

2.3 注释

张志聪

2025 年 7 月 9 日

注释 1. 形如

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix}$$

的 $n \times n$ 系数矩阵，秩的情况。

所有行都加到第一行（初等行变换），我们有

$$\begin{bmatrix} (n-1)a+b & (n-1)a+b & \cdots & (n-1)a+b \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix}$$

于是可以分两种情况讨论：

- $(n-1)a+b \neq 0$;

把第一行除以 $\frac{1}{(n-1)a+b}$ 得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{从第二行开始减去 } a \text{ 倍的第一行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-a \end{bmatrix}$$

可见，除在主对角线上是 $b-a$ ，其余位置都是 0。

所以, 我们有

$$\text{rank}(A) = \begin{cases} 1, a = b \\ n, a \neq b \end{cases}$$

- $(n-1)a + b = 0$;

我们有

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{从第二列开始减去第一列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b-a \end{bmatrix}$$

如果 $b-a=0$, 那么由 $(n-1)a+b=0$ 可知 $a=b=0$, 此时矩阵是零矩阵, $\text{rank}(A)=0$ 。

如果 $b-a \neq 0$, 那么 $\text{rank}(A) = n-1$ 。

综上,

$$\text{rank}(A) = \begin{cases} 0 & a = b = 0 \\ 1 & a = b \neq 0 \\ n-1 & (n-1)a + b = 0 \\ n & (n-1)a + b \neq 0 \end{cases}$$

注释 2. 数域 K_1 上含有 n 个未知量的非齐次线性方程组 (I) , 扩大数域到 $K_2 (K_1 \subset K_2)$, 对解的影响。

证明:

设 (I) 的系数矩阵和增广矩阵分别为 A, \overline{A} , 常数列设为 β 。

通过初等变换把 A 化作标准型, 在初等变换中, 只使用 K_1 的数, 最后, 确定 A 的秩。

分情况讨论:

- 无解;

即 $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(\overline{A})$, 把数域扩展到 K_2 , 因为 $K_1 \subset K_2$, 标准型可以通过相同的初等变换得到 (标准型有其特殊性, 元素只有 1 和 0, 即使数域改变, 还是要满足数域的运算法则, 线性关系无法改变), 即秩的关系不会因为数域的扩大而改变。因此, 在数域 K_2 也是无解的。

- 唯一解;

即 $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) = n$, 在 K_1 下, (I) 存在唯一解。

在 K_2 下, 秩的情况是不变的, 于是在 K_2 下, (I) 也存在唯一解。

这唯一的解在 K_1 中已经被唯一确定。所以在 K_2 中的解也只能是这个在 K_1 中的解, 即: 解是相同的。

- 无数解;

即 $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) = r < n$, 在 K_1 下, (I) 的解可以表示成

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 γ_0 是特解,

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$$

是 (I) 导出方程组的基础解系, 且

$$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in K_1$$

因为在 K_2 下, A 的秩是不变的, 于是导出方程组的基础解系向量个数也是 $n - r$, 显然 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 也是 K_2 下的解, 于是由习题 3, 可知该基础解系也是 K_2 下导出方程组的基础解系。

特解 γ_0 也是 K_2 下的特解, 于是, 在 K_2 下, (I) 的解可以表示成

$$\gamma_0 + s_1\eta_1 + s_2\eta_2 + \cdots + s_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中

$$s_1, s_2, \cdots, s_{n-r} \in K_2$$

因为系数的不同, 在 K_2 下, 解是不同的。