6.1

张志聪

2025 年 9 月 30 日

1

A 是 n 阶正定矩阵，所以 A 是对称矩阵。

- (1)

  (i)

$$
\begin{aligned}
(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) &= (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)A\beta^T \\
&= k_1\alpha_1 A\beta^T + k_2\alpha_2 A\beta^T \\
&= k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta)
\end{aligned}
$$

  (ii)

$$
\begin{aligned}
(\beta, \alpha) &= [(\beta, \alpha)]^T \\
&= (\beta A\alpha^T)^T \\
&= \alpha A^T \beta^T \\
&= \alpha A\beta^T \\
&= (\alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

  注意，因为 (β, α) 是标量。

  (iii) 因为 A 是正定矩阵，所以

$$
(\alpha, \alpha) > 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0)
$$

  且 (α, α) 当且仅当 $\alpha = 0$。

- (2)

  因为 A

  $$\begin{aligned}|(\alpha,\beta)| &\le |\alpha|\cdot|\beta| \\ |\alpha A\beta^T| &\le \sqrt{\alpha A\alpha^T}\cdot\sqrt{\beta A\beta^T}\end{aligned}$$

  注意，不能写成对应坐标相乘在相加的形式，因为这里的 A 不一定是单位矩阵。

4

- 必要性

  α,β 正交，于是

  $$\begin{aligned}(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta) &= (\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta) \\ &= (\alpha,\alpha)+t^2(\beta,\beta) \\ &= |\alpha|^2+t^2|\beta|^2 \\ &\ge |\alpha|^2\end{aligned}$$

  因为 $|\alpha|>0$，所以

  $$|(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)| \ge |\alpha|$$

- 充分性

  反证法，假设 $(\alpha,\beta)\neq 0$。

  由题设可知

  $$\begin{aligned}|\alpha+t\beta| &\ge |\alpha| \\ (\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta) &\ge (\alpha,\alpha) \\ (\beta,\beta)t^2+2(\alpha,\beta)t &\ge 0\end{aligned}$$

  右端是关于 t 的二次多项式，于是判别式为

  $$\Delta = 4(\alpha,\beta)^2 > 0$$

  于是有个实数根，它在两个实数根之间函数值为负，出现矛盾。

5

- (1)

  我们有

  $$\begin{aligned} |\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta,\alpha+\beta) \\ &= (\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta) \\ &= |\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta|^2 \end{aligned}$$

  利用命题 1.1 的不等式，我们有

  $$2|(\alpha,\beta)| \leq 2|\alpha||\beta|$$

  于是

  $$|\alpha+\beta|^2 \leq |\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 = (|\alpha|+|\beta|)^2$$

  这表明

  $$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$$

- (2)

  利用 (1)

  $$\begin{aligned} |\alpha-\gamma| &= |\alpha+\beta-\beta-\gamma| \\ &= |\alpha-\beta+\beta-\gamma| \\ &\leq |\alpha-\beta|+|\beta-\gamma| \end{aligned}$$

  这表明

  $$d(\alpha,\gamma) \leq d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$$

6

提示：利用命题 1.5 的证明思想，得到 $L(\alpha,\beta,\gamma)$ 的正交补。

7

- (1)

  设

  $$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

  于是

  $$\begin{aligned}(\beta,\beta) &= (\beta, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n)\\ &= k_1(\beta,\alpha_1) + k_2(\beta,\alpha_2) + \cdots + k_n(\beta,\alpha_n)\\ &= 0\end{aligned}$$

  所以，$\beta = 0$。

- (2)

  我们有

  $$\begin{aligned}(\beta_1,\alpha_i) &= (\beta_2,\alpha_i)\\ (\beta_1,\alpha_i) - (\beta_2,\alpha_i) &= 0\\ (\beta_1-\beta_2,\alpha_i) &= 0\end{aligned}$$

  由 (1) 可知

  $$\begin{aligned}\beta_1 - \beta_2 &= 0\\ \beta_1 &= \beta_2\end{aligned}$$

15

- 必要性

  由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，令 $M = L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，于是 M 是 V 的线性子空间。(α,β) 是 M 内一个对称双线性函数，又因为 M 是有限维线性空间，所以 (α,α) 是一个正定二次型函数，即 (α,β) 在 M 内的任一组基下的矩阵是正定矩阵。所以 $|D| > 0$。

- 充分性

反证法,假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,即存在不全为 0 的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

令

$$x = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ s \end{bmatrix}$$

考虑 D 的任意一个行向量 D_i，我们有

$$\begin{aligned} D_i x &= (\alpha_i, \alpha_1)k_1 + (\alpha_i, \alpha_2)k_2 + \cdots + (\alpha_i, \alpha_s)k_s \\ &= (\alpha_1, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) \\ &= (\alpha_1, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是

$$Dx = 0$$

因为 $x \neq 0$，这与 $det(D) \neq 0$ 矛盾。

17

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

于是

$$
\begin{aligned}
A^T A &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & \cdots & a_{11}a_{1n} \\ a_{12}a_{11} & a_{12}^2 + a_{22}^2 & \cdots & a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}a_{11} & a_{1n}a_{21} + a_{2n}a_{22} & \cdots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

考虑第一行，

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \pm 1 \\
a_{1i} &= 0 (i = 2, 3, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

逐行往下，命题得证。

18

$|A| \neq 0$，所以 A 是满秩的，A 的列向量可以看做欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

由命题 1.4 可知，正交矩阵 Q 可以看做欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。而施密特正交化方法可以让 A 化为一组标准正交基。

为了讨论的方便，符号与教科书中保持一致（P9）。即 A 的列向量组设为

$$
\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n
$$

Q 的列向量组设为

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |\epsilon_1'|\epsilon_1 \\
\alpha_2 &= \frac{(\alpha_2, \epsilon_1')}{(\epsilon_1', \epsilon_1')}|\epsilon_1'|\epsilon_1 + |\epsilon_2'|\epsilon_2 \\
\alpha_3 &= \frac{(\alpha_3, \epsilon_1')}{(\epsilon_1', \epsilon_1')}|\epsilon_1'|\epsilon_1 + \frac{(\alpha_3, \epsilon_2')}{(\epsilon_2', \epsilon_2')}|\epsilon_2'|\epsilon_2 + |\epsilon_3'|\epsilon_3 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \frac{(\alpha_n, \epsilon_1')}{(\epsilon_1', \epsilon_1')}|\epsilon_1'|\epsilon_1 + \frac{(\alpha_n, \epsilon_2')}{(\epsilon_2', \epsilon_2')}|\epsilon_2'|\epsilon_2 + \cdots + |\epsilon_n'|\epsilon_n
\end{aligned}$$

令

$$T = \begin{bmatrix}
|\epsilon_1'| & \frac{(\alpha_2,\epsilon_1')}{(\epsilon_1',\epsilon_1')}|\epsilon_1'| & \frac{(\alpha_3,\epsilon_1')}{(\epsilon_1',\epsilon_1')}|\epsilon_1'| & \frac{(\alpha_n,\epsilon_1')}{(\epsilon_1',\epsilon_1')}|\epsilon_1'| \\
0 & |\epsilon_2'| & \frac{(\alpha_3,\epsilon_2')}{(\epsilon_2',\epsilon_2')}|\epsilon_2'| & \frac{(\alpha_n,\epsilon_2')}{(\epsilon_2',\epsilon_2')}|\epsilon_2'| \\
0 & 0 & |\epsilon_3'| & \frac{(\alpha_n,\epsilon_2')}{(\epsilon_3',\epsilon_3')}|\epsilon_3'| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & |\epsilon_n'|
\end{bmatrix}$$

综上，

$$A = QT$$