# 2.4

张志聪

2025 年 7 月 15 日

## 8

设

$$A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]$$

由题设可知

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

是线性无关的。

设 $D = AB = AC$，那么对任意列向量 $col_j(D)(1 \leq j \leq s)$，我们有

$$col_j(D) = Acol_j(B) = Acol_j(C)$$

即 $col_j(D)$ 可以被 $(I)$ 线性表示:

$$col_j(D) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

由于 $(I)$ 是线性无关的,利用命题 3.1 可知,表示法是唯一的,即 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是唯一的。于是可得 $col_j(B) = col_j(C)$，所以 $B = C$。

## 9

(1) $k$ 的值；

需要保证 $rank(A) = 2$，有两种方法确定这一点:

- (1) 利用习题 7

  因为 $B$ 不是零矩阵，所以 $rank(B) \geq 1$，利用习题 7 可得

  $$rank(A) \leq 3 - 1 = 2$$

  又 $A$ 第二列与第三列已经线性无关了，所以第一列一定要能被其他列线性表示，否者 $rank(A) = 3$，会导致矛盾。

- (2) 矩阵乘法的整体理解。

  设 $C = AB$，于是如果写 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，那么对 $col_j(C)$，有

  $$\begin{aligned} col_j(C) = 0 = A \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} \\ &= b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + b_{3j}\alpha_3 \end{aligned}$$

  如果 $rank(A) = 3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，那么

  $$\begin{bmatrix} b_1 j \\ b_2 j \\ b_3 j \end{bmatrix} = 0$$

  这与题设中 $B \neq 0$ 矛盾。

于是可得 $k = \frac{1}{3}$。
(2) $B$ 的值。
写

$$B = [b_1 b_2 b_3]$$

所以

$$Ab_1 = 0$$

$$Ab_2 = 0$$

$$Ab_3 = 0$$

对于线性方程组 $AX=0$，由于 $rank(A)=2$，所以方程组的基础解系存在，且基础解系中向量个数为 $3-2=1$，此时已经确定了 $B$ 的存在性，接下来，就是计算 $AX$ 的基础解系，这个步骤略。

# 10

由命题 4.4 可知

$$rank(A+B) \le rank(A) + rank(B) < n$$

记

$$C = [c_1\, c_2\, c_3\, \cdots\, c_n]$$

所以

$$(A+B)C = 0$$

可以表示成

$$\begin{aligned}(A+B)c_1 &= 0\\ (A+B)c_2 &= 0\\ &\vdots\\ (A+B)c_n &= 0\end{aligned}$$

问题转变成线性方程组 $(A+B)X=0$ 是否有解，因为 $rank(A+B)<n$，于是方程组的基础解系存在，所以，可以通过基础解系中向量的线性组合构成 $C$，使得 $(A+B)C=0$。

# 11

因为存在非零的 $C$ 使得 $AC=0$ 可得 $rank(A)<n$，否则 $C$ 只能是零矩阵。于是可得 $rank(AB) \le min\{rank(A), rank(B)\} < n$。

接下来的证明与习题 10 类似，这里不做赘述。

## 12

设 $D = AB$，考虑矩阵的齐次线性方程组：

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ Bx &= 0 \\ Cx &= 0 \\ Dx = ABx = BAx &= 0 \end{aligned}$$

于是，他们的基础解系的秩，可以分别设为

$$\begin{aligned} s &= n - rank(A) \\ t &= n - rank(B) \\ u &= n - rank(C) \\ v &= n - rank(AB) \end{aligned}$$

且由基础解系构成的解集，分别设为：

$$S_A$$
$$S_B$$
$$S_C$$
$$S_D$$

因为 $Cx = 0$，是 $Ax = 0, Bx = 0$ 的联立方程组，于是有

$$S_C = S_A \cap S_B$$

因为

$$Dx = A(Bx) = B(Ax) = 0$$

所以 $S_A \subseteq S_D, S_B \subseteq S_D$，于是有

$$(S_A \cup S_B) \subseteq S_D$$

对于 $Cx = 0$ 的基础解系 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$，由 $S_C = S_A \cap S_B$，可知 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$ 都是 $Ax = 0, Bx = 0$ 的解。

由 §3 习题 7 可知，可以在 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$ 基础上扩充成 $Ax=0, Bx=0$ 的基础解系：

$$\alpha_{u+1}, \cdots, \alpha_s, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$$
$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u, \beta_{u+1}, \cdots, \beta_t$$

现在，我们证明

$$\alpha_{u+1}, \cdots, \alpha_s, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u, \beta_{u+1}, \cdots, \beta_t \quad (I)$$

是线性无关的。

$$a_{u+1}\alpha_{u+1} + \cdots + a_s\alpha_s + b_1\gamma_1 + \cdots + b_u\gamma_u + c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t = 0$$
$$a_{u+1}\alpha_{u+1} + \cdots + a_s\alpha_s + b_1\gamma_1 + \cdots + b_u\gamma_u = -(c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t)$$

又我们有

$$\begin{aligned} a_{u+1}\alpha_{u+1} + \cdots + a_s\alpha_s + b_1\gamma_1 + \cdots + b_u\gamma_u &\in S_A \\ -(c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t) &\in S_B \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_{u+1}\alpha_{u+1} + \cdots + a_s\alpha_s + b_1\gamma_1 + \cdots + b_u\gamma_u &\in S_C \\ -(c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t) &\in S_C \end{aligned}$$

于是存在

$$c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t = d_1\gamma_1 + \cdots + d_u\gamma_u$$

所以

$$-(c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t) + d_1\gamma_1 + \cdots + d_u\gamma_u = 0$$

由于这里使用的向量都是 $Bx=0$ 基础解系中的向量，于是可得

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_u = 0$$
$$c_{u+1} = c_{u+2} = \cdots = c_t = 0$$

于是我们有

$$\begin{aligned} a_{u+1}\alpha_{u+1} + \cdots + a_s\alpha_s + b_1\gamma_1 + \cdots + b_u\gamma_u &= -(c_{u+1}\beta_{u+1} + \cdots + c_t\beta_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这个左侧都是 $Ax = 0$ 的基础解系中的向量，所以有

$$
\begin{aligned}
a_{u+1} = \cdots = a_s = 0 \\
b_1 = \cdots = b_u = 0
\end{aligned}
$$

综上可得，$(I)$ 是线性无关的。

由于 $(S_A \cup S_B) \subseteq S_D$，所以 $(I)$ 可以被 $Dx = 0$ 的基础解系表示，利用替换定理，我们有

$$
\begin{aligned}
v \geq s + t - u \\
n - rank(AB) \geq n - rank(A) + n - rank(B) - n + rank(C) \\
rank(A) + rank(B) \geq rank(C) + rank(AB)
\end{aligned}
$$

## 13

记

$$
A = \begin{bmatrix} \eta_1^T \\ \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_s^T \end{bmatrix}
$$

考虑线性方程组 $Ax = 0$ 的解。因为 $rank(A) = s \neq n$，所以方程组的基础解系存在，且基础解系中向量个数为 $n - s$，不妨设

$$
\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-s}
$$

是方程组的一个基础解系。记

$$
B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-s} \end{bmatrix}
$$

于是，我们有

$$
AB = 0
$$

又

$$
(AB)^T = B^T A^T = 0
$$

这里

$$A^T = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_s \end{bmatrix}$$

因为 $rank(A^T) = s, rank(B^T) = n - s$，$A^T$ 中的 $s$ 个列向量都是线性无关的，且 $A^T$ 的任意列向量 $\eta$ 都有 $B^T\eta = 0$，于是由基础解系的定义可知 $A^T$ 的列向量组是 $B^T$ 对应的齐次线性方程的基础解系。

# 14

设

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_s \quad (I)$$

令

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \gamma_1 - \gamma_0 \\ \eta_2 &= \gamma_2 - \gamma_0 \\ &\vdots \\ \eta_s &= \gamma_s - \gamma_0 \end{aligned}$$

易得向量组

$$\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s \quad (II)$$

与 $(I)$ 是线性等价的。由 $(I)$ 是线性无关的，可得 $(II)$ 是线性无关的，于是可得

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s \quad (III)$$

是线性无关的。

利用习题 13 可得，存在一个 $K$ 上一个齐次线性方程组以 $(III)$ 为基础解系。设该齐次线性方程组的系数矩阵为 $B$，并令

$$\beta = B\gamma_0$$

先证明 $\beta \neq 0$，如果 $B\gamma_0 = 0$，那么 $\gamma_0$ 应该可以被 $Bx = 0$ 的基础解系 $(III)$ 表示，这与 $(II)$ 是线性无关向量组矛盾。到此，得到非齐次线性方程

组

$$Bx = \beta$$

接下来，证明该非齐次线性方程组满足题设要求。通过构造过程，我们知道 $\gamma_0$ 是一个特解，$(III)$ 是其基础解系。并且对任意 $1 \le j \le s$，我们有

$$\begin{aligned} B\eta_j &= 0 \\ &= B(\gamma_j - \gamma_0) \\ &= B\gamma_j - B\gamma_0 \\ &= B\gamma_j - \beta \\ \Longrightarrow \\ B\gamma_j &= \beta \end{aligned}$$

可得 $\gamma_j$ 是非齐次线性方程组的解，所以这个非齐次线性方程组满足了题设条件 (1)；

非齐次线性方程组的解都可以表示成

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$$

$(I)(II)$ 线性等价，于是可得题设条件 (2) 成立。

## 15

(1)

由基础解系与秩的关系，我们有

$$\begin{aligned} rank(B) &= s - k \\ rank(AB) &= s - l \end{aligned}$$

于是可得

$$rank(B) - rank(AB) = l - k$$

于是问题等价于证明 $B\eta_{k+1}, \cdots, B\eta_l$ 是线性无关的。

设 $a_{k+1}, \cdots, a_l \in K$ 使得

$$\begin{aligned} a_{k+1}B\eta_{k+1} + \cdots + a_lB\eta_l &= 0 \\ B(a_{k+1}\eta_{k+1} + \cdots + a_l\eta_l) &= 0 \end{aligned}$$

于是可得 $a_{k+1}\eta_{k+1}+\cdots+a_l\eta_l$ 是 $BX$ 的一个解，所以可以被 $\eta_1,\cdots,\eta_k$ 线性表示，系数不妨设为 $a_1,\cdots,a_k$，即

$$a_{k+1}\eta_{k+1}+\cdots+a_l\eta_l = a_1\eta_1+\cdots+a_k\eta_k$$
$$a_1\eta_1+\cdots+a_k\eta_k+a_{k+1}\eta_{k+1}+\cdots+a_l\eta_l = 0$$

因为 $\eta_1,\cdots,\eta_k,\eta_{k+1},\cdots,\eta_l$ 是线性无关的，于是可得

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} = \cdots = a_l = 0$$

从而

$$a_{k+1}B\eta_{k+1}+\cdots+a_lB\eta_l = 0$$

只有零解，所以 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$ 是线性无关的。

(2) 证明命题 4.6

我们有

$$(AB)X = A(BX) = 0$$

因为 $\eta_{k+1},\cdots,\eta_l$ 是 $(AB)X=0$ 的解，所以 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$ 是 $A(BX)=0$ 的解。

设 $(I)$ 是 $A(BX)=0$ 的一个基础解系，秩为 $n-rank(A)$，于是可得 $(I)$ 可以线性表示 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$，又因为 $B\eta_{k+1},\cdots,B\eta_l$ 是线性无关的，所以

$$n-rank(A) \geq l-k = rank(B)-rank(AB)$$
$$\Longrightarrow$$
$$rank(AB) \geq rank(A)+rank(B)-n$$

## 16

先考虑 $C$ 的秩。我们有

$$rank(A)+rank(B)-n \leq rank(C) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$$
$$rank(B) \leq rank(C) \leq rank(B)$$
$$r \leq rank(C) \leq r$$
$$rank(C) = r$$

设

$$
\begin{aligned}
c_{i_1} &= B\beta_{i_1} \\
c_{i_2} &= B\beta_{i_2} \\
&\vdots \\
c_{i_r} &= B\beta_{i_r}
\end{aligned}
$$

验证

$$
c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_r} \quad (I)
$$

是否为 $C$ 的极大线性无关部分组。

我们只需证明 $(I)$ 的极大性，即 $C$ 中的任意列向量都可以被 $(I)$ 线性表示，就可以证明 $(I)$ 是 $C$ 的极大线性无关部分组（§2 习题 15）。

$C$ 任意列向量 $c_j(1 \le j \le s)$ 为

$$
c_j = A\beta_j
$$

由于 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 是 $B$ 的极大线性无关部分组，所以 $\beta_j$ 可以被其线性表示：

$$
\beta_j = k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \cdots + k_r\beta_{i_r}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
c_j &= A(k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \cdots + k_r\beta_{i_r}) \\
&= k_1A\beta_{i_1} + k_2A\beta_{i_2} + \cdots + k_rA\beta_{i_r} \\
&= k_1c_{i_1} + k_2c_{i_2} + \cdots + k_rc_{i_r}
\end{aligned}
$$

所以，$c_j$ 可以被 $(I)$ 线性表示，极大性得证。