习题 3.1

张志聪

2025 年 7 月 10 日

1

- (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x}=6$；

  不放限制 $x>0$，对任意 $\epsilon>0$，取 $M=\frac{5}{\epsilon}$，则当 $x>M$ 时，有

  $$|\frac{6x+5}{x}-6|=\frac{5}{x}<\epsilon$$

  所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{x}=6$。

- (2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+10)=2$；

  我们有

  $$\begin{aligned}|(x^2-6x+10)-2| &= |x^2-6x+8| \\ &= |(x-2)(x-4)|\end{aligned}$$

  若限制 x 于 $|x-2|<1$，则

  $$|x-4|\le|x-2|+2<1+2=3$$

  $\therefore$

  $$\begin{aligned}|(x^2-6x+10)-2| &= |(x-2)(x-4)| \\ &< 3|x-2|\end{aligned}$$

  对任意的 ϵ，令

  $$3|x-2|<\epsilon$$
  $$|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$$

于是，只要取 $\delta = min(1, \frac{\epsilon}{3})$，则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时，就有

$$|(x^2 - 6x + 10) - 2| < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 6x + 10) = 2$。

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-5}{x^2-1} = 1$；
  不妨限制 $|x| > 1$。

  我们有

$$\begin{aligned} |\frac{x^2-5}{x^2-1} - 1| &= |\frac{-4}{x^2-1}| \\ &= \frac{4}{x^2-1} \end{aligned}$$

  对任意的 $\epsilon > 0$，令

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^2-1} &< \epsilon \\ 4 &< (x^2-1)\epsilon \\ \frac{4}{\epsilon} + 1 &< x^2 \\ \sqrt{\frac{4}{\epsilon} + 1} &< |x| \end{aligned}$$

  于是，只要取 $M = max(1, \sqrt{\frac{4}{\epsilon} + 1})$，则当 $|x| > M$ 时，有

$$|\frac{x^2-5}{x^2-1} - 1| = \frac{4}{x^2-1} < \epsilon$$

  所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-5}{x^2-1} = 1$。

- $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$；
  不妨限制 $0 < x < 2$。

  我们有

$$\begin{aligned} |\sqrt{4-x^2} - 0| &= \sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{2+x} \cdot \sqrt{2-x} \\ &< 2\sqrt{2-x} \end{aligned}$$

对任意 $\epsilon > 0$，令

$$2\sqrt{2-x} < \epsilon$$
$$4(2-x) < \epsilon^2$$
$$(2-x) < \frac{\epsilon^2}{4}$$

于是取 $\delta = \frac{\epsilon^2}{4}$，则当 $0 < 2-x < \delta$ 即 $2-\delta < x < 2$ 时，

$$|\sqrt{4-x^2} - 0| < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$。

- (5) $\lim\limits_{x\to x_0} cos(x) = cos(x_0)$.

  我们有

$$\begin{aligned}
|cos(x) - cos(x_0)| &= |-2sin(\frac{x+x_0}{2})sin(\frac{x-x_0}{2})| \\
&= |2sin(\frac{x+x_0}{2})sin(\frac{x-x_0}{2})| \\
&= 2|sin(\frac{x+x_0}{2})||sin(\frac{x-x_0}{2})| \\
&\le 2|sin(\frac{x-x_0}{2})| \\
&\le 2|\frac{x-x_0}{2}| \\
&= |x-x_0|
\end{aligned}$$

  于是，对任意的 $\epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $|x-x_0| < \delta$ 时，

$$|cos(x) - cos(x_0)| \le |x-x_0| < \delta = \epsilon$$

  所以 $\lim\limits_{x\to x_0} cos(x) = cos(x_0)$。

2

设函数 f 在点 x_0 的某个空心领域 $U^\circ(x_0,;\delta')$ 内有定义，A 为定数。若存在 $\epsilon_0 > 0$，对任意的 $\delta > 0$，存在 $x \in U^\circ(x_0;\delta)$，使得

$$|f(x) - A| \ge \epsilon_0,$$

则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时不以 A 为极限，记做

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ne A$$

3

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，由定义可知，对 $\forall\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

令

$$h = x - x_0$$
$$x = x_0 + h$$

于是对 $\forall\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，即 $0 < |h| < \delta$，有

$$|f(x_0 + h) - A| < \epsilon$$

由定义可知

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = A$$

4

(1)
利用三角不等式

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

先证明

$$||a| - |b|| \le |a - b|$$

因为 $a = a - b + b, b = b - a + a$，利用三角不等式，我们有

$$|a| \le |a - b| + |b|$$
$$|b| \le |b - a| + |a|$$

移项得

$$|a| - |b| \le |a - b|$$
$$|b| - |a| \le |b - a| = |a - b|$$

综上

$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

(2)

已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，由定理可知 $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-A|<\epsilon$$

由 (1) 可知，

$$||f(x)|-|A|| \leq |f(x)-A| < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$。

(3) 反过来的情况，个人觉得书中的表述有问题，应该是：
$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$，如果 $A=0$，必能推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。（等于其他值，可以举出反例）

若 $A=0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=0$ 可知，对 $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，有

$$\begin{aligned} ||f(x)|-0| &< \epsilon \\ ||f(x)|| &< \epsilon \\ |f(x)| &< \epsilon \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$。

5

略

6

- (1)
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$；

$x < 0$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-(-1)| &= |\frac{|x|}{x}+1| \\ &= |\frac{-x}{x}+1| \\ &= |-1+1| \\ &= 0\end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，取 $\delta > 0$，只要 $0 < 0 - x < \delta$，有

$$|f(x)-(-1)| = 0 < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$。

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$；
  $x > 0$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-1| &= |\frac{|x|}{x}-1| \\ &= |\frac{x}{x}-1| \\ &= |1-1| \\ &= 0\end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，取 $\delta > 0$，只要 $0 < x - 0 < \delta$，有

$$|f(x)-1| = 0 < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$。

- (2)

  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$；
    不妨设 $-1 < x < 0$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-(-1)| &= |[x]+1| \\ &= |-1+1| \\ &= 0\end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，取 $1 > \delta > 0$，只要 $0 < 0 - x < \delta$，有

$$|f(x) - (-1)| = 0 < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$。

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$；
  不妨设 $0 < x < 1$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x) - 0| &= |[x] - 0| \\ &= |[x]| \\ &= 0\end{aligned}$$

  于是对任意 $\epsilon > 0$，取 $1 > \delta > 0$，只要 $0 < x - 0 < \delta$，有

$$|f(x) - 0| = 0 < \epsilon$$

  所以 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$。

- (3)

  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$；
    不妨设 $x < 0$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x) - 1| &= |1 + x^2 - 1| \\ &= x^2\end{aligned}$$

    对任意 $\epsilon > 0$，

$$\begin{aligned}x^2 &< \epsilon \\ |x| &< \sqrt{\epsilon} \\ x &> -\sqrt{\epsilon}\end{aligned}$$

    于是，对任意的 ϵ，取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$，则 $0 < 0 - x < \sqrt{\epsilon}$，有

$$|f(x) - 1| = x^2 < \epsilon$$

    所以 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$。

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$；

  不妨设 $x > 0$，我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| &= |2^x - 1| \\ &= 2^x - 1 \end{aligned}$$

  对 $\epsilon > 0$，

$$\begin{aligned} 2^x - 1 &< \epsilon \\ 2^x &< 1 + \epsilon \\ x &< \log_2(1 + \epsilon) \end{aligned}$$

  于是，$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \log_2(1 + \epsilon)$，则 $0 < x - 0 < \delta$，有

$$|f(x) - 1| = 2^x - 1 < \epsilon$$

  所以 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$。

7

已知 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$，由定义可知，$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$，使得当 $x > M$ 时，有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

由于当 $0 < x < \frac{1}{M}$，有

$$\frac{1}{x} > M$$

于是取

$$\delta = \frac{1}{M}$$

则当 $0 < x < \delta$ 时，有

$$|f(\frac{1}{x}) - A| < \epsilon$$

所以 $\lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = A$。

8

- $x_0 \in (0,1)$;

  设任意 $\epsilon > 0$。

  如果 $x \in (0,1)$ 是无理数，我们有

  $$\begin{aligned} |R(x) - 0| &= |0 - 0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

  如果 $x \in (0,1)$ 是有理数，那么可以表示成 $\frac{p}{q}$，我们有

  $$\begin{aligned} |R(x) - 0| &= |R(x)| \\ &= |\frac{1}{q}| \\ &= \frac{1}{q} \end{aligned}$$

  所以只需要避开有限个分母 $q \le \frac{1}{\epsilon}$ 的有理数，就能保证 $R(x) = \frac{1}{q} < \epsilon$。

  定义集合

  $$A := \{q : q \in \mathbb{N}^+, q \le \frac{1}{\epsilon}\}$$

  是有限集合，取 $M = max(A)$。因为 $x \in (0,1)$，那么集合

  $$B := \{\frac{p}{q} : q, p \in \mathbb{N}^+, p < q \le M\}$$

  这些是落在 $(0,1)$ 且分母不超过 M 的所有有理数。B 也是有限集合，取 $\delta' = min\{|x - x_0| : x \in B, x \neq x_0\}$。为了防止出界，取 $\delta = min\{\delta', x_0 - 0, 1 - x_0\}$，于是，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，若 x 是无理数，$R(x) = 0$；若 x 是有理数，那么因为 $x \notin B$，所以 $R(x) < \epsilon$

  这两种情况和起来满足：

  $$|R(x) - 0| < \epsilon$$

  所以 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$。

- $x_0 = 0$;

  只需修改 x 的取值范围：

  $$0 < x - 0 < \delta$$

- $x_0 = 1$.

  只需修改 x 的取值范围：

$$0 < 1 - x < \delta$$