2.4 注释

张志聪

2025 年 8 月 7 日

注释 1. 矩阵乘法的整体理解。

设 $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times s}, C = AB$。

- C 的列向量角度；

  对于的 C 第 j 个列向量：以 B 的第 j 列元素为系数作 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合所得的 m 维向量。

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \cdots + b_{nj}\alpha_n$$

- C 的行向量角度；

  对于的 C 第 i 个行向量：以 A 的第 i 行元素为系数作 B 的行向量组 $\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_n^T$ 的线性组合所得的 s 维向量。

$$
\begin{aligned}
&(c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{is}) \\
&\qquad = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})B \\
&\qquad = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \\
&\qquad = a_{i1}\beta_1^T + a_{i2}\beta_2^T + \cdots + a_{in}\beta_n^T
\end{aligned}
$$

- 整体角度；

  如果写

$$
A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}
$$

  那么，

$$
C = AB = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_n\beta_n^T
$$

- 整体角度（错误）；

  如果写

$$
A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_s \end{bmatrix}
$$

  此时，$\alpha_i^T\beta_i$ 是标量，所以整体 AB 也是标量，所以这种理解方式是错误的。

注释 2. 对某种映射的讨论：

在数域 K，对任意 $m,n \in \mathbb{N}^+$ 定义映射

$$\theta : \{A : A \in M_{m,n}(K)\} \to \{K^n \to K^m \text{的映射}\}$$
$$\theta(A) = f_A$$

它是单射、满射？

证明：

- (1) 是单射;

  对任意 $A, B \in M_{m,n}(K)$ 且 $A \neq B$，所存在某列 $col_j(A) \neq col_j(B)$（$1 \leq j \leq n$）。于是取 K^n 中坐标向量

$$x_j^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \cdots j$$

  此时

$$\theta(A)(x_j^T) = f_A(x_j^T) = col_j(A)$$
$$\theta(B)(x_j^T) = f_B(x_j^T) = col_j(B)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\theta(A) \neq \theta(B)$$

  所以，θ 是单射。

- (2) 不是满射。

  举一个反例，设映射 $f : K^n \to K^m$，对任意 $x \in K^n$，$f(x) = [1, 1, \cdots, 1]^T$。但对任意矩阵 $A \in M_{m,n}(K)$，我们有

$$\theta(A)(0) = f_A(0) = 0$$

  即：在 θ 中找不到原像 A，使得 $\theta(A) = f$。故不是满射。

注释 3. 命题 *4.4(ii)* 的扩展。

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

证明：

因为

$$A = A + B - B$$

通过 (ii)，我们有

$$\begin{aligned} rank(A) &\leq rank(A+B) + rank(-B) \\ &= rank(A+B) + rank(B) \\ &\Longrightarrow \\ rank(A) - rank(B) &\leq rank(A+B) \end{aligned}$$

同理，我们有

$$rank(B) - rank(A) \leq rank(A+B)$$

综上

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B)$$

结合已知的 (ii)，我们有

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

注释 4. 由习题 *9,10,11*，我们得到一个以下命题：

在数域 K 中，有 $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,s}(K)$，$AB = 0 (B \neq 0)$ 当且仅当 $rank(A) < n$。

证明：

- 必要性

  假设 $rank(A) = n$，于是 $Ax = 0$ 只有零解，与题设 $AB = 0 (B \neq 0)$ 矛盾。

- 充分性

  已知 $rank(A) < n$,于是线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解,且基础解系中向量个数为大于等于 1,通过基础解系构造矩阵 B,得到 $AB = 0(B \neq 0)$。

注释 5. 把线性无关的向量组，作为基础解系，找方程组。

习题 13，习题 14

注释 6. 命题 *4.6* 第二种解法。

习题 15