2.3 注释

张志聪

2025 年 8 月 5 日

注释 1. K^m 内向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

等价于 K 上的齐次线性方程组，它的解集

$$S = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in K^m : x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0\}$$

对于加法、乘法封闭。即：
$\forall \eta_1, \eta_2 \in S$，有 $\eta_1 + \eta_2 \in S$；
$\forall \eta \in S, k \in K$，有 $k\eta \in S$。

注释 2. 形如

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix}$$

的 $n \times n$ 系数矩阵，秩的情况。

所有行都加到第一行（初等行变换），我们有

$$\begin{bmatrix} (n-1)a+b & (n-1)a+b & \cdots & (n-1)a+b \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix}$$

于是可以分两种情况讨论：

- $(n-1)a+b \neq 0$；

  把第一行除以 $\frac{1}{(n-1)a+b}$ 得到

  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{从第二行开始减去 } a \text{ 倍的第一行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-a \end{bmatrix}$$

  可见，除在主对角线上是 $b-a$，其余位置都是 0。

  所以，我们有

  $$rank(A) = \begin{cases} 1, a = b \\ n, a \neq b \end{cases}$$

- $(n-1)a+b = 0$；

  我们有

  $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{从第二列开始减去第一列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b-a \end{bmatrix}$$

  如果 $b-a=0$，那么由 $(n-1)a+b=0$ 可知 $a=b=0$，此时矩阵是零矩阵，$rank(A)=0$。

  如果 $b-a \neq 0$，那么 $rank(A)=n-1$。

综上，

$$rank(A) = \begin{cases} 0 & a=b=0 \\ 1 & a=b\neq 0 \\ n-1 & (n-1)a+b=0 \\ n & (n-1)a+b\neq 0 \end{cases}$$

注释 3. 数域 K_1 上含有 n 个未知量的非齐次线性方程组 (I)，扩大数域到 $K_2(K_1 \subset K_2)$，对解的影响。

证明：

设 (I) 的系数矩阵和增广矩阵分别为 $A, \overline{A}$，常数列设为 β。

通过初等变换把 A 化作标准型，（由书中的讨论可知，在初等变换中可只使用 K_1 的数，化为标准型），最后，确定 A 的秩。

分情况讨论：

- 无解;

  即 $rank(A) \neq rank(\overline{A})$，把数域扩展到 K_2，因为 $K_1 \subset K_2$，标准型可以通过相同的初等变换得到（即：只用 K_1 中的数），所以，秩的关系不会因为数域的扩大而改变。因此，在数域 K_2 也是无解的。

- 唯一解;

  即 $rank(A) = rank(\overline{A}) = n$，在 K_1 下，(I) 存在唯一解。

  在 K_2 下，秩的情况是不变的，于是在 K_2 下，(I) 也存在唯一解。

  这唯一的解在 K_1 中已经被唯一确定。所以在 K_2 中的解也只会是这个在 K_1 中的解，即：解是相同的。

- 无数解;

  即 $rank(A) = rank(\overline{A}) = r < n$，在 K_1 下，(I) 的解可以表示成

  $$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

  其中 γ_0 是特解，

  $$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$$

是 (I) 导出方程组的基础解系，且

$$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in K_1$$

因为在 K_2 下，A 的秩是不变的，于是导出方程组的基础解系向量个数也是 $n-r$，显然 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 也是 K_2 下的解，于是由习题 3，可知该基础解系也是 K_2 下导出方程组的基础解系。

特解 γ_0 也是 K_2 下的特解，于是，在 K_2 下，(I) 的解可以表示成

$$\gamma_0 + s_1\eta_1 + s_2\eta_2 + \cdots + s_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中

$$s_1, s_2, \cdots, s_{n-r} \in K_2$$

因为系数的不同，在 K_2 下，解是不同的。