

## 2.1

张志聪

2026 年 2 月 12 日

说明 1. 定理 1 (加法的相对舍入误差定理) 证明过程中

$$\begin{aligned} & \{[S_k(1 + \rho_k) + x_{k+1}](1 + \delta_k) - (S_k + x_{k+1})\}/S_{k+1} \\ &= \delta_k + \rho_k(S_k/S_{k+1})(1 + \delta_k) \end{aligned}$$

证明：

$$\begin{aligned} & \{[S_k(1 + \rho_k) + x_{k+1}](1 + \delta_k) - (S_k + x_{k+1})\}/S_{k+1} \\ &= \{(S_k + S_k\rho_k + x_{k+1})(1 + \delta_k) - S_k - x_{k+1}\}/S_{k+1} \\ &= \{S_k + S_k\rho_k + x_{k+1} + S_k\delta_k + S_k\rho_k\delta_k + x_{k+1}\delta_k - S_k - x_{k+1}\}/S_{k+1} \\ &= \{S_k\rho_k + S_k\delta_k + S_k\rho_k\delta_k + x_{k+1}\delta_k\}/S_{k+1} \\ &= \{\delta_k(S_k + x_{k+1}) + \rho_k S_k(1 + \delta_k)\}/S_{k+1} \\ &= \{\delta_k S_{k+1} + \rho_k S_k(1 + \delta_k)\}/S_{k+1} \\ &= \delta_k + \rho_k(S_k/S_{k+1})(1 + \delta_k) \end{aligned}$$

说明 2. 例 3 中“小数点后面第  $m$  位是正确的”数学定义（绝对误差限与精确到小数点后  $m$  位）：

近似值  $\tilde{x}$  精确到小数点后第  $m$  位（或者说第  $m$  位小数是正确的），如果其绝对误差

$$|x - \tilde{x}| < 0.5 \times 10^{-m}$$

此处  $x$  是精确值。这意味着如果我们要把精确值  $x$  四舍五入到小数点

后  $m$  位，结果必定与  $\tilde{x}$  四舍五入到小数点后  $m$  位一致。