1.2 注释

张志聪

2025 年 7 月 22 日

注释 1. 文中：在数域 K 上的一元一次方程

$$ax = b(a, b \in K, a \neq 0)$$

因为 K 内可以做除法，立即得 $x = \frac{b}{a}$ 是它的唯一的一个根，证明这个根是唯一的。

证明：

设 $x_1, x_2 \in K$ 是方程的解，那么

$$\begin{cases} ax_1 = b \\ ax_2 = b \end{cases}$$

（从逻辑学的角度，相等需要满足四条相等公理：自反性，对称公理，传递公理，替换公理，否则就不是相等关系。这里使用了传递公理，即 $x = y, y = z$，那么 $x = z$。）

于是，我们有（利用了 $a \neq 0$）

$$\begin{aligned} ax_1 &= ax_2 \\ \frac{1}{a}ax_1 &= \frac{1}{a}ax_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

这里第二个等式，使用了相等公理中的替换公理：
"对于两个同类型的对象 x, y，如果 $x = y$，那么对任意一个函数或者运算 f 都有 $f(x) = f(y)$"。

本题可看做 $f(t) = \frac{1}{a}t$。

注释 2. 文中：

$$x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1})$$

是如何得到的。

右侧乘开，我们有

$$\begin{aligned}&(x-a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1})\\&= x^k + ax^{k-1} + \cdots + a^{k-1}x - ax^{k-1} - a^2x^{k-2} - \cdots - a^k\\&= x^k - a^k\end{aligned}$$

注释 3. 推论 *1* 的证明过程中，隐含使用了如下命题：
"$a, b \neq 0$，那么 $ab = 0$"。
是否可以使用 *9* 条运算法则（更准确的说是复数版本）推导出？

证明：

反证法，假设 $ab = 0$。于是由例 1.2 可知，对任意复数 x，都有 $0x = 0$。我们令 $x = \frac{1}{a}\frac{1}{b}$，那么，$abx = 0$，这与

$$ab\frac{1}{a}\frac{1}{b} = 1$$

矛盾，假设不成立，命题成立。

注释 4. 预备命题的证明中，等式：

$$\sigma_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) + \sigma_{i-1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)\alpha_{k+1} = \sigma_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$$

如何证明？

证明：

我们从右边拆解，选取有两种方式：
1. 选取的结果中没有 σ_{k+1}，那么就是所有项都是从前 k 个数中选，选 i 个数，即：

$$\sigma_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$$

2. 选取的结果中包含 σ_{k+1}，那么需要先从 k 个中选 $i-1$ 个，然后乘以 α_{k+1}，即：

$$\sigma_{i-1}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\alpha_{k+1}$$

这就完成了证明。

注释 5. *通过命题 2.3，推导出高中的韦达定理：*
“设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$”，有两个根 x_1,x_2，那么，

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

证明：

其实韦达定理说的就是根与系数的关系，只是命题 2.3 的特例。

由命题 2.3，我们有

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}=\frac{a_1}{a_0} &= (-1)^1\sigma_1(x_1,x_2) \\ &= -(x_1+x_2) \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{c}{a}=\frac{a_2}{a_0} &= (-1)^2\sigma_2(x_1,x_2) \\ &= x_1x_2 \end{aligned}$$