

2.5 总结

张志聪

2025 年 8 月 10 日

注释 1. 特殊 n 阶方阵的封闭性。

- (1) 对角矩阵。

两个对角矩阵 A, B ，又如下封闭性：

- 加法封闭: $A + B$ 也是对角矩阵；
- 数乘封闭: kA 也是对角矩阵；
- 乘法封闭: AB 也是对角矩阵。
- 逆矩阵封闭: A 可逆，则 A^{-1} 也是对角矩阵（是上三角矩阵的特例）。

- (2) （反）对称矩阵。

两个（反）对称矩阵 A, B ，又如下封闭性：

- 加法封闭: $A + B$ 也是（反）对称矩阵；
- 数乘封闭: kA 也是（反）对称矩阵；
- 乘法有条件的封闭: 充分必要条件“ A, B 可交换，即 $AB = BA$ ”（习题 16）。
- 逆矩阵封闭: A^{-1} 也是（反）对称矩阵（习题 18-1）。

- (3) 上（下）三角矩阵。

两个上（下）三角矩阵 A, B ，又如下封闭性：

- 加法封闭: $A + B$ 也是上（下）三角矩阵；

- 数乘封闭: kA 也是上(下)三角矩阵;
- 乘法封闭: AB 也是上(下)三角矩阵;
- 逆矩阵封闭: A 可逆, 则 A^{-1} 也是上(下)三角矩阵(习题 18-2)。

注释 2. *Trace* 具有一些优良的性质: 习题 23

注释 3. n 阶矩阵 A 通过初等变换化为 Y , 已知 Y 存在逆矩阵 Y^{-1} , 那么 A^{-1} 与 Y^{-1} 的关系。

设 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s; Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使

$$\begin{aligned} P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t &= Y \\ Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} A^{-1} P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} &= Y^{-1} \\ A^{-1} &= Q_1 Q_2 \cdots Q_t Y^{-1} P_s \cdots P_2 P_1 \end{aligned}$$