

## 1.1 习题

张志聪

2025 年 6 月 11 日

### 1

- (1)

是数域，证明略。

- (2)

是数域。

设  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ，于是

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3}i) + (c + d\sqrt{3}i) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3}) \\ (a + b\sqrt{3}i)(c + d\sqrt{3}i) &= (ac - 3bd) + (ac + bd)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

当  $c + d\sqrt{3}i \neq 0$ ，即  $c^2 + 3d^2 \neq 0$  时，有

$$\begin{aligned}\frac{a + b\sqrt{3}i}{c + d\sqrt{3}i} &= \frac{(a + b\sqrt{3}i)(c - d\sqrt{3}i)}{c^2 + 3d^2} \\ &= \frac{(ac - 3bd) + (-ad + bc)\sqrt{3}i}{c^2 + 3d^2} \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}(-\sqrt{3})$  对复数的四则运算封闭，所以它是一个数域。

- (3)

### 2

- (1)

既不是单射也不是满射。

- (2)  
不是单射，是满射。
- (3) 是单射，不是满射。

### 3

- (1)  
反证法，假设  $f$  不是满射，那么，存在  $y \in S$ ，没有  $x \in S$  使得  $f(x) = y$ ，即  $f(S) \subseteq S \setminus \{y\}$ 。  
 $S$  中的元素个数为  $n$ ， $S \setminus \{y\}$  的元素个数小于  $n$ ，那么， $f$  存在多个元素映射到同一个元素，这与  $f$  是单射矛盾。

- (2)  
反证法，假设  $f$  不是单射。那么，存在  $a \neq b$  使得

$$f(a) = f(b)$$

从而

$$f(S \setminus \{a\}) = f(S \setminus \{b\}) = f(S)$$

于是  $f(S)$  的元素个数小于等于  $n - 1$ ，那么， $S \setminus f(S) \neq \emptyset$ ，设  $y \in S \setminus f(S)$ ，则不存在  $x \in S$  使得  $f(x) = y$ ，这与  $f$  是满射矛盾。