3.2 注释

张志聪

2025 年 8 月 16 日

注释 1. 命题 *2.1* 的推广设 f 是 $M_n(K)(n \geq 2)$ 上的列（行）线性函数，那么，下面命题相互等价：

- *(0)* 如果 $A \in M_n(K)$ 有两列元素相同时，必有 $f(A) = 0$。
- *(1)* 设将 $A \in M_n(K)$ 的 i, j 两列（行）互换得出方阵 B，则 $f(B) = -f(A)$。
- *(2)* 设将 $A \in M_n(K)$ 的第 j 列（行）加上其第 i 列（行）的 λ 倍（$\lambda \in K$）得出方阵 B，则 $f(B) = f(A)$。
- *(3)* 对 K 上任何不满秩 n 阶方阵 A 都有 $f(A) = 0$。

注释 2. 通过列线性函数定义的行列式 f，和通过行线性函数定义的行列式 g，是等价的。

证明：

设任意 $A \in M_n(K)$。

- (1) A 不满秩。

  由定义可知

  $$f(A) = 0 = g(A)$$

- (2) A 满秩。

存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，使得

$$A = P_1 P_2 \cdots P_m$$

如设 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 中有 r 个第一类初等矩阵，s 个第二类初等矩阵。把 A 看做

$$A = EP_1 P_2 \cdots P_m$$

即只进行了初等列变换，那么

$$f(A) = (-1)^r \lambda_1 \cdots \lambda_s$$

把 A 看做

$$A = P_1 P_2 \cdots P_m E$$

即只进行了初等行变换，那么

$$g(A) = (-1)^r \lambda_1 \cdots \lambda_s$$

所以

$$f(A) = g(A)$$

综上，$f = g$。

注释 3. $n \geq 2$ 个不同的自然数，奇排列和偶排列的个数相同。

证明：

- 方法一：

  习题 11

- 方法二：

  排列的总个数是 $n!$，因为 $n \geq 2$，所以总排列数是偶数个。

  设奇排列和偶排列的集合分别为 S_1, S_2。

  定义映射 $f : S_1 \to S_2$ 为：将一个奇排列中的第一个数与最后一个数交换。

  接下来，我们证明这个 f 是双射。

- (1) 单射；

  任意 $a_1, a_2 \in S_1$ 且 $a_1 \neq a_2$，由命题 2.5 可知，

  $$f(a_1), f(a_2) \in S_2$$

  假设 $f(a_1) = f(a_2)$，那么

  $$a_1 = f(f(a_1)) = f(f(a_2)) = a_2$$

  与 $a_1 \neq a_2$ 矛盾，可得

  $$f(a_1) \neq f(a_2)$$

  所以，f 是单射。

- (2) 满射；

  任意 $b \in S_2$，由命题 2.5 可知，交换排列 b 中的第一个数和最后一个数所得的 $b' \in S_1$，又

  $$f(b') = b$$

  所以，f 是满射。

注释 4. 行列式的常见计算方式

- (1) 化成阶梯型（注意初等变换对行列式值的影响），通过上（下）对角矩阵行列式，对角线乘积即为行列式值。
- (2) 递推关系。
- (3) 范德蒙德行列式。
- (4) 按某行（列）展开，尤其是零多的情况下。

其实，如果是“固定阶”，蛮干也行。

注释 5. 反对称列线性函数有无穷多个，设 f 是反对称称列线性函数，那么，存在常数 k 使得 $f(A) = kdet(A)$ 的形式。

证明：

结合习题 3，习题 4，习题 13

注释 6. 切比雪夫多项式(不是指某一个具体函数，而是指一类多项式):

$k \in \mathbb{N}^+$，我们有

$$cos(k\alpha) = f_k(cos(\alpha))$$

其中

$$f_k(x) = 2^{k-1}x^k + *$$

是首项系数为 2^{k-1} 的 k 次多项式，即 $cos(k\alpha)$ 是关于 $cos(\alpha)$ 的多项式。

证明：

对 k 进行归纳，$k=1$ 时，$cos\alpha$ 显然成立。归纳假设 $k \leq n$ 时，命题成立。$k=n+1$ 时

$$\begin{aligned} cos[(n+1)\alpha] + cos[(n-1)\alpha] = 2cos(n\alpha)cos(\alpha) \\ cos[(n+1)\alpha] = 2cos(n\alpha)cos(\alpha) - cos[(n-1)\alpha] \end{aligned}$$

于是由归纳假设可知，

$$cos(n\alpha)$$

$cos(n\alpha)$ 是关于 $cos(\alpha)$ 的首项系数为 2^{n-1} 的 n 次多项式，于是

$$2cos(n\alpha)cos(\alpha)$$

是关于 $cos(\alpha)$ 的首项系数为 2^n 的 $n+1$ 次多项式，而 $-cos[(n-1)\alpha]$ 不会影响最高次项，综上，$k=n+1$ 时，命题成立。

归纳完成。