2.1 注释

张志聪

2025 年 8 月 2 日

注释 1. 线性相关第一个等价定义，另一种说法：
给定 K^m 内向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是：存在 K 内不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

注释 2. 线性无关第二个等价定义，另一种说法：
给定 K^m 内向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是：K 内只存在全零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

注释 3. 命题 *1.4* 的增强形式：替换定理
给定 K^m 内两个向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \quad (I)$$
$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \quad (II)$$

如果向量组 (I) 中每一个向量都能被 (II) 线性表示，且向量组 (I) 线性无关，则有如下结论：

- *(1)* $r \le s$。
- *(2)* 向量组 (I) 中的所有向量经过适当替换 (II) 中的向量，可以

得到与 (II) 线性等价的向量组 (II')。

- *(3)* (II) 线性无关，替换后的向量组 (II') 也线性无关。

证明：

- (1)

  这是命题 1.4 的逆否命题。

- (2)

  对 r 进行归纳。

  ○ 归纳基始 $r=1$，首先，由 (I) 是线性无关的可知，$\alpha_1 \neq 0$。又因为 (I) 中每一个向量都能被 (II) 线性表示，所以存在 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s$$

  因为 $\alpha_1 \neq 0$，可以确定至少存在一个 $k_i \neq 0 (1 \leq i \leq s)$（我们取其中的一个即可）。

  我们用 α_1 替换 β_i，于是我们得到新的向量组：

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}, \alpha_1, \beta_{i+1}, \cdots, \beta_s \quad (II')$$

  接下来，我们需要证明 (II) 与 (II') 线性等价。

  (II') 可以被 (II) 线性表示是显然的，因为 (II') 中的向量除了 α_1 外，(II) 中都存在，且 α_1 也是可以被 (II) 线性表示。

  (II) 和 (II') 相差一个向量 α_1，只需关注 β_i 是否能被 (II') 线性表示即可。我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_i\beta_i + \cdots + k_s\beta_s \\
k_i\beta_i &= \alpha_1 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - \cdots - k_{i-1}\beta_{i-1} - k_{i+1}\beta_{i+1} - \cdots - k_s\beta_s \\
\beta_i &= \frac{1}{k_i}\alpha_1 - \frac{k_1}{k_i}\beta_1 - \frac{k_2}{k_i}\beta_2 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\beta_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\beta_{i+1} - \cdots - \frac{k_s}{k_i}\beta_s
\end{aligned}$$

  综上，(II) 与 (II') 线性等价。

  ○ 归纳假设 $r=k-1$ 时，命题成立。

◦ $r = k$ 时，(I) 中去除 α_k 的到的 (I') 也是线性无关的（可以直接用反证法证明）。于是利用归纳假设可知，(I') 替换 (II) 中的向量得到:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{i(s-r+1)} \quad (II')$$

与 (II) 是线性等价的。

接下来，我们只需证明，把 α_k 替换 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{i(s-r+1)}$ 中的某一个向量后，依然和 (II') 线性等价即可。

由题设 (I) 可以被 (II) 线性表示可知，α_k 可以被 (II) 线性表示，因为 (II) 和 (II') 是线性等价的，于是我们有

$$\alpha_k = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_{k-1}\alpha_{k-1} + a_k\beta_{i1} + \cdots + a_s\beta_{i(s-r+1)}$$

我们可以断定 $a_k, \cdots, a_s$ 中必有非零的数（可以通过反证法，如果都等于零，那么 α_k 就可以被 (I) 中的其他向量线性表示了，与题设矛盾）。

设 $a_l \neq 0 (k \leq l \leq s)$，那么，用 α_k 替换掉对应的 β_l，我们得到新的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{l-1}, \beta_{l+1}, \cdots, \beta_{i(s-r+1)} \quad (II'')$$

易得 (II'') 与 (II') 线性等价（讨论和 $r = 1$ 类似，这里不做赘述。），进而 (II) 与 (II'') 线性等价。

归纳完成，命题成立。

- (3)

  对 r 进行归纳。

  ◦ 归纳基始 $r = 1$，可知 $\alpha_1 \neq 0$，不妨设替换后的 (II) 为：

  $$\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_s \quad (II')$$

  我们需要证明 (II') 是线性无关的。反证法，假设 (II') 是线性相关的，那么

  $$k_1\alpha_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0$$

  存在非零解。

显然，$k_1 \neq 0$，否则

$$k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0$$

这与题设 (II) 线性无关矛盾。

由 $k_1 \neq 0$，有 α_1 可以被 $\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_s$ 线性表示为

$$\alpha_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s)$$

因为 (II) 与 (II') 线性等价可知，β_1 可以被 (II') 线性表示：

$$\begin{aligned}\beta_1 &= c_1\alpha_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_s\beta_s \\ &= -\frac{c_1}{k_1}(k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s) + c_2\beta_2 + \cdots + c_s\beta_s\end{aligned}$$

于是我们有 (II) 是线性有关的，与题设矛盾，所以假设不成立。

∘ 归纳假设 $r = k - 1$ 时，命题成立。

∘ $r = k$ 时。因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ 是线性无关的，所以由归纳假设可知，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{i(s-r+1)} \quad (II')$$

是线性无关的。

按照之前的方法用 α_k 替换掉 (II') 中对应的 β_l，得到与 (II') 线性等价的新向量组 (II'')，我们要证明 (II'') 也是线性无关的。

证明方式与 $r = 1$ 时相同。反证法，假设 (II'') 是线性相关的，那么

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k + c_{k+1}\beta_{i1} + \cdots + c_{l-1}\beta_l + c_{l+1}\beta_l + \cdots + c_s\beta_{i(s-r+1)} = 0$$

存在非零解。$c_k \neq 0$，否者会与 (II') 线性无关矛盾。于是，我们有 α_k 可以被 (II'') 中的其他向量线性表示:

$$\alpha_k = -\frac{1}{c_k}(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_{k-1}\alpha_{k-1} + \cdots + c_{k+1}\beta_{i1} + \cdots + c_{l-1}\beta_l + c_{l+1}\beta_l + \cdots + c_s\beta_{i(s-r+1)})$$

因为 (II') 与 (II'') 线性等价，所以存在

$$\beta_l = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_k\alpha_k + d_{k+1}\beta_{i1} + \cdots + d_{l-1}\beta_l + d_{l+1}\beta_{l+1} + \cdots + d_s\beta_{i(s-r+1)}$$

替换掉 α_k，就会得到 β_l 可以被 (II') 中的其他向量线性表示，这与 (II') 线性无关矛盾。综上，假设不成立，(II'') 是线性无关的。

归纳完成，命题成立。

注释 4. 筛选法中涉及的命题：

已知，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

是线性无关的，如果 α_{n+1} 无法被向量组线性表示，把 α_{n+1} 加入向量组，则新向量组 (II) 仍然是线性无关的。

证明：

反证法，假设新的向量组线性相关，于是方程组

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + k_{n+1}\alpha_{n+1} = 0$$

存在非零解。

这里 $k_{n+1} = 0$，否则会与 α_{n+1} 不能被 (I) 线性表示矛盾。

于是，我们有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

存在非零解，这与题设 (I) 线性无关矛盾。

综上，假设不成立，命题得证。

注释 5. 关于集合 S 上的二元“关系”（这里用 $\sim$ 表示）的定义：
对任意 $a, b \in S$，要么 a 对 b 存在这种“关系”（$a \sim b$），要么不存在这种“关系”（$a \nsim b$），两者必选其一。

注释 6. 一个重要关系。

设，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_2 \quad (I)$$

秩是 r，存在一个部分组

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik} \quad (II)$$

那么，以下任意两个结论可以推出另一个结论：

- *(1)* (II) *线性无关;*
- *(2)* (II) *可以线性表示* (I)*;*
- *(3)* $k = r$*。*

证明：

习题 14,15