1.2

张志聪

2025 年 8 月 1 日

1

$\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

以扩张的角度看待这个问题：首先，$\mathbb{Q}$ 是最小数域，且

$$x^2 + 5 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{5}i$$

于是，我们的目标数域 K 必须有如下性质：

$$\mathbb{Q} \cup \{\pm\sqrt{5}i\} \subseteq K$$

数域 K 要保持四则运算的封闭性，我们最终得到

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$$

那么，这里的 K 是满足条件的最小数域么？
假设存在另一个更小的数域 G，也满足

$$\mathbb{Q} \cup \{\pm\sqrt{5}i\} \subseteq G$$

且对四则运算的封闭性。

因为 $G \subset K$，所以存在 $\alpha \in K$，使得

$$\alpha \notin G$$

因为

$$\mathbb{Q} \cup \{\pm\sqrt{5}i\} \subseteq K$$
$$\mathbb{Q} \cup \{\pm\sqrt{5}i\} \subseteq G$$

可得

$$\alpha \notin \mathbb{Q}$$

于是，α 只能是如下形式的无理数

$$\alpha = a + b\sqrt{5}i \, (b \neq 0)$$

因为

$$b\sqrt{5}i = \sqrt{5}i + \sqrt{5}i + \cdots + \sqrt{5}i$$

由于 G 要保持四则运算的封闭性，所以

$$\alpha \in G$$

存在矛盾。

2

令 $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$。

由命题 2.1，令 $a = 1, f(1) = -1$，于是我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= q(x)(x-1) + f(1) \\ &= q(x)(x-1) - 1 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} q(x) &= 2q_4(x) - 3q_2(x) + 1 \\ &= 2(x^3 + x^2 + x + 1^1) - 3(x^1 + 1) + 1 \\ &= 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 - 3x - 3 + 1 \\ &= 2x^3 + 2x^2 - x \end{aligned}$$

3

由命题 2.1 可知

$$q(x) = a_0 q_n(x) + a_1 q_{n-1}(x) + \cdots + a_{n-1}$$

对任意 $2 \leq k \leq n$，我们有

$$q_k(x) = x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1}$$

因为 $a \in K$，所以 $q_k(x)$ 的系数也都属于 K。进而，$q(x)$ 的系数也都属于 K。

4

我们考虑变量代换 $y = x - a$，于是 $x = y + a$，我们有

$$f(x) = f(y + a)$$

$f(y + a)$ 是一个以 y 为变量的新的多项式 g，次数为 n，且系数任然属于数域 K，设它为

$$g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots + b_n y^n$$

代回 $y = x - a$，我们有

$$g(y) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots + b_n(x - a)^n$$

又因为，我们有

$$g(y) = f(y + a) = f(x)$$

所以

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots + b_n(x - a)^n$$

（另一种方法就是以数学分析的角度考虑——泰勒公式的有限版本）

5

由推论 1 可知，$f(x)$ 有 n 个复数根，不妨设为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

由命题 2.2 可知，$f(x)$ 可表示成

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

对 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可以分成两类：
一类是实数根，设为 $R = \{b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, k\}$；
一类是复数根，设为 $C = \{c_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots, m\}$；
于是，我们有

$$f(x) = a_0(x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_k)(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m)$$

由命题 2.4 可知，对任意 $c_j \in C$，由对应的共轭复数也在 C 中，于是，我们有

$$\begin{aligned} f_j(x) &= (x - c_j)(x - \overline{c_j}) \\ &= x^2 - (c_j + \overline{c_j})x + c_j\overline{c_j} \end{aligned}$$

令 $p_j = -(c_j + \overline{c_j})$，$q_j = c_j\overline{c_j}$，此时 p_j, q_j 都是实数，所以 $f_j(x)$ 是一个实数系上的二次多项式。又因为 $f_j(x) = 0$ 没有实数解，所以

$$p_j^2 - 4q_j < 0$$

综上，$f(x)$ 可表示成：

$$f(x) = a_0 \left(\prod_{i=1}^{k} (x - b_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{l=m/2} (x^2 + p_j x + q_j) \right)$$

其中 $p_j^2 - 4q_j < 0$，$(b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, k)$。

6

由命题 2.1 可知，

$$f(x) = q(x)(x - 1) + f(1)$$

因为 $f(a) = 0$，即

$$\begin{aligned} q(a)(a - 1) + f(1) &= 0 \\ q(a)(a - 1) + a_0 + a_1 + \cdots + a_n &= 0 \\ -q(a)(a - 1) &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

由 $q(x)$ 的构造方式可知，$q(a)$ 是整数，于是 $-q(a)(a - 1)$ 也是整数，可得 $a - 1$ 整除 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$。（注意：代数学中的整除结果不一定非要是正的，负的也可以）

类似地，

$$f(x) = q(x)(x - (-1)) + f(-1)$$

因为 $f(a) = 0$，即

$$\begin{aligned} q(a)(a-(-1)) + f(-1) &= 0 \\ q(a)(a+1) + a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n &= 0 \\ -q(a)(a+1) &= a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n \end{aligned}$$

于是 $a+1$ 整除 $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n$，也就整除 $(-1)^n(a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n)$。

7

只做第一题，别的类似。

多项式的 $a_0 = 1, a_4 = -14$。

设有理数的零点表示成 $\frac{m}{k}$。

于是，我们要保证以下结果都是整数：

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{k} &= \frac{1}{k} \\ \frac{a_4}{m} &= \frac{-14}{m} \end{aligned}$$

于是可能的结果是

$$\begin{aligned} k &\in \{1, -1\} \\ m &\in \{1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14\} \end{aligned}$$

他们的组合是否为零点，就要一个个试验了。

- $\frac{m}{k} = \frac{1}{1} = 1$。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 1 - 6 + 15 - 14 = -4$$

  不是零点。

- $\frac{m}{k} = \frac{-1}{1} = -1$。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (-1) - 6 + (-15) - 14 = -46$$

  不是零点。

- $\frac{m}{k} = \frac{2}{1} = 2$。

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

  是零点。

- 以此类推

  最后，有唯一的理数根：2

8

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 - \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j\end{aligned}$$

由命题 2.3 可知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sigma_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = -\frac{a_1}{a_0} \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = \sigma_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \frac{a_2}{a_0}\end{aligned}$$

综上，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = (-\frac{a_1}{a_0})^2 - 2\frac{a_2}{a_0}$$

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 属于 K，所以 $(-\frac{a_1}{a_0})^2 - 2\frac{a_2}{a_0} \in K$。

9

先讨论 $k>0$ 的情况。

讨论，n,k 互为质数。

我们有

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=e^{i2\pi\frac{k}{n}}+e^{i2\pi\frac{2k}{n}}+\cdots+e^{i2\pi\frac{nk}{n}}$$

现在我们证明，任意 $\epsilon^{jk}\neq\epsilon^{lk}(1\leq j<l\leq n)$，即两两不相等。

反证法，假设存在 $1\leq j<l\leq n$，使得

$$\epsilon^{jk}=\epsilon^{lk}$$
$$e^{i2\pi\frac{jk}{n}}=e^{i2\pi\frac{lk}{n}}$$

因为等式两边复数的模都为 1，所以只能是复数的辐角相同，相差 2π 的正整数倍（设为 m），即

$$\frac{lk}{n}/\frac{jk}{n}=m$$
$$\frac{l}{j}=m$$

这与 $1\leq j<l\leq n$ 矛盾，假设不成立，两两不相等得证。

因为 $\epsilon^{jk}(1\leq j\leq n)$ 都是 $x^n-1=0$ 的根，且两两不相等，个数为 n，于是可得 $\epsilon^k,\epsilon^{2k},\cdots,\epsilon^{nk}$ 是 $x^n-1=0$ 的 n 个根，由根与系数的关系（命题 2.3），我们有

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=0$$

特别地，$n=1$，我们有

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=n$$

设

$$(n,k)=d$$

（n,k 的最大公因子）。

于是，存在 $p,q\in\mathbb{N}^+$ 且 $(p,q)=1$，使得

$$n=dp$$
$$k=dq$$

我们有

$$\begin{aligned}\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk} &= e^{i2\pi\frac{k}{n}}+e^{i2\pi\frac{2k}{n}}+\cdots+e^{i2\pi\frac{nk}{n}} \\ &= e^{i2\pi\frac{q}{p}}+e^{i2\pi\frac{q}{p}2}+\cdots+e^{i2\pi\frac{q}{p}n}\end{aligned}$$

由 (1) 中的讨论，$p>1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}e^{i2\pi\frac{q}{p}}+e^{i2\pi\frac{q}{p}2}+\cdots+e^{i2\pi\frac{q}{p}n} &= (e^{i2\pi\frac{q}{p}}+e^{i2\pi\frac{q}{p}2}+\cdots+e^{i2\pi\frac{q}{p}p}) \\ &\quad+(e^{i2\pi\frac{q}{p}(p+1)}+e^{i2\pi\frac{q}{p}(p+2)}+\cdots+e^{i2\pi\frac{q}{p}2p}) \\ &+ \\ &\vdots \\ &\quad+(e^{i2\pi\frac{q}{p}[(d-1)p+1]}+e^{i2\pi\frac{q}{p}[(d-1)p+2]}+\cdots+e^{i2\pi\frac{q}{p}dp}) \\ &=0+0+\cdots+0 \\ &=0\end{aligned}$$

$p=1$ 时，我们有

$$e^{i2\pi\frac{q}{p}}+e^{i2\pi\frac{q}{p}2}+\cdots+e^{i2\pi\frac{q}{p}n}=n$$

由于 $p=1$，可知 $n=d$，即 n 可以整除 k（$n|k$）；$p>1$ 时，我们有 n 不可以整除 k（$n\nmid k$）。

当 $k<0$ 时，我们有

$$e^{i2\pi\frac{-k}{n}}=cos(2\pi\frac{k}{n})-isin(2\pi\frac{k}{n})$$

所以，$e^{i2\pi\frac{-k}{n}},e^{i2\pi\frac{k}{n}}$ 两者共轭，于是

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=\overline{\epsilon^{-k}+\epsilon^{-2k}+\cdots+\epsilon^{-nk}}$$

又 $\epsilon^{-k}+\epsilon^{-2k}+\cdots+\epsilon^{-nk}$ 都为实数，所以

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=\epsilon^{-k}+\epsilon^{-2k}+\cdots+\epsilon^{-nk}$$

当 $k=0$ 时，我们有

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=n$$

综上

$$\epsilon^k+\epsilon^{2k}+\cdots+\epsilon^{nk}=\begin{cases}0 & \text{n | k} \\ n & \text{n} \nmid \text{k}\end{cases}$$