

4.3 注释

张志聪

2025 年 9 月 18 日

注释 1. 使用命题 3.1 证明：行变换不改变矩阵的列秩。

证明：

A 是 $m \times n$ 矩阵，设列向量组为

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \quad (I)$$

为每一个行变换都构造一个从 $K^m \rightarrow K^m$ 的单射，这里以初等行变换：第 i 上的 k 倍，加到第 j 行为例（设 A 经过初等行变换得到 B ）：构造映射

$f: K^m \rightarrow K^m$ 如下: 若 $\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, 那么

$$f(\beta) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + ka_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

容易验证, f 是线性映射且是单射。首先设 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_k}$ 是 (I) 的极大线性无关部分组, 于是, 由命题 3.1 可知, $f(\beta_{i_1}), f(\beta_{i_2}), \dots, f(\beta_{i_k})$ 是线性无关的。

对任意 $\beta \in (I)$, 存在

$$\beta = k_1\beta_{i_1} + k_2\beta_{i_2} + \dots + k_k\beta_{i_k}$$

由于 f 是线性映射, 于是

$$f(\beta) = k_1f(\beta_{i_1}) + k_2f(\beta_{i_2}) + \dots + k_kf(\beta_{i_k})$$

所以, $f(\beta_{i_1}), f(\beta_{i_2}), \dots, f(\beta_{i_k})$ 是 B 中列向量组的极大线性无关部分组。

综上可得, 该行变换不改变矩阵的列秩。

注释 2. 同构是等价关系。

注释 3. U 和 V 是数域 K 上的有限维线性空间, U 和 V 同构的充分必要条件是

$$\dim U = \dim V$$

证明:

- 必要性

U 和 V , 所以存在一个线性映射 $f: U \rightarrow V$, 且 f 是双射。由命题 3.2 可知

$$\dim U = \dim V$$

- 充分性

令 $n = \dim U = \dim V$, 设

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (I)$$

是 U 的一组基,

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \quad (II)$$

是 V 的一组基。

任意 $\alpha \in U$, 我们有

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$$

构造映射 $f: U \rightarrow V$ 如下:

$$f(\alpha) = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n$$

易得, f 是同构映射。

注释 4. 通过基, 证明命题 3.5 在 U, V 是有限维线性空间的情况下, 命题成立。

证明:

设 $\text{Ker} f$ 的一组基为

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$$

然后, 以此扩充成 U 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$$

其中

$$\overline{\alpha_{r+1}}, \overline{\alpha_{r+2}}, \dots, \overline{\alpha_n}$$

是 $U/\text{Ker} f$ 的一组基。

因为 $\text{Ker} f$ 的一组基, 在映射 f 下都是零向量, 于是不可能 $\text{Im} f$ 的基, 我们考虑

$$f(\alpha_{r+1}), f(\alpha_{r+2}), \dots, f(\alpha_n)$$

设

$$k_{r+1}f(\alpha_{r+1}) + k_{r+2}f(\alpha_{r+2}) + \dots + k_nf(\alpha_n) = 0$$

$$f(k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \dots + k_n\alpha_n) = 0$$

可得 $k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \dots + k_n\alpha_n \in \text{Ker} f$, 所以存在 k_1, k_2, \dots, k_r 使得

$$k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \dots + k_n\alpha_n = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

$$-k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \dots - k_r\alpha_r + k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 所以

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

所以, $f(\alpha_{r+1}), f(\alpha_{r+2}), \dots, f(\alpha_n)$ 线性无关。

任意 $\beta \in \text{Im} f$, 存在

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$$

使得

$$\begin{aligned}\beta &= f(\alpha) \\ &= a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + \cdots + a_n f(\alpha_n) \\ &= a_{r+1} f(\alpha_{r+1}) + a_{r+2} f(\alpha_{r+2}) + \cdots + a_n f(\alpha_n)\end{aligned}$$

所以, $f(\alpha_{r+1}), f(\alpha_{r+2}), \cdots, f(\alpha_n)$ 是 Imf 的一组基。

于是可得

$$\dim U / Kerf = \dim Imf = n - r$$

所以, $U / Kerf$ 与 Imf 同构。

注释 5. 命题 3.6(ii), 有一点要特别注意: $\dim U$ 是 n 维的, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ 也必须是 n 个, 但命题本身没有说不可以重复。

注释 6. $f: U \rightarrow V$ 是同构映射, 那么任意给定基下的矩阵 $A = \sigma(f)$ 都是满秩矩阵。

证明:

设 U, V 的一组基分别是

$$\begin{aligned}\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \\ \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\end{aligned}$$

于是, 我们有

$$(f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \cdots, f(\epsilon_n)) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)A$$

因为 f 是同构映射, 按照命题 3.1(i), $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \cdots, f(\epsilon_n)$ 在 V 中线性无关, 于是可得 A 是满秩的, 因为如果 A 不是满秩的, 那么存在 A 的某个列向量可以被其他列向量线性表示, 即某个 $f(\epsilon_i)$ 可以被其他 $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \cdots, f(\epsilon_{i-1}), f(\epsilon_{i+1}), \cdots, f(\epsilon_n)$ 线性表示, 出现矛盾。

注释 7. \mathcal{A} 是数域 K 上线性空间 V 内的线性变换, \mathcal{A} 在 V 的某组基下的矩阵是单位矩阵, 则 \mathcal{A} 是单位变换。

证明:

不妨设线性变换 \mathcal{A} 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵是单位矩阵。于是, 我们有

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)E$$

对任意 $\alpha \in V$, 我们有

$$\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \dots + a_n\epsilon_n$$

于是

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha) &= \mathcal{A}(a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \dots + a_n\epsilon_n) \\ &= a_1\mathcal{A}(\epsilon_1) + a_2\mathcal{A}(\epsilon_2) + \dots + a_n\mathcal{A}(\epsilon_n) \\ &= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \\ &= \alpha\end{aligned}$$

注释 8. 线性变换 \mathcal{P} 是线性空间 V 某个子空间 M 的投影变换的充分必要条件是 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ 。

证明:

• 必要性

设 $V = M \oplus N$, 因为 \mathcal{P} 是线性空间 V 对子空间 M 的投影变换, 那么 $\forall \alpha \in V$, 设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N)$$

我们有

$$\mathcal{P}(\alpha) = \alpha_1$$

又

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^2(\alpha) &= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha)) \\ &= \mathcal{P}(\alpha_1) \\ &= \alpha_1\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

- 充分性

令

$$\begin{aligned}M &= Im\mathcal{P} \\ N &= Ker\mathcal{P}\end{aligned}$$

由 3.5 推论 1, 我们有

$$dimM + dimN = dimIm\mathcal{P} + (dimV - dimIm\mathcal{P}) = dimV$$

又因为 $Ker\mathcal{P}, Im\mathcal{P}$ 都是 V 的子空间, 所以 U, V 是直和。

任意 $\alpha \in V$, 令

$$\alpha = \mathcal{P}(\alpha) + (\alpha - \mathcal{P}(\alpha))$$

显然 $\mathcal{P}(\alpha) \in Im\mathcal{P}$, 因为

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\alpha - \mathcal{P}(\alpha)) &= \mathcal{P}(\alpha) - \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha)) \\ &= \mathcal{P}(\alpha) - \mathcal{P}(\alpha) \\ &= 0\end{aligned}$$

所以, $\alpha - \mathcal{P}(\alpha) \in Ker\mathcal{P}$ 。

综上

$$V = Im\mathcal{P} \oplus Ker\mathcal{P} = M \oplus N$$

由以上的讨论可知, 任意 $\alpha \in V$, 有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N)$$

且

$$\mathcal{P}(\alpha) = \alpha_1$$

所以, \mathcal{P} 是线性空间对子空间 M 的投影变换。

注释 9. 互补投影变换: $\mathcal{E} - \mathcal{P}$

证明:

设 \mathcal{P} 是线性空间 V 对子空间 M (关于直和分解式 $V = M \oplus N$) 的投影变换。

任意 $\alpha \in V$, 设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N)$$

我们有

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} - \mathcal{P})(\alpha) &= \mathcal{E}(\alpha) - \mathcal{P}(\alpha) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \\ &= \alpha_2 \end{aligned}$$

注释 10. 命题 3.8 的一般情况 (即线性映射)。

注释 11. 命题 3.9 的一般情况 (即线性映射)。