4.1

张志聪

2025 年 10 月 13 日

8

维数：2，一组基：

$$1, w$$

9

维度：$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$，一组基：

- 对角线上 n 个；

$$E_{ij}(1 \leq i = j \leq n)$$

- 除了对角线，对称位置上的 $\frac{n^2-n}{2}$ 个；

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

10

维度：$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$，一组基：

- 对角线上 n 个；

$$E_{ij}(1 \le i = j \le n)$$

- 除了对角线，对称位置上的 $\frac{n^2-n}{2}$ 个；

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

11

这里就无法一眼看出来了。

需要一个标准的流程找出一组基：

先找出一个非零向量，然后判断这个向量的线性组合是否可以表示线性空间中的所有向量，如果可以，寻找到此结束。如果不可以，把不能表示的向量加入到基中，并重复上述过程。

- (1)

  第二题 (5) 的零向量为 $(0,0)$，令

$$\epsilon_1 = (1,0)$$

  因为 ϵ_1 的线性组合为

$$k \circ (1,0) = [k, \frac{k(k-1)}{2}]$$

  显然，它无法表示 $(0,1)$，于是令

$$\epsilon_2 = (0,1)$$

  它们线性组合为

$$k_1 \circ (1,0) = [k_1, \frac{k_1(k_1-1)}{2}]$$
$$k_2 \circ (0,1) = (0, k_2)$$

那么，对任意 (x, y)，我们的以下线性方程组

$$\begin{cases} k_1 = x \\ k_2 + \frac{k_1(k_1-1)}{2} = y \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} k_1 = x \\ k_2 = y - \frac{x(x-1)}{2} \end{cases}$$

于是可得，任意元素 (x, y) 都可以被 $(1, 0), (0, 1)$ 线性表示。

综上，线性空间的维度是 2，一组基为：

$$(1, 0), (0, 1)$$

- (2)

  第二题 (7) 的零向量为实数 1。

  令

  $$\epsilon_1 = 2$$

  对任意 $y > 0$，我们有

  $$k \circ 2 = 2^k = y$$
  $$k = log_2 y$$

  综上，线性空间的维度是 1，一组基为：

  $$2$$

12

对任意 n，我们有

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

我们有

$$A \neq A^2 \neq A^3 = E$$
$$A^n = A^{n \ mod \ 3}$$

其中 $n\ mod\ 3$ 表示 n 除以 3 的余数。

综上，维数为 3，一组基为

$$A, A^2, A^3$$

14

设

$$E, A, A^2, \cdots, A^{m-1} \quad (I)$$

要想证明 (I) 是一组基，需要证明 (I) 是线性无关的，且可以表示线性空间中的所有向量。

- 线性无关性

  假设 (I) 是线性相关的，那么

  $$k_0E + k_2A + k_3A^2 + \cdots + k_mA^{m-1} = 0$$

  存在非零解，这与题设中 $f(\lambda)$ 是使 $f(A) = 0$ 的最低次多项式相矛盾。

- 可以线性表示表示所有向量。

  只需证明对任意 n，A^n 都可以被 (I) 线性表示即可。

  对 n 进行归纳，$n = m$ 时，有题设可知，A^n 可以被 (I) 线性表示。

  归纳假设 $n = r$ 时，A^r 可以被 (I) 线性表示。

  $n = r + 1$ 时，由归纳假设可知，存在 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in \mathbb{K}$，使得

  $$A^r = k_1E + k_2A + k_3A^2 + \cdots + k_mA^{m-1}$$

  于是，我们有

  $$\begin{aligned} A^{r+1} &= AA^r \\ &= A(k_1E + k_2A + k_3A^2 + \cdots + k_mA^{m-1}) \\ &= k_1A + k_2A^2 + k_3A^3 + \cdots + k_mA^m \end{aligned}$$

  又因为 A^m 也可以被 (I) 线性表示，所以，A^{r+1} 可以被 (I) 线性表示。

综上，(I) 是 V 的一组基，从而 $dimV = m$。

后边部分的证明略。

15

要证明 $(A-aE)^k(0 \leq k \leq m-1)$ 是一组基，由于 $dimV = m$，于是我们只需证明 $(A-aE)^k(0 \leq k \leq m-1)$ 线性无关即可。

按二项展开公式，我们有

$$(A-aE)^j = A^j + *$$

由于无法被其他向量 $(A-aE)^k(0 \leq k \leq m-1, k \neq j)$ 线性表示，于是，线性无关性得到证明。

16

- (1)

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

17

设 ξ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 中的坐标为 X，在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 中的坐标为 Y。由题设要求 $X = Y$，并且

$$TX = X$$
$$TX - X = 0$$
$$(T-E)X = 0$$

由于 T 是已知的，所以需要求解上方的方程组即可。

18

todo

19

设 $< n$ 的多项式 $f(x)$ 为

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n-1} x^{n-1}$$

（注：这里不一定是 $n-1$ 次的，因为 $k_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 的取值可以为 0）。

由题意可得如下线性方程组：

$$\begin{cases} k_0 + k_1 a_1 + k_2 a_1^2 + k_3 a_1^3 + \cdots + k_{n-1} a_1^{n-1} & = b_1 \\ k_0 + k_1 a_2 + k_2 a_2^2 + k_3 a_2^3 + \cdots + k_{n-1} a_2^{n-1} & = b_2 \\ & \vdots \\ k_0 + k_1 a_n + k_2 a_n^2 + k_3 a_n^3 + \cdots + k_{n-1} a_n^{n-1} & = b_n \end{cases}$$

看做关于 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$ 的线性方程组，其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

A^T 矩阵是范德蒙德矩阵，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同，于是，我们有

$$|A| = |A^T| = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i) \neq 0$$

所以，A 是满秩的，线性方程组只有唯一解。设

$$K = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

我们有

$$K = A^{-1}B$$

综上，我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} K \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} A^{-1}B \end{aligned}$$

20

数域 K 上的 n 阶方阵构成一个线性空间 V，加法和数乘就是矩阵的加法和数乘。这个空间的基为 $E_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$，维数为 $n \times n = n^2$。

于是，对于

$$A^0, A, A^2, \ldots, A^{n^2} \quad (I)$$

有 $n^2 + 1$ 个，且都属于 V，所以 (I) 线性无关的，从而，存在不全为零的 $k_1, k_2, \ldots, k_{n^2} \in K$，使得

$$k_1 A^0 + k_2 A + \cdots + k_{n^2} A^{n^2} = 0$$

即存在一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(A) = 0$。

21

对于 β，由 (iv) 可知，存在 $\beta' \in V$ 使得

$$\beta + \beta' = 0$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} \beta + 0 + \beta' &= 0 \\ \beta + (\alpha + \beta) + \beta' &= 0 \\ \beta + \alpha + (\beta + \beta') &= 0 \\ \beta + \alpha + 0 &= 0 \\ \beta + (\alpha + 0) &= 0 \\ \beta + \alpha &= 0 \end{aligned}$$

22

对于 α，由 (iv) 可知，存在 $\alpha' \in V$ 使得

$$\alpha + \alpha' = 0$$

利用习题 21，我们有

$$\alpha' + \alpha = 0$$

于是

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + (\alpha' + \alpha) &= \alpha \\ (\alpha + \alpha') + \alpha &= \alpha \\ 0 + \alpha &= \alpha \end{aligned}$$

23

对任意的 $\alpha, \beta \in V$，由 (iv) 可知，存在 $\alpha', \beta' \in V$，使得

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= 0 \\ \beta + \beta' &= 0 \end{aligned}$$

利用习题 21，习题 22 和其他公理，我们有

$$\begin{aligned} 2(\alpha + \beta) &= 2\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta + \alpha + \beta &= \alpha + \alpha + \beta + \beta \\ \alpha' + \alpha + \beta + \alpha + \beta &= \alpha' + \alpha + \alpha + \beta + \beta \\ (\alpha' + \alpha) + \beta + \alpha + \beta &= (\alpha' + \alpha) + \alpha + \beta + \beta \\ 0 + \beta + \alpha + \beta &= 0 + \alpha + \beta + \beta \\ \beta + \alpha + \beta &= \alpha + \beta + \beta \\ \beta + \alpha + \beta + \beta' &= \alpha + \beta + \beta + \beta' \\ \beta + \alpha + 0 &= \alpha + \beta + 0 \\ \beta + \alpha &= \alpha + \beta \end{aligned}$$