4.4 注释

张志聪

2025 年 9 月 18 日

注释 1. 两个 n 阶矩阵 A, B 相似，我们有

$$det(A) = det(B)$$
$$Trace(A) = Trace(B)$$

证明：

- $det(A) = det(B)$

  因为 A, B 相似，那么存在 n 阶可逆矩阵 T，使得

  $$B = T^{-1}AT$$

  于是

  $$\begin{aligned} |B| &= |T^{-1}AT| \\ &= |T^{-1}||A||T| \\ &= |A||T||T^{-1}| \\ &= |A||TT^{-1}| \\ &= |A| \end{aligned}$$

- $Trace(A) = Trace(B)$

  因为相似举证，有着相同的特征多项式，即

  $$|\lambda E - B| = |\lambda - A|$$

于是，由命题 4.2，我们有

$$f(\lambda) = |\lambda - A| = \lambda^n - Trace(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$$
$$g(\lambda) = |\lambda - B| = \lambda^n - Trace(B)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|B|$$

因为

$$f(\lambda) = g(\lambda)$$

于是，我们可以任意代入 $l = n + 1$ 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_l$，使得

$$f(x_i) = g(x_i)$$

于是利用第一章 §2 命题 2.2 的推论 2 可知，$f(\lambda), g(\lambda)$ 多项式的系数相等，于是可得

$$Trace(A) = Trace(B)$$

注释 2. *例 4.4 的另一种证明方式。*

证明： todo

注释 3. *代数重数 $\geq$ 几何重数*

证明：

注释 4. *$\mathscr{A}$ 是否可以对角化的充分必要条件：*

$$\textbf{代数重数之和} = \textbf{几何重数之和}$$

推论：

$$\textbf{每个特征值的代数重数} = \textbf{每个特征值的几何重数}$$