2.2 注释

张志聪

2025 年 8 月 4 日

注释 1. *A 经过若干次初等列变换化为矩阵 B,“推论”可以推广到 A 的行向量组。*

证明:

设 A 的行向量组是 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_m^T$,$B$ 的行向量组是 $\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_m^T$。

考察 A^T。A 的行向量组是 A^T 的列向量组,对 A 做初等列变换等价于对 A^T 做初等行变换。

结论 (i):

如果 $\alpha_{i1}^T, \alpha_{i2}^T, \cdots, \alpha_{ir}^T$ 是 A 的行向量组的一个极大线性无关部分组,那么 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$ 是矩阵 A^T 的列向量组的一个极大线性无关部分组,利用推理 (i) 可知,$\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ir}$ 是 B^T 的列向量组的一个极大线性无关部分组,而且,当

$$\alpha_i = k_1\alpha_{i1} + k_2\alpha_{i2} + \cdots + k_r\alpha_{ir}$$

时,有 $\beta_i = k_1\beta_{i1} + k_2\beta_{i2} + \cdots + k_r\beta_{ir}$,于是

$$\alpha_i^T = k_1\alpha_{i1}^T + k_2\alpha_{i2}^T + \cdots + k_r\alpha_{ir}^T$$

时,有 $\beta_i^T = k_1\beta_{i1}^T + k_2\beta_{i2}^T + \cdots + k_r\beta_{ir}^T$。

结论 (ii):

证明类似,不做赘述。

注释 2. *问题 2:*

求 K^n 内下面向量组（以行向量为例）的极大线性无关部分组：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \quad (I)$$

操作方法：

操作方式和例 *2.2* 相同，只是额外支持初等列变换，在进行该操作时，希腊字母表示的向量**不**跟着变，最终把 $m \times n$ 矩阵化为阶梯型。

试着完成该操作方法的理论支持部分。

证明：

矩阵 A 通过上述“操作方式”我们得到矩阵 B，并的到一个极大线性无关部分组：

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \tag{1}$$

我们需要证明这确实是矩阵 A 的极大线性无关部分组。

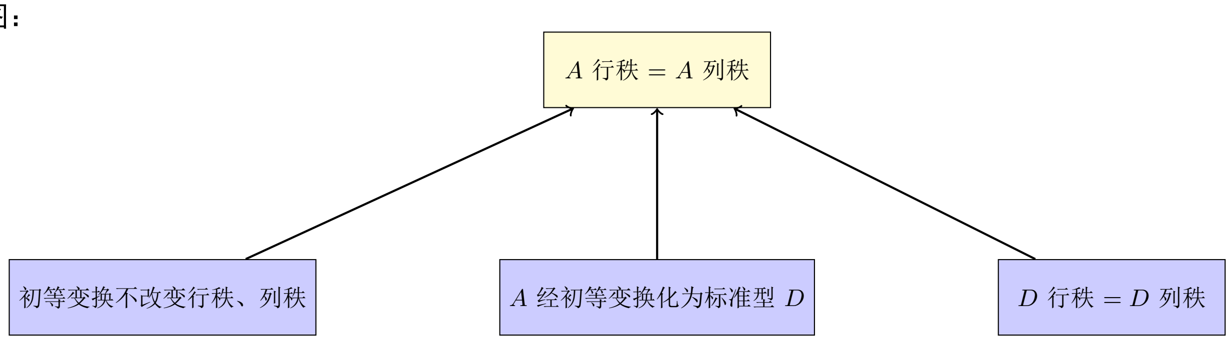
注释 3. 标准型的唯一性。

证明：

任意 $m \times n$ 矩阵 A，设 A 的行秩为 r，通过初等变换化为两个标准型 D_1, D_2，如果 $D_1 \neq D_2$，由于标准型的特殊性，只能是 D_1 与 D_2 中 1 的个数不同，而 1 的个数决定了 D_1, D_2 的行秩，由命题 2.1 和 2.2 可知，初等变换是不改变 A 的行秩的，那么 D_1, D_2 的行秩都等于 A 的行秩，即 D_1 与 D_2 中 1 的个数相等，于是存在矛盾，所以必有 $D_1 = D_2$。

注释 4. 任意矩阵 A，A 的行秩 $= A$ 的列秩，书中是如何保证的。

如图：



注释 5. *例 2.2 和例 2.3 思想的结合，求向量组的极大线性无关部分组。*

证明：

操作方式：

以行向量组为例，设任意行向量组为

$$\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T$$

把向量组作为行排成一个矩阵 A，在做初等行变换时，如例 2.2 把该行向量的变换过程记录下来，在做初等列变换时，无需做任何记录。

最后化为（行）阶梯型，剩余的操作与例 2.2 相同：确定秩以及通过线性表示关系确定极大线性无关部分组。

注意：如果是列向量组，则最后要化为列形式的阶梯型，并记录下列变换过程，行变换无需记录。

理论支持：

设 A 经过 n 次初等变换化为阶梯性 B，其中有 k 次列变换，$n-k$ 次行变换。

$k=0$ 时，就是例 2.2 的情况。

$k=n$ 时，就是例 2.3 的情况。

$0<k<n$ 时，由推论可知，即：初等列变换，是不改变矩阵行向量组的线性表示关系的。

具体情况如下：通过阶梯型 B 我们确定 A 的行秩，因为初等变换对矩阵的行秩没有影响，这一点我们不做考虑。

通过线性表示关系，我们确定 A 的极大线性无关部分组，又初等列变换，不改变矩阵行向量组的线性表示关系，所以，不会对行向量组的极大线性无关部分组的确定产生影响。