

2.6 总结

张志聪

2025 年 8 月 10 日

注释 1. 打洞技巧:

给定数域 K 上的 n 阶分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

其中 A 是 k 阶可逆方阵, 通过初等变换得到

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

求初等变换对应的初等矩阵。

先考虑数值矩阵的情况,

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

通过行变换, 第二行加上第一行的 $-\frac{c}{a}$ 倍, 把 c 消为 0,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

通过列变换, 第二列加上第一列的 $-\frac{b}{a}$ 被, 把 b 消为 0,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

相应的可得

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k & -A^{-1}B \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$