习题 2.1

张志聪

2025 年 6 月 22 日

2

只写关键步骤

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

我们有

$$\begin{aligned}|\frac{n!}{n^n}-0|&=|\frac{n!}{n^n}|\\&=\frac{1\times 2\times\cdots n}{n\times n\times\cdots\times n}\\&<\frac{1}{n}\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}sin\frac{\pi}{n}=0$。

不妨令 $n>2$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，我们有

$$0<sinx<x<tanx$$

于是，我们有

$$|sin\frac{\pi}{n}-0|=sin\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{n}<\epsilon$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$。

令 $h=a-1>0$，于是，我们有

$$\begin{aligned}|\frac{n}{a^n}|&=\frac{n}{a^n}\\&=\frac{n}{(1+h)^n}\\&\leq\frac{n}{1+nh}\end{aligned}$$

9

- (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$。

  $$\begin{aligned}|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0| &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

  因为

  $$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$$

  于是，我们有

  $$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

- (2) $\lim_{n\to infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$。

  $$\begin{aligned}|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0| &= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}\\ &= \frac{n^2+n}{2n^3}\\ &= \frac{n^2}{2n^3}+\frac{n}{2n^3}\\ &= \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\\ &\leq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\\ &= \frac{1}{n}<\epsilon\end{aligned}$$

- (3)

对于偶数，N 是好找的。对于奇数，我们有

$$\begin{aligned}
|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1| &= |\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}}-1| \\
&= |\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1| \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{n}}-1<\epsilon
\end{aligned}$$