5.1

张志聪

2025 年 9 月 23 日

9

提示：反证法可能更方便。考虑 $Ax = 0$ 解的情况。

把 A 看做 K 上 n 维线性空间 V 内双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵。

- 必要性

  反证法，假设存在 $\alpha \neq 0$，对一切 $\beta \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$。不妨设 α, β 在 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 的基下的坐标为 X, Y，且 $Y \neq 0$，使得

  $$f(\alpha, \beta) = X^T AY = 0$$

  因为 $f(\alpha, \beta)$ 满秩，即 A 是满秩的，于是 $Ax = 0$ 没有非零解，所以 $AY \neq 0$，所以 $\alpha = 0$，存在矛盾。

- 充分性

  反证法，假设 $f(\alpha, \beta)$ 不满秩，即 A 不满秩，于是 A 的行向量组是线性相关的，即存在 $X^T \neq 0$ 使得

  $$X^T A = 0$$

  此时 $\forall Y \in \mathbb{K}^n$ 有

  $$X^T AY = 0$$

  与题设矛盾。

10

利用习题 9 完成证明。

证明：对任意 $B \in M_n(K)$ 都有

$$f(A,B) = Tr(AB) = 0$$

则必有 $A = 0$。

设 $B = E_{ij}(1 \leq i,j \leq n)$，$A = (a_{ij})$ 于是

$$f(A,B) = Tr(AE_{ij})$$

其中 AE_{ij} 的第 j 列 = 矩阵 A 的第 i 列，其余列全是 0。于是在主对角线上，只有 AE_{ij} 的 j 行，j 列可能有值，即

$$Tr(AE_{ij}) = a_{ji}$$

因为

$$Tr(AE_{ij}) = 0$$

所以 $a_{ji} = 0$。

综上，$A = 0$。

13

我们可以通过初等矩阵，把对角线上的元素进行调整。

任意 $1 \leq i,j \leq n$，希望互换对角线上第 i 个元素和第 j 个元素。设

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}(P_n(i,j))^T A P_n(i,j) &= P_n(i,j) A P_n(i,j) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_j & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_i & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

即交换了 i, j 行和 i, j 列。所以，存在 T 使得

$$B = T^T A T$$

所以，A, B 合同。

14

(1)

- 必要性

  因为 A 是反对称矩阵，所以

  $$A^T = -A$$

  于是，对任意 n 维列向量 x，有

  $$\begin{aligned}(x^T A x)^T &= x^T A^T x \\ &= x^T(-A)x \\ &= -x^T A x\end{aligned}$$

因为 x^TAx 是标量，所以

$$
\begin{aligned}
(x^TAx)^T &= x^TAx \\
-x^TAx &= x^TAx \\
2x^TAx &= 0 \\
x^TAx &= 0
\end{aligned}
$$

- 充分性

  对 n 维列向量 $x+y$，我们有

$$
\begin{aligned}
(x+y)^TA(x+y) &= (x^T+y^T)A(x+y) \\
&= (x^TA+y^TA)(x+y) \\
&= x^TAx + x^TAy + y^TAx + y^TAy \\
&= 0 + x^TAy + y^TAx + 0 \\
&= x^TAy + y^TAx
\end{aligned}
$$

  令列项量 $x = e_i$（第 i 个分量为 1，其他分量为 0），$y = e_j$，设 $A = (a_{ij})$，于是

$$
\begin{aligned}
e_i^TAe_j + e_j^TAe_i &= 0 \\
a_{ij} + a_{ji} &= 0 \\
a_{ij} &= -a_{ji}
\end{aligned}
$$

  所以，A 是反对称矩阵。

(2)

利用 (1) 可知，A 是反对称矩阵，另外由题设可知 A 是对称矩阵，所以，$A = 0$。

17

对 V 的维数进行归纳。

$n = 1$ 时，$f(\alpha, \beta)$ 在任意基下都是 0，命题成立。

归纳假设 $< n$ 时，命题成立。

$f(\alpha,\beta)\equiv 0$，命题显然成立；$f(\alpha,\beta)\not\equiv 0$，于是存在 $d=f(\epsilon_1,\epsilon_2)\neq 0$，其中 $\epsilon_1,\epsilon_2\neq 0$（按照双线性函数的定义总有 $f(\epsilon_1,0)=0,f(0,\epsilon_2)=0$）。

于是，把 ϵ_1,ϵ_2，扩充成 V 的一组基

$$\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\cdots,\epsilon_n$$

于是，$f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ -1 & 0 & * \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

即只能确定左上角的 2×2 部分，和主对角线是 0。

接下来，通过调整基，把前两行和前两列相关元素置为 0。令

$$\begin{cases} \eta_1=\frac{1}{d}\epsilon_1 \\ \eta_2=\epsilon_2 \\ \eta_i=\epsilon_i-f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2)\epsilon_i \end{cases}$$

显然，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一组基，且

$$\begin{aligned} f(\eta_1,\eta_i) &= f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i-f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2)\epsilon_i) \\ &= f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i)-f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_2)f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i) \\ &= f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i)-1f(\frac{1}{d}\epsilon_1,\epsilon_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过换基，此时的矩阵形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

注意：由于 f 是反对称双线性函数，在任意基下的矩阵都是对称矩阵。

再次换基，把第二行和第二列相关元素置为 0。令

$$\begin{cases} \eta_1' = \eta_1 \\ \eta_2' = \eta_2 \\ \eta_i' = \eta_i + f(\eta_2, \eta_1)\eta_i \end{cases}$$

显然，$\eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_n'$ 是 V 的一组基，且

$$\begin{aligned} f(\eta_1', \eta_i') &= f(\eta_1, \eta_i + f(\eta_2, \eta_1)\eta_i) \\ &= f(\eta_1, \eta_i) + f(\eta_2, \eta_1)f(\eta_1, \eta_i) \\ &= f(\eta_1, \eta_i) - 1 \cdot f(\eta_1, \eta_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过换基，此时的矩阵形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

由归纳假设可知，右下角部分可以化为准对角形。

归纳完成。