习题 3.2

张志聪

2025 年 7 月 13 日

1

- (6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

  分子有理化

  关键步骤：

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \frac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)}
\end{aligned}
$$

- (8)

  分子分母同时除以 x^{90}。

  关键步骤：

$$\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}} = \frac{(3+\frac{6}{x})^{70}(8-\frac{5}{x})^{20}}{(5-\frac{1}{x})^{90}}$$

  利用四则运算

$$\lim_{x\to\infty}(3+\frac{6}{x})^{70} = 3^{70}$$

3

- (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$。
  - 方法一（直接证）：

    $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，由定义可知 $\forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有

    $$|f(x) - A| < \epsilon$$

    类似地，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，由定义可知 $\forall\epsilon > 0, \exists\delta_2 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，有

    $$|g(x) - B| < \epsilon$$

    综上，取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

    $$|f(x)g(x) - AB| < \epsilon|A| + \epsilon|B| + \epsilon^2$$

    因为 $|A|, |B|$ 是定值，ϵ 是任意的，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$。

    说明 1. 以上证明用到了一个命题：
    设 $\epsilon, \delta > 0$，如果 $|x - y| < \epsilon, |z - w| < \delta$，那么

    $$|xz - yw| < \epsilon|y| + \delta|w| + \epsilon\delta$$

    或

    $$|xz - yw| < \epsilon|z| + \delta|x| + \epsilon\delta$$

    证明：

    记

    $$a := x - y$$
    $$b := z - w$$

    那么

    $$x = y + a$$
    $$z = w + b$$

于是

$$
\begin{aligned}
|xz - yw| &= |(y+a)(w+b) - yw| \\
&= |yw + by + aw + ab - yw| \\
&= |by + aw + ab| \\
&\le |by| + |aw| + |ab| \\
&\le |b||y| + |a||w| + |a||b|
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
|a| &\le \epsilon \\
|b| &\le \delta
\end{aligned}
$$

所以，

$$
|xz - yw| < \epsilon|y| + \delta|w| + \epsilon\delta
$$

- 方法二（加减相同项）；

  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，由定义可知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|f(x) - A| &< \epsilon \\
A - \epsilon < f(x) &< A + \epsilon
\end{aligned}
$$

  类似地，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，由定义可知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|g(x) - B| &< \epsilon \\
B - \epsilon < g(x) &< B + \epsilon
\end{aligned}
$$

  我们有

$$
\begin{aligned}
|f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| \\
&= |g(x)(f(x) - A) + A(g(x) - B)| \\
&\le |g(x)(f(x) - A)| + |A(g(x) - B)| \\
&\le |g(x)||f(x) - A| + |A||g(x) - B|
\end{aligned}
$$

由局部有界性可知，$\exists M > 0, \delta_3 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_3$ 时，有

$$|g(x)| < M$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - AB| &\leq |g(x)||f(x) - A| + |A||g(x) - B| \\
&\leq M\epsilon + |A|\epsilon \\
&= (M + |A|)\epsilon
\end{aligned}$$

由于 $M + |A|$ 是定值，ϵ 是任意的，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$。

5

因为 $f(x) \geq 0$，由保不等性可得

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \geq 0$$

关键步骤：

$$\begin{aligned}
|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{A}| &= |\frac{(\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{A})[(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1} + (\sqrt[n]{f(x)})^{n-2}(\sqrt[n]{A}) + \cdots + (\sqrt[n]{A})^{n-1}]}{(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1} + (\sqrt[n]{f(x)})^{n-2}(\sqrt[n]{A}) + \cdots + (\sqrt[n]{A})^{n-1}}| \\
&= \frac{f(x) - A}{(\sqrt[n]{f(x)})^{n-1} + (\sqrt[n]{f(x)})^{n-2}(\sqrt[n]{A}) + \cdots + (\sqrt[n]{A})^{n-1}} \\
&\leq \frac{f(x) - A}{(\sqrt[n]{A})^{n-1}}
\end{aligned}$$

6

提示：与例 4 证明方式相同，只是 $0 < a < 1$ 时，a^x 是单减的。

7

- (1)

  否；举一个反例

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

此时 $A = B$。

- (2)

  是；证明：

  取 $c = \frac{A+B}{2}$，于是

  $$B < c < A$$

  $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，由保号性可知，存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有

  $$f(x) > c$$

  $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$，由保号性可知，存在 $\delta_2 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，有

  $$c > g(x)$$

  取 $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

  $$f(x) > g(x)$$

8

- (3)

  利用 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$。设 $a = x, b = (-1)$，于是，我们有

  $$\begin{aligned} x^3 + 1 = x^3 - (-1) &= [x - (-1)](x^2 + x(-1) + (-1)^2) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

  我们有

  $$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3+1} &= \frac{(x^2 - x + 1) - 3}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{x-2}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x^2-x+1}$$
$$= -1$$