习题 2.3

张志聪

2025 年 7 月 6 日

1

- (1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$；

  我们有

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}
\end{aligned}$$

  设

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

于是可得，

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1 \\ b_3 &= a_2 \\ &\vdots \\ b_n &= a_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

由数列改变有限项，极限不变可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= e \end{aligned}$$

由极限的四则运算可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

- (3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$;
  我们有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

设

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ b_n &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

可得数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的子列，于是极限相同，所以

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= e \end{aligned}$$

由极限的四则运算可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= \frac{e}{1} \\
&= e
\end{aligned}
$$

- (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

  我们有

  $$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$$

  由 $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ 是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的子列可得

  $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$$

  利用 §2 习题 10 可得

  $$
  \begin{aligned}
  \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \\
  &= 1
  \end{aligned}
  $$

3

- (1)

  易得 2 是数列的上界（对 n 进行归纳即可）。

  证明数列是单增的。对任意 n，我们有

  $$
  \begin{aligned}
  a_{n+1} &= \sqrt{2a_n} \\
  a_{n+1}^2 &= 2a_n
  \end{aligned}
  $$

  假设 $a_n > a_{n+1}$，即 $a_{n+1} < a_n < 2$ 可得

  $$a_{n+1}^2 < 2a_n$$

存在矛盾，假设不成立，于是 $a_n \leq a_{n+1}$。

由单调有界定理，数列有极限，记为 a。由于

$$a_{n+1}^2 = 2a_n$$

对上式两边取极限得

$$a^2 = 2a$$

解得 $a = 0$ 或 $a = 2$.

由数列极限的保不等式性，$a = 0$ 是不可能的，故极限是 2。

- (2)

  先证明是单调递增的。

  设

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_{n+1} &= \sqrt{c + b_n} \end{aligned}$$

  于是

$$b_n < a_n$$

  （对 n 进行归纳即可）

  且我们有

$$a_n = \sqrt{c + b_n}$$

  所以

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{c + a_n} \\ &> \sqrt{c + b_n} \\ &= a_n \end{aligned}$$

  综上，数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增的。

  证明数列的上界为 $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。

思维过程

题目说求极限，记为 a，通过递归公式

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$$

对等式两边求极限

$$\begin{aligned} a^2 &= c + a \\ a^2 - a - c &= 0 \end{aligned}$$

解为 $\frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$，由于 $a_1 = \sqrt{c} > 0$ 且由数列递增可知，$a_n > \sqrt{c}$，由极限保不等式性可知，解不会是 $\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$。
由于单调有界定理可知，极限与数列的上确界是相等的，我们可以把上界设为 $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。

（以上是思考过程，不用写到证明过程中）

证明，数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的上界是 $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。

对 n 进行归纳。

$n = 1$ 时，$a_1 = \sqrt{c} < \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。

归纳假设 $n = k$ 时，$a_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。

$n = k + 1$ 时，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{c + a_n} \\ &\leq \sqrt{c + \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}} \end{aligned}$$

因为 $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ 是

$$\sqrt{c + x} = x$$

的解，所以

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \sqrt{c + \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}} \\ &= \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \end{aligned}$$

归纳完成。

由单调有界定理可得，数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛，然后可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$（运算方式与思考过程一样，不做赘述）。

- (3)

  我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} \\
&= \frac{c}{n+1}
\end{aligned}
$$

  于是，取 $N > c, N \in \mathbb{N}^+$，对任意 $n \geq N$ 都有

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1
$$

  即 a_n 从第 N 项开始，单调递减。

  又因为，任意 n 都有

$$
a_n > 0
$$

  由单调有界定理可知，a_n 收敛

  设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，由于

$$
a_{n+1} = \frac{n+1}{c} a_n
$$

  对上式两边取极限得 $a = a \cdot 0 = 0$。故有

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = 0
$$

5

我们有

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= (\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}) + (\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\
&< \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

对任意的 $\epsilon > 0$，取 $N = \frac{1}{\epsilon}$，则对一切 $n > m > N$，有

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

所以，数列满足柯西条件。

6

提示：子列收敛，则说明子列有界，利用 $\{a_n\}$ 的单调性可得，$\{a_n\}$ 也是有界的。

7

易得 $\{a_n\}$ 单调递减且 0 是 $\{a_n\}$ 下界，所以 $\{a_n\}$ 收敛，记为 a。

- (1) 方法一

  因为 $a_n \geq 0$，由保不等式性可知

  $$a \geq 0$$

  取 $1 < l' < l$，由保号性可知，存在 N，使得只要 $n \geq N$ 都有

  $$\frac{a_n}{a_{n+1}} > l'$$
  $$a_n > l' a_{n+1}$$

对上式两边取极限，并由保不等式性得

$$\begin{aligned} a &\geq al' \\ 0 &\geq a(l'-1) \\ 0 &\geq a \end{aligned}$$

综上，$a=0$，即：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- 方法二

  我们有

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} a_{n+1}$$

  两边取极限

$$\begin{aligned} a &= l \cdot a \\ (l-1)a &= 0 \end{aligned}$$

  因为 $(l-1) \neq 0$，于是 $a=0$。

- 方法三

  设 $1 < t < l$，由保号性可知，存在 N，使得只要 $n \geq N$ 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > t$$

  即

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{t}$$

  我们有

$$0 < a_n = a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_N (\frac{1}{t})^{n-N}$$

  由追敛性可知，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

9

(1)

先证明题目中的不等式是如何推导出来的。

$$
\begin{aligned}
b^{n+1} &= (a+(b-a))^{n+1} \\
&= a^{n+1} + C_{n+1}^{1}a^{n}(b-a) + C_{n+1}^{2}a^{n-1}(b-a)^{2} + \cdots + C_{n+1}^{n+1}(b-a)^{n+1} \\
&> a^{n+1} + C_{n+1}^{1}a^{n}(b-a) \\
&= a^{n+1} + (n+1)a^{n}(b-a)
\end{aligned}
$$

移项得

$$b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^{n}(b-a)$$

(2)

我们有

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}
\end{aligned}
$$

我们需要证明

$$a_n \geq a_{n+1}$$

令

$$
\begin{aligned}
a &= 1+\frac{1}{n+1} \\
b &= 1+\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

利用不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &> (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\frac{(n+1)\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2}}\\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\frac{2n^3+5n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}\\
&> \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}
\end{aligned}$$

于是 $a_n > a_{n+1}$，数列 $\{a_n\}$ 单调递减。

10

由习题 9 可知

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

单调递减且有界。又因为

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$$

于是可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \inf(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$$

由下确界的定义可知，任意 $n \in \mathbb{N}^+$，都有

$$e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

我们有

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^{n+1} &= (1+\frac{1}{n})^{n}(1+\frac{1}{n})\\
&= (1+\frac{1}{n})^{n} + (1+\frac{1}{n})^{n}\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = \sup\{(1+\frac{1}{n})^n\}$，于是可得，对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 都有

$$(1+\frac{1}{n})^n < e$$

所以

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^{n+1} &= (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \\ &= (1+\frac{1}{n})^n + (1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{n} \\ &< (1+\frac{1}{n})^n + \frac{e}{n} \\ &< (1+\frac{1}{n})^n + \frac{3}{n}\end{aligned}$$

综上可得

$$e \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1} < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{3}{n}$$

可得

$$0 < e - (1+\frac{1}{n})^n < \frac{3}{n}$$

即

$$\left|e - (1+\frac{1}{n})^n\right| < \frac{3}{n}$$

11

（1）先证明 $\forall n$ 有 $a_n > b_n$。

对 n 进行归纳。

$n = 1$ 时，由题设可知 $a_1 > b_1 > 0$。
归纳假设，$n = k$ 时，$a_k > b_k > 0$ 成立。
$n = k + 1$ 时，我们有

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} > \sqrt{a_k b_k} = b_{k+1}$$

归纳完成，命题成立。

（2）证明极限存在。

我们有

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

于是可得 $\{a_n\}$ 单减。

我们有

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > \sqrt{b_n b_n} = b_n$$

于是可得 $\{b_n\}$ 单增。

又 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 有

$$b_1 \leq b_n < a_n \leq a_1$$

可得 $\{a_n\}$ 单调递减且有界，$\{b_n\}$ 单调递增且有界，由单调有界定理可知，两个数列极限存在。

（3）极限相等。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$。我们有

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

对上式两边取极限得

$$\begin{aligned} a &= \frac{a+b}{2} \\ a &= b \end{aligned}$$