5.3

张志聪

2025 年 9 月 27 日

3

设二次型为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$。

- 必要性

  设

  $$f = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

  接下来要做可逆的线性变数替换，而线性变数替换其实就是换基操作，所以我们要讨论两个一次多项式的线性关系。

  (i) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ 线性相关，即存在 k 使得

  $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

  于是存在可逆矩阵 C 使得

  $$Y = CX$$

  其中 C 的第一行为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，即

  $$y_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

  （注意：这里的 $y_2, y_3, \cdots, y_n$ 只是没有列出，因为它们在 f 中没有出现，具体的值不重要。）
  $\therefore f = ky_1^2$

由规范性的性质可知（更严格的说，这里需要再进行一次可逆线性变数替换），f 的秩为 1。

(ii) $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n, b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$ 线性无关。于是存在可逆矩阵 C 使得

$$Y=CX$$

其中 C 的第一行为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，第二行为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，即

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$
$$y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$$

$\therefore f=y_1y_2$。
作可逆线性变数替换，

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1+z_2 \\ y_2 &= z_1-z_2 \\ y_3 &= z_3 \\ &\vdots \\ y_n &= z_n \end{aligned}$$

$\therefore f=z_1^2-z_2^2$
$\therefore f$ 的秩为 2，符号差为 0

- 充分性

(i)f 的秩为 2，符号差为 0，于是 f 可作可逆线性变数替换

$$Y=CX$$

使得

$$f=y_1^2-y_2^2$$

（或符号相反）

设 C 的第一行为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，第二行为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，即

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$
$$y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
f &= (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2-(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)^2\\
&= [(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)][(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)-(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)]
\end{aligned}
$$

命题得证。

(ii) f 的秩为 1，同理可证。

4

设 f 通过可逆线性变数替换（矩阵为 C）

$$X = CY$$

把 f 化为规范形。

由题设可知，f 的正负惯性指数都不为 1。反证法，假设 f 的正惯性指数为 0，秩为 r，那么 f 通过可逆线性变数替换可得

$$f = -u_1^2-u_2^2-\cdots-u_r^2$$

这表明在 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间 V 内存在一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，对任意 $\alpha\in V$，$\alpha = u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_n\eta_n$ 时

$$Q_f(\alpha) = -u_1^2-u_2^2-\cdots-u_r^2<0$$

与题设矛盾，故 f 的正惯性指数不为 0。同理可证，f 的正负惯性指数都不为 0。

于是可设 f 的正惯性指数不为 $p>0$，负关系指数为 $r-p>0$，即

$$f = u_1^2+u_2^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-u_{p+2}^2-\cdots-u_r^2$$

设 $Y_0=(1,0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)$（第 1 个和第 $p+1$ 个分量为 1，其余为 0），此时

$$f(Y_0) = 1-1 = 0$$

于是，我们有

$$f = f(CY_0) = (CY_0)^TA(CY_0) = 0$$

5

设 f 经过可逆线性变数替换（矩阵为 C）

$$Y = CX$$

化作规范形，

$$f(X) = g(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_t^2 - y_{t+1}^2 - \cdots - y_{t+s}^2$$

(i) 假设 $s > q$，考虑关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方程组

$$\begin{cases} y_1 = row_1(C)X = 0 \\ y_2 = row_2(C)X = 0 \\ \vdots \\ y_t = row_t(C)X = 0 \\ l_{p+1} = 0 \\ l_{p+2} = 0 \\ \vdots \\ l_{p+q} = 0 \end{cases}$$

以上齐次线性方程组方程的个数为 $t + q < t + s < n$，所以以上齐次线性方程组存在非零解，设为

$$X_0 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = CX_0$$

由于 C 是可逆的，且 $X_0 \neq 0$，所以 $Y_0 \neq 0$，即存在 $y_i \neq 0 (i > t)$，于是我们有

$$f(X_0) \geq 0$$

$$g(Y_0) < 0$$

存在矛盾，故 $s \le q$。

(ii) 假设 $t > p$，考虑关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方程组

$$\begin{cases} y_{t+1} = row_{t+1}(C)X = 0 \\ y_{t+2} = row_{t+2}(C)X = 0 \\ \vdots \\ y_{t+s} = row_{t+s}(C)X = 0 \\ l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \\ \vdots \\ l_p = 0 \end{cases}$$

以上齐次线性方程组方程的个数为 $s + p < s + t < n$，所以以上齐次线性方程组存在非零解，设为

$$X_0 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = CX_0$$

由于 C 是可逆的，且 $X_0 \ne 0$，所以 $Y_0 \ne 0$，即存在 $y_i \ne 0 (i < t + 1)$，于是我们有

$$f(X_0) \le 0$$

$$g(Y_0) > 0$$

存在矛盾，故 $t \le p$。

6

(i) 设 f 经过可逆线性变数替换（矩阵为 C）化作规范形，因为负惯性指数为 0，所以可表示为

$$f(X) = g(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$$

其中 r 是 f 的秩。这表明在 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间 V 内存在一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，使当 $\alpha = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \cdots + y_n\eta_n$ 时

$$Q_f(\alpha) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$$

任意 $\alpha, \beta \in M$ 有 $f(\alpha, \alpha) = 0$，设

$$\alpha = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_n\eta_n$$
$$\beta = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \cdots + b_n\eta_n$$

则有

$$f(\alpha, \alpha) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_r^2 = 0$$
$$f(\beta, \beta) = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_r^2 = 0$$

可得

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$$
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_r = 0$$

于是

$$\begin{aligned} f(k\alpha + l\beta) &= (ka_1 + lb_1)^2 + (ka_2 + lb_2)^2 + \cdots + (ka_r + lb_r)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $k\alpha + l\beta \in M$，可得 M 是 V 的子空间。

(ii) 下面通过证明 $M = L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n)$ 确定 $dimM$。

任意 $\alpha \in M$，由 (i) 中的讨论可知，$\alpha \in L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n)$，所以 $M \subseteq L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n)$。

对任意 $\alpha \in L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n)$，有

$$\alpha = a_{r+1}\eta_{r+1} + a_{r+2}\eta_{r+2} + \cdots + a_n\eta_n$$

于是

$$f(\alpha) = 0$$

可得 $L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n) \subseteq M$。

综上 $M = L(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n)$，所以

$$dimM = dimL(\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \cdots, \eta_n) = n - r$$

7

设 Q_f 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的二次型为 f。

因为存在 $Q_f(\alpha) > 0, Q_f(\beta) < 0$，所以二次型 f 的正惯性指数不为 0，负惯性指数不为 0。

设 f 的规范型为

$$f = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_{p+q}^2$$

其中 $p, q > 0$。这表明存在一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，使当 $\alpha = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$ 时

$$Q_f(\alpha) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_{p+q}^2$$

令

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \eta_i + \eta_{p+j} \quad (i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, q) \\ \beta_{ij} &= \eta_i - \eta_{p+j} \quad (i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, q) \end{aligned}$$

易得以上向量组与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{p+q}$ 线性等价，且都是迷向向量。于是可从中得到一个极大线性无关部分组，向量个数为 $p + q$，设为

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_{p+q}$$

另外

$$\begin{aligned} \epsilon_{p+q+1} &= \eta_{p+q+1} \\ &\vdots \\ \epsilon_n &= \eta_n \end{aligned}$$

因为对任意 $i > p + q$，我们有

$$Q_f(\eta_i) = 0$$

综上，V 内存在一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$，使得其中每个 ϵ_i 均为迷向向量。

8

- 充分性

反证法，假设命题不成立，即存在 $\alpha, \beta \in V$ 使得

$$Q_f(\alpha) < 0$$
$$Q_f(\beta) > 0$$

于是由习题 7 可知，存在一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，每个 η_i 均为迷向向量，即

$$Q_f(\eta_i) = 0$$

于是 $\eta_i \in N(f)$，由于 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是一组基，所以 α 可以被这组基表示，而又假设可知

$$Q_f(\alpha) < 0$$

即 $\alpha \notin N(f)$，出现矛盾。

- 必要性

  习题 6 已证明。

9

由习题 6 可知：(1)$p = 0$ 时，$dimN(f) = n - q$，满足命题；
(2)$q = 0$ 时，$dimN(f) = n - p$，满足命题；
(3)$p > 0, q > 0$ 时，这里以 $p > q$ 为例，$p < q$ 证明类似。

设二次型的规范型为

$$u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_{p+q}^2$$

这表明存在一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，使当 $\alpha = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$ 时

$$Q_f(\alpha) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_{p+q}^2$$

令

$$N_p = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)$$

显然，$N_p \cap N(f) = \{0\}$，于是我们有

$$\begin{aligned} n &\geq dimN(f) + N_p \\ &= dimN(f) + dimN_p \\ &= dimN(f) + p \end{aligned}$$

这表明 $dimN(f) \leq n - p$。

10

题设满足 §2 习题 9-(1) 的充分条件，所以 f 可用三角形变换化为

$$g = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

又由 9-(2) 可知

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{D_k}{D_{k-1}} \\ &= \frac{A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix}}{A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 \end{Bmatrix}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

于是，命题显然成立。