2.2

张志聪

2025 年 7 月 2 日

1-3

略

4

纠错：n 阶方程，改为 $n \times n$ 矩阵。
矩阵元素一共有 n^2 个，所以非零元素个数为

$$n^2 - (n^2 - n + 1) = n - 1$$

于是可得，$rank(A) \leq n - 1 < n$，并且 $rank(A)$ 的最大值为 $n - 1$。

5

- (1)

  等价关系，需要满足如下条件：

  - (i) 反身性：对任意 $m \times n$ 矩阵 A，有 $A \sim A$。
    这显然是成立的。
  - (ii) 对称性：对任意 $m \times n$ 矩阵 A, B，若 $A \sim B$，则 $B \sim A$。
    由于矩阵的初等行（列）变换都是可逆的，所以命题成立。
  - (iii) 传递性：对任意 $m \times n$ 矩阵 A, B, C，若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$，则 $A \sim C$。

这也是显然的，矩阵 A 先初等变换到矩阵 B，再从矩阵 B 初等变换到矩阵 C。

故是等价关系。

- (2)

  等价关系的证明与 (1) 相同。我们证明后半部。

  因为 $rank(A) = m$，可得 $n \geq m$（否则与列秩和行秩相等矛盾）。

  在矩阵中可以找到 m 个线性无关的列向量（例 2.3 已经告诉我们如何找了），然后进行初等列变换，把这 m 个列向量移动到矩阵的左侧（此时，左侧形成一个 $m \times m$ 线性无关的子矩阵，设为 A'。）

  依次对主对角线上的元素进行如下处理：

  步骤 1：
  如果元素 a_{ii} $(1 \leq i \leq m)$ 不等于 0，则该列乘以 $\frac{1}{a_{ii}}$，使该元素等于 1。如果元素 a_{ii} 等于 0，则从该行中选一个不为零的列，移动到 i 列，（因为左侧的小矩阵 A' 的秩是 m，所以行向量不可能存在零行）然后乘以对应的倒数，使的 a_{ii} 等于 1。

  步骤 2：
  该行的其他元素，整列加上 i 列相应的倍数，化为 0。

  步骤 3：
  对 $ai + 1, i + 1$ 进行相同的操作。

  进行 m 次迭代，直到 m 行，此时矩阵 A' 变成主对角线上的元素都是 1，其他元素都是 0。对大于 m 的列，借助矩阵 A' 可以化为全零的列。

- (3)

  与 (2) 类似，不做赘述。

6

因为 F 中不为零的行向量组（设为 (I)）是线性无关，且零向量，也可以被 (I) 向量组表示，所以 (I) 是 F 行向量组的极大线性无关部分组，于是 $rank(F) =$ 不为零的行数，而矩阵初等行变换是改变矩阵的秩，所以 $rank(A) = rank(F)$。

7

交换 i 列与 j 列，矩阵变成主对角线元素是 1，其他元素为 0 的矩阵（也叫单位矩阵）。易得秩为 n。

8

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{第 n 列移到最前面}}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{R_n - R_1}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{R_n + R_2}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{R_n - R_3}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

观察初等行变换对最后一行的影响:
第 0 次：$a_{n0}=1$；
第 1 次：$a_{n1}=-1$；
第 2 次：$a_{n2}=1$；
因为接下来的操作一致，我们可得在偶数次 j 变化时 $a_{nj}=1$，奇数次 j 变化 $a_{nj}=-1$。

于是 $n-1$ 是偶数时，经过 $n-1$ 次变化，$a_{n,n-1}=1$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_n-R_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得秩为 $n-1$。

$n-1$ 是奇数时，$n-1$ 次变化后，$a_{n,n-1}=-1$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_n+R_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

可得秩为 n。

综上，矩阵秩的情况如下：

$$\begin{cases} n & \text{n 是偶数} \\ n-1 & \text{n 是奇数} \end{cases}$$

9

这道题主要利用了以下命题：

向量组 B 可以线性表示向量组 A，那么 B 的秩大于 A 的秩。

（可以通过命题 1.4 的逆否命题证明）

证明：

以列向量的角度考虑，矩阵 A 的列向量组的任意极大线性无关部分组设为 (I)，矩阵 B 的列向量组的任意极大线性无关部分组设为 (II)。

可得 $(I) \cup (II)$ 和可以线性表示矩阵 A 和矩阵 B 的列向量组，且 $(I) \cup (II)$ 是矩阵 C 的列向量组的部分组，于是我们有

$$max(rank(A), rank(B)) \leq rank(C)$$

因为 C 中的任意列向量，一定可以被 $(I) \cup (II)$ 表示，而 $(I) \cup (II)$ 不一定是线性无关的，于是我们有

$$rank(C) \leq rank(A) + rank(B)$$

10

利用习题 9。

设矩阵 $D = (AB)$，那么矩阵 D 的列向量的极大线性无关部分组 (I)，可以线性表示 C 的任意列向量。所以，我们有

$$rank(C) \leq rank(D)$$

由习题 9 可知

$$rank(D) \leq rank(A) + rank(B)$$

综上

$$rank(C) \leq rank(A) + rank(B)$$

11

由于初等行变换后，不改变原线性方程组的解，于是可得以 A 为系数举证的齐次线性方程组和以 B 为系数矩阵的齐次线性方程组同解，即如果

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \tag{1}$$

那么

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_n\beta_n = 0$$

12

我们有

$$rank(B) \leq rank(A) \leq m$$

所以

$$rank(B) - s \leq rank(A) - s \leq m - s$$

又因为

$$0 \leq rank(B) \leq s$$

于是

$$rank(A) - rank(B) \leq rank(A) - s \leq m - s$$

综上

$$rank(A) - rank(B) \leq m - s$$
$$rank(B) \geq rank(A) + s - m$$

13

设 A 的行向量为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

$rank(A) = 0$，说明 A 是零矩阵，那么，K 内的数

$$a_1, a_2, \cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$$

都为零即可。

$rank(A)=1$，那么对于 A 的行向量组来说，极大线性无关部分组 (I) 中只有一个向量，不妨设为 α_i，取

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \alpha_{i1} \\
b_2 &= \alpha_{i2} \\
&\vdots \\
b_n &= \alpha_{in}
\end{aligned}
$$

因为 A 中的任意行向量，都可以被 (I) 线性表示，即可以被 α_i 乘以某个常数 k 表示，可设

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_1\alpha_i \\
\alpha_2 &= k_2\alpha_i \\
&\vdots \\
\alpha_m &= k_m\alpha_i
\end{aligned}
$$

取

$$
\begin{aligned}
a_1 &= k_1 \\
a_2 &= k_2 \\
&\vdots \\
a_m &= k_m
\end{aligned}
$$