

## 4.2 注释

张志聪

2025 年 11 月 6 日

注释 1.

$$M_i \cap \left( \sum_{j=1; j \neq i}^n M_j \right) = \{0\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

则

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \dots \cap M_n = \{0\}$$

反之，不成立。

证明：

假设

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \dots \cap M_n \neq \{0\}$$

即存在非零向量  $\alpha \in M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \dots \cap M_n$ ，于是

$$\alpha \in M_i \cap \left( \sum_{j=1; j \neq i}^n M_j \right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

存在矛盾。

反之，只需举一个反例，假设只有  $M_k, M_r$  存在向量  $\alpha$ ，且满足

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \dots \cap M_n = \{0\}$$

对于

$$M_k \cap \left( \sum_{j=1; j \neq k}^n M_j \right) = \{0, \alpha\}$$

**注释 2.** 直和的结合律:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

**证明:**

首先  $(A + B) + C = A + B + C = A + (B + C)$  是显然的。我们需要着重说明的是直和关系的成立。

- 已知  $(A \oplus B) \oplus C$  可得  $A \oplus B \oplus C$ 。

– 方法一

$(A \oplus B) \oplus C$ , 由定理 2.2(iii), 我们有

$$A \cap B = \{0\}$$

$$(A + B) \cap C = \{0\}$$

为了证明  $A \oplus B \oplus C$ , 我们利用定理 2.3 的 (iii), 即

$$A \cap (B + C) = \{0\}$$

$$B \cap (A + C) = \{0\}$$

$$C \cap (A + B) = \{0\}$$

最后一条是已知的, 且前两条是对称的, 所以只需证明一条。

$\forall \alpha \in A \cap (B + C)$ , 我们有

$$\alpha = a = b + c$$

$$a - b = c$$

因为  $a - b \in A + B, c \in C$ , 利用  $(A + B) \cap C = \{0\}$  可知

$$a - b = c = 0$$

$$a = b$$

$$c = 0$$

又  $A \cap B = \{0\}$ , 所以

$$a = b = 0$$

所以

$$\alpha = a = 0$$

综上可得

$$A \cap (B + C) = \{0\}$$

所以,  $A + B + C$  是直和。

- 方法二

$$\begin{aligned} \dim((A \oplus B) \oplus C) &= \dim(A \oplus B) + \dim C \\ &= \dim A + \dim B + \dim C \end{aligned}$$

所以,  $A \oplus B \oplus C$ 。

- 已知  $A \oplus B \oplus C$  可得  $(A \oplus B) \oplus C$ 。

为了证明  $(A \oplus B) \oplus C$ , 我们利用定理 2.2 的 (i), 反证法, 假设存在同一向量在  $(A \oplus B) \oplus C$  中有两种不同的表示。

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1 + b_1) + c_1 \\ \alpha &= (a_2 + b_2) + c_2 \end{aligned}$$

两式相减得

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1) + c_1 - [(a_2 + b_2) + c_2] &= 0 \\ (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

因为  $A \oplus B \oplus C$ , 利用定理 2.3(ii) 可知

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ b_1 - b_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ b_1 &= b_2 \\ c_1 &= c_2 \end{aligned}$$

与假设矛盾，故  $(A+B)+C$  中任意向量表法唯一，所以  $(A+B)+C$  是直和。

类似地，可证  $A \oplus B \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ 。

**注释 3.** 有限多个真子空间  $V_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  做并，无法得到整个线性空间  $V$ 。

**证明：**

习题 8

**注释 4.** 向量的模  $M$  同余和数的模  $m$  同余的类比。

正整数中，

$$a \equiv b \pmod{m}$$

表示  $a, b$  除以数  $m$  的余数相同，即

$$a - b \in \{km | k \in \mathbb{Z}\}$$

向量中，

$$\alpha \equiv \beta \pmod{M}$$

按照定义有

$$\alpha - \beta \in M$$

**注释 5.** 一个线性空间  $V$  的商空间  $V/M$  是不是唯一的。

**证明：**

设  $\bar{V} \neq \bar{W}$  都是  $V$  的商空间，所以存在同余类  $\bar{\alpha} \in \bar{V}, \bar{\alpha} \notin \bar{W}$ 。

又因为  $\alpha \in V$ ，由于商空间是  $V$  内向量模  $M$  同余类的全体所成的集合，所以  $\alpha$  的模  $M$  同余类  $\bar{\alpha}$  有：

$$\bar{\alpha} \in \bar{V}, \bar{\alpha} \in \bar{W}$$

存在矛盾。

**注释 6.** 商空间的维数是不是就是其元素个数。

数模  $m$  的同余类是有限的，比如整数 5，它的余数只有  $0, 1, 2, 3, 4$ 。受此启发，那么商空间元素是不是也是有限的。

先给出结论：不是有限的。

只要是线性空间，只要不是零空间（即只有零元素的空间），那么元素个数一定是无限个的。

**注释 7.** 商空间作为工具，通常用来干什么？

降维，把不关心的维度放入模  $M$  中。

**注释 8.** 商空间与补空间的关系。

一个线性空间  $V$ ，它的补空间不唯一，商空间是唯一的。