2.6

张志聪

2025 年 7 月 27 日

5

以 $rank(A) = m$ 为例。证明与书中命题 6.1 一致，把 A 化作标准型 D_1，因为 $rank(A) = m$，与 C 的行数一致，于是可以通过 D_1 把 C 化作零矩阵，于是我们有

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

通过行列变换把 B 化作标准型 D_2，因为 B 的左侧和上方都是 0，于是这些操作对其他方块没有影响，于是我们有

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

所以

$$rank(M) = rank(D_1) + rank(D_2) = rank(A) + rank(B)$$

9

我们有

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & 0 \\ & f(J_2) & \\ 0 & & f(J_3) \end{bmatrix}$$

令

$$J_1=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=E_2+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

我们有

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

J_2, J_3 有类似的情况，于是设

$$g(x)=(x-2)^3$$
$$h(x)=(x-3)^2$$

我们有

$$g(J_1)=0$$
$$g(J_2)=0$$
$$h(J_3)=0$$

于是可得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

此时

$$f(J_1)=0$$
$$f(J_2)=0$$
$$f(J_3)=0$$

即

$$f(J)=\begin{bmatrix}f(J_1) & & 0\\ & f(J_2) & \\ 0 & & f(J_3)\end{bmatrix}=0$$

12

因为 A, A^T 可交换，所以

$$AA^T=A^TA$$

于是

$$AA^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1^T + A_2A_2^T & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

又

$$\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^TA_1 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

于是我们有

$$A_1A_1^T + A_2A_2^T = A_1^TA_1$$

由 §5 习题 23-(1)（准确说是一般形式无需是方阵），我们有

$$\begin{aligned} Tr(A_1A_1^T + A_2A_2^T) &= Tr(A_1^TA_1) \\ Tr(A_1A_1^T) + Tr(A_2A_2^T) &= Tr(A_1^TA_1) \\ Tr(A_2A_2^T) &= 0 \end{aligned}$$

由 §5 习题 23-(2)，可知

$$A_2 = 0$$