1.1 习题

张志聪

2025 年 8 月 1 日

1

- (1)

  是数域，证明略。

- (2)

  是数域。

  设 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$，于是

  $$(a + b\sqrt{3}i) + (c + d\sqrt{3}i) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})$$
  $$(a + b\sqrt{3}i)(c + d\sqrt{3}i) = (ac - 3bd) + (ac + bd)\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3})$$

  当 $c + d\sqrt{3}i \neq 0$，即 $c^2 + 3d^2 \neq 0$ 时，有

  $$\begin{aligned} \frac{a + b\sqrt{3}i}{c + d\sqrt{3}i} &= \frac{(a + b\sqrt{3}i)(c - d\sqrt{3}i)}{c^2 + 3d^2} \\ &= \frac{(ac - 3bd) + (-ad + bc)\sqrt{3}i}{c^2 + 3d^2} \in \mathbb{Q}(-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

  $\mathbb{Q}(-\sqrt{3})$ 对复数的四则运算封闭，所以它是一个数域。

- (3)

  todo

2

- (1)

  既不是单射也不是满射。

- (2)

  不是单射，是满射。

- (3) 是单射，不是满射。

3

- (1)

  反证法，假设 f 不是满射，那么，存在 $y \in S$，没有 $x \in S$ 使得 $f(x) = y$，即 $f(S) \subseteq S \setminus \{y\}$。

  S 中的元素个数为 n，$S \setminus \{y\}$ 的元素个数小于 n，那么，f 存在多个元素映射到同一个元素，这与 f 是单射矛盾。

- (2)

  反证法，假设 f 不是单射。那么，存在 $a \neq b$ 使得

  $$f(a) = f(b)$$

  从而

  $$f(S \setminus \{a\}) = f(S \setminus \{b\}) = f(S)$$

  于是 $f(S)$ 的元素个数小于等于 $n-1$，那么，$S \setminus f(S) \neq \varnothing$，设 $y \in S \setminus f(S)$，则不存在 $x \in S$ 使得 $f(x) = b$，这与 f 是满射矛盾。

4

只证明 (1)，另一个证明方式类似。

- (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

  $\Rightarrow$

  任意 $x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$，所以有以下情况：

  - x 同时属于 B, C。

    那么 $x \in (A \cap B)$ 且 $x \in (A \cap C)$，进而 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

- $x \in B$。

  那么 $x \in (A \cap B)$，进而 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
- $x \in C$。

  同理。

综上 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，于是 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Leftarrow$

讨论方式类似，不做赘述。

综上，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

5

这是显然的，和图中的表格就没有关系！

6

利用习题 5 进行证明。

习题 5 已经列出了所有的正有理数构成的集合，我们以相同的方式排列负有理数序列（需要把 0 放在开头，设为 b_0）

$$b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots,$$

定义映射

$$g(b_k) = 2k + 1$$

综上，我们定义一个函数 $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}+$，

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in \mathbb{Q} \setminus A \\ f(x) & \text{if } x \in A \end{cases}$$

即正有理数映射为偶数，负有理数映射为奇数，易得，函数 h 是单射函数。

7

定义集合 A, B 如下

$$A := \{1, 2\}$$
$$B := \{a, b, c\}$$

定义函数 $f : A \to B, g : B \to A$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{if } x = 1 \\ b & \text{if } x = 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = a \\ 2 & \text{if } x = b \\ 1 & \text{if } x = c \end{cases}$$

于是

$$gf(1) = g(f(1)) = 1$$
$$gf(2) = g(f(2)) = 2$$

所以，$gf = id_A$ 成立。

因为，我们有

$$fg(c) = f(g(c)) = f(1) = a$$

所以 $fg \neq id_B$，进而 f 不是可逆映射。

8

- $K \cap L$ 是数域。

  反证法，假设 $K \cap L$ 不是数域，那么存在 $a, b \in K \cap L$，使得其四则运算结果不是数域 $K \cap L$ 中的元素。

  因为 K, L 都是数域，且 $a, b \in K \cap L$，可知 $a, b \in K$ 和 $a, b \in L$，于是其四则运算结果也是数域 K, L 中的元素，进而其四则运算结果是数域 $K \cap L$ 中的元素，存在矛盾。

- $K \cup L$ 不一定是数域的举例。

定义 K, L 如下

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$
$$L := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

于是

$$\sqrt{2} \in K \subseteq K \cup L$$
$$\sqrt{3} \in L \subseteq K \cup L$$

但

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin K \cup L$$

9

- (1.1) $\sum\limits_{i=1}^{n} i$。

  这是一个等差数列求和问题，其中

  $$a_1 = 1$$
  $$a_2 = 2$$
  $$\vdots$$
  $$a_n = n$$

  公差为 1，所以

  $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

- (1.2) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$。

  证明的方式比较多，这里使用恒等式

  $$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

  来证明。

于是 $n \geq 2$，我们有

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
&\vdots \\
2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1
\end{aligned}
$$

所有等式相加，我们有

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n \\
n^3 + 3n^2 + 3n &= 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\
S_n &= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

- (1.3) $\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+2)$。

  因为，我们有

  $$(i+1)(i+2) = i^2 + 3i + 2$$

  于是

  $$
  \begin{aligned}
  \sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 2 \\
  &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n
  \end{aligned}
  $$

- (2.1)

  如果 n 是偶数，

  $$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = 1$$

如果 n 是奇数

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = -1$$

- (2.2)

  如果 n 是偶数，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i &= (-1)\times 1 + 1\times 2 + \cdots + (-1)\times(n-1) + 1\times n \\ &= ((-1)\times 1 + 1\times 2) + \cdots + ((-1)\times(n-1) + 1\times n) \\ &= 1 + \cdots + 1 \\ &= \frac{n}{2}\end{aligned}$$

  如果 n 是奇数

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i &= (-1)\times 1 + 1\times 2 + \cdots + (-1)\times(n-2) + 1\times(n-1) + (-1)\times n \\ &= ((-1)\times 1 + 1\times 2) + \cdots + ((-1)\times(n-2) + 1\times(n-1)) + (-1)\times n \\ &= 1 + \cdots + 1 - n \\ &= \frac{n-1}{2} - n \\ &= -\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

11

对 n 进行归纳。

归纳基始，$n=1$ 时，等式显然成立。

归纳假设，$n=k$ 时，等式

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

成立。

$n=k+1$ 时，利用归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)}&=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\\&=1-\frac{1}{k+2}\end{aligned}$$

归纳完毕，等式成立。

12

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

13

- 充分性

  这个是显然的。

- 必要性

  已知 $K\cup L$ 是数域，反证法，假设 $K\subseteq L$ 和 $L\subseteq K$ 不成立。那么，由 K,L 都不是空集，于是存在 $x\in K$ 且 $x\notin L$，同理，存在 $y\in L$ 且 $y\notin K$。于是，我们有

  $$x+y\notin K$$
  $$x+y\notin L$$

  因为 $x+y\in K$，那么 $x+y-x=y\in K$，存在矛盾，所以 $x+y\notin K$。类似地，$x+y\notin L$，进而

  $$x+y\notin K\cup L$$

因为 $x, y \in K \cup L$，题设有 $K \cup L$ 是数域，所以

$$x + y \in K \cup L$$

存在矛盾，假设不成立，命题得证。

14

- 充分性

  f 是零变换时，那么

  $$\begin{aligned} f(a+b) &= 0 \\ f(a)+f(b) &= 0+0=0 \\ &\Longrightarrow \\ f(a+b) &= f(a)+f(b) \end{aligned}$$

  类似地，可得 $f(ab) = f(a)f(b) = 0$。

  $f = id_A$ 时，那么

  $$\begin{aligned} f(a+b) &= id_A(a+b) = a+b \\ f(a)+f(b) &= id_A(a)+id_A(b) = a+b \\ &\Longrightarrow \\ f(a+b) &= f(a)+f(b) \end{aligned}$$

  类似地，可得 $f(ab) = f(a)f(b) = ab$。

- 必要性

  已知，对任意的 $a, b \in A$，我们有

  $$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a)+f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

  特别地，令 $a = b = 1$，我们有

  $$\begin{aligned} f(ab) &= f(a)f(b) \\ f(1) &= f(1)f(1) \\ &\Longrightarrow \\ f(1) &= 1 \ or \ f(1) = 0 \end{aligned}$$

又

$$f(0) = f(0)f(0)$$
$$f(0) = f(0) + f(0)$$

我们有

$$f(0) = 0$$

(1) 如果 $f(1) = 0$，则 f 是零变换：对任意有理数 $\frac{p}{q} \in A$（其中 p, q 都是整数，q 是正整数），我们有

$$f(1 \times \frac{p}{q}) = f(1)f(\frac{p}{q}) = 0$$

(2) 如果 $f(1) = 1$，则 $f = id_A$：对任意正整数 n，我们有

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1) + f(1) + \cdots + f(1) \\ &= nf(1) = n \end{aligned}$$

通过，$1 = (-1) + 2$，可得

$$\begin{aligned} f(1) &= f(-1) + f(2) \\ 1 &= f(-1) + 2 \\ f(-1) &= -1 \end{aligned}$$

对任意负整数 $-n$，我们有

$$f(-n) = f(-1)f(n) = -n$$

所以，对任意有理数 $\frac{p}{q} \in A$（其中 p, q 都是整数，q 是正整数，p, q 互素），我们有

$$q\frac{p}{q} = p$$

于是，利用题设可得

$$\begin{aligned} f(q\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q}) + \cdots + f(\frac{p}{q}) \\ f(p) = qf(\frac{p}{q}) \\ p = qf(\frac{p}{q}) \\ f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} \end{aligned}$$

15

对任意 $a \in \mathbb{Q}$，可以表示成一下形式：

$$a + 0\sqrt{2}$$

所以，$a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$，由 a 的任意性，我们有

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

于是，在有理数的范围下，由习题 14 可知，$f = id_{\mathbb{Q}}$ 或 f 是零变换。

如果 f 满足有理数下的零变换，那么对任意 $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$（不妨表示成 $\alpha = a + b\sqrt{2}$ 的形式）我们有，

$$\begin{aligned} f(a + b\sqrt{2}) &= f(a) + f(b\sqrt{2}) \\ &= f(a) + f(b)f(\sqrt{2}) \\ &= 0 + 0f(\sqrt{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

属于情况（1）。

如果 $f = id_{\mathbb{Q}}$，因为

$$2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$$

于是

$$\begin{aligned} f(2) &= f(\sqrt{2})f(\sqrt{2}) \\ 2 &= f(\sqrt{2})^2 \\ f(\sqrt{2}) &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

那么对任意 $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$，（不妨表示成 $\alpha = a + b\sqrt{2}$ 的形式），我们有

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(a + b\sqrt{2}) \\ &= f(a) + f(b\sqrt{2}) \\ &= f(a) + f(b)f(\sqrt{2}) \\ &= a \pm b\sqrt{2} \end{aligned}$$

属于情况 (2)(3)。