

4.1

张志聪

2025 年 8 月 22 日

8

维数: 2, 一组基:

$$1, w$$

9

维度: $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, 一组基:

- 对角线上 n 个;

$$E_{ij} (1 \leq i = j \leq n)$$

- 除了对角线, 对称位置上的 $\frac{n^2-n}{2}$ 个;

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

10

维度: $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, 一组基:

- 对角线上 n 个；

$$E_{ij}(1 \leq i = j \leq n)$$

- 除了对角线，对称位置上的 $\frac{n^2-n}{2}$ 个；

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

11

这里就无法一眼看出来了。

需要一个标准的流程找出一组基：

先找出一个非零向量，然后判断这个向量的线性组合是否可以表示线性空间中的所有向量，如果可以，寻找到此结束。如果不可以，把不能表示的向量加入到基中，并重复上述过程。

- (1)

第二题 (5) 的零向量为 $(0,0)$ ，令

$$\epsilon_1 = (1,0)$$

因为 ϵ_1 的线性组合为

$$k \circ (1,0) = [k, \frac{k(k-1)}{2}]$$

显然，它无法表示 $(0,1)$ ，于是令

$$\epsilon_2 = (0,1)$$

它们线性组合为

$$k_1 \circ (1,0) = [k_1, \frac{k_1(k_1-1)}{2}]$$

$$k_2 \circ (0,1) = (0, k_2)$$

那么，对任意 (x, y) ，我们的以下线性方程组

$$\begin{cases} k_1 = x \\ k_2 + \frac{k_1(k_1-1)}{2} = y \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} k_1 = x \\ k_2 = y - \frac{x(x-1)}{2} \end{cases}$$

于是可得，任意元素 (x, y) 都可以被 $(1, 0), (0, 1)$ 线性表示。

综上，线性空间的维度是 2，一组基为：

$$(1, 0), (0, 1)$$

• (2)

第二题 (7) 的零向量为实数 1。

令

$$\epsilon_1 = 2$$

对任意 $y > 0$ ，我们有

$$k \circ 2 = 2^k = y$$

$$k = \log_2 y$$

综上，线性空间的维度是 1，一组基为：

$$2$$

12

对任意 n ，我们有

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

我们有

$$A \neq A^2 \neq A^3 = E$$

$$A^n = A^{n \bmod 3}$$

其中 $n \bmod 3$ 表示 n 除以 3 的余数。

综上，维数为 3，一组基为

$$A, A^2, A^3$$

14

设

$$E, A, A^2, \dots, A^{m-1} \quad (I)$$

要想证明 (I) 是一组基，需要证明 (I) 是线性无关的，且可以表示线性空间中的所有向量。

- 线性无关性

假设 (I) 是线性相关的，那么

$$k_0 E + k_2 A + k_3 A^2 + \dots + k_m A^{m-1} = 0$$

存在非零解，这与题设中 $f(\lambda)$ 是使 $f(A) = 0$ 的最低次多项式相矛盾。

- 可以线性表示表示所有向量。

只需证明对任意 n ， A^n 都可以被 (I) 线性表示即可。

对 n 进行归纳， $n = m$ 时，有题设可知， A^n 可以被 (I) 线性表示。

归纳假设 $n = r$ 时， A^r 可以被 (I) 线性表示。

$n = r + 1$ 时，由归纳假设可知，存在 $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{K}$ ，使得

$$A^r = k_1 E + k_2 A + k_3 A^2 + \dots + k_m A^{m-1}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} A^{r+1} &= A A^r \\ &= A(k_1 E + k_2 A + k_3 A^2 + \dots + k_m A^{m-1}) \\ &= k_1 A + k_2 A^2 + k_3 A^3 + \dots + k_m A^m \end{aligned}$$

又因为 A^m 也可以被 (I) 线性表示，所以， A^{r+1} 可以被 (I) 线性表示。

综上， (I) 是 V 的一组基，从而 $\dim V = m$ 。

后边部分的证明略。

15

要证明 $(A - aE)^k (0 \leq k \leq m - 1)$ 是一组基, 由于 $\dim V = m$, 于是我们只需证明 $(A - aE)^k (0 \leq k \leq m - 1)$ 线性无关即可。

按二项展开公式, 我们有

$$(A - aE)^j = A^j + *$$

由于无法被其他向量 $(A - aE)^k (0 \leq k \leq m - 1, k \neq j)$ 线性表示, 于是, 线性无关性得到证明。

16

- (1)

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

17

设 ξ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 中的坐标为 X , 在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 中的坐标为 Y 。由题设要求 $X = Y$, 并且

$$TX = X$$

$$TX - X = 0$$

$$(T - E)X = 0$$

由于 T 是已知的, 所以需要求解上方的方程组即可。

18

todo

19

todo

20

数域 K 上的 n 阶方阵构成一个线性空间 V ，加法和数乘就是矩阵的加法和数乘。这个空间的基为 $E_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$ ，维数为 $n \times n = n^2$ 。

于是，对于

$$A^0, A, A^2, \dots, A^{n^2} \quad (I)$$

有 $n^2 + 1$ 个，且都属于 V ，所以 (I) 线性无关的，从而，存在不全为零的 $k_1, k_2, \dots, k_{n^2} \in K$ ，使得

$$k_1 A^0 + k_2 A + \dots + k_{n^2} A^{n^2} = 0$$

即存在一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(A) = 0$ 。

21

对于 β ，由 (iv) 可知，存在 $\beta' \in V$ 使得

$$\beta + \beta' = 0$$

于是，我们有

$$\beta + 0 + \beta' = 0$$

$$\beta + (\alpha + \beta) + \beta' = 0$$

$$\beta + \alpha + (\beta + \beta') = 0$$

$$\beta + \alpha + 0 = 0$$

$$\beta + (\alpha + 0) = 0$$

$$\beta + \alpha = 0$$

22

对于 α , 由 (iv) 可知, 存在 $\alpha' \in V$ 使得

$$\alpha + \alpha' = 0$$

利用习题 21, 我们有

$$\alpha' + \alpha = 0$$

于是

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + (\alpha' + \alpha) = \alpha$$

$$(\alpha + \alpha') + \alpha = \alpha$$

$$0 + \alpha = \alpha$$

23

对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 由 (iv) 可知, 存在 $\alpha', \beta' \in V$, 使得

$$\alpha + \alpha' = 0$$

$$\beta + \beta' = 0$$

利用习题 21, 习题 22 和其他公理, 我们有

$$2(\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta$$

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = \alpha + \alpha + \beta + \beta$$

$$\alpha' + \alpha + \beta + \alpha + \beta = \alpha' + \alpha + \alpha + \beta + \beta$$

$$(\alpha' + \alpha) + \beta + \alpha + \beta = (\alpha' + \alpha) + \alpha + \beta + \beta$$

$$0 + \beta + \alpha + \beta = 0 + \alpha + \beta + \beta$$

$$\beta + \alpha + \beta = \alpha + \beta + \beta$$

$$\beta + \alpha + \beta + \beta' = \alpha + \beta + \beta + \beta'$$

$$\beta + \alpha + 0 = \alpha + \beta + 0$$

$$\beta + \alpha = \alpha + \beta$$

