

## 2 章总结

张志聪

2025 年 8 月 2 日

注释 1. 特殊  $n$  阶方阵的封闭性。

- (1) 对角矩阵。

两个对角矩阵  $A, B$ , 又如下封闭性:

- 加法封闭:  $A + B$  也是对角矩阵;
- 数乘封闭:  $kA$  也是对角矩阵;
- 乘法封闭:  $AB$  也是对角矩阵。
- 逆矩阵封闭:  $A$  可逆, 则  $A^{-1}$  也是对角矩阵 (是上三角矩阵的特例)。

- (2) (反) 对称矩阵。

两个 (反) 对称矩阵  $A, B$ , 又如下封闭性:

- 加法封闭:  $A + B$  也是 (反) 对称矩阵;
- 数乘封闭:  $kA$  也是 (反) 对称矩阵;
- 乘法有条件的封闭: 充分必要条件 “ $A, B$  可交换, 即  $AB = BA$ ” (习题 16)。
- 逆矩阵封闭:  $A^{-1}$  也是 (反) 对称矩阵 (习题 18-1)。

- (3) 上 (下) 三角矩阵。

两个上 (下) 三角矩阵  $A, B$ , 又如下封闭性:

- 加法封闭:  $A + B$  也是上 (下) 三角矩阵;

- 数乘封闭:  $kA$  也是上(下)三角矩阵;
- 乘法封闭:  $AB$  也是上(下)三角矩阵;
- 逆矩阵封闭:  $A$  可逆, 则  $A^{-1}$  也是上(下)三角矩阵(习题 18-2)。

**注释 2. 打洞技巧:**

给定数域  $K$  上的  $n$  阶分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

其中  $A$  是  $k$  阶可逆方阵, 通过初等变换得到

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

求初等变换对应的初等矩阵。

先考虑数值矩阵的情况,

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

通过行变换, 第二行加上第一行的  $-\frac{c}{a}$  倍, 把  $c$  消为 0,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

通过列变换, 第二列加上第一列的  $-\frac{b}{a}$  被, 把  $b$  消为 0,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

相应的可得

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$