

2.5 总结

张志聪

2025 年 8 月 26 日

注释 1. 特殊 n 阶方阵的封闭性。

- (1) 对角矩阵。

两个对角矩阵 A, B , 又如下封闭性:

- 加法封闭: $A + B$ 也是对角矩阵;
- 数乘封闭: kA 也是对角矩阵;
- 乘法封闭: AB 也是对角矩阵。
- 逆矩阵封闭: A 可逆, 则 A^{-1} 也是对角矩阵 (是上三角矩阵的特例)。

- (2) (反) 对称矩阵。

两个 (反) 对称矩阵 A, B , 又如下封闭性:

- 加法封闭: $A + B$ 也是 (反) 对称矩阵;
- 数乘封闭: kA 也是 (反) 对称矩阵;
- 乘法有条件的封闭: 充分必要条件 “ A, B 可交换, 即 $AB = BA$ ” (习题 16)。
- 逆矩阵封闭: A^{-1} 也是 (反) 对称矩阵 (习题 18-1)。

- (3) 上 (下) 三角矩阵。

两个上 (下) 三角矩阵 A, B , 又如下封闭性:

- 加法封闭: $A + B$ 也是上 (下) 三角矩阵;

- 数乘封闭: kA 也是上(下)三角矩阵;
- 乘法封闭: AB 也是上(下)三角矩阵;
- 逆矩阵封闭: A 可逆, 则 A^{-1} 也是上(下)三角矩阵(习题 18-2)。

注释 2. 任何 n 阶方阵, 总能表示成对称矩阵和反称矩阵之和。

证明:

设 A 为任意 n 阶方阵, 那么

$$\begin{cases} A = B + C \\ A^T = B^T + C^T = B - C \end{cases}$$

解方程的可得

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{cases}$$

所以

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

注释 3. *Trace* 具有一些优良的性质: 习题 23

注释 4. n 阶矩阵 A 通过初等变换化为 Y , 已知 Y 存在逆矩阵 Y^{-1} , 那么 A^{-1} 与 Y^{-1} 的关系。

设 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s; Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使

$$\begin{aligned} P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t &= Y \\ Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} A^{-1} P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} &= Y^{-1} \\ A^{-1} &= Q_1 Q_2 \cdots Q_t Y^{-1} P_s \cdots P_2 P_1 \end{aligned}$$