习题 2.2

张志聪

2025 年 7 月 1 日

1

- (3)

  它的偶数项组成的子列为

$$\frac{2^n+3^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

  我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=1$$

  利用定理 2.7（四则运算）可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{1}{3}$$

  它的奇数项组成的子列为

$$\frac{3^n-2^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}$$

  我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^{n+1}+1=1$$

利用定理 2.7（四则运算）可知

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(\frac{2}{3})^{n+1}+1}=\frac{1}{3}$$

综上，数列满足偶数项极限与奇数项极限相等，利用第一节例 8 可得，极限为 $\frac{1}{3}$。

4

- (1)

  关键点

  $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

- (2)

  我们有

  $$\begin{aligned}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}&=2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}}\\&=2^{1-\frac{1}{2^n}}\\&=\frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}\end{aligned}$$

  又因为

  $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{2}=1$$

  （证明与第一节例 5 相同）利用极限的四则运算（定理 2.7），我们有

  $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2$$

- (3)

  这道题要找到求和公式。可以观察出分子是等差数列，分母是等比数列，这种大部分都是采用错位相减的方式。

  $$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\\\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

于是，两式相减

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}
$$

是等比数列，其和为 $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$。于是，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
S_n &= 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} &= \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

- (4)

  我们有

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}} \\
&= \frac{\sqrt[n]{n-1}}{\sqrt[n]{n}}
\end{aligned}
$$

  当 $n \geq 2$ 时，我们有

$$
1 \leq \sqrt[n]{n-1} \leq \sqrt[n]{n}
$$

  利用追敛性和例 2 可得

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-1} = 1
$$

  利用极限的四则运算，我们有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} &= \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-1}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- (5)

  我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2} &< \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{n+1}{n^2}\end{aligned}$$

  又因为

$$\begin{aligned}0<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0\end{aligned}$$

  由迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$$

- (6)

  我们有

$$\begin{aligned}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\end{aligned}$$

  又因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\\ &= 1\end{aligned}$$

  同理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

  由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=1$$

8

- (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$

  因为 $n^2 \geq n^2-1=(n-1)(n+1)$，于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}2n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}
\end{aligned}
$$

  又因为

$$
0 \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}
$$
$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0
$$

  由夹逼定理可得

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0
$$

- (2)

  先考虑 $\sum\limits_{p=1}^{n}p!$，增大部分项的值（前 $n-2$ 项），我们有

$$
\begin{aligned}
n! \leq \sum_{p=1}^{n}p! &\leq (n-2)(n-2)!+(n-1)!+n! \\
&= (n-1)(n-2)!-(n-2)!+(n-1)!+n! \\
&= (n-1)!-(n-2)!+(n-1)!+n! \\
&\leq 2(n-1)!+n!
\end{aligned}
$$

  因为

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!}=1
$$
$$
\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)!+n!}{n!}=1
$$

  由迫敛性可得

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=1
$$

- (3)

  我们有

  $$(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}[(1+\frac{1}{n})^{\alpha}-1]$$

  因为 $1+\frac{1}{n}>1$，且 $0\leq\alpha<1$，所以

  $$(1+\frac{1}{n})^{\alpha}<1+\frac{1}{n}$$

  所以

  $$\begin{aligned}(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}&=n^{\alpha}[(1+\frac{1}{n})^{\alpha}-1]\\&\leq n^{\alpha}[1+\frac{1}{n}-1]\\&=n^{\alpha}\frac{1}{n}\\&=n^{\alpha-1}\\&=\frac{1}{n^{1-\alpha}}\end{aligned}$$

  又因为

  $$0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}$$
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$$

  由迫敛性可知

  $$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=0$$

- (4)

  我们有

  $$\begin{aligned}&(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})\\&=\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})}{1-\alpha}\\&=\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}\\&=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}\end{aligned}$$

因为 $|\alpha| < 1$，于是

$$0 \leq \alpha^{2^{n+1}} < \alpha^n$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$$

由迫敛性可知

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{2^{n+1}} = 0$$

利用极限的四则运算可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n}) &= \frac{1}{1-\alpha} - 0 \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\end{aligned}$$

9

设

$$a = max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$

我们有

$$\sqrt[n]{a^n} = a \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{a^n + a^n + \cdots + a^n} = \sqrt[n]{ma^n} = \sqrt[n]{m}a$$

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m}a &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} \lim_{n\to\infty} a \\ &= 1 \cdot a = a\end{aligned}$$

由迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$$