2.5

张志聪

2025 年 8 月 9 日

1

- (3)

  归纳法。通过计算有限次，找到规律。

- (4)

  归纳法。

- (5)

  尝试计算：

  $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- (6)

  二项式定理。把需要计算的矩阵写作

  $$(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + + C_n^2 A^{n-2} B^2 + \cdots + B^n$$

  注意以上二项式定理成立有前提：

  $$AB = BA$$

6

因为 A 与数域 K 上的所有 n 阶方阵都可交换，特别地 n 阶方阵是对角矩阵，于是由习题 5 可知，A 是对角矩阵。

再利用习题 4，与 J 类型的矩阵可交换的 A，主对角线上元素相等。

综上可得，A 是数量矩阵。

7

- (1)

  $$\begin{aligned}(A+E)(A-E) &= A^2 - AE + EA - E^2 \\ &= E - A + A - E \\ &= 0\end{aligned}$$

  于是

  $$\begin{aligned}rank[(A+E)(A-E)] = 0 &\geq rank(A+E) + rank(A-E) - n \\ n &\geq rank(A+E) + rank(A-E)\end{aligned}$$

  我们有

  $$\begin{aligned}rank(A+E) + rank(A-E) &= rank(A+E) + rank(E-A) \\ &\geq rank(A+E+E-A) = rank(2E) = n\end{aligned}$$

  综上

  $$rank(A+E) + rank(A-E) = n$$

- (2)

  与 (1) 类似。

9

$$
\begin{aligned}
rank(A_1A_2\cdots A_k) &\geq rank(A_1)+rank(A_2\cdots A_k)-n \\
&\geq rank(A_1)+[rank(A_2)+rank(A_3A_4\cdots A_k)-n]-n \\
&\geq \vdots \\
&\geq rank(A_1)+rank(A_2)+\cdots+rank(A_k)-(k-1)n
\end{aligned}
$$

因为

$$A_1A_2\cdots A_k=0$$

所以

$$rank(A_1A_2\cdots A_k)=0$$

综上可得

$$
\begin{aligned}
0 &\geq rank(A_1)+rank(A_2)+\cdots+rank(A_k)-(k-1)n \\
rank(A_1)+rank(A_2)+\cdots+rank(A_k) &\leq (k-1)n
\end{aligned}
$$

14

- (2)

$$B^{-1}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon^{-1} & \epsilon^{-2} & \epsilon^{-3} & \cdots & \epsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \epsilon^{-2} & \epsilon^{-4} & \epsilon^{-6} & \cdots & \epsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \epsilon^{-3} & \epsilon^{-6} & \epsilon^{-9} & \cdots & \epsilon^{-3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{-(n-1)} & \epsilon^{-2(n-1)} & \epsilon^{-3(n-1)} & \cdots & \epsilon^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

  为验证 $BB^{-1}=E$，我们验证 E 的 $\beta_i(1\leq i\leq n)$ 列向量。通过矩阵乘法可得

$$
\begin{aligned}
\beta_{ii} &= \frac{1}{n}(1\cdot 1+\epsilon^{i-1}\epsilon^{-(i-1)}+\epsilon^{(i-1)2}\epsilon^{-(i-1)2}+\epsilon^{(i-1)3}\epsilon^{-(i-1)3}+\cdots+\epsilon^{(i-1)(n-1)}\epsilon^{-(i-1)(n-1)}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

另外 $i \neq j(1 \leq j \leq n)$ 时，利用第一章 §2 习题 9，

$$
\begin{aligned}
\beta_{ij} &= \frac{1}{n}(1 \cdot 1 + \epsilon^{i-1}\epsilon^{-(j-1)} + \epsilon^{(i-1)2}\epsilon^{-(j-1)2} + \epsilon^{(i-1)3}\epsilon^{-(j-1)3} + \cdots + \epsilon^{(i-1)(n-1)}\epsilon^{-(j-1)(n-1)}) \\
&= \frac{1}{n}(1 + \epsilon^{i-j} + \epsilon^{2(i-j)} + \epsilon^{3(i-j)} + \cdots + \epsilon^{(n-1)(i-j)}) \\
&= \frac{1}{n} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

16

提示

- 方法一（整体）：通过对角矩阵 $A^T = A$。
  - 必要性

    已知，AB 是对称矩阵和 A, B 是对称矩阵，那么

    $$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

  - 充分性

    已知，$AB = BA$，我们有

    $$(AB)^T = (BA)^T$$

    又

    $$(BA)^T = A^T B^T = AB$$

    综上可得

    $$(AB)^T = AB$$

    所以，AB 是对称矩阵。

- 方法二（部分）：通过对角矩阵的元素性质 $a_{ij} = a_{ji}$ 证明。

  这个就是矩阵乘法的计算，过程略。

18

- (2)

  设任意上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  A 是可逆的，由习题 22 可知，主对角线上的元素全不为零（做了增强，具体看习题的解答）。

  我们考虑计算 A 的逆矩阵。

$$\begin{aligned}(A|E)=&\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ \to &\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} \\ \to &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}\end{aligned}$$

  先把主对角线上的元素变成 1，然后把非主对角线上方的元素变成 0，可得 A^{-1} 是上三角矩阵。

22

这道题的反方向也是成立的。即上（下）三角矩阵主对角线元素全不为零当且仅当矩阵可逆。

- (1) 必要性

  直观上，三角矩阵就已经是阶梯型矩阵了，主对角线上全不为零，矩阵就是满秩的，于是可逆的。

  严格证明，设任意矩阵上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  其中 $a_{ii} \neq 0(1 \leq i \leq n)$。

  我们需要证明 A 是满秩的，即 $Ax = 0$ 只有零解。我们设

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  我们有

$$\begin{aligned} \alpha_n^T x &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= 0 \\ a_{nn} x_n &= 0 \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

  同理，我们有

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}^T x &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + a_{n-1n-1} x_{n-1} + a_{n-1n} x_n &= 0 \\ a_{n-1n-1} x_{n-1} + a_{n-1n} x_n &= 0 \end{aligned}$$

  由于 $x_n = 0$，代入后，我们有

$$\begin{aligned} a_{n-1n-1} x_{n-1} &= 0 \\ x_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

以此类推，我们有

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

于是

$$x = 0$$

由以上推理可得 Ax 只有零解，于是 A 中的列向量是线性无关的，于是可得 $rank(A) = n$，即 A 是满秩的，从而 A 是可逆的。

- (2) 充分性

  证明其逆否命题：上（下）三角矩阵主对角线存在零元素时，矩阵不可逆。

  设任意矩阵上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  主对角线上，第一个零元素为 $a_{kk} = 0 (1 \leq k \leq n)$。

  考虑矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)k} \end{bmatrix}$$

  这是 A 矩阵的一部分，是一个 $(k-1) \times k$ 的矩阵，由矩阵的列秩与行秩相等可得，它的列向量一定是线性相关的。由于在 A 中，这些列向量的下方都是元素 0，于是可得 A 中这些列向量也是线性相关的。于是可得 A 中列向量的秩小于 n，可得 A 不是满秩的，从而 A 不可逆。

23

- (1)

设 A, B 为任意 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

设 $AB = C = (c_{ij}), BA = D = (d_{ij})$，我们有

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}b_{kl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(BA) &= d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k1} + \sum_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_{kn} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{lk}a_{kl} \end{aligned}$$

于是，只需证明 $\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}b_{kl} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{lk}a_{kl}$。

对 n 进行归纳。

$n = 1$ 时，

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{1}\sum_{k=1}^{1} a_{lk}b_{kl} &= a_{11}b_{11} \\ &= \sum_{l=1}^{1}\sum_{k=1}^{1} b_{lk}a_{kl} \end{aligned}$$

等式成立。

归纳假设 $n=r$ 时，

$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}a_{lk}b_{kl}=\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}b_{lk}a_{kl}$$

等式成立。

$n=r+1$ 时，我们有

$$\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{r+1}a_{lk}b_{kl}=\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}a_{lk}b_{kl}+\sum_{l=1}^{r+1}a_{l(r+1)}b_{(r+1)l}+\sum_{k=1}^{r}a_{(r+1)k}b_{k(r+1)}$$

同理，我们有

$$\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{r+1}b_{lk}a_{kl}=\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}b_{lk}a_{kl}+\sum_{l=1}^{r+1}b_{l(r+1)}a_{(r+1)l}+\sum_{k=1}^{r}b_{(r+1)k}a_{k(r+1)}$$

由于求和符号的下标不依赖于具体的字母，于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r+1}a_{l(r+1)}b_{(r+1)l}-\sum_{k=1}^{r}b_{(r+1)k}a_{k(r+1)}&=\sum_{l=1}^{r+1}a_{l(r+1)}b_{(r+1)l}-\sum_{l=1}^{r}b_{(r+1)l}a_{l(r+1)}\\&=a_{(r+1)(r+1)}b_{(r+1)(r+1)}\end{aligned}$$

同理

$$\sum_{l=1}^{r}a_{(r+1)l}b_{l(r+1)}-\sum_{l=1}^{r+1}b_{l(r+1)}a_{(r+1)l}=-a_{(r+1)(r+1)}b_{(r+1)(r+1)}$$

结合归纳假设可知

$$\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{r+1}a_{lk}b_{kl}-\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{r+1}b_{lk}a_{kl}=0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{r+1}a_{lk}b_{kl}=\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{r+1}b_{lk}a_{kl}$$

归纳完成。

所以，$Tr(AB)=Tr(BA)$。

- (2)

设 A 为任意 n 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有

$$\begin{aligned} Tr(AA^T) &= (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2) \\ &+ (a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2) \\ &+ \cdots \\ &+ (a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2) \end{aligned}$$

因为 A 是 $\mathbb{R}$ 上的矩阵，所以

$$Tr(AA^T) \geq 0$$

后一部分的证明略。

- (3)

  我们有

$$\begin{aligned} &Tr[(AB - BA)(BA - AB)] \\ &= Tr(ABBA - ABAB - BABA + BAAB) \\ &= Tr(ABBA) - Tr(ABAB) - Tr(BABA) + Tr(BAAB) \end{aligned}$$

  利用 (1)，我们有

$$\begin{aligned} &Tr(ABBA) - Tr(ABAB) - Tr(BABA) + Tr(BAAB) \\ &= Tr(AABB) - Tr(ABAB) - Tr(ABAB) + Tr(AABB) \end{aligned}$$

  又因为

$$(AB - BA)^T = BA - AB$$

利用 (2) 可得

$$
\begin{aligned}
Tr(AABB) - Tr(ABAB) - Tr(ABAB) + Tr(AABB) \geq 0 \\
Tr(AABB) + Tr(AABB) \geq Tr(ABAB) + Tr(ABAB) \\
2Tr(AABB) \geq 2Tr(ABAB) \\
Tr(A^2B^2) \geq Tr[(AB)^2]
\end{aligned}
$$