5.2

张志聪

2025 年 9 月 27 日

6

设 V 对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 下的矩阵为 A，由定理 1.1 可知，V 内存在一组基，使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵成对角型，设对角矩阵为 D，因为 A,D 是同一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在两组基下的矩阵，所以存在可逆的 n 阶方阵 T，使得

$$A = T^T DT$$

由题设可知 A 的秩为 r，而 T 是可逆的矩阵，所以 D 的秩也是 r，于是可得 D 在主对角线上又 r 个非零元素，为了讨论的方便，不妨设主对角线中前 r 个元素不为零，于是写成单个非零对角元的和：

$$D = \sum_{j=1}^{r} d_j E_{jj}$$

于是

$$\begin{aligned} A &= T^T DT \\ &= T^T(\sum_{j=1}^{r} d_j E_{jj})T \\ &= \sum_{j=1}^{r} T^T(d_j E_{jj})T \end{aligned}$$

显然，$M_j = d_j E_{jj}$ 是秩等于 1 的对角矩阵，且有

$$\begin{aligned} (T^T M_j T)^T &= T^T M_j^T T \\ &= T^T M_j T \end{aligned}$$

所以 T^TM_jT 是对称矩阵。

综上可得：秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和。

7

设二次型

$$g = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

其系数矩阵为

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

于是 g 写成矩阵形式为

$$g = Y^TE_nY$$

令

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

于是，有

$$Y = AX$$

则代入得

$$\begin{aligned} g &= Y^TE_nY \\ &= (AX)^TE_n(AX) \\ &= X^TA^TE_nAX \\ &= X^T(A^TA)X \\ &= f \end{aligned}$$

于是可得 A^TA 是 f 的秩，又因为

$$rank(A) = rank(A^TA)$$

命题得证。

9

- (1)
  - 必要性

    g 写成矩阵形式为

    $$g = Y^TDY$$

    其中

    $$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

    由习题 8 可知

    $$\begin{aligned} D_k = A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} &= D\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k \quad (k = 1, 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

    又因为 $\lambda_i \neq 0$，所以

    $$D_k \neq 0$$

    进而可知

    $$A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{Bmatrix} = 0 \quad (k = r+1, r+2, \cdots, n)$$

  - 充分性

    todo

- (2)

  利用 (1)

$$
\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{D\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k\end{Bmatrix}}{D\begin{Bmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k-1\end{Bmatrix}} \\
&= \frac{D_k}{D_{k-1}}
\end{aligned}
$$