

总结 2.1

张志聪

2025 年 7 月 13 日

1

说明 1. 核心:

1. 已知极限, 按 $\epsilon - N$ 定义证明。

题型 (1), 最终的目标是通过只包含 ϵ 变量的方式, 表示出 n 的取值范围 (即: N)。但往往数列的每项的表达式复杂, 无法直接用 ϵ 表示出 n 的值。所以, 问题主要围绕着化简数列的技巧展开:

- 分式, 分母缩小。(例 3) (§2 例 1)。
- n 次幂 (例 4), 运用 $(1+h)^n \geq 1+nh$ 或使用二项展开 $(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ (§2 例 2), 进行降幂。
- $\frac{1}{n}$ 次幂 (例 5)。

先升到 1 次幂:

令

$$\alpha_n = a^{\frac{1}{n}} - a$$

然后

$$\begin{aligned}\alpha_n + a &= a^{\frac{1}{n}} \\ (\alpha_n + a)^n &= a\end{aligned}$$

左侧降幂

- 累积形式（例 6），以累积中的合适项，代替其他项或部分项，进行放大。
- 利用已有的极限。§2.3。