4.2

张志聪

2025 年 11 月 6 日

1

(2) 提示: $C(A)$ 是对角矩阵。

4

注意：需要考虑 K 是不是有理数，是有理数则是子空间，否则不是。

7

设 M 的秩为 r，

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$$

是它的一组基。

$r = 0$，则 M 是零空间，即线性方程组只有零解，对于齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \cdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间为零空间（M），命题成立。

$1 \leq r \leq n$ 时，设

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \end{bmatrix}$$

对于齐次线性方程组 $B^Tx=0$，因为 $rank(B^T)=r$，所以解空间的一组基可设为

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$$

设

$$A=\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}\right]$$

我们有，

$$B^TA=0$$

于是

$$A^TB=0$$

对于齐次线性方程组 $A^Tx=0$，由于 $rank(A^T)=n-r$，所以它的解空间的基个数为 r，所以 B 中向量可以是 $A^Tx=0$ 解空间的一组基，即 M 是 $A^Tx=0$ 的解空间，命题成立。

综上，K^n 上的任一子空间 M 都是数域 K 上某个齐次线性方程组的解空间。

8

反证法，假设存在 $M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k=V$，这里是最小状态，即不存在删除某个子空间 M_i 后，$M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_{i-1}\cup M_{i+1}\cup\cdots\cup M_k=V$ 仍然成立。

为了讨论方便，令

$$M=(M_2\cup M_3\cup\cdots\cup M_k)$$

于是

$$V=M_1\cup M$$

因为 $M_1\neq\{0\},M\neq\{0\}$，于是

$$\exists\alpha\in M_1-M$$
$$\exists\beta\in M-M_1$$

定义一个无限个数的向量组 (I):

$$\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, \cdots$$

显然，(I) 中的任意向量都不可能在 M_1 中。

因为 (I) 中向量个数是无限多个，M 中存在子空间包含无限多个 (I) 中向量，不妨设为 M_i 包含无限多个 (I) 中向量，任取两个向量 $j\alpha+\beta, i\alpha+\beta$，我们有

$$(j\alpha+\beta-i\alpha+\beta)=(j-i)\alpha$$

于是可得，$\alpha \in M_i$，存在矛盾，假设不成立，命题得证。

9

提示：如果函数之间是线性关系，那么函数值之间的线性关系一定成立。

对于行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & cosx_1 & cos2x_1 & cos3x_1 \\ 1 & cosx_2 & cos2x_2 & cos3x_2 \\ 1 & cosx_3 & cos2x_3 & cos3x_3 \\ 1 & cosx_4 & cos2x_4 & cos3x_4 \end{vmatrix}$$

由于，$coskx$ 都可以表示成 $2^{k-1}(cosx)^k + *$ 的格式（3-2-comment 中有详细证明）。于是，通过初等列变换可以把非高次项移除

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & cosx_1 & cos2x_1 & cos3x_1 \\ 1 & cosx_2 & cos2x_2 & cos3x_2 \\ 1 & cosx_3 & cos2x_3 & cos3x_3 \\ 1 & cosx_4 & cos2x_4 & cos3x_4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & cosx_1 & 2cos^2x_1 & 4cos^3x_1 \\ 1 & cosx_2 & 2cos^2x_2 & 4cos^3x_2 \\ 1 & cosx_3 & 2cos^2x_3 & 4cos^3x_3 \\ 1 & cosx_4 & 2cos^2x_4 & 4cos^3x_4 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & cosx_1 & cos^2x_1 & cos^3x_1 \\ 1 & cosx_2 & cos^2x_2 & cos^3x_2 \\ 1 & cosx_3 & cos^2x_3 & cos^3x_3 \\ 1 & cosx_4 & cos^2x_4 & cos^3x_4 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

以上是范德蒙德行列式，于是只要 $cosx_1, cosx_2, cosx_3$ 两两不相等，则行列式不为零，显然这样的自变量 x_1, x_2, x_3 可以找到，从而可得，这 4 个函数是线性无关的。（注意：如果找不到这四个函数线性相关）

综上，子空间 $L(1, cosx, cos2x, cos3x)$ 的维数是 4，一组基为

$$1, cosx, cos2x, cos3x$$

17

$$M_n(K) = M + N$$

成立，但不是直和。

18

- 方法一

  先证明 M_1+M_2 是直和。设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_1 \cap M_2$，那么，因为 $\alpha \in M_1$，

  所以

  $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

  同理，因为 $\alpha \in M_2$，

  $$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

  于是

  $$\begin{aligned} na_1 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

  所以

  $$\alpha = 0$$

  于是可得 $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$，所以，$M_1 + M_2$ 是直和。

再证明 $dimM_1 + dimM_2 = n$。第一个线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = 1$，所以解空间 M_1 维数为

$$n - rank(A) = n - 1$$

易得 M_2 是 1 维的，且 A 是它的一组基。于是可得 $dimM_1 + dimM_2 = n$。

综上，$K^n = M_1 \oplus M_2$。

- 方法二

  先证明 $K^n = M_1 + M_2$，即对任意 $\gamma = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$，可以表示成 $\gamma = \alpha + \beta$，其中

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$$

  于是，解以下方程组：

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + b \\ c_2 &= a_2 + b \\ &\vdots \\ c_n &= a_n + b \end{aligned}$$

所有等式相加得

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + nb$$

由于 $\alpha \in M_1$，所以，我们有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

于是

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \cdots + c_n &= 0 + n \cdot b \\ b &= \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \end{aligned}$$

带入后可得

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 - \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \\ a_2 &= c_2 - \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \\ &\vdots \\ a_n &= c_n - \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \end{aligned}$$

综上，

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \\ c_2 - \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \\ \vdots \\ c_n - \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \\ \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \\ \vdots \\ \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \end{bmatrix}$$

$K^n = M_1 + M_2$ 得证。

再证明 $M_1 + M_2$ 是直和。通过任意向量 $\alpha \in M_1 + M_2$，只有唯一分解方式来证明。

反证法，假设存在

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2$$

其中 $\alpha_1, \beta_1 \in M_1, \alpha_2, \beta_2 \in M_2$，移项可得

$$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$$

于是 $\beta_2 - \alpha_2 \in M_1 \cap M_2$，设

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} b' \\ b' \\ \vdots \\ b' \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \begin{bmatrix} b'-b \\ b'-b \\ \vdots \\ b'-b \end{bmatrix}$$

利用 $\beta_2 - \alpha_2 \in M_1$ 可得

$$n(b'-b) = 0$$
$$b'-b = 0$$
$$b' = b$$

于是可得

$$\beta_2 = \alpha_2$$
$$\beta_1 = \alpha_1$$

所以，α 只有唯一分解方式，于是 $M_1 + M_2$ 是直和。

19

4-2-comment.tex 中有详细证明

20

先证明 $M + N$ 是直和。

任意 $\alpha \in M \cap N$，我们有

$$B\alpha = 0$$
$$C\alpha = 0$$

于是，我们有

$$A\alpha = 0$$

因为 A 是满秩的，所以只存在零解，所以

$$\alpha = 0$$

于是可得

$$M \cap N = \{0\}$$

所以，$M + N$ 是直和。

因为

$$rank(B) = k$$
$$rank(C) = n - k$$

于是可得

$$dimM = n - k$$
$$dimN = k$$

又因为 M, N 是直和（即：它们各自的一组基合并后，是线性无关的，且个数是 n 个），所以

$$dimM + dimN = dimK^n = n$$

所以 $K^n = M \oplus N$。

21

先证明，$M + (N \cap L)$ 是直和。$\forall \alpha \in M \cap (N \cap L)$，我们有

$$\begin{cases} \alpha \in M \\ \alpha \in N \cap L \end{cases}$$

又因为 $M \subset N$，所以

$$\alpha \in M \cap L$$

由于 $M \oplus L$，所以

$$\alpha \in M \cap L = \{0\}$$

于是可得

$$\alpha = 0$$

综上，$M \oplus (N \cap L)$。

接下里证明 $N = M \oplus (N \cap L)$。因为 $M \subseteq N$，于是

$$M \oplus (N \cap L) \subseteq N$$

是显然的。

对任意 $\alpha \in N$，因为 $V = M \oplus L$，所以 α 可以唯一表示成

$$\alpha = m + l$$

其中 $m \in M, l \in L$。因为

$$l = \alpha - m$$

由于 $\alpha \in N$ 且 $M \subseteq N$，所以

$$l \in N$$

所以

$$l \in N \cap L$$

于是可得

$$\alpha \in M \oplus (N \cap L)$$

23

提示

- 必要性

$$\sum_{j=1}^{i-1} M_j \subseteq \sum_{j=1;j\neq i}^{k} M_j$$

- 充分性

  已知

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j\right) = \{0\}$$

  所以

$$M_i \oplus \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j\right), i = 1, 2, \cdots, k$$

  于是可得

$$\begin{aligned} dim\left(\sum_{j=1}^{k} M_j\right) &= dim\left(M_k + \sum_{j=1}^{k-1} M_j\right) \\ &= dimM_k + dim\left(\sum_{j=1}^{k-1} M_j\right) \\ &= dimM_k + dimM_{k-1} + dim\left(\sum_{j=1}^{k-2} M_j\right) \\ &\vdots \\ &= dimM_k + dimM_{k-1} + \cdots + dimM_1 \end{aligned}$$

  可得 $\left(\sum_{j=1}^{k} M_j\right)$ 是直和。

24

提示

- 必要性

  显然的。

- 充分性

  反证法，假设零向量的表法不唯一，即

$$0 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k \ (\beta_i \in M_i)$$
$$0 = \beta_1' + \beta_2' + \cdots + \beta_k' \ (\beta_i' \in M_i)$$

  存在 $\beta_l \neq \beta_l'$。于是，我们有

$$\alpha = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)$$
$$\alpha = (\alpha_1 + \beta_1') + (\alpha_2 + \beta_2') + \cdots + (\alpha_k + \beta_k')$$

  因为存在 $\beta_l \neq \beta_l'$，那么 α 的表法不唯一，导致矛盾。

25

令 $V = K^4$。易得

$$dimM = 2$$

由命题 2.5 可知

$$dimV/M = 4 - 2 = 2$$

使用 α_1, α_2 扩充成 V 的一组基。因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

于是可得

$$\epsilon_1 + M, \epsilon_2 + M$$

是 V/M 的一组基。

26

提示：

由于 $M_n(K)$ 的对称矩阵子空间和反对称矩阵子空间的和是直和，于是反对称矩阵的一组基，加上对称矩阵的一组基，可以构成 $M_n(K)$ 的一组基。

27

提示：
设

$$\begin{bmatrix} * \\ T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1\,r+1} & t_{1\,r+2} & \cdots & t_{1\,n} \\ t_{2\,r+1} & t_{2\,r+2} & \cdots & t_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ t_{n\,r+1} & t_{n\,r+2} & \cdots & t_{n\,n} \end{bmatrix}$$

由过度矩阵的含义可知

$$\eta_n = t_{1\,n}\epsilon_1 + t_{2\,n}\epsilon_2 + \cdots + t_{n\,n}\epsilon_n$$

于是，由商空间中的运算法则，我们有

$$\overline{\eta_n} = t_{1\,n}\overline{\epsilon_1} + t_{2\,n}\overline{\epsilon_2} + \cdots + t_{n\,n}\overline{\epsilon_n}$$

因为在商空间 V/M 中，我们有

$$\overline{\epsilon_1} = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon_r = 0$$

所以

$$\overline{\eta_n} = t_{r+1\,n}\overline{\epsilon_{r+1}} + t_{r+2\,n}\overline{\epsilon_{r+2}} + \cdots + t_{n\,n}\overline{\epsilon_n}$$

28

- (1)

  (i) 先证明加法和数乘运算是封闭的。

  - $f + g \in P(K)$。

    按照定义的加法，我们有

$$\begin{aligned} &(f+g)\begin{bmatrix} \cdots & \gamma\alpha + \mu\beta & \cdots \end{bmatrix} \\ &= f\begin{bmatrix} \cdots & \gamma\alpha + \mu\beta & \cdots \end{bmatrix} + g\begin{bmatrix} \cdots & \gamma\alpha + \mu\beta & \cdots \end{bmatrix} \\ &= \gamma f\begin{bmatrix} \cdots & \alpha & \cdots \end{bmatrix} + \mu f\begin{bmatrix} \cdots & \beta & \cdots \end{bmatrix} + \gamma g\begin{bmatrix} \cdots & \alpha & \cdots \end{bmatrix} + \mu g\begin{bmatrix} \cdots & \beta & \cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

又因为列线性函数是数量函数，所以我们有

$$\begin{aligned}
&\gamma f\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix} + \mu f\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix} + \gamma g\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix} + \mu g\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix} \\
&= \gamma(f\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix} + g\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix}) + \mu(f\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix} + g\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix}) \\
&= \gamma\left((f+g)\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix}\right) + \mu\left((f+g)\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

加法封闭性得证。

- $kf \in P(K)$。

  我们有

$$\begin{aligned}
&(kf)\begin{bmatrix}\cdots & \gamma\alpha+\mu\beta & \cdots\end{bmatrix} \\
&= kf\begin{bmatrix}\cdots & \gamma\alpha+\mu\beta & \cdots\end{bmatrix} \\
&= k\left(\gamma f\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix} + \mu f\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix}\right) \\
&= \gamma kf\begin{bmatrix}\cdots & \alpha & \cdots\end{bmatrix} + \mu kf\begin{bmatrix}\cdots & \beta & \cdots\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

  乘法封闭性得证。

(ii) 证明 8 条运算法则成立：

- 存在零元素。

  零元素 0 具有如下性质: 对任意 $A \in M_n(K)$，有

$$0(A) = 0$$

  注意左侧 0 是列线性函数，右侧 0 是数值。

  显然零元素 $0 \in P(K)$。

- 负元素。

  任意 $f \in P(K)$，其负元素为 $-f$。

  对任意 $A \in M_n(K)$，有

$$(f + (-f))(A) = f(A) + (-f(A)) = 0$$

  所以 $f + (-f)$ 是零元素。

其他法则证明略。

- (2)

  注意：题中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 不是排列，是各取各的，互不影响。

  任意矩阵 $A \in M_n(K)$，设为

  $$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

  即任意列向量 $\alpha_i \in A$，表示成

  $$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

  α_i 可以线性表示成

  $$\alpha_i = a_{1i}\epsilon_1 + a_{2i}\epsilon_2 + \cdots + a_{ni}\epsilon_n$$

  于是，A 可表示成

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11}\epsilon_1 + a_{21}\epsilon_2 + \cdots + a_{n1}\epsilon_n & a_{12}\epsilon_1 + a_{22}\epsilon_2 + \cdots + a_{n2}\epsilon_n & \cdots & a_{1n}\epsilon_1 + a_{2n}\epsilon_2 + \cdots + a_{nn}\epsilon_n \end{bmatrix}$$

  f 是列线性函数，可以把 A 每列展开，最终 A 是有限个矩阵（都由 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 作为列向量组合而成的矩阵）记为 $E_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 相加得到，即

  $$A = \sum_{i=1}^{s} E_i$$

  于是由列线性函数的性质可知

  $$f(A) = f(\sum_{i=1}^{s} E_i) = \sum_{i=1}^{s} f(E_i)$$

- (3)

  可以先看 (4)，通过其中 (ii) 的描述，就可以表示出想要的函数了。

- (4)

  由 (2) 可知，任意 $f \in P(K)$ 由 n^n 个变量（(2) 中描述的矩阵）确定，这个 n^n 个矩阵，我们把它排序成 $A_1, A_2, \cdots, A_{n^n}$，定义一组函

数 $f_i \in P(K)$：

$$\begin{cases} f_i(A_i) = 1 \\ f_i(A_m) = 0, m \neq i \end{cases}$$

现在证明这 n^n 个函数是 $P(K)$ 的一组基，为了讨论方便，这组函数记为 (I).

(i) 线性无关。

令

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_{n^n} f_{n^n} = 0$$

以上是一个常量函数，即任意点都是 0，由 (I) 的构造过程可知，$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n^n} = 0$，于是可知 (I) 是线性无关的。

(ii) 可以表示 $P(k)$ 中的任意列线性函数 f.

设 f 在 n^n 个矩阵上的值为

$$f(A_i) = b_i$$

令

$$g = b_1 f_1 + b_2 f_2 + \cdots + b_{n^n} f_{n^n}$$

因为对任意 A_i，都有

$$f(A_i) = g(A_i) = b_i$$

所以 $f = g$。

综上，(I) 就是 $P(K)$ 的一组基，$P(K)$ 的维数是 n^n.

- (5)

  (i) 子空间的证明略

  (ii)

  - 一个错误方法；

    受 (1)-(4) 的启发: 我们知道反对称的列线性函数 f，因为在不满秩的矩阵上，函数值总是 0，于是推出 $\epsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 在矩阵中不可重复，所以是 $1, 2, \cdot, n$ 的排列组合，即维数是 $n!$。

上面方法的问题在于，我们应该只能推出维数 $\le n!$，因为反对称函数还有隐含的性质：交换矩阵两行，函数值前后是相反数，而不是在这 $n!$ 上相互独立，即维数 $< n!$。

– 正确方法.

我们知道行列式（det）的定义为:反对称列线性函数 $+\ det(E) = 1$，而反对称函数的在 E 上的值确定了，由第三章命题 2.3 可知其他矩阵上的值也就确定了，于是对任意反对称列线性函数 f，如果已知 $f(E) = a \cdot det(E)$，则这个函数就被唯一确定了，综上可得，反对称列线性函数的维数是 1，det 是一组基。

29

设 F 作为 K 上的线性空间的一组基为

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_m$$

L 作为 F 上的线性空间的一组基为

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$$

对任意 $l \in L$，可以表示成

$$l = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + \cdots + f_n\eta_n$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in F$，可以表示成

$$\begin{aligned}
f_1 &= k_{1_1}\epsilon_1 + k_{1_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{1_m}\epsilon_m \\
f_2 &= k_{2_1}\epsilon_1 + k_{2_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{2_m}\epsilon_m \\
&\vdots \\
f_n &= k_{n_1}\epsilon_1 + k_{n_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{n_m}\epsilon_m
\end{aligned}$$

于是，l 可以表示成:

$$\begin{aligned}
l = &(k_{1_1}\epsilon_1 + k_{1_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{1_m}\epsilon_m)\eta_1 \\
&+ (k_{2_1}\epsilon_1 + k_{2_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{2_m}\epsilon_m)\eta_2 \\
&+ \cdots + (k_{n_1}\epsilon_1 + k_{n_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{n_m}\epsilon_m)\eta_n \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} k_{i_j}\epsilon_j\eta_i\right)
\end{aligned}$$

其中 $k_{i_j} \in K(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$，因为 $K \subseteq F \subseteq L$，所以 $\epsilon_i \eta_j \in L$，由此可得，任意 $l \in L$，可被一组向量 (I):

$$\begin{aligned}
\epsilon_1\eta_1, \epsilon_1\eta_2, \cdots \epsilon_1\eta_n,\\
\epsilon_2\eta_1, \epsilon_2\eta_2, \cdots \epsilon_2\eta_n,\\
\vdots\\
\epsilon_m\eta_1, \epsilon_m\eta_2, \cdots \epsilon_m\eta_n
\end{aligned}$$

用 K 上的数线性表示。

接下来，我们只要证明 (I) 是线性无关即可完成证明。

存在 $k_{i_j}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$（一定是存在的，全取 0 即可）使得：

$$\begin{aligned}
0 = k_{1_1}\epsilon_1\eta_1 + k_{1_2}\epsilon_1\eta_2 + \cdots + k_{1_n}\epsilon_1\eta_n +\\
k_{2_1}\epsilon_2\eta_1 + k_{2_2}\epsilon_2\eta_2 + \cdots + k_{2_n}\epsilon_2\eta_n +\\
\vdots\\
+\\
k_{m_1}\epsilon_m\eta_1 + k_{m_2}\epsilon_m\eta_2 + \cdots + k_{m_n}\epsilon_m\eta_n
\end{aligned}$$

因为 $\epsilon_i\eta_j$ 是数，所以满足相关运算法则，于是我们有

$$\begin{aligned}
0 = &(k_{1_1}\epsilon_1 + k_{1_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{1_m}\epsilon_m)\eta_1\\
&+ (k_{2_1}\epsilon_1 + k_{2_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{2_m}\epsilon_m)\eta_2\\
&+ \cdots + (k_{n_1}\epsilon_1 + k_{n_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{n_m}\epsilon_m)\eta_n
\end{aligned}$$

由于 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是线性无关，于是可得

$$\begin{aligned}
0 = k_{1_1}\epsilon_1 + k_{1_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{1_m}\epsilon_m\\
0 = k_{2_1}\epsilon_1 + k_{2_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{2_m}\epsilon_m\\
\vdots\\
0 = k_{n_1}\epsilon_1 + k_{n_2}\epsilon_2 + \cdots + k_{n_m}\epsilon_m
\end{aligned}$$

又因为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_m$ 是线性无关，所以有

$$k_{i_j} = 0, (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

综上，(I) 是线性无关的。

所以，L 在 K 上是 mn 维线性空间。

30

- (1)

  提示：

  零元素为零函数 f_0（即对任意 $A \in M_n(K)$），都有 $f_0(A) = 0$。

  任意 $f \in F(K)$，负元素为 $-f$。

- (2)

  - (i) $Q(K)$ 是 $F(K)$ 的子空间。

    设 $A \in M_n(K)$，为

    $$A = (\beta_1, \cdots, \cdots, \beta_j + \beta, \cdots, \beta_n)$$

    其中

    $$\begin{aligned} A_1 &= (\beta_1, \cdots, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n) \\ A_2 &= (\beta_1, \cdots, \cdots, \beta, \cdots, \beta_n) \\ A &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

    对加法封闭：

    任意 $q_1, q_2 \in Q(K)$，有

    $$\begin{aligned} (q_1 + q_2)(A) &= q_1(A) + q_2(A) \\ &= q_1(A_1 + A_2) + q_2(A_1 + A_2) \\ &= q_1(A_1) + q_1(A_2) + q_2(A_1) + q_2(A_2) \\ &= (q_1 + q_2)(A_1) + (q_1 + q_2)(A_2) \end{aligned}$$

    对数乘封闭：

    任意 $q_1 \in Q(K)$，有

    $$\begin{aligned} (kq_1)(A) &= kq_1(A) \\ &= k(q_1(A_1) + q_1(A_2)) \\ &= kq_1(A_1) + kq_1(A_2) \end{aligned}$$

  - (ii) $P(K)$ 是 $F(K)$ 的子空间。

    同理可知。

- (3)