4.4

张志聪

2025 年 9 月 21 日

3

（i）A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

因为

$$f(\lambda) = 0$$
$$\lambda^n = 0$$
$$\lambda = 0$$

所以，它的特征根仅有 0。

（ii）求 $\lambda_0 = 0$ 对应的特征向量.

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

这个齐次线性方程组中，仅有 x_1 是自由未知量，取 $x_1 = 1$，得基础解系

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

它对应于 A 的特性向量

$$x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n = \epsilon_1$$

于是 $V_{\lambda_0} = L(\epsilon)$。

7

(1) 反证法，假设存在 $\lambda \neq 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值。于是，存在 $\alpha \neq 0$ 使得

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^k(\alpha) &= \mathscr{A}^{k-1}(\mathscr{A}\alpha) \\
&= \mathscr{A}^{k-1}(\lambda\alpha) \\
&= \cdots \\
&= \lambda^k\alpha \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

这与题设 $\mathscr{A}^k = 0$ 矛盾。

(2) 接下来，证明 0 是 $\mathscr{A}$ 的特征值。

对任意 $\alpha \in V$，我们有

$$\mathscr{A}^k(\alpha) = 0$$

于是，存在 $l(1 \leq l \leq k)$ 使得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^{l-1}(\alpha) &\neq 0 \\
\mathscr{A}^l(\alpha) = \mathscr{A}(\mathscr{A}^{l-1}(\alpha)) = 0 &= 0 \cdot \mathscr{A}^{l-1}(\alpha)
\end{aligned}$$

所以，0 是 $\mathscr{A}$ 的特征值，$\mathscr{A}^{l-1}(\alpha)$ 是对应的特征向量。

8

反证法，假设 $\xi_1+\xi_2$ 是某个特征向量，那么存在 $\lambda \in K$ 使得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\xi_1+\xi_2) &= \lambda(\xi_1+\xi_2)\\ \mathscr{A}\xi_1+\mathscr{A}\xi_2 &= \lambda(\xi_1+\xi_2)\\ \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2 &= \lambda(\xi_1+\xi_2)\\ (\lambda_1-\lambda)\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2 &= 0\end{aligned}$$

由命题 4.3 可知，ξ_1,ξ_2 是线性无关的，所以

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda=0\\ \lambda_2-\lambda=0\end{cases}$$

于是可得

$$\lambda=\lambda_1$$
$$\lambda=\lambda_2$$

有题设可知 $\lambda_1\neq\lambda_2$，出现矛盾，假设不成立，命题得证。

8 推广

$k\xi_1+l\xi_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量。

证明：

因为 $k\xi_1\in V_{\lambda_1}, l\xi_2\in V_{\lambda_2}$，利用习题 8，命题得证。

9

只需证明，这些特征向量属于同一个特征子空间即可。

反证法，假设 $\alpha\in V_{\lambda_1},\beta\in V_{\lambda_2}$，由习题 8 可知，

$$\alpha+\beta$$

不是特征向量，与题设矛盾。

10

$\mathscr{A}$ 是线性空间 V 内的可逆线性变换，即存在线性变换 $\mathscr{B}$ 使得

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$$

任取线性变换 $\mathscr{A}, \mathscr{A}$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 A, B，我们有

$$\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B) = AB = E$$

于是可得

$$rank(A) = rank(B) = rank(E) = n$$

- (1)
  - 方法一

    反证法，假设线性变换 $\mathscr{A}$ 存在为零的特征值，那么，我们有

    $$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= 0 \\ |-A| &= 0 \end{aligned}$$

    A 不满秩，出现矛盾。
  - 方法二

    $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换，所以它是双射。

    反证法，假设线性变换 $\mathscr{A}$ 存在为零的特征值，于是存在 $\alpha \in V$ 使得

    $$\begin{aligned} \mathscr{A}\alpha &= 0 \cdot \alpha = 0 \\ \mathscr{A}0 &= 0 \end{aligned}$$

    与 $\mathscr{A}$ 是双射矛盾。

- (2)

  λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值，那么，存在 $\alpha \in V$ 使得

  $$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$$

两边同时代入 $\mathscr{A}^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}\alpha &= \mathscr{A}^{-1}\lambda\alpha \\ \alpha &= \lambda\mathscr{A}^{-1}\alpha\end{aligned}$$

10 推广

(1) 的反方向也是成立的，即：$\mathscr{A}$ 的特征值都不为零，则 $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换。

证明：

$\mathscr{A}$ 的在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 A，则 A 的全体特征根的乘积，我们有

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A| \neq 0$$

所以，A 是满秩。

于是存在 A^{-1} 使得

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

于是，由 $\sigma : End(V) \to M_n(K)$ 的双射性，存在线性变换 $\mathscr{B}$ 在基下的矩阵为 A^{-1}，所以

$$E = \sigma(\mathscr{A})\sigma(\mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{A}\mathscr{B})$$

可得

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$$

11

提示：P204

$$AB = B\begin{bmatrix} f(\epsilon_1) & & & & \\ & f(\epsilon_2) & & & \\ & & f(\epsilon_3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f^{\epsilon_n} \end{bmatrix}$$

13

- (1)

$$\begin{aligned}\sigma(\mathscr{A}\mathscr{B}) &= \sigma(\mathscr{A})\sigma(\mathscr{B}) \\ &= AA^* \\ &= |A|E\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}\sigma(\mathscr{B}\mathscr{A}) &= \sigma(\mathscr{B})\sigma(\mathscr{A}) \\ &= A^*A \\ &= |A|E\end{aligned}$$

所以

$$\sigma(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{B}\mathscr{A})$$

- (2)

问题等价于

$$A^*x = 0$$

的解空间的维度和一组基。

由 0 是 A 的特征值，所以

$$\begin{aligned}|0E - A| &= 0 \\ |A| &= 0\end{aligned}$$

所以，A 不是满秩的，即 $rank(A) < n$。

利用第三章 §3 习题 6 可知：

(i) $rank(A) < n-1$，则 $rank(A^*) = 0$，于是 A^*x 的解空间的维数为 $n = n - rank(A^*)$，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 为其一组基。

(ii) $rank(A) = n-1$，则 $rank(A^*) = 1$，于是 A^*x 的解空间的维数为 $n-1 = n - rank(A^*)$，于是可得 $ker(\mathscr{B}) = n-1$，接下来，证明 $Ker(\mathscr{B}) = Im(\mathscr{A})$。

由 $x \in V, (A^*A)x = A^*(Ax) = (|A|E)x = 0$ 可知，任意 $, A(A^*x) = 0$，于是可得

$$Im(\mathscr{A}) \subseteq \ker(\mathscr{B})$$

由命题 3.5 的推论 1，我们有

$$Im(\mathscr{A}) + ker(\mathscr{A}) = Im(\mathscr{A}) + 1 = n$$

综上可得

$$\ker(\mathscr{B}) = Im(\mathscr{A}) = n - 1$$

16

设题中的矩阵为 A。

反证法，假设存在不变子空间爱你 N 使得

$$V = M \oplus N$$

于是，由命题 4.5 可知，存在一组基，使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵成准对角的，设为

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的特征多项式相同，所以

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda E - A_1||\lambda E - A_2| \\ &= (\lambda - \lambda_0)^n \end{aligned}$$

显然，λ_0 是 $(\lambda - \lambda_0)^n = 0$ 的 n 重根，所以，也是 $|\lambda E - A_1| = 0, |\lambda E - A_2| = 0$ 的根。

综上，λ_0 是 $\mathscr{A}|_M, \mathscr{A}|_N$ 上的特征值，于是在不变子空间 M, N 中最有各一个特征向量 α_m, α_n，又因为 M, N 是直和，所以 α_m, α_n 线性无关。于是在 $\mathscr{A}$ 中，我们有

$$\mathscr{A}\alpha_m = \lambda_0 \alpha_m$$

$$\mathscr{A}\alpha_n = \lambda_0 \alpha_n$$

即线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特性子空间最少是二维的。

而 $\lambda_0 E - A$ 的秩，显然是 $n-1$，所以 $(\lambda_0 E - A)x = 0$ 的解空间的维数是 1，即线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特性子空间是 1 维的，出现矛盾，假设不成立，命题得证。

17

反证法，假设 $\mathscr{A}$ 存在非平凡不变子空间 M，显然这个平凡子空间是 1 维的。

设 η_1 是 M 的一组基，于是

$$\mathscr{A}\eta_1 \in M$$

于是，$\mathscr{A}\eta_1$ 可以表示成

$$\mathscr{A}\eta_1 = \lambda_0\eta_1 \ (\lambda_0 \in \mathbb{R})$$

所以，$\mathscr{A}$ 有特征值 λ_0，且 η_1 是特征向量。

A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \lambda^2 - 2cos\theta\lambda + 1$$

由判别式 $\Delta = 4cos^2\theta - 4 < 0(\theta \neq k\pi)$ 可知

$$\lambda^2 - 2cos\theta\lambda + 1 = 0$$

没有实数解，所以 $\mathscr{A}$ 没有特征值，出现矛盾，假设不成立，命题得证。

19

设 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 A，其特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$$

(i) 有实数解，即 $\mathscr{A}$ 有特征子空间，在该特征子空间任取一组基中去一个向量 ϵ，$L(\epsilon)$ 既是一个不变子空间。

(ii) 没有实数解，此时需要把实数域的线性空间，扩展到复数域。

感觉超纲了啊

20

任意 $\alpha \in V_\lambda$，因为

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\mathscr{B}\alpha &= \mathscr{B}\mathscr{A}\alpha \\ &= \mathscr{B}\lambda\alpha \\ &= \lambda\mathscr{B}\alpha \end{aligned}$$

所以于是要证明

$$\mathscr{B}\alpha \in V_\lambda$$

21

因为 $\mathscr{A}$ 的矩阵可对角化,那么对 $\mathscr{A}$ 全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，有

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

因为 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$，有习题 20 可知 $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_k}$ 都是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间。

因为 $\mathscr{B}$ 的矩阵可对角化，$V_{\lambda_i}(1 \le i \le k)$ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间，于是由命题 4.6 可知 $\mathscr{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 可对角化，即 V_{λ_i} 中存在一组基 $\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \cdots, \epsilon_{i_r}$，$\mathscr{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵，设为

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{i_r} \end{bmatrix}$$

因为 $\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \cdots, \epsilon_{i_r} \in V_{\lambda_i}$，所以 $\mathscr{A}|_{V_{\lambda_i}}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵为

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

综上，我们得到一组基，$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 在该组基下的矩阵同时成对角形。

22

$\mathscr{A}$ 的矩阵可对角化，即存在一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$，使得

$$\mathscr{A}\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i (1 \leq i \leq n)$$

设 M 是 $\mathscr{A}$ 中不变子空间，那么由命题 4.6 可知，$\mathscr{A}|_M$ 的矩阵可对角化，不妨设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是 M 的一组基，使得

$$\mathscr{A}|_M \eta_i = \lambda_i' \eta_i (1 \leq i \leq r)$$

利用替换定理，用 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 替换掉 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 中 r 个向量，得到的一组新的基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r, \epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \cdots, \epsilon_{i_{n-r}}$，令

$$N = L(\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \cdots, \epsilon_{i_{n-r}})$$

因为这些 ϵ_{i_j} 本身是 $\mathscr{A}$ 的特征向量，所以

$$\mathscr{A}\epsilon_{i_j} = \lambda_{i_j} \epsilon_{i_j} \in N$$

所以，N 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间。又显然，

$$V = M \oplus N$$

命题得证。

23

对 V 的维数 n 进行归纳。

$n = 1$ 时，此时线性变换 $\mathscr{A}$ 矩阵可对角化是平凡的。

归纳假设维数 $< n$ 时，$\mathscr{A}$ 矩阵可对角化。

V 的维数时 n 时，由 V 是复数域上的线性空间可知，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式一定有一个复数解 λ_0，属于特征值 λ_0 的特征子空间设为 V_{λ_0}。

因为特征子空间 V_{λ_0} 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，由题设可知存在 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 N，使得

$$V = V_{\lambda_0} \oplus N$$

因为 $dimV = dimV_{\lambda_0} + dimN$，所以 $dimN < n$，由归纳假设可知，$\mathscr{A}|_N$ 的矩阵可对角化，设 $\mathscr{A}|_N$ 在基 $\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}, \cdots, \epsilon_{i_k}$ 下的矩阵是对角矩阵 B。另

外，取 V_{λ_0} 的基为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r$，两组基合并，得到 V 的一组基。综上，在这组基下，我们得到一个 $\mathscr{A}$ 的对角矩阵：

$$\sigma(\mathscr{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_0 E & \\ & B \end{bmatrix}$$

归纳完成，命题成立。

24