6.2

张志聪

2025 年 10 月 7 日

1

- (1)

  - 方法一：按照定义

    对任意 $\alpha, \beta \in V$，我们有

    $$\begin{aligned}(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) &= (\alpha - 2(\eta,\alpha)\eta, \beta - 2(\eta,\beta)\eta) \\ &= (\alpha,\beta) + (\alpha, -2(\eta,\beta)\eta) + (-2(\eta,\alpha)\eta, \beta) + (-2(\eta,\alpha)\eta, -2(\eta,\beta)\eta) \\ &= (\alpha,\beta) - 2(\eta,\beta)(\alpha,\eta) - 2(\eta,\alpha)(\eta,\beta) + 4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta) \\ &= (\alpha,\beta) - 2(\eta,\beta)(\alpha,\eta) - 2(\eta,\alpha)(\eta,\beta) + 4(\eta,\alpha)(\eta,\beta) \\ &= (\alpha,\beta) - 4(\alpha,\eta)(\eta,\beta) + 4(\eta,\alpha)(\eta,\beta) \\ &= (\alpha,\beta)\end{aligned}$$

    所以，$\mathscr{A}$ 是正交变换。

  - 方法二：按照矩阵角度

    按照命题 1.5 的推论，我们可以在 η 的基础上扩充成一组标准正交基，设为

    $$\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n \tag{1}$$

于是，线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 (1) 下矩阵 A 为

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{A}\eta, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n) &= (\eta - 2(\eta,\eta)\eta, \epsilon_2 - 2(\eta,\epsilon_2)\eta, \cdots, \epsilon_n - 2(\eta,\epsilon_n)\eta) \\
&= (\eta, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

于是

$$A^T A = E$$

可知 A 是正交矩阵，所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换。

- (2)

  由 (1) 的方法二的求解过程可知 $|A| = -1$，所以 $\mathscr{A}$ 是第二类的。

- (3)

  $A^2 = E$，由第四章命题 3.7(ii) 可知，$\mathscr{A}^2 = \mathscr{E}$。

- (4)

  设 $\mathscr{B}$ 在标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 B，由于 $\mathscr{B}$ 是正交变换，所以 B 是正交矩阵，因为 A 是正交矩阵，则 A^{-1} 也是正交矩阵，设

  $$B_1 = A^{-1}B$$

  是正交矩阵，所以 B_1 对应的线性变换 $\mathscr{B}_1$ 是正交变换，又因为

  $$|B_1| = |A^{-1}||B| = (-1)(-1) = 1$$

  所以，$\mathscr{B}_1$ 是第一类正交变换，而且

  $$AB_1 = B$$

  所以

  $$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}$$

2

我们有

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

由于 $dimV_1 = n-1$，所以 $dimV_1^{\perp} = 1$。

任取单位向量 $\eta \in V_1^{\perp}$；在 V_1 取一组标准正交基 $\epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n$，合在一起得到 V 的一组标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n$。

因为 $\epsilon_i \in V_1$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$，所以

$$\mathscr{A}\epsilon_i = \epsilon_i \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

因为 $\mathscr{A}\eta \in V$，可被线性表示为

$$\mathscr{A}\eta = k_1\eta + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n$$

于是，$\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $\mathscr{A}$ 是正交变换，所以

$$|A| = \pm 1$$

所以 $k_1 = \pm 1$。

$\mathscr{A}$ 是正交变换也可得

$$\begin{aligned} (\mathscr{A}\eta, \mathscr{A}\eta) &= (\eta, \eta) \\ &= 1 \\ &= k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2 \end{aligned}$$

所以，$k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0$。

如果 $k_1 = 1$，则

$$\mathscr{A}\eta = \eta \in V_1$$

出现矛盾。

综上，$k_1=-1$，于是

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\eta)=-\eta&=\eta-2(\eta,\eta)\eta\\ \mathscr{A}(\epsilon_2)=\epsilon_2&=\epsilon_2-2(\eta,\epsilon_2)\eta\\ &\vdots\\ \mathscr{A}(\epsilon_n)=\epsilon_n&=\epsilon_n-2(\eta,\epsilon_n)\eta\end{aligned}$$

两个线性变换相等，只需考察在一组基上向量相等，所以 $\mathscr{A}$ 是关于 η 的镜面反射。

3

- 必要性

  利用题设和 $\mathscr{A}$ 是正交变换，我们有

  $$(\alpha_i,\alpha_j)=(\mathscr{A}\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$$

- 充分性

  (i) 先证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩是相同的。

  取 V 的一组基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$，设

  $$\begin{aligned}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)A\\ (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)B\end{aligned}$$

  其中 A,B 都是 $n\times s$ 的矩阵。此时问题变为讨论 A 和 B 的秩。

  有题设 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$ 可知（标准真正交基下内积为对应坐标相乘在相加）

  $$A^TA=B^TB$$

又因为（注：2-5-comment.tex 中有证明）

$$rank(A^T A) = rank(A)$$

所以

$$rank(A) = rank(B)$$

(ii) 令

$$U = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$$
$$W = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$$

两者秩相同，可以构造一个同构映射 $f: U \to W$ 为对任意 $\alpha \in U$，

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

定义

$$f(\alpha) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s$$

此时，我们有

$$f(\alpha_i) = \beta_i$$

取 $U^{\perp}, W^{\perp}$ 的一组基标准正交基

$$\epsilon_{r+1}, \epsilon_{r+2}, \cdots, \epsilon_n$$

$$\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n$$

扩充 f，对任意 $\alpha \in V$，

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k_{r+1}\epsilon_{r+1} + \cdots + k_n\epsilon_n$$

定义

$$f(\alpha) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s + k_{r+1}\eta_{r+1} + \cdots + k_n\eta_n$$

验证 f 是正交变换: 对任意 $\alpha', \alpha'' \in V$，

$$\alpha' = a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s + a_{r+1}\epsilon_{r+1} + \cdots + a_n\epsilon_n$$
$$\alpha'' = b_1\alpha_1 + \cdots + b_s\alpha_s + b_{r+1}\epsilon_{r+1} + \cdots + b_n\epsilon_n$$

因为 $(\beta_i, \eta_j) = 0 \quad (1 \leq i \leq r, j \geq r+1)$，于是

$$
\begin{aligned}
(f(\alpha'), f(\alpha'')) &= (a_1\beta_1 + \cdots + a_{r+1}\eta_{r+1} + \cdots + a_n\eta_n, b_1\beta_1 + \cdots + b_{r+1}\eta_{r+1} + \cdots + b_n\eta_n) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_i b_j (\beta_i, \beta_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_i b_j (\alpha_i, \alpha_j) \\
&= (\alpha', \alpha'')
\end{aligned}
$$

所以 f 就是目标正交变换。

4

用代数的方法，算出镜面反射定义中的单位向量 η。假设已有 $\mathscr{A}$ 满足条件，于是

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\alpha &= \beta \\
\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta &= \beta \\
\alpha - \beta &= 2(\eta, \alpha)\eta
\end{aligned}
$$

因为 $2(\eta, \alpha)$ 是标量，于是我们可知 $\alpha - \beta$、η 向量的方向相同，所以可得

$$
\eta = \pm\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}
$$

假设 $\eta = \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$，则

$$
\begin{aligned}
2(\eta,\alpha)\eta &= 2(\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|},\alpha)\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|^2}(\alpha-\beta,\alpha) \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|^2}[(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)] \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)}[1-(\alpha,\beta)] \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)-(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)}[1-(\alpha,\beta)] \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{1-(\alpha,\beta)-(\beta,\alpha)+1}[1-(\alpha,\beta)] \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{2-2(\alpha,\beta)}[1-(\alpha,\beta)] \\
&= 2\frac{\alpha-\beta}{2[1-(\alpha,\beta)]}[1-(\alpha,\beta)] \\
&= \alpha-\beta
\end{aligned}
$$

所以，可设 $\eta = \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$，并在 η 上扩展出 V 的一组标准正交基 $\eta, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n$，$mathscr A$ 是一个镜面反射，只需令：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\eta &= -\eta \\
\mathscr{A}\epsilon_2 &= \epsilon_2 \\
&\vdots \\
\mathscr{A}\epsilon_n &= \epsilon_n
\end{aligned}
$$

且通过构造过程，我们有

$$\mathscr{A}\alpha = \beta$$

5

设 A 是 n 维欧氏空间 V 上任意正交变换。

对 n 进行归纳。

$n=1$ 时，设单位向量 $\epsilon_1 \neq 0$ 是 V 的基，$\mathscr{A}\epsilon_1 = a_{11}\epsilon_1$，因为这里的 a_{11} 就是特征值，由命题 2.3 的推论 1 可知，$a_{11} = \pm 1$。

我们构造一个镜面反射 $\mathscr{A}_1$ 使得

$$\mathscr{A}_1\epsilon_1 = -\epsilon_1$$

其实一维的情况下，只有这么一种，理由如下:

注释 1. 设任意镜面反射 $\mathscr{A}_1$ 的法向量为 β（即定义中的 η），对任意 $\alpha \in V$，可表示为 $\alpha = k\beta$，于是，我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1\alpha &= \alpha - 2(\alpha, \beta)\beta \\
&= k\beta - 2(k\beta, \beta)\beta \\
&= k\beta - 2k\beta \\
&= -k\beta \\
&= -\alpha
\end{aligned}$$

所以，镜面反射 $\mathscr{A}_1$ 与法向量的选取无关，是唯一的。

于是，$a_1 = -1$ 时，$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1$；
$a_1 = 1$ 时，$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1\mathscr{A}_1$。

归纳假设，$< n$ 时，命题成立。

取 V 的一组基标准正交基

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$$

设

$$\mathscr{A}(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

因为 $\mathscr{A}$ 是正交变换，所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 也是一组标准正交基。

(i) 如果 $\mathscr{A} = \mathscr{E}$，则我们有

$$\epsilon_i = \beta_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

定义镜像反射:

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_n\epsilon_1 &= -\epsilon_1 = -\beta_1 \\
\mathscr{B}_n\epsilon_2 &= \epsilon_2 = \beta_2 \\
&\vdots \\
\mathscr{B}_n\epsilon_n &= \epsilon_n = \beta_n
\end{aligned}$$

于是可得 $\mathscr{A} = \mathscr{B}_n\mathscr{B}_n$。

(ii) 如果 $\mathscr{A} \neq \mathscr{E}$，则存在 $\epsilon_i \neq \mathscr{A}\epsilon_i = \beta_i$，不妨设 $\epsilon_1 \neq \beta_1$，由习题 4 可知，存在镜像反射 $\mathscr{B}_1$ 使得

$$\mathscr{B}_1\epsilon_1 = \beta_1$$

于是

$$\mathscr{B}_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n) = (\beta_1, \mathscr{B}_1\epsilon_2, \cdots, \mathscr{B}_1\epsilon_n)$$

是一组标准正交基。

令 $M = L(\epsilon_1)$ 则 $M^\perp = L(\epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n)$，由于 $M^\perp$ 是 $n-1$ 维线性空间，$\mathscr{B}_1^{-1}\mathscr{A}|_{M^\perp}$ 是正交变换（注：$\mathscr{A}|_{M^\perp} = L(\mathscr{B}_1\epsilon_2, \cdots, \mathscr{B}_1\epsilon_n)$），由归纳假设可知能被一系列镜面反射的乘积表示，记为 $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}_2\mathscr{B}_3\cdots$（有限个），$\mathscr{B}_n$ 扩展为 V 上的镜面反射，令 $\mathscr{B}_n\epsilon_1 = \epsilon_1$，于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1\mathscr{B}_n(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n) &= \mathscr{B}_1(\epsilon_1, \mathscr{B}_1^{-1}\beta_2, \cdots, \mathscr{B}_1^{-1}\beta_n) \\
&= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)
\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{A} = \mathscr{B}_1\mathscr{B}_n$$

归纳完成。

6

没看懂题目。

7

(i) 镜面反射的矩阵表示

取 V 的任意一组标准正交基

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$$

对于镜面反射 $\mathscr{A}$ 存在单位向量 $\eta \in V$，其坐标设为

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

此时 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A = E - 2yy^T \quad (1)$$

验证这个矩阵的正确性：对任意 $\alpha \in V$，设坐标为 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，于是

$$\begin{aligned} Ax &= (I - 2yy^T)x \\ &= x - 2y(y^T x) \\ &= x - 2y(\eta, \alpha) \\ &= x - 2(\alpha, \eta)y \end{aligned}$$

（注意：(α, η) 是标量）

对应的坐标变换为

$$\mathscr{A}\alpha = \alpha - 2(\alpha, \eta)\eta$$

符合镜面反射定义。

(ii) 正交变换的矩阵性质

正交变换 $\mathscr{B}$ 在标准正交基下的矩阵 B 满足正交矩阵的定义:$B^T B = E$，即 $B^{-1} = B^T$。此时 $\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在这组基下的矩阵为 $B^{-1}AB = B^T AB$。

(iii) 证明 B^TAB 是镜面反射矩阵。

$$\begin{aligned}B^TAB &= B^T(E-2yy^T)B\\ &= B^T(B-2yy^TB)\\ &= B^TB-2B^Tyy^TB\\ &= E-2B^Tyy^TB\\ &= E-2(B^Ty)(B^Ty)^T\end{aligned}$$

令 $\beta = B^Ty$，接下来我们只需证明 β 是单位向量，即 $(\beta,\beta)=1$。

$$\begin{aligned}(\beta,\beta) &= \beta^T\beta\\ &= (B^Ty)^TB^Ty\\ &= y^TB^TBy\\ &= y^Ty\\ &= 1\end{aligned}$$

所以，$B^TAB = E-2\beta\beta^T$，其中 β 是单位向量坐标，由第一步的镜面反射矩阵定义，B^TAB 是镜面反射矩阵，对应线性变换 $\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是镜面反射。

8

提示：证明 $f(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数，即证明

$$f(k\alpha_1+l\alpha_2,\beta) = kf(\alpha_1,\beta)+lf(\alpha_2,\beta)$$
$$f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$$

10