6.1

张志聪

2025 年 10 月 1 日

1

A 是 n 阶正定矩阵，所以 A 是对称矩阵。

- (1)

  (i)

$$\begin{aligned}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)&=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)A\beta^T\\&=k_1\alpha_1A\beta^T+k_2\alpha_2A\beta^T\\&=k_1(\alpha_1,\beta)+k_2(\alpha_2,\beta)\end{aligned}$$

  (ii)

$$\begin{aligned}(\beta,\alpha)&=[(\beta,\alpha)]^T\\&=(\beta A\alpha^T)^T\\&=\alpha A^T\beta^T\\&=\alpha A\beta^T\\&=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

  注意，因为 (β,α) 是标量。

  (iii) 因为 A 是正定矩阵，所以

$$(\alpha,\alpha)>0\quad(\forall\alpha\in\mathbb{R}^n,\alpha\neq0)$$

  且 (α,α) 当且仅当 $\alpha=0$。

- (2)

  因为 A

  $$\begin{aligned}|(\alpha,\beta)| &\le |\alpha|\cdot|\beta| \\ |\alpha A\beta^T| &\le \sqrt{\alpha A\alpha^T}\cdot\sqrt{\beta A\beta^T}\end{aligned}$$

  注意，不能写成对应坐标相乘在相加的形式，因为这里的 A 不一定是单位矩阵。

4

- 必要性

  α,β 正交，于是

  $$\begin{aligned}(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta) &= (\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta) \\ &= (\alpha,\alpha)+t^2(\beta,\beta) \\ &= |\alpha|^2+t^2|\beta|^2 \\ &\ge |\alpha|^2\end{aligned}$$

  因为 $|\alpha|>0$，所以

  $$|(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)|\ge|\alpha|$$

- 充分性

  反证法，假设 $(\alpha,\beta)\neq 0$。

  由题设可知

  $$\begin{aligned}|\alpha+t\beta| &\ge |\alpha| \\ (\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta) &\ge (\alpha,\alpha) \\ (\beta,\beta)t^2+2(\alpha,\beta)t &\ge 0\end{aligned}$$

  右端是关于 t 的二次多项式，于是判别式为

  $$\Delta = 4(\alpha,\beta)^2>0$$

  于是有个实数根，它在两个实数根之间函数值为负，出现矛盾。

5

- (1)

  我们有

$$
\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta,\alpha+\beta) \\
&= (\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta) \\
&= |\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta|^2
\end{aligned}
$$

  利用命题 1.1 的不等式，我们有

$$2|(\alpha,\beta)| \le 2|\alpha||\beta|$$

  于是

$$|\alpha+\beta|^2 \le |\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 = (|\alpha|+|\beta|)^2$$

  这表明

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

- (2)

  利用 (1)

$$
\begin{aligned}
|\alpha-\gamma| &= |\alpha+\beta-\beta-\gamma| \\
&= |\alpha-\beta+\beta-\gamma| \\
&\le |\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|
\end{aligned}
$$

  这表明

$$d(\alpha,\gamma) \le d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$$

6

提示：利用命题 1.5 的证明思想，得到 $L(\alpha,\beta,\gamma)$ 的正交补。

7

- (1)

  设

  $$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

  于是

  $$\begin{aligned}(\beta,\beta) &= (\beta, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n)\\ &= k_1(\beta,\alpha_1) + k_2(\beta,\alpha_2) + \cdots + k_n(\beta,\alpha_n)\\ &= 0\end{aligned}$$

  所以，$\beta = 0$。

- (2)

  我们有

  $$\begin{aligned}(\beta_1,\alpha_i) &= (\beta_2,\alpha_i)\\ (\beta_1,\alpha_i) - (\beta_2,\alpha_i) &= 0\\ (\beta_1-\beta_2,\alpha_i) &= 0\end{aligned}$$

  由 (1) 可知

  $$\begin{aligned}\beta_1 - \beta_2 &= 0\\ \beta_1 &= \beta_2\end{aligned}$$

15

- 必要性

  由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，令 $M = L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，于是 M 是 V 的线性子空间。(α,β) 是 M 内一个对称双线性函数，又因为 M 是有限维线性空间，所以 (α,α) 是一个正定二次型函数，即 (α,β) 在 M 内的任一组基下的矩阵是正定矩阵。所以 $|D| > 0$。

- 充分性

反证法,假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,即存在不全为 0 的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

令

$$x = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ s \end{bmatrix}$$

考虑 D 的任意一个行向量 D_i，我们有

$$\begin{aligned} D_i x &= (\alpha_i, \alpha_1)k_1 + (\alpha_i, \alpha_2)k_2 + \cdots + (\alpha_i, \alpha_s)k_s \\ &= (\alpha_1, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) \\ &= (\alpha_1, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是

$$Dx = 0$$

因为 $x \neq 0$，这与 $det(D) \neq 0$ 矛盾。

17

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

于是

$$
\begin{aligned}
A^TA &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & \cdots & a_{11}a_{1n} \\ a_{12}a_{11} & a_{12}^2 + a_{22}^2 & \cdots & a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}a_{11} & a_{1n}a_{21} + a_{2n}a_{22} & \cdots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

考虑第一行，

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \pm 1 \\
a_{1i} &= 0 (i = 2, 3, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

逐行往下，命题得证。

18

(i)$|A| \neq 0$，所以 A 是满秩的，A 的列向量可以看做欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

由命题 1.4 可知，正交矩阵 Q 可以看做欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。而施密特正交化方法可以让 A 化为一组标准正交基。

为了讨论的方便，符号与教科书中保持一致（P9）。即 A 的列向量组设为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

Q 的列向量组设为

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |\epsilon_1'|\epsilon_1 \\
\alpha_2 &= \frac{(\alpha_2, \epsilon_1')}{(\epsilon_1', \epsilon_1')}|\epsilon_1'|\epsilon_1 + |\epsilon_2'|\epsilon_2 \\
\alpha_3 &= \frac{(\alpha_3, \epsilon_1')}{(\epsilon_1', \epsilon_1')}|\epsilon_1'|\epsilon_1 + \frac{(\alpha_3, \epsilon_2')}{(\epsilon_2', \epsilon_2')}|\epsilon_2'|\epsilon_2 + |\epsilon_3'|\epsilon_3 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \frac{(\alpha_n, \epsilon_1')}{(\epsilon_1', \epsilon_1')}|\epsilon_1'|\epsilon_1 + \frac{(\alpha_n, \epsilon_2')}{(\epsilon_2', \epsilon_2')}|\epsilon_2'|\epsilon_2 + \cdots + |\epsilon_n'|\epsilon_n
\end{aligned}$$

令

$$T = \begin{bmatrix}
|\epsilon_1'| & \frac{(\alpha_2,\epsilon_1')}{(\epsilon_1',\epsilon_1')}|\epsilon_1'| & \frac{(\alpha_3,\epsilon_1')}{(\epsilon_1',\epsilon_1')}|\epsilon_1'| & \frac{(\alpha_n,\epsilon_1')}{(\epsilon_1',\epsilon_1')}|\epsilon_1'| \\
0 & |\epsilon_2'| & \frac{(\alpha_3,\epsilon_2')}{(\epsilon_2',\epsilon_2')}|\epsilon_2'| & \frac{(\alpha_n,\epsilon_2')}{(\epsilon_2',\epsilon_2')}|\epsilon_2'| \\
0 & 0 & |\epsilon_3'| & \frac{(\alpha_n,\epsilon_2')}{(\epsilon_3',\epsilon_3')}|\epsilon_3'| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & |\epsilon_n'|
\end{bmatrix}$$

综上，

$$A = QT$$

$|\epsilon_i'| \neq 0$ 书中也有阐明。

(ii) QT 的唯一性证明。

假设存在 Q_1, T_1 使得

$$A = Q_1 T_1$$

于是

$$
\begin{aligned}
QT &= Q_1T_1 \\
Q^TQT &= Q^TQ_1^TT_1 \\
T &= Q^TQ_1^TT_1 \\
TT_1^{-1} &= Q^TQ_1^TT_1T_1^{-1} \\
TT_1^{-1} &= Q^TQ_1^T
\end{aligned}
$$

T_1 是上三角矩阵，那么由第二章 §5 习题 18 可知 T_1^{-1} 也是上三角矩阵。且通过简单计算可知两个上三角矩阵的乘积也是上三角矩阵，所以 TT_1^{-1} 是上三角矩阵。

由于 Q, Q_1 都是正交矩阵，所以

$$
\begin{aligned}
(Q^TQ_1^T)(Q^TQ_1^T)^T &= (Q^TQ_1^T)(Q_1Q) \\
&= Q^T(Q_1^TQ_1)Q \\
&= Q^TEQ \\
&= E
\end{aligned}
$$

所以 $Q^TQ_1^T$ 也是正交矩阵。

综上，TT_1^{-1} 既是上三角矩阵，也是正交矩阵。由习题 17 可知，TT_1^{-1} 是对角矩阵，且对角线上的元素为 ± 1。

又因为 T, T_1^{-1} 对角线上的元素都大于 0，于是 TT_1^{-1} 主对角线上元素都大于零。

所以 TT_1^{-1} 是单位矩阵，于是可得

$$
\begin{aligned}
T^{-1} &= T_1^{-1} \\
T &= T_1
\end{aligned}
$$

进而 $Q = Q_1$，唯一性得证。

19

A 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 C 使得

$$
A = C^TC
$$

因为 C 可逆，于是由习题 18 可知，存在正交矩阵和上三角矩阵 T 使得

$$C = QT$$

所以

$$\begin{aligned} A &= (QT)^T(QT) \\ &= T^TQ^TQT \\ &= T^TET \\ &= T^TT \end{aligned}$$

20

解题思路：

(i) 存在性

设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，于是，$\forall \alpha \in V$ 可表示为

$$\alpha = k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n$$

于是

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n) \\ &= k_1f(\epsilon_1) + k_2f(\epsilon_2) + \cdots + k_nf(\epsilon_n) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_n\epsilon_n, \beta) \\ &= k_1(\epsilon_1, \beta) + k_2(\epsilon_2, \beta) + \cdots + k_n(\epsilon_n, \beta) \end{aligned}$$

题目希望得证

$$f(\alpha) = (\alpha, \beta)\beta$$

如果

$$f(\epsilon_i) = (\epsilon_i, \beta)(i = 1, 2, \cdots, n)$$

即可完成证明。

设

$$\beta = f(\epsilon_1)\epsilon_1 + f(\epsilon_2)\epsilon_2 + \cdots + f(\epsilon_n)\epsilon_n$$

即可满足要求。

(ii) 唯一性

假设存在 β_1 也满足题设，于是对任意 $\alpha \in V$ 都有

$$f(\alpha) = (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta_1)$$

所以

$$(\alpha, \beta - \beta_1) = 0$$

设 $\alpha = \beta - \beta_1$，则

$$(\beta - \beta_1, \beta - \beta_1) = 0$$

由内积的定义可知

$$\begin{aligned}\beta - \beta_1 &= 0 \\ \beta &= \beta_1\end{aligned}$$

21

β 到 $\alpha + M$ 记为

$$d(\beta, \alpha + M)$$

按照定义可知

$$d(\beta, \alpha + M) = \min_{\gamma \in \alpha + M}(|\beta - \gamma|)$$

任意 $\gamma = \alpha + m \quad (m \in M)$，于是

$$\begin{aligned}\beta - \gamma &= \beta - (\alpha + m) \\ &= \beta - \alpha - m \\ &= \beta_1 + \beta_2 - m \\ &= \beta_1 - m + \beta_2\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
(\beta-\gamma,\beta-\gamma) &= (\beta_1-m+\beta_2,\beta_1-m+\beta_2)\\
&= (\beta_1-m,\beta_1-m)+(\beta_1-m,\beta_2)+(\beta_2,\beta_1-m)+(\beta_2,\beta_2)\\
&= (\beta_1-m,\beta_1-m)+0+0+(\beta_2,\beta_2)\\
&= (\beta_1-m,\beta_1-m)+(\beta_2,\beta_2)
\end{aligned}
$$

可知 $m=\beta_1$ 时，$(\beta-\gamma,\beta-\gamma)$ 取最小值 (β_2,β_2)，所以

$$d(\beta,\alpha+M)=|\beta_2|$$

22

处理方式与习题 21 一致。

任意

$$
\begin{aligned}
\alpha+m\in\alpha+M \quad (m\in M)\\
\beta+n\in\beta+N \quad (n\in N)
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
(\beta+n)-(\alpha+m) &= \beta-\alpha+n-m\\
&= \beta_1+n-m+\beta_2
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
(\beta+n,\alpha+m) &= (\beta_1+n-m+\beta_2,\beta_1+n-m+\beta_2)\\
&= (\beta_1+n-m,\beta_1+n-m)+(\beta_1+n-m,\beta_2)+(\beta_2,\beta_1+n-m)+(\beta_2,\beta_2)
\end{aligned}
$$

因为 $n-m\in M+N$，所以 $\beta_1+n-m\in M+N$，所以

$$
\begin{aligned}
&(\beta_1+n-m,\beta_1+n-m)+(\beta_1+n-m,\beta_2)+(\beta_2,\beta_1+n-m)+(\beta_2,\beta_2)\\
&=(\beta_1+n-m,\beta_1+n-m)+0+0+(\beta_2,\beta_2)\\
&=(\beta_1+n-m,\beta_1+n-m)+(\beta_2,\beta_2)
\end{aligned}
$$

可知 $n-m=\beta_1$ 时，$(\beta+n,\alpha+m)$ 取最小值 (β_2,β_2)，所以

$$d=|\beta_2|$$

23