2.4

张志聪

2025 年 8 月 6 日

8

- 方法一

  设

  $$D = AB = AC$$

  设 B 的列向量组为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，$C$ 的列向量组为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$，$D$ 的列向量组为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$，那么按照矩阵乘法，任意 $1 \leq i \leq s$，应有

  $$\eta_i = A\beta_i = A\gamma_i$$
  $$A(\beta_i - \gamma_i) = 0$$

  由于 $rank(A) = n$，于是方程组 $Ax = 0$ 只有零解，所以

  $$\beta_i - \gamma_i = 0$$
  $$\beta_i = \gamma_i$$

  由于 i 是任意的，所以

  $$B = C$$

- 方法二

  设

  $$A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]$$

由题设可知

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

是线性无关的。

设 $D = AB = AC$，那么对任意列向量 $col_j(D)(1 \leq j \leq s)$，我们有

$$col_j(D) = Acol_j(B) = Acol_j(C)$$

即 $col_j(D)$ 可以被 (I) 线性表示:

$$col_j(D) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

由于 (I) 是线性无关的，利用命题 3.1 可知，表示法是唯一的，即 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是唯一的。于是可得 $col_j(B) = col_j(C)$，所以 $B = C$。

9

(1) k 的值；

需要保证 $rank(A) = 2$，有两种方法确定这一点:

- (1) 利用习题 7

  因为 B 不是零矩阵，所以 $rank(B) \geq 1$，利用习题 7 可得

  $$rank(A) \leq 3 - 1 = 2$$

  又 A 第二列与第三列已经线性无关了，所以第一列一定要能被其他列线性表示，否者 $rank(A) = 3$，会导致矛盾。

- (2) 矩阵乘法的整体理解。

  设 $C = AB$，于是如果写 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，那么对 $col_j(C)$，有

  $$\begin{aligned} col_j(C) = 0 = A\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} \\ &= b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + b_{3j}\alpha_3 \end{aligned}$$

如果 $rank(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，那么

$$\begin{bmatrix} b_1j \\ b_2j \\ b_3j \end{bmatrix} = 0$$

这与题设中 $B \neq 0$ 矛盾。

于是可得 $k=\frac{1}{3}$。
(2) B 的值。
写

$$B=[b_1b_2b_3]$$

所以

$$Ab_1 = 0$$
$$Ab_2 = 0$$
$$Ab_3 = 0$$

对于线性方程组 $AX=0$，由于 $rank(A)=2$，所以方程组的基础解系存在，且基础解系中向量个数为 $3-2=1$，此时已经确定了 B 的存在性，接下来，就是计算 AX 的基础解系，这个步骤略。

10

由命题 4.4 可知

$$rank(A+B) \leq rank(A)+rank(B) < n$$

记

$$C=[c_1\, c_2\, c_3\, \cdots\, c_n]$$

所以

$$(A+B)C=0$$

可以表示成

$$\begin{aligned}(A+B)c_1&=0\\(A+B)c_2&=0\\&\vdots\\(A+B)c_n&=0\end{aligned}$$

问题转变成线性方程组 $(A+B)X=0$ 是否有解，因为 $rank(A+B)<n$，于是方程组的基础解系存在，所以，可以通过基础解系中向量的线性组合构成 C，使得 $(A+B)C=0$。

11

因为存在非零的 C 使得 $AC=0$ 可得 $rank(A)<n$，否则 C 只能是零矩阵。于是可得 $rank(AB)\leq min\{rank(A),rank(B)\}<n$。

接下来的证明与习题 10 类似，这里不做赘述。

12

设 $D=AB$，考虑矩阵的齐次线性方程组：

$$\begin{aligned}Ax&=0\\Bx&=0\\Cx&=0\\Dx=ABx=BAx&=0\end{aligned}$$

于是，他们的基础解系的秩，可以分别设为

$$\begin{aligned}s&=n-rank(A)\\t&=n-rank(B)\\u&=n-rank(C)\\v&=n-rank(AB)\end{aligned}$$

且由基础解系构成的解集，分别设为：

$$S_A$$
$$S_B$$
$$S_C$$
$$S_D$$

因为 $Cx=0$，是 $Ax=0,Bx=0$ 的联立方程组，于是有

$$S_C=S_A\cap S_B$$

因为

$$Dx=A(Bx)=B(Ax)=0$$

所以 $S_A\subseteq S_D,S_B\subseteq S_D$，于是有

$$(S_A\cup S_B)\subseteq S_D$$

对于 $Cx=0$ 的基础解系 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u$，由 $S_C=S_A\cap S_B$，可知 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u$ 都是 $Ax=0,Bx=0$ 的解。

由 §3 习题 7 可知，可以在 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u$ 基础上扩充成 $Ax=0,Bx=0$ 的基础解系：

$$\alpha_{u+1},\cdots,\alpha_s,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u$$
$$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u,\beta_{u+1},\cdots,\beta_t$$

现在，我们证明

$$\alpha_{u+1},\cdots,\alpha_s,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u,\beta_{u+1},\cdots,\beta_t\quad(I)$$

是线性无关的。

$$a_{u+1}\alpha_{u+1}+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\gamma_1+\cdots+b_u\gamma_u+c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t=0$$
$$a_{u+1}\alpha_{u+1}+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\gamma_1+\cdots+b_u\gamma_u=-(c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t)$$

又我们有

$$a_{u+1}\alpha_{u+1}+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\gamma_1+\cdots+b_u\gamma_u\in S_A$$
$$-(c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t)\in S_B$$

所以

$$
\begin{aligned}
a_{u+1}\alpha_{u+1}+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\gamma_1+\cdots+b_u\gamma_u &\in S_C \\
-(c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t) &\in S_C
\end{aligned}
$$

于是存在

$$c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t=d_1\gamma_1+\cdots+d_u\gamma_u$$

所以

$$-(c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t)+d_1\gamma_1+\cdots+d_u\gamma_u=0$$

由于这里使用的向量都是 $Bx=0$ 基础解系中的向量，于是可得

$$
\begin{aligned}
d_1=d_2=\cdots=d_u=0 \\
c_{u+1}=c_{u+2}=\cdots=c_t=0
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
a_{u+1}\alpha_{u+1}+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\gamma_1+\cdots+b_u\gamma_u &= -(c_{u+1}\beta_{u+1}+\cdots+c_t\beta_t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

这个左侧都是 $Ax=0$ 的基础解系中的向量，所以有

$$
\begin{aligned}
a_{u+1}=\cdots=a_s=0 \\
b_1=\cdots=b_u=0
\end{aligned}
$$

综上可得，(I) 是线性无关的。

由于 $(S_A\cup S_B)\subseteq S_D$，所以 (I) 可以被 $Dx=0$ 的基础解系表示，利用替换定理，我们有

$$
\begin{aligned}
v &\geq s+t-u \\
n-rank(AB) &\geq n-rank(A)+n-rank(B)-n+rank(C) \\
rank(A)+rank(B) &\geq rank(C)+rank(AB)
\end{aligned}
$$

13

记

$$A = \begin{bmatrix} \eta_1^T \\ \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_s^T \end{bmatrix}$$

考虑线性方程组 $Ax = 0$ 的解。因为 $rank(A) = s \neq n$，所以方程组的基础解系存在，且基础解系中向量个数为 $n - s$，不妨设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-s}$$

是方程组的一个基础解系。记

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-s} \end{bmatrix}$$

于是，我们有

$$AB = 0$$

又

$$(AB)^T = B^T A^T = 0$$

这里

$$A^T = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_s \end{bmatrix}$$

因为 $rank(A^T) = s, rank(B^T) = n - s$，$A^T$ 中的 s 个列向量都是线性无关的，且 A^T 的任意列向量 η 都有 $B^T \eta = 0$，于是由基础解系的定义可知 A^T 的列向量组是 B^T 对应的齐次线性方程的基础解系。

14

设

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_s \quad (I)$$

令

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= \gamma_1 - \gamma_0 \\
\eta_2 &= \gamma_2 - \gamma_0 \\
&\vdots \\
\eta_s &= \gamma_s - \gamma_0
\end{aligned}
$$

易得向量组

$$\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s \quad (II)$$

与 (I) 是线性等价的。由 (I) 是线性无关的，可得 (II) 是线性无关的，于是可得

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s \quad (III)$$

是线性无关的。

利用习题 13 可得，存在一个 K 上一个齐次线性方程组以 (III) 为基础解系。设该齐次线性方程组的系数矩阵为 B，并令

$$\beta = B\gamma_0$$

先证明 $\beta \neq 0$，如果 $B\gamma_0 = 0$，那么 γ_0 应该可以被 $Bx = 0$ 的基础解系 (III) 表示，这与 (II) 是线性无关向量组矛盾。到此，得到非齐次线性方程组

$$Bx = \beta$$

接下来，证明该非齐次线性方程组满足题设要求。通过构造过程，我们知道 γ_0 是一个特解，(III) 是其基础解系。并且对任意 $1 \leq j \leq s$，我们有

$$
\begin{aligned}
B\eta_j &= 0 \\
&= B(\gamma_j - \gamma_0) \\
&= B\gamma_j - B\gamma_0 \\
&= B\gamma_j - \beta \\
\Longrightarrow & \\
B\gamma_j &= \beta
\end{aligned}
$$

可得 γ_j 是非齐次线性方程组的解，所以这个非齐次线性方程组满足了题设条件 (1)；

非齐次线性方程组的解都可以表示成

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$$

$(I)(II)$ 线性等价，于是可得题设条件 (2) 成立。

15

(1)

由基础解系与秩的关系，我们有

$$rank(B) = s - k$$
$$rank(AB) = s - l$$

于是可得

$$rank(B) - rank(AB) = l - k$$

于是问题等价于证明 $B\eta_{k+1}, \cdots, B\eta_l$ 是线性无关的。

设 $a_{k+1}, \cdots, a_l \in K$ 使得

$$a_{k+1}B\eta_{k+1} + \cdots + a_lB\eta_l = 0$$
$$B(a_{k+1}\eta_{k+1} + \cdots + a_l\eta_l) = 0$$

于是可得 $a_{k+1}\eta_{k+1} + \cdots + a_l\eta_l$ 是 BX 的一个解，所以可以被 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 线性表示，系数不妨设为 $a_1, \cdots, a_k$，即

$$a_{k+1}\eta_{k+1} + \cdots + a_l\eta_l = a_1\eta_1 + \cdots + a_k\eta_k$$
$$a_1\eta_1 + \cdots + a_k\eta_k + a_{k+1}\eta_{k+1} + \cdots + a_l\eta_l = 0$$

因为 $\eta_1, \cdots, \eta_k, \eta_{k+1}, \cdots, \eta_l$ 是线性无关的，于是可得

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} = \cdots = a_l = 0$$

从而

$$a_{k+1}B\eta_{k+1} + \cdots + a_lB\eta_l = 0$$

只有零解，所以 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$ 是线性无关的。

(2) 证明命题 4.6

我们有

$$(AB)X = A(BX) = 0$$

因为 $\eta_{k+1},\cdots,\eta_l$ 是 $(AB)X = 0$ 的解，所以 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$ 是 $A(BX) = 0$ 的解。

设 (I) 是 $A(BX) = 0$ 的一个基础解系，秩为 $n - rank(A)$，于是可得 (I) 可以线性表示 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$，又因为 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$ 是线性无关的，所以

$$\begin{aligned} n - rank(A) \geq l - k = rank(B) - rank(AB) \\ \Longrightarrow \\ rank(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n \end{aligned}$$

16

先考虑 C 的秩。我们有

$$\begin{aligned} rank(A) + rank(B) - n \leq rank(C) \leq min\{rank(A), rank(B)\} \\ rank(B) \leq rank(C) \leq rank(B) \\ r \leq rank(C) \leq r \\ rank(C) = r \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned} c_{i_1} &= B\beta_{i_1} \\ c_{i_2} &= B\beta_{i_2} \\ &\vdots \\ c_{i_r} &= B\beta_{i_r} \end{aligned}$$

验证

$$c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_r} \quad (I)$$

是否为 C 的极大线性无关部分组。

我们只需证明 (I) 的极大性，即 C 中的任意列向量都可以被 (I) 线性表示，就可以证明 (I) 是 C 的极大线性无关部分组（§2 习题 15）。

C 任意列向量 $c_j(1 \leq j \leq s)$ 为

$$c_j = A\beta_j$$

由于 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 是 B 的极大线性无关部分组，所以 β_j 可以被其线性表示：

$$\beta_j = k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \cdots + k_r\beta_{i_r}$$

于是可得

$$\begin{aligned} c_j &= A(k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \cdots + k_r\beta_{i_r}) \\ &= k_1A\beta_{i_1} + k_2A\beta_{i_2} + \cdots + k_rA\beta_{i_r} \\ &= k_1c_{i_1} + k_2c_{i_2} + \cdots + k_rc_{i_r} \end{aligned}$$

所以，c_j 可以被 (I) 线性表示，极大性得证。