4.4 注释

张志聪

2025 年 9 月 20 日

注释 1. 两个 n 阶矩阵 A, B 相似，我们有

$$\begin{aligned} det(A) &= det(B) \\ Trace(A) &= Trace(B) \end{aligned}$$

证明：

- $det(A) = det(B)$

  因为 A, B 相似，那么存在 n 阶可逆矩阵 T，使得

  $$B = T^{-1}AT$$

  于是

  $$\begin{aligned} |B| &= |T^{-1}AT| \\ &= |T^{-1}||A||T| \\ &= |A||T||T^{-1}| \\ &= |A||TT^{-1}| \\ &= |A| \end{aligned}$$

- $Trace(A) = Trace(B)$

  因为相似举证，有着相同的特征多项式，即

  $$|\lambda E - B| = |\lambda - A|$$

于是，由命题 4.2，我们有

$$f(\lambda) = |\lambda - A| = \lambda^n - Trace(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$$
$$g(\lambda) = |\lambda - B| = \lambda^n - Trace(B)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|B|$$

因为

$$f(\lambda) = g(\lambda)$$

于是，我们可以任意代入 $l = n + 1$ 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_l$，使得

$$f(x_i) = g(x_i)$$

于是利用第一章 §2 命题 2.2 的推论 2 可知，$f(\lambda), g(\lambda)$ 多项式的系数相等，于是可得

$$Trace(A) = Trace(B)$$

注释 2. M 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，$\alpha \in M$ 是 $\mathscr{A}|_M$ 下属于特征值 λ 的特征向量，那么 α 也是 $\mathscr{A}$ 下属于特征值 λ 的特征向量。

证明：
α 是 $\mathscr{A}|_M$ 下的特征向量，即

$$\mathscr{A}|_M\alpha = \lambda\alpha$$

因为 M 是不变子空间，所以

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$$

由特征向量的定义可知，

$$\alpha \in V_\lambda$$

注释 3. 如果 M 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的一维不变子空间，那么 M 是特征子空间的子集。

证明：

设 ϵ_1 是 M 的基。于是

$$\mathscr{A}\epsilon_1 \in M$$

所以，存在标量 λ，使得

$$\mathscr{A}\epsilon_1 = \lambda\epsilon_1$$

于是可得 λ 是特征值，ϵ_1 是特征向量。我们有

$$M \subseteq V_\lambda$$

注释 4. 例 *4.4* 的另一种证明方式。

证明： todo

注释 5. 代数重数 $\geq$ 几何重数

证明：

注释 6. $\mathscr{A}$ 是否可以对角化的充分必要条件：

$$\text{代数重数之和} = \text{几何重数之和}$$

推论：

$$\text{每个特征值的代数重数} = \text{每个特征值的几何重数}$$