

1.1 习题

张志聪

2025 年 6 月 11 日

1

- (1)

是数域，证明略。

- (2)

是数域。

设 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ，于是

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3}i) + (c + d\sqrt{3}i) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3}) \\ (a + b\sqrt{3}i)(c + d\sqrt{3}i) &= (ac - 3bd) + (ac + bd)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

当 $c + d\sqrt{3}i \neq 0$ ，即 $c^2 + 3d^2 \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{a + b\sqrt{3}i}{c + d\sqrt{3}i} &= \frac{(a + b\sqrt{3}i)(c - d\sqrt{3}i)}{c^2 + 3d^2} \\ &= \frac{(ac - 3bd) + (-ad + bc)\sqrt{3}i}{c^2 + 3d^2} \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}(-\sqrt{3})$ 对复数的四则运算封闭，所以它是一个数域。

- (3)

不是数域。举一个反例。