1.4 的逆否命题）可得

$$r \geq r + 1$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

15

设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \quad (I)$$
$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir} \quad (II)$$

由极大线性无关部分组的定义可知，我们只需证明 (II) 是线性无关的即可。

反证法，假设 (II) 不是线性无关的，那么 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$ 中存在可以被其他向量表示的向量，不妨设为 α_{i1}，从 (II) 中删除向量 α_{i1}，得到新的向量组:

$$\alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \cdots, \alpha_{ir} \quad (III)$$

可得 (II) 和 (III) 线性等价，于是 (III) 可以线性表示 (I)。

设

$$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jr} \quad (I')$$

是 (I) 的极大线性无关部分组，因为 (I) 的秩是 r，所以 (I') 的向量个数为 r。

(III) 可以线性表示 (I)，从而可以线性表示 (I')。

利用替换定理结论 1（2-1-comment.tex 中有证，也是命题 1.4 的逆否命题）可得

$$r - 1 \geq r$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

16

设 (I') 是 (I) 的极大线性无关部分组，秩为 r。
设 (II') 是 (II) 的极大线性无关部分组，秩为 s。

由题设 (II) 可以线性表示 (I) 可得，(II') 可以线性表示 (I')。

利用替换定理结论 1（2-1-comment.tex 中有证，也是命题 1.4 的逆否命题）可得

$$r \leq s$$

命题得证。

17

设

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \quad (I) \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (II)$$

易得 (I) 是线性无关的。

假设 (II) 是线性相关的，那么存在 (II) 的某个向量，可以被 (II) 的中的其他向量表示，不妨设为 α_1，从 (II) 中删除向量 α_1，得到新的向量组：

$$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \quad (III)$$

(III) 与 (II) 线性等价，由题设 (II) 可以线性表示 (I) 可得 (III) 可以线性表示 (I)。

由替换定理结论 1（2-1-comment.tex 中有证，也是命题 1.4 的逆否命题）可得

$$n-1 \geq n$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

18

设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

n 维坐标向量组:

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \quad (I')$$

- 必要性

  已知 (I) 线性无关，假设存在 n 维向量 β 不能被 (I) 线性表示，于是

  $$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (II)$$

  也是线性无关的。

  因为任意 n 维向量都可以被 (I') 线性表示，于是 (II) 可以被 (I') 线性表示，且 (II) 是线性无关的，利用替换定理结论 1（2-1-comment.tex 中有证，也是命题 1.4 的逆否命题）可得

  $$n \geq n+1$$

  存在矛盾，假设不成立。

- 充分性

  已知 (I) 可是线性表示任意 n 维向量，于是 (I') 中的任意向量都可以被 (I) 线性表示，利用习题 17 可得，(I) 是线性无关的。

19

设

任意向量组为:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

(I) 的任意线性无关部分组为:

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir} \quad (II)$$

取 (I) 的任意极大线性无关部分组为:

$$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{js} \quad (I')$$

由替换定理结论 (2) 可知，(II) 可以适当替换 (I') 中的向量得到向量组 (II')，且 (II') 与 (I') 线性等价。且由替换定理结论 (3) 可知，(II') 也是线性无关的，综上可得，(II') 是 (I) 的极大线性无关部分组，命题得证。

20

设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \quad (I)$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s \quad (II)$$

假设 (I) 和 (II) 两者不等价（以 (I) 无法线性表示 (II) 中的所有向量为例，其他情况类似），设两者的极大线性无关部分组分别为 $(I'),(II')$，且由题设可知 (I') 与 (II') 向量个数相同，不妨设为 r。

由题设知 (I) 是 (II) 的部分组，于是可知 (II') 是可以线性表示 (I') 的。又因为 (I) 无法线性表示 (II) 中的所有向量，从而 (I') 也无法线性表示 (II) 中的所有向量，即，存在 $\beta \in (II)$ 无法被 (I') 线性表示，把 β 加入 (I') 得到新的向量组 (I'')，利用习题 6 可知 (I'') 线性无关。

综上，我们有 (II') 可以线性表示 (I'')，利用替换定理结论 1（或命题 1.4 的逆否命题）可知

$$r \geq r+1$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

21

设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \quad (I)$$
$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r \quad (II)$$

由题设可知 (I) 可以线性表示 (II)，于是利用习题 16 可知，(I) 的秩大于等于 (II) 的秩。

令

$$\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$$

于是

$$\alpha_i = \alpha - \beta_i$$

所以

$$\alpha, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r \quad (III)$$

可以线性表示 (I)。

因为

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r = (r-1)\alpha$$
$$\alpha = \frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)$$

可得，(II) 可以线性表示 (III)。

于是，(II) 可以线性表示 (I)，利用习题 16 可知，(II) 的秩大于 (I) 的秩。

综上可得，(I) 与 (II) 的秩相等。

扩展：证明过程也表明了 $(I), (II)$ 线性等价。

22

设 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 的极大线性无关部分组为 (I')。

会不会他本身就是极大线性无关部分组？

我们有

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$$

可知其不是线性无关的，所以 (I') 的秩小于 3。

那么 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$ 是否线性相关（其他情况类似）？即

$$x_1(\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)=0$$

是否存在非零解？假设存在非零解，那么

$$x_1\alpha_1+(x_2-x_1)\alpha_2-x_2\alpha_3=0$$

成立，这表明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性相关的，与假设矛盾，假设不成立。

由替换定理可知，(I') 的秩大于等于 2，

综上，(I') 的秩为 2，任取向量组中的两个向量，都是其极大线性无关部分组。

23

设

$$\begin{aligned}\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n \quad & (I)\\ \alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r} \quad & (I')\\ \alpha-\alpha_1,\alpha-\alpha_2,\cdots\alpha-\alpha_n \quad & (II)\end{aligned}$$

由习题 21 可知，$(I),(II)$ 是线性等价的，那么可得两者的秩都是 r。

假设

$$\alpha-\alpha_{i_1},\alpha-\alpha_{i_2},\cdots,\alpha-\alpha_{i_r} \quad (II')$$

是 (II) 的极大线性无关部分组。

只要证明 $(I'),(II')$ 线性等价，则 (II') 的秩与 (I') 的秩相同也是 r，从而 (II') 是线性无关的（因为 (II') 只有 r 个向量）。

引入一个临时向量组:

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r},\alpha \quad (III)$$

我们证明 $(I'),(III)$ 线性等价，$(III),(II')$ 线性等价，从而得到 $(I'),(II')$ 线性等价。

$(I'),(III)$ 线性等价是显然的。

(III) 可以线性表示 (II') 也是显然的，我们主要考虑 (II') 线性表示 (III) 的证明。先考虑 α 如何用 (II') 线性表示。

我们有

$$\begin{aligned}
k_1(\alpha-\alpha_{i_1})+k_2(\alpha-\alpha_{i_2})+\cdots+k_r(\alpha-\alpha_{i_r}) &= (k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha-(k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}) \\
&= (k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha-\alpha \\
&= (k_1+k_2+\cdots+k_r-1)\alpha
\end{aligned}$$

由题设可知 $k_1+k_2+\cdots+k_r\neq 1$，于是可得

$$\alpha=\frac{1}{k_1+k_2+\cdots+k_r-1}k_1(\alpha-\alpha_{i_1})+k_2(\alpha-\alpha_{i_2})+\cdots+k_r(\alpha-\alpha_{i_r})$$

所以，α 可以被 (II') 线性表示。

至于 (III) 中其他向量的线性表示则是显然的。

综上可得，$(I'),(II')$ 线性等价，命题得证。

24

反证法，假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，那么

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

存在非零解。

取 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 中的最大值，不妨设为 k_i（因为存在非零解，所以 $k_i\neq 0$）。

取第 i 行方程，我们有

$$\begin{aligned}
k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\cdots+k_ia_{ii}+\cdots+k_sa_{si} &= 0 \\
-(k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\cdots+k_{i-1}a_{(i-1)i}+k_{i+1}a_{(i+1)i}+k_sa_{si}) &= k_ia_{ii} \\
|k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\cdots+k_{i-1}a_{(i-1)i}+k_{i+1}a_{(i+1)i}+k_sa_{si}| &= |k_i||a_{ii}| \\
|k_1||a_{1i}|+|k_2||a_{2i}|+\cdots+|k_{i-1}||a_{(i-1)i}|+|k_{i+1}||a_{(i+1)i}|+|k_s||a_{si}| &\geq |k_i||a_{ii}| \\
|k_i|(|a_{1i}|+|a_{2i}|+\cdots+|a_{(i-1)i}|+|a_{(i+1)i}|+|a_{si}|) &\geq |k_i||a_{ii}| \\
|a_{1i}|+|a_{2i}|+\cdots+|a_{(i-1)i}|+|a_{(i+1)i}|+|a_{si}| &\geq |a_{ii}|
\end{aligned}$$

与题设矛盾，假设不成立，命题得证。

25

设

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \quad (I)$$
$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \quad (II)$$

(II) 的秩是 n，接下来，我们只需证明 $(I),(II)$ 线性等价，就能说明 (I) 的秩也为 n。

引入一个向量 n 维向量

$$\epsilon = (1, 1, \cdots, 1)$$

新建一个向量组

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \epsilon \quad (III)$$

我们只需证明 $(I),(II)$ 都与 (III) 线性等价，则 $(I),(II)$ 线性等价。

$(II),(III)$ 线性等价是显然的；

(III) 可以线性表示 (I) 也是显然的；

(I) 是否可以线性表示 (III)，关键在于是否可以表示 ϵ。

我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_1}\eta_1 + \frac{1}{a_2}\eta_2 + \frac{1}{a_n}\eta_n \\
&= (\frac{1}{a_1}\epsilon + \epsilon_1) + (\frac{1}{a_2}\epsilon + \epsilon_2) + \cdots + (\frac{1}{a_n}\epsilon + \epsilon_n) \\
&= (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + 1)\epsilon
\end{aligned}$$

由题设可知

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq 0$$

于是可得

$$\epsilon = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}(\frac{1}{a_1}\eta_1 + \frac{1}{a_2}\eta_2 + \frac{1}{a_n}\eta_n)$$

所以，ϵ 可以被 (I) 线性表示，于是我们有 $(I),(III)$ 线性等价。

综上，$(I),(II)$ 线性等价，于是秩都等于 n。