基础知识

张志聪

2026 年 2 月 25 日

说明 1. 矩阵范数 $\|\cdot\|_F$ 满足相容性，其中 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵。

证明：

对任意 $A\in M_{m\times l}, B\in M_{l\times n}$，并利用复数的模满足：

$$|x+y|\le|x|+|y|$$

我们有

$$\begin{aligned}\|AB\|_F&=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{i1}b_{1j}|+|a_{i2}b_{2j}|+\cdots+|a_{il}b_{lj}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

利用柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{i1}b_{1j}|+|a_{i2}b_{2j}|+\cdots+|a_{il}b_{lj}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{i1}|^2+|a_{i2}|^2+\cdots+|a_{il}|^2)(|b_{1j}|^2+|b_{2j}|^2+\cdots+|b_{lj}|^2)\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\|A\|_F\|B\|_F\end{aligned}$$

命题得证。