

2.3

张志聪

2025 年 7 月 10 日

1

只做第一题，练练手。

先做矩阵消元法

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{处理第一列}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{处理第二列}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 2$ ，故基础解系中应包含 $n - r = 5 - 2 = 3$ 个向量。写出阶梯型矩阵的对应方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ -x_2 = 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5 为自由未知量。

- (i) 取 $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ ，得一个解向量

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$$

- (ii) 取 $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ ，得一个解向量

$$\eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$$

- (iii) 取 $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, 得一个解向量

$$\eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)$$

于是 η_1, η_2, η_3 为方程组的一个基础解系。方程组的全部解可表为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$$

其中 k_1, k_2, k_3 为数域 K 内任意数。

2

设 (I) 是基础解系, (II) 是与 (I) 线性等价的任意向量组。

按照基础解系的定理, 我们要验证三点:

- (1) (II) 中的向量都是解向量。

任意 $\beta \in (II)$ 都可以被 (I) 线性表示, 因为 (I) 中都是解向量, 他们的线性表示 β , 也是解向量。

- (2) (II) 线性无关。

题设保证的。

- (3) 解向量都可以被 (II) 线性表示。

因为任意解向量都可以被 (I) 线性表示, (I) 和 (II) 线性等价, 于是也能被 (II) 线性表示。

3

不妨设方程组的基础解系为

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r} \quad (I)$$

满足题设条件的向量组为

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-r} \quad (II)$$

- 方法一

利用 §1 命题 1.4 (替换定理)

假设 (II) 不是基础解系, 那么存在解向量 β 无法被 (II) 线性表示, 由命题 3.2 的逆否命题可知, 向量组

$$(III) := (II), \beta$$

是线性无关的, 于是秩为 $n - r + 1$ 。

因为 (I) 是基础解系, 于是 (I) 可以线性表示所有解, 于是可以线性表示 (III) , 又因为 (III) 线性无关, 由 §1 命题 1.4 的逆否命题可知

$$n - r \geq n - r + 1$$

存在矛盾, 假设不成立, 命题得证。

- 方法二

利用习题 2, 我们只需证明: $(I), (II)$ 线性等价即可。

考虑 $(III) := (I) \cup (II)$ 的秩。由 §2 习题 9 可知

$$n - r \leq \text{rank}((III)) \leq 2(n - r)$$

因为 (II) 中都是解向量, 于是都能被 (I) 线性表示, 所以

$$\text{rank}((III)) \leq n - r$$

综上

$$\text{rank}((III)) = n - r$$

由 §1 习题 14 可知, $(I), (II)$ 都是 (III) 的极大线性无关部分组, 所以 $(I), (II)$ 线性等价。

4

反证法, 假设 β 不可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示。

齐次线性方程组对应的矩阵设为

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

把方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

添加到齐次线性方程组，得到新的矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \\ \beta \end{bmatrix}$$

不妨设 $\text{rank}(A) = r$ ，那么，我们有

$$\text{rank}(B) = r + 1$$

设 A, B 的基础解系分别为 $(I), (II)$ ，由定理 3.1 可知，基础解系的秩为

$$\text{rank}((I)) = n - r$$

$$\text{rank}((II)) = n - r - 1$$

由题设中对解的描述可知， (II) 可以线性表示 (I) ，且 (I) 是线性无关的，于是，利用命题 1.4 可知

$$n - r - 1 \geq n - r$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

5

设两个齐次线性方程组对应的矩阵分别为为

$$A$$

$$B$$

把两个齐次线性方程组合并，我们得到新的矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

由 §2 习题 9（更准确的说是行向量版本）可知

$$\max(\text{rank}(A), \text{rank}(B)) \leq \text{rank}(C) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

因为 $\text{rank}(A), \text{rank}(B)$ 都小于 $n/2$ ，我们有

$$0 \leq \text{rank}(C) < n$$

如果 $\text{rank}(C)$ 等于 0，说明矩阵 A, B 都是零矩阵，此时任意 x_1, x_2, \dots, x_n 都是 A, B 对应的齐次线性方程组的解，命题成立。

$\text{rank}(C) < n$ 时，由定理 3.1 可知， C 存在一个秩为 $n - \text{rank}(C) > 0$ 的基础解系 (I) ，因为 (I) 是非空的， (I) 中的任意向量都是 A, B 的解向量，命题得证。

综上，命题得证。

6

• 方法一

对系数 $n \times n$ 矩阵进行初等变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换前两列}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{先利用 } R_1 \text{ 进行行变换，再利用 } C_1 \text{ 进行列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有无非零解，就是判断 A 的秩的情况。此时，主对角线上都是非零的，且矩阵的右上角都是 0，观察行向量可得都是线性无关的，所以矩阵 $\text{rank}(A) = n$ ，于是可得 A 没有非零解。

- 方法二

使用 2-3-comment.tex 中的结论，直接可得秩为 n 。

7

不妨设齐次线性方程组 A 的秩为 r ，那么设它的任意基础解系为

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r} \quad (I)$$

设满足题设要求的线性无关解向量组为

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s \quad (II)$$

如果 $s = n - r$ ，由习题 3 可知， (II) 就是基础解系。

如果 $s < n - r$ ，于是由基础解系的定义可知 (I) 可以线性表示 (II) ，又因为 (II) 是线性无关的，由替换定理的结论 (2)(3) 可得，可以用 (II) 替换掉 (I) 中的部分向量，得到一个与 (I) 线性等价且线性无关的基础解系。

综上，命题得证。

8

略

9

如果是齐次线性方程组，由解的性质可知，命题是显然成立的。

我们主要考虑非齐次线性方程组，不妨设为 A 。

我们有

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_1 + (\eta_1 - \eta_1) \\ \eta_2 &= \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1) \\ \eta_3 &= \eta_1 + (\eta_3 - \eta_1) \\ &\vdots \\ \eta_t &= \eta_1 + (\eta_t - \eta_1)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t &= (k_1 + k_2 + \cdots + k_t)\eta_1 + [k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)] \\ &= \eta_1 + [k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)]\end{aligned}$$

因为

$$[k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)]$$

是 A 导出方程组的解。所以

$$\eta_1 + [k_1(\eta_1 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1) + \cdots + k_t(\eta_t - \eta_1)]$$

是 A 的解。

10

设 n 个平面合并成一个方程组 A （注意，不一定是齐次的）。

通过一个点，即方程组只有一个解，满足以下条件即可

$$\text{rank}(A) = n = \text{rank}(\overline{A})$$

其中 \overline{A} 是增广矩阵。

通过同一直线，即方程组的基础解系的秩为 1，满足以下条件即可

$$\text{rank}(A) = n - 1 = \text{rank}(\overline{A})$$

11

不妨设 $\text{rank}(A) = r$, 可设

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} \quad (I)$$

是 A 列向量组的极大无关部分组。

(I) 中每个向量加上一个分量 $b_j (1 \leq j \leq n)$, 得到新的向量组

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r} \quad (II)$$

依然是线性无关的。

由题设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 可知, (II) 是 B 列向量的极大线性无关部分组, 于是 (II) 可以线性表示最后一列, 从而线性方程组有解。

12

设该方程组的系数矩阵为 A , 增广矩阵为 \bar{A} ,

$$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

先对 A 进行行变换, 把 n 行放到第 1 行, 第 $n-1$ 行放到第二行, 以此类推, 于是由 2-3-comment.tex 中的结论可知:

$a = b = 0$ 时 $\text{rank}(A) = 0$, 由定理 3.2 (判别定理) 可知, 只有当 $\text{rank}(A) = 0 = \text{rank}(\bar{A})$ 时, 方程组才有解。即 β 是零向量才有解。且 K^n 中的任意向量都是它的解。

$a = b = 0$ 时 $\text{rank}(A) = 1$, 由定理 3.2 (判别定理) 可知, 只有当 $\text{rank}(A) = 1 = \text{rank}(\bar{A})$ 时, 所有的方程都是一样的, 此时只有当 β 中所有分量都相同时, 方程组才有解, 基础解系的秩为 $n-1$ 。

$(n-1)a + b \neq 0$, 此时 $\text{rank}(A) = n$, 因为增广矩阵的行只有 n 行, 可得 $\text{rank}(\bar{A}) = n$, 此时, 有唯一解且对 β 没有要求。

$(n-1)a + b = 0$, 对增广矩阵做行变换: 所有的行都加入第一行, 得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0, & \sum_i^n b_i \\ a & b & \cdots & a, & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & b & b_1 \end{bmatrix}$$

已知除去第 n 行，矩阵的秩为 $n-1$ ，要想线性方程有解，那么要保证其秩为 $n-1$ ，于是需要保证 $\sum_i^n b_i = 0$ 。

综上，

$$\begin{cases} \text{任意解} & a = b = 0, b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0 \\ \text{基础解系秩为 } n-1 & a = b \neq 0, b_1 = b_2 = \cdots = b_n \\ \text{基础解系秩为 } 1 & a = b = 0, \sum_i^n b_i = 0 \\ \text{唯一解} & (n-1)a + b \neq 0 \end{cases}$$

13

由定理 3.3 可知，任一解 γ 可以表示成

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_s\eta_s$$

令 $k_0 = 1 - (k_1 + \cdots + k_s)$ ，于是我们有

$$\begin{aligned} \gamma &= (k_0 + k_1 + \cdots + k_s)\gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_s\eta_s \\ &= k_0\gamma_0 + k_1(\gamma_0 + \eta_1) + \cdots + k_s(\gamma_0 + \eta_s) \\ &= k_0\gamma_0 + k_1\gamma_1 + \cdots + k_s\gamma_s \end{aligned}$$

14

不妨设任意非齐次线性方程组的系数矩阵和增广矩阵为 A, \bar{A} ，因为系数矩阵与增广矩阵的秩相等，由定义 3.2（判别定理）可知方程组有解。

如果 $\text{rank}(A) = n$ ，由定理 3.3 可知，方程组有唯一解。因为 $n - n + 1 = 1$ ，命题成立。

如果 $\text{rank}(A) < n$ ，由定理 3.3 可知，方程组的解可有某一特殊解 γ_0 和它的导出方程组的一个基础解系表示。不妨设导出方程组的基础解系为

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$$

于是方程组的解可以表示成

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

我们令

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \gamma_0 \\ \gamma_1 &= \gamma_0 + \eta_1 \\ \gamma_2 &= \gamma_0 + \eta_2 \\ &\vdots \\ \gamma_{n-r} &= \gamma_0 + \eta_{n-r}\end{aligned}$$

这就是满足题设要求的线性无关解向量组，设为 (I) 。

我们还需证明该向量组是线性无关的。考虑向量组

$$\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r} \quad (II)$$

(II) 是线性无关的，因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是线性无关，且 γ_0 是无法被 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表示，否则 γ_0 将是导出方程组的解。

易得 $(I), (II)$ 是线性等价的，进而 (I) 是线性无关的。

15

- (1)

三点不共线，则向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \\ \overrightarrow{AC} &= (c_1 - a_1, c_2 - a_2)\end{aligned}$$

线性无关。

对矩阵做初等行列变换

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ 0 & c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

充分性:

即 $\text{rank}(A) = 3$, 由于初等变换不改变秩, 于是可得

$$(0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(0, c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

线性无关, 进而可得

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

线性无关, 所以三点不共线。

必要性:

由三点不共线, 可知

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

线性无关, 从而

$$(0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(0, c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

线性无关。

显然, 向量

$$(1, 0, 0)$$

不能被

$$(0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(0, c_1 - a_1, c_2 - a_2)$$

于是可得, 秩为 3。

- (2)

三点不共线，唯一确定一个圆。这是几何结论。

两条中轴线（以 AB, BC 为例）相交的点，就是圆心。

$$\begin{cases} 2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y + (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) = 0 \\ 2(c_1 - b_1)x + 2(c_2 - b_2)y + (b_1^2 + b_2^2 - c_1^2 - c_2^2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

以上方程一定有唯一的实数解，设为 (x_0, y_0) 。

接下来，我们需要证明 (x_0, y_0) 是有理数坐标。

对于方程组 (1) 的系数矩阵，因为元素都是有理数，我们可以利用初等变换（有理数域内的初等变换）化作标准型，由 2-3-comment.tex 注释 2 中的讨论可知，有理数域扩大到实数域，秩是不会改变的，由实数域有唯一解可知，秩为 2，所以在有理数域也有唯一解，因为有理数域是实数域的子集，从而可知，这个唯一解是有理数解，否则实数域中就有两个解了，存在矛盾。

综上， (x_0, y_0) 是有理数坐标。

16

因为是实数域上的齐次线性方程组，由 2-3-comment.tex 注释 2 中的讨论可知，秩的情况在实数域还是复数域上是相同的，题设中齐次线性方程组有非零解，即实数域中有非零解。不妨设

$$(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

是一个实数域中的非零解向量。

于是我们有以下方程组

$$\begin{cases} \lambda c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + \lambda c_2 + \dots + a_{2n}c_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + \lambda c_n = 0 \end{cases}$$

对 i 个方程，乘以 c_i ，于是，我们有

$$\begin{cases} \lambda c_1^2 + a_{12}c_1c_2 + \cdots + a_{1n}c_1c_n = 0 \\ a_{21}c_1c_2 + \lambda c_2^2 + \cdots + a_{2n}c_2c_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}c_1c_n + a_{n2}c_2c_n + \cdots + \lambda c_n^2 = 0 \end{cases}$$

所有方程相加，由于 $a_{ij} = -a_{ji}$ ，我们有

$$\lambda c_1^2 + \lambda c_2^2 + \cdots + \lambda c_n^2 = 0$$

$$\lambda(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) = 0$$

$$\lambda = 0$$