4.2

张志聪

2025 年 10 月 1 日

2

- 方法一

  设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$B$ 的列向量组为 $\beta_, \beta_2, \cdots, \beta_n$。并设

$$rank(A) = rank(B) = r$$

  令 f_A 为 $K^n \to K^m$ 的线性映射：

$$f_A(X) = AX$$

  则 $AX = 0$ 的解空间为 $Kerf_A$，而 $Imf_A = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，故 $dim(Imf_A) = rank(A) = r$，按照命题 3.5 的推论 1，有

$$dimKerf_A + dimImf_A = dimK^n = n$$

  同理可得

$$dimKerf_B + dimImf_B = dimK^n = n$$

  因为

$$dimImf_A = dimImf_B$$

  于是可得

$$dimKerf_A = dimKerf_B$$

它们的基础解系的维数相等，即

$$dimU = dimV$$

设 U,V 的一组基分别为

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \quad (I)$$
$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r} \quad (II)$$

定义映射 $f: U \to V$ 如下：任意 $Y \in U$，我们有

$$Y = a_1\alpha_{i_1} + a_2\alpha_{i_2} + \cdots + a_r\alpha_{i_r}$$

令

$$f(Y) = b_1\beta_{j_1} + b_2\beta_{j_2} + \cdots + b_r\beta_{j_r}$$

因为

$$\begin{aligned} f(\alpha_{i_1}) &= \beta_{j_1} \\ f(\alpha_{i_2}) &= \beta_{j_2} \\ &\vdots \\ f(\alpha_{i_r}) &= \beta_{j_r} \end{aligned}$$

易证 f 是线性映射，且 f 在 U,V 所取定的基下的矩阵为 E，这就找到了命题中的 $T = E$。

- 方法二

  因为 $rank(A) = rank(B)$，所以 A 与 B 相抵，所以存在 m 阶满秩方阵 P 和 n 阶满秩方阵 Q，使得

$$A = PBQ$$

  任意 $\alpha \in U$，我们有

$$\begin{aligned} A\alpha &= 0 \\ PBQ\alpha &= 0 \\ P^{-1}PBQ\alpha &= P^{-1}0 \\ BQ\alpha &= 0 \end{aligned}$$

令 $T=Q$，接下来证明 $f(Y)=TY(\forall Y\in U)$ 是 U 到 V 的同构映射。

因为 T 是矩阵，f 显然是线性映射。

(i)f 是单射：

$\forall\alpha,\beta\in U$，使得

$$\begin{aligned}T\alpha&=T\beta\\T\alpha-T\beta&=0\\T(\alpha-\beta)&=0\end{aligned}$$

因为 T 满足，Tx 只有零解，所以存在

$$\begin{aligned}\alpha-\beta&=0\\\alpha&=\beta\end{aligned}$$

(ii)f 是满射。

任意 $\beta\in V$，

$$\begin{aligned}T\alpha&=\beta\\\alpha&=T^{-1}\beta\end{aligned}$$

需要证明 $\alpha\in U$。

$$\begin{aligned}A\alpha&=PBQ\alpha\\&=PBQT^{-1}\beta\\&=PBQQ^{-1}\beta\\&=PB\beta\end{aligned}$$

因为 $\beta\ inV$，所以 $B\beta=0$，所以

$$A\alpha=0$$

综上，$\alpha\in U$，所以 T 是满射。

18

- 必要性

$\mathscr{A}$ 可逆，即 $\mathscr{A}$ 是双射，所以 $\mathscr{A}$ 是同构映射。由命题 3.1 可知

$$\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$$

线性无关。

- 充分性

  (i) 反证法，假设 $\mathscr{A}$ 不是单射，即存在 $\alpha, \beta \in V$ 且 $\alpha \neq \beta$，使得

  $$\mathscr{A}\alpha = \mathscr{A}\beta$$
  $$\mathscr{A}(\alpha - \beta) = 0$$

  设

  $$\alpha - \beta = k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n$$

  因为 $\alpha - \beta \neq 0$，所以 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0，于是

  $$\mathscr{A}(\alpha - \beta) = k_1\mathscr{A}\epsilon_1 + k_2\mathscr{A}\epsilon_2 + \cdots + k_n\mathscr{A}\epsilon_n = 0$$

  这与 $\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$ 线性无关矛盾。

  (ii) 因为 $\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$ 线性无关，且 V 是 n 维空间，所以 $\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$ 是 V 的一组基，于是，任意 $\beta \in V$，都有

  $$\beta = k_1\mathscr{A}\epsilon_1 + k_2\mathscr{A}\epsilon_2 + \cdots + k_n\mathscr{A}\epsilon_n$$

  设

  $$\alpha = k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n$$

  于是

  $$\beta = \mathscr{A}(\alpha)$$

  所以，$\mathscr{A}$ 是满射。

  综上，$\mathscr{A}$ 是双射，所以 $\mathscr{A}$ 是可逆的。

18 推论

线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为 A，$\mathscr{A}$ 可逆（或是同构映射）的充分必要条件是 A 满秩。

- 充分性

  $\mathscr{A}$ 可逆，由习题 18 可知，$\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$ 线性无关。我们有

  $$(\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)A$$

  所以 T 是满秩的，否则存在 $\mathscr{A}\epsilon_i$ 可以被 $\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$ 中的其他向量线性表示，出现矛盾。

- 必要性

  我们有

  $$(\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)A$$

  且 A 是满秩的。

  反证法，假设 $\mathscr{A}\epsilon_1, \mathscr{A}\epsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\epsilon_n$ 不是线性无关的，于是存在

  $$k_1\mathscr{A}\epsilon_1 + k_2\mathscr{A}\epsilon_2 + \cdots + k_n\mathscr{A}\epsilon_n = 0$$
  $$(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)A \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = 0$$

  其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0，由于 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 是一组基，所以

  $$A \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = 0$$

  这与 A 满秩没有非零解矛盾。