$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$(x^n - 1) = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$$

命题 1. $x > 0$，$n \in \mathbb{N}$，那么

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

证明：

对 n 进行归纳即可。

命题 2. $x \geq 1$，$n \in \mathbb{N}^+$，那么

$$x^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{x-1}{n}$$

证明：

$x = 1$，命题易证。

$x > 1$，对 n 进行归纳，$n = 1$ 时，命题成立。
归纳假设 $n = k - 1$ 时，命题成立，即

$$x^{\frac{1}{k-1}} - 1 \leq \frac{x-1}{k-1}$$

成立。
现在证明 $n = k$ 时，需证明

$$x^{\frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{x-1}{k}$$

不等式换个形式

$$x \leq (1+\frac{x-1}{k})^k$$

利用命题 1，我们有

$$(1+\frac{x-1}{k})^k \geq 1+k\frac{x-1}{k} = x$$

归纳完成，命题成立。

命题 3. 等差求和公式推导：首项为 a_1，公差为 q，项数为 n，求等差序列的求和公式，即 S_n 的表达式。

证明：

倒序相加法：

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1+q) + \cdots + (a_1+(n-1)q) \end{aligned}$$

倒序写一遍

$$S_n = (a_1+(n-1)q) + (a_1+(n-2)q) + cdots + a_1$$

将两式相加：

$$\begin{aligned} 2S_n &= (2a_1+(n-1)q) + (2a_1+(n-2)q) + cdots + (2a_1+q) \\ 2S_n &= n(2a_1+(n-1)q) \\ 2S_n &= n(a_1+a_1+(n-1)q) \\ 2S_n &= n(a_1+a_n) \\ S_n &= \frac{n(a_1+a_n)}{2} \end{aligned}$$

命题 4. 等比求和公式推导：首项为 a_1，公比为 q，项数为 n，求等比序列的求和公式，即 S_n 的表达式。

证明：

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} q
\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
qS_n &= a_1 q + a_2 q + \cdots + a_n q = a_2 + a_3 + \cdots + a_n q
\end{aligned}$$

两式子相减

$$\begin{aligned}
(1-q)S_n &= a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n \\
S_n &= \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \\
&= a_1 \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

命题 5. 二项式展开公式*:*
对正整数 n，有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

其中

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

命题 6.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

命题 7.

$$n!<\sum_{p=1}^{n}p!<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!$$