2.4 注释

张志聪

2025 年 7 月 12 日

注释 1. 对某种映射的讨论：

在数域 K，对任意 $m, n \in \mathbb{N}^+$ 定义映射

$$\theta : \{A : A \in M_{m,n}(K)\} \to \{K^n \to K^m \text{的映射}\}$$
$$\theta(A) = f_A$$

它是单射、满射？

证明：

- (1) 是单射;

  对任意 $A, B \in M_{m,n}(K)$ 且 $A \neq B$，所存在某列 $col_j(A) \neq col_j(B)$（$1 \leq j \leq n$）。于是取 K^n 中坐标向量

$$x_j^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \cdots j$$

此时

$$
\begin{aligned}
\theta(A)(x_j^T) &= f_A(x_j^T) = col_j(A) \\
\theta(B)(x_j^T) &= f_B(x_j^T) = col_j(B) \\
&\Longrightarrow \\
&\theta(A) \neq \theta(B)
\end{aligned}
$$

所以，θ 是单射。

- (2) 不是满射。

  举一个反例，设映射 $f : K^n \to K^m$，对任意 $x \in K^n$，$f(x) = [1, 1, \cdots, 1]^T$。但对任意矩阵 $A \in M_{m,n}(K)$，我们有

  $$\theta(A)(0) = f_A(0) = 0$$

  即：在 θ 中找不到原像 A，使得 $\theta(A) = f$。故不是满射。

注释 2. 命题 *4.4(ii)* 的扩展。

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

证明：
因为

$$A = A + B - B$$

通过 (ii)，我们有

$$
\begin{aligned}
rank(A) &\leq rank(A+B) + rank(-B) \\
&= rank(A+B) + rank(B) \\
&\Longrightarrow \\
rank(A) - rank(B) &\leq rank(A+B)
\end{aligned}
$$

同理，我们有

$$rank(B) - rank(A) \leq rank(A+B)$$

综上

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A + B)$$

结合已知的 (ii)，我们有

$$|rank(A) - rank(B)| \leq rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$$