

3.3 注释

张志聪

2025 年 8 月 17 日

注释 1. 命题 3.6 (命题 3.5 的加强):

设 A 是数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵, 则 $\text{rank}(A) \geq r$ 当且仅当 A 有一个 r 阶子式不为 0。

证明:

- 必要性。

因为 $\text{rank}(A) \geq r$, 那么对于 A 的列向量组, 存在一个极大线性无关部分组, 从中任选 r 个线性无关列向量, 得到一个 $m \times r$ 的矩阵 B , 矩阵的列秩与行秩相等, 于是 B 的行向量组有 r 个线性无关行向量, 以它们为行向量组成 $r \times r$ 的矩阵 \overline{B} , 因为 \overline{B} 满秩, 所以 $|\overline{B}| \neq 0$, 这就是要找的, 关于 A 的不为零的 r 阶子式。

- 充分性。

设 A 的列向量为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 并设 A 有 r 阶子式以 A 的第 i_1, i_2, \dots, i_r 行向量和第 j_1, j_2, \dots, j_r 列向量组成 $r \times r$ 矩阵 B , 且 $|B| \neq 0$, 所以 B 是满秩的, 于是, 我们有 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 是线性无关, 又 A 列向量组的极大线性无关部分组可以线性表示 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$, 由替换定理可知 $\text{rank}(A) \geq r$ 。

注释 2. 通过命题 3.6 可以证明命题 3.5