4.2 注释

张志聪

2025 年 9 月 24 日

注释 1.

$$M_i \cap (\sum_{j=1;j\neq i}^{n} M_j) = \{0\}\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

则

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_n = \{0\}$$

反之，不成立。

证明：

假设

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_n \neq \{0\}$$

即存在非零向量 $\alpha \in M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_n$，于是

$$\alpha \in M_i \cap (\sum_{j=1;j\neq i}^{n} M_j)\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

存在矛盾。

反之，只需举一个反例，假设只有 M_k, M_r 存在向量 α，且满足

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_n = \{0\}$$

对于

$$M_k \cap (\sum_{j=1;j\neq i}^{n} M_j) = \{0, \alpha\}$$

注释 2. 直和的结合律：

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

证明：

首先 $(A+B)+C = A+B+C = A+(B+C)$ 是显然的。我们需要着重说明的是直和关系的成立。

- 已知 $(A \oplus B) \oplus C$ 可得 $A \oplus B \oplus C$。

  $(A \oplus B) \oplus C$，由定理 2.2(iii)，我们有

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{0\} \\ (A+B) \cap C &= \{0\} \end{aligned}$$

  为了证明 $A \oplus B \oplus C$，我们利用定理 2.3 的 (iii)，即

$$\begin{aligned} A \cap (B+C) &= \{0\} \\ B \cap (A+C) &= \{0\} \\ C \cap (A+B) &= \{0\} \end{aligned}$$

  最后一条是已知的，且前两条是对称的，所以只需证明一条。

  $\forall \alpha \in A \cap (B+C)$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha = a &= b + c \\ a - b &= c \end{aligned}$$

  因为 $a - b \in A + B, c \in C$，利用 $(A+B) \cap C = \{0\}$ 可知

$$\begin{aligned} a - b = c &= 0 \\ a &= b \\ c &= 0 \end{aligned}$$

  又 $A \cap B = \{0\}$，所以

$$a = b = 0$$

所以

$$\alpha = a = 0$$

综上可得

$$A \cap (B + C) = \{0\}$$

所以，$A + B + C$ 是直和。

- 已知 $A \oplus B \oplus C$ 可得 $(A \oplus B) \oplus C$。

  为了证明 $(A \oplus B) \oplus C$，我们利用定理 2.2 的 (i)，反证法，假设存在同一向量在 $(A \oplus B) \oplus C$ 中有两种不同的表示。

$$\alpha = (a_1 + b_1) + c_1$$
$$\alpha = (a_2 + b_2) + c_2$$

  两式相减得

$$(a_1 + b_1) + c_1 - [(a_2 + b_2) + c_2] = 0$$
$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = 0$$

  因为 $A \oplus B \oplus C$，利用定理 2.3(ii) 可知

$$a_1 - a_2 = 0$$
$$b_1 - b_2 = 0$$
$$c_1 - c_2 = 0$$

  即

$$a_1 = a_2$$
$$b_1 = b_2$$
$$c_1 = c_2$$

  与假设矛盾，故 $(A + B) + C$ 中任意向量表法唯一，所以 $(A + B) + C$ 是直和。

类似地，可证 $A \oplus B \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$。

注释 3. 有限多个真子空间 $V_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 做并，无法得到整个线性空间 V。

证明：

对 n 进行归纳。

$n=1$ 时，因为 $V_1 \subset V$，命题显然成立。

归纳假设 $n=m-1$ 时，命题成立。

$n=m$ 时，由归纳假设可知，存在 $\alpha \in V$ 使得

$$\alpha \notin V_i \ (i=1,2,\cdots,m-1)$$

因为 $V_m \subset V$，所以存在 $\beta \notin V_m$。
所以 α, β 不能同时属于 $V_i(i=1,2,\cdots,m)$。进而 $\alpha+k_i\beta, \alpha+k\beta$ 不会同时属于 $V_i(i=1,2,\cdots,m)$，如果

$$\alpha+k_i\beta \in V_i$$
$$\alpha+k\beta \in V_i$$

那么

$$(\alpha+k\beta)-(\alpha+k_i\beta)=(k-k_i)\beta$$

所以 $\beta \in V_i$。
又由

$$\alpha+\beta-\beta=\alpha$$

可知 $\alpha \in V_i$，出现矛盾。
因此若 $\alpha+k_i\beta \in V_i$，则对任意 $k \neq k_i$，必有 $\alpha+k\beta \notin V_i$。

由于数域是无限的，k_i 至多只有 m 个不同的值，我们可以从数域中选取一个

$$k \notin \{k_1, k_2, \cdots, k_m\},$$

从而保证 $\alpha+k\beta \notin V_i \ (i=1,2,\cdots,m)$。

故

$$V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m \neq V$$

归纳完成，命题得证。

注释 4. 向量的模 M 同余和数的模 m 同余的类比。

正整数中，

$$a \equiv b(mod\ m)$$

表示 a, b 除以数 m 的余数相同，即

$$a - b \in \{km | k \in \mathbb{Z}\}$$

向量中，

$$\alpha \equiv \beta(mod\ M)$$

按照定义有

$$\alpha - \beta \in M$$

注释 5. 一个线性空间 V 的商空间 V/M 是不是唯一的。

证明：

设 $\overline{V} \neq \overline{W}$ 都是 V 的商空间，所以存在同余类 $\overline{\alpha} \in \overline{V}, \overline{\alpha} \notin \overline{W}$。

又因为 $\alpha \in V$，由于商空间是 V 内向量模 M 同余类的全体所成的集合，所以 α 的模 M 同余类 $\overline{\alpha}$ 有:

$$\overline{\alpha} \in \overline{V}, \overline{\alpha} \in \overline{W}$$

存在矛盾。

注释 6. 商空间的维数是不是就是其元素个数。

数模 m 的同余类是有限的，比如整数 5，它的余数只有 $0, 1, 2, 3, 4$。受此启发，那么商空间元素是不是也是有限的。

先给出结论：不是有限的。

只要是线性空间，只要不是零空间（即只有零元素的空间），那么元素个数一定是无限个的。

注释 7. 商空间作为工具，通常用来干什么？

降维，把不关心的维度放入模 M 中。

注释 8. 商空间与补空间的关系。

一个线性空间 V，它的补空间不唯一，商空间是唯一的。