5.4

张志聪

2025 年 9 月 28 日

3

解题思路：通过调整 $C^TAC = B$，把主子式改为顺序主子式。

设 A 的 r 阶主子式为

$$A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ i_1, i_2, \cdots, i_r \end{Bmatrix}$$

把 i_1 行，i_1 列，调整到第一行，第一列，通过左右乘上初阶矩阵完成：

$$P_n(1, i_1)^T A P_n(1, i_1)$$

因为 $P_n(1, i_1)^T = P_n(1, i_1)$，且

$$|P_n(1, i_1)| = -1$$

于是可得

$$|P_n(1, i_1)^T A P_n(1, i_1)| = |P_n(1, i_1)||A||P_n(1, i_1)| = |A|$$

所以，最多经过 r 次调整的到矩阵 B，由具体的操作可知 A, B 是合同的，且 $|A| = |B|$，所以 B 也是正定矩阵（合同关系是等价关系，等价关系具有传递性，利用命题 4.1(ii) 可得 B 是正定矩阵）。

至此，A 中的 r 阶主子式会被调整为 B 中的顺序主子式，但子式本身是不变的，由定理 4.1 可知，正定矩阵 B 的各阶顺序主子式都大于零，命题得证。

4

提示：t 充分大时，$tE+A$ 是对角严格占优矩阵，通过证明各阶顺序主子式大于零，来完成证明。$|tE_k-(-A_k)|$ 可以看做关于 t 的特征多项式，通过 $t\to+\infty$，可得 $|tE_k-(-A_k)|>0$，完成证明。

5

因为 A 是正定矩阵，所有存在可逆矩阵 T 使得

$$\begin{aligned}T^TAT&=E\\(T^TAT)^{-1}&=E^{-1}\\T^{-1}A^{-1}(T^T)^{-1}&=E\\T^{-1}A^{-1}(T^{-1})^T&=E\end{aligned}$$

因为 T^{-1} 是可逆矩阵，所以 A^{-1},E 合同，由命题 4.1(ii) 可知，A^{-1} 是正定矩阵，

6

由习题 4 可知，存在 c_1,c_2 使得

$$c_1E+A$$
$$c_2E-A$$

都是正定矩阵，取 $c=max(c_1,c_2)$，于是

$$cE+A$$
$$cE-A$$

都是正定矩阵。

由正定矩阵的性质可得，对任意 X，我们有

$$\begin{aligned}X^T(cE+A)X&\geq0\\cX^TEX+X^TAX&\geq0\\cX^TX&\geq-X^TAX\end{aligned}$$

同理

$$X^T(cE-A)X \geq 0$$
$$cX^TX \geq X^TAX$$

综上，

$$|X^TAX| \leq cX^TX$$

7

$|A|<0$，由命题 4.1 的推论（逆否命题）可知，A 不是正定矩阵，于是命题 4.1(iii) 不成立，即存在 $X \neq 0$ 使得

$$X^TAX < 0$$

8

因为 A, B 是正定矩阵，于是对任意 $X \neq 0$，都有

$$X^TAX > 0$$
$$X^TBX > 0$$

两式相加得

$$X^T(A+B)X > 0$$

所以，$A+B$ 是正定矩阵。

9

提示：对 n 进行归纳，证明 $f \geq 0$。

10

二次型表示成矩阵乘积的形式：$f = X^TAX$，因为 f 是正定二次型，所以 $|A|>0$。

- (1)

  设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ 因为 A 是满秩的，所以 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，设为

$$\begin{aligned} \beta &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \\ C &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ \beta &= AC \end{aligned}$$

  于是，对任意 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，有

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \beta \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & -(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) \end{vmatrix} \\ &= |A|[-(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n)] \\ &= -|A|(C^TAC) \end{aligned}$$

  因为 f 是正定二次型，所有 $\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$ 时，$C \neq 0$，$C^TAC > 0$，所以

$$-|A|(C^TAC) < 0$$

  可得 g 是负定二次型。

- (2)

由行列式的性质，我们有

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} + a_{nn} \cdot P_{n-1}
\end{aligned}
$$

利用 (1) 可知

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \leq 0
$$

所以

$$
|A| \leq a_{nn} \cdot P_{n-1}
$$

- (3)

  多次利用 (2):

  $$
  |A| \leq a_{nn} \cdot P_{n-1} \leq a_{nn} a_{n-1\ n-1} P_{n-2} \leq \cdots \leq a_{nn} \cdots a_{22} a_{11}
  $$

- (4)

  因为 T 是可逆的，所以对任意 $x \neq 0$，我们有

  $$
  x^T T^T T x = (Tx)^2 (Tx) > 0
  $$

所以，T^TT 是正定矩阵。

又

$$T^TT = \begin{bmatrix} t_{11}^2+t_{21}^2+\cdots+t_{n1}^2 & & & \\ & t_{12}^2+t_{22}^2+\cdots+t_{n2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{1n}^2+t_{2n}^2+\cdots+t_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

其中未写的部分是任意值。

由 (2) 可知，

$$|T^TT| = |T|^2 \le \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$$

11

设 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 的二次型函数 $Q_f(\alpha)$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 下解析式表达式为 f，矩阵为 A。

- 必要性

  令 $M = L(\epsilon_{i_1},\epsilon_{i_2},\cdots,\epsilon_{i_k})$。把 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 M 内，在 M 的基 $\epsilon_{i_1},\epsilon_{i_2},\cdots,\epsilon_{i_k}$ 下它的矩阵

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{i_1\ i_1} & a_{i_1\ i_2} & \cdots & a_{i_1\ i_k} \\ a_{i_2\ i_1} & a_{i_2\ i_2} & \cdots & a_{i_2\ i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k\ i_1} & a_{i_k\ i_2} & \cdots & a_{i_k\ i_k} \end{bmatrix} \tag{1}$$

  任意 $\alpha \in M$（设坐标为 X）即 $\alpha \in M$，由于 f 是半正定二次型，所以 $Q_f(\alpha) = X^TA_kX > 0$，所以限制在 M 内的 f 也是半正定二次型，于是根据半正定二次型的根据定义，A_k 在 $\mathbb{R}$ 内合同于标准矩阵 D。所以，存在可逆矩阵 T 使得

$$\begin{aligned} |A_k| &= |T^TDT| && (2)\\ &= |T^T||D||T| && (3)\\ &= |D||T|^2 && (4)\\ &\ge 0 && (5) \end{aligned}$$

- 充分性

  todo

  A 所有主子式包括 $|A|$，所以

  $$|A| \geq 0$$

12

- (1)

  f, g 的二次型矩阵分别为：

  $$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
  $$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

  而 $f + g$ 的矩阵为

  $$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= E \end{aligned}$$

- (2)

  设 f 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下为规范型

  $$u_1^2 + \cdots + u_{p_1}^2 - u_{p_1+1}^2 - \cdots - u_{r_1}^2$$

  g 在基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下为规范型

  $$w_1^2 + \cdots + w_{p_2}^2 - w_{p_2+1}^2 - \cdots - w_{r_2}^2$$

  由题设可知 $p_1, p_2 < \frac{n}{2}$，所以 $\epsilon_{p_1+1}, \cdots, \epsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{p_2}$ 不会线性等价（向量数不相同），即存在 $\epsilon_i (i > p_1)$，无法被 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{p_2}$ 不会线性表示，我们有

  $$f(\epsilon_i) \leq 0 \tag{6}$$
  $$g(\epsilon_i) \leq 0 \tag{7}$$

所以

$$(f+g)(\epsilon_i) \leq 0 \tag{8}$$

所以，$f+g$ 一定不是正定二次型。