

## 5.2

张志聪

2025 年 9 月 25 日

## 6

设  $V$  对称双线性函数  $f(\alpha, \beta)$  在基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  下的矩阵为  $A$ , 由定理 1.1 可知,  $V$  内存在一组基, 使  $f(\alpha, \beta)$  在这组基下的矩阵成对角型, 设对角矩阵为  $D$ , 因为  $A, D$  是同一个双线性函数  $f(\alpha, \beta)$  在两组基下的矩阵, 所以存在可逆的  $n$  阶方阵  $T$ , 使得

$$A = T^T D T$$

由题设可知  $A$  的秩为  $r$ , 而  $T$  是可逆的矩阵, 所以  $D$  的秩也是  $r$ , 于是可得  $D$  在主对角线上又  $r$  个非零元素, 为了讨论的方便, 不妨设主对角线中前  $r$  个元素不为零, 于是写成单个非零对角元的和:

$$D = \sum_{j=1}^r d_j E_{jj}$$

于是

$$\begin{aligned} A &= T^T D T \\ &= T^T \left( \sum_{j=1}^r d_j E_{jj} \right) T \\ &= \sum_{j=1}^r T^T (d_j E_{jj}) T \end{aligned}$$

显然,  $M_j = d_j E_{jj}$  是秩等于 1 的对角矩阵, 且有

$$\begin{aligned} (T^T M_j T)^T &= T^T M_j^T T \\ &= T^T M_j T \end{aligned}$$

所以  $T^T M_j T$  是对称矩阵。

综上可得：秩等于  $r$  的对称矩阵可以表成  $r$  个秩等于 1 的对称矩阵之和。

## 7

设二次型

$$g = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

其系数矩阵为

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

于是  $g$  写成矩阵形式为

$$g = Y^T E_n Y$$

令

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

于是，有

$$Y = AX$$

则代入得

$$\begin{aligned} g &= Y^T E_n Y \\ &= (AX)^T E_n (AX) \\ &= X^T A^T E_n A X \\ &= X^T (A^T A) X \\ &= f \end{aligned}$$

于是可得  $A^T A$  是  $f$  的秩, 又因为

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$$

命题得证。

## 9

- (1)

– 必要性

$g$  写成矩阵形式为

$$g = Y^T D Y$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

由习题 8 可知

$$\begin{aligned} D_k &= A \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k \quad (k = 1, 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

又因为  $\lambda_i \neq 0$ , 所以

$$D_k \neq 0$$

进而可知

$$A \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} = 0 \quad (k = r+1, r+2, \cdots, n)$$

– 充分性

由题设可知  $A$  的前  $r$  列（行）线性无关，由定理 2.1 可知，存在  $K$  上可逆矩阵  $T$ ，使在线性变数替换  $X = TY$  下二次型  $f$  变为如下标准型

$$d_1 y_1^2 + \cdots + d_r y_r^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

todo

• (2)

利用 (1)

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{D \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{D_k}{D_{k-1}} \end{aligned}$$