5.1

张志聪

2025 年 9 月 24 日

9

提示：反证法可能更方便。考虑 $Ax = 0$ 解的情况。

把 A 看做 K 上 n 维线性空间 V 内双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵。

- 必要性

  反证法，假设存在 $\alpha \neq 0$，对一切 $\beta \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$。不妨设 α, β 在 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 的基下的坐标为 X, Y，且 $Y \neq 0$，使得

  $$f(\alpha, \beta) = X^T AY = 0$$

  因为 $f(\alpha, \beta)$ 满秩，即 A 是满秩的，于是 $Ax = 0$ 没有非零解，所以 $AY \neq 0$，所以 $\alpha = 0$，存在矛盾。

- 充分性

  反证法，假设 $f(\alpha, \beta)$ 不满秩，即 A 不满秩，于是 A 的行向量组是线性相关的，即存在 $X^T \neq 0$ 使得

  $$X^T A = 0$$

  此时 $\forall Y \in \mathbb{K}^n$ 有

  $$X^T AY = 0$$

  与题设矛盾。

10

利用习题 9 完成证明。

证明：对任意 $B \in M_n(K)$ 都有

$$f(A,B) = Tr(AB) = 0$$

则必有 $A = 0$。

设 $B = E_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$，$A = (a_{ij})$ 于是

$$f(A,B) = Tr(AE_{ij})$$

其中 AE_{ij} 的第 j 列 = 矩阵 A 的第 i 列，其余列全是 0。于是在主对角线上，只有 AE_{ij} 的 j 行，j 列可能有值，即

$$Tr(AE_{ij}) = a_{ji}$$

因为

$$Tr(AE_{ij}) = 0$$

所以 $a_{ji} = 0$。

综上，$A = 0$。

13

我们可以通过初等矩阵，把对角线上的元素进行调整。

任意 $1 \leq i, j \leq n$，希望互换对角线上第 i 个元素和第 j 个元素。设

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$$

于是

$$
\begin{aligned}
(P_n(i,j))^T A P_n(i,j) &= P_n(i,j) A P_n(i,j) \\
&= \begin{bmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & \\
& \lambda_2 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \lambda_j & & & & \\
& & & & \ddots & & & \\
& & & & & \lambda_i & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & \lambda_n
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

即交换了 i,j 行和 i,j 列。所以，存在 T 使得

$$B = T^T A T$$

所以，A,B 合同。

14

(1)

- 必要性

  因为 A 是反对称矩阵，所以

  $$A^T = -A$$

  于是，对任意 n 维列向量 x，有

  $$
  \begin{aligned}
  (x^T A x)^T &= x^T A^T x \\
  &= x^T (-A) x \\
  &= -x^T A x
  \end{aligned}
  $$

因为 x^TAx 是标量，所以

$$\begin{aligned}(x^TAx)^T &= x^TAx \\ -x^TAx &= x^TAx \\ 2x^TAx &= 0 \\ x^TAx &= 0\end{aligned}$$

- 充分性

  对 n 维列向量 $x+y$，我们有

$$\begin{aligned}(x+y)^TA(x+y) &= (x^T+y^T)A(x+y) \\ &= (x^TA+y^TA)(x+y) \\ &= x^TAx+x^TAy+y^TAx+y^TAy \\ &= 0+x^TAy+y^TAx+0 \\ &= x^TAy+y^TAx\end{aligned}$$

  令列项量 $x=e_i$（第 i 个分量为 1，其他分量为 0），$y=e_j$，设 $A=(a_{ij})$，于是

$$\begin{aligned}e_i^TAe_j+e_j^TAe_i &= 0 \\ a_{ij}+a_{ji} &= 0 \\ a_{ij} &= -a_{ji}\end{aligned}$$

  所以，A 是反对称矩阵。

(2)

利用 (1) 可知，A 是反对称矩阵，另外由题设可知 A 是对称矩阵，所以，$A=0$。

17

对 V 的维数进行归纳。

$n=1$ 时，$f(\alpha,\beta)$ 在任意基下都是 0，命题成立。

归纳假设 $<n$ 时，命题成立。

$f(\alpha,\beta)\equiv 0$，命题显然成立；$f(\alpha,\beta)\not\equiv 0$，于是存在 $d=f(\epsilon_1,\epsilon_2)\neq 0$，其中 $\epsilon_1,\epsilon_2\neq 0$（按照双线性函数的定义总有 $f(\epsilon_1,0)=0, f(0,\epsilon_2)=0$）。

于是，把 ϵ_1,ϵ_2，扩充成 V 的一组基

$$\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\cdots,\epsilon_n$$

于是，$f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ -1 & 0 & * \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

即只能确定左上角的 2×2 部分，和主对角线是 0。

接下来，通过调整基，把前两行和前两列相关元素置为 0。令

$$\begin{cases} \eta_1=\frac{1}{d}\epsilon_1 \\ \eta_2=\epsilon_2 \\ \eta_i=\epsilon_i-f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2)\epsilon_i \end{cases}$$

显然，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一组基，且

$$\begin{aligned} f(\eta_1,\eta_i) &= f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i-f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2)\epsilon_i) \\ &= f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i)-f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2)f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i) \\ &= f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i)-1f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过换基，此时的矩阵形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

注意：由于 f 是反对称双线性函数，在任意基下的矩阵都是对称矩阵。

再次换基，把第二行和第二列相关元素置为 0。令

$$\begin{cases} \eta_1' = \eta_1 \\ \eta_2' = \eta_2 \\ \eta_i' = \eta_i + f(\eta_2, \eta_1)\eta_i \end{cases}$$

显然，$\eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_n'$ 是 V 的一组基，且

$$\begin{aligned} f(\eta_1', \eta_i') &= f(\eta_1, \eta_i + f(\eta_2, \eta_1)\eta_i) \\ &= f(\eta_1, \eta_i) + f(\eta_2, \eta_1)f(\eta_1, \eta_i) \\ &= f(\eta_1, \eta_i) - 1 \cdot f(\eta_1, \eta_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过换基，此时的矩阵形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

由归纳假设可知，右下角部分可以化为准对角形。

归纳完成。

18

- (1) $L(M), R(M)$ 是 V 的子空间；

  略

- (2) $dimL(M) = dimR(M) = n - dim$；

  $L(M)$ 与 $R(M)$ 是对称的，我们以 $R(M)$ 为例。

  取 M 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r$，并扩充成 V 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$。设 $f(\alpha, \beta)$ 在这组基下的矩阵为 A，由题设可知 A 是满秩矩阵。

考虑 $R(M)$ 的定义,$\forall \alpha \in R(M)$ 当且仅当 $f(\epsilon_i, \alpha) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, r)$，当且仅当

$$
\begin{aligned}
crd(\epsilon_i)^T Acrd(\alpha) &= 0 \\
e_i^T Acrd(\alpha) &= 0 \\
row_i(A)^T crd(\alpha) &= 0
\end{aligned}
$$

因为 $i = 1, 2, \cdots, r$，所以就是 A 的前 r 行矩阵 A_r，使得

$$A_r crd(\alpha) = 0$$

因为 A 是满秩的，所以 $rank(A_r) = r$，于是可得 $A_r x = 0$ 这个线性方程组的解空间是 $n - r$ 维的，因为取坐标会保证坐标与 V 中向量同构，所以 $dimR(M) = n - r$，即

$$dimR(M) = n - r = n - dimM$$

- (3) $R(L(M)) = L(R(M)) = M$。

  以 $L(R(M))$ 为例。

  (i)$M \subseteq L(R(M))$。

  因为 $R(M)$ 是子空间，所以 $R(M) \neq \varnothing$，所以，存在 $\beta \in R(M)$，由 $L(R(M))$ 的定义可知，任意 $\alpha \in M$，都有

  $$\alpha \in L(R(M))$$

  所以，$M \subseteq L(R(M))$。

  (ii) 利用 (2) 的结论：

  $$dimL(R(M)) = n - dimR(M) = n - (n - dimM) = dimM$$

  综上，$M = L(R(M))$。

19

- (1) $L(M + N) = L(M) \cap L(N), R(M + N) = R(M) \cap R(N)$。

  以 $L(M + N) = L(M) \cap L(N)$ 为例。

(i) $L(M+N) \subseteq L(M) \cap L(N)$；

任意 $\alpha \in L(M+N)$，即 $\forall \beta_1+\beta_2 \in M+N(\beta_1 \in M, \beta_2 \in N)$，有

$$f(\alpha, \beta_1+\beta_2)=0$$

于是，令 $\beta_2=0$，可得 $\forall \beta_1 \in M$ 有

$$f(\alpha, \beta_1)=0$$

即 $\alpha \in L(M)$，同理可证 $\alpha \in L(N)$。所以 $L(M+N) \subseteq L(M) \cap L(N)$。

(ii) $L(M) \cap L(N) \subseteq L(M+N)$。

$\alpha \in L(M) \cap L(N)$，即 $\forall \beta_1 \in M, \forall \beta_2 \in N$ 有

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta_1)=0 \\ f(\alpha, \beta_2)=0 \end{cases}$$

因为 f 是双线性函数，所以

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta_1)+f(\alpha, \beta_2) &= f(\alpha, \beta_1+\beta_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以，$\alpha \in L(M+N)$。

综上，$L(M+N)=L(M) \cap L(N)$。

- (2)$f(\alpha, \beta)$ 满秩，则 $L(M \cap N)=L(M)+L(N), R(M \cap N)=R(M)+R(N)$。

  (i) 任意 $\alpha \in L(M)+L(N)$，设

$$\alpha=\alpha_M+\alpha_N$$

于是有

$$\begin{cases} f(\alpha_M, \beta_1)=0,\ \forall \beta_1 \in M \\ f(\alpha_N, \beta_2)=0,\ \forall \beta_2 \in N \end{cases}$$

所以对 $\forall \beta \in M \cap N$，我们有 $\beta \in M, \beta \in N$，并由 $f(\alpha, \beta)$ 是双线性函数，两式相加得

$$\begin{aligned} f(\alpha_M, \beta)+f(\alpha_N, \beta) &= f(\alpha_M+\alpha_N, \beta) \\ &= f(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

所以，$\alpha \in L(M \cap N)$，即

$$L(M) + L(N) \subseteq L(M \cap N)$$

(ii) 由习题 18 可知，

$$dimL(M \cap N) = n - dimM \cap N$$

利用维数公式和已知的等价关系

$$\begin{aligned}
dimL(M) + L(N) &= dimL(M) + dimL(N) - dimL(M) \cap L(N) \\
&= dimL(M) + dimL(N) - dimL(M + N) \\
&= n - dimM + n - dimN - (n - dimM + N) \\
&= n - dimM + n - dimN - [n - (dimM + dimN - dimM \cap N)] \\
&= n - dimM \cap N
\end{aligned}$$

综上，由包含关系和维数相等可知，

$$L(M) + L(N) = L(M \cap N)$$

20

反证法，假设 $f(\alpha) \not\equiv 0, g(\alpha) \not\equiv 0$，即存在 $\alpha, \beta \in V$，使得

$$\begin{aligned}
f(\alpha) \neq 0 \\
g(\beta) \neq 0
\end{aligned}$$

由题设，我们有

$$f(\alpha)g(\alpha) = 0$$

所以 $g(\alpha) = 0$，同理，$f(\beta) = 0$。

又

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta)g(\alpha+\beta) &= [f(\alpha)+f(\beta)][g(\alpha)+g(\beta)] \\ &= f(\alpha)g(\alpha)+f(\alpha)g(\beta)+f(\beta)g(\alpha)+f(\beta)g(\beta) \\ &= f(\alpha)g(\beta)+f(\beta)g(\alpha) \\ &= f(\alpha)g(\beta) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

与题设 $f(\alpha+\beta)g(\alpha+\beta)=0$ 矛盾。

21

解题思路：通过一个点，确定比例常数。

(i)$g\equiv 0$，$f(\alpha,\beta)\equiv 0$，于是令

$$\lambda = 0$$
$$l \equiv 0$$

即可完成命题要求。

(ii)$g\not\equiv 0$，于是 $\exists v\in V, g(v)\neq 0$，由题设可知

$$f(v,\beta)=g(v)h(\beta)$$

由 f 是对称双线性函数可知

$$\begin{aligned} f(v,\beta) &= f(\beta,v) \\ &= g(\beta)h(v) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} g(v)h(\beta) &= g(\beta)h(v) \\ h(\beta) &= \frac{h(v)}{g(v)}g(\beta) \end{aligned}$$

令

$$\lambda = \frac{h(v)}{g(v)}$$
$$l = \lambda g$$

于是，

$$\begin{aligned}
f(\alpha,\beta) &= g(\alpha)h(\beta) \\
&= g(\alpha)\frac{h(v)}{g(v)}g(\beta) \\
&= \frac{h(v)}{g(v)}g(\alpha)g(\beta) \\
&= \lambda g(\alpha)g(\beta)
\end{aligned}$$