

习题 1.3

张志聪

2025 年 7 月 12 日

12

- (1) 当 $x > 0$ 时, $1 - x < x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \leq 1$ 。

总有

$$\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \leq \frac{1}{x}$$

于是 ($x > 0$), 我们有

$$x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \leq x \frac{1}{x} = 1$$

因为

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$$

所以 ($x > 0$)

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{x} - 1\right) &\leq x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \\ 1 - x &\leq x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \end{aligned}$$

综上,

$$1 - x < x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \leq 1$$

- (2) 当 $x < 0$ 时, $1 \leq x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil < 1 - x$

总有

$$\left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

于是 ($x < 0$), 我们有

$$x \left[\frac{1}{x} \right] \geq x \frac{1}{x} = 1$$

因为

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x} \right]$$

所以 ($x < 0$),

$$\begin{aligned} x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) &\leq x \left[\frac{1}{x} \right] \\ 1 - x &\geq x \left[\frac{1}{x} \right] \end{aligned}$$