2.3

张志聪

2025 年 8 月 5 日

1

只做第一题，练练手。

先做矩阵消元法

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{处理第一列}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{处理第二列}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = 2$，故基础解系中应包含 $n - r = 5 - 2 = 3$ 个向量。写出阶梯型矩阵的对应方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ -x_2 = 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5 为自由未知量。

- (i) 取 $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$，得一个解向量

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$$

- (ii) 取 $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$，得一个解向量

$$\eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$$

- (iii) 取 $x_3=0, x_4=0, x_5=1$，得一个解向量

$$\eta_3=(5,-6,0,0,1)$$

于是 η_1, η_2, η_3 为方程组的一个基础解系。方程组的全部解可表为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$$

其中 k_1, k_2, k_3 为数域 K 内任意数。

2

设 (I) 是基础解系，(II) 是与 (I) 线性等价的任意向量组。
按照基础解系的定理，我们要验证三点：

- （1）(II) 中的向量都是解向量。

  任意 $\beta \in (II)$ 都可以被 (I) 线性表示，因为 (I) 中都是解向量，他们的线性表示 β，也是解向量。

- （2）(II) 线性无关。

  题设保证的。

- （3）解向量都可以被 (II) 线性表示。

  因为任意解向量都可以被 (I) 线性表示，(I) 和 (II) 线性等价，于是也能被 (II) 线性表示。

3

不妨设方程组的基础解系为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-r} \quad (I)$$

满足题设条件的向量组为

$$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-r} \quad (II)$$

- 方法一

  利用 §1 命题 1.4（替换定理）

  假设 (II) 不是基础解系，那么存在解向量 β 无法被 (II) 线性表示，由命题 3.2 的逆否命题可知，向量组

  $$(III) := (II), \beta$$

  是线性无关的，于是秩为 $n - r + 1$。

  因为 (I) 是基础解系，于是 (I) 可以线性表示所有解，于是可以线性表示 (III)，又因为 (III) 线性无关，由 §1 命题 1.4 的逆否命题可知

  $$n - r \geq n - r + 1$$

  存在矛盾，假设不成立，命题得证。

- 方法二

  利用习题 2，我们只需证明：$(I), (II)$ 线性等价即可。

  考虑 $(III) := (I) \cup (II)$ 的秩。由 §2 习题 9 可知

  $$n - r \leq rank((III)) \leq 2(n - r)$$

  因为 (II) 中都是解向量，于是都能被 (I) 线性表示，所以

  $$rank((III)) \leq n - r$$

  综上

  $$rank((III)) = n - r$$

  由 §1 习题 14 可知，$(I), (II)$ 都是 (III) 的极大线性无关部分组，所以 $(I), (II)$ 线性等价。

4

备注：添加一个方程，对齐次线性方程组解的影响。
反证法，假设 β 不可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示。

齐次线性方程组对应的矩阵设为

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

把方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

添加到齐次线性方程组，得到新的矩阵:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \\ \beta \end{bmatrix}$$

不妨设 $rank(A) = r$，那么，我们有

$$rank(B) = r + 1$$

设 A, B 的基础解系分别为 $(I), (II)$，由定理 3.1 可知，基础解系的秩为

$$rank((I)) = n - r$$
$$rank((II)) = n - r - 1$$

由题设中对解的描述可知，(II) 可以线性表示 (I)，且 (I) 是线性无关的，于是，利用替换定理可知

$$n - r - 1 \geq n - r$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

5

设两个齐次线性方程组对应的矩阵分别为为

$$A$$
$$B$$

把两个齐次线性方程组合并，我们得到新的矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

由 §2 习题 9（更准确的说是行向量版本）可知

$$max(rank(A), rank(B)) \leq rank(C) \leq rank(A) + rank(B)$$

因为 $rank(A), rank(B)$ 都小于 $n/2$，我们有

$$0 \leq rank(C) < n$$

如果 $rank(C)$ 等于 0,说明矩阵 A, B 都是零矩阵,此时任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是 A, B 对应的齐次线性方程组的解，命题成立。

$rank(C) < n$ 时，由定理 3.1 可知，C 存在一个秩为 $n - rank(C) > 0$ 的基础解系 (I)，因为 (I) 是非空的，(I) 中的任意向量都是 A, B 的解向量，命题得证。

综上，命题得证。

6

- 方法一

  对系数 $n \times n$ 矩阵进行初等变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换前两列}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{先利用 } R_1 \text{ 进行行变换，再利用 } C_1 \text{ 进行列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有无非零解，就是判断 A 的秩的情况。此时，主对角线上都是非零的，且矩阵的右上角都是 0，观察行向量可得都是线性无关的，所以矩阵 $rank(A)=n$，于是可得 A 没有非零解。

- 方法二

  使用 2-3-comment.tex 中的结论，直接可得秩为 n。

7

不妨设齐次线性方程组 A 的秩为 r，那么设它的任意基础解系为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r} \quad (I)$$

设满足题设要求的线性无关解向量组为

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s \quad (II)$$

如果 $s=n-r$，由习题 3 可知，(II) 就是基础解系。

如果 $s<n-r$，于是由基础解系的定义可知 (I) 可以线性表示 (II)，又因为 (II) 是线性无关的，由替换定理的结论 (2)(3) 可得，可以用 (II) 替换掉 (I) 中的部分向量，得到一个与 (I) 线性等价且线性无关的基础解系。

综上，命题得证。

8

略

9

如果是齐次线性方程组，由解的性质可知，命题是显然成立的。

我们主要考虑非齐次线性方程组，不妨设为 A。

我们有

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \eta_1 + (\eta_1 - \eta_1) \\
\eta_2 &= \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1) \\
\eta_3 &= \eta_1 + (\eta_3 - \eta_1) \\
&\vdots \\
\eta_t &= \eta_1 + (\eta_t - \eta_1)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t &= (k_1 + k_2 + \cdots + k_t)\eta_1 + [k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)] \\
&= \eta_1 + [k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)]
\end{aligned}$$

因为

$$[k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)]$$

是 A 导出方程组的解。所以

$$\eta_1 + [k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)]$$

是 A 的解。

10

设 n 个平面合并成一个方程组 A（注意，不一定是齐次的）。

通过一个点，即方程组只有一个解，满足以下条件即可

$$rank(A) = n = rank(\overline{A})$$

其中 $\overline{A}$ 是增广矩阵。

通过同一直线，即导出方程组的基础解系的秩为 1，满足以下条件即可

$$rank(A) = n - 1 = rank(\overline{A})$$

11

不妨设 $rank(A) = r$，可设

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \quad (I)$$

是 A 列向量组的极大无关部分组。

(I) 中每个向量加上一个分量 $b_j(1 \leq j \leq n)$，得到新的向量组

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r} \quad (II)$$

依然是线性无关的。

由题设 $rank(A) = rank(B)$ 可知，(II) 是 B 列向量的极大线性无关部分组，于是 (II) 可以线性表示最后一列，从而线性方程组有解。

12

设该方程组的系数矩阵为 A，增广矩阵为 $\overline{A}$，

$$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

先对 A 进行行变换，把 n 行放到第 1 行，第 $n-1$ 行放到第二行，以此类推，于是由 2-3-comment.tex 中的结论可知：
$a = b = 0$ 时 $rank(A) = 0$，由定理 3.2（判别定理）可知，只有当 $rank(A) = 0 = rank(\overline{A})$ 时，方程组才有解。即 β 是零向量才有解。且 K^n 中的任意向量都是它的解。

$a = b = 0$ 时 $rank(A) = 1$，由定理 3.2（判别定理）可知，只有当 $rank(A) = 1 = rank(\overline{A})$ 时，所有的方程都是一样的，此时只有当 β 中所有分量都相同时，方程组才有解，基础解系的秩为 $n-1$。

$(n-1)a + b \neq 0$，此时 $rank(A) = n$，因为增广矩阵的行只有 n 行，可得 $rank(\overline{A}) = n$，此时，有唯一解且对 β 没有要求。

$(n-1)a + b = 0$，对增广矩阵做行变换：所有的行都加入第一行，得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0, & \sum\limits_{i}^{n} b_i \\ a & b & \cdots & a, & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & b & b_1 \end{bmatrix}$$

已知除去第 n 行，矩阵的秩为 $n-1$，要想线性方程有解，那么要保证其秩为 $n-1$，于是需要保证 $\sum_i^n b_i = 0$。

综上，

$$
\begin{cases}
\text{任意解} & a=b=0, b_1=b_2=\cdots=b_n=0 \\
\text{基础解系秩为 } n-1 & a=b\neq 0, b_1=b_2=\cdots=b_n \\
\text{基础解系秩为 } 1 & a=b=0, \sum_i^n b_i = 0 \\
\text{唯一解} & (n-1)a+b\neq 0
\end{cases}
$$

13

由定理 3.3 可知，任一解 γ 可以表示成

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s \\
&= \gamma_0 + k_1(\gamma_1-\gamma_0) + k_2(\gamma_2-\gamma_0) + \cdots + k_s(\gamma_s-\gamma_0) \\
&= [1-(k_1+k_2+\cdots+k_s)]\gamma_0 + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{gathered}
k_0 = 1-(k_1+k_2+\cdots+k_s) \\
\Longrightarrow \\
1 = k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_s
\end{gathered}
$$

于是 γ 可以表示成

$$
\gamma = k_0\gamma_0 + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s
$$

14

不妨设任意非齐次线性方程组的系数矩阵和增广矩阵为 $A, \overline{A}$，因为系数矩阵与增广矩阵的秩相等，由定义 3.2（判别定理）可知方程组有解。

如果 $rank(A)=n$，由定理 3.3 可知，方程组有唯一解。因为 $n-n+1=1$，命题成立。

如果 $rank(A) < n$，由定理 3.3 可知，方程组的解可有某一特殊解 γ_0 和它的导出方程组的一个基础解系表示。不妨设导出方程组的基础解系为

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$$

于是方程组的解可以表示成

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

我们令

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \gamma_0 \\
\gamma_1 &= \gamma_0 + \eta_1 \\
\gamma_2 &= \gamma_0 + \eta_2 \\
&\vdots \\
\gamma_{n-r} &= \gamma_0 + \eta_{n-r}
\end{aligned}$$

这就是满足题设要求的线性无关解向量组，设为 (I)。

我们还需证明该向量组是线性无关的。考虑向量组

$$\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r} \quad (II)$$

(II) 是线性无关的，因为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是线性无关，且 γ_0 是无法被 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表示，否则 γ_0 将是导出方程组的解。

易得 $(I), (II)$ 是线性等价的，进而 (I) 是线性无关的。

15

- (1)

  三点不共线，则向量

  $$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$
  $$\overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

  线性无关。

对矩阵做初等行列变换

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ 0 & c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{bmatrix}$$

充分性:

即 $rank(A)=3$，由于初等变换不改变秩，于是可得

$$(0, b_1-a_1, b_2-a_2)$$
$$(0, c_1-a_1, c_2-a_2)$$

线性无关，进而可得

$$(b_1-a_1, b_2-a_2)$$
$$(c_1-a_1, c_2-a_2)$$

线性无关，所以三点不共线。

必要性:

由三点不共线，可知

$$(b_1-a_1, b_2-a_2)$$
$$(c_1-a_1, c_2-a_2)$$

线性无关，从而

$$(0, b_1-a_1, b_2-a_2)$$
$$(0, c_1-a_1, c_2-a_2)$$

线性无关。

显然，向量

$$(1, 0, 0)$$

不能被

$$(0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(0, c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

于是可得，秩为 3。

- (2)

  三点不共线，唯一确定一个圆。这是几何结论。

  两条中轴线（以 AB，BC 为例）相交的点，就是圆心。

  $$\begin{cases} 2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y + (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) = 0 \\ 2(c_1 - b_1)x + 2(c_2 - b_2)y + (b_1^2 + b_2^2 - c_1^2 - c_2^2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

  以上方程一定有唯一的实数解，设为 (x_0, y_0)。

  接下来，我们需要证明 (x_0, y_0) 是有理数坐标。

  对于方程组 (1) 的系数矩阵，因为元素都是有理数，我们可以利用初等变换（有理数域内的初等变换）化作标准型，由 2-3-comment.tex 注释 2 中的讨论可知，有理数域扩大到实数域，秩是不会改变的，由实数域有唯一解可知，秩为 2，所以在有理数域也有唯一解，因为有理数域是实数域的子集，从而可知，这个唯一解是有理数解，否则实数域中就有两个解了，存在矛盾。

  综上，(x_0, y_0) 是有理数坐标。

16

因为是实数域上的齐次线性方程组，由 2-3-comment.tex 注释 2 中的讨论可知，秩的情况在实数域还是复数域上是相同的，题设中齐次线性方程组有非零解，即实数域中有非零解。不妨设

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

是一个实数域中的非零解向量。

于是我们有以下方程组

$$\begin{cases} \lambda c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + \lambda c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + \lambda c_n = 0 \end{cases}$$

对 i 个方程，乘以 c_i，于是，我们有

$$\begin{cases} \lambda c_1^2 + a_{12}c_1c_2 + \cdots + a_{1n}c_1c_n = 0 \\ a_{21}c_1c_2 + \lambda c_2^2 + \cdots + a_{2n}c_2c_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}c_1c_n + a_{n2}c_2c_n + \cdots + \lambda c_n^2 = 0 \end{cases}$$

所有方程相加，由于 $a_{ij} = -a_{ji}$，我们有

$$\begin{aligned} \lambda c_1^2 + \lambda c_2^2 + \cdots + \lambda c_n^2 = 0 \\ \lambda(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) = 0 \\ \lambda = 0 \end{aligned}$$