2.4

张志聪

2025 年 7 月 14 日

8

设

$$A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]$$

由题设可知

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \quad (I)$$

是线性无关的。

设 $D = AB = AC$，那么对任意列向量 $col_j(D)(1 \leq j \leq s)$，我们有

$$col_j(D) = Acol_j(B) = Acol_j(C)$$

即 $col_j(D)$ 可以被 (I) 线性表示:

$$col_j(D) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

由于 (I) 是线性无关的,利用命题 3.1 可知,表示法是唯一的,即 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是唯一的。于是可得 $col_j(B) = col_j(C)$，所以 $B = C$。

9

(1) k 的值；

需要保证 $rank(A) = 2$，有两种方法确定这一点:

- (1) 利用习题 7

  因为 B 不是零矩阵，所以 $rank(B) \geq 1$，利用习题 7 可得

  $$rank(A) \leq 3 - 1 = 2$$

  又 A 第二列与第三列已经线性无关了，所以第一列一定要能被其他列线性表示，否者 $rank(A) = 3$，会导致矛盾。

- (2) 矩阵乘法的整体理解。

  设 $C = AB$，于是如果写 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，那么对 $col_j(C)$，有

  $$\begin{aligned} col_j(C) = 0 = A \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} \\ &= b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + b_{3j}\alpha_3 \end{aligned}$$

  如果 $rank(A) = 3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，那么

  $$\begin{bmatrix} b_1j \\ b_2j \\ b_3j \end{bmatrix} = 0$$

  这与题设中 $B \neq 0$ 矛盾。

于是可得 $k = \frac{1}{3}$。
(2) B 的值。
写

$$B = [b_1 b_2 b_3]$$

所以

$$Ab_1 = 0$$

$$Ab_2 = 0$$

$$Ab_3 = 0$$

对于线性方程组 $AX=0$，由于 $rank(A)=2$，所以方程组的基础解系存在，且基础解系中向量个数为 $3-2=1$，此时已经确定了 B 的存在性，接下来，就是计算 AX 的基础解系，这个步骤略。

10

由命题 4.4 可知

$$rank(A+B) \leq rank(A)+rank(B) < n$$

记

$$C=[c_1\,c_2\,c_3\,\cdots\,c_n]$$

所以

$$(A+B)C=0$$

可以表示成

$$\begin{aligned}(A+B)c_1&=0\\(A+B)c_2&=0\\&\vdots\\(A+B)c_n&=0\end{aligned}$$

问题转变成线性方程组 $(A+B)X=0$ 是否有解，因为 $rank(A+B)<n$，于是方程组的基础解系存在，所以，可以通过基础解系中向量的线性组合构成 C，使得 $(A+B)C=0$。

11

因为存在非零的 C 使得 $AC=0$ 可得 $rank(A)<n$，否则 C 只能是零矩阵。于是可得 $rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\} < n$。

接下来的证明与习题 10 类似，这里不做赘述。

12

13

记

$$A = \begin{bmatrix} \eta_1^T \\ \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_s^T \end{bmatrix}$$

考虑线性方程组 $Ax = 0$ 的解。因为 $rank(A) = s \neq n$，所以方程组的基础解系存在，且基础解系中向量个数为 $n - s$，不妨设

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-s}$$

是方程组的一个基础解系。记

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-s} \end{bmatrix}$$

于是，我们有

$$AB = 0$$

又

$$(AB)^T = B^T A^T = 0$$

这里

$$A^T = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_s \end{bmatrix}$$

因为 $rank(A^T) = s, rank(B^T) = n - s$，$A^T$ 中的 s 个列向量都是线性无关的，且 A^T 的任意列向量 η 都有 $B^T\eta = 0$，于是由基础解系的定义可知 A^T 的列向量组是 B^T 对应的齐次线性方程的基础解系。

14