2.3

张志聪

2025 年 7 月 5 日

1

只做第一题，练练手。

先做矩阵消元法

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{处理第一列}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&1&2&2&6\\0&-1&-2&-2&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{处理第二列}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$rank(A)=2$，故基础解系中应包含 $n-r=5-2=3$ 个向量。写出阶梯型矩阵的对应方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\-x_2-2x_3-2x_4-6x_5=0\end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5\\-x_2=2x_3+2x_4+6x_5\end{cases}$$

x_3,x_4,x_5 为自由未知量。

- (i) 取 $x_3=1,x_4=0,x_5=0$，得一个解向量

$$\eta_1=(1,-2,1,0,0)$$

- (ii) 取 $x_3=0,x_4=1,x_5=0$，得一个解向量

$$\eta_2=(1,-2,0,1,0)$$

- (iii) 取 $x_3=0, x_4=0, x_5=1$，得一个解向量

$$\eta_3=(5,-6,0,0,1)$$

于是 η_1,η_2,η_3 为方程组的一个基础解系。方程组的全部解可表为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$$

其中 k_1,k_2,k_3 为数域 K 内任意数。

2

设 (I) 是基础解系，(II) 是与 (I) 线性等价的任意向量组。
按照基础解系的定理，我们要验证三点：

- （1）(II) 中的向量都是解向量。

  任意 $\beta\in(II)$ 都可以被 (I) 线性表示，因为 (I) 中都是解向量，他们的线性表示 β，也是解向量。

- （2）(II) 线性无关。

  题设保证的。

- （3）解向量都可以被 (II) 线性表示。

  因为任意解向量都可以被 (I) 线性表示，(I) 和 (II) 线性等价，于是也能被 (II) 线性表示。

3

不妨设方程组的基础解系为

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n-r}\quad(I)$$

满足题设条件的向量组为

$$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n-r}\quad(II)$$

- 方法一

  利用 §1 命题 1.4（替换定理）

  假设 (II) 不是基础解系，那么存在解向量 β 无法被 (II) 线性表示，由命题 3.2 的逆否命题可知，向量组

  $$(III) := (II), \beta$$

  是线性无关的，于是秩为 $n-r+1$。

  因为 (I) 是基础解系，于是 (I) 可以线性表示所有解，于是可以线性表示 (III)，又因为 (III) 线性无关，由 §1 命题 1.4 的逆否命题可知

  $$n-r \geq n-r+1$$

  存在矛盾，假设不成立，命题得证。

- 方法二

  利用习题 2，我们只需证明：$(I),(II)$ 线性等价即可。

  考虑 $(III) := (I) \cup (II)$ 的秩。由 §2 习题 9 可知

  $$n-r \leq rank((III)) \leq 2(n-r)$$

  因为 (II) 中都是解向量，于是都能被 (I) 线性表示，所以

  $$rank((III)) \leq n-r$$

  综上

  $$rank((III)) = n-r$$

  由 §1 习题 14 可知，$(I),(II)$ 都是 (III) 的极大线性无关部分组，所以 $(I),(II)$ 线性等价。

4