2 章总结

张志聪

2025 年 7 月 26 日

注释 1. 特殊 n 阶方阵的封闭性。

- (1) 对角矩阵。

  两个对角矩阵 A, B，又如下封闭性：

  – 加法封闭: $A+B$ 也是对角矩阵；

  – 数乘封闭: kA 也是对角矩阵；

  – 乘法封闭: AB 也是对角矩阵。

  – 逆矩阵封闭: A 可逆，则 A^{-1} 也是对角矩阵（是上三角矩阵的特例）。

- (2) （反）对称矩阵。

  两个（反）对称矩阵 A, B，又如下封闭性：

  – 加法封闭: $A+B$ 也是（反）对称矩阵；

  – 数乘封闭: kA 也是（反）对称矩阵；

  – 乘法有条件的封闭: 充分必要条件“A, B 可交换，即 $AB = BA$”（习题 16）。

  – 逆矩阵封闭: A^{-1} 也是（反）对称矩阵（习题 18-1）。

- (3) 上（下）三角矩阵。

  两个上（下）三角矩阵 A, B，又如下封闭性：

  – 加法封闭: $A+B$ 也是上（下）三角矩阵；

- 数乘封闭: kA 也是上（下）三角矩阵;
- 乘法封闭: AB 也是上（下）三角矩阵;
- 逆矩阵封闭: A 可逆，则 A^{-1} 也是上（下）三角矩阵（习题 18-2）。

注释 2. 打洞技巧:
给定数域 K 上的 n 阶分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

其中 A 是 k 阶可逆方阵，通过初等变换得到

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

求初等变换对应的初等矩阵。

先考虑数值矩阵的情况，

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

通过行变换，第二行加上第一行的 $-\frac{c}{a}$ 倍，把 c 消为 0，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

通过列变换，第二列加上第一列的 $-\frac{b}{a}$ 被，把 b 消为 0，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

相应的可得

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$