3.3

张志聪

2025 年 8 月 19 日

1

证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是线性无关的，当且仅当

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0$$

只有非零解。

又由题设可知

$$\begin{aligned}
k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0 \\
(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{s1}k_s)\alpha_1 \\
+(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{s2}k_s)\alpha_2 \\
+\cdots \\
+(a_{1s}k_1 + a_{2s}k_2 + \cdots + a_{ss}k_s)\alpha_s \\
= 0
\end{aligned}$$

设

$$X = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_s \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{2s} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是线性无关的，那么，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关当且仅当

$$A^T X = 0$$

是否只存在非零解，即当且仅当 A^T 满秩，当且仅当 A 满秩。

4

提示

- (1)

  设线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \end{bmatrix}$$

  令

$$X = \begin{bmatrix} M_1 \\ -M_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

我们要证明

$$AX = 0$$

考虑 AX 的第 i 行，我们有

$$a_{i1}M_1 + a_{i2}(-M_2) + \cdots + a_{in}[(-1)^{n-1}M_n]$$

这是以下矩阵的行列式值

$$B_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \end{bmatrix}$$

由于矩阵 B_i 不是满秩的，所以 $det(B_i) = 0$。

- (2) 因为基础解系只有一个非零解向量，其他解都是这个解向量的线性组合，所以是这个解向量的倍数。

  我们需要证明 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是非零向量。因为系数矩阵的秩为 $n-1$，那么由命题 3.5 可知，存在一个非零的 $n-1$ 阶子式，因为 $n-1$ 阶子式不为零，所以列数不能重复，由于系数矩阵的行数是 $n-1$，所以在子式对应的矩阵 B 包含了所有行，而列向量是从系数矩阵的列向量组中去除一个列向量得到的，这种选择只有 n 种，所以存在 M_i 可以通过 B 调整行向量的顺序得到（与系数矩阵一致），于是，我们有

  $$det(B) = \pm M_i$$

  即子式和 M_i 只会和 $det(B)$ 相差一个正负号。

  由于 $M_i \neq 0$，所以，$(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是非零向量。

5

我们有

$$AA^* = det(A)E$$

如果 $det(A) \neq 0$，那么

$$\begin{aligned} det(AA^*) &= det(det(A)E) \\ det(A)det(A^*) &= det(A)^n det(E) \\ det(A^*) &= det(A)^{n-1} \end{aligned}$$

如果 $det(A) = 0$，所以 A 不满秩，由习题 6 可知，A^* 不满秩，所以

$$det(A^*) = 0$$

6

- (1) $rank(A) = n$。

  如果 $rank(A^*)$ 不满秩，那么

  $$det(AA^*) = 0$$

  这与

  $$det(AA^*) = det(det(A)E) = det(A)^n \neq 0$$

  矛盾。

- (2) $rank(A) = n - 1$。

  命题 3.5 可知，A 存在一个 $n - 1$ 阶子式不为零，由不为零可知子式不会有相同行，从 n 个行中选 $n - 1$ 行，有 n 种选择。同时从 n 个列中选 $n - 1$ 列，有 n 种选择。因此有 n^2 种选择。

  A^* 的元素不考虑符号，就是这 n^2 中选择，于是可得 A^* 存在非零元素，所以

  $$rank(A^*) \geq 1$$

由于

$$AA^* = |A|E = 0$$

所以

$$rank(AA^*) = 0$$

又因为

$$\begin{aligned} rank(AA^*) &\geq rank(A) + rank(A^*) - n \\ 0 &\geq n - 1 + rank(A^*) - n \\ 1 &\geq rank(A^*) \end{aligned}$$

综上

$$rank(A^*) = 1$$

- (3) $rank(A) < n - 1$

  由习题 3.5 可知，A 的 $n-1$ 阶子式都为 0，与 (2) 中类似的分析可知，$A^* = 0$，所以

$$rank(A^*) = 0$$

7

- (1)

$$\begin{aligned} |B| &= |T^{-1}AT| \\ &= |T^{-1}||A||T| \\ &= |T^{-1}||T||A| \\ &= |T^{-1}T||A| \\ &= |E||A| \\ &= |A| \end{aligned}$$

- (2)

矩阵转置行列式不变，于是

$$\begin{aligned}|B| &= |T^T A T| \\ &= |T^T||A||T| \\ &= |T||A||T| \\ &= |T|^2|A|\end{aligned}$$

所以，$|A|, |B|$ 同号。

8

这是打洞的题。

我们有

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

两边求行列式，

$$\begin{aligned} 1 \cdot |R| &= |A| \cdot |D - CA^{-1}B| \\ |R| &= |A| \cdot |D - CA^{-1}B| \end{aligned}$$

9

设

$$G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$$

那么，二次曲线可以表示成

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

设

$$T = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & x_0 \\ sin\theta & cos\theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标变换可以表示成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

二次曲线被替换变量 x, y 后，我们有

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} T^T G T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

我们要证明

$$det(T^T GT) = det(G) = F$$

因为

$$det(T) = 1 = det(T^T)$$

所以

$$\begin{aligned} det(T^T GT) &= det(T^T) det(G) det(T) \\ &= 1 \cdot det(G) \cdot 1 \\ &= det(G) = F \end{aligned}$$

11

设 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$。由 $f(a_i) = b_i$，我们得到一个线性方程组，他的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

线性方程组可表示成

$$A\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

A^T 是范德蒙当行列式，又因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同，所以

$$det(A^T)=det(A)\neq 0$$

可得 A 是满秩的，因为线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩也是 n（因为不能超过行向量个数），所以线性方程组一定有解，且解是唯一的。即 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 是唯一的，进而 $f(x)$ 多项式是唯一的。

12

- (1)

  n 阶行列对应的矩阵 A 可以表示成

  $$\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

  以上矩阵秩一矩阵，于是可得

  $$rank(A)\leq 1+1=2$$

  于是，$n>2$ 时，$det(A)=0$。

  $n=1$ 时，$det(A)=1+x_1y_1$；

  $n=2$ 时，$det(A)=(1+x_1y_1)(1+x_2y_2)-(1+x_1y_2)(1+x_2y_1)$

- (2)

n 阶行列对应的矩阵 A 可以表示成

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- (3)

  设行列式的矩阵为 A。

  - 方法一：按照例 3.3 的思想。

    令 $\epsilon_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$，设

    $$f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

    构造 n 阶方阵

    $$B = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \\ \epsilon_1^{n-2} & \epsilon_2^{n-2} & \cdots & \epsilon_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

    于是

    $$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \\ \epsilon_1^{n-2} & \epsilon_2^{n-2} & \cdots & \epsilon_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & \cdots & f(\epsilon_n) \\ \epsilon_1 f(\epsilon_1) & \epsilon_2 f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n f(\epsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_1^{n-2} f(\epsilon_1) & \epsilon_2^{n-2} f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n^{n-2} f(\epsilon_n) \\ \epsilon_1^{n-1} f(\epsilon_1) & \epsilon_2^{n-1} f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n^{n-1} f(\epsilon_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是，我们有

$$|A|\cdot|B|=|AB|=f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}|B|$$

因为 $|B|\neq 0$，故有

$$|A|=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$$

- 方法二：直接利用 3.3 的结论。
  把矩阵 A 通过初等行变换化为例 3.3 的样式，具体操作如下，对第 n 行依次和 $n-1,n-2,\cdots,2$ 进行交换，对第 n 行依次和 $n-1,n-2,\cdots,3$ 进行交换，$\vdots$ 对第 n 与 $n-1$ 进行交换。
  总的交换次数为

$$(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

  利用 3.3 结论，我们有

$$|A|=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$$

  这里的结果好像与方法一的不一致，这是因为他们的 f 是不同的。

13

原题有错误，应该是：

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=\left|E_n-AB\right|=\left|E_m-BA\right|$$

提示：

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -AE_m^{-1} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n-AB \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_m & -BE_n^{-1} \\ 0 & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m-BA & 0 \\ A & E_n \end{bmatrix}$$

14

- 方法一：通过初等列变换

  把 A 的第一列依次与前方的 $n, n-1, \cdots, 1$ 列互换；然后是 A 的第二列，依次与 $n+1, n, \cdots, 2$ 列互换；重复直到 A 的最后一列，我们得到

  $$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

  因为 A 有 m 列，所以经过了 mn 次初等列变换。于是，我们有

  $$|M| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$$

- 方法二：通过矩阵乘法

  我们有

  $$\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

  设 $D = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix}$ 为 (a_{ij})，于是我们有

  $$|D| = \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_{m+n})} (-1)^{N(i_1, i_2, \cdots, i_{m+n})} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_{m+n} m+n}$$

  $|D|$ 是 $(n+m)!$ 项相加，易得只有一项是非零的，即选择 E_n, E_m 有值的行，具体的行号为

  $$n, n+1, \cdots, n+m, 1, 2, \cdots, n$$

  对应的反序数为 nm，所以

  $$|D| = (-1)^{nm}$$

  于是

  $$\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A| \cdot |B|$$