2.4 注释

张志聪

2025 年 7 月 15 日

注释 1. 对某种映射的讨论：

在数域 K，对任意 $m, n \in \mathbb{N}^+$ 定义映射

$$\theta : \{A : A \in M_{m,n}(K)\} \to \{K^n \to K^m \text{的映射}\}$$
$$\theta(A) = f_A$$

它是单射、满射？

证明：

- (1) 是单射；

  对任意 $A, B \in M_{m,n}(K)$ 且 $A \neq B$，所存在某列 $col_j(A) \neq col_j(B)$（$1 \leq j \leq n$）。于是取 K^n 中坐标向量

$$x_j^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \cdots j$$

此时

$$\theta(A)(x_j^T) = f_A(x_j^T) = col_j(A)$$
$$\theta(B)(x_j^T) = f_B(x_j^T) = col_j(B)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\theta(A) \neq \theta(B)$$

所以，θ 是单射。

- (2) 不是满射。

  举一个反例，设映射 $f : K^n \to K^m$，对任意 $x \in K^n$，$f(x) = [1, 1, \cdots, 1]^T$。但对任意矩阵 $A \in M_{m,n}(K)$，我们有

  $$\theta(A)(0) = f_A(0) = 0$$

  即：在 θ 中找不到原像 A，使得 $\theta(A) = f$。故不是满射。

注释 2. 命题 *4.4(ii)* 的扩展。

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

证明：
因为

$$A = A + B - B$$

通过 (ii)，我们有

$$rank(A) \leq rank(A+B) + rank(-B)$$
$$= rank(A+B) + rank(B)$$
$$\Longrightarrow$$
$$rank(A) - rank(B) \leq rank(A+B)$$

同理，我们有

$$rank(B) - rank(A) \leq rank(A+B)$$

综上

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B)$$

结合已知的 (ii)，我们有

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

注释 3. 由习题 *9,10,11*，我们得到一个以下命题：

在数域 K 中，有 $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,s}(K)$，$AB = 0(B \neq 0)$ 当且仅当 $rank(A) < n$。

证明：

- 必要性

  假设 $rank(A) = n$，于是 $Ax = 0$ 只有零解，与题设 $AB = 0(B \neq 0)$ 矛盾。

- 充分性

  已知 $rank(A) < n$，于是线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解，且基础解系中向量个数为大于等于 1，通过基础解系构造矩阵 B，得到 $AB = 0(B \neq 0)$。