4.4

张志聪

2025 年 9 月 18 日

3

（i）A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

因为

$$f(\lambda) = 0$$
$$\lambda^n = 0$$
$$\lambda = 0$$

所以，它的特征根仅有 0。

（ii）求 $\lambda_0 = 0$ 对应的特征向量.

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

这个齐次线性方程组中，仅有 x_1 是自由未知量，取 $x_1 = 1$，得基础解系

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

它对应于 A 的特性向量

$$x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n = \epsilon_1$$

于是 $V_{\lambda_0} = L(\epsilon)$。

7

(1) 反证法，假设存在 $\lambda \neq 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值。于是，存在 $\alpha \neq 0$ 使得

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^k(\alpha) &= \mathscr{A}^{k-1}(\mathscr{A}\alpha) \\
&= \mathscr{A}^{k-1}(\lambda\alpha) \\
&= \cdots \\
&= \lambda^k\alpha \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

这与题设 $\mathscr{A}^k = 0$ 矛盾。

(2) 接下来，证明 0 是 $\mathscr{A}$ 的特征值。

对任意 $\alpha \in V$，我们有

$$\mathscr{A}^k(\alpha) = 0$$

于是，存在 $l(1 \leq l \leq k)$ 使得

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^{l-1}(\alpha) \neq 0 \\
\mathscr{A}^l(\alpha) = \mathscr{A}(\mathscr{A}^{l-1}(\alpha)) = 0 = 0 \cdot \mathscr{A}^{l-1}(\alpha)
\end{aligned}$$

所以，0 是 $\mathscr{A}$ 的特征值，$\mathscr{A}^{l-1}(\alpha)$ 是对应的特征向量。

8

反证法，假设 $\xi_1 + \xi_2$ 是某个特征向量，那么存在 $\lambda \in K$ 使得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\xi_1+\xi_2) &= \lambda(\xi_1+\xi_2)\\ \mathscr{A}\xi_1+\mathscr{A}\xi_2 &= \lambda(\xi_1+\xi_2)\\ \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2 &= \lambda(\xi_1+\xi_2)\\ (\lambda_1-\lambda)\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2 &= 0\end{aligned}$$

由命题 4.3 可知，ξ_1, ξ_2 是线性无关的，所以

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda=0\\ \lambda_2-\lambda=0\end{cases}$$

于是可得

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1\\ \lambda &= \lambda_2\end{aligned}$$

有题设可知 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，出现矛盾，假设不成立，命题得证。

8 推广

$k\xi_1 + l\xi_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量。

证明：

因为 $k\xi_1 \in V_{\lambda_1}, l\xi_2 \in V_{\lambda_2}$，利用习题 8，命题得证。

9

只需证明，这些特征向量属于同一个特征子空间即可。

反证法，假设 $\alpha \in V_{\lambda_1}, \beta \in V_{\lambda_2}$，由习题 8 可知，

$$\alpha + \beta$$

不是特征向量，与题设矛盾。

10

$\mathscr{A}$ 是线性空间 V 内的可逆线性变换，即存在线性变换 $\mathscr{B}$ 使得

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$$

任取线性变换 $\mathscr{A}, \mathscr{A}$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 A, B，我们有

$$\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B) = AB = E$$

于是可得

$$rank(A) = rank(B) = rank(E) = n$$

- (1)
  - 方法一

    反证法，假设线性变换 $\mathscr{A}$ 存在为零的特征值，那么，我们有

    $$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= 0 \\ |-A| &= 0 \end{aligned}$$

    A 不满秩，出现矛盾。
  - 方法二

    $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换，所以它是双射。

    反证法，假设线性变换 $\mathscr{A}$ 存在为零的特征值，于是存在 $\alpha \in V$ 使得

    $$\begin{aligned} \mathscr{A}\alpha &= 0 \cdot \alpha = 0 \\ \mathscr{A}0 &= 0 \end{aligned}$$

    与 $\mathscr{A}$ 是双射矛盾。

- (2)

  λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值，那么，存在 $\alpha \in V$ 使得

  $$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$$

两边同时代入 $\mathscr{A}^{-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}\alpha &= \mathscr{A}^{-1}\lambda\alpha \\ \alpha &= \lambda\mathscr{A}^{-1}\alpha\end{aligned}$$

10 推广

(1) 的反方向也是成立的，即：$\mathscr{A}$ 的特征值都不为零，则 $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换。

证明：

$\mathscr{A}$ 的在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 A，则 A 的全体特征根的乘积，我们有

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A| \neq 0$$

所以，A 是满秩。

于是存在 A^{-1} 使得

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

于是，由 $\sigma : End(V) \to M_n(K)$ 的双射性，存在线性变换 $\mathscr{B}$ 在基下的矩阵为 A^{-1}，所以

$$E = \sigma(\mathscr{A})\sigma(\mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{A}\mathscr{B})$$

可得

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$$