

2.4 注释

张志聪

2025 年 7 月 15 日

注释 1. 对某种映射的讨论:

在数域 K , 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^+$ 定义映射

$$\theta: \{A: A \in M_{m,n}(K)\} \rightarrow \{K^n \rightarrow K^m \text{ 的映射}\}$$

$$\theta(A) = f_A$$

它是单射、满射?

证明:

- (1) 是单射;

对任意 $A, B \in M_{m,n}(K)$ 且 $A \neq B$, 所存在某列 $col_j(A) \neq col_j(B)$ ($1 \leq j \leq n$)。于是取 K^n 中坐标向量

$$x_j^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \cdots j$$

此时

$$\begin{aligned}\theta(A)(x_j^T) &= f_A(x_j^T) = \text{col}_j(A) \\ \theta(B)(x_j^T) &= f_B(x_j^T) = \text{col}_j(B) \\ &\implies \\ \theta(A) &\neq \theta(B)\end{aligned}$$

所以, θ 是单射。

- (2) 不是满射。

举一个反例, 设映射 $f : K^n \rightarrow K^m$, 对任意 $x \in K^n$, $f(x) = [1, 1, \dots, 1]^T$ 。但对任意矩阵 $A \in M_{m,n}(K)$, 我们有

$$\theta(A)(0) = f_A(0) = 0$$

即: 在 θ 中找不到原像 A , 使得 $\theta(A) = f$ 。故不是满射。

注释 2. 命题 4.4(ii) 的扩展。

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \leq \text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

证明:

因为

$$A = A + B - B$$

通过 (ii), 我们有

$$\begin{aligned}\text{rank}(A) &\leq \text{rank}(A + B) + \text{rank}(-B) \\ &= \text{rank}(A + B) + \text{rank}(B) \\ &\implies \\ \text{rank}(A) - \text{rank}(B) &\leq \text{rank}(A + B)\end{aligned}$$

同理, 我们有

$$\text{rank}(B) - \text{rank}(A) \leq \text{rank}(A + B)$$

综上

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \leq \text{rank}(A + B)$$

结合已知的 (ii), 我们有

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \leq \text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$