3.1

张志聪

2025 年 8 月 16 日

3

提示：设

$$f_m(A) = mdet(A)$$

25

对任意 n 阶方正 $A = (a_{ij})$，对应的 B 为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11}b^{1-1} & a_{12}b^{1-2} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b^{2-1} & a_{22}b^{2-2} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn}b^{n-n} \end{bmatrix}$$

于是，我们有（先提取行向量的公因子，再提取列向量的公因子）

$$\begin{aligned} |B| &= bb^2\cdots b^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11}b^{-1} & a_{12}b^{-2} & \cdots & a_{1n}b^{-n} \\ a_{21}b^{-1} & a_{22}b^{-2} & \cdots & a_{2n}b^{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b^{-1} & a_{n2}b^{-2} & \cdots & a_{nn}b^{-n} \end{vmatrix} \\ &= bb^2\cdots b^{n-1}\frac{1}{bb^2\cdots b^{n-1}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| \end{aligned}$$

26

todo

27

把矩阵看做行向量组，

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^T \\ \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{bmatrix}$$

我们证明，对任意 α_i，可以被其他行向量做 $i-1$ 次初等变换，化为只剩首项系数的形式。

对 i 进行归纳，$i=1$ 时

$$\alpha_1^T = (a_1b_1 + c_1, a_1b_2 + c_1, \cdots, a_1b_n + c_1)$$

其中 c_1 是一个定值。我们有

$$\alpha_0^T = (a_0, a_0, \cdots, a_0)$$

所以，可以通过 α_0^T，去掉 α_1^T 中的 c_1，得到

$$(a_1b_1, a_1b_2, \cdots, a_1b_n)$$

归纳假设 $i=k$ 时，也成立。

$i=k+1$ 时，我们有

$$\alpha_{k+1}^T = (a_{k+1}b_1^{k+1} + *b_1^k + \cdots + c_{k+1}, a_{k+1}b_2^{k+1} + *b_2^k + \cdots + c_{k+1}, \cdots, a_{k+1}b_n^{k+1} + *b_n^k + \cdots + c_{k+1})$$

由归纳假设可知，α_{k+1}^T 通过 $k-1$ 次初等变化，可得

$$(a_{k+1}b_1^{k+1} + *b_1^k, a_{k+1}b_2^{k+1} + *b_2^k, \cdots, a_{k+1}b_n^{k+1} + *b_n^k)$$

再加上 $-\frac{*}{a_k}\alpha_k^T$，我们有

$$(a_{k+1}b_1^{k+1}, a_{k+1}b_2^{k+1}, \cdots, a_{k+1}b_n^{k+1})$$

归纳完成。

于是，我们有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} f_0(b_1) & f_0(b_2) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_1) & f_1(b_2) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}(b_1) & f_{n-1}(b_2) & \cdots & f_{n-1}(b_n) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1 b_1^1 & a_1 b_2^1 & \cdots & a_1 b_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} b_1^{n-1} & a_{n-1} b_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1} b_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= a_0 a_2 \cdots a_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= a_0 a_2 \cdots a_{n-1} \prod_{1 \le j < i \le n} (b_i - b_j)\end{aligned}$$

28

对任意 $k \in \mathbb{N}^+$，我们有

$$cos(k\alpha) = 2^{k-1}(cos\alpha)^k + *$$

这里的 $*$ 是其他次数小于 k 的项。

与习题 27 类似的方式化简，本题中的行列式可化为

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ cos\alpha_1 & cos\alpha_2 & \cdots & cos\alpha_n \\ 2(cos\alpha_1)^2 & 2(cos\alpha_2)^2 & \cdots & 2(cos\alpha_n)^2 \\ \vdots & & & \\ 2^{n-2}(cos\alpha_1)^{n-1} & 2^{n-2}(cos\alpha_2)^{n-1} & \cdots & 2^{n-2}(cos\alpha_n)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2^2 \cdots 2^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ cos\alpha_1 & cos\alpha_2 & \cdots & cos\alpha_n \\ (cos\alpha_1)^2 & (cos\alpha_2)^2 & \cdots & (cos\alpha_n)^2 \\ \vdots & & & \\ (cos\alpha_1)^{n-1} & (cos\alpha_2)^{n-1} & \cdots & (cos\alpha_n)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \prod_{1 \le j < i \le n} (cos\alpha_i - cos\alpha_j)\end{aligned}$$