

## 1.1 习题

张志聪

2025 年 6 月 14 日

### 1

- (1)  
是数域，证明略。

- (2)  
是数域。

设  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ，于是

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3}i) + (c + d\sqrt{3}i) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3}) \\ (a + b\sqrt{3}i)(c + d\sqrt{3}i) &= (ac - 3bd) + (ac + bd)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

当  $c + d\sqrt{3}i \neq 0$ ，即  $c^2 + 3d^2 \neq 0$  时，有

$$\begin{aligned}\frac{a + b\sqrt{3}i}{c + d\sqrt{3}i} &= \frac{(a + b\sqrt{3}i)(c - d\sqrt{3}i)}{c^2 + 3d^2} \\ &= \frac{(ac - 3bd) + (-ad + bc)\sqrt{3}i}{c^2 + 3d^2} \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}(-\sqrt{3})$  对复数的四则运算封闭，所以它是一个数域。

- (3)  
todo

### 2

- (1)  
既不是单射也不是满射。

- (2)  
不是单射，是满射。
- (3) 是单射，不是满射。

### 3

- (1)  
反证法，假设  $f$  不是满射，那么，存在  $y \in S$ ，没有  $x \in S$  使得  $f(x) = y$ ，即  $f(S) \subseteq S \setminus \{y\}$ 。  
 $S$  中的元素个数为  $n$ ， $S \setminus \{y\}$  的元素个数小于  $n$ ，那么， $f$  存在多个元素映射到同一个元素，这与  $f$  是单射矛盾。
- (2)  
反证法，假设  $f$  不是单射。那么，存在  $a \neq b$  使得

$$f(a) = f(b)$$

从而

$$f(S \setminus \{a\}) = f(S \setminus \{b\}) = f(S)$$

于是  $f(S)$  的元素个数小于等于  $n - 1$ ，那么， $S \setminus f(S) \neq \emptyset$ ，设  $y \in S \setminus f(S)$ ，则不存在  $x \in S$  使得  $f(x) = y$ ，这与  $f$  是满射矛盾。

### 4

只证明 (1)，另一个证明方式类似。

- (1)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

$\Rightarrow$

任意  $x \in A \cap (B \cup C)$ ，则  $x \in A$  并且  $x \in (B \cup C)$ ，所以有以下情况：

–  $x$  同时属于  $B, C$ 。

那么  $x \in (A \cap B)$  且  $x \in (A \cap C)$ ，进而  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

–  $x \in B$ 。

那么  $x \in (A \cap B)$ ，进而  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

–  $x \in C$ 。

同理。

综上  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ，于是  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Leftarrow$

讨论方式类似，不做赘述。

综上， $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

## 5

这是显然的，和图中的表格就没有关系！

## 6

按理说，这是数学分析的内容，表达了有理数是无限可数的。这里应该是希望用习题 5 进行证明。

习题 5 已经列出了所有的证有理数构成的集合，我们以相同的方式排列负有理数序列（需要把 0 放在开头，设为  $b_0$ ）

$$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots,$$

定义映射

$$g(b_k) = 2k + 1$$

综上，我们定义一个函数  $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}+$ ，

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in \mathbb{Q} \setminus A \\ f(x) & \text{if } x \in A \end{cases}$$

易得，函数  $h$  是单射函数。

## 7

定义集合  $A, B$  如下

$$\begin{aligned}A &:= \{1, 2\} \\ B &:= \{a, b, c\}\end{aligned}$$

定义函数  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$  如下

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{if } x = 1 \\ b & \text{if } x = 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 2 & \text{if } x = b \\ 1 & \text{if } x = c \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}gf(1) &= g(f(1)) = 1 \\ gf(2) &= g(f(2)) = 2\end{aligned}$$

所以,  $gf = id_A$  成立。

因为, 我们有

$$fg(c) = f(g(c)) = f(1) = a$$

所以  $fg \neq id_B$ , 进而  $f$  不是可逆映射。

## 8

- $K \cap L$  是数域。

反证法, 假设  $K \cap L$  不是数域, 那么存在  $a, b \in K \cap L$ , 使得其四则运算结果不是数域  $K \cap L$  中的元素。

因为  $K, L$  都是数域, 且  $a, b \in K \cap L$ , 可知  $a, b \in K$  和  $a, b \in L$ , 于是其四则运算结果也是数域  $K, L$  中的元素, 进而其四则运算结果是数域  $K \cap L$  中的元素, 存在矛盾。

- $K \cup L$  不一定是数域的举例。

定义  $K, L$  如下

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$L := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

于是

$$\sqrt{2} \in K \subseteq K \cup L$$

$$\sqrt{3} \in L \subseteq K \cup L$$

但

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin K \cup L$$

## 9

- (1.1)  $\sum_{i=1}^n i$ 。

这是一个等差数列求和问题，其中

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$\vdots$$

$$a_n = n$$

公差为 1，所以

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

- (1.2)  $\sum_{i=1}^n i^2$ 。

证明的方式比较多，这里使用恒等式

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

来证明。

于是  $n \geq 2$ , 我们有

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ &\vdots \\ 2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1\end{aligned}$$

所有等式相加, 我们有

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n \\ n^3 + 3n^2 + 3n &= 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\ S_n &= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

- (1.3)  $\sum_{i=1}^n (i+1)(i+2)$ 。

因为, 我们有

$$(i+1)(i+2) = i^2 + 3i + 2$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (i+1)(i+2) &= \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 3i + \sum_{i=1}^n 2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n\end{aligned}$$

- (2.1)

如果  $n$  是偶数,

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i = 1$$

如果  $n$  是奇数

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i = -1$$

• (2.2)

如果  $n$  是偶数,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (-1)^i i &= (-1) \times 1 + 1 \times 2 + \cdots + (-1) \times (n-1) + 1 \times n \\ &= ((-1) \times 1 + 1 \times 2) + \cdots + ((-1) \times (n-1) + 1 \times n) \\ &= 1 + \cdots + 1 \\ &= \frac{n}{2}\end{aligned}$$

如果  $n$  是奇数

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (-1)^i i &= (-1) \times 1 + 1 \times 2 + \cdots + (-1) \times (n-2) + 1 \times (n-1) + (-1) \times n \\ &= ((-1) \times 1 + 1 \times 2) + \cdots + ((-1) \times (n-2) + 1 \times (n-1)) + (-1) \times n \\ &= 1 + \cdots + 1 - n \\ &= \frac{n-1}{2} - n \\ &= -\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

## 11

对  $n$  进行归纳。

归纳基始,  $n=1$  时, 等式显然成立。

归纳假设,  $n=k$  时, 等式

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

成立。

$n = k + 1$  时, 利用归纳假设, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} \right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= 1 - \frac{1}{k+2}\end{aligned}$$

归纳完毕, 等式成立。

## 12

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

## 13

- 充分性

这个是显然的。

- 必要性

已知  $K \cup L$  是数域, 反证法, 假设  $K \subseteq L$  和  $L \subseteq K$  不成立。那么, 由  $K, L$  都不是空集, 于是存在  $x \in K$  且  $x \notin L$ , 同理, 存在  $y \in L$  且  $y \notin K$ 。于是, 我们有

$$x+y \notin K$$

$$x+y \notin L$$

因为  $x+y \in K$ , 那么  $x+y-x=y \in K$ , 存在矛盾, 所以  $x+y \notin K$ 。类似地,  $x+y \notin L$ , 进而

$$x+y \notin K \cup L$$



因为  $x, y \in K \cup L$ , 题设有  $K \cup L$  是数域, 所以

$$x + y \in K \cup L$$

存在矛盾, 假设不成立, 命题得证。

## 14

- 充分性

$f$  是零变换时, 那么

$$\begin{aligned} f(a + b) &= 0 \\ f(a) + f(b) &= 0 + 0 = 0 \\ &\implies \\ f(a + b) &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

类似地, 可得  $f(ab) = f(a)f(b) = 0$ 。

$f = id_A$  时, 那么

$$\begin{aligned} f(a + b) &= id_A(a + b) = a + b \\ f(a) + f(b) &= id_A(a) + id_A(b) = a + b \\ &\implies \\ f(a + b) &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

类似地, 可得  $f(ab) = f(a)f(b) = ab$ 。

- 必要性

已知, 对任意的  $a, b \in A$ , 我们有

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

特别地, 令  $b = 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} f(ab) &= f(a)f(0) \\ f(0) &= f(a)f(0) \\ &\implies \\ f(a) &= 1 \text{ or } f(0) = 0 \end{aligned}$$

因为  $a$  是任意的, 那么, 不妨令  $a = 1, a = 0$ , 于是

$$f(1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

有题设, 我们有

$$f(1+0) = f(1) + f(0)$$

$$1 = 2$$

存在矛盾, 故可以排除掉  $f(a) = 1$ , 于是可得  $f(0) = 0$ 。

接下来, 计算  $f(1)$ , 令  $a = 1, b = 1$ , 我们有

$$f(1 \times 1) = f(1)f(1)$$

$$f(1) = f(1)f(1)$$

$$\implies$$

$$f(1) = 1 \text{ or } f(1) = 0$$

如果  $f(1) = 0$ , 则  $f$  是零变换: 对任意有理数  $\frac{p}{q} \in A$  (其中  $p, q$  都是整数,  $q$  是正整数), 我们有

$$f(1 \times \frac{p}{q}) = f(1)f(\frac{p}{q}) = 0$$

如果  $f(1) = 1$ , 则  $f = id_A$ : 对任意正整数  $n$ , 我们有

$$f(n) = nf(1) = n$$

通过,  $1 = (-1) + 2$ , 可得

$$f(1) = f(-1) + f(2)$$

$$1 = f(-1) + 2$$

$$f(-1) = -1$$

对任意负整数  $-n$ , 我们有

$$f(-n) = f(-1)f(n) = -n$$

所以，对任意有理数  $\frac{p}{q} \in A$ （其中  $p, q$  都是整数， $q$  是正整数），我们有

$$q\frac{p}{q} = p$$

于是，利用题设可得

$$f(q\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q}) + \cdots + f(\frac{p}{q})$$

$$f(p) = qf(\frac{p}{q})$$

$$p = qf(\frac{p}{q})$$

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$$

**15**

todo