

2.1 注释

张志聪

2025 年 6 月 26 日

注释 1. 命题 1.4 的增强形式：替换定理

给定 K^m 内两个向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad (I)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \quad (II)$$

如果向量组 (I) 中每一个向量都能被 (II) 线性表示，且向量组 (I) 线性无关，则有如下结论：

- (1) $r \leq s$ 。
- (2) 向量组 (I) 中的所有向量经过适当替换 (II) 中的向量，可以得到与 (II) 线性等价的向量组 (II') 。
- (3) (II) 线性无关，替换后的向量组 (II') 也线性无关。

证明：

- (1)

这是命题 1.4 的逆否命题。

- (2)

对 r 进行归纳。

○ 归纳基始 $r = 1$ ，首先，由 (I) 是线性无关的可知， $\alpha_1 \neq 0$ 。又因为 (I) 中每一个向量都能被 (II) 线性表示，所以存在 k_1, k_2, \dots, k_s 使得

$$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s$$

因为 $\alpha_1 \neq 0$, 可以确定至少存在一个 $k_i \neq 0 (1 \leq i \leq s)$ (我们取其中的一个即可)。

我们用 α_1 替换 β_i , 于是我们得到新的向量组:

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \alpha_1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_s \quad (II')$$

接下来, 我们需要证明 (II) 与 (II') 线性等价。

(II') 可以被 (II) 线性表示是显然的, 因为 (II') 中的向量除了 α_1 外, (II) 中都存在, 且 α_1 也是可以被 (II) 线性表示。

(II) 和 (II') 相差一个向量 α_1 , 只需关注 β_i 是否能被 (II') 线性表示即可。我们有

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_i\beta_i + \dots + k_s\beta_s \\ k_i\beta_i &= \alpha_1 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - \dots - k_{i-1}\beta_{i-1} - k_{i+1}\beta_{i+1} - \dots - k_s\beta_s \\ \beta_i &= \frac{1}{k_i}\alpha_1 - \frac{k_1}{k_i}\beta_1 - \frac{k_2}{k_i}\beta_2 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\beta_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\beta_{i+1} - \dots - \frac{k_s}{k_i}\beta_s \end{aligned}$$

综上, (II) 与 (II') 线性等价。

○ 归纳假设 $r = k - 1$ 时, 命题成立。

○ $r = k$ 时, (I) 中去除 α_k 的到的 (I') 也是线性无关的 (可以直接用反证法证明)。于是利用归纳假设可知, (I') 替换 (II) 中的向量得到:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i(s-r+1)} \quad (II')$$

与 (II) 是线性等价的。

接下来, 我们只需证明, 把 α_k 替换 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i(s-r+1)}$ 中的某一个向量后, (II') 依然和 (II) 线性等价即可。

由题设 (I) 可以被 (II) 线性表示可知, 因为 (II) 和 II' 是线性等价的, 于是我们有

$$\alpha_k = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_{k-1}\alpha_{k-1} + a_k\beta_{i1} + \dots + a_s\beta_{i(s-r+1)}$$

我们可以断定 a_k, \dots, a_s 中必有非零的数 (可以通过反证法, 如果都等于零, 那么 α_k 就可以被 (I) 中的其他向量线性表示了, 与题设矛盾)。

设 $a_{ij} \neq 0 (k \leq ij \leq s)$, 那么, 用 α_k 替换掉对应的 β_{ij} , 我们得到新的向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i(j-1)}, \beta_{i(j+1)}, \dots, \beta_{i(s-r+1)} \quad (III)$$

易得 (III) 与 (II') 线性等价 (讨论和 $r = 1$ 类似, 这里不做赘述。), 进而 (II) 与 (III) 线性等价。

归纳完成, 命题成立。

• (3)

对 r 进行归纳。

◦ 归纳基始 $r = 1$, 可知 $\alpha_1 \neq 0$, 不妨设替换后的 (II) 为:

$$\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_s \quad (II')$$

我们需要证明 (II') 是线性无关的。反证法, 假设 (II') 是线性有关的, 那么

$$k_1\alpha_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$$

存在非零解。

显然, $k_1 \neq 0$, 否则

$$k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$$

这与题设 (II) 线性无关矛盾。

由 $k_1 \neq 0$, 有 α_1 可以被 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_s$ 线性表示为

$$\alpha_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s)$$

因为 (II) 与 (II') 线性等价可知, β_1 可以被 (II') 线性表示:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= c_1\alpha_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_s\beta_s \\ &= -\frac{1}{k_1}(k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s) + c_2\beta_2 + \dots + c_s\beta_s \end{aligned}$$

于是我们有 (II) 是线性有关的, 与题设矛盾, 所以假设不成立。

◦ 归纳假设 $r = k - 1$ 时, 命题成立。

○ $r = k$ 时。因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ 是线性无关的，所以由归纳假设可知，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i(s-r+1)} \quad (II')$$

是线性无关的。

按照之前的方法用 α_k 替换掉对应的 β_{ij} ($k \leq ij \leq s$)，得到与 (II') 线性等价的新向量组 (III) ，需证明 (III) 也是线性无关的。

证明方式与 $r = 1$ 时相同。反证法，假设 (III) 是线性相关的，那么

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k + c_{k+1}\beta_{i1} + \dots + c_{k+j-1}\beta_{i(j-1)} + c_{k+j+1}\beta_{i(j+1)} + \dots + c_s\beta_{i(s-r+1)} = 0$$

存在非零解。 $c_k \neq 0$ ，否则会与 (II') 线性无关矛盾。于是，我们有 α_k 可以被 (III) 中的其他向量线性表示。

因为 (II') 与 (III) 线性等价，所以存在

$$\beta_{ij} = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \dots + d_k\alpha_k + d_{k+1}\beta_{i1} + \dots + d_{k+j-1}\beta_{i(j-1)} + d_{k+j+1}\beta_{i(j+1)} + \dots + d_s\beta_{i(s-r+1)}$$

替换掉 α_k ，就会得到 β_{ij} 可以被 (II') 中的其他向量线性表示，这与 (II') 线性无关矛盾。综上，假设不成立， (III) 是线性无关的。

归纳完成，命题成立。

注释 2. 筛选法中涉及的命题：

已知，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (I)$$

是线性无关的，如果 α_{n+1} 无法被向量组线性表示，把 α_{n+1} 加入向量组，则新向量组 (II) 仍然是线性无关的。

证明：

反证法，假设新的向量组线性相关，于是方程组

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n + k_{n+1}\alpha_{n+1} = 0$$

存在非零解。

这里 $k_{n+1} = 0$, 否则会与 α_{n+1} 不能被 (I) 线性表示矛盾。
于是, 我们有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

存在非零解, 这与题设 (I) 线性无关矛盾。

综上, 假设不成立, 命题得证。

注释 3. 关于集合 S 上的二元“关系”(这里用 \sim 表示) 的定义:
对任意 $a, b \in S$, 要么 a, b 存在这种“关系”($a \sim b$), 要么不存在这种
“关系”($a \not\sim b$), 两者必选其一。

注释 4. 一个重要关系。

设, 向量组为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \quad (I)$$

(I) 的秩是 r , 存在一个部分组为

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k} \quad (II)$$

那么, 以下任意两个结论可以推出另一个结论:

- (1) (II) 线性无关;
- (2) (II) 可以线性表示 (I);
- (3) $k = r$ 。

证明:

习题 14,15